

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

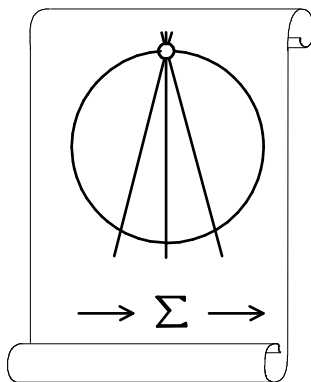
Год двадцать шестой

№ 2 (102)

апрель - июнь 2022 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 2 (102), 2022 г.

© “Математическое образование”, составление, 2022 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2022 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 15.07.2022 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулеповым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (102), апрель – июнь 2022 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

- Р. А. Акбердин, Н. С. Горшков.* Признаки равенства треугольников и экстремальные задачи 2

Студентам и преподавателям математических специальностей

- М. Р. Бортковская, Т. Р. Степанова.* Два доказательства инвариантности ротора относительно замены базиса: пример реализации взаимосвязи курсов физики и математики 9
- В. М. Федосеев.* Математические олимпиады и конкурсы в Пензенском технологическом университете 13

Образовательные инициативы

- А. А. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова.* Олимпиада школьников "ТИИМ - Технологии. Интеллект. Информатика. Математика" 2021/2022 19

Приложения математики

- Т. Н. Мачурина.* Теория хаоса и фракталы в психотерапии и клинико-психологическом консультировании 38

Из истории математики

- А. Н. Ковалев.* Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царства 43

Информация

- От редакции.* Успех статьи нашего автора 55
- От редакции.* Ушёл из жизни Александр Юрьевич Эвнин (24.09.1960 – 19.11.2020) 57

Признаки равенства треугольников и экстремальные задачи

Р. А. Акбердин, Н. С. Горшков

Задачи на нахождение максимумов и минимумов на протяжении всего периода существования математики занимали особое место в развитии данной науки, поскольку за всю историю человечества накопилось большое количество разнообразных задач на эту тему в сфере геометрии, алгебры, физики и других дисциплин, и решение которых, было основано на вычислении максимумов и минимумов различных величин. С самыми элементарными экстремальными задачами учащиеся знакомятся еще в школе.

В данной статье экстремальные задачи, относящиеся к геометрии треугольников, сводятся к исследованию функции одной переменной — одного из параметров треугольника — при помощи производной.

Стоит отметить, что геометрические задачи на нахождение экстремумов далеко не всегда могут решаться только с использованием элементарных средств, и поэтому для этого используется аппарат дифференциального исчисления. Несмотря на то, что решение большого класса практических задач так или иначе связано с вычислением наибольшего и наименьшего значений, все же данная тема остается недостаточно раскрытой в курсе школьной математики, сводясь лишь к изучению нескольких способов применения производной для исследования функций в отрыве от решения каких-либо практических задач или геометрических задач. Именно поэтому актуальность данной темы является достаточно высокой сегодня, и дальнейшие исследования в этой области можно считать крайне важными и необходимыми [2, 3, 4, 5].

Рассмотрим схему постановки и решения экстремальных задач на нахождение наибольших и наименьших значений геометрических величин, связанных с ключевой геометрической фигурой — треугольником, и примеры, **иллюстрирующие** реализацию этой схемы.

1. Постановка задачи (нахождение функциональной зависимости).

1.1. Выделяются три параметра треугольника: d_1, d_2, d_3 (основных или дополнительных), которые определяют признак равенства треугольников.

Пример 1. Признак равенства треугольников по трем сторонам, т.е. d_1, d_2, d_3 — стороны треугольника ($d_1 = a, d_2 = b, d_3 = c$ и для определенности $a \geq b$).

1.2. Один из параметров d_1, d_2, d_3 выделяется в качестве независимой переменной x .

Пример 1. Сторона $c = x$.

1.3. Один из параметров треугольника — β , отличный от d_1, d_2, d_3 , рассматривается в качестве зависимой переменной y .

Пример 1.1. $y = S_{\Delta}$.

1.4. Параметр β выражается через d_1, d_2, d_3 . Т.е. находим функцию $y = \beta(x)$

Пример 1.1. $S(x) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+x}{2}$. После преобразований получим:
$$S(x) = \frac{\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)}}{4}.$$

2. Исследование функции.

Будем придерживаться традиционной схемы исследования функции.

2.1. Находим область определения функции (естественную область определения).

Пример 1. $a - b < x < a + b$, т.е. $D(x) = (a - b; a + b)$, ($a \geq b$).

2.2. Находим пределы функции на «концах» области определения функции.

$$\lim_{x \rightarrow a-b} S(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a+b} S(x) = 0.$$

2.3. Находим критические точки, т.е. точки, в которых производная равна 0 или не существует.

$$S'_{\Delta}(x) = \frac{-4x^3 + 4(a^2 + b^2)x}{8\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2}}.$$

Учитывая область определения функции, получаем единственную критическую точку: $x_{kp} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Примечание. Очевидно, что рассматриваемая функция является непрерывной на всей области определения, т.е. при любом значении $0 < S < \frac{ab}{2}$ существует хотя бы одно значение аргумента $x_0 \in D(x)$, что $S(x_0) = S$. Это примечание справедливо и для последующих примеров этой работы.

2.4. Находим интервалы монотонности функции и точку экстремума.

На интервале $(a - b; \sqrt{a^2 + b^2})$ имеем $S'_{\Delta} > 0$, следовательно, функция $S_{\Delta}(x)$ возрастает. На интервале $(\sqrt{a^2 + b^2}; a + b)$ имеем $S'_{\Delta} < 0$, следовательно, функция $S_{\Delta}(x)$ убывает, и критическая точка является точкой максимума, т.е. $x_{max} = \sqrt{a^2 + b^2}$, и поэтому максимальная площадь треугольника равняется $S_{max} = \frac{ab}{2}$. Сформулируем полученный результат.

Следствие 1. Среди всех треугольников ABC с двумя заданными сторонами a и b наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с катетами a и b , а также $S_{max} = \frac{ab}{2}$.

Примечание. Этот результат является достаточно очевидным, он может быть получен, например, с использованием формулы для нахождения площади треугольника: $S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2}$.

2.5. Находим значения функции в нескольких точках области определения.

Пример 1.

$x_1 = b$, если $b > \frac{a}{2}$. $S(x_1) = S(b) = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{4}$. Т.е. найдена площадь равнобедренного треугольника ABC , где $AC = AB = b$ и $BC = a$.

$x_2 = a$. $S(x_2) = S(a) = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$. Т.е. найдена площадь равнобедренного треугольника ABC , где $AB = BC = a$ и $AC = b$.

Примечание. В классическую схему исследования функции мы не включили пункты, связанные с нахождением точек перегиба и промежутков выпуклости и вогнутости, а также нахождение асимптот.

2.6. Строим схематически график функции $y = S(x)$ (рисунок 1).

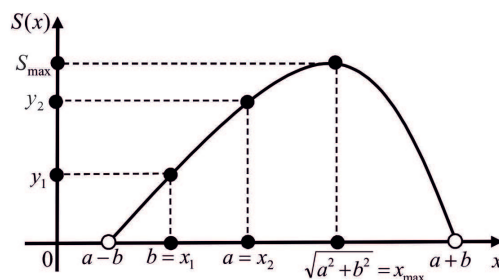


Рис. 1. Схематический график функции $y = S(x)$

Примечание. Для функции $y = S(x)$ не существует обратной функции так как функция $y = S(x)$ не является монотонной, т.е. одному значению y может соответствовать два различных значения x . Т.е. с данными параметрами треугольника a, b, S могут существовать две различные стороны c , т.е. два не равных треугольника. Следовательно, тройка параметров a, b, S не определяет признак равенства треугольников.

Следствие 2. По набору параметров a, b, S , т.е. по двум сторонам и площади предложение о равенстве треугольников не верно [1, с. 64].

Таким же образом можно построить и исследовать функцию для ряда параметров треугольника (основных и дополнительных): $\angle A; \angle B; \angle C; m_a; m_b; m_c; h_a; h_b; h_c; l_a; l_b; l_c; r; R; 2p$.

Пример 2. Построим и исследуем функцию для угла $\angle C = \gamma$. Используя теорему косинусов, получаем: $y = \cos \gamma(x) = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}$. Проведем исследование этой функции по рассмотренной выше схеме.

2.1. Область определения $D(x) = (a - b; a + b)$ (для определенности $a \geq b$).

2.2. Пределы функции на «концах» области определения:

$$\lim_{x \rightarrow a-b} \cos \gamma(x) = 1, \text{ тогда } \gamma(a-b) = 0. \quad \lim_{x \rightarrow a+b} \cos \gamma(x) = -1, \text{ тогда } \gamma(a+b) = \pi.$$

2.3. Находим критические точки. $(\cos \gamma(x))' = -\frac{x}{ab}$, так как $x = 0$ не принадлежит области определения, то критических точек нет.

2.4. Так как $(\cos \gamma(x))' = -\frac{x}{ab} < 0$ на $(a - b; a + b)$ то $\cos \gamma(x)$ убывает, а, следовательно, $\gamma(x)$ возрастает от 0 до π , и точек экстремума нет.

2.5. Найдём значения функции в точках $x_1 = b$ и $x_2 = a$.

$\cos \gamma(x_1) = \frac{a}{2b}$ и $\gamma(b) = \arccos \frac{a}{2b}$. Т.е. для равнобедренного треугольника ABC , где $AC = AB = b$ и $BC = a$, $\cos \gamma(b) = \frac{a}{2b}$, $\cos \gamma(x_2) = \frac{b}{2a}$ и $\gamma(a) = \arccos \frac{b}{2a}$. Т.е. для равнобедренного треугольника ABC , где $AB = BC = a$ и $AC = b$, $\cos \gamma(a) = \frac{b}{2a}$.

2.6. Строим схематически график функции $y = \gamma(x)$ (рисунок 2).

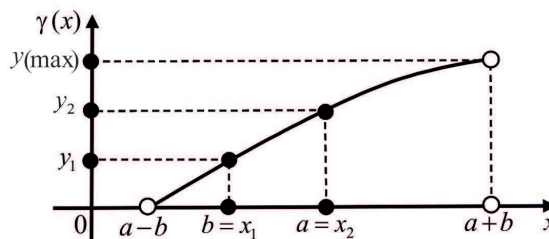


Рис. 2. Схематический график функции $y = \gamma(x)$

Так как функция $y = \gamma(x)$ является монотонной, то для нее существует обратная функция. Следовательно, тройка элементов a, b, γ определяет признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

Пример 3. Построим и исследуем функцию для высоты h_c . Используя формулу для площади треугольника, получаем $h_c(x) = \frac{2S(x)}{x}$. Используя найденное в примере 1.1. выражение для $S(x)$, получаем: $h_c(x) = \frac{\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2}}{2x}$. Проведем исследование этой функции по рассмотренной выше схеме.

2.1. Область определения $D(x) = (a - b; a + b)$ (для определенности $a \geq b$).

2.2 $\lim_{x \rightarrow a-b} h_c(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a+b} h_c(x) = 0$ (так как $\lim_{x \rightarrow a-b} S(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a+b} S(x) = 0$).

$$2.3 \quad h'_c(x) = \frac{2S'(x)x - 2S(x)}{x^2} = \frac{-2x^4 + 2(a^2 - b^2)}{4x^2 \sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2}}$$

Тогда с учетом области определения $x_{kp} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2.4. На интервале $(a - b; \sqrt{a^2 - b^2})$ имеем $h'_c(x) > 0$, следовательно, функция $h_c(x)$ возрастает. На интервале $(\sqrt{a^2 - b^2}; a + b)$ имеем $h'_c(x) < 0$, следовательно, функция $h_c(x)$ убывает. Критическая точка является точкой максимума, т.е. $x_{\max} = \sqrt{a^2 - b^2}$ и $h_c(\max) = h_c(\sqrt{a^2 - b^2}) = b$.

2.5. Найдем значение функции в точках $x_1 = b$ и $x_2 = a$ ($b \geq \frac{a}{2}$).

$$h_c(x_1) = h_c(b) = \frac{2S(b)}{b} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}; \quad h_c(x_2) = h_c(a) = \frac{2S(a)}{a} = \frac{b\sqrt{4b^2 - a^2}}{2a}.$$

2.6. Строим схематически график функции $y = h_c(x)$ (рисунок 3).

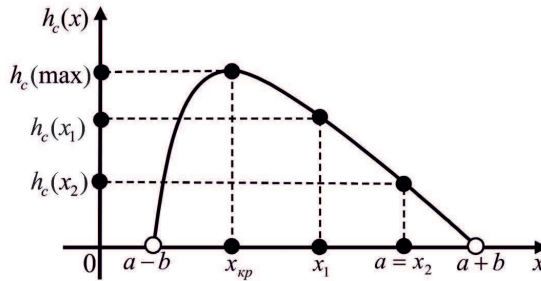


Рис. 3. Схематический график функции $y = h_c(x)$

Сформулируем полученные результаты.

Следствие 3. Среди всех треугольников ABC с двумя заданными сторонами a и b ($a \geq b$) наибольшую высоту, проведенную из вершины C , имеет прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A , а также катетами b и $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Примечание. Этот результат является достаточно очевидным, он может быть получен исходя из простейших геометрических соображений (с использованием неравенства треугольника для треугольника ACC_1 , где C_1 — основание высоты, проведенной из вершины C).

Следствие 4. Тройка элементов a, b, γ не определяет признак равенства треугольников.

Пример 4. Построим и исследуем функцию для площади S по следующему набору параметров треугольника: a, b, m_a . В качестве независимой переменной выбираем $m_a = x$, тогда по известной формуле третья сторона c треугольника выражается как $c(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + a^2 - 2b^2}{2}}$. Тогда, используя найденное в примере 1.1 выражение для $S(x)$ и заменив x на $c(x)$, получаем, что

$$S(x) = \frac{4x^2 \sqrt{-c^4 + 2(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}}{4} =$$

$$\frac{1}{8} \sqrt{-(4x^2 + a^2 - 2b^2)^2 + 4(4x^2 + a^2 - 2b^2)(a^2 + b^2) - 4(a^2 - b^2)^2}.$$

Проведем исследование этой функции по рассмотренной выше схеме.

2.1. Область определения $D(x) = \left(\frac{a}{2} - b; \frac{a}{2} + b\right)$ (для определенности $\frac{a}{2} \geq b$).

2.2. Находим пределы функции на «концах» области определения функции.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2} - b} S(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{a}{2} + b} S(x) = 0.$$

2.3. Находим критические точки.

Учитывая область определения функции, получаем единственную критическую точку: $x_{kp} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$.

2.4. Находим интервалы монотонности функции и точку экстремума. На интервале $(\frac{a}{2} - b; \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2})$ имеем $S'(x) > 0$, следовательно, функция $S(x)$ возрастает. На интервале $(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}; \frac{a}{2} + b)$ имеем $S'(x) < 0$, следовательно, функция $S(x)$ убывает, и критическая точка является точкой максимума, т.е. $x_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$, и поэтому максимальная площадь треугольника равняется $S_{\max} = \frac{ab}{2}$.

2.5. Находим значения функции в нескольких точках области определения.

$x_1 = b$, если $b > \frac{a}{4}$; $S(x_1) = S(b) = \frac{1}{8}\sqrt{-5a^4 + 4a^2 + 4a^2b^2 + 8b^2}$.

$x_2 = \frac{a}{2}$. $S(x_2) = S(\frac{a}{2}) = \frac{1}{8}\sqrt{-a^4 + 10a^2b^2 - 9b^4}$.

2.6. Строим схематически график функции $y = S(x)$ (рисунок 4).

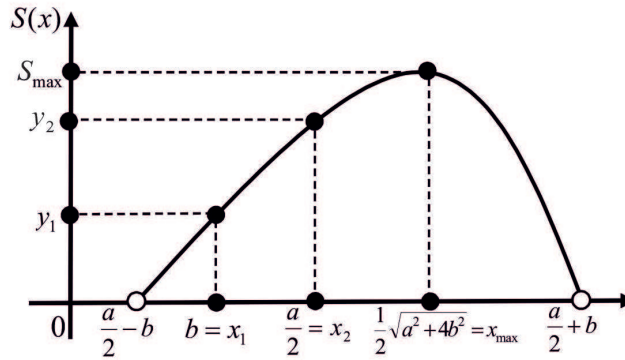


Рис. 4. Схематический график функции $y = S(x)$

Следствие 5. Среди всех треугольников ABC с двумя заданными сторонами a и b ($\frac{a}{2} \geq b$) наибольшую медиану $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$, проведенную к стороне a , имеет прямоугольный треугольник с катетами a и b .

Следствие 6. Тройка элементов a, b, m_a не определяет признак равенства треугольников.

Пример 5. Построим и исследуем функцию для радиуса R — описанной окружности. Используя известную формулу, получаем $R(x) = \frac{abx}{4S(x)}$ или

$$R(x) = \frac{abx}{4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2}}.$$

Проведем исследование этой функции по рассмотренной схеме.

2.1. Область определения $D(x) = (a - b; a + b)$ (для определенности $a \geq b$).

2.2. $\lim_{x \rightarrow a-b} R(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a+b} R(x) = \infty$, т.е. прямые $x = a - b$ и $x = a + b$ — вертикальные асимптоты.

2.3. $R'(x) = \frac{4abS(x)x - 4abxs'(x)}{(4S(x))^2}$. После подстановки $S(x)$ и $S'(x)$, а также преобразований получаем: $R'(x) = \frac{2ab(x^4 - (a^2 - b^2)^2)}{2(\sqrt{-x^4 + 2(a^2 + b^2)x^2 - (a^2 - b^2)^2})^{\frac{3}{2}}}$.

Тогда с учетом области определения $x_{kp} = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2.4. На интервале $(a - b; \sqrt{a^2 - b^2})$ имеем $R'(x) < 0$, следовательно, функция $R(x)$ убывает. На интервале $(\sqrt{a^2 - b^2}; a + b)$ имеем $R'(x) > 0$, следовательно, функция $R(x)$ возрастает. Критическая точка является точкой минимума, т.е. $x_{\min} = \sqrt{a^2 - b^2}$ и $R_{\min}(x) = \frac{a}{2}$.

2.5. Найдем значение функции в точках $x_1 = a$ и $x_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$R(a) = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}; R(\sqrt{a^2 + b^2}) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

2.6. Строим схематически график функции $y = R(x)$ (рисунок 5).

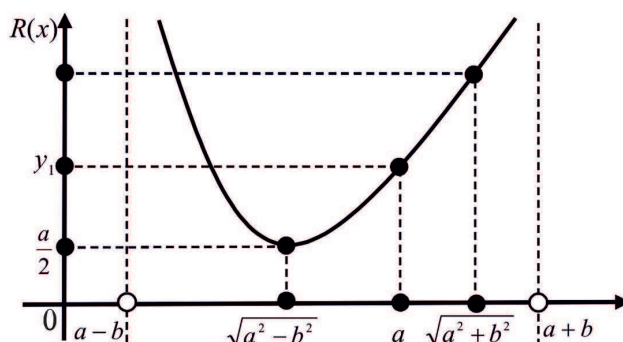


Рис. 5. Схематический график функции $y = R(x)$

Следствие 7. Среди всех треугольников ABC с двумя заданными сторонами a и b ($a \geq b$) наименьший радиус описанной окружности имеет прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A , а также катетами b и $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Следствие 8. Тройка параметров a, b, R не определяет признаки равенства треугольников.

Можно реализовать предложенную схему построения и исследования функций также на основе других признаков равенства треугольников. Приведем сведения о наборах параметров треугольника, определяющих признаки равенства треугольников [1]. Эти сведения классифицируем в зависимости от числа основных параметров (сторон и углов), входящих в составы этих троек.

1. Все три элемента — основные (3 набора). Например, $c, \angle A, \angle B$.
2. Один элемент — дополнительный (27 наборов). Например, $c, \angle C, m_c$.
3. Два элемента — дополнительные (45 наборов). Например, c, m_a, m_b .
4. Три дополнительных элемента (5 наборов). Например, h_a, m_b, m_c .

Приведенный перечень (80 наборов) не претендует на полноту. Исследование других наборов параметров и в первую очередь из трех дополнительных наборов параметров ждет своего продолжения.

Приведенные наборы могут послужить основой для реализации рассмотренной выше схемы построения и исследования функций параметров треугольника. Их можно использовать для организации поисковой деятельности учащихся старших классов, а также будущих учителей математики.

Проведенные исследования функций параметров треугольника могут послужить основой для постановки различных циклов задач. Например, сравнения значений функций для пар значений аргументов из области определения.

Пример 6. Даны два треугольника с двумя равными сторонами a и b , а c_1 и c_2 — неизвестные третьи стороны, а также известно, что $c_1 > c_2$ и $c_2 < \sqrt{a^2 - b^2}$. Сравните радиусы R_1 и R_2 окружностей описанных около данных треугольников.

Из схематического графика функции (рисунок 5) видно: так как на интервале $(a - b; \sqrt{a^2 - b^2})$ функция убывает, то $R_2 > R_1$, а на интервале $(\sqrt{a^2 - b^2}; a + b)$ $R_1 > R_2$.

Вдумчивые ученики смогут предложить и другие циклы динамических задач. Также можно предложить учащимся, предвзяв исследование функций, экспериментально изучить результаты, используя динамические треугольники.

Стоит отметить, что использование экстремальных задач в обучении геометрии позволяет развивать у учащихся творческую активность, интерес к исследовательской работе и в целом формировать исследовательскую культуру, и, помимо всего прочего, способствует углублению, расширению и обогащению знаний учащихся по математике. Также решение подобных задач позволит продемонстрировать школьникам возможности различного применения изучаемой ими теории на практике, в различных сферах человеческой деятельности, связанных с экстремальными задачами.

Литература

- [1] Акбердин Р.А., Шмигирилова И.Б. Дополнительные главы элементарной геометрии. Признаки равенства треугольников: Учебно-методическое пособие. - Петропавловск: СКГУ им. М. Козыбаева, 2016. - 205 с.
- [2] Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом: Пособие для учащихся 9 и 10 кл. - М.: Просвещение, 1979. - 128 с.
- [3] Столетняя Т.А., Конакова Т.В. Экстремальные задачи в школьном курсе геометрии // Теория и методика обучения математике, физике, информатике. - 2001. - Том 1. - №1 (1). - С. 290-300.
- [4] Тимошенко. Т.А., Коростелева Д.В. Курс по выбору «Решение экстремальных задач геометрии» как средство повышения качества математической подготовки студентов» // Ученые заметки ТОГУ. - 2016. - Том 7. - № 4. - С. 554-559.
- [5] Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. 2-е изд., исправленное. - М.: МЦНМО, 2006. - 200 с.

*Акбердин Рифкат Абдулович,
Доцент кафедры «Математика и информатика»
факультета математики и естественных наук
НАО «Северо-Казахстанский университет
им. М. Козыбаева»,
Петропавловск, Казахстан*

E-mail: akberdin47@mail.ru

*Горшков Никита Сергеевич,
Магистрант кафедры «Математика и информатика»
факультета математики и естественных наук
НАО «Северо-Казахстанский университет
им. М. Козыбаева»,
Петропавловск, Казахстан*

E-mail: nikitos_blade@mail.ru

Два доказательства инвариантности ротора относительно замены базиса: пример реализации взаимосвязи курсов физики и математики

М. Р. Бортковская, Т. Р. Степанова

Для большинства студентов младших курсов и математическое понятие векторного произведения, и запись векторного произведения в координатах новы. Это вызывает трудности на занятиях по физике и математике. Поэтому в преподавании этих предметов возникает общая задача помочь студентам преодолеть эти трудности, одновременно появляется и конкретная возможность показать взаимосвязь физики и математики. В статье на примере двух разных доказательств инвариантности ротора относительно замены базиса продемонстрирована методика обучения векторным вычислениям в координатах; дано методическое обоснование необходимости овладения этой техникой для решения задач по физике; показана возможность применения изучаемой методики для создания межпредметной связи между математикой и физикой в учебном процессе технических и физических направлений обучения студентов вузов.

Использование векторного произведения векторов и координатные представления векторов во многих случаях упрощают решения практических и инженерных задач. Но студенты привыкли со школьной скамьи к форме записи физических законов без использования векторного произведения. Это, в первую очередь, законы механики, связанные с вращением тел и свойствами магнитного поля. Для определения направления действия силы в этих случаях используют исторически сложившиеся правила “Буравчика”, “Левой руки” и т.п. Студенты смотрят на свои руки, пытаются определить направление силы, а преподаватель объясняет, что уже более ста лет как появилась возможность описывать силы и моменты сил, используя векторные произведения. Курсы математики и физики во многом согласованы в педагогической практике благодаря нашим предшественникам, но наша задача — донести эту связь до студентов. Учитывая, что физические законы обычно записывают в общей форме, то есть без использования координат, например, сила Ампера $\partial \vec{F} = I \partial \vec{l} \times \vec{B}$ или момент импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, нужно обращать внимание студентов, что для использования этих и подобных им формул для расчетов мы переводим их в координатную форму. При этом мы можем выбирать систему координат так, чтобы упростить вычисления. Надо отметить, что при решении студентами задач из широко распространенного задачника [3] даже вычисление скалярного произведения векторов, записанных в координатной форме, порой вызывает затруднение.

Таким образом, для решения задач, в которых используются законы физики, записанные в векторной форме, необходимо использовать алгоритмы вычисления, которые имеют математические основы и доказательства.

Ниже приведены два доказательства инвариантности ротора относительно замены одного ортонормированного декартова базиса в пространстве на другой (иными словами, относительно замены одной прямоугольной декартовой системы координат на другую). Сам факт инвариантности ротора объясняется в курсе физики, исходя из физического смысла ротора, а также и в курсе математики может быть доказан без применения методов векторной и линейной алгебры. Но доказательства в духе нижеприведенных демонстрируют возможности линейной алгебры и, в частности, метода

координат, при работе с векторными физическими величинами. Приступая к обсуждению этих доказательств, в качестве определения ротора векторного поля принимаем равенство

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

— это ротор векторного поля \vec{a} в точке с координатами (x, y, z) , координаты точки указаны в некоторой заданной прямоугольной декартовой системе; здесь считаем, что $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, производные

берутся в указанной точке, $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$, первая строчка данного определителя — век-

торы координатного декартова базиса, соответствующего заданной системе координат; последняя строчка — координаты в базисе векторного поля $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в данной точке.

Трёхмерное вещественное линейное пространство со стандартным скалярным произведением ниже обозначено как E^3 . Заметим, что скалярное произведение, как хорошо известно, инвариантно относительно замены одного ортонормированного базиса на другой (например, см. [2]).

Перейдем к двум доказательствам инвариантности ротора, после рассмотрения самих доказательств обсудим, как их можно использовать для решения обозначенной выше методической проблемы.

Утверждение. *Ротор непрерывно дифференцируемого векторного поля в произвольной точке пространства E^3 инвариантен относительно замены одного ортонормированного базиса на другой при сохранении ориентации базиса (то есть ротор в данной точке не меняется при ортогональном преобразовании координат с сохранением ориентации системы координат).*

Доказательство 1. (Данное доказательство содержится в книге [1], ниже приведено в несколько измененной записи, удобной для обсуждения в контексте данной статьи.)

Пусть Q — матрица (ортогональная!) перехода от ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к ортонормированному базису $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$, векторное поле $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = a_{x'} \vec{i}' + a_{y'} \vec{j}' + a_{z'} \vec{k}'$, координаты поля в каждом из базисов — скалярные функции трех переменных, например, $a_x = a_x(x, y, z)$ — первая координата поля в «нештрихованном» базисе, $a_{x'} = a_{x'}(x', y', z')$ — первая координата поля в «штрихованном» базисе и т.д. Используя тот факт из дифференциального исчисления функций нескольких переменных, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot Q, \quad (1)$$

алгебраический смысл матрицы перехода и ее ортогональность ($Q^{-1} = Q^T$), получают

$$(\vec{\nabla} \times \vec{a})' = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial z'} \\ a_{x'} & a_{y'} & a_{z'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \cdot Q = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot |Q|$$

Последнее равенство следует из того, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, а поскольку матрица Q ортогональная и ориентация системы координат не меняется, то $|Q| = 1$, и доказательство закончено.

Доказательство 2. Используя равенство $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$, как и выше, в качестве определения ротора в каждой произвольной системе координат, и замечая, что в силу равенства (1) координаты «вектора» $\vec{\nabla}$ при замене базиса преобразуются по тому же закону, что и координаты любого вектора, мы видим: достаточно убедиться, что при ортогональной замене базиса координаты векторного произведения двух заданных векторов изменяются по тому же закону (с помощью умножения на матрицу перехода), что и координаты любого вектора.

Пусть \vec{a}, \vec{b} — два произвольных вектора в пространстве E^3 ; определим векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ как вектор $\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$, где $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — какой-либо ортонормированный базис пространства

E^3 , $\{x_a, y_a, z_a\}, \{x_b, y_b, z_b\}$ — координаты векторов \vec{a} и \vec{b} в данном базисе. Пусть $\{x'_a, y'_a, z'_a\}, \{x'_b, y'_b, z'_b\}$ — координаты этих векторов в ортонормированном базисе $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$, матрица Q (ортогональная, $|Q| = 1$) — матрица перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Покажем, что координаты вектора

$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_a & y'_a & z'_a \\ x'_b & y'_b & z'_b \end{vmatrix}$ в базисе $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ связаны с координатами вектора \vec{c} в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ равенством

$C = Q \cdot C'$, где C, C' — столбцы координат векторов \vec{c} и \vec{c}' в “нестрихованном” и “штрихованном” базисах. (Что и означает, что это один и тот же вектор!)

Для произвольных ненулевых и неколлинеарных векторов \vec{a}, \vec{b} выберем ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ следующим образом: вектор \vec{i} сонаправлен вектору \vec{a} , вектор \vec{j} компланарен векторам \vec{a}, \vec{b} , тогда вектор \vec{k} полностью определен выбором векторов \vec{i}, \vec{j} при условии, что тройка $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ правая. Тогда координаты векторов \vec{a}, \vec{b} в выбранном базисе имеют вид, соответственно: $\{x_a, 0, 0\}$ и $\{x_b, y_b, 0\}$; отсюда находим $C = (0, 0, y_a y_b)^T$. Пусть матрица Q (ортогональная, $|Q| = 1$) — матрица перехода от выбранного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к некоторому базису $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Обозначим элементы матрицы $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^3$ и проверим равенство $Q^T C = C'$. Левая часть этого равенства есть столбец $Q^T C = x_a y_b (q_{31}, q_{32}, q_{33})^T$; правую часть C' получим, вычислив по правилу преобразования координат “новые” координаты $\{x'_a, y'_a, z'_a\}, \{x'_b, y'_b, z'_b\}$ векторов \vec{a}, \vec{b} и найдя координаты \vec{c}' в базисе $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ согласно правилу вычисления векторного произведения в ортонормированном базисе, записанному с помощью определителя. Произведя эти вычисления, увидим: $C' = x_a y_b (d_{31}, d_{32}, d_{33})^T$, где d_{ij} — алгебраические дополнения элементов q_{ij} в ортогональной матрице Q . Легко доказывается (для ортогональной матрицы любого порядка), что $d_{ij} = |Q| \cdot q_{ij}$, поэтому для *выбранного* базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и произвольного $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ доказательство закончено.

Пусть теперь \vec{a}, \vec{b} — произвольные векторы (ненулевые, неколлинеарные); $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и $\{\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''\}$ два произвольных ортонормированных базиса; $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ — ортонормированный базис, *построенный для данных векторов \vec{a}, \vec{b} так, как сказано выше*. Если Q_1 — матрица перехода от базиса $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ к $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, а Q_2 — матрица перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к $\{\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''\}$, то $Q_1 Q_2$ — матрица перехода от базиса $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ к $\{\vec{i}'', \vec{j}'', \vec{k}''\}$. Дважды применяя полученный выше результат, завершаем доказательство для двух произвольных ортонормированных базисов.

(Проведение этого доказательства непосредственным преобразованием координат для двух произвольных базисов приводит к очень громоздким промежуточным формулам, неудобным для восприятия.)

Методический комментарий. В доказательстве 1 показано, что ротор поля \vec{a} , вычисленный в данной точке в разных ортонормированных базисах, — это *один и тот же вектор*. Координаты этого вектора в разных базисах в общем случае, конечно, разные, одни через другие получаются по тому же закону (умножением на матрицу перехода), что и координаты в разных базисах всякого другого вектора.

Для двух *геометрических векторов* тот факт, что координаты их векторного произведения при замене базиса изменяются по общему для всех векторов закону, следует из геометрического определения векторного произведения: оно однозначно определяется своими сомножителями, то есть это вектор не хуже всякого другого. Но непосредственно алгебраическими вычислениями продемонстрировать, как преобразуются координаты векторного произведения при ортогональном преобразовании координат сомножителей, — не такое уж бесполезное упражнение. Оно активизирует навыки, полученные при изучении векторной и линейной алгебры. К сожалению, даже в добротном и очень удобном для изучения курсе аналитической геометрии и линейной алгебры [2] в качестве упраж-

нения предлагается проверить, что *координаты* векторного произведения инвариантны при замене одного ортонормированного базиса на другой (глава 2 § 2.9). Доказательство 2 помогает развеять этот предрассудок.

Оба приведенных доказательства помогают закрепить навыки векторных вычислений; сравнение этих доказательств друг с другом учит четко различать вектор и его координаты.

Сильные студенты могут самостоятельно справиться с проведением таких доказательств после изучения соответствующих разделов алгебры и математического анализа (дифференциального исчисления функций многих переменных). Расположение материала в курсе математики для технических направлений подготовки обычно позволяет обратиться к обсуждаемой теме, когда эти разделы уже полностью изучены.

Доказательство 2 требует выбора системы координат, удобной для вычислений.

Все перечисленные математические факты, методы и приемы вычислений необходимы студенту для изучения физики и математики в их взаимосвязи, что аргументировано в начале данной статьи.

Все это говорит о том, что рассмотрение таких доказательств способствует решению методической проблемы, обозначенной в начале статьи.

Вывод. Обсуждение в курсе математики приведенных доказательств инвариантности ротора относительно замены базиса дает студентам возможность закрепить математические понятия и навыки, необходимые для решения физических задач с векторными величинами, глубже осознать универсальное значение для физики и математики таких математических приемов и умений, как выбор удобной системы координат, векторные вычисления в координатах, применение свойств определителей, дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Приведенные в статье доказательства могут быть методически оправданно рассмотрены на лекциях по высшей математике либо на практических занятиях (как задачи на доказательство).

Литература

- [1] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 424 с.
- [2] Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учеб. пособие. 3-е изд., испр. и доп. - М.: МФТИ, 2011. - 544 с.
URL: <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/Umnov-AnGeom-i-LinAl.pdf>
- [3] Иродов И.Е. Задачи по общей физике: учебное пособие. 9-е изд., стер. - СПб.: Издательство "Лань", 2005. - 416 с.

*Бортковская Мария Романовна,
доцент кафедры высшей математики СПбПУ,
кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: mbort@mail.ru

*СПбПУ Степанова Татьяна Рудольфовна,
доцент кафедры физики СПбПУ,
доцент, кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: uranova.marina@yandex.ru

Математические олимпиады и конкурсы в Пензенском технологическом университете

В. М. Федосеев

Привлечение студентов к решению нестандартных математических задач автор считает одним из актуальных направлений педагогической работы преподавателя. Важной не только в целях повышения качества математического образования, но и в целях улучшения общей профессиональной подготовки студентов.

Уже апробированной организационной формой этого вида работы являются олимпиады и конкурсы. В статье рассматриваются наиболее интересные задачи, предлагавшиеся в течение ряда лет студентам Пензенского государственного технологического университета. Некоторые задачи даны с готовыми решениями, другие предлагаются для самостоятельного исследования.

Введение

Не секрет, что интерес к математике, как в средней школе, так и в студенческой среде ослабевает. По-видимому, ныне это можно отнести не только к математике, но и ко многим другим наукам, что дало повод философу А. Пятигорскому для высказывания: “Не сезон для мысли!”. При всём при том находятся люди, которым свойственно противоположное. Они получают удовольствие от решения трудных математических задач и стремятся это делать. Как подтверждает собственный педагогический опыт автора, таких людей не так уж и мало, в чём можно убедиться, предложив студентам так называемую задачу на сообразительность.

Склонность к математическим формам мышления, знание толка в неожиданном обороте мысли, по-видимому, является естественным свойством человеческой натуры. Только в разные времена это свойство проявляется по-разному. По словам английского математика Г.Х. Харди, “способность к восприятию математики распространена в человечестве, пожалуй, даже в большей степени, чем способность получать удовольствие от приятной мелодии, она присуща огромному большинству”.

Поддержание интереса к учебному предмету — это актуальная педагогическая проблема. Одной из апробированных организационных форм работы здесь может стать олимпиадное движение. Точнее систематическая работа, связанная с привлечением студентов к решению нестандартных задач, включающая методическую подготовку и элементы обучения, завершением которой является то, что называют собственно математической олимпиадой. Систематичность составляет существо дела и неперемное условие успешности данного вида работы. Олимпиада — это праздник, которому должны предшествовать трудовые будни и, без которых он не имел бы смысла.

Главная цель настоящей статьи в том, чтобы поспособствовать привлечению студентов и молодых преподавателей кафедры к олимпиадному движению, поддержать интерес к составлению и решению нестандартных математических задач. При этом предложить несколько задач, которые показались любопытными и стоящими внимания. В деле математического образования автор придерживается того мнения, что: - “курсы математики должны быть построены не столько на объяснениях учителя и изучении текста учебника, сколько на методически подобранных упражнениях” (Шохор-Троицкий С.И.) [1, с. 387]. И потому трудные задачи должны занимать в курсе математики подобающее им место. Трудная задача — научное исследование в миниатюре — имеет важную дидактическую функцию, она вызывает интерес, воспитывает, даёт пищу уму студента и в то же время способствует росту квалификации преподавателя.

Основное содержание статьи составляет разбор задач, предлагавшихся на студенческих математических олимпиадах и конкурсах, проводимых в разные годы в Пензенском государственном

технологическом университете, в том числе на их тренировочных этапах. В заключительной части статьи приводится ряд задач олимпиадного типа различного уровня сложности. Они могут быть рекомендованы для рассмотрения на основных и факультативных занятиях по математике в вузе и колледже, а также предложены студентам для самостоятельного решения с целью подготовки к очному туру олимпиады.

Избранные задачи

Задача 1. На плоскости имеется треугольник ABC , заданный координатами своих вершин. Требуется установить, при каких условиях, точка $M(x; y)$ окажется внутри треугольной области. Полученное решение обобщить на случай тетраэдра $ABCD$ в трёхмерном пространстве.

Решение. Возьмём треугольник ABC на плоскости и точку M внутри него (см. рис. 1). Воспользуемся векторной алгеброй и рассмотрим разложение вектора M по базису из векторов \vec{AB} и \vec{AC} : $\vec{AM} = x \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AC}$, где x и y — координаты вектора в указанном базисе.

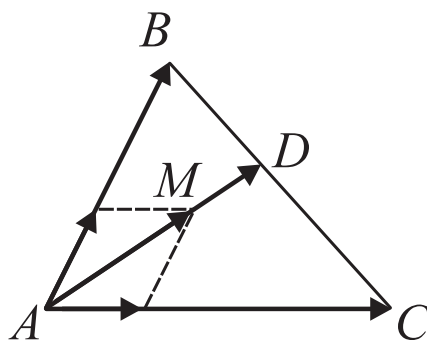


Рис. 1. Треугольная область на плоскости

При расположении точки M внутри треугольной области, очевидно, будут выполняться неравенства: $x, y \geq 0$. Кроме того, положение точки M не должно выходить за пределы отрезка AD . Точка D делит отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{BD}{BC}$, поэтому можно записать соотношение: $\vec{AD} = (1 - \lambda) \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AC}$. Это значит, что для координат точек, лежащих внутри и на границах отрезка AD , имеют место неравенства: $x \leq 1 - \lambda$; $y \leq \lambda$. Исключая отсюда параметр λ , получим: $x + y \leq 1$. В итоге, в качестве условий расположения точки M внутри треугольника ABC получили систему неравенств: $\begin{cases} x, y \geq 0, \\ x + y \leq 1 \end{cases}$.

В случае тетраэдра $ABCD$ находим разложение вектора \vec{AM} в трёхмерном базисе: $\vec{AM} = x \cdot \vec{AB} + y \cdot \vec{AC} + z \cdot \vec{AD}$. Расположение точки M внутри тетраэдра проверяется по следующим условиям, накладываемым на координаты:

$$\begin{cases} x, y, z \geq 0, \\ x + y + z \leq 1. \end{cases}$$

. Данные условия выводятся по соображениям, аналогичным предыдущим.

Задача 2. Докажите, что неравенство

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

выполняется для любого натурального n .

Решение. Для доказательства заданного неравенства воспользуемся принципом математической индукции. Первоначально убеждаемся, что при $n = 1$ формула верна. По предположению формула считается справедливой для показателя степени $n - 1$, то есть имеет место неравенство:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{n-1} dx < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Преобразуем интеграл левой части доказываемого неравенства методом интегрирования по частям:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = x(1 - x^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^{n-1} dx = 2n \int_0^1 (1 - x^2)^{n-1} dx - 2n \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Отсюда с учётом гипотетического предположения принципа математической индукции приходим к следующей оценке:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^1 (1 - x^2)^{n-1} dx < \frac{2\sqrt{n}}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Использованное здесь неравенство $\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ следует из формулы:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{n}}{2n+1} \right)^2 = \frac{1}{(n+1) \cdot (2n+1)^2} > 0.$$

Таким образом, заданное неравенство выполняется при $n = 1$; из предполагаемой справедливости утверждения для значения показателя степени $n - 1$ следует его справедливость для показателя n . Согласно принципу математической индукции неравенство будет выполняться для любого натурального n . Что и требовалось доказать.

Задача 3. Что больше e^π или π^e ?

Решение. Разумеется, данную задачу можно решить при помощи калькулятора прямым вычислением. Однако в данном случае речь идёт об аналитическом решении. С этой целью рассмотрим логарифмы заданных выражений, т. е. числа π и $e \cdot \ln \pi$. Если сделать обозначение $\ln \pi = t > 1$, то задача сводится к сравнению функций $y = e^{t-1}$ и $y = t$ при значениях аргумента $t > 1$.

Докажем, что при таких условиях $e^{t-1} > t$. Данное утверждение следует из того, что при $t = 1$ функции в обеих частях неравенства совпадают, а при $t > 1$ функция $f(t) = e^{t-1} - t$ имеет положительную производную и потому возрастает. Таким образом, установлено: $e^\pi > \pi^e$.

Задача 4. В сборнике [2, с. 43, задача № 124] приводится задача такого содержания: “Докажите, что если в гармоническом ряде

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

вычеркнуть все члены, знаменатели которых, записанные в десятичной системе, содержат цифру 9, то оставшаяся часть ряда будет сходящейся”.

Обозначим через S_n частичную сумму преобразованного таким образом гармонического ряда. В задаче требуется получить следующую оценку сверху для его частичных сумм

$$S_n < \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} \right) \cdot 10.$$

Решение. Нетрудно показать, как это делается при решении базовой задачи, ограниченность частичных сумм рассматриваемого ряда числом 80. Этого достаточно, чтобы сделать вывод о сходимости гармонического ряда с исключенной девяткой. Проблема в том, что задаваемая условием задачи оценка существенно ниже (примерно в три раза), и это требует другого метода решения.

Для получения необходимой оценки прибегаем к интегральному представлению сумма ряда S :

$$S = \int_0^1 \left(\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - x^{9 \cdot 10^k}}{1 - x^{10^k}} - 1 \right) \frac{dx}{x}.$$

Отсюда запишем числовой ряд, сумма которого совпадает с суммой частичного гармонического ряда

$$S = \int_0^1 \frac{1 - x^8}{1 - x} dx + \int_0^1 x^9 \cdot \frac{1 - x^9}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{80}}{1 - x^{10}} dx + \dots + \int_0^1 x^{10^k - 1} \cdot \frac{1 - x^{8 \cdot 10^k}}{1 - x^{10^k}} \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - x^{10^{i+1}}}{1 - x^{10^i}} dx + \dots$$

Оценивая элементы записанного ряда, находим искомую оценку для суммы S_n :

$$S_n < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^k \cdot \int_0^1 \frac{1 - x^8}{1 - x} dx = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} \right) \cdot 10.$$

Задача 5. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^{\pi})}.$$

Решение. Разобьём интервал интегрирования $[0; +\infty)$ на части $[0; 1]$ и $[1; +\infty)$; в первом интеграле сделаем замену переменной $x = \frac{1}{t}$. В итоге приходим к равенству

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^{\pi})} = \int_0^1 \dots + \int_0^{\infty} \dots = - \int_{\infty}^1 \frac{t^{\pi} \cdot dt}{(1 + t^2)(1 + t^{\pi})} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^{\pi})}.$$

Перестановка пределов интегрирования в первом интеграле и соединение их в один интеграл приводит к результату интегрирования

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x^{\pi})} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 6. Найдите сумму ряда $S(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$

Решение. Функция $y = S(x)$, являющаяся суммой заданного ряда, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$y'' + y = e^x$$

и начальным условиям: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Решая его, получим искомую сумму ряда

$$y = S(x) = \frac{1}{2} (e^x - \sin x - \cos x).$$

Данное решение можно также получить, комбинируя ряды Маклорена функций:

$$y = e^x, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите вектор результирующей силы притяжения материальной точки массы m , расположенной в начале координат, к двум материальным точкам равной массы M с координатами $(5; 0)$ и $(3; 4)$.

2. В трёхмерном пространстве задано множество точек. Одна из них есть точка $A(a; b; c)$, другие имеют координаты, полученные перестановкой чисел a , b и c . Докажите, что все точки данного множества лежат на одной окружности, и определите центр и радиус этой окружности.

3. Определите полуоси эллипса, который получается в сечении цилиндра с уравнением $x^2 + y^2 = 4$ плоскостью $x - 2y - 2z + 5 = 0$.

4. Найдите предел последовательности: $\frac{9}{11}, \frac{99}{111}, \frac{999}{1111}, \dots, \frac{9999}{11111}$.

5. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[9]{1-x^9}}{\sqrt[10]{1-x^{10}}}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2}.$$

6. Сравните значения числовых выражений $\sqrt[1000]{1000}$ и $\sqrt[999]{999}$.

7. Найдите интеграл $\int \frac{1-x^9}{(1-x)(1-x^{10})} dx$.

8. Вычислите определённый интеграл $\int_0^{111} f(x) dx$ от периодической функции $y = f(x)$, график которой показан на рисунке 2

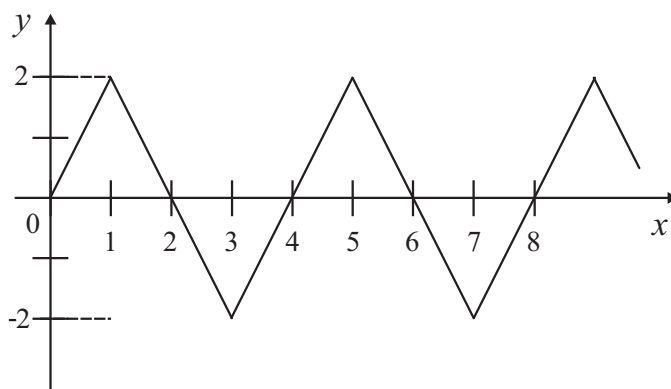
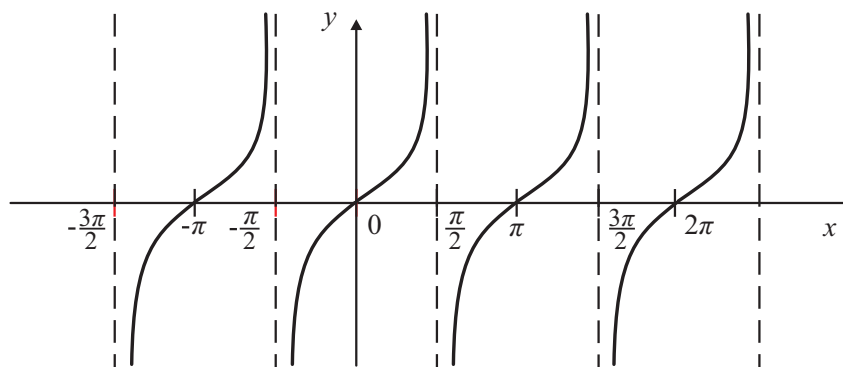


Рис. 2. График функции $y = f(x)$.

9. На рис. 3а показан график функции $y = \operatorname{tg} x$. Требуется составить аналитическое выражение функции, график которой представлен на рис. 3б.



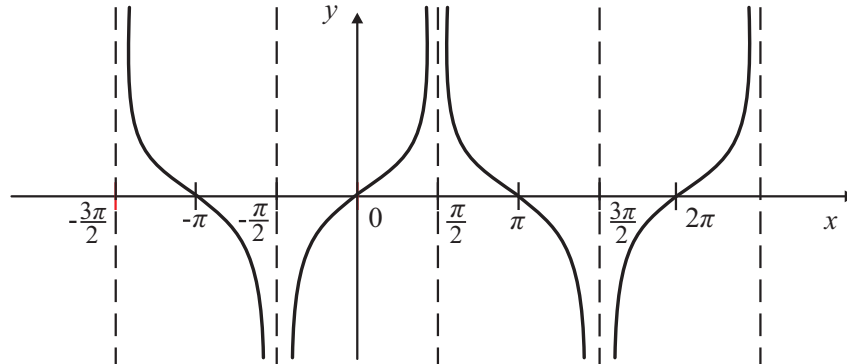


Рис. 3: а) график функции $y = \operatorname{tg} x$; б) график функции $y = f(x)$.

10. Найдите производную функции $f(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt$
11. Вычислите определённый интеграл $\int_1^4 \left(\frac{x}{[x]} + \frac{[x]}{x} \right) dt$, где $[x]$ — целая часть числа x .
12. Вычислите определённый интеграл $\int_1^{\pi/2} [\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)] dt$
13. Запишите формулу общего члена и найдите сумму числового ряда $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$.
14. Исследуйте сходимость числовых рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sqrt[n]{2} + 1 \right).$$

15. Докажите равенство

$$\int_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}.$$

16. Разложите в ряд Маклорена функцию $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.
17. Рассмотрим степенной ряд, коэффициенты которого — последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \dots + F_n x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n.$$

Радиус сходимости данного ряда равен $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \tau \approx 0.618034$. Докажите, что сумма степенного ряда совпадает с функцией: $f(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}$.

18. Исключите из гармонического ряда элементы, в записи которых содержится цифра “0”. Докажите, что полученный ряд сходится.

Литература

1. Демпан И.Я. История арифметики. - М.: Просвещение, 1965. - 438 с.
2. Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть 1. - М.: Наука, 1978. - 392 с.

Федосеев Виктор Михайлович,
преподаватель математики Технологического колледжа
Пензенского государственного технологического
университета, доцент, кандидат технических наук,
Почётный работник Высшей школы.

E-mail: fedoseev_vik@mail.ru

Олимпиада школьников “ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” 2021/2022

А. А. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова

В статье рассказано об олимпиаде для школьников по математике и информатике “ТИИМ” 2021/22 учебного года. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

Среди способов заинтересовать учащихся олимпиады давно уже стали классикой; о вовлечённости в олимпиадное движение свидетельствует постоянное увеличение количества проводимых на всех уровнях олимпиад, организацией которых активно занимаются как отдельно взятые школы, так и университеты, ведущие физико-математические университеты страны и учреждения РАН. Формат олимпиады позволяет школьнику «пощупать» математику и программирование во всём их разнообразии, причём не только показать новые разделы и темы, с которыми учащийся, возможно, даже не встречался ранее, но и учат по-новому смотреть на уже известные факты, призывают не бояться непривычных формулировок. Для успешного выступления на олимпиадах помимо творческих способностей необходима серьёзная подготовка, неотъемлемой составляющей которой является ознакомление с заданиями и разбор решений математических соревнований различных уровней.

В 2021/22 учебном году отборочный тур олимпиады “ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” прошёл в ноябре 2021 – январе 2022 г., заключительный — в марте 2022 г.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из 4 вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по 6 задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В олимпиаде по математике приняли участие 4880 школьников из 10 стран ближнего зарубежья и 66 регионов РФ, по информатике — 962 школьника из 59 регионов РФ и 6 стран. Заключительный тур прошёл на 33 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады

<https://тиим.рф>

1. Задания отборочного тура по математике

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

Здесь мы приводим по одному варианту заданий для 10 и 11 класса с ответами.

10 класс

Задача 1. Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4|x|, \\ |x| + |y| \geq 2, \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \geq 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

- а) первому неравенству системы (S_1);
- б) первым двум неравенствам системы (S_2);
- в) всем трем неравенствам системы (S_3).

В ответе запишите значение $S_1 + S_3 - 2S_2$.

Ответ: 4.

Задача 2. Имеются два водных раствора серной кислоты. В первом растворе 40% чистой кислоты, а во втором – 60% чистой кислоты. Эти растворы смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды. В результате получили раствор, в котором 20% чистой кислоты. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора кислоты, то получился бы 70%-ный раствор. Найти вес первоначального I раствора серной кислоты.

Ответ: 1.

Задача 3. Восстановите отмеченные звездочками отсутствующие на рисунке цифры.

$$\begin{array}{r} \star \star 5 \\ 4 \star \\ \hline 3 \star \star \\ \star 2 \star \star \\ \hline 1 \star \star \star \star \end{array}$$

В ответе запишите сумму всевозможных результатов произведения.

Ответ: 25420.

Задача 4. В трапеции ABCD с меньшим основанием BC и площадью, равной 2, прямые BC и AD касаются окружности диаметром $\sqrt{2}$ в точках B и D соответственно. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна 1. Найти величину угла MBN и длину основания AD. В ответе запишите квадрат радиуса описанной окружности вокруг равнобедренного треугольника с основанием равным AD и углом при вершине, равным углу γ .

Ответ: 3.

Задача 5. Найдите сумму всех решений $x \in (0; 24)$ уравнения

$$\frac{\sin \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{5\pi x}{12} + |\sin \frac{5\pi x}{12} \cos \frac{\pi x}{4}|}{\sin \frac{\pi x}{6}} = 2 \cos \frac{\pi x}{6}$$

Ответ: 86.

Задача 6. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 8 - 4}} < \frac{1}{2|x - 3| - 5}$$

В ответе запишите сумму всех целых решений.

Ответ: 17.

Задача 7. Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников, площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площадь прямоугольников, отмеченных символами x и y . В ответе запишите $\text{НОД}(x,y) + \text{НОК}(x,y)$.

12	x			20
	14	16		
	28			
15			35	
		24	y	15

Ответ: 91.

Задача 8. К числу 2021 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы полученное шестизначное число было кратно 47. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите их среднее арифметическое.

Ответ: 13196.

Задача 9. Координаты вектора $\vec{l}(x, y)$, удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases} 3x - 1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x+y}, \\ \sqrt{y + \sqrt{x+y}} = y - 3x - 6, \end{cases}$$

Какое наименьшее значение может принимать скалярное произведение $(\vec{l} \cdot \vec{p})$, где $\vec{p} = (3; -1)$, а \vec{l} – найденный вектор.

Ответ: -12.

Задача 10. Найдите сумму квадратов всех целых a , при которых уравнение

$$3ax^2 + (6a - 25)x + 3a = 10$$

имеет на отрезке $[-3; 0]$ единственный корень.

Ответ: 66.

11 класс

Задача 1. Интеллектуальный робот к числу 2021 справа и слева приписывает по одной цифре случайным образом. Какова вероятность P того, что полученное шестизначное число будет кратно 43? В ответе укажите значение $180 \cdot P$.

Ответ: 4.

Задача 2. Найдите удвоенное среднее арифметическое всех решений уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{\cos \frac{2\pi x}{3} (1 - \sin^2 \frac{2\pi x}{3} \cos \frac{4\pi x}{3} - 2\sin^2 \frac{2\pi x}{3})} = 1$$

принадлежащих промежутку $(-2021; 2022]$.

Ответ: 3.

Задача 3. Какое наименьшее число слагаемых в сумме

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots$$

надо взять, чтобы оно было больше, чем 2021?

Ответ: 17.

Задача 4. Найдите сумму всех натуральных x , удовлетворяющих неравенству $x^3 + 10000x \leq 100x^2 + 333333$, (3).

Ответ: 990.

Задача 5. В треугольнике ABC угол A прямой. Величина угла B равна 30° . В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние d от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB . В ответе запишите значение $d^2(30 - d^2)$.

Ответ: 222.

Задача 6. Сколько градусов содержит двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит этот угол и боковую поверхность пирамиды пополам?

Ответ: 45.

Задача 7. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\sqrt{81 - 6\sqrt{171 - x^3}} < 9 - x.$$

Ответ: 7.

Задача 8. Найти сумму всех таких целых значений a , чтобы при любом вещественном b нашлось такое вещественное c , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2021(bx - y) = ac^2, \\ (b - 6)x + 2by = c + 1. \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

Ответ: 6195.

Задача 9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек. В ответе запишите сумму всех таких целых a , для которых не выполняются условия задачи.

Ответ: -7.

Задача 10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$\arccos \frac{x}{2022} + \arccos \frac{x\sqrt{2}}{2022} + \arccos \frac{x\sqrt{3}}{2022} \leq \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: 157.

2. Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике

На отборочном туре по информатике участникам были предложены задания различной сложности и тематики: работа с большими числами, системы счисления, логика, геометрия, задача на взвешивание и задача динамического программирования. Для получения максимального балла (100) по каждой из задач программа должна была выдать верный ответ к задаче на всех тестовых данных. По каждой из задач таких тестов было не менее 25. Одной из самых сложных для участников оказалась следующая задача:

Задача 2. Найди кота

Общеизвестный факт, что коты любят и умеют прятаться. В этот раз кот спрятался среди других букв. И не один, а с товарищами.

Мы знаем об этих котах следующее:

- Кот может находиться по вертикали, по горизонтали, быть написанным снизу вверх, сверху вниз, слева направо и справа налево
- Кот может и изгибаться
- Кот не может быть написан по диагонали
- Одна и та же буква не может принадлежать двум котам одновременно

Ваша задача — найти всех котов, потому что эти ребята явно что-то задумали!

Входные данные

m, n - количество строк и столбцов массива символов

массив символов

Выходные данные:

количество слов "кот" во входных данных или "нет котиков", если котов не нашлось.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
4 3 кот кот кот кот	4
8 10 ***** ***** ***К***** **КОТ***** ***Т***** ***** **КО***** ***Т*****	2
3 3 bar mal ey.	нет котиков
5 20 3qsnwIEекотVjкотLJ5 КуккотXRBNy5rkC7trEU NAocKgкот3qqQW5rkeTu oTgCuzRhHH2L81ooySX 8DaaaLqLnLeDток2teiO	7

Решение задачи на языке Python

```
def check_word(s,i,j,word):

    siblings = [[0,1],[0,-1],[1,0],[-1,0]]

    if s[i][j]==word[0]:
        if len(word)>1:
            for sib in siblings:
                used = check_word(s,i+sib[0],j+sib[1],word[1:])
                if(used):
                    used.append([i,j])
                    return used

            else :
                used = [[i,j]]
                return used
    return 0

n, m = map(int, input().split())
s = []
word = ['к','о','т']
count = 0

for i in range(n):
    s.append(list(input()))

for i in range(n):
    for j in range(m):
        used = check_word(s,i,j,word)
        if(used):
            count = count + 1
            for coord in used:
                s[coord[0]][coord[1]] = '*'

if(count>0):
    print(count)
else:
    print('нет котиков')
```

3. Заключительный тур по математике

Каждое из заданий могло быть максимально оценено в 10 баллов.

Вариант заданий для 11 класса

Задача 1. Линейная функция такова, что $f(1) = 20,22$, $f(2) = 2,022$. Имеется счётное устройство, на котором можно складывать или вычитать действительные числа. За каждое действие необходимо заплатить 1 рубль. Хватит ли Вам а) 100 рублей, б) 25 рублей, чтобы вычислить $f(2022)$, если устройство может оперировать лишь введёнными предварительно значениями $f(1)$ и $f(2)$ и теми значениями, которые получены в процессе предыдущих вычислений?

Решение. Покажем, что нам потребуется даже меньше 25 рублей, чтобы найти $f(2022)$. По условию, $f(x)$ – линейная функция, т.е. её можно представить в виде $f(x) = kx + b$, при этом $f(1) = k + b$, $f(2) = 2k + b$, тогда

$$b = 2f(1) - f(2) = f(1) + f(1) - f(2)$$

(на нахождение коэффициента b потребуется потратить 2 рубля). Введём функцию $g(x) = kx = f(x) - b$. Для неё верно соотношение

$$g(2x) = 2g(x) = g(x) + g(x).$$

Помня, что под умножением на 2 в нашей записи подразумевается одна операция сложения, можем получить:

$$g(2) = f(2) - b,$$

$$g(4) = 2g(2),$$

$$g(8) = 2g(4),$$

$$g(16) = 2g(8),$$

...

$$g(2048) = 2g(1024).$$

Всего 11 операций сложения и вычитания, т.е. потрачено 11 рублей.

Кроме того, для этой функции верно

$$g(x \pm y) = g(x) \pm g(y),$$

поэтому

$$g(2032) = g(2048 - 16) = g(2048) - g(16)$$

$$g(2024) = g(2032) - g(8)$$

$$g(2022) = g(2024) - g(2)$$

Таким образом, на вычисление значения $g(2022)$ у нас ушло 14 операций, а значит, пришлось потратить 14 рублей. Чтобы найти $f(2022)$, осталось совершить ещё одну операцию:

$$f(2022) = g(2022) + b.$$

Таким образом, если сложить все затраты, на вычисление потребуется 17 рублей.

В решении приведён лишь один пример подходящего числа операций; разумеется, возможны и другие.

Ответ. а) хватит; б) хватит.

Задача 2. Найдите по крайней мере два решения (две четвёрки натуральных чисел, каждое из которых больше, чем $2g + 3\sqrt{g}$, где g – гугол ($g = 10^{100}$)) следующего уравнения:

$$x^2 + y^3 + z^5 = t^7.$$

Решение.

1 способ. Идея заключается в том, чтобы подобрать *какое-то* решение уравнения, после чего умножить равенство на достаточно большое число с тем, чтобы новые решения оказались больше заданного в условии значения.

Пусть $t = 2, x = 10$, тогда $100 + y^3 + z^5 = 128 \Rightarrow y^3 + z^5 = 28$. Нам подойдут значения $y = 3, z = 1$, т.к. $3^3 + 1^5 = 28$.

Теперь домножим обе части исходного равенства

$$10^2 + 3^3 + 1^5 = 2^7$$

на $k^{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = k^{210}$. Тогда

$$10^2 \cdot k^{2 \cdot 10^5} + 3^3 \cdot k^{3 \cdot 70} + 1^5 \cdot k^{5 \cdot 42} = 2^2 \cdot k^{7 \cdot 30},$$

т.е. числа $x = 10k^{10^5}$, $y = 3k^{70}$, $z = k^{42}$, $t = 2k^{30}$ также являются решениями исходного уравнения. Нам необходимо, чтобы все они были больше, чем $2g + 3\sqrt{g} = 2 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50}$, но поскольку множество натуральных чисел бесконечно, можно для удобства усилить оценку и взять, например, число 10^{101} . Достаточно оценить самое маленькое из наших чисел, следовательно необходимо выполнение условия:

$$2k^{30} > 10^{101}.$$

Нам подойдут, например, $k = 10^4$, $k = 10^5$.

Ответ. $(10^{421}; 3 \cdot 10^{280}; 10^{168}; 2 \cdot 10^{120}); (10^{526}; 3 \cdot 10^{350}; 10^{210}; 2 \cdot 10^{150})$.

2 способ. Заметим, что

$$3^a + 3^a + 3^a = 3^{a+1}.$$

Будем подбирать такую степень тройки, что

$$\begin{cases} x^2 = 3^a \\ y^3 = 3^a \\ z^5 = 3^a \\ t^7 = 3^{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^{\frac{a}{2}} \\ y = 3^{\frac{a}{3}} \\ z = 3^{\frac{a}{5}} \\ t = 3^{\frac{a+1}{7}} \end{cases}$$

Получаем, что a должно делиться на 2, 3 и 5, т.е. $a = 30k$, и $a + 1$ делится на 7, т.е. $a + 1 = 7n$.

$$30k = 7n - 1 \Rightarrow n = 4k + \frac{2k + 1}{7}$$

$$2k + 1 = 7m \Rightarrow k = 3m + \frac{m - 1}{2} \Rightarrow m = 2p + 1.$$

Окончательно получаем

$$k = 7p + 3, a = 210p + 90.$$

Теперь осталось найти такие a , при которых $3^{\frac{a+1}{7}} = 3^{30p+13} > 10^{101}$. Нам подойдут, например $a = 1560$ ($p = 7$) и $a = 1770$ ($p = 8$).

Ответ. $(3^{780}; 3^{520}; 3^{312}; 3^{223}); (3^{885}; 3^{590}; 3^{354}; 3^{253})$.

Замечание. Термин «гугол» не имеет серьёзного теоретического и практического значения. Американский математик Эдвард Казнер, предложивший его, хотел проиллюстрировать разницу между невообразимо большим числом и бесконечностью, и с этой целью термин иногда используется при обучении математике.

Гугол больше, чем количество атомов в известной нам части Вселенной, которых, по разным оценкам, насчитывается от 10^{79} до 10^{81} .

Название компании *Google* является искажённым написанием слова «гугол» (англ. googol).

Задача 3. Определить все тройки действительных чисел (x, y, z) , которые удовлетворяют **системе уравнений**: $2x + x^2y = y$, $2y + y^2z = z$, $2z + z^2x = x$.

Решение. Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

Пусть $x = tg\alpha$, тогда по формуле тангенса двойного угла $y = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg2\alpha$; аналогично $z = tg4\alpha$ и $x = tg8\alpha$.

$$\begin{cases} y = tg2\alpha \\ z = tg4\alpha \\ x = tg8\alpha \end{cases}$$

Получаем

$$tg8\alpha = tg\alpha \Rightarrow \frac{\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin 8\alpha \cdot \cos \alpha - \cos 8\alpha \cdot \sin \alpha}{\cos 8\alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin 7\alpha}{\cos 8\alpha \cdot \cos \alpha} = 0$$

$$\sin 7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

В силу периодичности тангенса найдется не более 7 различных решений исходной системы. Определим их, введя для удобства обозначения $a = tg\frac{\pi}{7}$, $b = tg\frac{2\pi}{7}$, $c = tg\frac{3\pi}{7}$ (здесь $a, b, c > 0$, поскольку все три угла лежат в первой четверти).

$$n = 0 \Rightarrow x = tg0, y = tg0, z = tg0 \Rightarrow (0; 0; 0)$$

$$n = 1 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{\pi}{7}}_a, y = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_b, z = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c} \Rightarrow (a; b; -c)$$

$$n = 2 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{2\pi}{7}}_b, y = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, z = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_a \Rightarrow (b; -c; a)$$

$$n = 3 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{3\pi}{7}}_c, y = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, z = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b} \Rightarrow (c; -a; -b)$$

$$n = 4 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{4\pi}{7}}_{-c}, y = \underbrace{tg\frac{8\pi}{7}}_a, z = \underbrace{tg\frac{16\pi}{7}}_b \Rightarrow (-c; a; b)$$

$$n = 5 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{5\pi}{7}}_{-b}, y = \underbrace{tg\frac{10\pi}{7}}_c, z = \underbrace{tg\frac{20\pi}{7}}_{-a} \Rightarrow (-b; c; -a)$$

$$n = 6 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{6\pi}{7}}_{-a}, y = \underbrace{tg\frac{12\pi}{7}}_{-b}, z = \underbrace{tg\frac{24\pi}{7}}_c \Rightarrow (-a; -b; c)$$

$$n = 7 \Rightarrow x = \underbrace{tg\frac{7\pi}{7}}_0, y = \underbrace{tg\frac{14\pi}{7}}_0, z = \underbrace{tg\frac{28\pi}{7}}_0 \Rightarrow (0; 0; 0)$$

Ответ. $(0; 0; 0)$, $(tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7})$, $(tg\frac{2\pi}{7}; -tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7})$, $(tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{3\pi}{7}; tg\frac{\pi}{7}; tg\frac{2\pi}{7})$, $(-tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7}; -tg\frac{\pi}{7})$, $(-tg\frac{\pi}{7}; -tg\frac{2\pi}{7}; tg\frac{3\pi}{7})$.

Задача 4. Робот все числа из множества натуральных чисел $\{111, 112, 113, \dots, 997, 998, 999\}$ случайным образом записывает в виде многозначного числа. Какова вероятность того, что записанное число делится на 37?

Решение. Пусть данные трёхзначные числа (их всего 899) занумерованы в том порядке, в котором они стоят в полученном многозначном числе. Тогда его можно представить в виде

$$a_{889} + a_{888} \cdot 10^3 + a_{887} \cdot 10^6 + \dots + a_3 \cdot 10^{2658} + a_2 \cdot 10^{2661} + a_1 \cdot 10^{2664} =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_{889}) + a_1(10^{2664} - 1) + a_2(10^{2661} - 1) + \dots + a_{887}(10^6 - 1) + a_{888}(10^3 - 1).$$

Но

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{889} = 111 + 112 + \dots + 999 = \frac{111 + 999}{2} \cdot 889$$

делится на 37, так как 111 и 999 делятся на 37. Кроме того, при любом k число $10^{3k} - 1$ делится на $10^3 - 1 = 999$, т.е. также делится на 37.

Ответ. Вероятность равна 1.

Задача 5. На плоскости даны 22 каким-то образом расположенные различные прямые. Пусть t – число всех точек пересечения этих прямых, b – число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, а p – число частей, на которые плоскость делится данными прямыми. Пусть $A = t - b + p$. Какое наибольшее значение может принимать выражение A ?

Решение. Докажем по индукции, что для любого расположения прямых на плоскости имеет место равенство

$$t - b + p = 1. \quad (1)$$

База индукции. Если на плоскости проведена одна прямая, то $t = 0$, $b = 1$, $p = 2$ и равенство (1) истинно.

Шаг индукции. Допустим, равенство (1) верно для n произвольно расположенных на плоскости прямых.

Проведем на плоскости $n + 1$ прямую и выделим из этих прямых любые n ; обозначим выделенные прямые L_1, L_2, \dots, L_n . Пусть $(n + 1)$ -ая прямая, которую мы означим через L_{n+1} , имеет k общих точек с выделенной совокупностью L_1, L_2, \dots, L_n , и при этом m из них совпадают с уже имеющимися точками пересечения этой совокупности ($0 \leq m \leq k$).

Для L_1, L_2, \dots, L_n имеет место равенство (1). После добавления к этой совокупности прямой L_{n+1} число точек пересечения всех $n + 1$ прямых будет равно

$$t_1 = t + (k - m),$$

число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, будет равно

$$b_1 = b + k + 1 + (k - m) = b + 2k - m + 1,$$

т.к. прямая L_{n+1} делится на $k + 1$ часть, и на тех прямых, где появились новые точки пересечения, появляется, соответственно, по одной новой части.

Число частей, на которые плоскость делится всеми прямыми, будет равно

$$p_1 = p + k + 1,$$

т.к. каждая из $k + 1$ частей прямой L_{n+1} разбивает одну из уже имеющихся после проведения первых n прямых частей плоскости на две новые части.

Имеем:

$$t_1 - b_1 + p_1 = t + k - m - (b + 2k - m + 1) + p + k + 1 = t - b + p = 1,$$

т.е. равенство (1) выполняется для $n + 1$ прямой, что и требовалось доказать.

Ответ: $A = 1$.

Замечание. Сходство полученной формулы с формулой Эйлера для графов ($B - P + \Gamma = 2$, где B – количество вершин, P – количество рёбер, а Γ – количество граней) не случайно: если представить, что все прямые на плоскости пересекаются в бесконечно удалённой точке и добавить её к уже имеющимся точкам пересечения, получится именно она.

Задача 6. Пусть $[x]$ – целая часть x . Найдите наименьшее натуральное n , при котором число натуральных решений уравнения $\left[\frac{x}{n+1}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$ будет больше $l = \underbrace{200 \dots 0}_{49} \underbrace{300 \dots 0}_{50}$.

Решение. Очевидно, что $\frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} \forall x > 0$. Чтобы выполнялось равенство $\left\lfloor \frac{x}{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$, необходимо, чтобы обе дроби принадлежали одному полуинтервалу $[k; k+1)$:

$$k \leq \frac{x}{n+1} < \frac{x}{n} < k+1.$$

Получаем следующую оценку для значений x :

$$kn + k \leq x < kn + n,$$

откуда следует, во-первых, что $k < n$, и во-вторых, что количество натуральных решений этого неравенства равно $n - k$. Исключение составляет случай $k = 0$, при котором левая часть неравенства также будет строгой и количество решений будет равно $n - 1$, а не n .

Найдем общее количество решений исходного уравнения:

$$N = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n - 1 = \frac{(1+n)n}{2} - 1 = \frac{n^2 + n - 2}{2}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{n^2 + n - 2}{2} > \underbrace{200 \dots 0}_{49} \underbrace{300 \dots 0}_{50} = 2 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50}.$$

$$n^2 + n - 2 > 4 \cdot 10^{100} + 6 \cdot 10^{50}$$

$$n^2 + n - 4 \cdot 10^{100} - 6 \cdot 10^{50} - 2 > 0$$

$$D = 1 + 16 \cdot 10^{100} + 24 \cdot 10^{50} + 8 = (4 \cdot 10^{50} + 3)^2$$

Решая неравенство с учётом того, что $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$n > \frac{-1 + 4 \cdot 10^{50} + 3}{2} = 2 \cdot 10^{50} + 1 = \underbrace{200 \dots 0}_{49} 1$$

Ответ: $n = \underbrace{200 \dots 0}_{49} 2$.

Задача 7. При каком наименьшем натуральном m число непрерывных на отрезке $[0; \pi m]$ решений $y(x)$ уравнения $2y^2 + \sin 2x = 2\sqrt{2}y \cos(x - \frac{\pi}{4})$ будет больше 2022?

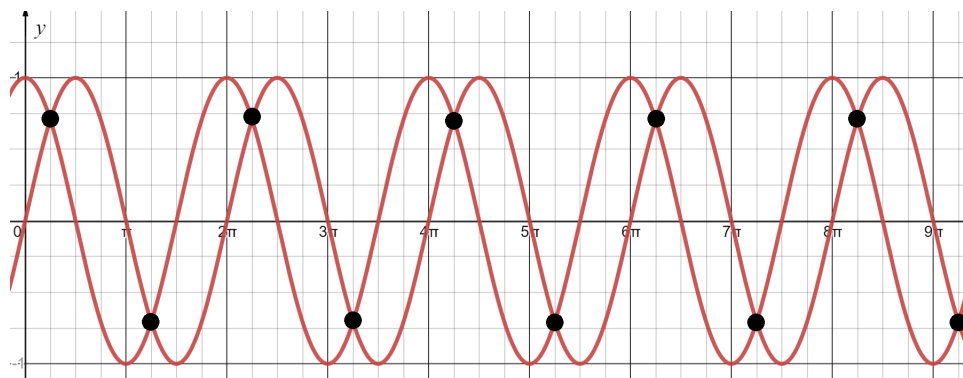
Решение. Преобразуем уравнение:

$$2y^2 - 2\sqrt{2}y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) + 2\sin x \cos x = 0$$

$$y^2 - y(\cos x + \sin x) + \sin x \cos x = 0,$$

откуда по теореме Виета получаем $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Заметим, что это – не единственные решения нашего уравнения. На самом деле, любая кусочно-аналитическая функция, принимающая на некоторой части вещественной прямой значения $\sin x$, а в остальных точках – $\cos x$, также будет ему удовлетворять. Если добавить условие непрерывности, то “смена” значений может происходить только в точках пересечения этих двух функций:

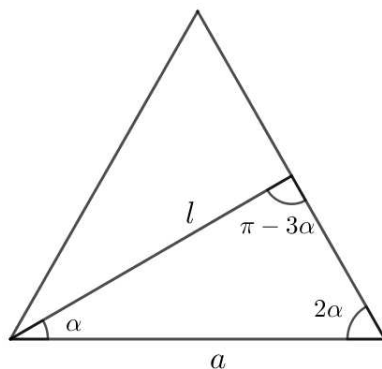


Для подсчёта количества непрерывных решений уравнения разобьём отрезок $[0; \pi m]$ на части точками $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Любая подходящая нам функция на каждом из полученных m отрезков может быть равна $\sin x$ или $\cos x$, а значит, всего существует 2^m таких функций. По условию $2^m > 2022$, т.е. наименьшее натуральное $m = 11$.

Ответ: 11.

Задача 8. Пусть M – множество различных значений дроби $\frac{2022a}{l}$, где a – длина основания равнобедренного треугольника, а l – длина биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Сколько элементов содержит пересечение $M \cap \mathbb{N}$, где \mathbb{N} – множество натуральных чисел?

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием a ; обозначим угол при основании через 2α :



По теореме синусов

$$\frac{l}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(\pi - 3\alpha)}.$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \cos \alpha + \frac{2\cos^2 \alpha - 1}{2\cos \alpha} = 2\cos \alpha - \frac{1}{2\cos \alpha}$$

Оценим, в каких пределах лежат значения этого выражения:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos \alpha < 1$$

$$\sqrt{2} < 2\cos \alpha < 2, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2\cos \alpha} < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 2\cos \alpha - \frac{1}{2\cos \alpha} < \frac{3}{2}.$$

Домножим все части полученного неравенства на 2022:

$$1011\sqrt{2} < 2022\frac{a}{l} < 3033,$$

т.е. множество M представляет собой интервал $(1001\sqrt{2}; 3033)$.

В задаче требуется найти количество натуральных чисел, принадлежащих этому множеству. Поскольку $1429 < 1011\sqrt{2} < 1430$, получаем

$$M \cap \mathbb{N} = \{1430, 1431, \dots, 3032\},$$

и количество элементов этого пересечения равно $3032 - 1430 + 1 = 1603$.

Ответ: 1603.

Задача 9. Бесконечная десятичная дробь с целой частью, равной 0, строится следующим образом: первые две цифры – a и b , а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы двух предыдущих. Робот случайным образом выбирает пару цифр (a, b) . Какова вероятность встречи в записи этой дроби комбинации а) 2021; б) 2022 ?

Решение. Проанализируем процесс построения этой дроби. Допустим, в какой-то момент две последовательные цифры в ней оказались равны 2 и 0. Тогда все последующие, являясь последними цифрами суммы предыдущих, также обязательно будут чётными, из чего следует, что число 2021 никогда не встретится. Таким образом, вероятность в пункте а) равна нулю. С другой стороны, если 2 и 0 действительно встретились рядом, то следующие цифры будут равны 2, 2 и никаких противоречий не возникает.

Определим, для каких исходных значений a и b возможно появление последовательных цифр 2 и 0. Заметим, что по любым двум последовательным цифрам дроби предыдущая цифра восстанавливается однозначно (на самом деле, если часть дроби имеет вид $\dots xcd\dots$, то либо $x + c = d$, либо $x + c = 10 + d$, причем одновременно эти равенства выполняться не могут, поскольку $0 \leq x \leq 9$.) Итак, начав с цифр 2 и 0, будем определять предыдущие до тех пор, пока не вернёмся к исходным цифрам (а это обязательно произойдет в силу конечности набора цифровых комбинаций). В итоге получим следующий повторяющийся «кусоч»:

$$\dots 202246066280886404482022\dots$$

Если a и b равны любым двум последовательным цифрам этого ряда, то в записи дроби встретится число 2022; для других комбинаций цифр появление 2022 невозможно.

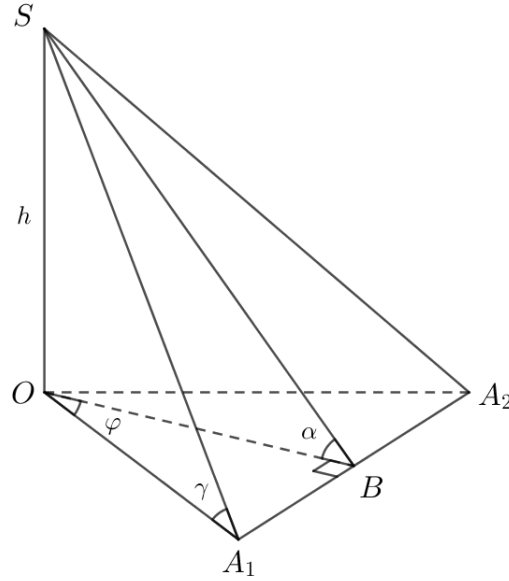
Таким образом, для определения вероятности этого события требуется количество «благоприятных» наборов (20, 02, 22, 24, 46, 60, 06, 66, 62, 28, 80, 08, 88, 86, 64, 40, 04, 44, 48, 82) разделить на все возможные комбинации из двух цифр, т.е.

$$\mathbb{P} = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Ответ: а) 0; б) 0,2.

Задача 10. В правильной 2022-угольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α , а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен γ . Какое наибольшее значение может принимать разность: $\cos 2\gamma - \cos 2\alpha$?

Решение. Обозначим исходную пирамиду $SA_1A_2\dots A_{2022}$, и рассмотрим треугольную пирамиду SOA_1A_2 , в которой SO – высота исходной пирамиды. Если B – середина стороны A_1A_2 , то $\angle SBO = \alpha$, $\angle SA_1O = \gamma$. Поскольку речь идёт о соотношении углов, мы можем без ограничения общности считать, что $OA_1 = 1$. Обозначим для удобства $SO = h$, $\angle A_1OB = \frac{\pi}{2022} = \varphi$, тогда $A_1B = \sin \varphi$, $OB = \cos \varphi$.



Выражение, значение которого необходимо оценить, представим в виде:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \gamma - 1 + 2\sin^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma).$$

Из треугольника SOB :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OB} = \frac{h}{\cos \varphi} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{h^2}{h^2 + \cos^2 \varphi}.$$

Аналогично, из треугольника SOA_1 :

$$\sin^2 \gamma = \frac{h^2}{h^2 + 1}$$

Тогда

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma = \frac{h^2}{h^2 + \cos^2 \varphi} - \frac{h^2}{h^2 + 1} = \frac{h^2 \sin^2 \varphi}{(h^2 + \cos^2 \varphi)(h^2 + 1)}.$$

Введём функцию $f(t)$, $t = h^2$, и исследуем её на экстремум:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t \sin^2 \varphi}{(t + \cos^2 \varphi)(t + 1)}, \\ f'(t) &= \frac{\sin^2 \varphi (t^2 + (1 + \cos^2 \varphi)t + \cos^2 \varphi) - t \sin^2 \varphi (2t + 1 + \cos^2 \varphi)}{(t + \cos^2 \varphi)^2 (t + 1)^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - t^2)}{(t + \cos^2 \varphi)^2 (t + 1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ – известные нам константы, это уравнение нетрудно решить относительно t и определить, что в точке $t = \cos \varphi$ функция достигает максимума. Найдём его:

$$f(\cos \varphi) = \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \cos^2 \varphi)(\cos \varphi + 1)} = \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + 1)^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{(2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 1 + 1)^2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

Возвращаясь к исходному выражению, получаем:

$$\max(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4044}$$

$$\max(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 2 \max(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma) = 2tg^2 \frac{\pi}{4044}.$$

Ответ: $2tg^2 \frac{\pi}{4044}$

4. Заключительный тур олимпиады ТИИМ по информатике

Заключительный тур так же, как и отборочный, содержал задачи, различные по сложности и требующие от участников большого количества разнообразных знаний и навыков. Среди них стереометрия, векторы, большие числа, непозиционная система счисления (Фибоначчиева) и операции с большими числами в ней, криптография, шахматы, динамическое программирование и задача на знание логических операторов, в которой требовалось “угадать” функцию, выдающую верное решение по предоставленному набору тестовых данных. Задания оценивались по 100-балльной шкале. Самой сложной для участников задачей оказалась логическая, которую мы и приведем ниже.

Задача 3. Интеллектуальное такси

Ни для кого не секрет, что сейчас о каждом человеке в разных базах данных, на сайтах и сервисах хранится очень большое количество информации: данные перемещений, покупки, любимые сайты, просмотренная реклама, переходы по ссылкам, лайки, фотографии, поисковые запросы.

В сверхбыстрое такси сели 4 человека. Искусственный интеллект должен определить, куда их везти, основываясь на информации, которую он нашел в своей базе данных. На вход программы передаются 7 фраз с утверждениями о людях, городах и цветах, на выходе программа выводит, в какой город и к дому какого цвета отвезти пассажира. Ответ искусственного интеллекта должен быть отсортирован по имени по алфавиту.

Интересный факт

В 2015 году было проведено исследование, которое показало, что анализ специальной программой всего 10 “лайков” позволяет программе узнать человека лучше, чем его знают его сослуживцы. По 70 “лайкам” программа узнает о человеке столько же, как его близкий друг или сосед по комнате. Уровню 150 “лайков” соответствует уровень знания человека родителями, братьями или сестрами, а анализ 300 и более лайков позволяет программе узнать человека лучше, чем его знает супруга или супруг.

Входные данные: 7 строк с найденными данными(см пример)

Выходные данные:

4 строки с ответами в формате

Нужно отвезти пассажира *Имя* в г. *Название города*, цвет дома дом

Возможные варианты цветов, имен, городов

Цвета - красный, зеленый, оранжевый, желтый, белый, черный, голубой, фиолетовый, синий, пурпурный

Имена - Саша, Алиса, Маша, Петр, Иван, Леша, Женя, Юля, Оля, Катя, Даша, Дима, Наташа, Сережа, Вера, Денис

Города - Москва, Самара, Омск, Белгород, Нижний Новгород, Воронеж, Томск, Кемерово, Казань, Улан-Удэ, Шахтерск, Санкт-Петербург, Ульяновск, Красноярск

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
Алиса никогда не была в г. Самара В г. Омск не разрешено красить дома в красный Женя покрасил дом в синий цвет Маша не любит зеленый цвет Петр часто звонит другу из г. Москва, у которого дом желтый Женя живет в г. Белгород Петр больше не живет в г. Омск	Нужно отвезти пассажира Алиса в г. Омск, зеленый дом Нужно отвезти пассажира Женя в г. Белгород, синий дом Нужно отвезти пассажира Маша в г. Москва, желтый дом Нужно отвезти пассажира Петр в г. Самара, красный дом
Саша часто звонит другу из г. Москва, у которого дом желтый Юля никогда не была в г. Самара Даша не любит зеленый цвет Иван живет в г. Белгород В г. Омск не разрешено красить дома в оранжевый Саша больше не живет в г. Омск Иван покрасил дом в синий цвет	Нужно отвезти пассажира Даша в г. Москва, желтый дом Нужно отвезти пассажира Иван в г. Белгород, синий дом Нужно отвезти пассажира Саша в г. Самара, оранжевый дом Нужно отвезти пассажира Юля в г. Омск, зеленый дом

Решение задачи на языке Python

Чтобы установить соответствие людей, городов и цветов, нам понадобятся три таблицы соответствия. Таблицы будут изначально заполнены нулями, в процессе анализа входных данных будем ставить 1 в таблицу в случае соответствия и -1, если соответствия нет.

При этом в процессе заполнения таблиц проверяем, если в клетке стоит 1, то в строке и столбце все остальные значения будут равны -1. Если в трех клетках строки/столбца стоит -1, значит в четвертой - единица. Также не забываем про связь между таблицами: например, если известно соответствие город-человек и город-цвет, значит, мы можем заполнить клетку в таблице человек-цвет.

#Функция для выделения используемых значений из условий

```
def getUsed(statements, values):
    used = []
    for s in statements:
        for v in values:
            if s.find(v)>=0 and used.count(v)==0:
                used.append(v)
    return used
```

Устанавливает заданное значение в заданной клетке заданной таблицы связности

```
def setValue(arr,i,j,val):
    if (val == 1):
        for c in range(4):
            arr[i][c]=-1
            arr[c][j]=-1
    arr[i][j] = val
    check_row(arr,i)
    check_col(arr,j)
```

#Дозаполняем строчку, если в ней три раза -1

```
def check_row(arr,i):
    if sum(arr[i])==-3:
        setValue(arr,i,arr[i].index(0),1)
```

```
#Дозаполняем столбец, если в нем три раза -1
def check_col(arr,i):
    s =0
    for j in range(4):
        s+=arr[j][i]
    if s==3:
        for j in range(4):
            if arr[j][i]==0:
                setValue(arr,j,i,1)

colors =['красный', 'зеленый', 'оранжевый', 'желтый', 'белый', 'черный', 'голубой',\
'фиолетовый', 'синий', 'пурпурный']

names = ['Саша', 'Алиса', 'Маша', 'Петр', 'Иван', 'Леша', 'Женя', 'Юля', 'Оля', 'Катя',\
'Даша', 'Дима', 'Наташа', 'Сереза', 'Вера', 'Денис']

cities = ['г. Москва', 'г. Самара', 'г. Омск', 'г. Белгород', \
'г. Нижний Новгород', 'г. Воронеж', 'г. Томск', 'г. Кемерово',\
'г. Казань', 'г. Улан-Удэ', 'г. Шахтерск', 'г. Санкт-Петербург',\
'г. Ульяновск', 'г. Красноярск']

names_cities = [[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]
cities_colors =[[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]
names_colors = [[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]

#Инициализируем массив значений

statements = []

for i in range(7):
    s = input()
    statements.append(s)

#Первым делом выделяем из условий имена, цвета и города, которые там упоминаются
usedColors = getUsed(statements,colors)
usedCities = getUsed(statements,cities)
usedNames = getUsed(statements,names)

#Сразу сортируем имена по алфавиту, для корректного вывода результата
usedNames.sort()

#Заполняем таблицу сведениями из высказываний
for s in statements:
    nameInd=-1
    colorInd=-1
    cityInd=-1
    for i in range(4):
        if s.find(usedNames[i])>=0:
            nameInd = i
        if s.find(usedColors[i])>=0:
            colorInd = i
        if s.find(usedCities[i])>=0:
            cityInd = i
```

```

# Если в одном высказывании сразу и город и имя и цвет
if (nameInd>=0 and colorInd>=0 and cityInd>=0):
    setValue(names_colors,nameInd,colorInd,-1)
    setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,1)
    setValue(names_cities,nameInd,cityInd,-1)
# Если только два параметра
else:
    if(nameInd>=0) and (cityInd>=0):
        if s.find(' не ')>=0:
            setValue(names_cities,nameInd,cityInd,-1)
        else:
            setValue(names_cities,nameInd,cityInd,1)

    if((colorInd>=0) and (cityInd>=0)):
        if s.find(' не ')>=0:
            setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,-1)
        else:
            setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,1)

    if(nameInd>=0 and colorInd>=0):
        if s.find(' не ')>=0:
            setValue(names_colors,nameInd,colorInd,-1)
        else:
            setValue(names_colors,nameInd,colorInd,1)

#Дозаполняем таблицы, учитывая связи между ними
for i in range(4):
    for j in range(4):
        for k in range(4):
            v = names_cities[i][k]*names_colors[i][j]
            if v!=0 and names_cities[i][k]+names_colors[i][j]>-2:
                setValue(cities_colors,k,j, v)

            v = names_cities[k][i]*cities_colors[i][j]
            if v!=0 and names_cities[k][i]+cities_colors[i][j]>-2:
                setValue(names_colors,k,j,v)

            v = cities_colors[k][j]*names_colors[i][j]
            if v!=0 and cities_colors[k][j]+names_colors[i][j]>-2:
                setValue(names_cities,i,k,v)

#Формируем ответ, выбирая города и цвета для имен из массива usedNames
for i in range(4):
    cityInd = names_cities[i].index(1)
    colorInd = names_colors[i].index(1)

    print('Нужно отвезти пассажира '+usedNames[i]+' в '+usedCities[cityInd]+' \
    ', '+usedColors[colorInd]+' дом')

```

Андреев Александр Анатольевич,
руководитель сектора олимпиад школьников МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: andre01071948@yandex.ru

Скородумова Елена Александровна,
доцент кафедры «Теория вероятностей и
прикладная математика» МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: eas@mtuci.ru

Максимова Екатерина Алексеевна,
специалист сектора олимпиад школьников МТУСИ.

E-mail: ekamaks@bk.ru

Теория хаоса и фракталы в психотерапии и клинико-психологическом консультировании

Т. Н. Мачурина

Статья посвящена рассмотрению возможности применения странных аттракторов системы Э. Лоренца и фракталов Б.Мандельброта в психологической теории и практике.

Возможно ли прогнозирование беспорядочного движения элементов какой-либо динамической системы? Существует ли в хаотическом распределении элементов определённый порядок и закономерность? Что влияет на хаотичность динамики и влияет ли? В известной работе, опубликованной в 1972 году профессором метеорологии из Массачусетского технологического института (МТИ) Эдвардом Лоренцем [6], описывается явление, которое впоследствии получило название *странного аттрактора* (от английского «attract» — «притягивать»). С формальной точки зрения, аттрактор можно определить как «такое подмножество фазового пространства, что все траектории, стартующие не слишком далеко от него, стремятся к нему с течением времени» [1]. Важнейшим свойством странного аттрактора является то, что он имеет *фрактальный характер* и не представим в виде регулярной поверхности или кривой.

В ходе продолжительных исследований Лоренцем была отмечена важная закономерность: хаотической динамической системе присуща значительная зависимость от исходных, первоначальных данных [2]. Лоренц пришёл к этому выводу, вычисляя значения фазовых переменных в течение продолжительного времени и обнаружив в середине счёта некоторую особенность решения, побудившую его повторить свои вычисления с этого момента. Вначале получаемые при повторном счёте значения имели минимальное расхождение с предыдущими значениями, однако, по мере продолжительности эксперимента, расхождение между старыми и новыми данными становилось всё более очевидными, пока, наконец, не стало ясно, что новое решение отнюдь не напоминает старое. Полученное явление получило общеизвестное название — «эффект бабочки» (чему послужило интригующее название одной из статей Лоренца: «Предсказуемость: может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?», 1972 г.) [6].

Ключевые идеи, сформулированные Лоренцем, можно обобщить следующим образом:

1. Пусть взмах крыла бабочки способен вызвать торнадо, тогда с равной вероятностью тот же взмах способен предотвратить его образование.
2. Пусть один взмах крыла бабочки вызывает торнадо, тогда той же способностью обладают все предыдущие и последующие взмахи, равно, как и взмахи крыльев всех остальных бабочек.
3. Пусть взмах крыла одной бабочки, равно как и всех остальных бабочек, способен вызвать стихийное бедствие, тогда на это способен и человек со своей активностью, воздействующей на окружающую среду.
4. Пусть взмах крыла способен вызвать торнадо, тогда он может изменить его траекторию или вовсе остановить его.

Можно заметить, что в основе подобных выводов лежит обнаруженная Лоренцем существенная зависимость поведения динамической системы от начальных условий: взмах крыла насекомого выступает здесь в качестве причины незначительного изменения начальных условий исследуемой системы, приводящей, вместе с тем, к самым разнообразным последствиям.

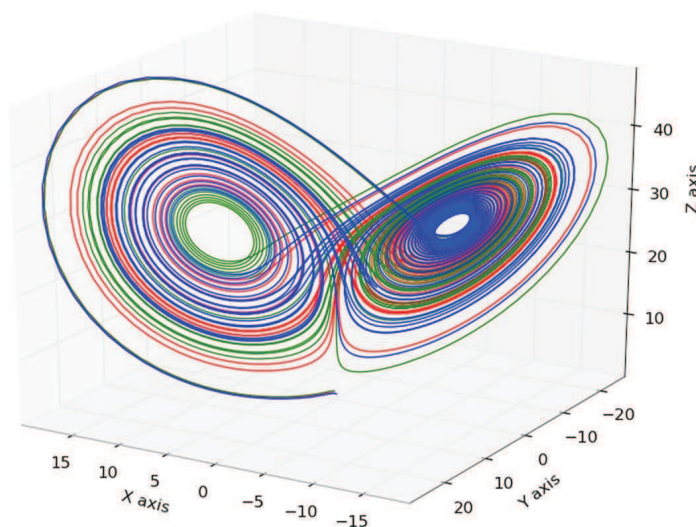


Рис. 1. Поведение траекторий в системе Лоренца

Значение теории хаоса в области психологических наук сложно переоценить. Понимание того, что хаос есть основа всего сущего, лишает научную психологию существующего в прежние времена устойчивого стремления привести личность к определённой, зависимой от конкретной психологической парадигмы, норме. Признаем, что личность есть та самая хаотичная динамическая система с огромным количеством подвижных элементов, которая зависит, тем не менее, от некоторых начальных условий. Под начальными условиями, в данном случае, можно понимать как генетические особенности, так и раннее влияние окружающей среды (социальной, экономической, экологической). Но жизнь любого индивида — это постоянный хаос, состоящий из неисчислимого количества разнообразных явлений; возможно ли, в таком случае, длительное прогнозирование будущего, например, ребёнка раннего возраста, исходя из примерных начальных значений? Автору представляется разумным, что, с учетом из теории Лоренца, подобные длительные прогнозы невозможны, либо могут носить исключительно вероятностный характер. А.Г. Шевцов пишет: «Сколь угодно малое воздействие может вызвать нелинейно-сильную реакцию и привести к структурному переходу системы. Спонтанная природа выбора дальнейшей траектории эволюции системы в точках бифуркации приводит к существованию спонтанности в микроструктуре развития личности» [3]. Вместе с тем, важно помнить, что, несмотря на кажущуюся беспорядочность (именно это понимается под словом «хаос»), внутри динамической системы имеется непериодический порядок, благодаря чему внешне хаотичный набор элементов может быть упорядочен в разовые модели. Это даёт возможность, обладая знанием об определённых начальных данных, прогнозировать развитие личности в определённых пределах предсказуемости в ограниченном промежутке времени или периоде. Соответственно этому явлению в психологии были созданы, например, возрастные периодизации психического развития Л.С. Выготского, Д.Б. Эльконина, Ж. Пиаже, созданы определённые модели нормального и аномального развития.

Таким образом, хаос в теории Лоренца — это упорядоченный беспорядок, это динамическая система с непериодическими закономерностями. С. Манн, понимая, насколько понятие хаоса ассоциируется с представлениями о бесформенности и чистой случайности, предлагает своё определение — «нелинейная динамика» [5]. Манн подчёркивает, что теория хаоса не только не противоречит, но и происходит из классической физики и математики, но в то же время в определенной степени превосходит их, ведь классическая парадигма описывает регулярное (в простейшем случае — линейное) поведение объекта; дисциплина хаоса, напротив, рассматривает статистически и стратегически значимое поведение множества разнообразных взаимодействующих элементов.

В теории индивидуальной и семейной психотерапии, клинико-психологического консультирования странные аттракторы находят своё применение в качестве инструмента рассмотрения пределов предсказуемости поведения личности (или целой семейной системы, или группы) как хаотичной динамики. Человеческий разум — нелинейная система, равновесие в которой — предельный случай [4]. Вместе с тем, можно заметить, что эта система при определённых условиях превращается в структуры аттракторов [4].

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases}$$

Рис. 2. Система Лоренца

Иллюстрацию возможности применения системы Лоренца дают Л.А. Паутова и А.К. Гуц [4]: если x — состояние дел в семье, y — состояние дел на службе, а z — это эмоциональное состояние психики человека¹, то справедливо, что состояние индивида в любой момент времени t характеризуется тремя переменными: x, y, z , отрицательное значение которых “—” означает способность индивида оказывать сопротивление негативным событиям в семье, социуме, контролировать своё психоэмоциональное состояние. Положительное значение трёх переменных “+”, напротив, показывает неспособность решать проблемы, зависимость от своего негативного эмоционального состояния и т.д. Тогда первое уравнение в системе Лоренца демонстрирует скорость изменения отношений в семье, которые в большой степени зависят от качества социальных взаимоотношений (член σy) и способности индивида к регуляции семейных отношений (член $-\sigma x$). Второе уравнение описывает скорость изменения социальных взаимоотношений: качество социальной деятельности находится в зависимости от семейных отношений (член ρx) и его soft skills или социальных навыков ($-y$), а также переживаний индивидом семейных отношений (член $-xz$). Третье уравнение иллюстрирует скорость изменения психоэмоционального состояния человека (пассивность, реактивность и т. д.), которая в первую очередь определяется качеством социальных и семейных взаимоотношений (член xy), а также самоконтролем индивида (член $-\beta z$).

В психотерапии и клинико-психологическом консультировании речь клиента является хаотичной, нелинейной системой, вместе с тем содержащей тот самый непериодический порядок, присущий всем динамическим системам. Группы взаимодействующих элементов в данном случае можно рассматривать как кластеры, значимые смысловые единицы в устной речи клиента, представляющие для психотерапевта диагностическую значимость, позволяющие строить модель терапии, намечать её мишени и прогнозировать результаты.

Также в психотерапии и клинико-психологическом консультировании нашла своё применение теория фракталов (Б. Мандельброт). На языке математики фрактал есть множество, обладающее свойством самоподобия. Иными словами, фрактал есть целое, имеющее ту же форму, что и одна или

¹В данной статье, а также в работе [6] не объясняется, как числовой переменной выразить «состояние дел в семье», «состояние дел на службе», «эмоциональное состояние психики человека», поскольку, во-первых, это не входило в цели авторов, во-вторых, не могло быть сделано в рамках ограниченного объема журнальной публикации. С другой стороны, именно это есть важный вопрос правомерности использования данной математической модели в социальных науках. Методы количественной оценки различных социологических параметров изложены в многочисленных пособиях соответствующего профиля. В качестве начального введения можно рекомендовать пособие «Анализ данных в социологии», Колчинская В.Ю., Челябинск, Издательство ЮУрГУ, 2006, стр. 5 – 30. — Прим. ред.

более частей. Фракталы показывают себя во множестве самых различных объектов окружающего пространства, в их структуре, развитии и функционировании. От снежинки до человеческого мозга, фракталы неизменно являют себя человеческому взору.

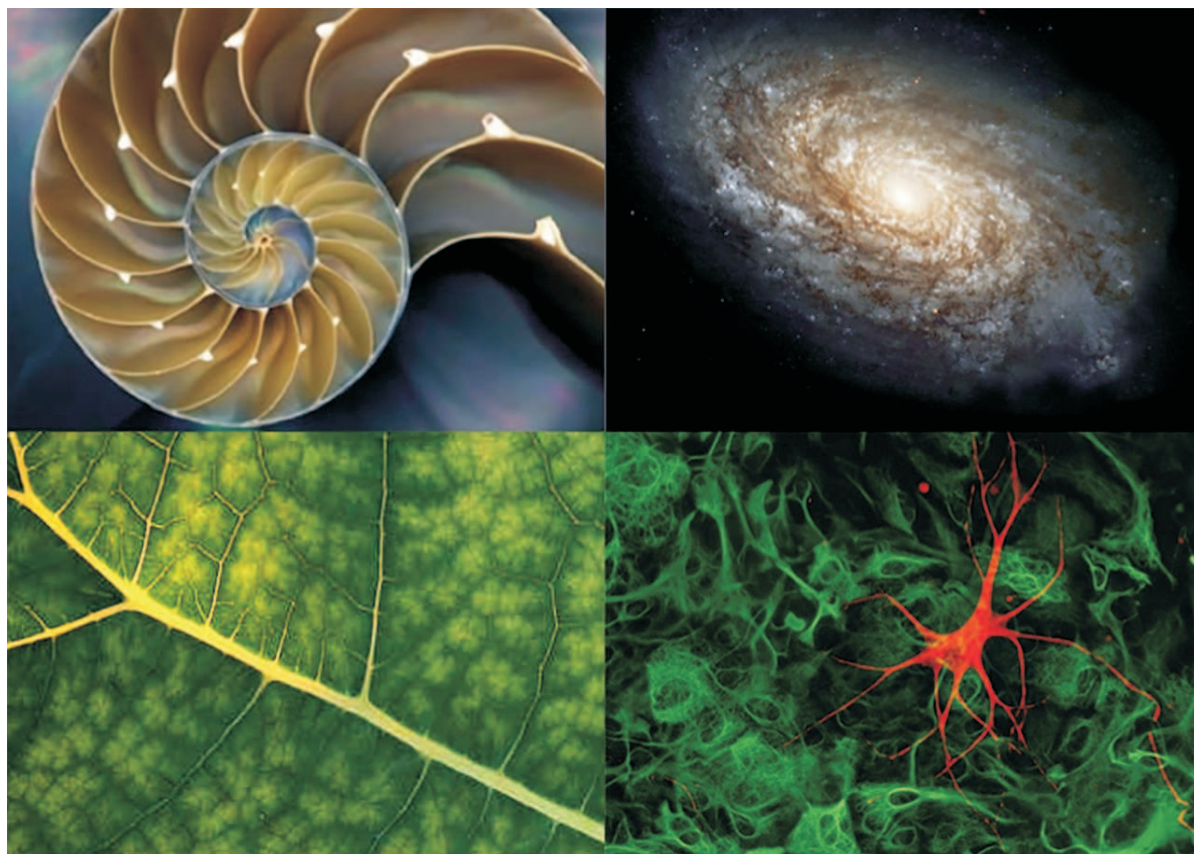


Рис. 3. Фракталы в природе

Что есть личностная установка, закреплённая поведенческая модель, личностная акцентуация, наконец? Повторяющееся дезадаптивное поведение в клинической картине невроза; обсессивно-компульсивное расстройство; патологические семейные паттерны, переходящие из поколения в поколение; поведение личности, отражающей поведение группы — всё это можно моделировать фракталами. В данном ключе психотерапия есть искусство создания рисунка личности клиента, в котором множество самых разнообразных элементов, согласно свойству самоподобия, постепенно складываются в единую логическую картину.

Обратимся к основным свойствам фракталов:

1. Нерегулярность. Если описать фрактал функцией, то такая функция окажется не дифференцируемой, то есть, не гладкой ни в какой точке на всём своём протяжении. Применительно к психологии данный феномен можно проиллюстрировать аффективной лабильностью личности или циклотимией, которые как нельзя лучше демонстрируют эту нерегулярность или колебания.

2. Самоподобие. Данное свойство означает, что фрактал — это рекурсивная модель, каждый элемент которой в своём развитии повторяет развитие всей модели в целом. Примером в контексте данной статьи может служить психологическая теория рекапитуляции С. Холла, в соответствии с которой, главным законом развития является биогенетический «закон рекапитуляции» — согласно ему индивидуальное развитие (онтогенез) повторяет главные стадии филогенеза. Иными словами, каждый ребёнок в своём индивидуальном развитии повторяет основные этапы развития всего человеческого рода.

3. Размерность. Фрактальные объекты имеют топологическую размерность, характеризующую степень сложности кривой. При исследовании закономерности чередования участков разных размерностей и характера влияния на систему внешних и внутренних факторов, появляется возможность в определённой степени прогнозировать поведение системы. Относительно детской и семейной психологии это означает, что, к примеру, изучив «кривую» поведенческих реакции у ребёнка, а также влияющие на неё в данный период факторы, можно прогнозировать поведение всей семейной системы в целом.

В настоящее время теория фрактального анализа в психотерапии всё чаще находит своих последователей. Автору представляется возможным использование данного метода в русле гештальт-терапии и системной семейной психотерапии.

Возможности использования теории хаоса и фракталов в психотерапии и клинико-психологическом консультировании обусловлены, в первую очередь, насущной потребностью психологических наук в развитии математических методов исследования, применимых для изучения личности и группы. Так, изучение психологических данных невозможно осуществить с помощью классического, в частности, линейного подхода. Поведение человека, сложные, противоречивые явления, происходящие в его психике не поддаются точному анализу и вычислению. В этом ключе странные аттракторы Лоренца, как и фракталы Мандельброта, прекрасно демонстрируют результаты моделирования в парадигме неклассического мышления с его сложностью, неопределённостью, нестандартностью и нелинейностью.

Таким образом, математические концепции хаоса и фракталов могут достаточно эффективно применяться в изучении психологических феноменов.

Литература

1. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Шевцов А.Г. Некоторые аспекты психосинергетического моделирования личности.
URL: <http://philopsy.wallst.ru/konfer/psihosiner51t.html>
4. Паутова Л.А., Гуц А.К. Использование теории хаоса и странных аттракторов в исследованиях индивидуального и социального сознания // Математические структуры и моделирование. - 2004. - вып.13. - с. 126-131.
5. Манн С. Теория хаоса и стратегическая мысль // Parameters. - 1992.
URL: <http://konservatizm.org/konservatizm/theory/080310032055.xhtml>
6. Математическое моделирование в психологии. - Красноярск, 2001.

*Мачурина Татьяна Николаевна,
клинический психолог,
Морозовская детская городская клиническая
больница Департамента здравоохранения города Москвы.*

E-mail: tama86@yandex.ru

Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царства

А. Н. Ковалев

На основании анализа размеров египетских архитектурных сооружений и предметов искусства первой половины III тысячелетия до н.э. предложена реконструкция истории нахождения дробей для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, стартующая с $7/5$, $17/10$ и $11/5$ соответственно. Анализ архитектурных пропорций времен фараонов Джосера и Снофру (XXVII в. до н.э.) говорит о наиболее вероятном использовании, вплоть до строительства последним Ломанной пирамиды, мерных модулей, отличных от царского локтя в 7 ладоней. Показано, что во времена фараона Джосера использовался модуль в 8 ладоней, а для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ применялись, скорее всего, дроби $7/5$, $7/4$ и $9/4$, первые две из которых и привели со временем к появлению и закреплению главенствующего положения царского локтя. Отказ от применения царского локтя при анализе ранних архитектурных сооружений позволил математически более точно рассмотреть их пропорции, что привело к обнаружению ряда более точных приближений для квадратных корней, в том числе и дроби $161/72$ для $\sqrt{5}$ во время III династии. Последнее может быть доводом за представление о знании в Египте теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника уже в первой половине III тысячелетия.

Введение

Отсутствие египетских математических папирусов III тысячелетия до н.э. и согласие историков науки считать часть материала из аналогичных источников, датируемых началом II тысячелетия (Московский и Райнда папирусы), более ранним, создает тему о корректной экстраполяции математических знаний и навыков, выраженных в этих находках, на предшествующие столетия. И здесь тщательный анализ древних архитектурных памятников может оказать свою помощь. Особый прогресс, достигнутый древними египтянами в строительстве пирамид, основой которых является каркасный прямоугольный треугольник, построенный на высоте и половине основания (или половине диагонали основания), побуждает предположить обретение тогда некоторых знаний об основных свойствах прямоугольных треугольников. Между тем, нет письменных египетских источников раннее периода Птолемея (IV – I вв. до н.э.) даже с частными случаями теоремы Пифагора¹ ($a^2 + b^2 = c^2$), хотя они отражены во многих пирамидах III тысячелетия до н.э., а в древневавилонской математике с начала II тысячелетия известна не только эта теорема, но, как это следует из клинописной таблички Plimpton 322, и некоторое общее ее решение в целых числах, например, найденное в последующем Евклидом [6, с. 49].

С некоторой очевидностью, первой из эмпирически обнаруженных пифагоровых троек была: (3, 4, 5). О вероятном знании Хесира — архитектором Джосера, основателя III династии (XXVII век) — этой тройки писали историки архитектуры Афанасьев К.Н. [1] и Шмелев [9, с. 21, 23, 43]. Хотя для египтологов убедительно об этом свидетельствует только пирамида фараона VI династии Пепи I (XXIV – XXIII вв.), несмотря на соответствие ей четырех более ранних, начиная с пирамиды Хефрена [11, с. 203, 219], и представления историков математики об использовании этой тройки во

¹В Демотическом папирусе, датируемом III веком до н.э., есть упоминание троек (3, 4, 5), (5, 12, 13) и (20, 21, 29) [19, с. 3–4 и 35–40].

время строительства Великой пирамиды [10]. Пропорции пирамид могут быть обусловлены предварительным обретением определённых математических знаний. Так наклон грани пирамиды жены фараона Тети (Iput I, XXIV в. до н.э.) в 62° говорит о возможности использования пифагоровой тройки (8, 15, 17) [11, App]. Некоторые историки архитектуры пишут о знании пифагоровой тройки (20, 21, 29) еще при фараоне Снофру — отце Хеопса и основателе IV династии [18, с. 128]. Скорее всего, если эта тройка и была найдена до возведения Ломанной пирамиды, то только после «священного египетского треугольника» (3, 4, 5), в результате инициированного этим фактом поиска других троек методом перебора такого целого n , что: $n^2 + (n + 1)^2 = m^2$. При $n < 100$ существуют только два решения: $n = 3$ и 20^2 .

Первый толчок к поиску, который должен был завершиться обретением теоремы Пифагора, могли дать применяемые в архитектуре Египта геометрические методы построения прямоугольников: а) перенос диагоналей и б) вписывание равнобедренных треугольников. Первый метод приводил к построению прямоугольников с отношением сторон, равным $\sqrt{2} : 1$, $\sqrt{2} : 2$, $\sqrt{5} : 1$, $\sqrt{5} : 2$, а второй, в результате вписывания равностороннего треугольника — к $\sqrt{3} : 2$. Перенос диагоналей квадрата и вписывание равностороннего треугольника обнаруживается при анализе гробницы в Негада XXX века до н.э., принадлежащей I династии [4, с. 82 - 84]. Непосредственное использование веревочного метода переноса диагоналей в практике строительства, когда речь идет о десятках и даже сотнях метров, достаточно громоздко, что подталкивало к поиску третьей стороны прямоугольных треугольников, у которых: а) два катета равны; б) один катет в два раза больше второго и в) гипотенуза в два раза больше меньшего катета. В свою очередь, этот поиск был частью пути, приведшего к появлению модульного метода. Нахождение отношения неизвестной стороны треугольника к заданному основанию (x), при обретении теоремы Пифагора, сводится к уравнениям $x^2 = 2$, 3 или 5. В дальнейшем мы будем пользоваться привычным обозначением для квадратного корня, подразумевая под ним отношение соответствующих сторон прямоугольного треугольника. В случае незнания теоремы Пифагора, у древних архитекторов-математиков не было причин для сомнения в возможности равенства x дроби. Представляется естественным, что в рамках принятой в египетской математике десятичной системы, в результате рассмотрения квадрата 10×10 , сначала были найдены приближенные решения этих трех задач, сводящиеся к тройкам чисел: (5, 5, 7); (5, 10, 11) и (10, 17, 20). Отдельный вопрос — насколько древние архитекторы математики понимали приближенность полученных значений для отношений искомых сторон треугольника. В истории математики принято считать, что даже дробь $3/2$, не говоря о $7/5$ или $17/12$, для диагонали единичного квадрата на определенном этапе принималась за точную [5, с. 238-239]. Представляется, что это было возможным только до нахождения формулы Пифагора. Но и до ее обретения архитектурные нужды побуждали к постоянному их уточнению, и, хотя каждое обретенное новое значение могло считаться абсолютно точным, что могло подталкивать к закреплению этих находок в камне, но, как показывает анализ архитектурного наследия, держались они на этом пьедестале сравнительно недолго.

Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ во время I династии

Проанализируем размеры деталей фрески на мемориальной стеле фараона Джета в Абидосе (XXX в. до н.э.), в центре которой видна часть фасада дворца (см. рис. 1). Согласно реконструкции, ее высота должна быть в $\sqrt{3}$ раз больше ширины [4, с. 84 - 85]. Обмер стелы дает для этого отношения значение $1,70 \pm 0,01$, что говорит об использовании не геометрического метода построения ее основных размеров, как принято считать в истории архитектуры, а модульного с $\sqrt{3} = 1 + 1/2 + 1/5$ ³. О возможности использования сначала дроби $11/5$ для $\sqrt{5}$ говорят размеры мастабы (гробницы) визири Хемаки, воздвигнутой в Саккаре при фараоне I династии Дене (XXX в. до н.э.): $57,3 \times 26,0$ м [4, с. 45]. Отношение ее сторон равно $2,20 \pm 0,01$. Историк математики Щетников, реконструируя

²Следующее решение $n = 119$.

³В Древнем Египте все дроби записывались в виде суммы аликвотных дробей, у которых числитель равен 1.

геометрический метод, которым египтяне в III тыс. до н.э. могли находить приближения для $\sqrt{5}$, на первом шаге получает дробь $11/5$ [10]. Дальнейший анализ размеров изображения на стеле дает, что для построения пропорции $\sqrt{3} : 1$ (отношение сторон сереха — центральной рамки, в которую вписано изображение дворца, BC/AB) была получена уточненная дробь: $1 + 1/2 + 1/5 + 1/25$ (отличие от обмера 0,3%) (таблица 1 и рис. 1). В таблице 1: относительная погрешность обмера — разброс различных вариантов измерений, а относительное отклонение — отклонение теории от среднестатистического результата обмера. Во всех случаях отклонение при модульном подходе остается в рамках погрешности исполнения самой стелы, а при геометрическом — почти во всех случаях выходит за рамки погрешности. Анализ изображения показывает также, что и для $\sqrt{5}/2$ было получено уточнение более ранней дроби $1 + 1/10$ до $1 + 1/10 + 1/50$. Последнее, скорее всего, и послужило причиной разбиения изображения дворца на стеле по горизонтали на 50 равных частей.

Таблица 1. Стела Джета. Сравнение геометрического [4, с. 84-85] и модульного методов

	BF/BJ	GH/KL	AE/AB	KL/AB	BC/AB
План	$\sqrt{5}/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}/2$ (?)	2	$\sqrt{3}$
Обмер (отношение)	1,124	1,70	0,69	2,0	1,745
Погрешность ε , %	0,75	0,3	1,5	0,3	0,7
Геометрический метод	$\sqrt{5}/2$	$\sqrt{3}$	-	$\sqrt{17}/2$	$\sqrt{13}/2$
Отклонение ε_r , %	0,54	1,9	-	2,6	2,9
Модульный метод	56/50	170/100	35/50	100/50	87/50
Отклонение ε_m , %	0,36	< 0,3	1,4	< 0,3	< 0,3

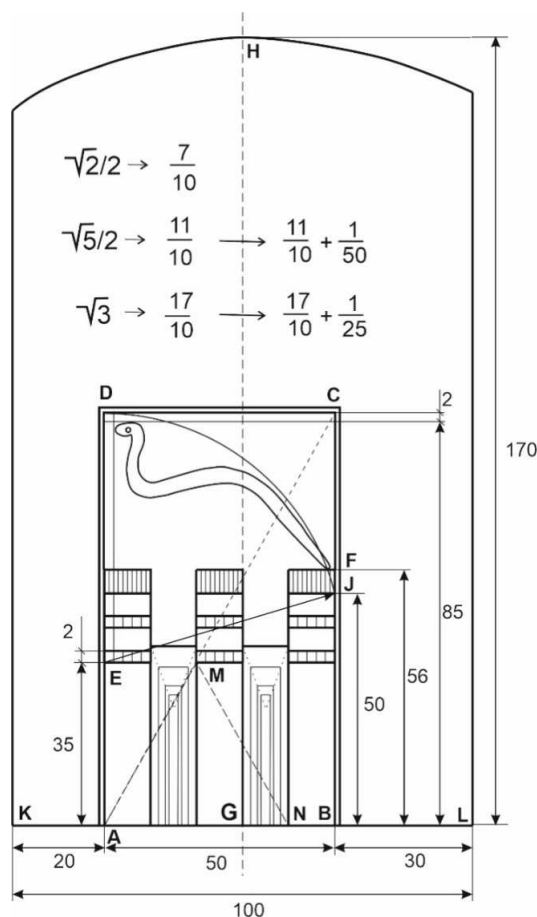


Рис. 1. Стела Джета, модульный анализ

Стела Джета может быть свидетелем не только применения модульного подхода при строительстве дворца фараона, но и уточнения при нем значений отношения сторон основных прямоугольных треугольников, что в современных обозначениях соответствует нахождению $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$. Но этот подход имел один существенный недостаток. Например, для введения в архитектурный план равностороннего треугольника, надо было на этом участке использовать длину, кратную, как минимум, 50 у. е. Если вначале десятичная система счета поддержала исходные приближения для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ в виде $7/5$, $17/10$ и $11/5$, то последующее уточнение их в рамках десятичного подхода, происшедшее, видимо, уже ХХХ в. до н.э., могло привести к громоздкости в построениях при их использовании в архитектурной практике, и появлению чувства неудовлетворенности. Это могло подтолкнуть искать другие подходы для дробного выражения величин, задаваемых геометрическими приемами переноса диагоналей и построения треугольников по отношению высота/основание. Такой системой со временем стала линейка природных длин, вложенных друг в друга единиц: палец, ладонь, локоть. При этом некоторые из них, скорее всего, использовались до этой реформы. Надписи на Палерском камне говорят, что локоть, ладонь и пальцы использовались для измерения высоты подъема Нила еще во времена I династии. Естественно считать, что вначале появились простой локоть в 45 – 46 см, но остается вопрос: когда он был приравнен 6-и ладоням?

Мерные модули и дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ во время III династии

Хотя царский локоть в 52,4 см и 7 ладоней (28 пальцев) первоначально был определен из размеров погребальной камеры фараона в Великой пирамиде, его применяют при анализе и более ранней архитектуры. Частичная успешность этой экстраполяции не побуждает исследователей пересмотреть время его появления. Лауэр писал: «...египетский царский локоть длиной от 0,5235 до 0,524 м» применялся «... во всех сооружениях Египта начиная с первых династий... Локоть, равный 0,52 м плюс несколько миллиметров, мог представлять среднюю величину локтей, принятых в Египте с тинисской эпохи» [7, с. 138, 158]. Но средний рост человека равен примерно $4/(1,02 - 1,05)$ его локтя, и высоту в 200 – 206 см никак нельзя назвать средним ростом первых веков египетской цивилизации⁴. В отличие от простого локтя, фута, оргии, сажени и двойного шага, царский локоть может не иметь природного происхождения, что подтверждается его величиной и делением на 7 ладоней, при равенстве длины локтя человека примерно 6 ладоням. Это дает основание предполагать, что его появление может быть связано с какими-то математическими соображениями и построениями. Еще Петри, согласно написанному у Лельгеманн, читал в одном папирусе, что царский локоть был введен для построения гипотенузы квадрата со стороной в один ремен (gmn, 20 пальцев) [16]. В данном случае отражается представление о существовании математической стороны в истории введения царского локтя, а также и о применении в Древнем царстве дроби $7/5$ для диагонали квадрата. Одним из первых методов геометрического пропорционирования при архитектурном проектировании был перенос диагонали квадрата, примененный в масштабе в Негада (XXXII – XXXI вв.), где также использовано вписывание равностороннего треугольника в прямоугольник [4, с. 139–140]. Толчок к введению царского локтя в 7 ладоней могла дать не только дробь $7/5$, но и одна из двух эмпирически найденных для равностороннего треугольника дробей $6/7$ или $7/8$, дающих удовлетворительное приближение в 1%. В случае $6/7$, который представляется, на первый взгляд, более предпочтительным в роли триггера для появления идеи ввести царский локоть, такой треугольник со стороной в царский локоть имел бы высоту в простой локоть. Но он предполагает, что простой локоть до введения царского уже был разбит на 6 ладоней, что требует подтверждения. На Палермском камне есть запись высоты подъема Нила, относящаяся к концу II династии, в год возведения статуи из меди «Высок Хасехемуи» — «2 локтя, 6 ладоней, 2 пальца», что может трактоваться, как довод в поддержку представления, что уже тогда был локоть в 7 ладоней, хотя может быть и свидетельством, что локоть и ладонь могли быть пока еще не связанными мерными величинами.

⁴Согласно современным исследованиям, средний рост человека Бронзового века был 174 см [2].

Между тем, специалисты по египетской метрологии не делают попыток связать историю происхождения царского локтя с какими-либо математическими соображениями. В докторской диссертации «Древний египетский локоть» [13] достаточно подробно разобраны имеющиеся на сегодня взгляды на историю происхождения королевского локтя и методы анализа его эволюции. Согласно приведенному там обзору, авторы, рассматривающие деление локтя на 7 частей, отталкиваются от возможности существования в прошлом такого деления человеческого локтя, что заставляет их несколько менять сами понятия «ладонь» и «локоть», а конкретное его значение связывали с традиционными мерами площади или объема [13, с. 3, 15–18, с. 64–67].

Хирш А.П. в своей диссертации пишет, что *царский локоть* (гс, от латинского “regius cubitus” — “царский локоть”) появился в конце II или в начале III династий и имел длину от 52,1 до 52,9 см [13, с. 50]. Но если царский локоть определять этим диапазоном, то любая длина больше 34,5 метров представима целым числом таких локтей, поскольку $(52,5 \pm 0,4 \text{ см}) \times 66 = 34,65 \pm 0,264 \text{ м}$ — «вилка» погрешности становится больше царского локтя. Если же диапазон возможных значений гс уменьшить до $52,4 \pm 0,2 \text{ см}$, то любая длина больше 69 метров представима целым числом таких локтей. Поэтому следует ограничить рассмотрение больших размеров хотя бы случаями, когда длина кратна 10 царским локтям. Но и при этом остается большая вероятность случайного совпадения. Так при диапазоне локтя от 52,1 до 52,9 см вероятность любой длины от 50 до 150 метров (характерные размеры мастаба и пирамид-спутников), выбранной наугад, оказаться кратной 10 гс равна 0,3, а для интервала от 150 до 250 (большие пирамиды) — 0,6 — достаточно велика, чтобы ею пренебречь⁵. Хирш пишет об обнаружении использования царского локтя в 9,93% исследованных случаев для Древнего царства [13, с. 50]. Малый процент говорит о том, что Хирш мог занижить время появления царского локтя, не учтя случайность совпадений. Поэтому можно говорить о применении царского локтя во времена, когда его существование предварительно не доказано, при длинах кратных ста гс, в противном случае необходимы дополнительные поддерживающие доводы.

Экстраполяция факта применения царского локтя на более раннее время, чем строительство Великой пирамиды, часто побуждает делать ничем особо не обоснованный выбор. Так, первоначальные размеры квадратной мастабы фараона Джосера (основателя III династии) равны $100 \times 63 \text{ см}$. Выбор модуля в 63 см поддерживает ширина комплекса в Саккаре в 277,6 м [4, с. 143], которая равна 440 единицам по 63,1 см. При этом 440 единицам (гс) равна длина основания Великой пирамиды, а, как будет показано ниже, основание пирамиды в Мейдуме — 220 у.е. (гипотетически), что может говорить о знаковости числа 22 или 11 в рамках нумерологии египтян⁶ и является косвенным доводом за верность вводимого модуля. Найденная летом 2018 года в тайнике пирамиды Джосера в Саккаре бронзовая фигурка Осириса высотой 63 см [17] поддерживает предлагаемый вариант⁷. Но $63 \text{ м} = 120 \times 52,5 \text{ см}$, и считают, что использовали царский локоть. А ширина комплекса становится равной 530 гс. Как видно, более-менее удачное соответствие царскому локтю может быть следствием того, что реально использованные архитекторами модули близки к m/n гс, где m, n — небольшие числа. И чем дальше мы уходим в прошлое от Великой пирамиды, тем сложнее достоверно обнаружить царский локоть, тем более «длиной от 0,5235 до 0,524 м».

Введение новых модулей длины могло произойти во время правления фараона Джосера, когда творили два знаменитых архитектора Древнего царства — Имхотеп и Хесира. Рассмотрим две из 11 деревянных панелей из мастабы Хесира, изображенные на рисунках 2 и 3⁸. Как следует из их анализа, проведенного архитектором Шевелевым [8], он придумал, как минимум, три модуля. На панели CG 1427 зодчий держит в левой руке посох, а в правой — скипетр сехем. Шевелев считал, что их

⁵В первом приближении вероятность растет как $P = 0,3 \times l/100$ при $30 < l < 330 \text{ м}$.

⁶В мастабе Хесира были найдены 11 деревянных панелей. Число 11 могло носить религиозно-нумерологическую нагрузку, обуславливающую его применение в архитектуре [9, с. 51–52].

⁷Хотя статуя датируется более поздним периодом, но ее высота не равна целому числу пальцев и, возможно, была выбрана, когда царский локоть еще окончательно не утвердился, как эталон длины.

⁸Фотографии James Edward Quibell (1867 - 1935), открытый доступ.

длины равны мерным модулям, а длина скипетра — основному модулю, поскольку он присутствует на всех панелях. Сехем, который имеет длину (l_1), более всего соответствующую царскому локтю, если исходить из визуальной оценки и сравнения с ростом Хесира (см. рис. 2), примерно в $\sqrt{5}$ раз меньше посоха. Более точное измерение отношения их длин дает среднее арифметическое значение 2,245, что говорит о возможности его равенства дроби $9/4$. За то, что именно эта дробь рассматривается как приближение для $\sqrt{5}$, говорят пропорции рамки — $5 : 8$, в которую вписан архитектор. Такая дробь получается для φ (золотое сечение, $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618\dots$), если применить это приближение для квадратного корня из пяти. Но дробь $5/8$ могла быть использована и без связи с φ , и требуются дополнительные доводы в поддержку утверждения о нахождении дроби $9/4$ для $\sqrt{5}$.



Рис. 2. Панель CG 1427 из мастабы Хесира, Египетский музей, Каир

Отношение длин двух мерных тростей на деревянной панели CG 1426 из мастабы Хесира равно $1,754 \pm 0,005$ — ($l_2 : l_1$), что можно трактовать, как $7/4$ (см. рис. 3). Это может говорить о том, что именно Хесира нашел и установил использование этой дроби для $\sqrt{3}$. На обеих представленных панелях рост архитектора в $2,8 - 2,85$ раза больше длины скипетра. Если считать, что основной мерный жезл равен 8 ладоням и $63 - 63,5$ см⁹, то Хесира имеет рост $178 - 182$ см (примерно $22,5 - 23$ ладони¹⁰) и ногу в $28 - 30$ см, что представляется вполне вероятным. Длина верхней части левой ладони из 4 пальцев, в месте непосредственного контакта со скипетром, по измерению по панели CG 1426, равна $1/8$ части его длины. И к этому можно добавить, что общая сумма обнаруженных фактов поддерживает правомерность этого отождествления. Выбор длины основного мерного инструмента в 8 ладоней мог быть обусловлен нахождением дроби $7/8$ для равностороннего треугольника и $9/8$ для $\sqrt{5}/2$. В этом случае два других мерных «жезла» становятся равными целому числу ладоней

⁹На изначальный выбор длины основного мерного модуля могли повлиять размеры исторически и религиозно значимых предметов. Так знаменитая палетка Нармера (Менеса), основателя первой династии, имеет высоту $63,5$ см, а ширина стелы фараона Джета в Абидосе равна $65,9$ см, что могло повлиять на выбор мерного модуля для пирамиды в Мейдуме.

¹⁰В более поздней системе деления человека в Египте, его рост был равен 22 ладони + выступ за пределы, примерно в пол-ладони, иногда соотносимый с париком. Рост по линию бровей — 3 царских локтя или 21 ладонь.

($l_2 = 110,7 \pm 0,4$ см; $l_3 = 142,3 \pm 0,6$ см). О выделении в Древнем Царстве модуля в 8 ладоней длиной от 60 до 65 см, называемого nbj , писали многие авторы, начиная с середины прошлого века [13, с. 23-25].

Афанасьев считает, что самая небольшая мерная трость в левой руке Хесира на деревянной панели CG 1427 из его погребения (рисунок 1) была получена, как деление самой длиной из трех тростей в $2\sqrt{2}$ раз [1]. Но если $l_3 = 18$ ладоней, а $\sqrt{2} = 7/5$, то ее длина не получается целочисленной в пальцах. Согласно нашим замерам по рисунку, ее длина (l_4) несколько меньше и ближе всего к $11/14$ основного мерного модуля ($l_4 = 11l_1/14 = 49,5 - 49,9$ см), что также не дает целого числа пальцев, но наводит на мысль рассмотреть возможность знания в то время коэффициента геометрической прогрессии сторон прямоугольного треугольника. И не целочисленность длины этой трости могла быть одним из побуждающих поводов в последующем выбрать в качестве основного мерный модуль в 7 ладоней.



Рис. 3. Панель CG 1426 из мастабы Хесира, Египетский музей, Каир

Из предполагаемого знания во времена Джосера пифагоровой тройки (3, 4, 5) еще не следует знание соответствующего частного случая теоремы Пифагора. Даже нахождение квадратичной связи между ними не обязательно приводит к мысли, что эта связь отражает свойства прямоугольных треугольников. Между тем, треугольник (3, 4, 5) мог дать первоначальный толчок к развитию мерных единиц длины. В этом случае, сначала вместе с природным (простым) локтем l_0 появляется модуль в $4/3$ его частей (l_1), что побуждает разделить первый на 3 части, а второй — на 4: $l_0 = 3m$ и $l_1 = 4m$. 3 — мужское число, а 4 — женское, и l_0 становится вертикальным катетом такого треугольника, а l_1 — горизонтальным, что потом отразится в тексте Плутарха¹¹. Хесира, найдя приближения $7/4$ и $9/4$, использует основной жезл длиной в $4m$ в качестве горизонтального катета, а в $7m$ — вертикального. Таким образом, для вертикали прямоугольных треугольников закрепляются два нечетных числа — 3 и 7, которые являются (или со временем станут) числами Осириса. При этом появляется два новых мерных жезла в $7m$ (l_2) и $9m$ (l_3). На следующем шаге реформатор приравнивает мерный жезл l_1 к основанию равностороннего треугольника и стороне квадрата, что дает толчок выделить половину l_1 для горизонтального катета прямоугольного треугольника 7 : 4. Появление $7/8$ и $9/8$ частей l_1 побуждают к его делению на 8 частей, и Хесира, возможно, обнаруживает, что $p = 1/8 l_1 = 1/6 l_0$

¹¹ «Этот треугольник имеет катет из трех частей, основание — из четырех и гипотенузу — из пяти... Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих. Также Осириса можно считать началом, Исиду — вместилищем, а Гора — исходом» (Плутарх: Об Исиде и Осирисе, 56).

примерно равна ладони. Это справедливо считалось бы важным нововведением, и, вероятно, было отражено в рисунке на панели CG 1426. При этом модуль в $7p$, который потом станет царским локтем, при Джосере применяется, скорее всего, только для построения равносторонних треугольников.

В распоряжении Хесира могло быть, как минимум, еще 3 тройки: $(5, 5, \sim 7)$; $(4, 8, \sim 9)$ и $(4, \sim 7, 8)$. Если он знает, что тройка чисел $(3, 4, 5)$ образует стороны прямоугольного треугольника и $3^2 + 4^2 = 5^2$, то мог получить, что:

$$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1, \quad (1)$$

$$4^2 + 7^2 = 8^2 + 1, \quad (2)$$

$$4^2 + 8^2 = 9^2 - 1. \quad (3)$$

Будем называть квазипифагорову тройку (a, b, c) *идеальной* (и.к.т.), если:

$$a^2 + b^2 = c^2 \pm 1.^{12} \quad (4)$$

Формулы (1)–(3) вместе с тройкой $(3, 4, 5)$ могли дать толчок как к открытию теоремы Пифагора, к узнаванию приближенности найденных дробей, так и к отдельному поиску идеальных квазипифагоровых троек.

В Бет-Халлафе, в 23 км к северу от царского некрополя в Абидосе, находится гробница — мастаба размерами $91,4 \times 45,7$ м. Ее датируют чуть более поздним временем, чем первую ступенчатую пирамиду [3, с. 174–175]. В царских локтях она рана 87×174 (гс = 52,5 см), а в основных мерных модулях Хесира — 144×72 ($l_1 = 63,5$ см). Но:

$$144^2 + 72^2 = 161^2 - 1. \quad (5)$$

$161/72$ — подходящая дробь для $\sqrt{5}$. Эта тройка могла быть найдена в результате перебора по формуле: $(4m)^2 + (8m)^2 = n^2 \pm 1$. Но дробь $161/72$ могла быть найдена, в случае знания теоремы Пифагора, и после использования дроби $20/9$ для $\sqrt{5}$ ¹³, которую будем называть «сопряженной» (a_1^*) с $9/4 = a_1$: $a_1 \cdot a_1^* = 5$. Поскольку $\sqrt{5}$ — среднее геометрическое a_1 и a_1^* , то приближение к нему могло искажаться, как среднее арифметическое этих чисел, и $\frac{1}{2}(9/4 + 20/9) = 161/72$ ¹⁴.

Этот пример говорит, что древние архитекторы могли выбирать размеры «двойного квадрата» как пропорциональные 10 модулям ($20m \times 10m$), так и пропорциональные $2n \cdot m \times n \cdot m$, где n — знаменатель в дробном приближении для $\sqrt{5}$. И требуются дополнительные доводы для предпочтения первого варианта¹⁵. При незнании теоремы Пифагора во время III династии, дробь $161/72$, скорее всего, считалась бы точным значением $\sqrt{5}$. Здесь также проявляется тема возможности потери части математических знаний в Древнем Египте из-за чрезмерной их сокрытости. $161/72$ точнее дроби $123/55$, которую предположительно могли использовать позже при строительстве Великой пирамиды [10]. Но и после Великой пирамиды в архитектуре Древнего Египта в основном использовали для $\sqrt{5}$ дробь $9/4$.

¹²Все квазипифагоровы тройки, соответствующие *подходящим* дробям для $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$, полученным из цепных дробей, — идеальные.

¹³О возможности использования этой дроби говорит анализ пропорций погребальной камеры пирамиды Снофру в Мейдуме, который будет приведен ниже.

¹⁴Задав $(a_1 + a_1^*)/2 = \sqrt{a_1 \cdot a_1^*} + \Delta$, можно получить оценку: $0 < \Delta/\sqrt{a_1 \cdot a_1^*} < (a_1 - a_1^*)^2/4N$. Подставив наши значения a_1 и a_1^* , получим $\Delta/\sqrt{a_1 \cdot a_1^*} < 1/(5 \cdot 72^2)$.

¹⁵В случае определения размера царского локтя Великой пирамиды таким дополнительным доводом являются пропорции камеры жены фараона — $11 : 10$, где $1/10$ меньшей стороны равна гс.

Введение царского локтя при Снофру, основателе IV династии

Общепринятое применение царского локтя при анализе пирамид Снофру часто ставит вопросы перед математически грамотным читателем, которые, правда, обычно не озвучиваются в статьях. Так, погребальная камера пирамиды фараона Снофру (XXVII – XXVI вв.) в Мейдуме имеет размеры 590×265 см [14, с. 8] и пропорцию, близкую к $9/4$ (первая подходящая дробь, $\varepsilon = 1\%$), что позволяет выделить модуль в $65,5\text{--}66$ см. Но $265\text{ см} = 5 \times 53\text{ см}$, а $590\text{ см} = 11 \times 53,6\text{ см}$, и принимают отношение размеров $11 : 5$ ($\varepsilon = 1,2\%$), которое не является подходящей дробью, с вариантом царского локтя (гс) в $53,3 \pm 0,3$ см. Первоначальная длина основания пирамиды оценивается в 144 метра [15, с. 98] ($144,32\text{ м}$ — Петри), что приравнивается к 275 гс ¹⁶. При этом царские локти погребальной камеры и длины основания различаются почти на 1 см! Между тем, принятый уклон боковой грани (тангенс угла между гранью и основанием) в $14 : 11$ наводит на мысль ожидать выбора архитектором для основания величины, пропорциональной 22, и $220 \times 65,6\text{ см} = 144,32\text{ м}$. Поскольку $65,6\text{ см} \approx 5/4\text{ гс}$, то этот модуль не обнаруживается, несмотря на более точное описание им погребальной камеры и ожидаемую величину основания в целых числах.

Но и $9/4$ имеет слишком большое отклонение от отношения размеров камеры, превышающее сумму измерительных и строительных погрешностей, если для последней взять принятое стандартное значение для архитектуры Древнего мира в $0,3\%$. В допустимое отклонение попадает вторая подходящая дробь для отношения размеров — $20/9$ ($\varepsilon = 0,2\%$), которая является «сопряженной» первой ($9/4$). Кроме нее попадают еще две дроби: $29/13$ ($\varepsilon = 0,2\%$) и $49/22$ (третья подходящая дробь, $\varepsilon = 0,04\%$). Последняя интересна как содержащая знаковые для египетской нумерологической религии числа 7 (число Осириса) и 22. Это дает основание считать, что для этой пирамиды использовался не один модуль, а пара: m_1 и m_2 . При этом $(590; 265\text{ см}) = (9m_1; 9m_2)$, где $m_1 = 65,6\text{ см}$ и $m_1 = \sqrt{5}m_2$. А ответ на вопрос, какое приближение использовалось для $\sqrt{5}$, требует дополнительных исследований.

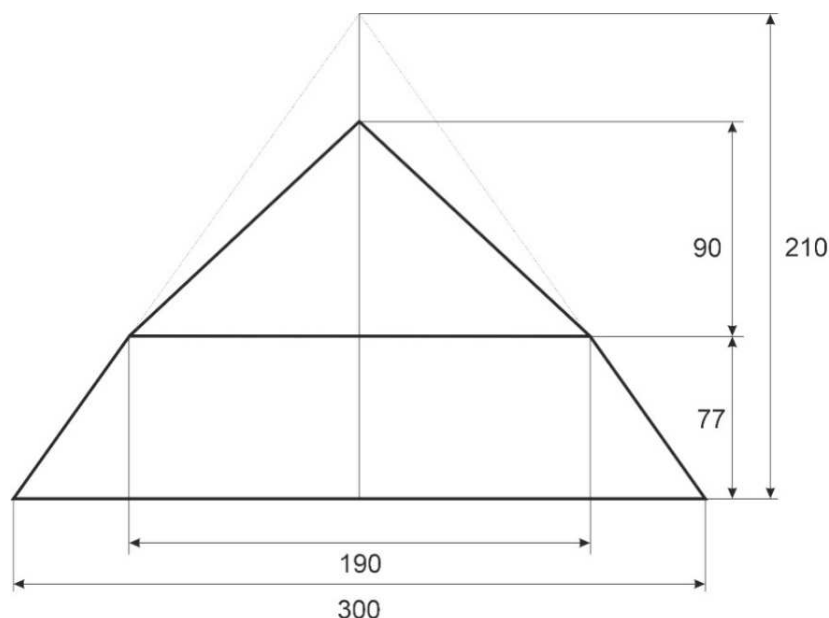


Рис. 4. Вариант размеров Ломанной пирамиды в основных модулях по $63,2\text{ см}$

¹⁶ Часто изначальный размер частично разрушенных пирамид оценивается, исходя из возникающих представлений об ее пропорциях, со стремлением получить целые числа царских локтей для длины основания и высоты. Поскольку для этой пирамиды отношение основания к высоте принято равным $11/7$, то первое оценивается в число царских локтей, пропорциональное 11. Взяв существующую длину основания за нижнюю границу, найдем подходящую величину для исходной в $275\text{ гс} = 275 \times 0,5235 \approx 144\text{ м}$.

Основной мерный модуль Хесира в 8 ладоней мог применяться и при строительстве пирамид Снофру. Нижняя грань Ломанной пирамиды имеет уклон $7/5$, что побуждает предположить пропорциональность ее основания 10 у.е. длины. Между тем, установившееся применение царского локтя приводит к утверждению, что оно было выбрано, равным 362 гс [11, с. 197]. Но оно же равно 300 основных модулей по 63,2 см (l_1). Скорее всего, ее уклон в $7/5$ — приближение для $\sqrt{2}$ [11, с. 208]. При уклоне в $\sqrt{2}$ боковая грань — равносторонний треугольник. Стоит отметить, что при всех возможных значениях уклона верхней части (от $16 : 17$ до $20 : 21$) и выбранных размерах пирамиды, высота излома не получается равной целому числу царских локтей, что представляется маловероятным, если излом пирамиды, как сейчас считается, был в проекте. Но целые и достаточно округлые числа получаются, если считать, что в пирамиде применен основной мерный модуль l_1 . Тогда существующим обмерам удовлетворяют два варианта с уклоном верхней части $18 : 19$ и $19 : 20$. Первый из этих двух вариантов приведен на рисунке 4¹⁷. В нем высота излома (77) равна произведению двух чисел, религиозно значимых для Древнего Египта.

Разбор размеров мерных модулей, применяемых в эпоху до пирамид в Гизе, дает право отойти от ставшего привычным (если не обязательным) использования царского локтя при анализе размеров ранних архитектурных памятников. Благодаря этому отходу, выше была найдена цепочка объектов (комплекс Джосера в Саккаре, пирамида в Мейдуме и Великая пирамида), с выделенностью длины в 220 у.е., что позволило говорить об особом значении существования именно 11 деревянных панелей в захоронении Хесира. Теперь можно анализировать подходящие дроби для отношения размеров мастаб, пирамид и помещений в них, в результате разложения их в цепную дробь. Например, нижняя камера Ломанной пирамиды имеет размеры 630×496 см [13, с. 102], и они считаются равными $12 \times 9,5$ гс ($24 : 19$). Среди подходящих дробей для отношения ее размеров есть $14/11$. Эта пропорция могла реализоваться как $10l_1 \times 10l_4$ и быть примером одновременного использования в архитектуре сразу нескольких парных модулей. Дробь $14/11$ имеет меньшую погрешность ($\varepsilon = 0,20\%$), чем принятая на основании применения царского локтя — $24/19$ ($0,55\%$), имеющая к тому же больший знаменатель. Дробь $14/11$ применена в пирамиде Хуфу и, возможно, в пирамиде Снофру в Мейдуме [11, с. 215–216]. В этой камере отношение диагонали к меньшей стороне равно числу Фидия ($\Phi = 1,618\dots$, отклонение меньше погрешности обмера), ее стороны и диагональ дают очень хорошее приближение к геометрической прогрессии, которую задает только одна пифагорова тройка $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$. При использовании царского локтя для анализа пропорций этой камеры эта особенность не обнаруживается.

Верхняя камера Ломанной пирамиды, пол которой находится на высоте $5l_1$ от нулевой отметки, имеет размеры 526×797 см [15, с. 102]. Приняв отношение сторон $2 : 3$ ($\varepsilon = 1\%$), получим модуль в $52,9 \pm 0,3$ см ($\sim 5/6 l_1$), который можно отождествить с царским локтем, хотя его значение находится на границе области, определенной Хиршем. При этом ее размеры становятся равными 10×15 гс. Эти числа образуют и.к.т. — $(10, 15, 18)$, что является доводом за возможность использования уже в Ломанной пирамиде царского локтя. Но отличие отношения размеров камеры от $3/2$ равно 1% , что считается много (обычно принимается $\varepsilon < 0,6\%$). В Розовой пирамиде отличие отношения размеров камер от «теоретической» не превышает $0,4\%$. Если считать, что строители достаточно точно вывели ее размеры, то она имеет пропорцию $33 : 50$. При этом выделяется модуль в 15,9 см, равный $1/4 l_1$ (2 ладони), а числа пропорции образуют квазипифагорову тройку $(33, 50, 60)$. Диагональ камеры отличается от 60 модулей на $0,15\%$.

Размеры пирамиды-спутника Ломанной (основание $\sim 52,5$ м), как и Розовой пирамиды в Дахшуре (220×105 м) говорят об использовании уже царского локтя в 52,5 см. О применении царского локтя в последней говорят и размеры Нижней камеры — 365×836 см [15, с. 104]. Подходящая дробь для их отношения, $7/16$, выделяет модуль в 52,2 см. Выбор такой пропорции можно объяснить вписыванием в прямоугольник основания двух равносторонних треугольников, что говорит

¹⁷Второй вариант в l_1 : высота излома — 70, верхнее основание — 200, общая высота — 165 (104,3 м).

об использовании дроби $7/8$ для $\sqrt{3}/2$. Размеры Верхней погребальной камеры (418×835 см) [18], интерпретируемые как 8×16 гс, также поддерживают царский локоть в $52,2$ см.

Размеры входного проема Розовой пирамиды, 105×121 см [20, с. 13], говорят о возможности использования для $\sqrt{3}/2$ более точной дроби $13/15$. Если $7/8$ ($105/120$) отличается от $\sqrt{3}/2$ на 1% , то $105/121$ — на $0,2\%$. Добавка в 1 см высоты может быть результатом погрешности строительства, хотя она выходит за установленные пределы в $0,3\%$. В случае получения во времена Снофру для $\sqrt{3}/2$ дроби $13/15$, могла использоваться пара модулей: гс и $m_3 = 15/13$ гс ($60,5$ см)¹⁸.

Щетников и некоторые историки архитектуры связывают пропорции Розовой пирамиды, половину основания и высоту которой часто приравнивают к 210 и 200 гс соответственно, со знанием пифагоровой тройки чисел $(20, 21, 29)$ и отмечают, что эта же пропорция могла быть использована в верхней части Ломанной пирамиды [10, с. 211; 11, с. 219, 224 – 225; 15, с. 128]. Против этого варианта выступает религиозное наполнение числа 210 как произведения чисел Осириса (3 и 7) и завершенности (10), которое должно было подтолкнуть приравнять высоту к 210 гс, тогда основание — 220 гс. Дорнер в своей реконструкции 1998 года предлагает высоту в $109,54$ м [12]. Если считать, как большинство исследователей, что ее уклон меньше 45° , то этой высоте более всего соответствует пропорция $21 : 22$ (вместо принятой $20 : 21$) и гс = $52,2$ см, совпадающий с полученным из анализа размеров всех камер. За этот вариант и использование числа 22 в основании первой пирамиды Снофру в Мейдуме. В этом случае, с учетом написанного про Ломанную пирамиду, пифагорова тройка $(20, 21, 29)$ становится неизвестной во времена Снофру, что представляется более вероятным.

Эти факты дают основание предположить, что царский локоть в $52,4 \pm 0,2$ см был введен при фараоне Снофру — отце Хуфу, но только в самом конце истории строительства пирамид при нем. При этом произошло уменьшение длины «ладони». Интересно отметить, что на Палермском камне первое использование сочетания «королевская ладонь» относится ко времени Снофру. Скорее всего, только после возведения Великой пирамиды, высота которой равна 280 гс, локоть в $52,4$ см окончательно замещает основной мерный модуль Хесира и закрепляется из-за удобства использования длины в 7 и 28 единиц в качестве стандартной высоты при выборе уклона пирамиды в $7/5$, $7/4$, $14/11$ и $4/3$, каждый из которых был обусловлен конкретной математикой.

Литература

- [1] Афанасьев К.Н. Опыт пропорционального анализа / Материалы ICOMOS: Науч. информ. - Вып.1. - М., 2000.
- [2] Бужилова А.П. Homo sapiens: история болезни.- М.: Языки славянской культуры, 2005.
- [3] Вейгалл А. История фараонов. Правящие династии раннего, Древнего и Среднего царства Египта. 3000—1800 до н.э. / Пер. с англ. И.Б. Куликовой. - М.: ЗАО Центрполиграф, 2018. - 351 с.
- [4] Всеобщая история архитектуры. В 12 т. Т. I. Архитектура древнего мира. Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1970. - 512 с.
- [5] Зверкина Г.А. Алгоритм Евклида как вычислительное средство античной математики // Историко-математические исследования. - Выпуск 5(40). - 2000. - с. 232-243.
- [6] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т., Т. 1. - М.: Наука, 1970.

¹⁸Попытка описать все размеры пирамид с использованием одного модуля — следствие экстраполяции «Канона» Витрувия на всю архитектуру Древнего мира. Анализ пропорций показывает, что не только в пирамидах Снофру, но и в греческой архитектуре было характерно использование парных модулей. Примером последнего является знаменитый Парфенон.

- [7] Лауэр Ж-Ф. Загадки египетских пирамид. - М.: Наука, 1966.
- [8] Шевелев И.Ш. Принцип пропорции: О формообразовании в природе, мерной трости древнего зодчего, архитектурном образе, двойном квадрате и взаимопроникающих подобиях. - М.: Стройиздат, 1986.
- [9] Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. - Минск, Изд-во "Университетское", 1993.
- [10] Шетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. -2006. - № 3(38) - с. 59-71.
- [11] Corinna Rossi, Architecture and mathematics in Ancient Egypt. - Cambridge University press, 2003. - 280 p.
- [12] Dorner J. Neue Messungen an der Roten Pyramide, in Stationen: Beiträge zur Kulturgeschichte, Ägyptens. - Mainz, 1998.
- [13] Hirsch Antoine Pierre, Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution. PhD thesis. - Toronto, 2013.
- [14] Irigaray Christian. The Pyramids of Sneferu. - Montevideo, 2020.
- [15] Lehner M. The complete pyramids. - London, 1997.
- [16] Lelgemann D. Recovery of the Ancient System of Foot/Cubit/Stadion — Length Units // History of Surveying and Measurement, Athens. - May 2004. - pp. 22-27.
- [17] The God statue Discovered in the First Ancient Egyptian Pyramid // Luxor Times. - 2018, July 1.
- [18] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Memfite, Parte III, Il Complesso di Meydum, la piramide a Doppia Pendenza e la piramide Settentrionale in Pietra di Dahsciur. - Torino: Artale, 1964.
- [19] Parker Richard A. Demotic Mathematical Papyri. - Providence, R.I.: Brown University Press, London: Humphries, 1972.
- [20] Hamilton K. The Red Pyramid // A Layman's guide. - 27 September 2017. [Электронный ресурс]
URL: https://www.researchgate.net/publication/320131285_The_Red_Pyramid_A_layman's_guide

*Ковалев Андрей Николаевич
Санкт-Петербург.*

E-mail: ser.levsha@yandex.ru

Информация

От редакции

Успех статьи нашего автора

В декабре 2021 года в Ростове-на-Дону подводились итоги **VII Ежегодного Международного конкурса научных публикаций «Magnum Opus Publication-2020/2021»**.

Статья автора нашего журнала Попова Вячеслава Александровича «О закономерностях появления первых цифр простых чисел // Математическое образование. № 1(97), 2021. – С. 51-57» стала победителем в Номинации «Публикация в журналах с импакт-фактором, учитываемых в РИНЦ» по направлению "Междисциплинарные исследования".

Она награждена медалью и дипломом. Редакция поздравляет автора с этим замечательным достижением и надеется на дальнейшее плодотворное сотрудничество!



Медаль победителя



Диплом победителя

Ушёл из жизни Александр Юрьевич Эвнин (24.09.1960 – 19.11.2020)

Краткий некролог постоянного автора нашего журнала Эвнина Александра Юрьевича, а также список его публикаций в журнале “Математическое образование”.



А.Ю. Эвнин

Редакция с прискорбием сообщает о кончине 19 ноября 2020 г. постоянного автора нашего журнала, доцента Южно-Уральского государственного университета, кандидата педагогических наук Эвнина Александра Юрьевича (родился 24 сентября 1960 г. в г. Челябинск). Редакция получила информацию о кончине примерно через год, после того как предложила ему опубликовать статью в юбилейном 100-м номере журнала. Это было признанием его больших заслуг как автора, выступавшего в амплуа и ученого-математика, и педагога, а также признанием исключительно высокого качества его публикаций.

Воспоминания Имайкина В.М., главного редактора журнала:

“Я познакомился с Александром Юрьевичем на конференции по математическому образованию в Дубне в 2000-м году. Он произвел на меня большое впечатление как человек, болеющий за правильную постановку математического образования в России, имеющий свою собственную выверенную концепцию такой постановки, и активно и аргументированно ее отстаивающий. Мы много с ним беседовали по разным вопросам образования, а также нам было о многом интересно поговорить как землякам (я родом из Челябинской области). При личном общении он усилил впечатление своей глубокой интеллигентностью, эрудицией, хорошо поставленной речью.

Мы обменялись контактами и затем регулярно переписывались, в основном по вопросам публикаций, поскольку А.Ю. стал одним из наиболее активных авторов журнала, а также, на добровольной основе, его распространителем в своем регионе. Его публикации отличались элегантным стилем, изящностью изложения, отточенностью формулировок и глубиной стоящих за ними идей.

К сожалению, нам больше не довелось встретиться лично. Я всегда буду тепло вспоминать об этом замечательном математике и педагоге и просто хорошем человеке.”

В журнале “Математика в высшем образовании”, № 18, 2020 г., стр. 1-4, опубликован некролог А.Ю. Эвнина. Приводим из него выдержку, относящуюся к его педагогической деятельности и заслугам:

“А.Ю. Эвнин был тренером и научным руководителем студенческих команд ЮУрГУ, успешно выступавших на протяжении многих лет в олимпиадах и чемпионатах по математике. Под его руководством студенты ЮУрГУ неоднократно становились победителями и призерами Всероссийских и международных олимпиад в Йошкар-Оле, Уфе, Туле, Ярославле, Казани, Екатеринбурге, Могилёве (респ. Беларусь), Ариэле (Израиль), а также в заочных соревнованиях (Открытая международная командная олимпиада, International Olympiad for University Students — Mirror of William Lowell Putnam Mathematical Competition).

В 2009 г. А.Ю. Эвнин организовал «Математический конкурс в ЮУрГУ» — заочное математическое соревнование по решению нестандартных задач для студентов и аспирантов, проводимое на базе одноименной группы в социальной сети «ВКонтакте» <https://vk.com/club6779920> (на настоящий момент в этой группе более 500 участников, проведено 69 конкурсов). В конкурсе принимают участие не только студенты и аспиранты ЮУрГУ, но также представители вузов Москвы, Екатеринбурга и взрослые любители математики из разных городов России.

А.Ю. Эвнин — организатор и бессменный руководитель Открытой командной олимпиады ЮУрГУ по математике. По его инициативе эта олимпиада ежегодно, начиная с 2012 г., привлекает к участию более 50 команд различных школ, лицеев, колледжей и вузов Челябинска и области. В олимпиаде 2019 г. участвовало 60 команд, среди них команды от 5 лицеев и 4 вузов Челябинска.

А.Ю. Эвнин опубликовал более 80 статей в журналах «Квант», «Математическое образование», «Математика в высшем образовании», «Математика в школе» и др., и 50 книжек — учебников и учебных пособий, из которых особо популярны «Вся высшая математика, т. 7», «Задачник по дискретной математике», «Вокруг теоремы Холла», «150 красивых задач для будущих математиков» и др., изданные в московском издательстве URSS. Часть упомянутых книг переведена и издана на испанском языке.

А.Ю. Эвнин удостоен званий «Почетный работник сферы образования» и «Ветеран труда». Он лауреат премии «Признание ЮУрГУ» (2013 г.) в номинации «Учебный процесс» за выдающееся педагогическое мастерство в деле подготовки победителей студенческих математических олимпиад, лауреат профессиональной премии для преподавателей города Челябинска «Ученый свет» (2014). Обладатель гранта фонда «Династия» как победитель Творческого конкурса учителей математики РФ 2013 г. В 2018 г. Александр Юрьевич занял II место в конкурсе учебной литературы, посвященном 75-летию ЮУрГУ. Дважды был удостоен грантов от СКБ «Контур» за педагогическую активность.”

Список публикаций А.Ю. Эвнина в журнале “Математическое образование”

1. Две заметки по комбинаторике, № 3(14), 2000 г., с. 27-34.
2. Сверхстепени и их разности, № 1(16), 2001 г., с. 68-73.
3. Задачи Путнамовских олимпиад, № 3(22), 2002 г., с. 86-102; Задачи Путнамовских олимпиад (окончание), № 4(23), 2002 г., с. 101-119.
4. Олимпиада абитуриентов Южно-Уральского государственного университета, № 1(28), 2004 г., с. 100-106.
5. Элементарное введение в матроиды, № 2(33), 2005 г., с. 2-33.
6. Вокруг теоремы Холла, № 3(34), 2005 г., с. 2-23; Вокруг теоремы Холла (окончание), № 4(35), 2005 г., с. 2-16.
7. Антиматроиды, № 1(45), 2008 г., с. 2-8.
8. Перманент матрицы и его вычисление, № 2(46), 2008 г., с. 45-49.
9. Южно-Уральская региональная математическая олимпиада, № 1(49), 2009 г., с. 2-12.
10. Дополнения до полных латинских квадратов, № 2(62), 2012 г., с. 71-75.
11. Хроматический многочлен графа в задачах, № 4(72), 2014 г., с. 9-15.
12. Метод масс в задачах, № 1(73), 2015 г., с. 27-47.

13. Задачи математического конкурса в ЮУрГУ, № 4(76), 2015 г., с. 26-52.
14. Командные математические олимпиады в ЮУрГУ, № 2(82), 2017 г., с. 7-26.
15. Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах (с Лернером Э.Ю., Игнатовым Ю.А., Григорьевой И.С.), № 4(84), 2017 г., с. 45-60.
16. Теорема Гринберга и её применение, № 1(85), 2018 г., с. 60-65.
17. Тесты в духе GRE, № 2(86), 2018 г., с. 50-65; Тесты в духе GRE (окончание), № 3(87), 2018 г., с. 38-52.
18. Задачи математического конкурса в ЮУрГУ. II, № 1(89), 2019 г., с. 43-56.
19. Задачи по линейной алгебре на студенческих олимпиадах (с Игнатовым Ю.А.), № 3(91), 2019 г., с. 26-48.
20. Задачи по математическому анализу на студенческих олимпиадах, № 2(94), 2020 г., с. 55-76.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2022 год (включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2022 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

R. Akberdin, N. Gorshkov. Signs of Equality of Triangles and Extreme Problems 2

In this paper, extreme problems related to the geometry of triangles are reduced to the study of a function of one variable, one of the parameters of a triangle, using a derivative.

M. Bortkovskaya, T. Stepanova. Two Proofs of Invariance of Rotor w.r.t. Replacement of a Basis as an Example of the Relationship of Courses of Physics and Mathematics 9

In the paper, using the example of two different proofs of the invariance of the rotor with respect to a replacement of a basis, the methodology of teaching vector calculations in coordinates is demonstrated; the methodological justification of the need to master this technique for solving problems in physics is given; the possibility of using the studied methodology to create an interdisciplinary connection between mathematics and physics in the educational process of technical and physical areas of study of university students is shown.

V. Fedoseyev. Math Olympiads and Competitions at Penza Technological University 13

The article discusses the most interesting tasks that have been offered for a number of years to students of the Penza State Technological University. Some tasks are given with ready-made solutions, others are offered for independent research.

A. Andreev, E. Skorodumova, E. Maximova. Olympiad of School Students “TIIM: Technologies. Intelligence. Computer science. Mathematics” 2021/2022 19

The article tells about the Olympiad for school students in mathematics and computer science “TIIM” of the 2021/22-nd academic year.

T. Machurina. Chaos Theory and Fractals in Psychotherapy and Clinical Psychological Consulting 38

The article considers the possibility of using strange attractors of the E. Lorentz system and B. Mandelbrot fractals in psychological theory and practice.

A. Kovalev. Fractions for $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, Quasi Pythagorean Triples and the Appearance of the Royal Cubit, Foot and Inch in Egypt during the Ancient Kingdom 43

Based on the analysis of the sizes of Egyptian architectural structures and art objects of the first half of the III millennium BC, a reconstruction of the history of finding fractions for $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ is proposed, starting with $7/5$, $17/10$ and $11/5$, respectively. Analysis of architectural proportions of the times of pharaohs Djoser and Snefru (XXVII century. BC) speaks of the most likely use, up to the construction of the last Polyline Pyramid, of dimensional modules other than the royal cubit of 7 palms.

Current Information 55