

# Математическое Образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

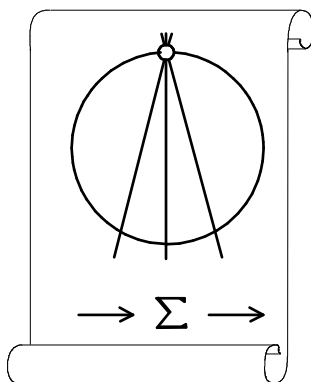
год двадцать девятый

№ 3(115)

июль - сентябрь 2025 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание  
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.

Дворянинов С.В.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

**Константинов Н.Н.**

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№3 (115), 2025 г.

© “Математическое образование”, составление, 2025 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2025 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 17.10.2025 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулеповым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№3 (115), июль – сентябрь 2025 г.

## Содержание

### Учащимся и учителям средней школы

- А. Н. Афанасьев.* О разнообразии решений задачи по элементарной геометрии на примерах работ студентов 2
- Д. Д. Баврин.* Меридогон, или механизм, позволяющий делить произвольный угол на произвольное число частей 9
- В. Ф. Очков, А. А. Бобин, И. А. Изъюров, П. А. Полторанин.* Математическое образование и современные информационные технологии: показательный пример 11

### Студентам и преподавателям математических специальностей

- А. В. Бегунц, А. А. Лобода.* Об одной задаче, связанной с дзета-функцией Римана 19
- А. Ф. Ляхов, Д. Е. Фомичев.* Алгоритм размытия границ изображения на основе нечетких множеств 23
- А. О. Ремизов.* Интеграл энергии и огибающие. Геодезические на поверхностях вращения 37
- С. В. Шведенко.* К определению двусторонней поверхности 50
- С. В. Шведенко.* Чему равна площадь ленты Мёбиуса? 52

### Из истории науки

- В. О. Соловьёв.* К 100-летию со дня смерти А.А. Фридмана (1888 – 1925) 54

### Из истории математики

- В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук.* О задаче барона Мюнхгаузена. Леонард Эйлер. Часть 1 63



## О разнообразии решений задачи по элементарной геометрии на примерах работ студентов

*А. Н. Афанасьев*

В заметке представлены различные способы решений, из работ участников олимпиады, интересной геометрической задачи. Проведен анализ решений.

Весной 2023 года проходила 10-я Всероссийская олимпиада студентов ВУЗов и учащихся СУНЦ по элементарной геометрии [1]. Мысль о написании этой статьи у автора возникла во время проверки работ участников этой олимпиады. Работы показывают, насколько разным может быть ход мыслей студентов при решении одной и той же задачи. Думаю, что эти решения будут интересны учителям и преподавателям математики. Ведь решение одной задачи разными способами является одним из наиболее эффективных методов обучения решению задач. Недаром сам Дьерд Пойа говорил: “Лучше одну задачу решить пятью способами, чем пять задач одним способом”.

Что касается темы решения задачи по геометрии разными способами, нужно отметить книгу [2], в предисловии к которой сказано:

“Решение задачи разными методами дает возможность полнее исследовать свойства геометрической фигуры. Иногда удастся подметить свойство, о котором в задаче ничего не говорится, или получить интересное обобщение задачи. Важно и то, что придя разными путями к одному и тому же результату, мы получаем уверенность в правильности решения.

Решение задач, допускающих ряд решений, — увлекательная работа, требующая знаний всех разделов школьной математики. Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач.”

Автор настоящей статьи и раньше обращался к этой теме в статье [3].

Вот условие задачи, которая на этой олимпиаде была дана под номером 4.

Известно, что величина угла  $B$  в треугольнике  $ABC$  равна  $60^\circ$ . Кроме того оказалось, что существуют точка  $E$  на стороне  $AB$  и точка  $D$  на стороне  $BC$  такие, что  $\angle DEB = 102^\circ$ ,  $\angle AEC = 69^\circ$ ,  $\angle ADC = 111^\circ$ . Найдите  $\angle CAB$ .

**Решение** (решение автора задачи).

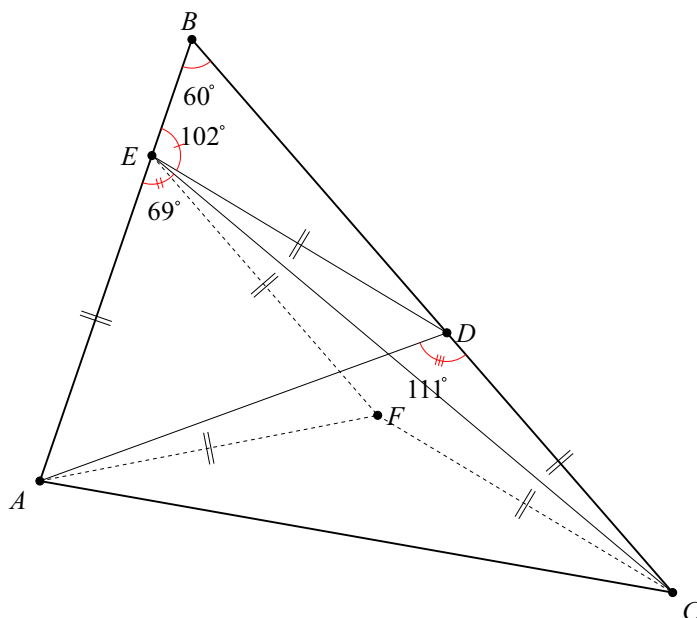


Рис.1. К решению автора.

1.  $\angle EDC = \angle EBD + \angle DEB = 162^\circ$  как внешний угол треугольника  $DBE$ .
2. Рассмотрим треугольник  $ADE$  :  $\angle EDA = 162^\circ - 111^\circ = 51^\circ$ ,  $\angle AED = 180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$ ,  $\angle DAE = 180^\circ - 78^\circ - 51^\circ = 51^\circ$ , то есть

$$AE = ED. \quad (1)$$

3. Рассмотрим треугольник  $ECD$  :  $\angle CED = 180^\circ - 102^\circ - 69^\circ = 9^\circ$ ,  $\angle DCE = 180^\circ - 162^\circ - 9^\circ = 9^\circ$ , то есть

$$ED = DC. \quad (2)$$

Следовательно, учитывая (1) и (2),  $AE = ED = DC$ .

4. Пусть точка  $F$  лежит в той же полуплоскости, что и точка  $C$  относительно прямой  $AB$ , и треугольник  $AEF$  — равносторонний. Заметим, что тогда треугольники  $EFC$  и  $AFC$  равнобедренные (точка  $F$  симметрична точке  $D$  относительно  $EC$ ). Далее найдем, что  $\angle CFA = 360^\circ - 162^\circ - 60^\circ = 138^\circ$  (следовательно точка  $F$  лежит внутри треугольника  $ADC$ ),  $\angle CAF = \angle ACF = \frac{180^\circ - 138^\circ}{2} = 21^\circ$ . И наконец:

$$\angle CAD = 60^\circ + 21^\circ = 81^\circ.$$

Участники олимпиады удивили разнообразием решений этой задачи. Жюри насчитало 9(!) разных решений этой задачи, причем только одно решение было близко к решению автора.

Далее приводим некоторые решения этой задачи участниками олимпиады. Тексты решений приведены без изменений (насколько это возможно), чертежи, для однообразия, сделаны автором, с учетом чертежей студентов. Курсивом набраны комментарии автора.

Расшифровка некоторых встречающихся в тексте аббревиатур высших учебных заведений:

- ПГУ — Пензенский государственный университет;
- СВФУ — Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова;
- САФУ — Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова.

### 1. Решение Храмовой Дарьи Вячеславовны, ПГУ.

Это единственное решение, которое близко к решению автора. Точка  $G$  (у автора это точка  $F$ ) в этом решении определяется как вершина ромба  $EGCD$ .

$\angle BDE = 18^\circ$  (по теореме о сумме углов  $\triangle BED$ ),  $\angle DEC = 180^\circ - 102^\circ - 69^\circ = 9^\circ$  (т. к.  $\angle AEB$  — развернутый),  $\angle DCE = \angle EDB - \angle DEC = 18^\circ - 9^\circ = 9^\circ$  (по свойству внешнего угла).

Тогда  $\triangle DEC$  — равнобедренный (по признаку, связанному с равенством двух углов треугольника). Значит,  $ED = DC$ .

$\angle EDA = 180^\circ - \angle EDB - \angle ADC = 180^\circ - 18^\circ - 111^\circ = 51^\circ$  (так как  $\angle BDC$  — развернутый).

$\angle EAD = 180^\circ - 69^\circ - 9^\circ - 51^\circ = 51^\circ$  (по т. о сумме углов  $\triangle AED$ ).

$\triangle AED$  — равнобедренный (т. к. два угла равны),  $AE = ED$ .

Возьмем точку  $G$  так, чтобы четырехугольник  $EGCD$  был ромбом. Тогда  $ED = DC = EG = GC$ ,  $\angle EGC = 162^\circ$  (по свойству углов ромба).

Точка  $G$  лежит в одной полуплоскости с  $A$  относительно  $BC$ . Тогда  $\angle AGC = 360^\circ - \angle AGE - 162^\circ$ ,  $\angle DCG = 18^\circ$  (как соответственный с  $\angle EDG$ )  $ED \parallel GC$  (как противоположные стороны ромба).

$\triangle AEG$  — равнобедренный,  $\angle AEG = 60^\circ$ . Значит  $\triangle AEG$  — равносторонний,  $AG = AE = EG$ . Следовательно  $\angle AGE = 60^\circ$ . Тогда  $\angle AGC = 360^\circ - 60^\circ - 162^\circ = 138^\circ$  (точка  $G$  лежит внутри треугольника  $ADC$ ).

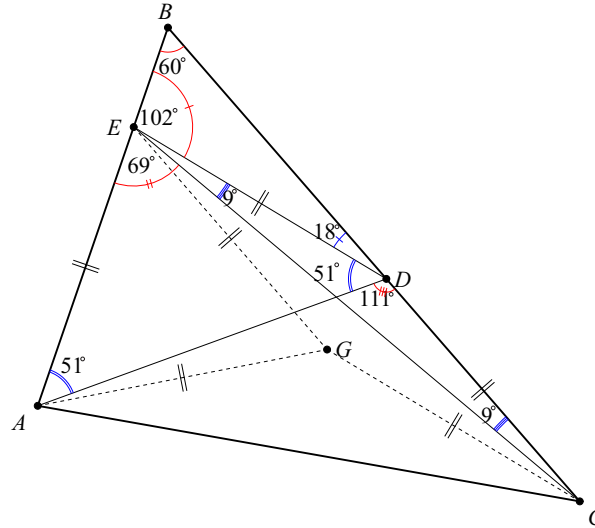


Рис. 2. К решению Храмовой Д.В.

$\triangle AGC$  — равнобедренный,

$$\angle GAC = \frac{180^\circ - 138^\circ}{2} = 21^\circ, \quad \angle CAB = 60^\circ + 21^\circ = 81^\circ.$$

## 2. Решение Животковой Юлии Валерьевны, ПГУ.

Это и следующее решения опираются на вписанность четырехугольника  $OEBD$ , где  $O$  — точка пересечения  $AD$  и  $EC$ .

$\angle CED = 180^\circ - 171^\circ = 9^\circ$ ,  $\angle EDC = 102^\circ + 60^\circ = 162^\circ$  (внешний угол  $\triangle BED$ ),  $\angle EDA = 51^\circ$ ,  $\angle EOD = 120^\circ$ .

Около 4-угольника  $BEOD$  можно описать окружность ( $\angle EBD + \angle EOD = 180^\circ$ ),  $\angle OBD = \angle OED = 9^\circ$  как вписанные углы.

$\triangle AED$ :  $\angle EAD = 180^\circ - (51^\circ + 69^\circ + 9^\circ) = 51^\circ$ ,  $\angle OCB = 9^\circ$  (по сумме углов  $\triangle ECD$ ).

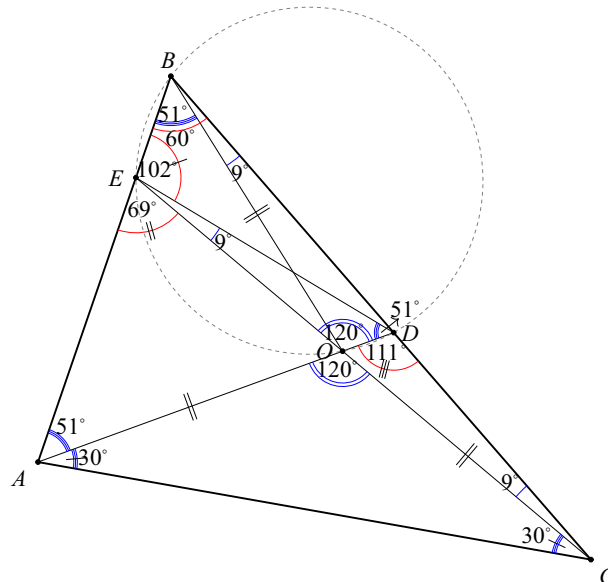


Рис. 3. К решению Животковой Ю.В.

$$\begin{cases} \triangle BOC - \text{равнобедренный, } BO = OC \\ \triangle BOA - \text{равнобедренный, } BO = AO \end{cases} \Rightarrow OC = AO \Rightarrow \triangle AOC - \text{равнобедренный}$$

$\angle AOC = \angle EOD = 120^\circ$  (вертикальные). Тогда  $\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$ ,  $\angle BAC = 81^\circ$ .

**Решение Данилова Дона Спиридоновича, СВФУ.**

Решение отличается от предыдущего подачей.

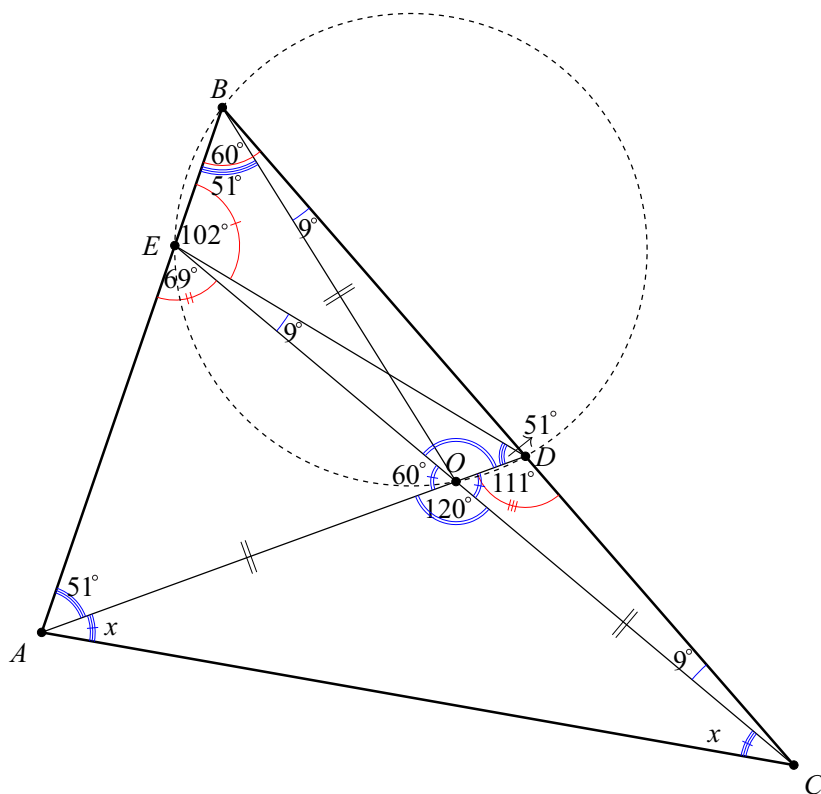


Рис. 4. К решению Данилова Д.С.

$$\begin{aligned} \angle EDB &= 180^\circ - 102^\circ - 60^\circ = 18^\circ, & \angle CED &= 180^\circ - 69^\circ - 102^\circ = 9^\circ, \\ \angle EDO &= 180^\circ - 111^\circ - 18^\circ = 51^\circ, & \angle EOD &= 180^\circ - 9^\circ - 51^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$

Заметим, что четырехугольник  $OFBD$  вписан в окружность (сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ ).

Соответственно  $\angle OBD = \angle OED = 9^\circ$ , также заметим, что  $\triangle BOC$  равнобедренный, так как  $\angle OCB$  тоже равен  $9^\circ$  ( $180^\circ - 111^\circ - 60^\circ$ ).

$\angle EBO = \angle EDO = 51^\circ$ , заметим, что  $\triangle AOB$  равнобедренный, так как  $\angle BAO$  тоже равен  $51^\circ$  ( $180^\circ - 69^\circ - 60^\circ$ ). То есть,  $AO = BO = OC$ , следовательно,  $\triangle AOC$  — равнобедренный, значит,  $\angle OAC = \angle OCA = x$ . Найдем  $x$ :  $180^\circ = 69^\circ + 51^\circ + 2x \Rightarrow x = 30^\circ$ .

То есть,  $\angle CAB = 51^\circ + 30^\circ = 81^\circ$ .

#### 4. Решение Гришина Василия Васильевича, САФУ.

Решение интересно тем, что для доказательства равнобедренности треугольника  $AOC$  привлечена теорема синусов.

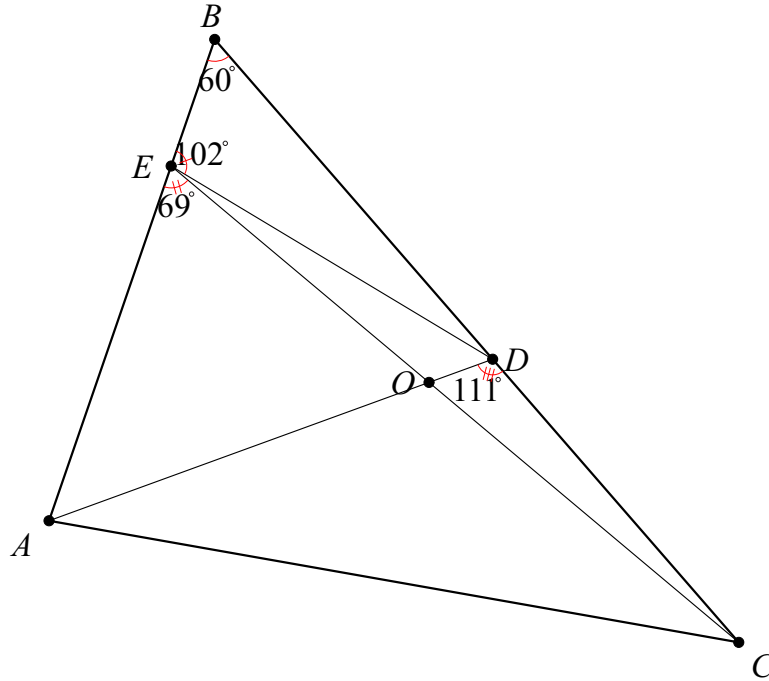


Рис. 5. К решению Гришина В.В.

$O = AD \cap EC$ ,  $\angle DEC = 180^\circ - 102^\circ - 69^\circ = 9^\circ$  (в сумме  $\angle BEA = 180^\circ$ ),  
 $\angle BDE = 180^\circ - 60^\circ - 102^\circ = 18^\circ$  (из  $\triangle EBD$ ),  $\angle EDA = 180^\circ - 60^\circ - 111^\circ = 51^\circ$  (в сумме  $\angle BDC = 180^\circ$ ),  
 $\angle EAD = 180^\circ - 69^\circ - 9^\circ - 51^\circ = 51^\circ$  (из  $\triangle AED$ ),  $\angle EDA = 51^\circ$ ,  $\angle EAD = 51^\circ \Rightarrow EA = ED$ ,  
 $\angle DCE = 180^\circ - 111^\circ - 9^\circ - 51^\circ = 9^\circ$  (из  $\triangle DCE$ ),  $\angle DEC = 9^\circ$ ,  $\angle DCE = 9^\circ \Rightarrow ED = DC$ ,  
 $ED = DC$ ,  $EA = ED \Rightarrow DC = EA$ .  $\angle EOD = 180^\circ - 51^\circ - 9^\circ = 120^\circ$  (из  $\triangle EOD$ ),  
 $\angle AOC = \angle EOD = 120^\circ \Rightarrow \angle DAC + \angle ECA = 60^\circ$  (из  $\triangle AOC$ ).

Из треугольников  $AEC$  и  $ADC$  по теореме синусов:

$$\begin{cases} \frac{AC}{\sin 69^\circ} = \frac{AE}{\sin \angle ECA} \\ \frac{AC}{\sin 111^\circ} = \frac{DC}{\sin \angle DAC} \end{cases} \Rightarrow OC = AO \Rightarrow \frac{\sin \angle DAC}{\sin 111^\circ} \cdot AC = \frac{\sin \angle ECA}{\sin 69^\circ} \cdot AC \Rightarrow$$

$$\frac{\sin \angle DAC}{\sin \angle ECA} = \frac{\sin 111^\circ}{\sin 69^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 111^\circ)}{\sin 69^\circ} = \frac{\sin 69^\circ}{\sin 69^\circ} = 1 \Rightarrow \sin \angle DAC = \sin \angle ECA.$$

$$\begin{cases} \sin \angle DAC = \sin \angle ECA \\ \angle DAC, \angle ECA \in (0^\circ; 90^\circ) \end{cases} \Rightarrow \angle DAC = \angle ECA.$$

$$\begin{cases} \angle DAC = \angle ECA \\ \angle DAC + \angle ECA = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle DAC = \angle ECA = 30^\circ \Rightarrow \angle CAB = \angle EAD + \angle DAC = 51^\circ + 30^\circ = 81^\circ.$$

Ниже мы приводим одно из решений, которое можно назвать “решением задачи в рисунках”.

**Решение Худякова Александра Владимировича, МГУ им. М.В. Ломоносова** (решение в рисунках).



4.

углы в  $\triangle ABC$

углы в  $\triangle ABC$

РАВНОБ.  $\triangle$

дон. построение  $\tilde{C} = A + \overrightarrow{EC}$

$\tilde{C}$   $A\tilde{C} \parallel CD$  вписан, т.к.  
 $\angle A\tilde{C}C + \angle ADC = 180^\circ$

$\angle ADC = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 30^\circ$  (РАВНОБ.  $\triangle$ )

$\angle AC\tilde{C} = \angle ADC = 30^\circ$  (впис.  $\square$ )

$\angle ACE = \angle \tilde{C}CE - \angle AC\tilde{C} = 111^\circ - 30^\circ = 81^\circ$

$\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 81^\circ = 39^\circ$   
 $\angle ACB = \angle ACE$

Ответ:  $39^\circ$

Ответ получился другой, так как перепутаны точки  $D$  и  $E$  (поменялись местами). Но ход решения правильный.

### Литература

1. Аргунова Н.В., Попова А.М., Ефремов В.П. Решение олимпиадных задач по математике: Задачи всероссийской олимпиады по элементарной геометрии. - Ульяновск, 2018.
2. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна — решения разные. - М.: Просвещение, 2000.
3. Афанасьев А.Н. Пять решений одной известной задачи // Математическое образование. - 2018. - № 3(87). С. 3-6.

*Афанасьев Александр Николаевич,  
доцент кафедры теории и методики обучения  
математике и информатике Института  
математики и информатики Северо-Восточного  
Федерального Университета им. М.К. Аммосова,  
г. Якутск, кандидат педагогических наук.*

*E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru*

# Меридогон<sup>1</sup>, или механизм, позволяющий делить произвольный угол на произвольное число частей

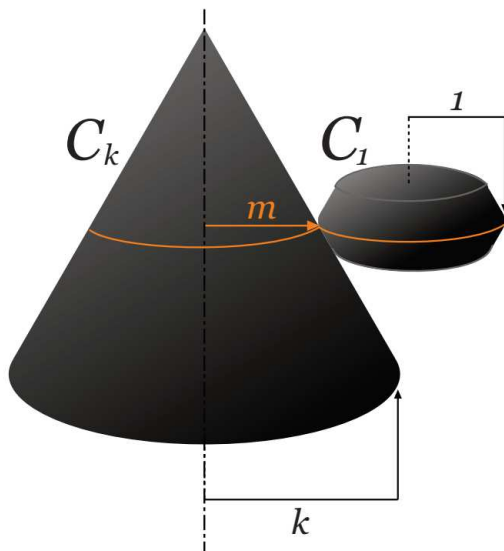
Д. Д. Баврин

Естественным, но не всегда очевидным подходом решения некоторых школьных задач планиметрии является переход в трехмерное пространство. В заметке рассмотрен метод решения двумерной задачи с параметром с помощью механизма в трехмерном пространстве. С помощью двух конусов с разными радиусами автор решает проблему деления произвольного угла на произвольное число равных частей.

Часто в школьной программе и кружковой деятельности по математике (в частности, в контексте задач планиметрии) для 7-11 классов присутствуют теоремы и задачи, которые требуют пространственных соображений. К таковым относятся, например, знаменитая *теорема Монжа* [1] и *задача о покрытии фигуры полосками* [2].

Еще одной классической задачей, решаемой с помощью “выхода в пространство”, является задача построения произвольной доли данного угла; эта доля может выражаться натуральным, дробным и даже иррациональным числом. Как известно со школьной скамьи, трисекция произвольного угла невозможна с помощью циркуля и линейки. Однако она становится возможной при добавлении в арсенал устройства, шарнирного механизма, способного строить *конхоиду Никомеда* [3] — замечательную плоскую алгебраическую кривую четвертого порядка. Существует вообще *теорема Кемпе* [4], устанавливающая существование (сама теорема не конструктивна) шарнирного механизма определенного типа, позволяющего строить произвольную алгебраическую кривую. Но как же нам решить задачу о делении угла на равные части в полной ее общности? Выход, как оказывается, довольно прост.

Итак, рассмотрим правильный конус (полученный вращением правильного треугольника относительно одной из осей симметрии)  $C_k$  с радиусом основания равным  $k$ , и тело  $C_1$ , являющееся (для удобства обращения с механизмом) симметричной склейкой двух усеченных правильных конусов с радиусами оснований, равными единице.



<sup>1</sup>Название “меридогон” происходит от двух древнегреческих корней, означающих “делить” и “угол”.

Допустим, необходимо построить  $m$ -ую часть угла  $\alpha$ . Выберем на верхней части (крышке)  $C_1$  угол равный  $\alpha$  rad, сделаем на крышке засечки, соответствующие этому углу. Начнем вращать без скольжения (коэффициент трения между поверхностью  $C_1$  и  $C_k$  должен быть равен 1) поверхность тела  $C_1$  по поверхности конуса  $C_k$  так, чтобы место склейки двух конусов, из которых склеено  $C_1$  было на уровне  $m$  (этот уровень находится на расстоянии  $m$  от вершины конуса  $C_k$ , соответственно радиус горизонтального сечения тоже равен  $m$ ), пока вторая засечка не встанет на место первой засечки, как в начале вращения. В результате большой конус повернется на некоторый угол  $\beta$ .

Поскольку проскальзывания нет (например, оба конуса сделаны из плотной резины), выполнено равенство длин дуг:

$$\alpha \cdot 1 = \beta \cdot m \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{m}.$$

Таким образом, мы нашли  $m$ -ую часть угла величиной в  $\alpha$  rad.

Конечно, необходимо к основанию большого конуса прикрепить карандаш, а затем по дуге, соответствующей центральному углу, восстановить сам угол, но это уже мелочи, проходимые в школьной программе на уроках по задачам на построения с помощью циркуля и линейки.

## Литература

- [1] Wells D. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. - New York: Penguin Books, 1991. - p. 153-154.
- [2] Яглом И.М. Т. Банг – В. Фенхель. Решение одной задачи о покрытии выпуклых фигур // Матем. просв. - 1957. - вып. 1. - с. 214-218.
- [3] Савелов А.А. Плоские кривые: систематика, свойства, применение. - ГИФМЛ, 1960. - с. 100-104.
- [4] Артоболевский И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. - М.: Издательство АН СССР, 1959. - с. 14-18.

*Баврин Денис Денисович,  
Международный математический центр НГУ,  
лаборант, бакалавр математики.*

*E-mail: d.d.bavrin@gmail.com*

# Математическое образование и современные информационные технологии: показательный пример

*В. Ф. Очков, А. А. Бобин, И. А. Изъюров, П. А. Полторанин*

В статье рассказано, как современные информационные технологии меняют математическое образование, на примере одного частного случая решения треугольника.

На просторах интернета “гуляет” вот такая картинка-загадка (рис. 1) с дразнящей припиской о том, что только 2% школьников могут решить эту “одну из самых интереснейших геометрических задач”.

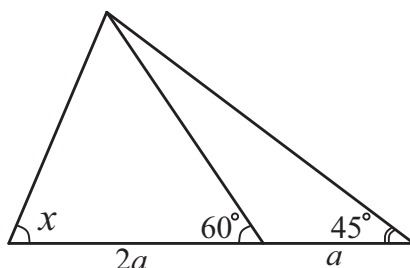


Рис. 1. “Самая красивая геометрическая задача”.

На рис. 2 показан результат поиска по этим самым “двум процентам” — отображены сайты интернета с пошаговым решением задачи через геометрические построения.

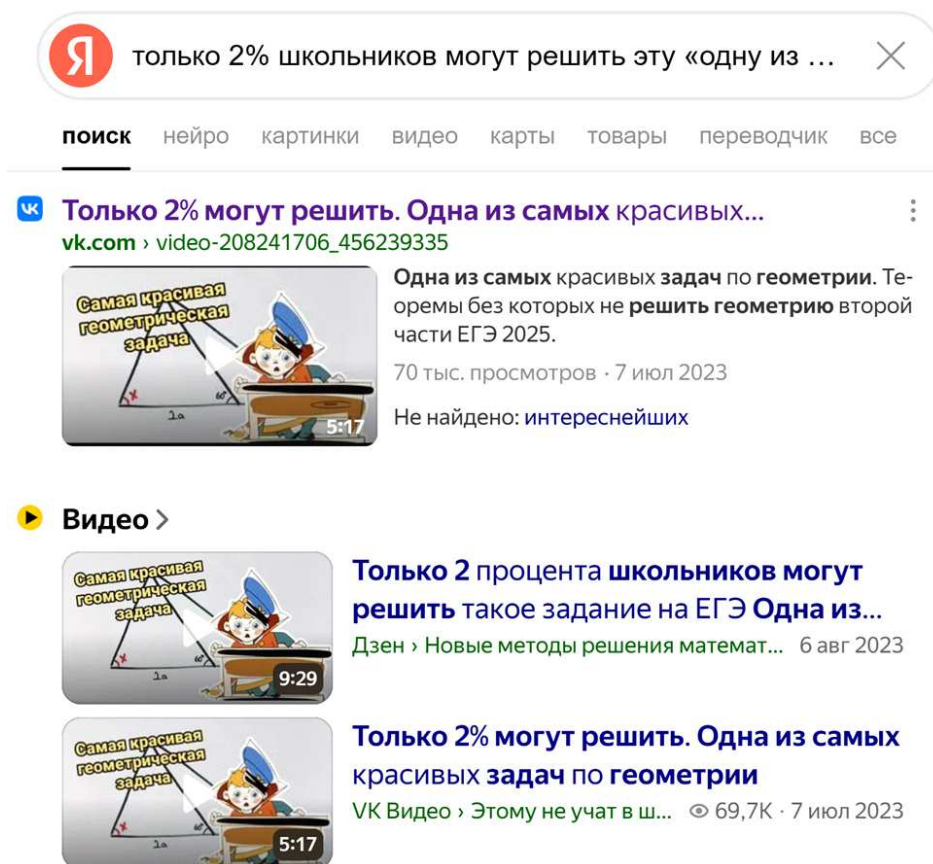


Рис. 2. Результаты поиска в интернете.

Первый шаг этих построений — рисование равносоставленного треугольника с основанием  $a$  внутри левого треугольника с искомым углом  $x$ .

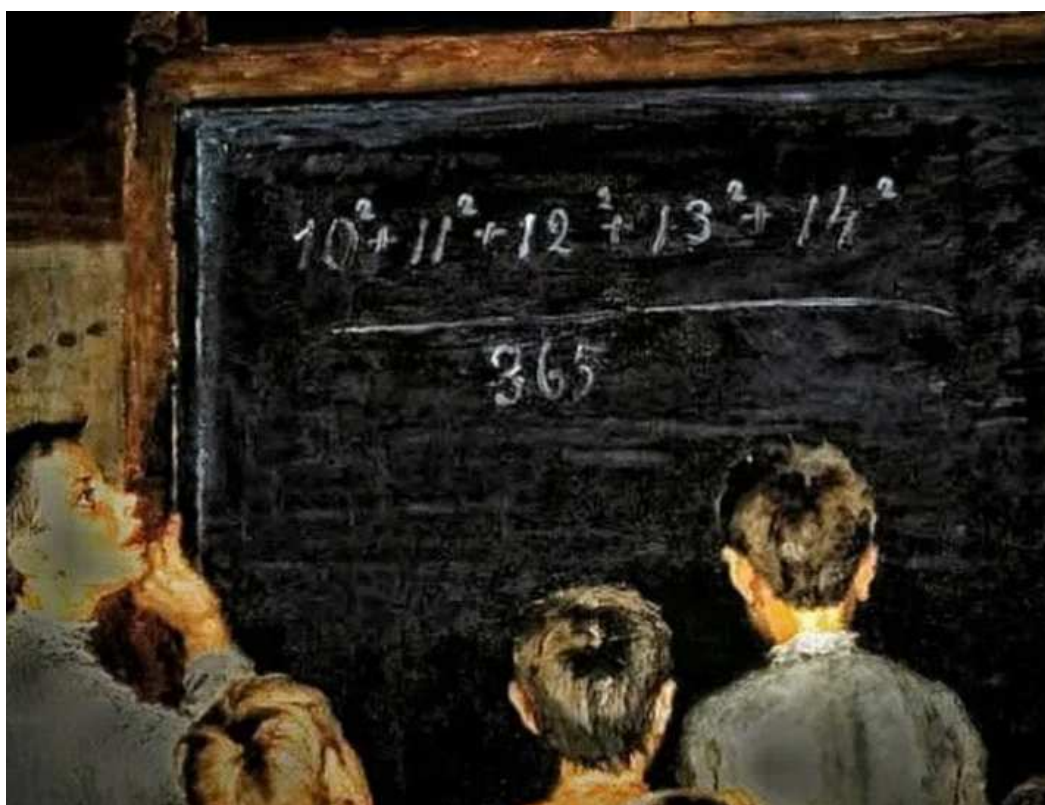


Задача зацепила, но не в плане традиционного нахождения самого решения, а в плане новой методики поиска решения подобных задач с использованием современных информационных технологий. “Цель — ничто, движение к цели — все!”

Небольшое художественно-математическое отступление.

Один из авторов был свидетелем такой сценки в Третьяковской галерее. К картине Богданова-Бельского “Устный счёт. В народной школе С.А. Рачинского” (рис. 3) подвели группу школьников. Ребята тут же дружно вытащили из карманов смартфоны, но экскурсовод музея предупредила, что эту задачу нужно решать сугубо в уме, а не на калькуляторе. Да и вообще они сюда пришли не для этого. Дети спрятали телефоны.

Смартфоны, кстати, в художественных музеях часто вынимают из карманов и сумок для того, чтобы захватить QR-код арт-объекта, если он есть, и получить дополнительную информацию.



$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2$$

Рис. 3. Фрагмент картины художника Богданова-Бельского “Устный счёт. В народной школе С.А. Рачинского”, дополненный решением задачи.

Для бескалькуляторного решения задачи Рачинского нужно обратиться к таблице квадратов, которую также можно найти в Интернете с видеороликами примеров её использования — см. рис. 4.

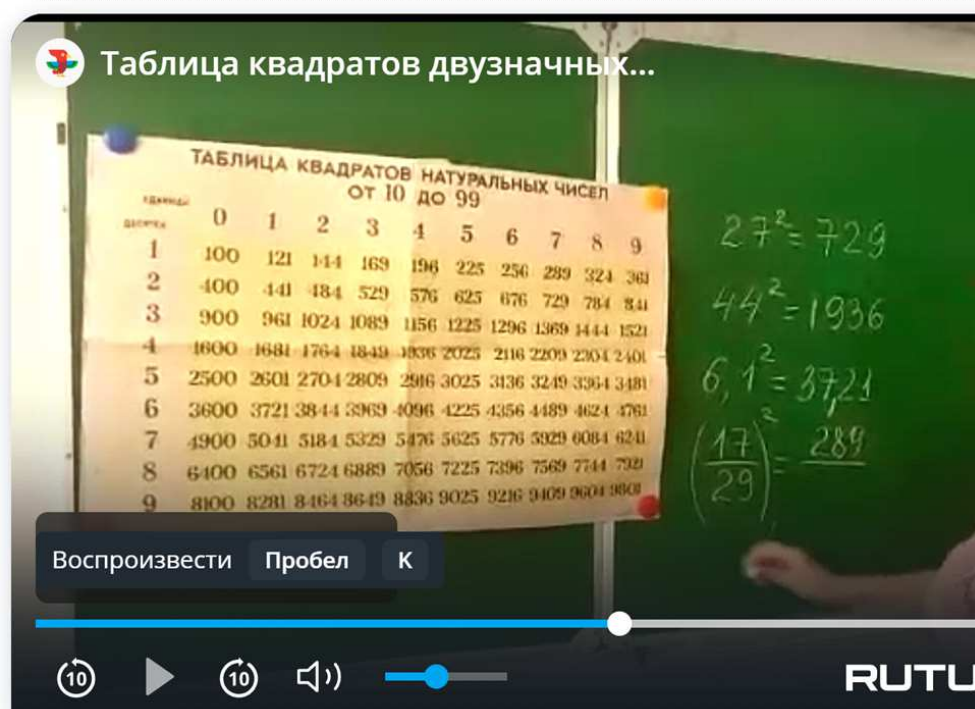
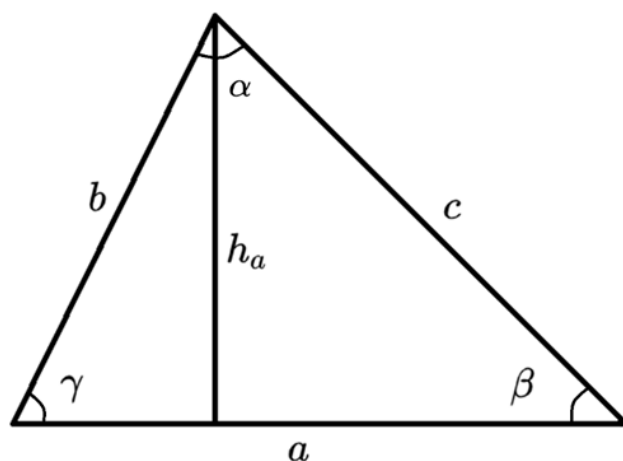


Рис. 4. Таблица квадратов в Интернете.

Но вернемся к задаче о треугольниках.

Первый шаг её решения — это рисование высоты, общей для всех трёх треугольников, показанных на рис. 1. Это делают “98% людей, пытающихся решить эту задачу”. Сделаем это и мы для одиночного треугольника с традиционной маркировкой вершин и углов — см. рис. 5.

Рис. 5. Классическое изображение треугольника с высотой, опущенной на сторону  $a$ .

В том же интернете — в Википедии, к примеру, по ключевому слову “Треугольник” или “Высота треугольника” несложно найти нужную нам готовую формулу, полученную с опорой на теорему синусов (рис. 6). При этом, правда, есть опасение, что интернет выдаст не только нужную формулу, но и сам ответ — приведет к сайтам, показанным на рис. 2.

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta = a \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Рис. 6. Одна из формул, описывающих треугольник на рис. 5

Нетрудно сообразить, что наша задача сводится к решению нелинейного тригонометрического уравнения, вытекающего из того факта, что высота, проведенная из общей вершины треугольников, показанных на рис. 1, будет общей и для треугольника с углом  $60^\circ$  в основании, и для треугольника с углом  $45^\circ$ . Обозначим эти углы как  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а двойку в основании левого треугольника заменим на переменную  $n$ . Этот альтернативный путь решения задачи, исключая геометрические построения, позволяет найти общее решение задачи. Для этого необходимо решить полученное уравнение аналитически. Вручную это сделать практически невозможно. Давайте сделаем это с помощью математической программы Maple, которую многие считают самым мощным из доступных инструментов символьных преобразований. Откроем же мы Maple на “таблетке” — на планшетном компьютере (рис. 7), который, как и смартфон, может оказаться под рукой школьника в нужном месте и в нужное время.

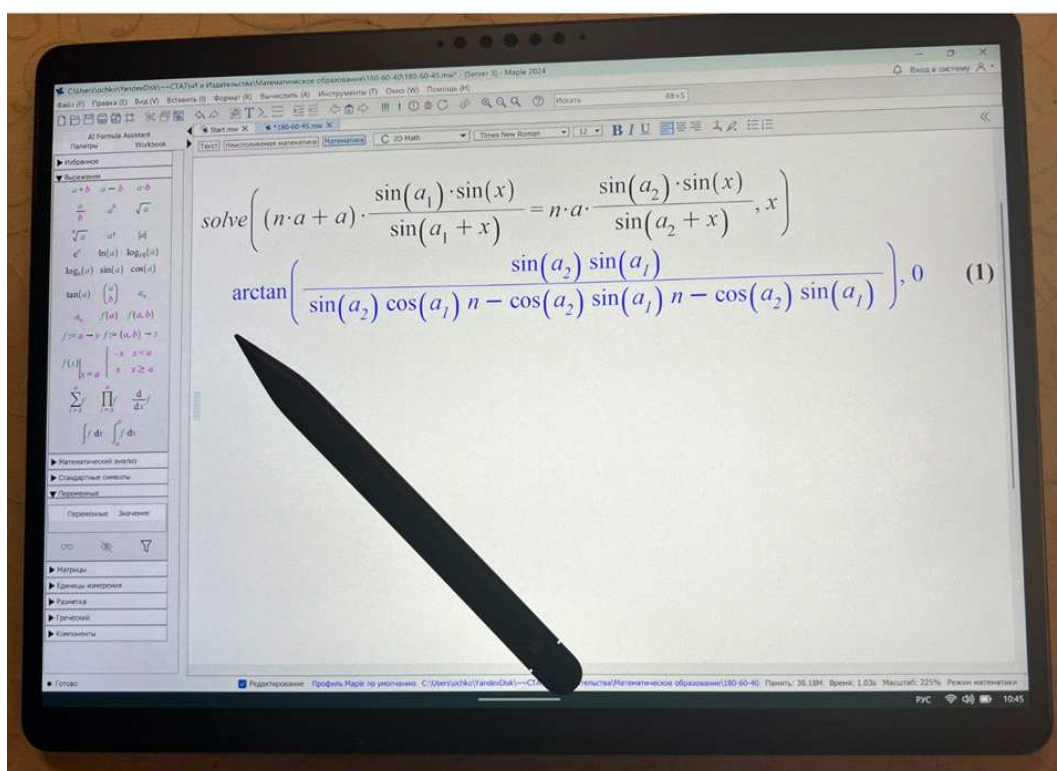


Рис. 7. Общее решение задачи о трёх треугольниках в среде Maple.

На рис. 8 показано графическое отображение решения (ответ:  $75$  угловых градусов<sup>1</sup>) нашей задачи о треугольниках при  $\alpha_1 = 60^\circ$ ; и  $\alpha_2 = 45^\circ$ , но при разных значениях  $n$  — при разных длинах основания левого треугольника.

<sup>1</sup>Одна студентка автора “с волосами цвета льна” выдала такое решение задачи:  $180-60-45=75$ . На возражение в том плане, что ход решения, конечно, весьма оригинален и предельно лаконичен, но неверен, было сказано, что сам ответ-то правильный, а как он получен, это неважно.

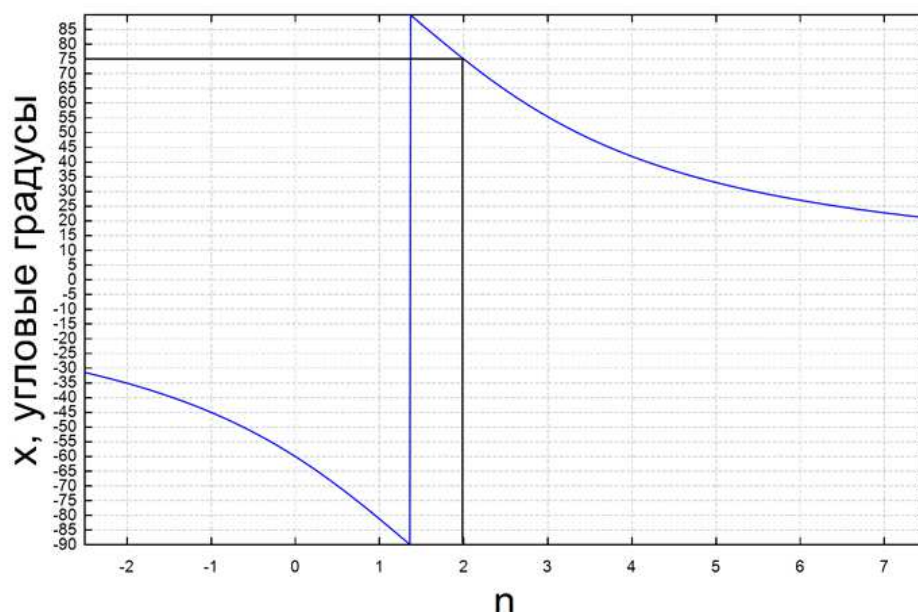


Рис. 8. Графическое решение задачи о трёх треугольниках с использованием формулы, показанной на рис. 7.

Аналитическое решение следует немного подправить — убрать разрыв, связанный со спецификой графического отображения арктангенса — см. рис. 9. Заодно стоит перевернуть слева направо ось абсцисс, для того, что бы лучше понимать суть задачи: мы двигаем вправо левую вершину треугольника с искомым углом  $x$  и видим что он стремиться к 180 градусам; мы двигаем эту вершину влево и видим, что он заостряется и стремиться к нулю.

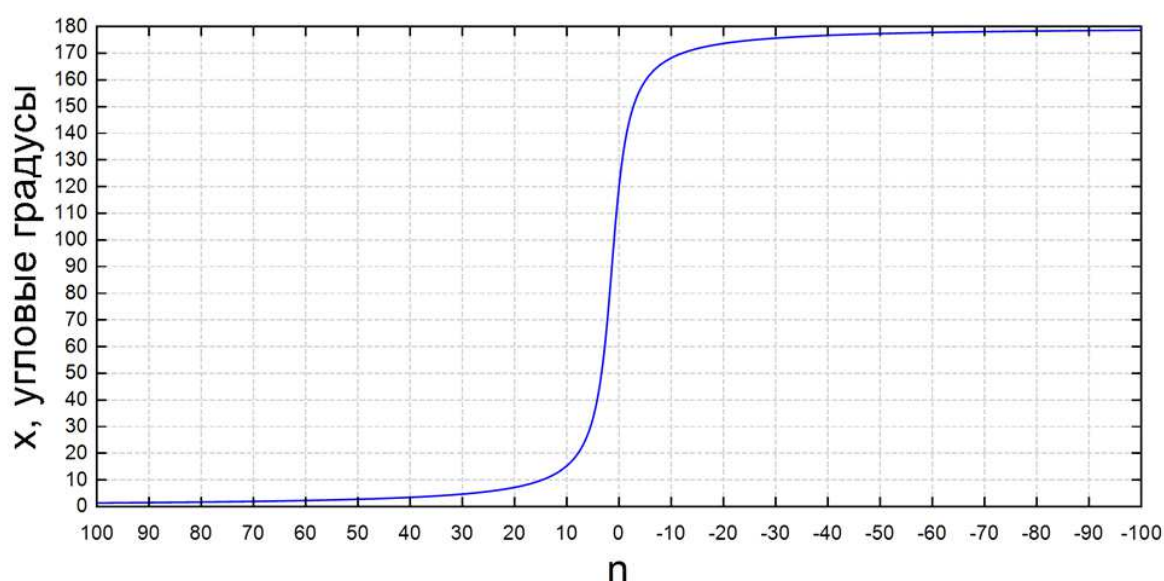
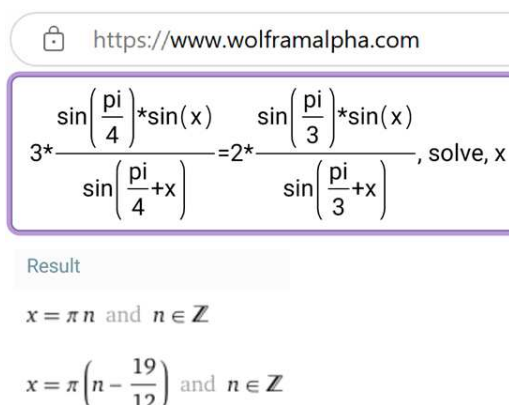


Рис. 9. Подправленное графическое решение задачи о трёх треугольниках.

Вернемся к смартфонам, какие вынули из своих карманов школьники в Третьяковской галерее. Программу Maple на смартфоне нельзя запустить, а вот облачную версию программы Mathematica ([wolframalpha.com](http://wolframalpha.com)) вполне можно — см. рис. 10, где показано не общее, а частное решение уравнения, к которому сводится задача о треугольниках.





$$3 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}, \text{ solve, } x$$

Result

$$x = \pi n \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi \left( n - \frac{19}{12} \right) \text{ and } n \in \mathbb{Z}$$

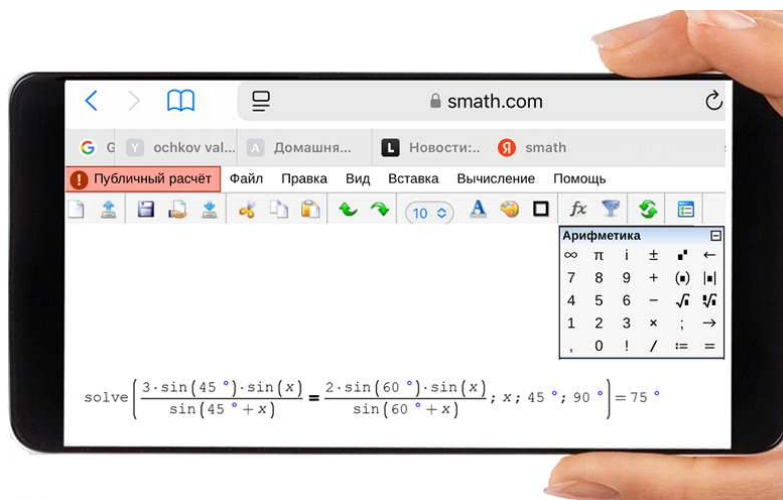
Рис. 10. Общее решение задачи о трёх треугольниках на сайте WolframAlpha.com.

Решение на рис. 10 вызывает в памяти старый анекдот с новым авторским продолжением. Воздушный шар вырвался из облаков. Летящие увидели на земле человека и закричали: “Где мы находимся?”. “Вы находитесь в корзине воздушного шара!”, — таков был ответ. Его дал математик. Только от математика можно услышать абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ.

Авторское продолжение этого анекдота такое. Летящие на шаре кричат вниз: “Вы нас не так поняли — мы хотим знать наше местоположение, а у навигатора сел аккумулятор!”. Математик смотрит в свой смартфон и кричит наверх: “Ноль целых девятьсот двадцать девять тысячных радиан северной широты и ноль целых шестьсот тридцать семь тысячных радиан восточной долготы!”. Только математики измеряют углы в абсолютно правильных, но абсолютно бесполезных радианах, а не в градусах–минутах–секундах! Ответ, показанный на рисунке 10, нельзя считать абсолютно бесполезным. Он станет полезным, если из всех решений, определяемых множеством целых чисел  $\mathbb{Z}$ , выбрать нужное и перевести его из радиан в угловые градусы. Кстати, при записи уравнения с синусами мы перевели градусы в радианы, хотя там можно было записать так:  $45^\circ$  и  $60^\circ$ .

Да, компьютерные программы аналитических преобразований подобно самим математикам часто выдают абсолютно точные ответы, которые нужно дополнительно расшифровывать. Или вообще не выдают ответа, если задача достаточно сложная. В таких случаях прибегают к численной математике — к математике приближённых вычислений.

На смартфоне можно открыть облачную версию программы SMath Studio — см. рис. 11, где показано численное решение уравнения, к которому сводится наша задача о треугольниках.



$$\text{solve} \left( \frac{3 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \sin(x)}{\sin(45^\circ + x)} = \frac{2 \cdot \sin(60^\circ) \cdot \sin(x)}{\sin(60^\circ + x)}; x; 45^\circ; 90^\circ \right) = 75^\circ$$

Рис. 11. Численное решение задачи о треугольниках на смартфоне в облачной версии пакета SMath Studio.



Если в записи на рис. 11 не указывать диапазон значений искомого корня (от 45 до 90 градусов), то функция solve выдаст множество решений в диапазоне от минус 20 до 20 радиан (умолчание пакета). Нам же нужно одно-единственное разумное решение. Поэтому-то и указан диапазон. Задача решается методом половинного деления. То, что ответ всё-таки приближённый, можно убедиться, если увеличить число знаков в ответе: 74.9999982523672 угловых градусов.

У нас был экскурс в изобразительное искусство (рис. 3). Сейчас же мы упомянем музыку. Была когда-то радиопередача “Разучим песню”, в которой можно было услышать такие слова: “А теперь давайте прослушаем мелодию этой песни в исполнении контрабаса”. А давайте решим нашу задачу о треугольниках на SimInTech — в среде инженерно-математической программы динамического моделирования “Simulation In Technic”. Её несложно без ограничений скачать с одноимённого сайта [www.simintech.ru](http://www.simintech.ru).

На рисунке 12 показано решение задачи о треугольниках в среде SimInTech. Найдены те же 75 угловых градусов (см. зелёную метку на графике), но принципиально иным способом, в корне отличным от того, что было показано выше. В блок, где встроенным паскаль-подобным языком программирования вписана теорема синусов (см. рис. 6), запускается переменная  $x$  с начальным значением, равным единице. Блок выпускает значение переменной  $delta$  — разность левых и правых частей уравнения. Блок  $F(y)$  с помощью особых итерационных алгоритмов (метод Ньютона, например) и обратной связи меняет значение переменной  $x$  до тех пор, пока не будет найдено решение. Все эти значения можно отображать в квадратных скобках, расположенных под линиями связи.

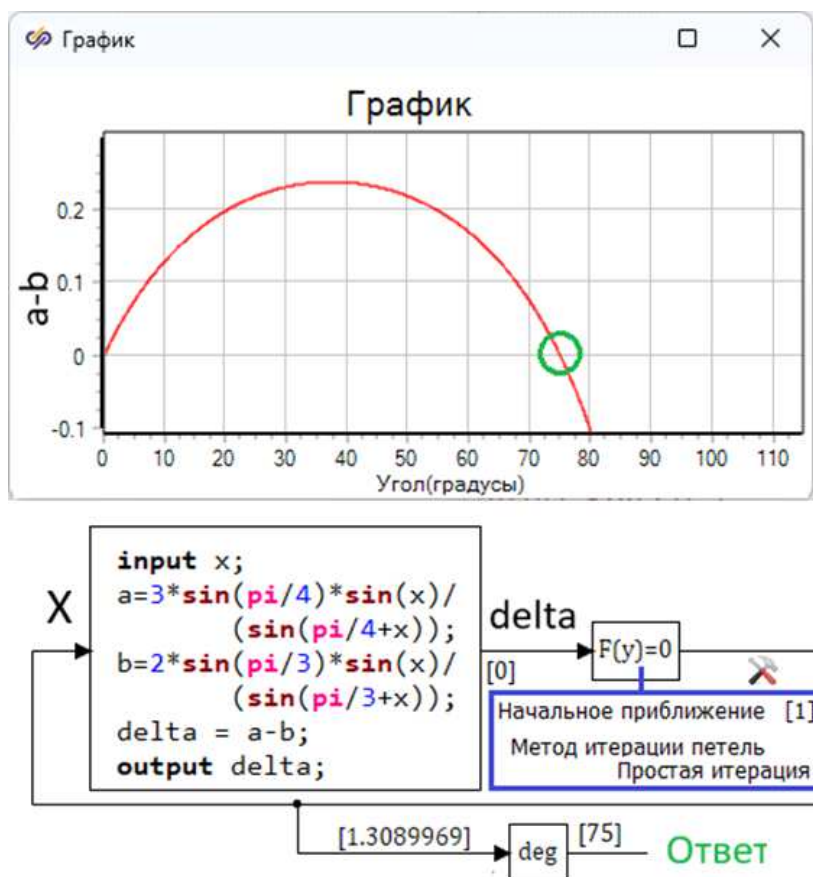


Рис. 12. Решение задачи о треугольниках в среде SimInTech.

## Выводы

Современные школьники и студенты со смартфонами и планшетами могут не только “залипать” на чатах и в играх, но и решать довольно сложные математические задачи, используя символъ-

ную и численную математику, а также графическое отображение зависимостей. С другой стороны, переделывая наш математический анекдот, можно сказать, что использование современных информационных технологий при решении подобных школьных задач абсолютно бесполезно, но и абсолютно бесполезно. Учащиеся должны искать не ответ, а пути его поиска.

Оптимальное решение такое: задачу предлагается решить и без компьютера, и с компьютером [1].

## Литература

- [1] Очков В.Ф. 16 занятий МИТ: Математика – Информатика – Техника: научно-популярное издание. - Санкт-Петербург: Лань, 2025. - 292 с.

URL: <https://e.lanbook.com/book/455684>

*Очков Валерий Федорович,  
профессор НИУ «МЭИ», доктор техн. наук.*

*E-mail: OchkovVF@mpei.ru*

*Бобин Александр Андреевич,  
студент второго курса Института тепловой  
и атомной энергетики НИУ «МЭИ».*

*E-mail: BobinAA@mpei.ru*

*Изъюров Илья Александрович,  
студент второго курса Института тепловой  
и атомной энергетики НИУ «МЭИ».*

*E-mail: IzyurovIA@mpei.ru*

*Полторанин Павел Александрович,  
студент второго курса Института тепловой  
и атомной энергетики НИУ «МЭИ».*

*E-mail: PoltoraninPA@mpei.ru*

## Об одной задаче, связанной с дзета-функцией Римана

А. В. Бегунц, А. А. Лобода

В заметке обсуждаются свойства графика дзета-функции Римана на луче  $(1; +\infty)$  и задача исследования этого графика на симметрию относительно биссектрисы первой координатной четверти. Основной метод решения задачи основан на оценке суммы ряда несобственным интегралом.

Дзета-функция Римана на луче  $(1; +\infty)$  определяется равенством  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ . В качестве приложения теорем о пределе, непрерывности и дифференцируемости суммы функционального ряда на практических занятиях по математическому анализу обычно доказывают следующие факты (см., например, [1, задача 2797], [2, задача 10.401]):

а) функция  $\zeta(x)$  непрерывна на луче  $(1; +\infty)$  и имеет на нём непрерывные производные всех порядков;

б) функция  $\zeta(x)$  убывает на луче  $(1; +\infty)$  и выпукла вниз на нём;

в) прямые  $x = 1$  и  $y = 1$  являются асимптотами графика функции  $\zeta(x)$ .

Проведённое исследование позволяет построить эскиз графика функции  $y = \zeta(x)$ . Получающийся рисунок напоминает ветвь гиперболы, задаваемой уравнением  $y = 1 + \frac{1}{x-1}$ , которая симметрична относительно биссектрисы первой координатной четверти. Это наблюдение привело к постановке задачи, предложенной на олимпиаде по анализу для студентов 1-го и 2-го курсов механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (2022 г., задача 1, см. [3]).

**Задача.** Симметричен ли график функции  $y = \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  относительно прямой  $y = x$ ?

Рассмотрению разных способов решения этой задачи предпослём утверждение, на которое все они опираются (см. доказательство интегрального признака сходимости ряда, например, в учебнике [4]).

**Утверждение.** Если неотрицательная и невозрастающая функция  $f(x)$  интегрируема на каждом отрезке  $[1; b] \subset [1; +\infty)$ , то несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ , причём в случае сходимости для всякого  $k \in \mathbb{N}$  справедлива оценка

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n).$$

Отметим, что если функция  $f(x)$  строго убывает, то все неравенства в оценке можно заменить на строгие. В основе доказательства этого утверждения лежит верное при любом  $k \in \mathbb{N}$  двойное неравенство

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

Приведём несколько способов решения задачи, пользуясь оценкой суммы ряда интегралом как снизу, так и сверху.

**Решение. Первый способ.** Хорошо известно (см., например, [1, задача 2961], [2, задача 10.736]), что  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . Предполагая наличие симметрии относительно прямой  $y = x$ , заключаем, что должно выполняться равенство  $\zeta\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = 2$ . Поскольку  $\pi < \sqrt{10}$ , справедливо неравенство

$$\frac{1}{n^{\frac{\pi^2}{6}}} > \frac{1}{n^{5/3}} \text{ при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда, оценивая снизу сумму ряда несобственным интегралом, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}\zeta\left(\frac{5}{3}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}} > 1 + \frac{1}{2^{5/3}} + \frac{1}{3^{5/3}} + \frac{1}{4^{5/3}} + \int_5^{+\infty} \frac{dt}{t^{5/3}} > \\ &> 1 + \frac{1}{3,2} + \frac{1}{6,3} + \frac{1}{10,1} - \frac{3}{2t^{2/3}} \Big|_5^{+\infty} = 1 + \frac{5}{16} + \frac{10}{63} + \frac{10}{101} + \frac{3}{2 \cdot 5^{2/3}} > \\ &> \frac{3}{2} + \frac{475 \cdot 101 + 160 \cdot 63}{16 \cdot 63 \cdot 101} = \frac{3}{2} + \frac{58055}{101808} > 2.\end{aligned}$$

Таким образом,  $\zeta\left(\frac{\pi^2}{6}\right) > \zeta\left(\frac{5}{3}\right) > 2$ , что противоречит предполагаемому равенству.

*Второй способ.* Вновь оценивая снизу сумму ряда несобственным интегралом, при всех  $x > 1$  получаем

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} > \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}.$$

Это означает, что при всех  $x > 1$  справедливо неравенство

$$\zeta(x)(x-1) > 1. \quad (1)$$

Если график функции  $y = \zeta(x)$  симметричен относительно прямой  $y = x$ , то при всех  $x > 1$  должно быть выполнено равенство  $\zeta(\zeta(x)) = x$ . Подставляя  $\zeta(x)$  вместо  $x$  в неравенство (1), имеем

$$x(\zeta(x) - 1) > 1. \quad (2)$$

Однако, полагая  $x = 4$  и учитывая равенство  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  (см., например, [2, задача 10.736]), получаем оценку

$$4 \left( \frac{\pi^4}{90} - 1 \right) < 4 \cdot \frac{3 \cdot 2^4 - 90}{90} < 1,$$

поэтому приходим к противоречию. Отметим, что положить здесь  $x = 2$  недостаточно, так как неравенство (2) в этом случае выполнено.

*Третий способ.* Предполагая, что при всех  $x > 1$  справедливо равенство  $\zeta(\zeta(x)) = x$ , придём к противоречию, положив  $x = 10$ . В самом деле, оценим сверху сумму ряда несобственным интегралом:

$$\zeta(10) < 1 + \frac{1}{2^{10}} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{10}} = 1 + \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{9t^9} \Big|_2^{+\infty} < 1 + \frac{1}{2^9}.$$

Учитывая характер монотонности дзета-функции, получаем

$$\zeta(\zeta(10)) > \zeta\left(1 + \frac{1}{2^9}\right) > \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\frac{1}{2^9}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^9} - 1} = 512 > 10.$$

*Четвёртый способ.* Справедливо равенство  $\lim_{t \rightarrow 1+} (t-1)\zeta(t) = 1$  (см., например, [2, задача 10.400]).

Заменим переменную в этом пределе, положив  $x = \zeta(t)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\zeta^{-1}(x) - 1) = 1.$$

Вновь предполагая выполнение равенства  $\zeta(\zeta(x)) = x$  при всех  $x > 1$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\zeta(x) - 1) = 1.$$

Покажем, что это равенство неверно. При  $x > 1$  имеем

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{C(x)}{2^x}, \quad \text{где} \quad C(x) = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

Покажем, что функция  $C(x)$  ограничена при  $x > 2$ :

$$1 < C(x) = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x < 1 + \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{t}\right)^x dt = 1 + 2^x \cdot \frac{2^{1-x}}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} < 3.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\zeta(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x C(x)}{2^x} = 0,$$

тем самым получено противоречие с предположением.

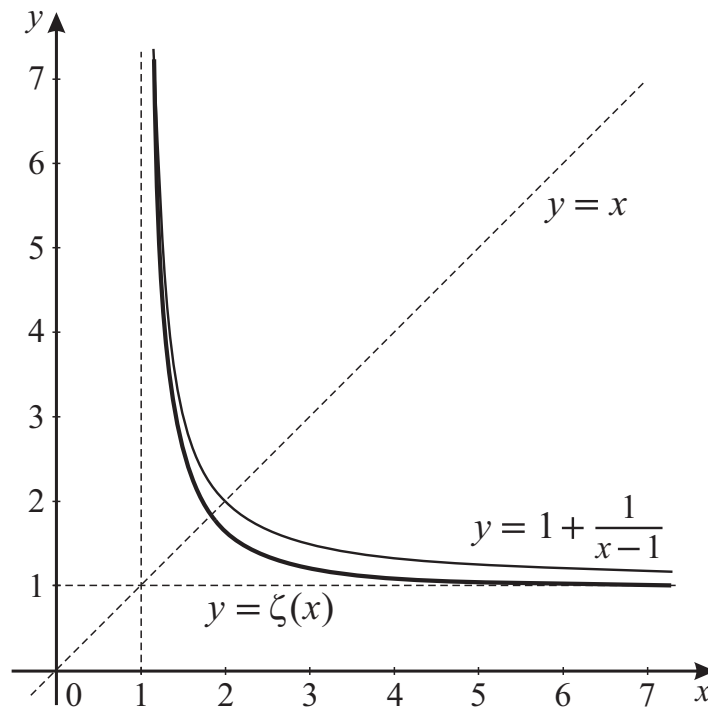
Обсудим приведённые решения. Можно сказать, что они расположены по возрастанию выбираемых для получения противоречия значений аргумента: 1)  $x = 2$ ; 2)  $x = 4$ ; 3)  $x = 10$ ; 4)  $x \rightarrow +\infty$ . По мере роста аргумента уменьшается вычислительная компонента решения, а аналитическая возрастает. Если в первых двух способах решения использовались значения дзета-функции в точках 2 и 4, то уже третий способ не требовал знаний точных значений, а опирался лишь на оценки. В качестве «промежуточного» рассуждения до перехода  $x \rightarrow +\infty$  можно в третьем способе положить  $x = 100$  и получить оценку

$$\zeta(100) < 1 + \frac{1}{2^{99}},$$

из которой вытекает, что

$$\zeta(\zeta(100)) > \zeta\left(1 + \frac{1}{2^{99}}\right) > 2^{99} > 100,$$

т. е. отличие  $\zeta(\zeta(x))$  от  $x$  стало ещё более выраженным. Попутно отметим, что если и во втором способе решения брать  $x > 4$ , то для опровержения неравенства (2) хватит более грубых оценок.





Четвёртый способ решения связан с анализом асимптотического поведения функции  $\zeta(x)$  при  $x \rightarrow 1+$  и при  $x \rightarrow +\infty$ . Соотношение  $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$  при  $x \rightarrow 1+$  в предположении обсуждаемой симметрии графика влечёт эквивалентность  $\zeta(x) - 1 \sim \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow +\infty$ , в то время как на самом деле при  $x \rightarrow +\infty$  справедливо соотношение  $\zeta(x) - 1 = o(\frac{1}{x})$ .

На рисунке представлены графики функций  $y = \zeta(x)$  и  $y = 1 + \frac{1}{x-1}$  при  $x > 1$ . Рисунок иллюстрирует различие в поведении дзета-функции относительно ветви гиперболы при  $x \rightarrow 1+$  и при  $x \rightarrow +\infty$ : в первом случае графики быстро становятся визуально неразличимыми, а во втором случае дзета-функция заметно быстрее «прижимается» к горизонтальной асимптоте  $y = 1$ . Это ещё раз объясняет, почему способы решения рассмотренной задачи, основанные на больших значениях  $x$ , приводят к более простым оценкам.

В заключение авторы благодарят профессора С.В. Шапошникова за полезные обсуждения и внимание к работе.

## Литература

- [1] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. 14-е изд. испр. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. - 624 с.
- [2] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: В 4 т. Т. 3. Новое изд., перераб. и доп. - М.: МЦНМО, 2025. - 508 с.
- [3] Олимпиады по анализу (электронный ресурс). URL: <http://new.math.msu.su/tffa/olympiads.html>
- [4] Зорич В.А. Математический анализ. Часть I. 13-е изд. - М.: МЦНМО, 2024. - 576 с.

*Бегунц Александр Владимирович,  
доцент кафедры математического анализа  
механико-математического факультета,  
МГУ имени М.В. Ломоносова,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: alexander.begunts@math.msu.ru*

*Лобода Артём Александрович,  
доцент кафедры математического анализа  
механико-математического факультета  
МГУ имени М.В. Ломоносова, доцент  
факультета компьютерных наук НИУ ВШЭ,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: lobodaaa@my.msu.ru*

# Алгоритм размытия границ изображения на основе нечетких множеств

*А. Ф. Ляхов, Д. Е. Фомичев*

В статье описан алгоритм размытия границ изображения, созданный на основе нечётких множеств. Показано применение данного алгоритма к размытию простых контуров: полосы, квадрата, круга. Показана возможность моделирования кильватерной струи на поверхности воды, оставляемой движущимся судном. Предложенный подход позволяет создавать датасет для обучения свёрточных нейронных сетей, способных обнаруживать объект на размытом и зашумлённом изображении.

## Введение

Распознавание объектов по их графическим изображениям является одной из основных проблем классификации. Большинство методов распознавания объектов связаны с созданием вектора признаков объекта. Изображения объекта, представляемые для распознавания, часто оказываются размытыми из-за его движения, некачественной съёмки или запылённости среды. Заметим, что эффект размытости изображения может создаваться сознательно при маскировке объекта. В настоящее время разработано много методов предварительной обработки изображений, которые нечёткую границу объекта переводят в чёткую, резкую границу [1,6]. После обработки создаётся вектор признаков объекта.

Существует ряд практических задач, к которым данный подход неприменим. Например, требуется обнаружить след оставляемый катером на поверхности воды, который с течением времени размывается. Эта задача усложняется тем, что размытие кильватерного следа происходит на фоне поверхностного случайного волнения.

В настоящее время для распознавания объекта на графическом изображении используются искусственные нейронные сети различного вида, для обучения которых требуются большие наборы данных. В работе предлагается метод создания данных для обучения из размытых изображений объектов, созданных с помощью нечётких множеств. Создаваемые размытые изображения усложняются внесением случайных помех.

## Размытие чётких границ изображений

Растровые изображения могут быть представлены в виде двумерного массива пикселей. Каждый пиксель описывается кортежем чисел, определяемый цветовой моделью. В работе рассматривается цветовая модель RGB (red, green, blue), где каждая компонента принимает значения от 0 до 255.

### Алгоритм размытия границы по вертикали

Пусть изображение представляет полосу из двух цветов (чёрного и белого) шириной в один пиксель, а высотой  $a$  пикселей (рис. 1).

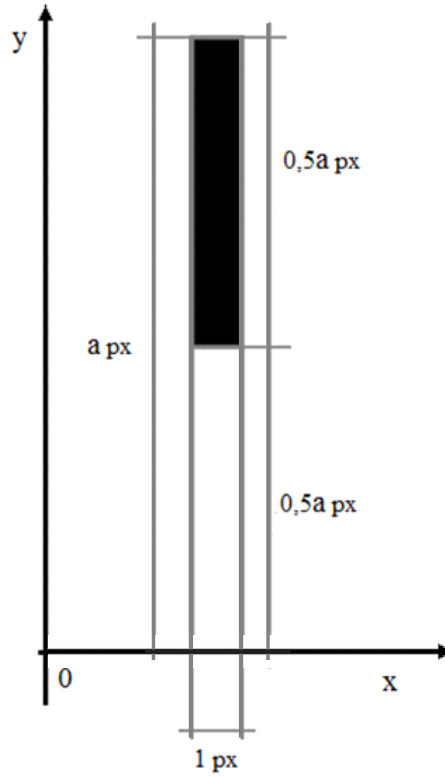


Рис. 1. Вертикальная полоса шириной в один пиксель.

Координаты всех пикселей данного изображения образуют чёткое множество:

$$L = \{y \in N \cup \{0\} : 0 \leq y \leq a\}.$$

Координаты пикселей, соответствующие белому цвету, образуют подмножество:

$$W = \left\{y \in N \cup \{0\} : 0 \leq y \leq \frac{a}{2}\right\},$$

а координаты чёрного цвета:

$$B = \left\{y \in N \cup \{0\} : \frac{a}{2} + 1 \leq y \leq a\right\}.$$

Размытое изображение будет состоять из пикселей, градация цвета которых изменяется от максимально насыщенного цвета до нуля. Размытие может быть осуществлено с помощью введения нечёткого множества на начальном множестве пикселей и введения функции принадлежности, определяющей цвет. Переход от начального чёткого множества к нечёткому осуществляется через фаззификацию, то есть через определение функции принадлежности к нечёткому множеству [7]. Функция принадлежности может быть представлена в виде:  $\mu_A(u, t, n, k)$ , где  $A$  — нечёткое множество,  $\mu$  — элемент универсального множества,  $t$  — левая граница,  $n$  — середина, а  $k$  — правая граница множества  $A$ .

Фаззификация чётких множеств  $B$  и  $W$  порождает нечёткие множества  $\{(\mu_B, y) : y \in L\}$  и  $\{(\mu_W, y) : y \in L\}$ . Их объединение образует нечёткое множество на всём отрезке:

$$\{(\max(\mu_B, \mu_W), y) : y \in L\},$$

где  $L$  — отрезок размытия.

Назовём *коэффициентом размытия* пикселя значение функции принадлежности этого пикселя. Для получения нового цвета пикселя размытого изображения необходимо текущий цвет пикселя умножить на коэффициент размытия.

Для создания размытых изображений в статье использовалась авторская программа Fuzzy Logic Graphic Instruments, разработанная для обработки изображений с помощью аппарата нечёткой логики.

### Алгоритм размытия полосы по вертикали

Даны две горизонтальные полосы чёрного и белого цветов размером 500x250 пикселей каждая Рис. 2 (а). Множество координат пикселей изображения обозначим  $I$ . Черно-белое изображение размывается в серых цветах.

Отрезок размытия образуется на каждом столбце изображения шириной в один пиксель:

$$L = \left\{ (x, y) \in I : \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 500 \\ \forall x \end{array} \right\}, \quad (1)$$

Для размытия изображения используется треугольная функция принадлежности:

$$\mu_T(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{2y}{a}, & 0 \leq y \leq \frac{a}{2} \\ \frac{2(a-y)}{a}, & \frac{a}{2} \leq y \leq a \\ 0, & y > a \end{cases},$$

где  $a = 500$ .

После применения алгоритма каждый пиксель из отрезка  $L$  умножается на коэффициент размытия по формуле (2):

$$newcolor = \begin{cases} colormin + \mu_G(y) \frac{colordiff}{2}, & y \in \left[0, \frac{a}{2}\right] \\ colormin + (2 + \mu_G(y)) \frac{colordiff}{2}, & y \in \left(\frac{a}{2}, a\right] \end{cases}, \quad (2)$$

где  $colordiff = colormax - colormin$  есть разность между максимальным и минимальным цветами начального изображения, новый цвет изображения. Для данного изображения  $colormin = 0$ ,  $colormax = 255$ . Алгоритм повторяется для всех столбцов. В результате получится размытое изображение полосы (рис. 2 (b)).

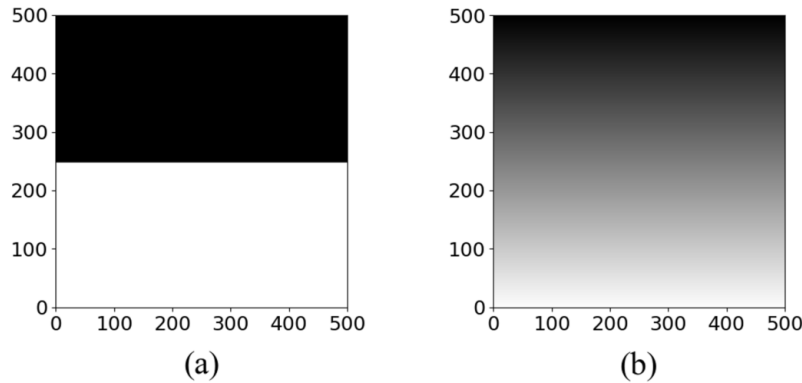


Рис. 2. Размытие горизонтальной полосы с треугольной функцией принадлежности:  
(а) исходное изображение; (б) размытая граница.

Для количественного анализа размытости изображения введём *функцию размытости*  $R(y)$ , где  $y \in [0, 500]$  — координата пикселя изображения, рис. 2,  $R$  — компонента цвета пикселя,  $R \in [0, 255]$ . Цвет пикселей изображений серый, то есть все три составляющие компоненты цвета равнозначны. На рис. 3 показаны функции размытия красной компоненты цвета исходного изображения и размытого.

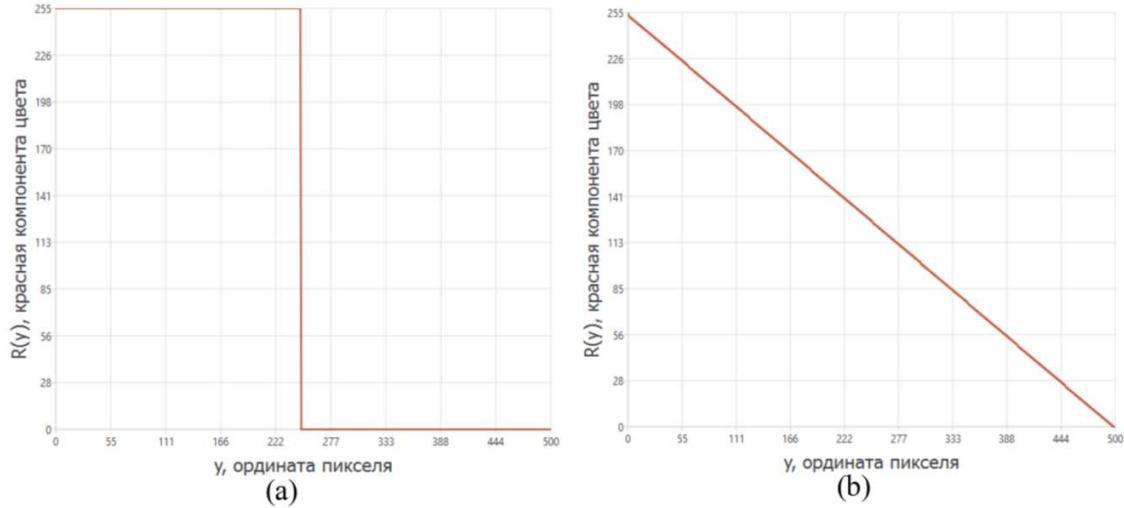


Рис. 3. Функция размытости  $R(y)$  при  $x = 0$ :

(а) Исходного изображения Рис. 2(а); (б) Размытого изображения Рис. 2(б).

#### Алгоритм размытия полосы по вертикали

Алгоритм размытия по горизонтали аналогичен алгоритму размытия по вертикали. Даны две вертикальные полосы: чёрная и белая. Используя треугольную функцию принадлежности, получим размытие этих полос (рис. 4).

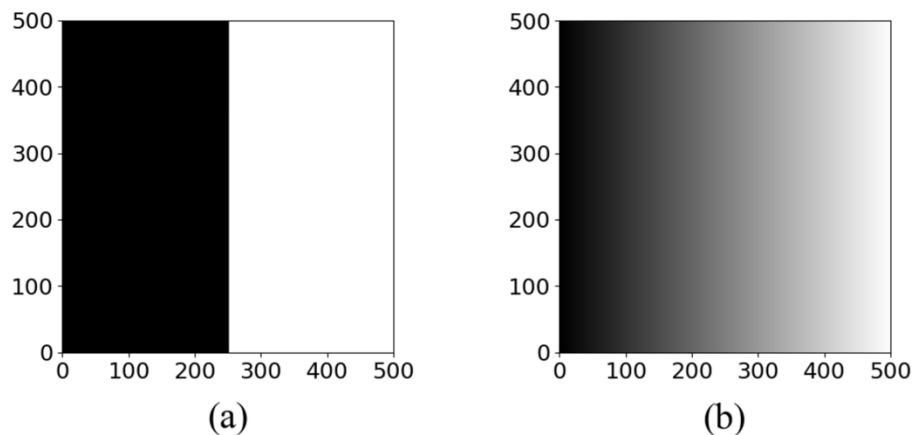


Рис. 4. Размытие вертикальной полосы с треугольной функцией принадлежности:

(а) исходное изображение; (б) размытая граница.

#### Размытие прямоугольника

Дано изображение чёрного прямоугольника, рис. 6(а). Множество координат пикселей изображения обозначим  $I$ . Координаты пикселей, образующих прямоугольник, образуют множество:

$$P = \left\{ (x, y) \in I : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array} \right\}.$$



Точка пересечения диагоналей —  $O\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$ . Длина диагонали по  $x$ :  $d_x = b - a$ . Длина диагонали по  $y$ :  $d_y = d - a$ .

Отрезок размытия определяется на половине диагонали (на рис. 5 — половина диагонали от центра к правой верхней вершине). С помощью коэффициента  $k = [0, 1]$  определяется область размытия прямоугольника. Отрезок размытия определяется множеством точек:

$$L = \left\{ (x, y) \in I : \begin{array}{l} b - k \frac{d_x}{2} \leq x \leq b \\ d - k \frac{d_y}{2} \leq y \leq d \end{array} \right\}.$$

Заметим, что при  $k = 0$  изображение не размывается, при  $k = 1$  размывается все изображение, начиная с центрального пикселя.

После задания отрезка размытия применим алгоритм размытия границ. В примере использовалась треугольная функция принадлежности.

Разобьём исходный прямоугольник на полосы меньших прямоугольников шириной в один пиксель, рис.5.

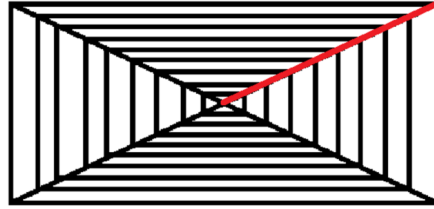


Рис. 5. Разбиение прямоугольника на периметры меньших прямоугольников.

Каждая полоса пересекает отрезок размытия в одном пикселе. Вся полоса будет краситься в цвет этого пикселя. Необходимо пройти по всем полосам и заменить цвет. Результаты работы алгоритма с треугольной функцией принадлежности, с различными коэффициентами области размытия, показаны на рис. 6(b, c).

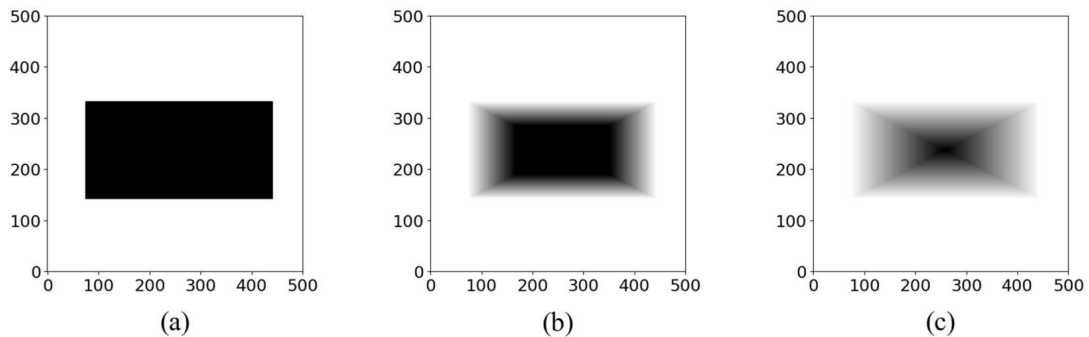


Рис. 6. Размытие прямоугольника с треугольной функцией принадлежности:

(a) — прямоугольник до размытия; (b) — прямоугольник после размытия с коэффициентом  $k = 0,5$ ; (c) — прямоугольник размыт с коэффициентом  $k = 1$ .

### Размытие круга

Дано изображение круга, рис. 8(a). Множество координат пикселей изображения обозначим  $I$ . Координаты пикселей, образующих круг, образуют множество:

$$K = \{(x, y) \in I : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\},$$

где  $R$  — радиус граничной окружности, а  $O(x_0, y_0)$  — центр окружности.

Область размытия определяется коэффициентом  $k \in [0, 1]$ . Радиус области размытия  $r = kR$ . Отрезком размытия определим следующие множество:

$$L = \left\{ (x, y) \in I : \begin{array}{c} R - r \leq x \leq R + r \\ \forall y \end{array} \right\}.$$

После задания радиуса области размытия применим алгоритм размытия границ. Вновь в качестве функции принадлежности выберем треугольную функцию принадлежности. Для обхода точек изображения разобьём круг на кольца меньших радиусов шириной в один пиксель Рис. 6.

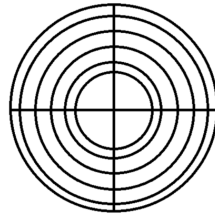


Рис. 7. Разбиение круга на окружности меньших радиусов.

Обход внутренних окружностей выполняется с учётом параметризации:

$$\begin{cases} x = r \cos(\varphi) + x_0 \\ y = r \sin(\varphi) + y_0 \end{cases},$$

где  $r$  — радиус текущей окружности,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Каждой окружности будет соответствовать новый цвет. Необходимо пройти по всем окружностям и заменить цвета. Результат работы алгоритма с треугольной функцией принадлежности с коэффициентом степени размытия  $k = 0.5$  показан на Рис. 8 (b), с коэффициентом степени размытия  $k = 1$  показан на Рис. 8 (c).

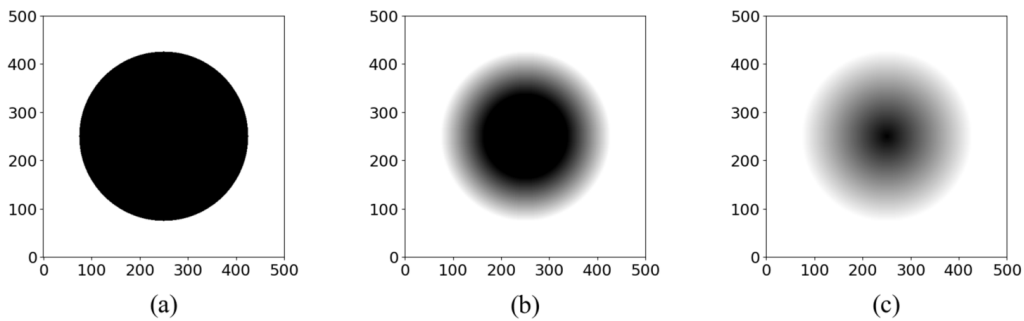


Рис. 8. Размытие круга:

- (a) — круг до размытия, (b) — размытие круга с коэффициентом размытия  $k = 0,5$ ,  
(c) — размытие круга с коэффициентом размытия  $k = 1$ .

Заметим, что при  $k = 0,5$  область размытия — круг радиуса  $0.5R$ , при  $k = 1$  — радиуса  $R$ .

### Размытие изображения с помощью сложных функций принадлежности

Размытие изображения объекта и его границ может осуществляться с помощью более сложных функций принадлежности, которые либо задаются сложными функциями, либо получаются как комбинации простых функций принадлежности.

**Пример 1.** Экспоненциальная функция принадлежности имеет следующий вид:

$$\mu_{\text{э}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \exp(x - b), & a \leq x \leq b, \\ \exp(-(x - b)), & b < x \leq c, \\ 0, & x > c, \end{cases}$$

где  $a$  — левая граница размытия,  $b$  — середина, а  $c$  — правая граница нечёткого множества.

**Пример 2.** Параболическая функция принадлежности

$$\mu_p(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{(x - b)^2}{(b - a)^2}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{(c - x)^2}{(c - b)^2}, & b < x \leq c, \\ 0, & x > c, \end{cases}$$

где  $a$  — левая граница размытия,  $b$  — середина, а  $c$  — правая граница нечёткого множества. Ещё более сложные функции принадлежности можно получать как комбинации заданных функций принадлежности. При этом могут быть использованы различные правила объединения нечётких множеств.

Обозначим треугольную функцию принадлежности  $\mu_T(x)$ , экспоненциальную функцию принадлежности  $\mu_{\text{э}}(x)$ .

1. Функцию размытия можно определить как среднее арифметическое двух функций принадлежности:

$$\mu_{3_G}(x) = \frac{\mu_T(x) + \mu_{\text{э}}(x)}{2}.$$

2. Функцию размытия можно определить как объединение двух функций принадлежности:

$$\mu_{4_G}(x) = \max\{\mu_T(x), \mu_{\text{э}}(x)\}.$$

Результат применения алгоритма размытия по вертикали черной и белой горизонтальных полос с различными функциями принадлежности показан на Рис.9.

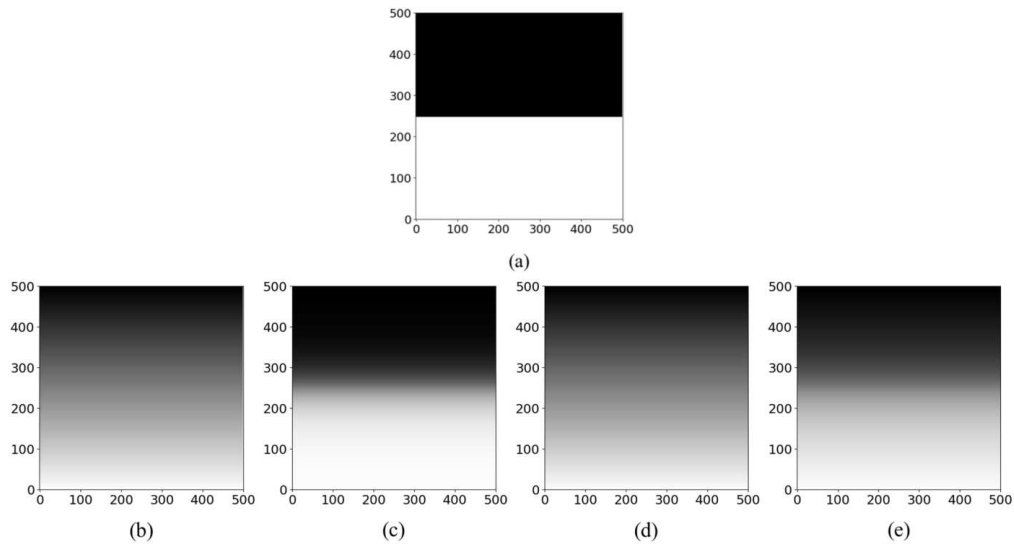


Рис. 9. Размытие по вертикали изображения белой и черной горизонтальных полос с различными функциями принадлежности: (а) исходное изображение; (b) треугольная; (с) экспоненциальная; (d) объединение треугольной и экспоненциальной; (е) среднее арифметическое треугольной и экспоненциальной.

Непосредственное визуальное сравнение полученных размытых границ не позволяет количественно оценить степень их размытости.

Для получения количественных характеристик размытости изображения используем функцию размытости  $R(y)$  — функцию, устанавливающую зависимости коэффициента принадлежности от ординаты изображения.

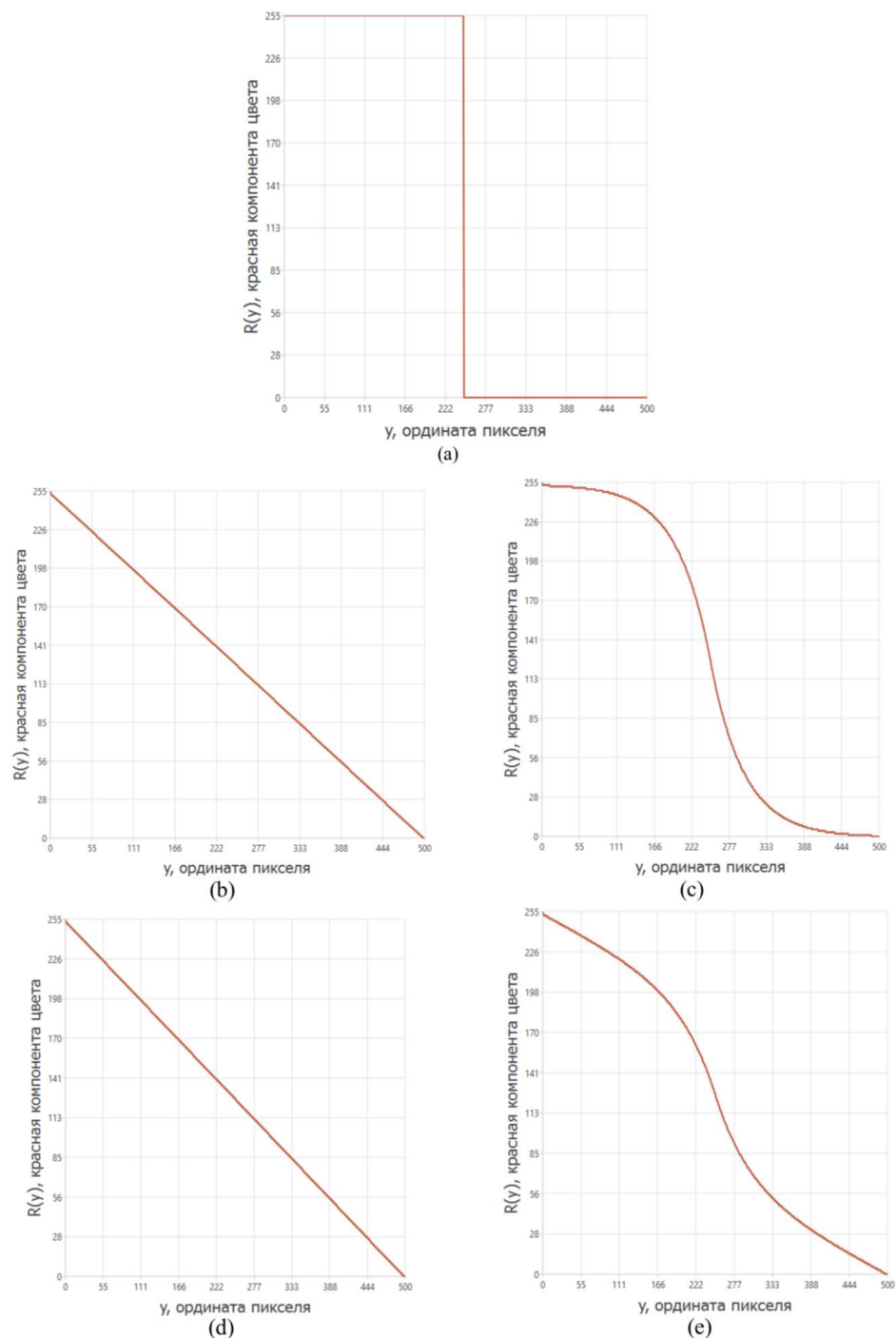


Рис. 10. Функции размытости  $R(y)$  для изображений рис. 9:

- (а) исходного изображения рис. 9(а); (б) размытие с треугольной рис. 9(б); (с) размытие с экспоненциальной рис. 9(с); (д) размытие с объединением треугольной и экспоненциальной рис. 9(д); (е) размытие со средним арифметическим треугольной и экспоненциальной рис. 9(е).

### Моделирование случайных помех на изображении

На реальных изображениях объектов практически всегда присутствуют различные шумы, мешающие распознать объект. В процессе съёмки изображения основными факторами, влияющими на величину шума, является движение среды, движение частиц в среде. Если производится съёмка изображения объекта на водной поверхности, например кильватерного следа движущегося судна, то в качестве шума выступает рябь на поверхности.

В работе предлагается следующий алгоритм генерации шума на изображении.

Шумовые помехи — это цветные квадраты размером в один или несколько пикселей, которые создаются случайным образом в каждом пикселе исходного изображения. С помощью генератора псевдослучайных чисел генерируется случайное число с равномерным распределением из отрезка  $[0, 1]$ . Если полученное число меньше заданного порогового значения  $k$  коэффициента уровня шума, то ставился квадрат помехи, в противном случае помеха не ставилась. Пороговое значение  $k$  позволяет регулировать частоту возникновения помех, то есть степень зашумлённости изображения.

Цвет помехи также генерировался случайно. Генерировалось случайное число с равномерным распределением из отрезка  $[0, 1]$ . Полученное число умножалось на 255. Это значение определяло насыщенность цвета каждой компоненты пикселей помехи.

На графиках рис. 11, рис. 12. показано применение алгоритма размытия и зашумления полосы квадратами шириной 8 пикселей и пороговым значением  $k = 0,00675$ .

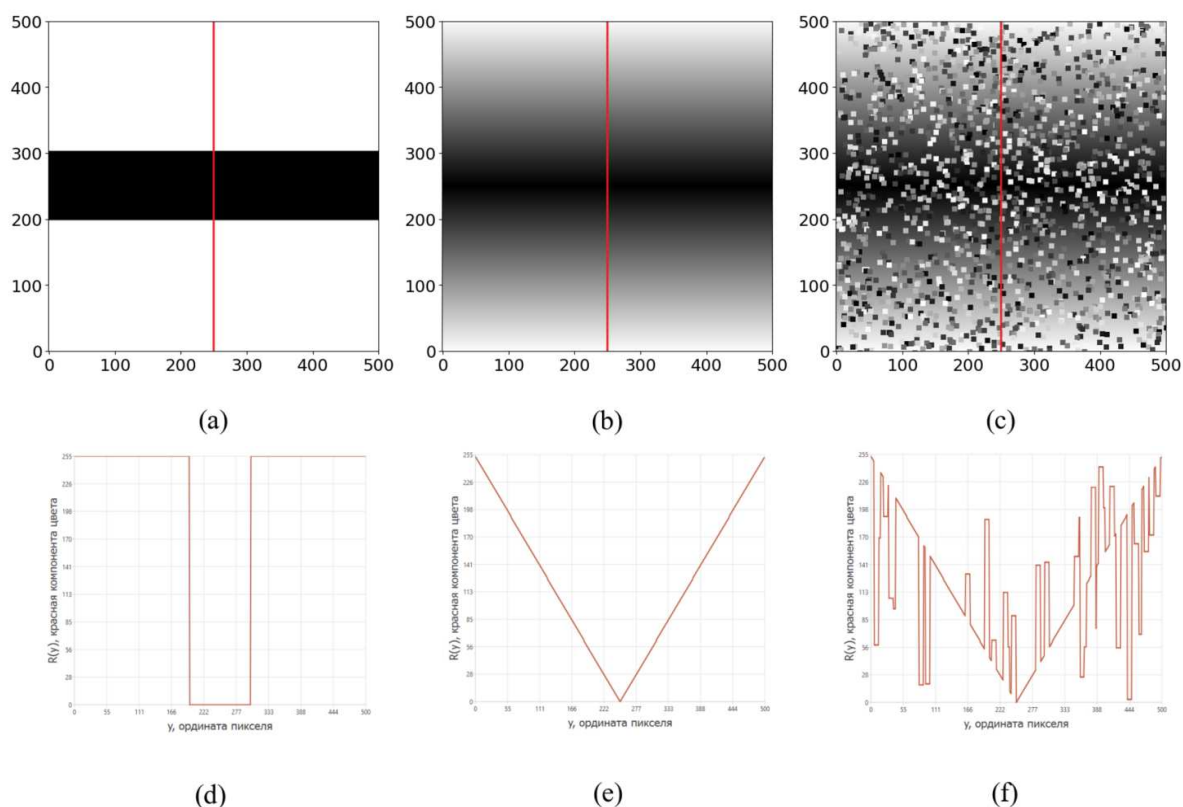


Рис. 11. Черная полоса на белом фоне (красная полоса соответствует сечению  $x = 250$ , по которому построены функции размытия  $R(y)$  рис. 11 (d, e, f)) и функции размытия  $R(y)$  соответствующих изображений: (a) черная полоса; (b) размытая полоса с треугольной функцией принадлежности; (c) размытая полоса с шумом; (d), (e), (f) — соответствующие функции размытия  $R(y)$ .

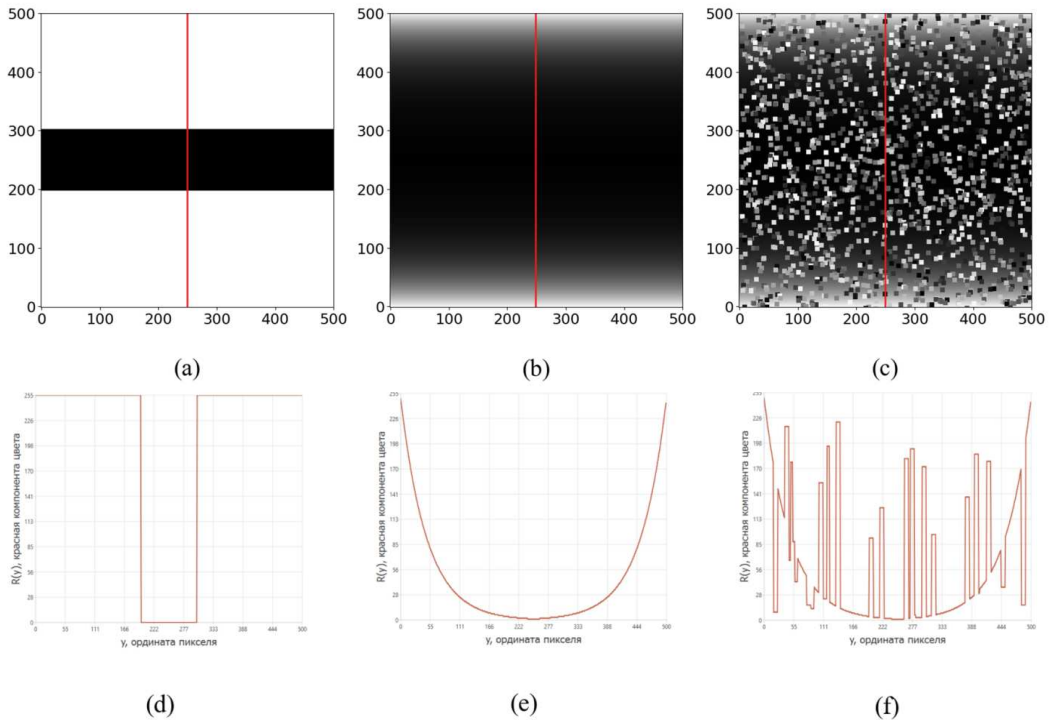


Рис. 12. Черная полоса на белом фоне (красная полоса соответствует сечению  $x = 250$ , по которому построены функции размытия  $R(y)$  рис. 12 (d, e, f)) и функции размытия  $R(y)$  соответствующих изображений: (a) черная полоса; (b) размытая полоса с экспоненциальной функцией принадлежности; (c) размытая полоса с шумом; (d), (e), (f) — соответствующие функции размытия  $R(y)$ .

### Пример размытия изображения чёрной рамки

Дана чёрная рамка на белом фоне размером  $500 \times 500$  пикселей, рис. 13 (a). Для её размытия использовалась треугольная функция принадлежности, рис. 13 (b). На размытое изображение нанесены шумовые помехи с пороговым значением  $k = 0.0125$  и размером помехи  $8 \times 8$  пикселей, рис. 13 (c).

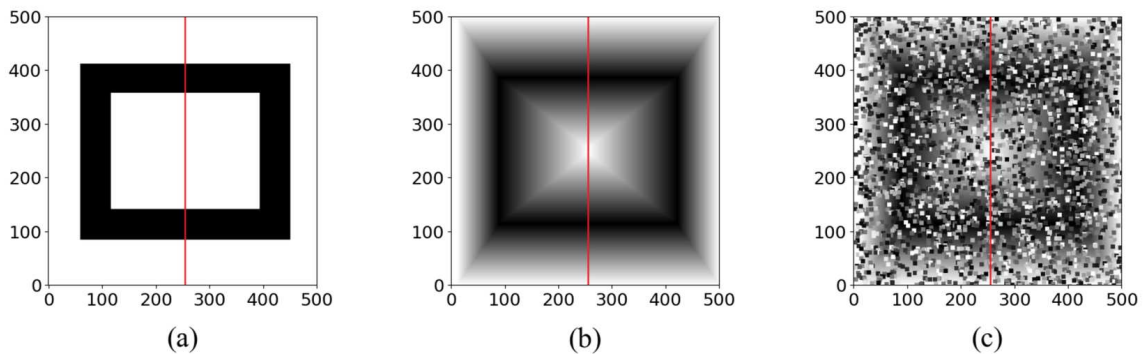


Рис. 13. Черная полоса на белом фоне (красная полоса соответствует сечению  $x = 250$ , по которому построены функции размытия  $R(y)$  рис. 12 (d, e, f)) и функции размытия  $R(y)$  соответствующих изображений: (a) черная полоса; (b) размытая полоса с экспоненциальной функцией принадлежности; (c) размытая полоса с шумом; (d), (e), (f) — соответствующие функции размытия  $R(y)$ .

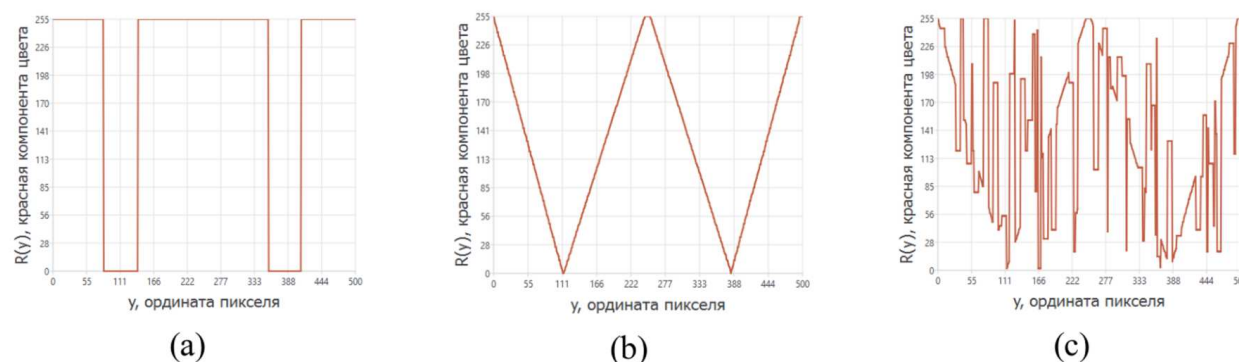


Рис. 14. Функция размытия  $R(y)$  в сечении  $x = 255$  изображения рамки: (а) исходного изображения; (б) размытого изображения; (с) размытого изображения с шумом.

### Моделирование размытия кильватерной струи корабля

При движении по поверхности воды судно оставляет кильватерный след, который зависит от многих факторов, таких как форма корпуса судна, скорость судна, направление его движения, тип двигателя (винтовой, водомётный) и т.п. (рис. 13).

Например, кильватерный след от быстроходного судна будет иметь более вытянутую форму и более узкий профиль, чем кильватер от тихоходного судна. При движении судна на высокой скорости кильватерная линия будет более яркой и чёткой, чем при медленной скорости. Кильватерный след может иметь разную форму в зависимости от того, как движется судно — прямо, на повороте или на развороте.

Все эти признаки кильватерного следа можно использовать для определения скорости и направления движения судов, а также для определения их типа и размера.

На рис. 15 показан кильватерный след небольшого судна, на рис. 16 показан график функции размытости  $R(y)$  (красной компоненты цвета) в сечении  $x = 400$  от границы изображения.

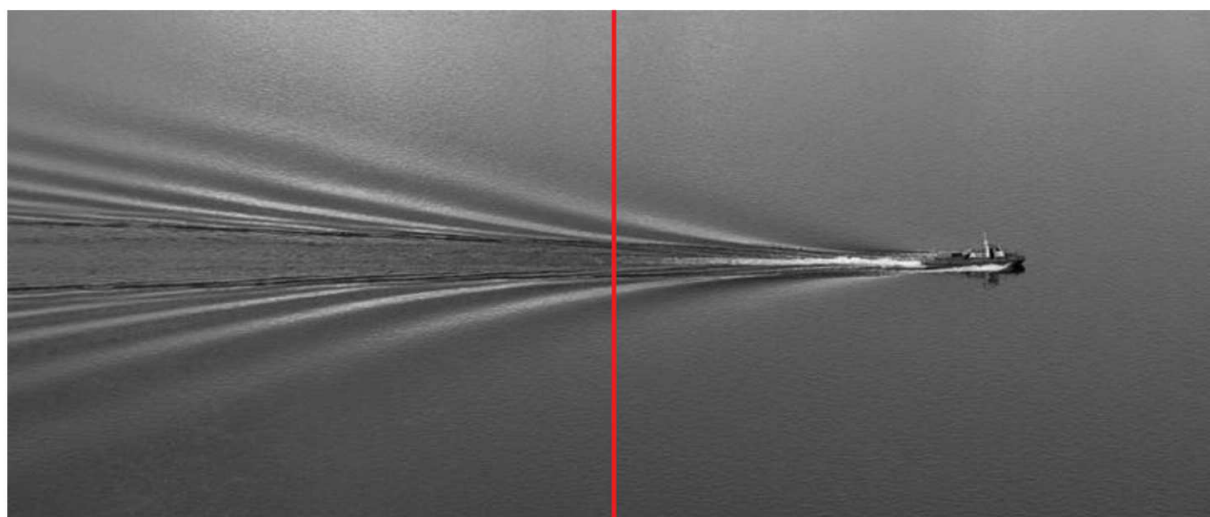


Рис. 15. Кильватерный следа катера, переведённый в оттенки серого (красная полоса соответствует сечению  $x = 400$ , по которому построены функции размытия  $R(y)$ , рис. 16).



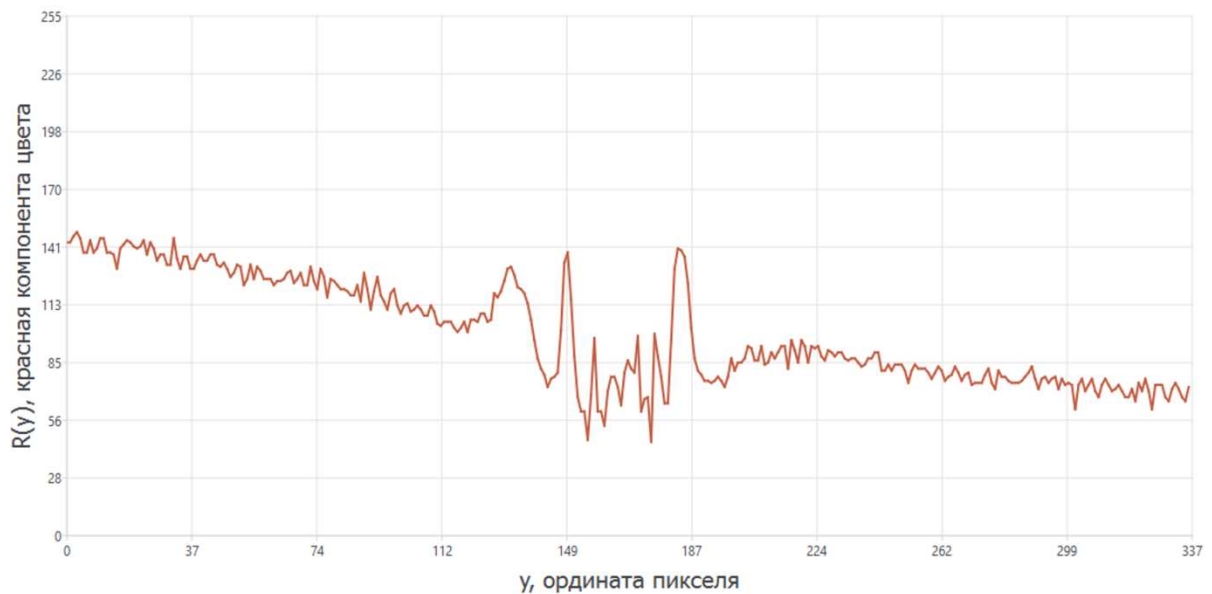


Рис. 16. График  $R(y)$  — функции размытости (красной компоненты цвета) в сечении  $x=400$  изображения в оттенках серого.

Модельное изображение кильватерной струи показано на рис. 17 (а), размытое изображение, полученное с помощью треугольной функции, — на рис. 17(б). Изображение с помехами показано на рис. 17(с).

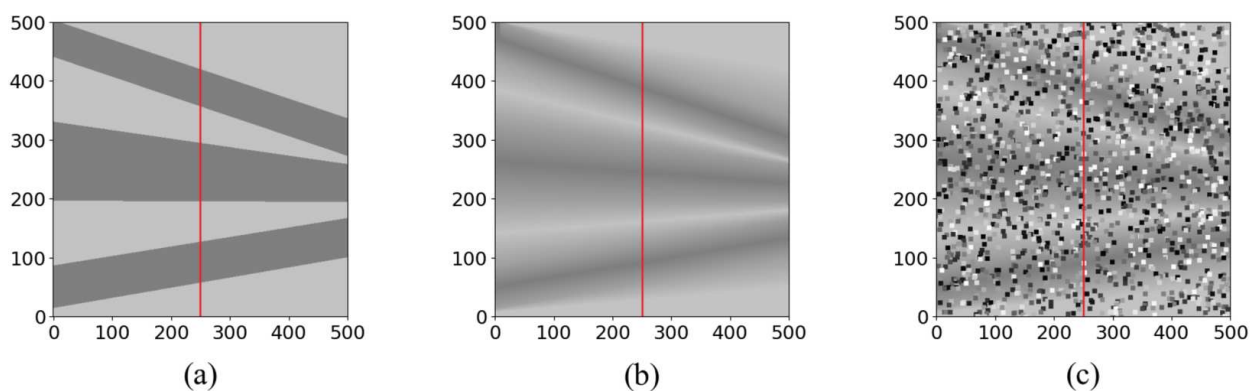


Рис. 17. Изображение кильватерного следа (средняя вертикальная полоса соответствует сечению  $x = 250$ , по которому построены функции размытости  $R(y)$ , рис. 18): (а) исходное изображение; (б) размытый след; (с) след с помехами.

На рис. 18 показана функция размытости  $R(y)$  изображения в сечении  $x = 250$ . Можно видеть, что, несмотря на наличие помех, первоначальная треугольная функция размытости достаточно хорошо видна на итоговом графике.

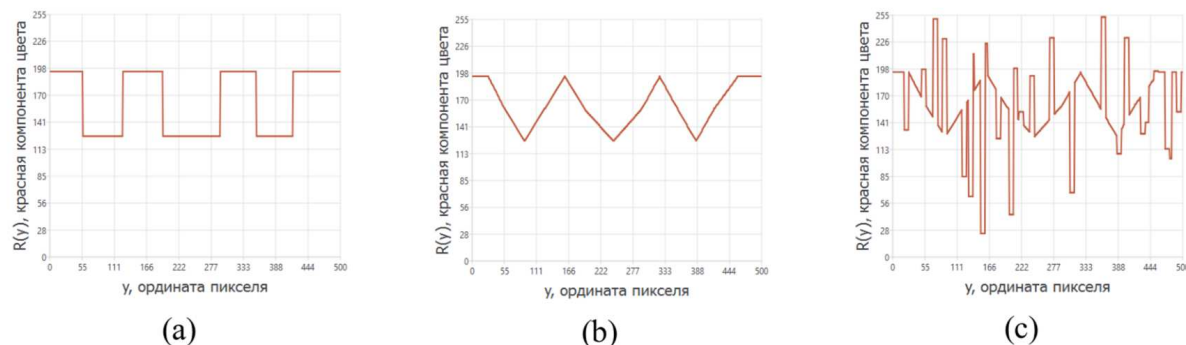


Рис. 18. Функция размытости  $R(y)$  в сечении  $x = 250$ : (а) исходного изображения; (б) размытого изображения; (с) зашумленного изображения.

При увеличении порога генерации помех, то есть при увеличении степени зашумлённости изображения размытого кильватерного следа, функция принадлежности становится плохо обнаруживаемой. Для обнаружения и исследования функции зашумлённости и соответственно изображения можно использовать нейронные сети различного вида.

### Заключение

В работе предложен метод использования нечетких множеств для получения изображений с размытыми границами. Алгоритм размытия границ изображения был реализован в программе Fuzzy Logic Graphic Instruments. Показаны примеры размытия геометрических фигур с помощью различных функций принадлежности. В работе также предложен алгоритм создания шумовых помех на изображении с случайными параметрами.

Для оценки размытости изображения предлагается использовать функцию размытости, которая связывает цвет и насыщенность пикселя с его координатой. В работе приводится пример моделирования зашумленного изображения кильватерной струи на поверхности воды.

Часть результатов, представленных в работе, докладывалась на XIII Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике», Москва, 28–31 января 2025 [8].

Предложенный подход позволяет создавать датасет больших объемов для обучения нейронных сетей, осуществляющих распознавание объектов на зашумленных изображениях.

### Литература

- [1] Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. Новейшие методы обработки изображений. Под ред. А.А. Потапова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 496 с.
- [2] Лукин А. Введение в цифровую обработку сигналов (математические основы). - М.: МГУ, Лаборатория компьютерной графики и мультимедиа, 2002. - 44 с.  
URL: <http://pv.bstu.ru/dsp/dspcourse.pdf>      <http://dsp-book.narod.ru/dspcourse.djvu>  
<http://geogin.narod.ru/arhiv/dsp/dsp4.pdf>.
- [3] Патрушев А.О., Осипов М.П. Поиск границ объектов прямоугольной формы на изображениях с контурным форматом представления // Фундаментальные исследования. - 2017. - № 12 (часть 1). - с. 91-96.
- [4] Апальков И.В., Хрящев В.В. Удаление шума из изображений на основе нелинейных алгоритмов с использованием ранговой статистики. - Ярославский государственный университет, 2007.

- [5] Ляхов А.Ф., Чнегов Е.И. Описание дескриптора осуществляющего категоризацию изображений с учетом геометрических структур по всем цветам // Компьютерные инструменты в образовании. - 2017. - № 6. - с. 31-43.
- [6] Прокопеня А.С., Азаров И.С. Современные методы распознавания изображений. BIG DATA and Advanced Analytics (BIG DATA и анализ высокого уровня). Сборник материалов V Международной научно-практической конференции, Минск, 13-14 марта 2019 г.: в 2 ч. Ч. 1. - Минск, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2019. - с. 351-359.
- [7] Штовба С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. - М.: Горячая линия-Телеком, 2006. - 212 с.
- [8] Ляхов А.Ф., Фомичев Д.Е. Алгоритм размытия границ изображения на основе нечетких множеств. Труды XIII Всероссийской конференции "Необратимые процессы в природе и технике", Москва, 28-31 января 2025. - Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2025. - Том 2. - с. 125-129.

*Ляхов Александр Федорович,  
доцент кафедры Теоретической, компьютерной  
и экспериментальной механики, математики  
и информатики Института Информационных Технологий,  
Математики и Механики Национального Исследовательского  
Нижегородского Государственного Университета  
им. Н.И. Лобачевского, кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: alf19545@rambler.ru*

*Фомичев Дмитрий Евгеньевич,  
Институт Информационных Технологий, Математики  
и Механики Национального Исследовательского  
Нижегородского Государственного Университета  
им. Н.И. Лобачевского, бакалавр.*

*E-mail: fomichiev\_2013@mail.ru*

# Интеграл энергии и огибающие. Геодезические на поверхностях вращения

А. О. Ремизов

Обсуждаются уравнения Ньютона и Эйлера-Лагранжа, допускающие понижение порядка с помощью интеграла энергии. При переходе к уравнению постоянной энергии могут появляться «лишние решения», не являющиеся решениями исходного уравнения второго порядка. Анализ этих «лишних решений» приводит к интересным результатам. В частности, помогает строить геодезические на поверхностях вращения.

## Предисловие

Боюсь, что объяснения приносят вред. Одни следствия без причины гораздо сильнее действуют на воображение.

А. Конан Дойл.  
*Приключения клерка*

Эта заметка, являющаяся продолжением [7], может быть полезна тем, кто преподает курс дифференциальных уравнений и стремится сделать его более содержательным и геометричным, а также связанным с другими разделами математики и физики.

Речь в ней идет об уравнениях Ньютона и Эйлера-Лагранжа, допускающих понижение порядка с помощью интеграла энергии. При переходе от таких уравнений к уравнениям первого порядка появляются «лишние решения», которые не являются решениями исходного уравнения второго порядка.

Причина этого весьма очевидна, но более тщательный анализ приводит к некоторым интересным результатам. Один из них — анализ геодезических в римановых метриках, обладающих непрерывной группой симметрий, в частности, геодезических на поверхностях вращения в евклидовом пространстве. Например, мы получаем простое доказательство теоремы Клеро о геодезических на поверхностях вращения, показывающее, что эта теорема представляет собой геометрическую интерпретацию закона сохранения энергии.

Автор старался написать текст таким образом, чтобы он был понятен также и начинающим, что привело к добавлению кратких и порой довольно наивных пояснений. Я очень признателен М.М. Родину (МФТИ) за исправление опечаток и неточностей в первоначальном тексте.

## 1. Уравнения Ньютона и Гамильтона

Движение частицы в потенциальном поле (гравитационном, электростатическом, etc.) описывается *уравнением Ньютона*

$$\ddot{y} = f(y), \quad (1)$$

где  $y = y(x)$  — координата частицы,  $x$  — момент времени; двойная точка обозначает вторую производную по  $x$ . Согласно второму закону Ньютона,  $f$  — это сила, которая действует на частицу единичной массы, и зависит лишь от ее координаты  $y$ , но не от скорости. Мы будем предполагать, что функция  $f$  является гладкой (по крайней мере, непрерывно дифференцируемой), это гарантирует существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1).

Вводя переменную  $p = \dot{y}$ , уравнение (1) можно переписать в виде системы

$$\dot{y} = p, \quad \dot{p} = f(y), \quad (2)$$

которая является *гамильтоновой*, то есть имеет вид

$$\dot{y} = H_p, \quad \dot{p} = -H_y, \quad \text{где } H(y, p) = \frac{1}{2}p^2 - F(y), \quad (3)$$

$F$  — любая первообразная функции  $f$ . Функция  $H$  называется *гамильтонианом* системы (3) и, как легко видеть, является ее первым интегралом. Физический смысл:  $H$  — это полная энергия частицы единичной массы, равна сумме ее кинетической и потенциальной энергии. Отсюда видно, что  $H$  не меняется со временем (закон сохранения энергии), но отличается у частиц, движущихся по разным траекториям. Таким образом, каждая траектория (фазовая кривая) системы (2) содержится в некотором множестве уровня функции  $H$ , то есть удовлетворяет уравнению первого порядка

$$H(y, \dot{y}) = c, \quad c = \text{const}. \quad (4)$$

В фазовой плоскости  $(y, p)$  положения равновесия системы (2) расположены на оси  $p = 0$  и имеют вид  $(y_*, 0)$ , где  $f(y_*) = 0$ ; они соответствуют критическим точкам гамильтониана  $H$ . Линейно связанные компоненты множеств уровня  $H = c$  могут состоять из одной траектории системы (включая и случай, когда эта траектория — одна точка, положения равновесия), но могут быть объединением нескольких примыкающих друг к другу траекторий (см. пример ниже). Если нарисовать семейство множеств уровня гамильтониана  $H$  и отметить положения равновесия системы (2), а также направление движения по траекториям, мы получим так называемый «фазовый портрет» уравнения (1), дающий представление о взаимной связи координаты частицы  $y$  и ее скорости  $p = \dot{y}$  в каждый момент времени.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнения (1) с функциями  $f = -y$ ,  $f = y$ ,  $f = y - y^3$ , которым соответствуют системы (2) с гамильтонианами

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + y^2), \quad H = \frac{1}{2}(p^2 - y^2), \quad H = \frac{1}{2}(p^2 - y^2) + \frac{1}{4}y^4. \quad (5)$$

Фазовые портреты изображены на рис. 1. В первом случае множество  $H = 0$  состоит из единственной критической точки гамильтониана (начало координат, центр поля (2)). Во втором случае множество  $H = 0$  состоит из единственной критической точки гамильтониана (начало координат, седло поля (2)) и четырех других траекторий — лучей прямых  $y \pm p = 0$ , на которые их разбивает эта точка. В третьем случае множество  $H = 0$  — это «восьмерка», состоящая из критической точки гамильтониана (начало координат, седло поля (2)) и двух *гомоклинаических* траекторий — «петель», выходящих из начала координат и входящих в него же. Кроме седла  $y = p = 0$ , гамильтониан имеет еще две критические точки  $y = \pm 1$ ,  $p = 0$  — центры поля (2).

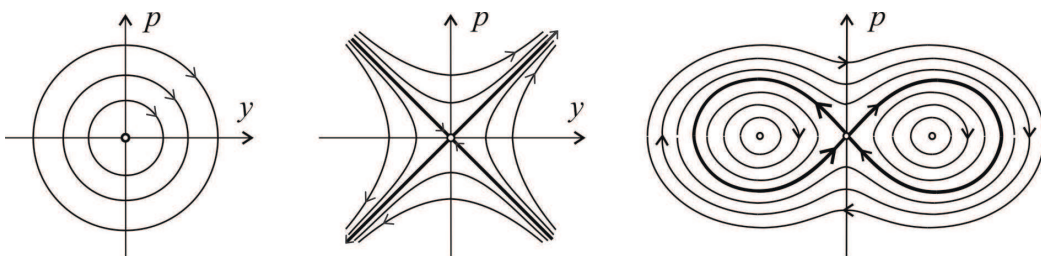


Рис. 1. Фазовые портреты систем (2) с гамильтонианами (5).

**Замечание 1.** Во всех перечисленных выше случаях положения равновесия гамильтоновых систем являются центрами или седлами. Докажите, что гамильтоновы системы не могут иметь узлов, фокусов и седел с различными по модулю собственными значениями. *Указание.* Для этого достаточно показать, что след матрицы линейной части гамильтоновой системы в ее положении равновесия равен нулю.

Во многих случаях исследование уравнения (1) ограничивается его фазовым портретом, но иногда уравнение необходимо *решить*, то есть найти зависимость переменной  $y$  от времени  $x$ . В этом случае используется уравнение (4). Дифференцируя его по  $x$ , мы видим, что любое решение уравнения (1) является решением уравнения (4). Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно: некоторые решения уравнения (4) могут не быть решениями уравнения (1). Так, например, очевидно, что все постоянные функции  $y(x) \equiv y_*$  удовлетворяют (4) при подходящем значении  $c$ . Очевидно, что уравнению (1) удовлетворяют лишь те из них, для которых  $f(y_*) = 0$ .

Чтобы лучше понять причину этого явления, полезно использовать другой переход от (1) к (4). Умножим обе части (1) на  $\dot{y}$  и заметим, что после этого они становятся полными дифференциалами:

$$\ddot{y}\dot{y} = f(y)\dot{y} \Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{y})^2 = F(y) + c, \quad c = \text{const.}$$

Вводя обозначение  $p = \dot{y}$  и перенося  $F(y)$  в левую часть, получаем уравнение (4). Теперь понятно, что «лишние решения» получаются из-за того, что мы умножили обе части уравнения (1) на множитель  $\dot{y}$ , который сам обращается в нуль (на постоянных функциях) и следовательно, «лишними решениями» могут быть только постоянные. Критерий «лишних решений» очень прост:

$$y(x) \equiv y_*, \quad \text{где } f(y_*) \neq 0. \quad (6)$$

Естественный вопрос: имеют ли какой-либо смысл «лишние решения» уравнения (4) по отношению к исходному уравнению (1)? Оказывается, они являются *огибающими* семейств его решений, обладающих одинаковым значением полной энергии  $H$ .

## 2. Немного об огибающих

Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство кривых на  $(x, y)$ -плоскости, которые «занумерованы» параметром  $c$ , принимающим вещественные значения, и заполняют всю плоскость или некоторую ее область (тогда мы будем рассматривать именно эту область).

Кривая  $\Gamma$  называется *огибающей* семейства  $\mathcal{F}$ , если в каждой своей точке  $\Gamma$  касается кривой  $\gamma_c \in \mathcal{F}$  при некотором значении  $c$ , причем  $\Gamma$  и  $\gamma_c$  не совпадают тождественно ни в какой окрестности точки касания<sup>1</sup>. Очень часто в определении огибающей делают «послабление», допуская, чтобы такое касание  $\Gamma$  с кривыми семейства  $\mathcal{F}$  имело место *почти* во всех точках  $\Gamma$ , за исключением, быть может, конечного числа.

**Пример 2.** Данное выше определение (с учетом «послабления») позволяет считать огибающей ось  $y = 0$  семейств  $\mathcal{F}_1 : y = (x - c)^2$  и  $\mathcal{F}_2 : x = t^2, y = t^3 + c(t + 1)$ , изображенных на рис. 2.

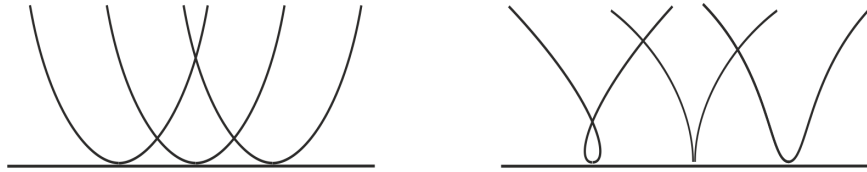


Рис. 2. Два семейства кривых с огибающей:  $y = (x - c)^2$  (слева) и  $x = t^2, y = t^3 + c(t + 1)$  (справа).

Мы не будем приводить необходимые и достаточные условия существования огибающих, отсылая заинтересованного читателя к книге [4], в которой детально исследованы все вопросы, связанные с огибающими. Скажем лишь, что наличие огибающей *типично* для семейств кривых общего положения<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Смысл последнего условия очевиден: в противном случае любая кривая  $\gamma \in \mathcal{F}$  была бы огибающей, так как в каждой точке «касалась» самой себя.

<sup>2</sup>Под типичностью некоторого свойства понимается то, что данным свойством обладают семейства, образующие открытое и всюду плотное множество в пространстве всех семейств кривых, наделенном некоторой топологией — так называемой *топологией Уитни* [2]. Таким образом, типичное свойство сохраняется при малых возмущениях семейства, а его отрицание — нет.



**Пример 3.** Рассмотрим семейство прямых, проходящих через фиксированную точку плоскости (рис. 3 слева). Оно не имеет огибающей, но с помощью сколь угодно малого возмущения этого семейства можно добиться того, чтобы огибающая появилась. Например, на рис. 3 (справа) изображено семейство, полученное из предыдущего сдвигом каждой прямой на фиксированное  $\varepsilon > 0$  ортогонально направлению этой прямой. Как легко видеть, новое семейство имеет огибающую – окружность радиуса  $\varepsilon$ .

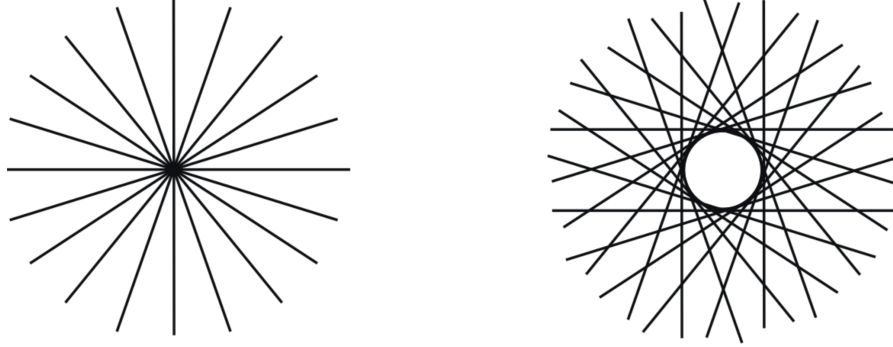


Рис. 3. Семейство кривых без огибающей (слева) и с огибающей (справа).

В предшествующем разделе было сформулировано следующее утверждение:

**Предложение 1.** Для любой постоянной функции  $y(x) = y_*$  имеет место следующая альтернатива:

1.  $f(y_*) = 0 \Leftrightarrow y(x) = y_*$  является решением уравнения (1)

или

2.  $f(y_*) \neq 0 \Leftrightarrow y(x) = y_*$  является огибающей семейства решений уравнения (4) с константой  $c = H(y_*, 0)$ , касание во всех точках первого порядка (рис. 2 слева).

Ниже мы докажем более общее утверждение, из которого предложение 1 вытекает как частный случай. Уравнения в двух следующих примерах получаются линеаризацией уравнений математического маятника  $\ddot{y} = -\sin y$  вблизи нижнего (устойчивого) и верхнего (неустойчивого) положений равновесия.

**Пример 4.** Уравнению Ньютона  $\ddot{y} = -y$  соответствует уравнение (4) с  $H = \frac{1}{2}(p^2 + y^2)$ , которое удобно переписать в виде

$$\dot{y}^2 + y^2 = A^2, \quad A = \text{const}, \quad (7)$$

см. фазовый портрет на рис. 1 (слева). Решения уравнения (7) имеют вид

$$y(x) = A \sin(x + \omega), \quad \omega = \text{const}. \quad (8)$$

Постоянное решение здесь только одно:  $y(x) \equiv 0$ , оно не является огибающей уравнения (7) при  $A = 0$ , так как это вообще единственное его решение. Если же  $A^2 > 0$ , то прямые  $y(x) \equiv \pm A$  не являются решениями уравнения  $\ddot{y} = -y$ , но являются огибающими семейства решений (8) с данным  $A^2$ . См. рис. 4 (слева).

**Пример 5.** Уравнению Ньютона  $\ddot{y} = y$  соответствует уравнение (4) с  $H = \frac{1}{2}(p^2 - y^2)$ , которое имеет постоянные решения при всех  $c \leq 0$ .

При  $c = 0$  получаем уравнение  $(\dot{y} + y)(\dot{y} - y) = 0$ , решения которого изображены на рис. 4 (в центре). Постоянное решение этого уравнения  $y(x) \equiv 0$  не является огибающей, но зато является решением уравнения  $\ddot{y} = y$ .

Пусть теперь  $c < 0$ , обозначим  $2c = -A^2$ . Решения уравнения

$$\dot{y}^2 - y^2 = -A^2, \quad A = \text{const}, \quad (9)$$

задаются формулой

$$y(x) = A \operatorname{ch}(x + \omega), \quad \omega = \text{const}.$$

Прямые  $y(x) \equiv \pm A$  являются огибающими семейства решений уравнения (9) с данным  $A^2 > 0$  (рис. 4 справа), но не являются решениями уравнения  $\ddot{y} = y$ .

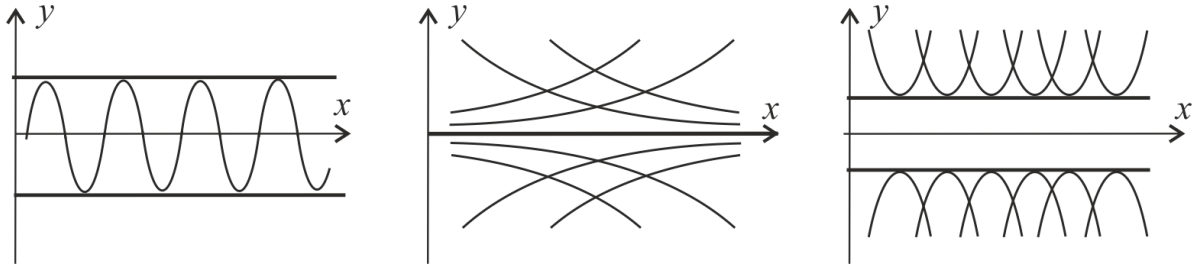


Рис. 4. Решения уравнений  $\ddot{y} + y^2 = A^2$  (слева),  $\ddot{y} - y^2 = 0$  (в центре),  $\ddot{y} - y^2 = -A^2$  (справа).

### 3. Уравнение Эйлера-Лагранжа

В вариационном исчислении, механике, физике и многих других областях математики и физики часто встречается задача, которая является естественным обобщением задачи нахождения экстремумов функций одной переменной. Например, рассматривается отображение, ставящее в соответствие каждой функции  $y(\cdot)$ , непрерывно дифференцируемой на отрезке  $I$ , число

$$J(y(\cdot)) = \int_I L(x, y(x), \dot{y}(x)) dx, \quad (10)$$

где  $L$  есть заданная функция трех переменных  $x, y, p$ , которая называется *лагранжианом*. Интегральное выражение (10) и задаваемое им отображение называют *функционалом*. Задача состоит в том, чтобы найти функции  $y(x)$  из множества всех гладких на отрезке  $I$  функций (или из определенного его подмножества), на которых функционал  $J$  достигает экстремума. Далее мы будем предполагать, что лагранжиан бесконечно дифференцируем по совокупности переменных и что производная  $L_{pp}$  не обращается в нуль. Лагранжианы с таким условием называются *невыврожденными* и встречаются в большинстве прикладных задач. В вариационном исчислении доказывается, что необходимым условием экстремума функционала  $J$  является *уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$\frac{d}{dx} L_p = L_y, \quad p = \dot{y}. \quad (11)$$

Это уравнение имеет тот же смысл, что и равенство  $f'(x) = 0$  для нахождения экстремумов функции  $f(x)$  одной переменной. Решения уравнения (11) называют *экстремальными* функционала  $J$ .

Важным частным случаем является такой, когда лагранжиан не зависит от одного из аргументов  $x$  или  $y$ . Например, если  $L = L(x, p)$  (не зависит от  $y$ ), правая часть уравнения (11) равна нулю, и следовательно, оно эквивалентно уравнению первого порядка

$$L_p(x, p) = c, \quad c = \text{const}. \quad (12)$$

Функция  $L_p(x, p)$  называется *интегралом импульса* уравнения (11).

Если же  $L = L(y, p)$  (не зависит от  $x$ ), то уравнение (11) имеет первый интеграл

$$H(y, p) = pL_p - L, \quad (13)$$

который называется *интегралом энергии*.

**Замечание 2.** Случай  $L = L(y, p)$  включает в себя как частный случай уравнение Ньютона. Действительно, уравнение (1) можно записать в виде (11) с лагранжианом

$$L(y, p) = \frac{1}{2}p^2 + F(y),$$

при этом гамильтониан (13) совпадает с (3) и равен сумме кинетической и потенциальной энергии, а лагранжиан равен их разности.

Для доказательства, что функция (13) — интеграл уравнения (11), заметим, что в случае лагранжиана  $L(y, p)$  последнее имеет вид

$$\dot{p}L_{pp} + pL_{yp} - L_y = 0, \quad (14)$$

и с учетом  $H_y = pL_{yp} - L_y$  и  $H_p = pL_{pp}$  его можно записать в виде  $L_{pp}dp + H_ydx = 0$ . Умножая обе части последнего уравнения на  $p$ , с учетом  $dy = pdx$  получаем:

$$pL_{pp}dp + H_y p dx = 0 \Leftrightarrow H_p dp + H_y dy = 0 \Leftrightarrow dH = 0.$$

Таким образом, любое решение уравнения (11) является решением уравнения первого порядка

$$H(y, p) = c, \quad c = \text{const}. \quad (15)$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно: уравнение (15) может иметь «лишние решения», которые не являются решениями исходного уравнения (11). Причина этого точно такая же, как и в случае уравнения Ньютона: при переходе от (11) к (15) мы умножили обе части уравнения на  $p$ . Таким образом, «лишние решения» могут быть только функциями  $y(x) \equiv \text{const}$ . Подставляя такое решение в уравнение (14), мы получаем следующий критерий: постоянная функция  $y(x) \equiv x_*$  является решением уравнения (11) тогда и только тогда, когда  $L_y(y_*, 0) = 0$ .

**Предложение 2.** Для любой постоянной функции  $y(x) = y_*$  имеет место следующая альтернатива:

1.  $L_y(y_*, 0) = 0 \Leftrightarrow y(x) = y_*$  является решением уравнения (11)

или

2.  $L_y(y_*, 0) \neq 0 \Leftrightarrow y(x) = y_*$  является огибающей семейства решений уравнения (15) с константой  $c = H(y_*, 0)$ , касание во всех точках первого порядка.

**Доказательство.** Используя невырожденность лагранжиана, можно записать уравнение (14) в нормальной форме:

$$\ddot{y} = \frac{L_y - pL_{yp}}{L_{pp}}, \quad (16)$$

где согласно сделанным предположениям, правая часть удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и единственность решения задачи Коши. В частности, для любых  $x_*$  и  $y_*$  уравнение (16) имеет единственное решение с начальным условием

$$y(x_*) = y_*, \quad p(x_*) = 0, \quad (17)$$

которое мы обозначим  $y = \phi_*(x)$ . Очевидно, могут быть два случая.

1. Если  $L_y(y_*, 0) = 0$ , то функция  $y(x) \equiv y_*$  удовлетворяет уравнению (16) с начальным условием (17), то есть является тем самым единственным решением  $y = \phi_*(x)$ . При этом она не может быть огибающей семейства решений уравнения (15), поскольку в противном случае через точку  $(x_*, y_*)$  проходило бы некоторое непостоянное решение уравнения (15) с горизонтальной касательной, то есть удовлетворяющее условию (17). Поскольку все непостоянные решения (15) являются решениями исходного уравнения Эйлера–Лагранжа, это означало бы, что задача Коши для уравнения (16) с начальным условием (17) имеет два решения (постоянное и непостоянное).

2. Если  $L_y(y_*, 0) \neq 0$ , то функция  $y(x) \equiv y_*$  не удовлетворяет уравнению (16). Кривые  $y = y_*$  и  $y = \phi_*(x)$  проходят через точку  $(x_*, y_*)$  с общим касательным направлением  $p(x_*) = 0$ , но, как легко видеть из уравнения (16) с учетом условия  $L_y(y_*, 0) \neq 0$ , имеют в этой точке разные значения  $\ddot{y}(x_*)$ , то есть имеют касание первого порядка. Поскольку все сказанное верно при произвольном выборе значения  $x_*$ , кривая  $y \equiv y_*$  в каждой своей точке касается некоторого решения уравнения (15), то есть является огибающей семейства его решений, которые имеют вид  $y = \phi_*(x+c)$  при всевозможных постоянных  $c$ .

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет красивое приложение в геометрии: с его помощью определяются так называемые *геодезические линии* (или просто *геодезические*), которые являются аналогом прямых на евклидовой плоскости. Напомним, что если на евклидовой плоскости с прямоугольными декартовыми координатами  $(u, v)$  задана гладкая кривая  $u(t), v(t)$ ,  $t \in I$ , то ее длина определяется интегралом

$$\int_I \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt. \quad (18)$$

Выражение  $\dot{u}^2 + \dot{v}^2$ , представляющее собой квадратичную форму от вектора скорости кривой, называется *евклидовой метрикой*. Линии, соединяющие две заданные точки и имеющие наименьшую длину, хорошо известны: это прямые.

Предположим теперь, что мы заменим в интеграле (18) евклидову метрику некоторой другой положительно определенной квадратичной формой  $Q(\dot{u}, \dot{v})$  (она называется *римановой метрикой*) и рассмотрим наикратчайшие линии в смысле этого нового интеграла. Такие линии называются *геодезическими* в заданной римановой метрике, они представляют большой интерес. Например, с помощью геодезических в специальной римановой метрике можно построить одну из моделей геометрии Лобачевского – геометрии, в которой выполнены все аксиомы плоскости Евклида, кроме *постулата о параллельных*. Ниже мы скажем об этом подробнее.

**Пример 6.** В одной из моделей плоскости Лобачевского *точками* служат точки верхней полуплоскости  $\Pi = \{(u, v) : v > 0\}$ , длина кривой вида  $u(t), v(t)$ ,  $t \in I$ , определяется с помощью интеграла

$$\int_I \sqrt{Q(\dot{u}, \dot{v})} dt, \quad Q(\dot{u}, \dot{v}) = \frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}{v^2}, \quad (19)$$

а *прямыми* являются наикратчайшие линии (геодезические) в смысле определенной выше длины. Чтобы найти геодезические, нужно рассматривать интеграл (19) как функционал, зависящий от двух неизвестных функций:  $u(t)$  и  $v(t)$ . Это приведет нас к системе, состоящий из двух уравнений Эйлера–Лагранжа. Задача существенно упрощается, если мы будем искать геодезические в виде графиков функций  $v(u)$  или  $u(v)$ . Так как длина не меняется при замене параметра на кривой, удобно положить  $t = u = x$ ,  $v = y$  или  $t = v = x$ ,  $u = y$  и рассматривать уравнение Эйлера–Лагранжа относительно неизвестной функции  $y(x)$ .

Первый вариант приводит нас к уравнению Эйлера–Лагранжа с лагранжианом

$$L(y, p) = \frac{1}{y} \sqrt{1 + p^2}, \quad p = \dot{y}. \quad (20)$$

После преобразования уравнения сохранения энергии

$$H(y, p) = pL_p - L = \frac{-1}{y\sqrt{p^2 + 1}} = c$$

и введения новой константы  $R = -1/c$  получаем уравнение  $(py)^2 = R^2 - y^2$ , которое после замены  $z = y^2$  принимает вид  $\dot{z}^2 = 4(R^2 - z)$ , то есть

$$\frac{dz}{2\sqrt{R^2 - z}} = \pm dx.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, возводя обе части полученного равенства в квадрат и возвращаясь к исходным переменным  $u = x$ ,  $v = y$ , получаем

$$(u - u_0)^2 + v^2 = R^2, \quad (21)$$

где  $R > 0$  и  $u_0$  – константы. Формула (21) описывает семейство окружностей всевозможных радиусов с центрами на оси  $u$  (рис. 5 слева). Заметим, что это семейство имеет огибающую – прямую  $v = R$ , которая согласно предложению 2 не является геодезической (в последнем можно убедиться непосредственно, подставляя функцию  $y(x) \equiv \text{const}$  в уравнение Эйлера-Лагранжа для лагранжиана (20)). Таким образом, мы установили, что верхние половины окружностей (21) со всевозможными радиусами  $R > 0$  и центрами на оси  $u$  являются «прямыми» в плоскости Лобачевского. Но все ли геодезические мы нашли?

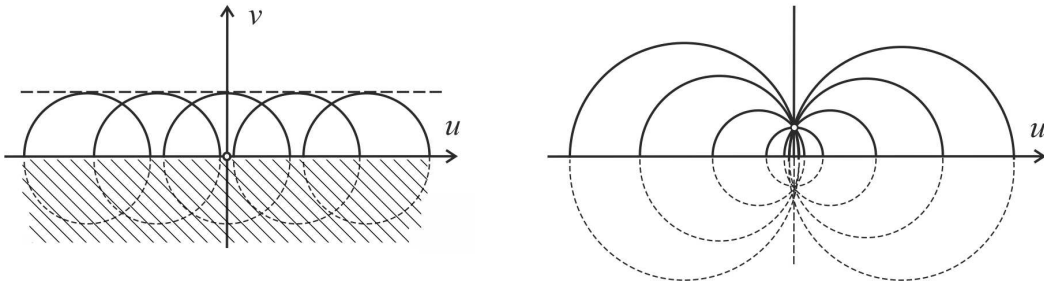


Рис. 5. Слева: семейство окружностей (21) с фиксированным  $R$  и его огибающая  $v = R$ . Справа: семейство прямых плоскости Лобачевского, проходящих через фиксированную точку.

Рассмотрим семейство геодезических – полуокружностей (21), проходящих через фиксированную точку полуплоскости  $\Pi$  (рис. 5 справа). В каждом направлении, кроме вертикального, проходит ровно одна геодезическая, но в вертикальном направлении не проходит ни одной. Также видно, что через две точки, лежащие на одной вертикальной прямой, нельзя провести полуокружность (21), то есть не выполняется один из постулатов геометрии (как Евклидовой, так и Лобачевского), который гласит, что через любые две точки проходит прямая. Следовательно, кроме полуокружностей (21) множество геодезических («прямых» в плоскости Лобачевского) должно содержать еще какие-то линии, чтобы в нашей модели выполнялась эта аксиома.

Нетрудно догадаться, что эти линии суть вертикальные прямые  $u = \text{const}$ . Мы не нашли их потому, что искали геодезические в виде  $v = v(u)$ , каковыми вертикальные прямые не являются.

Чтобы восполнить этот пробел, используем обозначения  $t = v = x$ ,  $u = y$  и проверим, являются ли функции  $y(x) \equiv \text{const}$  решениями уравнения Эйлера–Лагранжа с лагранжианом

$$L(x, p) = \frac{1}{x} \sqrt{1 + p^2}, \quad p = \dot{y}.$$

Для этого даже не нужно выписывать это уравнение, так как достаточно записать интеграл импульса  $L_p(x, p)$  и убедиться, что он обращается в нуль на всех функциях  $y(x) \equiv \text{const}$ . Чтобы получить множество всех «прямых» плоскости Лобачевского, нужно добавить ко множеству всех полуокружностей (21) семейство вертикальных прямых  $u \equiv \text{const}$ .

**Замечание 3.** При таком определении «прямых» через любые две точки полуплоскости  $\Pi$  проходит единственная прямая (это аксиома, общая для геометрий Евклида и Лобачевского), но через любую точку проходит *бесконечное число* прямых, не пересекающихся с заданной прямой, не содержащей эту точку (в геометрии Евклида такая прямая единственна). Конечно, эти свойства еще позволяют считать модель плоскости Лобачевского построенной: необходимо проверить ряд других постулатов, в частности, доказать, что построенная модель обладает достаточно богатой *группой движений* (аксиома *свободной подвижности*, по терминологии Софуса Ли)<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Заинтересованного читателя отсылаем к книгам [1, 6, 8] или [9] (гл. 12).

#### 4. Геодезические на поверхности вращения

Рассмотрим наикратчайшие линии (геодезические) на гладкой поверхности  $S$  в евклидовом пространстве с координатами  $X, Y, Z$ , которая задается параметрически:

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v), \quad Z = Z(u, v). \quad (22)$$

Кривая, лежащая на поверхности  $S$ , задается функциями  $u(t), v(t)$ ,  $t \in I$ . Подставляя их в (22), получаем выражение для длины кривой:

$$\int_I \sqrt{Q(\dot{u}, \dot{v})} dt, \quad Q(\dot{u}, \dot{v}) = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2 = g_{11} \dot{u}^2 + g_{12} \dot{u} \dot{v} + g_{22} \dot{v}^2, \quad (23)$$

где

$$g_{11} = X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2, \quad g_{12} = X_u X_v + Y_u Y_v + Z_u Z_v, \quad g_{22} = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2.$$

Выражение  $Q(\dot{u}, \dot{v})$ , представляющее собой квадратичную форму от вектора скорости кривой на поверхности  $S$ , называется *первой квадратичной формой* поверхности  $S$ ; это частный случай более общего понятия римановой метрики<sup>4</sup>.

Наикратчайшие линии на поверхности  $S$ , то есть в смысле длины, заданной формулой (23), называются *геодезическими* на  $S$ . Для вычисления геодезических удобно, как мы уже делали ранее, искать их (по крайней мере, локально) в виде графиков функций  $v(u)$  или  $u(v)$ . В этом случае мы придем к уравнению Эйлера – Лагранжа с одной неизвестной функцией.

Рассмотрим геодезические на поверхности вращения  $S$ :

$$X = f(u) \cos \phi, \quad Y = f(u) \sin \phi, \quad Z = h(u), \quad (24)$$

где  $f, h$  – гладкие функции. Далее мы будем предполагать, что при всех  $u$  выполнены условия  $f > 0$ ,  $A := (f')^2 + (h')^2 > 0$ . Кривая, лежащая на поверхности  $S$ , задается функциями  $u(t), \phi(t)$ ,  $t \in I$ . Координатные линии  $u = \text{const}$  и  $\phi = \text{const}$  называются соответственно *параллелями* и *меридианами*.

Первая квадратичная форма поверхности  $S$  имеет вид

$$Q(\dot{\phi}, \dot{u}) = f^2(u) \dot{\phi}^2 + A(u) \dot{u}^2. \quad (25)$$

Из диагональности формы (25) следует, что параллели и меридианы образуют *ортогональную сеть*.

Поверхность  $S$  переходит в себя под действием группы вращений относительно оси  $Z$ . При поворотах каждая геодезическая переходит в другую геодезическую, такие геодезические мы будем называть *конгруэнтными*. Например, все меридианы конгруэнтны друг другу, а каждая параллель конгруэнтна лишь самой себе.

**Предложение 3.** В случае поверхности вращения  $S$ :

1. Все меридианы являются геодезическими.
2. Среди параллелей геодезическими являются те и только те  $u = u_*$ , для которых  $f'(u_*) = 0$ .

См. рис. 6.

3. Параллели  $u = u_*$ , для которых  $f'(u_*) \neq 0$ , являются огибающими семейств конгруэнтных геодезических, не являющихся ни параллелями, ни меридианами.

<sup>4</sup>Интересный вопрос состоит в следующем: при каких условиях риманова метрика реализуется как первая квадратичная форма некоторой поверхности в евклидовом пространстве? Это называется задачей об *изометрическом вложении* или *изометрическом погружении* метрики в евклидово пространство. Этому вопросу посвящено много исследований, см., например, [3, 5].

**Доказательство.** Меридианы являются частным случаем кривых вида  $\phi(u)$ , именно,  $\phi(u) \equiv \text{const}$ . Положив в формулах (23) и (25) переменные  $t = u = x$  и  $\phi = y$ , мы приходим к уравнению Эйлера – Лагранжа с лагранжианом

$$L(x, p) = \sqrt{f^2(x)p^2 + A(x)}, \quad (26)$$

не зависящим от  $y$ , которое имеет интеграл импульса  $L_p$ . Так как  $L_p = 0$  для любой функции  $y(x) \equiv \text{const}$ , все меридианы являются геодезическими.

Для всех остальных геодезических, включая параллели, положив в (23) и (25)  $t = \phi = x$  и  $u = y$ , приходим к уравнению Эйлера – Лагранжа с лагранжианом

$$L(y, p) = \sqrt{A(y)p^2 + f^2(y)}, \quad (27)$$

не зависящим от  $x$ , которое имеет интеграл энергии

$$H(y, p) = pL_p - L = \frac{-f^2(y)}{\sqrt{A(y)p^2 + f^2(y)}}. \quad (28)$$

После этого все остальные утверждения следуют из Предложения 2.

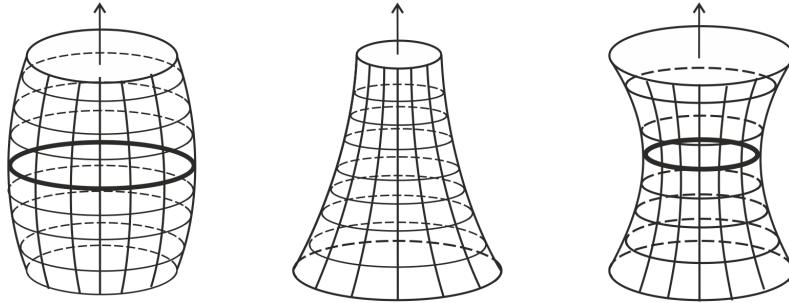


Рис. 6. Меридианы и параллели на поверхности вращения. Параллели, являющиеся геодезическими, изображены жирными линиями.

Используя соображения, аналогичные приведенным выше, можно дать простое доказательство *теоремы Клеро* о геодезических на поверхности вращения, которая фактически является геометрической интерпретацией закона сохранения интеграла энергии или импульса.

Пусть  $\gamma \subset S$  – произвольная гладкая кривая, лежащая на поверхности вращения  $S$ . В каждой точке кривая  $\gamma$  пересекается с некоторой параллелью поверхности  $S$ .

Обозначим через  $\alpha(q)$  угол, под которым  $\gamma$  пересекает параллель в точке  $q$ , и через  $R(q)$  – расстояние от точки  $q$  до оси вращения поверхности. См. рис. 7.

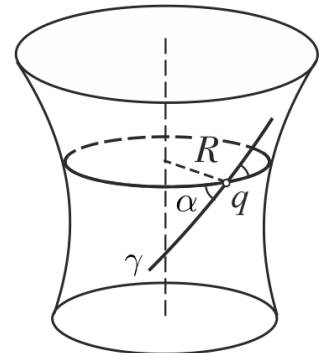


Рис. 7.

**Теорема 1 (Клеро).** Если кривая  $\gamma$  – геодезическая, то для всех  $q \in \gamma$  выполнено тождество

$$R(q) \cdot \cos \alpha(q) \equiv \text{const}. \quad (29)$$

Обратно, если выполнено тождество (29), то кривая  $\gamma$  является либо параллелью, либо геодезической на  $S$ .



**Доказательство.** Пусть поверхность  $S$  задана формулой (24). Тождество (29) очевидно для меридианов:  $\alpha(q) \equiv \frac{\pi}{2}$  и параллелей:  $\alpha(q) \equiv 0$ ,  $R(q) = f(u) \equiv \text{const}$ . Покажем, что оно выполняется для любой геодезической  $\gamma \subset S$ . Достаточно доказать это локально, поэтому можно считать, что в окрестности точки  $q$   $\gamma$  имеет вид графика функции  $u = u(\phi)$  (если она не касается меридиана) или  $\phi = \phi(u)$  (если не касается параллели). Далее мы рассмотрим первый случай, используя интеграл энергии (28). Второй случай рассматривается аналогично с помощью интеграла импульса.

Пусть  $e_1, e_2, e_3$  — ортонормированный базис в объемлющем пространстве, лежащий на координатных осях  $X, Y, Z$ . В обозначениях  $\phi = x$  и  $u = y$  кривая  $\gamma$  имеет вид графика функции  $y(x)$ , обозначим  $p = dy/dx$ . Пусть  $\mathbf{v}$  — касательный вектор к  $\gamma$  в точке  $q = (x, y)$ . Из формулы (24) следует, что  $\mathbf{v} = p\mathbf{v}_m + f(y)\mathbf{v}_n$ , где

$$\mathbf{v}_m = f'(y)(\cos x \mathbf{e}_1 + \sin x \mathbf{e}_2) + h'(y) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_n = -\sin x \mathbf{e}_1 + \cos x \mathbf{e}_2$$

суть касательные векторы в точке  $q$  соответственно к меридиану и параллели. Заметим также, что  $(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_m) = A(y)$ ,  $(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n) = 0$ ,  $(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) = 1$ , поэтому

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = p^2 A(y) + f^2(y), \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}_n) = f(y) = R(q). \quad (30)$$

Так как  $(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n) = 1$ , мы имеем равенство  $|\mathbf{v}| \cos \alpha(q) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_n) = f(y)$ , из которого с учетом (30) окончательно получаем:

$$\cos \alpha(q) = \frac{f(y)}{\sqrt{p^2 A(y) + f^2(y)}} \Rightarrow R(q) \cdot \cos \alpha(q) = \frac{f^2(y)}{\sqrt{p^2 A(y) + f^2(y)}} = -H(y, p).$$

Отсюда видно, что тождество (29) выполняется для всех геодезических, а также и для всех параллелей, включая и те, которые не являются геодезическими.

**Пример 7.** Исследуем, как выглядят геодезические на конусе вращения с осью вращения  $Z$ . В силу зеркальной симметрии достаточно рассмотреть лишь одну его полу, например, при  $Z > 0$ . Ее можно задать формулой (24) с функциями  $f(u) = u$  и  $h(u) = \alpha u$ ,  $u > 0$ , где  $\alpha$  — положительное число, определяющее величину *раствора* конуса. Согласно Предложению 3, все меридианы конуса являются геодезическими, а все параллели — нет. Найдём остальные геодезические.

Первая квадратичная форма конуса имеет вид  $u^2 \dot{\phi}^2 + \beta^2 \dot{u}^2$ , где  $\beta^2 = 1 + \alpha^2$ . Положив  $t = \phi = x$  и  $u = y$ , получаем:

$$L(y, p) = \sqrt{y^2 + \beta^2 p^2}, \quad H(y, p) = pL_p - L = \frac{-y^2}{\sqrt{y^2 + \beta^2 p^2}}.$$

Уравнение  $H(y, p) = -\frac{1}{c}$ , где  $c > 0$  — константа, легко преобразуется к виду

$$p^2 = \frac{y^2 ((cy)^2 - 1)}{\beta^2}. \quad (31)$$

В области  $y > 0$  функция  $c^2 y^2 - 1$  обращается в нуль в единственной точке  $y = 1/c$ , что соответствует единственному постоянному решению уравнения (31). Согласно предложению 3, параллель  $y = 1/c$  является огибающей семейства решений уравнения (31) с фиксированным значением постоянной  $c$ . Запишем уравнение (31) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\beta} \sqrt{(cy)^2 - 1}, \quad (32)$$

где вместо знака  $\pm$  мы считаем, что число  $\beta$  может быть как положительным, так и отрицательным. Интегрируя уравнение (32) и возвращаясь от  $x, y$  к исходным обозначениям  $\phi, u$ , получаем

$$\phi = \phi_0 + \beta \arctg\left(\sqrt{(cu)^2 - 1}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{u} = c \cos\left(\frac{\phi - \phi_0}{\beta}\right). \quad (33)$$

Анализ формул (33) показывает, что геодезические на верхней части конуса выглядят как «петли», надетые на него. Значение  $c$  определяет нижнюю точку петли: она имеет координаты  $\phi_0$  и  $u = 1/c$  и расположена на высоте  $\alpha/c$  от вершины конуса. Чем больше значение  $c$ , тем ниже опускается петля. Для каждой петли выполнено неравенство

$$\phi_0 - \frac{\beta\pi}{2} < \phi < \phi_0 + \frac{\beta\pi}{2}, \quad (34)$$

причем  $u \rightarrow \infty$  при стремлении  $\phi$  к любому из концов интервала (34), то есть «концы петли» уходят на бесконечность с прямолинейными асимптотами – меридианами.

Петля имеет самопересечения, если интервал (34) содержит точки, сравнимые по модулю  $2\pi$ . Если  $\beta \leq 2$ , то таких точек нет и петля не имеет самопересечений. Самопересечения возникают, когда  $\beta > 2$ , то есть угол раствора конуса меньше  $\frac{\pi}{3}$ . Число точек самопересечения петли равно  $n$ , если  $2n < \beta \leq 2(n+1)$ . Оно не зависит от  $c$ , то есть одинаково для всех геодезических данного конуса, отличных от меридианов, причем оно тем больше, чем более узким является конус. На рис. 8 представлены три конуса с геодезическими, имеющими разное число самопересечений.

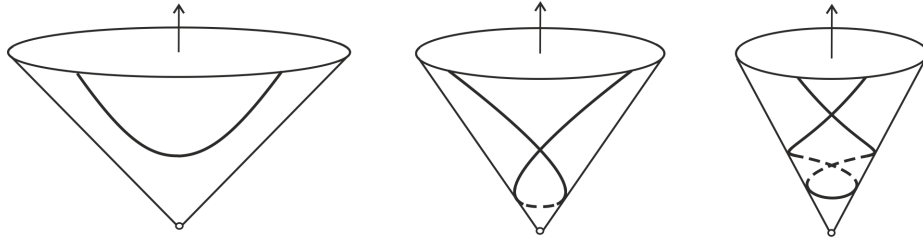


Рис. 8. Геодезические на конусе вращения с разным числом самопересечений: 0, 1, 2.

**Пример 8.** Рассмотрим однополостный гиперболоид вращения, заданный формулой (24) с функциями  $f(u) = \text{ch } u$  и  $h(u) = \text{sh } u$ , параметр  $u$  пробегает все вещественные значения. Согласно Предложению 3, все меридианы являются геодезическими, а среди параллелей геодезическая только одна – экватор  $u = 0$ .

Первая квадратичная форма гиперболоида имеет вид  $\text{ch}^2 u \dot{\phi}^2 + \text{ch } 2u \dot{u}^2$ . Положив  $t = \phi = x$  и  $u = y$ , получаем:

$$L(y, p) = \sqrt{\text{ch}^2 y + \text{ch } 2y p^2}, \quad H(y, p) = pL_p - L = \frac{-\text{ch}^2 y}{\sqrt{\text{ch}^2 y + \text{ch } 2y p^2}}.$$

Уравнение  $H(y, p) = -\frac{1}{c}$ , где  $c > 0$  – константа, преобразуется к виду

$$p^2 = \frac{\text{ch}^2 y ((c \text{ch } y)^2 - 1)}{\text{ch } 2y}, \quad (35)$$

и нам придется рассмотреть три случая.

1. Пусть  $c < 1$ . Тогда уравнение  $(c \text{ch } y)^2 - 1 = 0$  имеет два симметричных корня

$$y_1 = \text{arch}\left(\frac{1}{c}\right) > 0, \quad y_2 = -y_1.$$

Правая часть (35) отрицательна при  $|y| < y_1$  и положительна при  $|y| > y_1$ , поэтому все решения уравнения (35) расположены в областях  $y > y_1$  и  $y < y_2$ , а границы областей (параллели  $y = y_1$  и  $y = y_2$ ) являются огибающими семейства этих решений (рис. 4 справа). Соответствующие геодезические на гиперболоиде изображены на рис. 9 (слева). Они выглядят как петли, надетые на гиперболоид, подобно тому, как это было в случае конуса. Значение константы  $c$  определяет нижнюю точку петли на верхней половине гиперболоида и верхнюю точку петли на нижней половине: эти точки расположены на высоте  $Z = \pm \text{sh } y_1 = \pm \sqrt{1/c^2 - 1}$ .

2. Пусть  $c = 1$ . Уравнение  $(c \operatorname{ch} y)^2 - 1 = 0$  имеет единственный корень  $y = 0$ . Параллель  $y = 0$  (экватор) является геодезической и не является огибающей семейства решений уравнения (35), которые представляют собой монотонные функции, асимптотически стремящиеся к  $y = 0$ . См. рис. 4 (в центре). Соответствующие геодезические на гиперboloиде монотонно наматываются на экватор (рис. 9 в центре).

3. Пусть  $c > 1$ . Правая часть уравнения (35) положительная при всех  $y$ , и семейство его решений состоит из монотонно убывающих и монотонно возрастающих функций. Соответствующие геодезические проходят по обеим половинам гиперboloида, трансверсально пересекая экватор. См. рис. 9 (справа). Отметим, что это семейство геодезических включает в себя прямолинейные образующие однополостного гиперboloида.

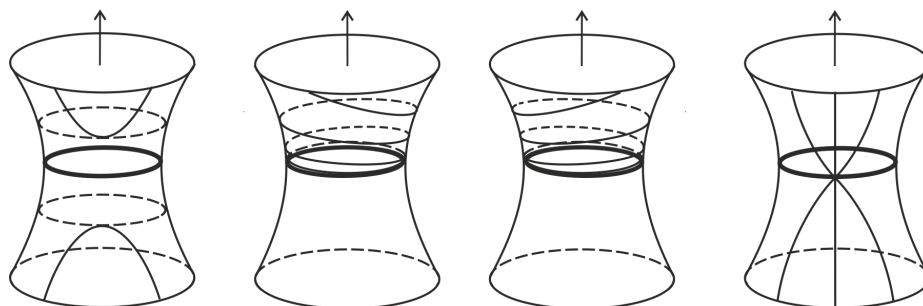


Рис. 9. Геодезические на гиперboloиде вращения. Экватор (единственная параллель, являющаяся геодезической) изображен жирной линией.

## Литература

- [1] Александров П.С. Что такое неевклидова геометрия. - Москва: Изд. АПН, 1950.
- [2] Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977.
- [3] Громов М.Л., Рохлин В.А. Вложения и погружения в римановой геометрии // УМН. - 25:5. - 155. - 1970. - С. 3-62.
- [4] Залгаллер В.А. Теория огибающих. - Москва: Наука, 1975.
- [5] Нэш Дж. Проблема вложений для римановых многообразий // УМН. - 26:4. - 160. - 1971. - С. 173-216.
- [6] Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского. - Москва: МЦНМО, 2004.
- [7] Ремизов А.О. Los Caprichos Diferenciales // Матем. обр. - 1 (105). - 2023. - С. 32-47.
- [8] Stahl S. A gateway to modern geometry. The Poincaré half-plane. - Boston, MA: Jones & Bartlett Publ, 2008.
- [9] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. - Москва: Физматлит, 2009.

Ремизов Алексей Олегович,  
доцент Кафедры высшей математики  
Московского физико-технического института,  
доцент Кафедры теории динамических систем  
МГУ имени М.В. Ломоносова,  
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: alexey-remizov@yandex.ru

# К определению двусторонней поверхности

С. В. Шведенко

В заметке введено понятие двусторонней поверхности, рассмотрен критерий двусторонности, приведены примеры как выполнения так и нарушения этого критерия.

## 1. Параметрическое задание поверхности. Условия гладкости

В рамках математического анализа *поверхность* (в координатном пространстве  $\mathbb{R}_{xyz}^3$ ) понимают как образ  $S$  какой-либо плоской фигуры  $D$  (чаще всего прямоугольника) при отображении в про-

странство  $\mathbb{R}_{xyz}^3$  тройкой функций 
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$
 задающих, как говорят, *параметризацию*

поверхности  $S$ . Поверхность  $S$  считается (условно) *гладкой*, если для этих функций выполняются следующие “условия гладкости”, нарушения которых допускаются лишь на *границе* фигуры  $D$  и рассматриваются отдельно:

1) отображение, осуществляемое этими функциями, является *взаимно однозначным*, т.е. *разные* точки  $(u, v) \in D$  переходят в *разные* точки  $(x, y, z) \in S$ ;

2) функции имеют на множестве  $D$  непрерывные частные производные (по  $u$  и  $v$ ), при этом ранг составленной из них матрицы  $\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}$  всюду равен 2.

Первое из этих условий гарантирует отсутствие у параметризуемой поверхности  $S$  самопересечений и самоналожений, а второе обеспечивает существование в каждой точке  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  (в которой выполнено это условие) *касательной плоскости* с уравнением

$$\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} (z - z_0) = 0 \quad ([1], n^\circ 234)$$

и вектором нормали  $\vec{N} = \left\{ \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$ , порождающим пару вза-

имно противоположных векторов *единичной нормали*  $\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ . Точки поверхности  $S$ , в которых касательная плоскость (и вектор нормали) не существует, называются *особыми* и подлежат отдельному рассмотрению.

**Примеры.** 1. Параметризация сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ : 
$$\begin{cases} x = a \cos u \sin v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos v, \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$
 где  $D$  —

прямоугольник  $\{0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$ . На его границе нарушается взаимная однозначность параметризации. В “полюсах” сферы (при  $v = 0$  и  $v = \pi$ ) вектор  $\vec{N}$  оказывается нулевым, но касательные плоскости существуют. Поверхность гладкая, особых точек нет.

2. Параметризация конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ : 
$$\begin{cases} x = v \cos u, \\ y = v \sin u, \\ z = v, \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$
 где  $D$  — прямо-

угольник  $\{0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq h\}$ . Гладкая поверхность с особой точкой (остриём)  $(0, 0, 0)$ .

## 2. Двусторонность поверхности и пример ее нарушения

*Двусторонность* гладкой поверхности  $S$ : 
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$
 можно сформулировать как

требование, чтобы задаваемые равенствами  $\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ ,  $\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$  поля единичных нормалей  $\vec{n}^+$  и  $\vec{n}^-$  на поверхности  $S$  были однозначными, т.е. в любой точке поверхности  $S$  значением поля  $\vec{n}^+$  (так же, как и поля  $\vec{n}^-$ ) должен быть единственный вектор<sup>1</sup>.

Пример ленты Мёбиуса: 
$$\begin{cases} x = (a + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, \\ y = (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, \\ z = v \sin \frac{u}{2}, \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -h \leq v \leq h \quad (0 < h < a) —$$
 гладкой

поверхности без особых точек — служит доказательством того, что сформулированным свойством обладают не все гладкие поверхности, т.е. не все они являются двусторонними.

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что вдоль средней линии ленты Мёбиуса (когда  $0 \leq u \leq 2\pi$ , а  $v = 0$ )

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin u & a \cos u & 0 \\ \cos \frac{u}{2} \cos u & \cos \frac{u}{2} \sin u & \sin \frac{u}{2} \end{vmatrix} = \begin{cases} -a\vec{k}, & \text{если } u = 0, \\ a\vec{k}, & \text{если } u = 2\pi, \end{cases}$$

а так как точка  $(a, 0, 0)$  ленты Мёбиуса является образом двух пар значений параметров: как  $u = 0, v = 0$ , так и  $u = 2\pi, v = 0$ , то одновременно выполняются равенства

$$\vec{n}^+(a, 0, 0) = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \Big|_{u=0, v=0} = -\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{n}^+(a, 0, 0) = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \Big|_{u=2\pi, v=0} = \vec{k},$$

показывающие, что поле единичных нормалей  $\vec{n}^+$  на ленте Мёбиуса является *неоднозначным*.

Чтобы установить *двусторонность* гладкой поверхности  $S$  : 
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D, \text{ достаточ-}$$

но доказать, принимая обозначение  $\vec{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ , что для любой пары точек  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$  верна импликация

$$\vec{r}(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2) \implies \text{“векторы } \vec{N}(u_1, v_1) \text{ и } \vec{N}(u_2, v_2) \text{ однонаправлены”} \quad (\Lambda)$$

(при выполнении этого требования поле единичных нормалей  $\vec{n}^+ = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  (равно как поле  $\vec{n}^- = -\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ ) в любой точке поверхности  $S$  имеет *единственное* значение).

Например, в случае *сферы* (пункт 1.1., пример 1)  $\vec{r}(u, v) = \{a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v\}$ , тогда как прямой подсчет показывает, что  $N(u, v) = -a^2 \sin v \{\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v\} = -a \sin v \vec{r}(u, v)$ , при этом множитель  $-a \sin v$  не меняет знака, а следовательно векторы  $\vec{N}(u, v)$  и  $\vec{r}(u, v)$  коллинеарны и противоположно направлены.

В случае *конуса* (§ 1, пример 2)  $\vec{r}(u, v) = \{v \cos u, v \sin u, v\}$ , а  $\vec{N}(u, v) = \{v \cos u, v \sin u, -v\}$ , так что  $\vec{r}(u_1, v_1) = \vec{r}(u_2, v_2) \iff \vec{N}(u_1, v_1) = \vec{N}(u_2, v_2)$ .

В обоих этих случаях импликация (\*) верна, обе поверхности являются *двусторонними*.

## Литература

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. - М.: Наука, 1966.

<sup>1</sup> Выбор поля единичных нормалей ( $\vec{n}^+$  или  $\vec{n}^-$ ) на двусторонней поверхности  $S$  означает выбор одной из двух *сторон* этой поверхности.

# Чему равна площадь ленты Мёбиуса?

С. В. Шведенко

В заметке вычислена площадь ленты Мёбиуса, рассматриваемой как двумерная поверхность в трехмерном пространстве, заданная параметрически.

Имеется в виду математический объект — воображаемая поверхность в пространстве  $\mathbb{R}_{xyz}^3$  с параметрическим заданием 
$$\begin{cases} x = (a + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, \\ y = (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, \\ z = v \sin \frac{u}{2}, \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad -h \leq v \leq h, \text{ а не одноименная}$$
 популярная модель, склеенная из полоски бумаги длины  $2\pi a$  и ширины  $2h$  (рис. 1).

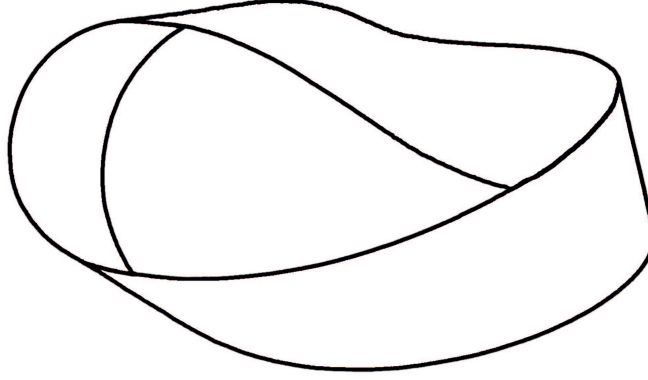


Рис. 1. Лента Мёбиуса.

Прежде всего возникают сомнения в корректности поставленного вопроса. Дело в том, что принятые в анализе определения и формулы площади поверхности так или иначе опираются на наличие у поверхности однозначного поля единичной нормали, т. е. ее *двусторонность*. Лента Мёбиуса этим свойством не обладает, поэтому применение к ней известной формулы площади параметрически заданной (двусторонней) поверхности  $S = \iint_D \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2} du dv$  (где  $D$  — плоская фигура изменения параметров  $u$  и  $v$ ) требует комментария.

Поскольку *односторонняя* поверхность (лента Мёбиуса) есть в каком-то смысле результат продолжения одной стороны *двусторонней* поверхности (обруча) другой ее стороной, в качестве фигуры интегрирования  $D$  должно взять не задействованный в параметризации ленты Мёбиуса прямоугольник  $\{0 \leq u \leq 2\pi, -h \leq v \leq h\}$ , а *вдвое удлинённый*:  $D = \{0 \leq u \leq 4\pi, -h \leq v \leq h\}$ .

Прямые вычисления дают:

$$\begin{aligned} x'_u &= -\frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \cos u - (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, & y'_u &= -\frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \sin u + (a + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, & z'_u &= \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \\ x'_v &= \cos \frac{u}{2} \cos u, & y'_v &= \cos \frac{u}{2} \sin u, & z'_v &= \sin \frac{u}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = -\frac{v}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \sin u + (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin \frac{u}{2} \cos u - \frac{v}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \sin u = -\frac{v}{2} \sin u + (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin \frac{u}{2} \cos u;$$

$$\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \frac{v}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cos u + (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin \frac{u}{2} \sin u + \frac{v}{2} \sin^2 \frac{u}{2} \cos u = \frac{v}{2} \cos u + (a + v \cos \frac{u}{2}) \sin \frac{u}{2} \sin u;$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x'_u}{x'_v} \frac{y'_u}{y'_v} \right| &= -\frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} \cos u \sin u - \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} \cos u \sin u = -\left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos \frac{u}{2}; \\
\left| \frac{y'_u}{y'_v} \frac{z'_u}{z'_v} \right|^2 + \left| \frac{z'_u}{z'_v} \frac{x'_u}{x'_v} \right|^2 + \left| \frac{x'_u}{x'_v} \frac{y'_u}{y'_v} \right|^2 &= \frac{v^2}{4} \sin^2 u - v \cos u \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin \frac{u}{2} \sin u + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{u}{2} \cos^2 u + \\
&+ \frac{v^2}{4} \cos^2 u + v \cos u \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin \frac{u}{2} \sin u + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{u}{2} \sin^2 u + \\
&+ \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{v^2}{4} + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Соответственно, площадь  $S$  ленты Мёбиуса получает интегральное выражение

$$S = \iint_D \sqrt{\left| \frac{y'_u}{y'_v} \frac{z'_u}{z'_v} \right|^2 + \left| \frac{z'_u}{z'_v} \frac{x'_u}{x'_v} \right|^2 + \left| \frac{x'_u}{x'_v} \frac{y'_u}{y'_v} \right|^2} du dv = \int_0^{4\pi} \int_{-h}^h \sqrt{\frac{v^2}{4} + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2} du dv.$$

Вот результаты вычисления (в программе на языке *Python*) значений  $S$  для  $h = 1$  и  $a = 1, 2, 10$  в сравнении с соответствующими значениями  $S_6 = 8\pi ah$  площади “бумажной” ленты Мёбиуса (склеенной из полосы длины  $2\pi a$  и ширины  $2h$ ):

$a = 1$	$S \approx 26.53$	$S_6 = 8\pi$	$S/S_6 \approx 1.056$
2	50.88	$16\pi$	1.012
10	251.68	$80\pi$	1.001

Подобным же образом можно получить интегральное выражение *периметра*  $P$  (длины края) ленты Мёбиуса. Так как

$$\begin{aligned}
(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 &= \frac{v^2}{4} \sin^2 \frac{u}{2} \cos^2 u - v \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin \frac{v}{2} \cos u \sin u + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \sin^2 u + \\
&+ \frac{v^2}{4} \sin^2 \frac{u}{2} \sin^2 u + v \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin \frac{v}{2} \cos u \sin u + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2 \cos^2 u + \\
&+ \frac{v^2}{4} \cos^2 \frac{u}{2} = \frac{v^2}{4} + \left( a + v \cos \frac{u}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

а край соответствует значению  $v = h$  (равно как и значению  $v = -h$ ),

$$P = \int_0^{4\pi} \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2} du = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{h^2}{4} + \left( a + h \cos \frac{u}{2} \right)^2} du.$$

Вычисление интеграла (на калькуляторе *WolframAlpha*) для  $h = 1$  и трех значений  $a$  дает:

$a = 1$	$P \approx 14.95$	$P_6 = 4\pi$	$P/P_6 \approx 1.189$
2	26.01	$8\pi$	1.035
10	125.82	$40\pi$	1.001

Шведенко Сергей Владимирович,  
доцент Национального исследовательского  
ядерного университета (МИФИ),  
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: [sershvedenko@mail.ru](mailto:sershvedenko@mail.ru)



## Из истории науки

### К 100-летию со дня смерти А.А. Фридмана (1888 – 1925)

*В. О. Соловьёв*

В статье говорится о наиболее фундаментальном научном открытии, сделанном за последнее столетие в нашей стране. Оно принадлежит математику, которому математики было мало.

#### 1. Тайны открытий

Самое удивительное в науке — открытия. Как человеку удастся раскрывать тайны природы? Есть ли наука об открытиях? Эмоции первооткрывателя трудно выразить словами. Они никак не слабее эмоций поэта, создавшего шедевр: “Ай да Пушкин, ай да сукин сын!”

Можно процитировать Боияи, одновременно с Лобачевским открывшего неевклидову геометрию: “Передо мной открылся новый мир”. А Фридману, открывшему уравнение, управляющее Вселенной, на ум пришла картина из “Божественной комедии” Данте, когда Вергилий, оказавшись в Раю, видит все тайны мира. Он повторял: “Воды, в которые я вступаю, не пересекал еще никто”.

Внешняя жизнь, окружающая гения, почти ничего не значит. Эйнштейн сказал: “Моя жизнь — простая вещь, которая никому не интересна”. Фридман говорил: “Вся эта так называемая “жизнь” — только потеря времени”. Ньютон определил так: “Гений — это терпение думать об одном и том же”. Шопенгауэр — иначе: “Гений похож на стрелка, попадающего в такую цель, которую другие не в состоянии даже увидеть”.

Смешно представлять Фридмана составляющим годовые и пятилетние планы научной работы. К счастью, в его время до этого еще не додумались.

#### 2. Время и место

Кончилась гражданская война, люди возвращались из провинции и из сёл, надеясь на появившиеся возможности выживать и в столицах. Зарабатывать на кусок хлеба в те годы было нелегко, Фридман одновременно был профессором Петроградского университета и Института путей сообщения, стал старшим научным сотрудником Атомной комиссии в Государственном оптическом институте, старшим физиком в Главной физической обсерватории по математической и динамической метеорологии, организовал там Математическое бюро...

Профессора читали лекции в промерзших аудиториях, где студенты натягивали на себя ушанки и шинели. Студентов устраивали в лаборатории на подработку, чтобы они могли питаться в столовых.

Фридман в 1920 году вернулся в Петроград из Перми, из недавно открытого там университета, куда попал по рекомендации своего научного руководителя, профессора Владимира Андреевича Стеклова.

В Перми образовалась сильная компания математиков, в будущем многие из них написали классические учебники, по которым учились поколения будущих студентов СССР. Помимо преподавания Фридман брал на себя бремя административной работы: был помощником ректора по административно-хозяйственной части, редактором математического журнала. В хаосе гражданской войны пропали все его книги и рукописи, в стране оборвалась подписка на периодику.

Необычным способом восстановления научных связей Советской России с Западной Европой стала посланная в декабре 1919 года, с санкции В.И. Ленина, радиограмма от имени физиков Д.С. Рождественского, Ю.А. Круткова и В.К. Фредерикса Лоренцу и Эренфесту в Лейден; в ней сообщалось о полученных научных результатах и о блокаде поступления научных журналов.

### 3. Общая теория относительности

Но педагогической нагрузки казалось мало, и небольшой группе ученых хотелось большего. Возник огромный интерес к общей теории относительности — теории, рожденной во время Первой мировой войны в Германии, стране, с которой Россия воевала. Неудивительно, что научные журналы оттуда перестали поступать. Но во всем мире интерес к общей теории относительности распространился подобно пожару, его подхватили газеты, из Эйнштейна сделали кумира, мировую звезду. Непонятность новой теории приобрела мистическое значение, подобно откровению свыше. И вот турне Эйнштейна по Соединенным Штатам Америки превратилось в безумную вакханалию, когда толпы людей высыпали на улицы навстречу открытой машине, везущей гения. Отклики этой бури докатились и до Советской России. Переводились и писались на русском языке популярные изложения новой физики, которую почти никто не понимал.

И всё же в Петрограде оказался человек, знавший о новой теории из первых рук. Это был Фредерикс, в годы войны интернированный в Германии и благодаря хлопотам Давида Гильберта ставший его “частным ассистентом”. Того самого Гильберта, работавшего в Геттингене и возглавлявшего лучшую в мире математическую школу, который пересматривал основания математики, создал теорию бесконечномерных пространств, поставил знаменитые проблемы Гильберта перед математиками XX века. Гильберт творчески использовал проценты от значительной суммы денег, выделенной меценатом для того, кто сможет доказать Великую теорему Ферма — он проводил на эти деньги конференции по главным проблемам физики. И из этих конференций родились сначала общая теория относительности, затем квантовая механика.

Летом 1915 года Гильберт пригласил прочитать лекции Альберта Эйнштейна, который находился тогда в поиске уравнений будущей теории. Работа над ней заняла около 10 лет. Эйнштейну нужно было перевести ньютонову теорию всемирного тяготения на язык специальной теории относительности, то есть отказаться от мгновенного действия сил гравитации на расстоянии и перейти к распространению этих сил с конечной скоростью, не превышающей скорости света. Основное значение для него имел принцип равенства инертной и гравитационной масс, вследствие которого движение материальной точки под действием гравитации не зависело от ее массы. Эйнштейн обдумывал подобие сил инерции гравитационным силам и использовал мысленные эксперименты, например, физику в ускоряющемся лифте. Постепенно он пришел к тому, что задача требует новой математики и обратился к своему другу, математику Марселю Гроссману, за помощью.

Гроссман понял, что адекватным математическим аппаратом новой теории гравитации должна стать риманова геометрия. Материальные точки тогда будут двигаться по геодезическим, то есть, по наискорейшим путям в искривленном пространстве-времени. Искривление, в свою очередь, должно быть вызвано массой или энергией материи.

В 1913 году вышла совместная работа Эйнштейна и Гроссмана, в которой математическую часть написал Гроссман, а физическую — Эйнштейн. Если в теории Ньютона гравитационное поле описывалось скалярной функцией — потенциалом, то в новой теории для его описания требовалось 10 функций — столько независимых компонент было у метрического тензора пространства-времени. Столько же компонент было у тензора энергии-импульса материи и у тензора Риччи, построенного из метрики.

В статье 1913 года Эйнштейн и Гроссман были близки к окончательным уравнениям общей теории относительности, связавшим эти тензоры, но Эйнштейна испугал произвол в определении компонент метрического тензора по компонентам тензора Риччи. Знаменитое требование общей ковариантности теории, то есть, требование, чтобы уравнения выглядели одинаково в любых системах

отсчета, в том числе в неинерциальных, как раз и означало этот произвол, но тогда Эйнштейн ещё этого не понимал.

Путём проб и ошибок, после многочисленных попыток ограничить общую ковариантность, Эйнштейн вернулся к технике совместной с Гроссманом работы. Окончательные уравнения ОТО были получены в ноябре 1915 Гильбертом и Эйнштейном. Небольшая поправка к простой пропорциональности тензоров Риччи и энергии-импульса материи, которая у Гильберта получилась автоматически из вариационного принципа, заключалась в замене тензора Риччи на линейную комбинацию с его сверткой, сейчас эту комбинацию называют тензором Эйнштейна. Мы позволим себе привести здесь эту формулу

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

здесь  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор пространства-времени,  $R_{\mu\nu}$  — построенный из него тензор Риччи,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  — свертка тензора Риччи с метрическим тензором,  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса материи,  $\kappa = 8\pi G/c^3$  — постоянная, пропорциональная гравитационной постоянной Ньютона  $G$ ,  $c$  — скорость света в вакууме, дальше мы будем использовать единицы измерения, в которых  $c = 1$ .

Разумеется, бум вокруг ОТО возник не сразу после публикации уравнений теории, а при подтверждении их на опыте. Сначала Эйнштейн применил новые уравнения к движению материальной точки в центральном поле, используя теорию возмущений. Получилась поправка к закону Кеплера — движение происходило уже не строго по эллипсу, этот эллипс теперь медленно поворачивался, прецессировал. В Солнечной системе эффект прецессии можно обнаружить только в самом сильном гравитационном поле, то есть у самой близкой к Солнцу планеты, у Меркурия. Кроме того, если учитывать взаимное влияние планет друг на друга, то и при ньютоновских расчетах прецессию должны испытывать все планеты. Однако именно для Меркурия влияние других планет было давно учтено и тем не менее точные астрономические данные с расчётами расходились. Тут и случился первый триумф новой теории — она как раз и объяснила это расхождение. Эйнштейн был безумно счастлив, получив этот результат.

Второе предсказание теории Эйнштейна касалось отклонения луча света при его прохождении вблизи от массивного тела, например, Солнца. В теории Ньютона отклонение тоже должно иметь место, но оно должно быть вдвое меньшим. Эффект можно было проверить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года, и с этой целью были снаряжены экспедиции в город Собрал в Бразилии и на остров Принсипи в Африке во главе с Артуром Стэнли Эддингтоном, директором Кембриджской обсерватории и секретарём Королевского астрономического общества. Хотя наблюдения были непростыми из-за облачности, экспедиция подтвердила предсказание ОТО. 7 ноября 1919 года “Таймс” вышла с заголовками “Революция в науке. Новая теория строения Вселенной”. 19 ноября уже “Нью-Йорк Таймс” пишет: “Свет в небесах перекосялся. Учёные не знают, как быть с данными солнечного затмения. Триумф теории Эйнштейна. Звёзды оказались не там, где им положено быть”. С 3 апреля по 30 мая 1921 года состоялась триумфальная поездка Эйнштейна по США. Позже он сказал владельцу “Нью-Йорк Таймс”, что интерес к нему был “психопатологический”.

#### 4. Фридман решает задачу о Вселенной

Итак в 1920 году в Петрограде образовался кружок молодых энтузиастов по изучению общей теории относительности. Кроме Фредерикса с ОТО был знаком и Яков Френкель, находившийся в 1918-1920 годах в Крыму и пользовавшийся библиотекой Таврического университета, куда научные журналы из Западной Европы доходили. Оптимисты говорили: “Фридман занялся относительностью — скоро мы разберемся в этих вопросах!”

В самом деле, Фридман и Фредерикс взялись за написание подробного учебника по ОТО, он должен был состоять из пяти книг. К сожалению, вышла только первая книга, В.К. Фредерикс, А.А. Фридман “Основы теории относительности. Выпуск 1. Тензорное исчисление”, “Academia”, Ленинград, 1924, 167 стр.

Фредерикс написал большой и подробный обзор по ОТО для русского журнала “Успехи физических наук”, “Общий принцип относительности Эйнштейна”. Френкель выпустил в 1923 году монографию “Теория относительности”.

В 1922 году Эйнштейн был избран иностранным членом Российской академии наук. А Фридман 29 мая 1922 года закончил свою первую изменившую мировоззрение человечества статью — “О кривизне пространства”. Уже 3 июня он посылает рукопись и личное письмо (и то и другое на русском языке) Поллю Эренфесту в Лейден, Голландия.

Вот как кратко изложил сам автор содержание своей работы в письме Эренфесту:

Дорогой Павел Сигизмундович,

Посылаю Вам небольшую заметку, касающуюся вопроса о возможной форме вселенной более общей, чем цилиндрический мир Эйнштейна и сферический мир де Ситтера, кроме этих двух случаев получается ещё мир, пространство коего обладает переменным с течением времени радиусом кривизны...

Фридман просит Эренфеста, если тот найдет его результаты интересными, отправить немецкий перевод статьи (обещая его вскоре прислать) в какой-либо физический журнал. Несмотря на суровые 20-е годы почта работала пожалуй лучше чем сейчас, и статья Фридмана появилась в “Zeitschrift für Physik” самом авторитетном физическом журнале уже летом 1922 года.

Эйнштейн был уверен, что в 1917 году получил из уравнений ОТО единственно верное решение проблемы Вселенной. У него вышло, что геометрия пространства на космологических масштабах не зависит от времени и является геометрией 3-мерной сферы, то есть характеризуется постоянным радиусом кривизны. Объём такого пространства конечен, хоть и очень велик. Кривизна пространства незаметна из-за огромного радиуса кривизны, как незаметна для нас кривизна земной поверхности и сначала люди считали землю плоской. Аксиомами для Эйнштейна были предположения о том, что в любой точке мира Вселенная в среднем выглядит одинаково (однородность), что все направления во Вселенной равноправны (изотропность), что все движения тел происходят с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями и поэтому можно считать, что существует система отсчета, в которой материя в среднем покоится. Тогда можно из уравнений ОТО получить геометрию пространства в виде 3-х мерной сферы, для которой интервал пространства-времени имеет, например, вид

$$ds^2 = \rho^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 (dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2)) - dt^2, \quad (2)$$

где  $t$  — временная координата. Такое решение возможно, однако только при условии, что эти уравнения (1) будут дополнены космологической постоянной  $\Lambda$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Физический смысл этой постоянной заключается в появлении на космологических (то есть, огромных) расстояниях сил отталкивания, которые и обеспечивают равновесие материи. При отсутствии этих сил материя неизбежно стала собираться бы в комки, которые в свою очередь снова стремились бы друг к другу и в конце концов слились бы воедино. В решении Эйнштейна три неизвестные величины: радиус мира  $\rho$ , масса всей материи  $M$  и космологическая константа  $\Lambda$  должны быть связаны между собой двумя уравнениями

$$\Lambda = \frac{1}{\rho^2}, \quad M = \frac{4\pi^2}{\kappa}\rho. \quad (4)$$

Неожиданно для Эйнштейна еще одно решение уравнений ОТО для Вселенной нашел Вильям де Ситтер. Если у Эйнштейна постоянной кривизной обладало пространство, то у де Ситтера постоянную кривизну имело пространство-время. Именно поэтому Фридман назвал мир Эйнштейна цилиндрическим, а мир де Ситтера — сферическим. Однако быстро обнаружилось, что Вселенная

де Ситтера должна быть пустой, то есть не содержать материи. Это, конечно, успокоило Эйнштейна, так как наблюдаемый мир, очевидно, не пуст, и решение де Ситтера, таким образом, можно было считать нефизическим.

Но у Фридмана всё было иначе! И материя, и космологическая постоянная допускались, пространству можно было приписать геометрию 3-х мерной сферы, но радиус кривизны этой сферы зависел от времени

$$ds^2 = \rho(t)^2 (dx_1^2 + \sin^2 x_1 (dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2)) - dt^2.$$

Как масса материи  $M$ , так и космологическая постоянная  $\Lambda$  оказались произвольными параметрами. Изменение радиуса кривизны подчинялось дифференциальному уравнению первого порядка, которое ныне все называют уравнением Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 = \frac{\kappa}{6\pi^2} \frac{M}{\rho^3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{1}{\rho^2}, \quad (5)$$

здесь точкой обозначена производная по времени  $t$ .

Спустя лет десять было замечено Милном и Мак-Кри, что уравнение Фридмана можно записать как закон сохранения ньютоновской механической энергии, причём потенциальная энергия складывается из двух отрицательных слагаемых. Одно слагаемое можно понимать как потенциальную энергию силы притяжения материальной точки к неподвижному центру огромной массы (в сущности, массы всей материи, наличествующей во Вселенной), второе слагаемое напоминает потенциальную энергию пружины, но имеет противоположный знак, то есть является потенциальной энергией силы отталкивания от неподвижного центра, пропорциональной расстоянию до этого центра. Кинетическая энергия, в свою очередь, пропорциональна массе материальной точки и квадрату скорости изменения радиуса кривизны. Для пространства положительной кривизны механическая полная энергия материальной точки должна быть отрицательной, здесь  $E = -m/2$ ,

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E - U(\rho), \quad U(\rho) = -\kappa \frac{mM}{\rho} - \frac{1}{2} m\omega^2 \rho^2. \quad (6)$$

Поэтому задача эволюции Вселенной аналогична задаче одномерного движения материальной точки, при том, что потенциальная энергия не ограничена снизу ни при стремлении радиуса кривизны к нулю, ни при его стремлении к бесконечности (в случае положительной космологической постоянной).

В своей первой работе Фридман разобрал все возможные случаи эволюции Вселенной, рассматриваемой как однородное пространство положительной кривизны при положительной или нулевой космологической постоянной. Эти случаи составили три сценария. В первом сценарии Вселенная возникает с нулевым радиусом кривизны (из ничего) и бесконечно расширяется. Во втором она начинает расширение с конечного радиуса и также расширяется до бесконечности. В третьем сценарии поведение Вселенной может быть циклическим: расширение с нулевого радиуса до конечного, затем сжатие к нулевому радиусу, и возможно, бесконечное повторение этого цикла.

Вдохновленный своим открытием за три летних месяца 1922 года Фридман пишет небольшую книгу для широкого круга читателей “Мир как пространство и время”. Она вышла из печати тиражом 3000 экз. в 1923 году в серии “Современная культура” издательства “Academia”. Книга написана блестяще, она открывается цитатой из Козьмы Пруткова и завершается стихом Гаврилы Романовича Державина. Это предельно ясное и краткое (около ста страниц) с точки зрения идей изложение сущности общей теории относительности. Несколько последних страниц Фридман посвятил картине Вселенной и своим результатам. Здесь мы находим замечательно современные мысли:

Переменный тип Вселенной представляет большое разнообразие случаев: для этого типа возможны случаи, когда радиус кривизны мира, начиная с некоторого значения, постоянно возрастает с течением времени; возможны далее случаи, когда радиус кривизны

меняется периодически: Вселенная сжимается в точку (в ничто), затем, снова из точки, доводит радиус свой до некоторого значения, далее опять, уменьшая радиус своей кривизны, обращается в точку и т.д. Невольно вспоминается сказание индуcской мифологии о периодах жизни; является возможность также говорить о “сотворении мира из ничего”, но всё это пока должно рассматриваться как курьёзные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом; бесполезно, за отсутствием астрономических данных, приводить какие-либо цифры, характеризующие “жизни” переменной Вселенной; если всё же начать подсчитывать, ради курьёза, время, прошедшее от момента, когда Вселенная создавалась из точки до теперешнего её состояния, начать определять, следовательно, время, прошедшее от создания мира, то получатся числа в десятки миллиардов наших обычных лет.

## 5. Спор с Эйнштейном

Реакция Эйнштейна на появление в “*Zeitschrift für Physik*” работы Фридмана была резко негативной. Это яркий пример человеческой психологии, когда убеждения доминируют над критическим мышлением. Весьма бегло ознакомившись со статьей Фридмана Эйнштейн немедленно отправил в журнал уничтожающий отзыв о ней. Аргументация Эйнштейна была ошибочной и основанной на невнимательности. Ему показалось, что из необходимости обращения в ноль дивергенции тензора энергии-импульса материи следует постоянство плотности энергии, из чего неизбежно следовало бы и постоянство радиуса кривизны мира. Однако при вычислении этой дивергенции Эйнштейн просто забыл учесть те символы Кристоффеля, которые хотя и равнялись нулю в его решении, но в решении Фридмана были уже ненулевыми.

Разумеется, Фридман был огорчен несерьёзным отношением Эйнштейна к работе, которую сам он считал главной в своей жизни. И Фридман пишет Эйнштейну личное письмо, где подробно объясняет корректность своих вычислений. Он просит Эйнштейна дать опровержение его первого комментария или предоставить это право самому Фридману. Кроме того, Фридман сообщает Эйнштейну о своей работе над случаем отрицательной кривизны пространства, которая была уже в значительной степени проделана (эта работа “О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства” появилась в том же журнале “*Zeitschrift für Physik*” в 1924 году).

Не откажите в любезности, глубокоуважаемый профессор, известить меня о том, являются ли правильными мои расчеты, изложенные в данном письме. В последнее время я исследовал случай мира с постоянной и изменяющейся (во времени) отрицательной кривизной. При этом, конечно, для получения единственно представляющего интерес реального мира было необходимо использовать другое выражение для интервала, которое я (в согласии с Bianchi, *Lezioni di geometria differetiale*, Band I) выразил в следующей форме:

$$d\tau^2 = -\frac{R(x_4)^2}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + Mdx_4^2.$$

Результат расчётов показал, что в этом случае может существовать как мир с постоянной (но уже отрицательной), так и мир с изменяющейся (во времени) кривизной.

Наличие возможности получить из Ваших мировых уравнений мир с постоянной отрицательной кривизной представляет для меня исключительный интерес, и поэтому я очень прошу Вас ответить на это моё письмо, хотя и знаю, что Вы очень заняты.

В случае, если Вы сочтёте правильными изложенные в моём письме расчёты, я прошу Вас не отказать мне в том, чтобы известить об этом редакцию *Zeitschrift für Physik* быть

может в этом случае Вы поместите в печати поправку к Вашему высказыванию или предоставите мне возможность для перепечатки отрывка из этого моего письма.

Искренне уважающий Вас Ваш А. Фридман.

6 декабря 1922 г., Петроград.

(в переводе с немецкого И.Л. Гандельсмана)

Уже в 1920 году Эйнштейн жаловался:

Теперь, когда газетные статьи и письма непрерывно спрашивают, приглашают и требуют, мне снится по ночам, что я поджариваюсь в аду и наш почтальон превратился в чёрта, который орёт на меня и бросает мне в голову новые связки писем за то, что я не ответил на старые.

Безусловно, количество адресованных ему писем было очень велико. Получилось так, что Эйнштейн не прочитал своевременно письма Фридмана. Он путешествовал по миру, читал лекции в разных странах, был на первых страницах газет. Путешествие началось 8 октября 1922 года: Марсель – Порт-Саид – Коломбо – Сингапур – Гонконг – Шанхай – Кобе – Киото – Нара – Фукуоке – Порт-Саид – Тель-Авив – Иерусалим – Хайфа – Мадрид – Толедо – Барселона – Сарагоса. В Германию Эйнштейн вернулся только в марте 1923 года. За время путешествия он получил Нобелевскую премию и после возвращения передал её Милеве, первой жене, как было договорено при их разводе, оформленном 14 февраля 1920 г.

Но Фридман не собирался сдаваться. Он попросил своего друга, входившего в кружок петроградских релятивистов, Юрия Александровича Круткова, который находился на заграничной стажировке, встретиться с Эйнштейном и переубедить его. На самом деле эта задача была нелёгкой. И вероятно неразрешимой, если бы не Эренфест, знавший Круткова еще по Санкт-Петербургскому неформальному кружку, организованному Эренфестом в 1907 – 1912 гг. Все сведения о встречах Круткова с Эйнштейном мы знаем из писем Круткова:

В понедельник 7 мая 1923 года читал с Эйнштейном статью Фридмана...

в письме от 18 мая:

Победил Эйнштейна в споре о Фридмане. Честь Петрограда спасена!

Эйнштейн уже 21 мая 1923 года отправляет в *Zeitschrift für Physik* вторую заметку о работе Фридмана, где в частности пишет:

В предыдущей заметке я подверг критике названную выше работу. Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты г. Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают, наряду со статическими, также и динамические (т.е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства.

Здесь можно сделать два замечания.

Во-первых, часто пишут, будто Эйнштейн знал, что без космологической постоянной решение для радиуса кривизны пространства будет зависящим от времени. Но из вышеприведенной цитаты видно, что существование нестационарного решения было для Эйнштейна сюрпризом. Неустойчивость, о которой Эйнштейн знал, была совсем другого рода — она проявилась бы в неустойчивости однородной структуры материи, а значит, и геометрии. Но при решении задачи космологии однородность и материи, и геометрии были аксиомами для Эйнштейна.

Во-вторых, сохранился черновик этой второй заметки Эйнштейна и в нем присутствует окончание последней фразы, которое он зачеркнул. Вместе с вычеркнутыми словами эта фраза такова:



Оказывается, что уравнения поля допускают, наряду со статическими, также и динамические (т.е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства, **которым вряд ли можно приписать физический смысл.**

Видно, что Эйнштейн стал осторожнее и стал меньше полагаться на свою интуицию, меньше верить в то, что она сильнее математики!

Если проследить историю взаимоотношений Эйнштейна с математикой, то видно как постепенно он всё больше признает её значение. Скептически Эйнштейн высказывался сначала об идеях Минковского, увидевшего в специальной теории относительности геометрию пространства-времени. Но потом Гроссман, Гильберт и Фридман убедили его в могуществе математики и последние 30 лет жизни именно в построениях новых математических моделей искал Эйнштейн свою мечту — единую теорию поля.

## 6. Значение открытия Фридмана

Фридман говаривал в кругу друзей, что он “Эйнштейна подковал”. И вот парадокс — кончина Фридмана перекликается с судьбой Левши в сказе Н.С. Лескова. В сентябре 1925 года он умер от тифа без квалифицированной медицинской помощи. Конечно, это тоже было последствием гражданской войны. Судьба не дала Фридману дожить до признания мирового значения его работ по космологии. Ведь самым впечатляющим выводом из ОТО является именно теория расширяющейся Вселенной, породившая новую науку — космологию. И не случайно Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни то, что проглядел этот результат. Уже в 1929 году Хаббл, кропотливо работавший на самом мощном телескопе тех времен, после многолетних наблюдений переменных звезд и определения с их помощью расстояний до далеких галактик и изучения их спектров опубликовал работу, подтвердившую предсказание, полученное Фридманом математически — наша Вселенная расширяется. За последние 100 лет космология прошла огромный путь и стала точной наукой. Ключевое значение имел выход человечества в космос, начавшийся запуском в октябре 1957 года первого искусственного спутника Земли и первым полётом человека в космос в апреле 1961 года. Теперь именно космические аппараты дают возможность заглянуть в прошлое Вселенной, изучая реликтовое излучение и далёкие галактики в оптическом, инфракрасном и рентгеновском диапазонах.

Можно ли в личности Фридмана выделить то, что позволило ему сделать открытие, перевернувшее наше мировоззрение? Он безусловно был одарён, его первая научная публикация появилась в “*Mathematische Annalen*” ещё в гимназические годы. Фридман был фанатично предан поиску нового, говорил: “Нет, я невежда, я ничего не знаю, надо ещё меньше спать, ничем посторонним не заниматься, так как вся эта так называемая “жизнь” — сплошная потеря времени”. Наконец, Фридман был смелым человеком — в Первую мировую летал на аэропланах как наблюдатель, в 1925 году вдвоём с пилотом аэростата поднялся на рекордную высоту 7400 метров. И ещё — он верил в себя. “Излишняя скромность — это ещё больший недостаток, чем излишняя самоуверенность”, — говорил наш знаменитый академик П.Л. Капица. И вот ещё одно смелое пророчество, обращенное в далёкое будущее, высказанное В.К. Фредериксом и А.А. Фридманом, во Введении к их книге “Основы теории относительности”:

... коль скоро будет установлена система физических аксиом, сейчас же возникнет (из потребности доказательства независимости аксиом этой системы) стремление развивать науку, базирующуюся на системе аксиом, отличной от той, которая будет нами установлена и которая, по-видимому, будет отвечать наиболее естественной интерпретации. Иначе говоря, наряду с “натуральной” физикой возникнут системы “воображаемой” физики. Эти системы найдут свою интерпретацию в вещах материального мира, подобно тому как неевклидова геометрия может быть интерпретирована путём образов обычной геометрии Евклида. Создание воображаемой физики не стоит считать делом бесплодным,

ибо подобного рода построение, помимо его чисто логического значения, дает возможность усмотреть многие свойства натуральной физики, открытие которых по сложности их могло бы быть весьма затруднительным.

### Литература

1. Памяти А.А. Фридмана (к 75-летию со дня рождения) // УФН. - том LXXX. - выпуск 3. - 1963.
2. Эйнштейновский сборник. 1973. - М.: "Наука", 1974.
3. Эйнштейновский сборник. 1984 – 1985. - М.: "Наука", 1988.
4. Тропп Э.А., Френкель В.Я., Чернин А.Д. Александр Александрович Фридман. Жизнь и деятельность. - М.: URSS, "КомКнига", 2006.
5. Чертанов М. Эйнштейн ("ЖЗЛ"). - М.: "Молодая гвардия", 2015.
6. Дворянинов С.В., Соловьёв В.О. Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные // "Квант". - 2017. - № 1, 2.
7. Соловьёв В.О. Как Фридман Эйнштейна подковал. К столетию уравнения Вселенной (1922 – 2022). - Москва-Ижевск, "Институт компьютерных исследований", 2022.

*Соловьёв Владимир Олегович,  
ведущий научный сотрудник ОТФ,  
НИИ Курчатовский институт – ИФВЭ,  
доктор физ.-мат. наук.*

*E-mail: vosoloviev@yandex.ru*

## О задаче барона Мюнхгаузена. Леонард Эйлер. Часть 1

*В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук*

Статья рассказывает о начале научной деятельности Леонарда Эйлера, в историческом контексте.

Погожим майским днем 1745 года на ратушной площади Риги собралась толпа зевак. Судя по приготовлениям, к городской ратуше должна приехать какая-то царская особа. Уже с утра возле стен ратуши томился почетный караул. На площади спешно наводили порядок. Рослый ротмистр то и дело поправлял выправку гвардейцев. “Не было бы дождя. . .”, — глядя на небо, волновался офицер.



Ближе к полудню на ратушную площадь стремительно въехали две роскошные кареты в окружении строгой конной охраны. “На кр-ра-у-ул!” раздался раскатистый голос командира роты почетного караула. Гвардейцы замерли в строю, повернув свои головы по команде в сторону приближающихся экипажей.

Кареты, въехав на середину площади, остановились. Офицер из эскорта сопровождения направился к первой карете и после некоторой паузы, распахнул дверцу.

Из кареты на брусчатку, осторожно ступая, вышла девушка, лет семнадцати. Это была принцесса — София Фредерика Августа Ангальт-Цербстская — будущая императрица России Екатерина II.

Она была официально приглашена в Петербург императрицей Елизаветой Петровной с целью сочетаться браком с наследником престола — великим князем Петром Федоровичем — будущим императором Петром III. В далёкий путь из Щецина в Петербург она направилась вместе со своей матерью. В Риге необходимо было остаться на ночлег, чтобы рано утром продолжить свой путь. Правила светской этики, с бог знает каких времен, требуют персонального представления августейшей особе начальника почетного караула. Офицер представился.



Екатерина II в молодости  
на пути к трону



Иеронимус Карл  
Фридрих барон фон  
Мюнхгаузен

Однако принцесса вряд ли запомнила длинную фамилию рослого офицера. Она устала с дороги. Ей хотелось только одного — немного поесть и затем уснуть. Ей предстоял длинный путь в столицу России.

В Петербурге, тем временем, шла полным ходом подготовка к торжественной церемонии бракосочетания принцессы и великого князя — наследника престола. Вскоре после приезда в императорский дворец к царской невесте были приставлены специальные учителя. Юная принцесса начала интенсивно изучать русский язык, культуру, православие и обычаи России. В конце июня принцесса официально перешла из лютеранства в православие и получила новое православное имя — Екатерина Алексеевна.

За несколько недель до свадьбы принцесса простудилась. Жар не спадал несколько дней. Все уже приготовились к худшему. Позвали лютеранского пастора для предсмертной исповеди принцессы. Однако юная Екатерина отказалась и попросила исповедаться православному священнику. Она уже приняла православие и не намерена была от него отказываться. Священник долго молился за выздоровление принцессы. И Бог услышал молитву. Вскоре дела пошли на поправку. Начал спадать жар. За неделю до свадьбы Екатерина выздоровела. Сама церемония августейшего бракосочетания состоялась в конце августа.

Будущая императрица всея Руси не догадывалась, что на ратушной площади в Риге она встретилась с офицером, имя которого войдет в историю. И упоминать его имя будут так же часто, как и её имя — Екатерины II. Командиром роты почетного караула в Риге был ротмистр лейб-гвардии Иеронимус Карл Фридрих барон фон Мюнхгаузен.

### Антиправила барона Мюнхгаузена

Барон фон Мюнхгаузен был современником Леонарда Эйлера. Он тоже был для России иностранцем. Мюнхгаузен верой и правдой служил в императорской русской армии в офицерском чине. Может, Л. Эйлер и Мюнхгаузен даже когда-то случайно встретились, прогуливаясь по Невскому проспекту. Кто знает?



Барон Мюнхгаузен в иллюстрациях Гюстава Доре

В составе армии фельдмаршала А.В. Суворова Мюнхгаузен брал Очаков. В боях с турками был храбр, отмечен начальством. Некоторое время служил в Петербурге в гвардейском корпусе и дослужился до звания подполковника.

Однако накануне ухода на пенсию по выслуге лет, подполковник фон Мюнхгаузен где-то “проштрафился” и был отправлен в отставку чином пониже. Вернулся в Ригу, женился. Отставной майор Мюнхгаузен, как настоящий гвардеец, любил выпить и хорошо закусить. Выпив стаканчик-другой шведского грога, любил рассказывать приятелям о своих невероятных приключениях в России. Его рассказы были столь замечательны, что вскоре их стали публиковать в местной газете. Барон Мюнхгаузен стал местной знаменитостью.

Смешных рассказов во все времена существовало много. История их всех не помнит. Однако рассказы барона фон Мюнхгаузена матушка-история сохранила для потомков.

Еще при жизни барона в Лондоне вышла книга (1785) английского писателя Рудольфа Распе “Рассказы барона Мюнхгаузена о его изумительных путешествиях и кампаниях в России”. Позже книгу переиздали в Европе, а потом и России. Однако художник Гюстав Доре, готовивший рисунки для книги, сильно исказил портрет нашего героя. Он представил его в образе Дон Кихота — старичка с остро закрученными усами и с бородкой “клинышком”. Говорят, художник хотел, чтобы Мюнхгаузен был похож на французского короля Наполеона III. Таким он и остался в литературе.



Рассказы Мюнхгаузена весьма поучительны. Пожалуй, впервые в яркой художественной форме барон рассказывает то, чего не может быть “в принципе”.

Перед штурмом крепости самое главное — знать, где расположены скрытые позиции неприятеля. Вот бы полетать над Очаковым и посмотреть схему турецких укреплений, а потом благополучно вернуться обратно. Но люди — не птицы, летать не умеют.

“Не беда” — говорит находчивый Мюнхгаузен. Если оседлать ядро, вылетевшее из пушки в сторону турецких укреплений, то можно вскочить на ядро и долететь до позиций неприятеля. Увидев турецкое ядро, летящее на наши позиции, тут же на него следует перепрыгнуть и вернуться к своим. Солдаты и офицеры хохотали над придумками Мюнхгаузена: “Вот так шутник!”

Придумками Мюнхгаузена: “Вот так шутник!”

Это запомнилось. Мюнхгаузен в своих приключениях делал то, что *невозможно*. Конечно же, на первом месте по своей “категорической невозможности” было посещение гарема турецкого султана по его персональному приглашению. Об остальных “невозможностях” можно спорить, выпив рюмку-другую.

Мюнхгаузен говорил о том, что дёрнув себя за волосы вверх, он сумел вытащить себя из болота вместе с конём. Да, это существенно легче, чем попасть в гарем султана. Кто спорит.

Повторить подвиг Мюнхгаузена — вытащить себя за волосы из болота — стало просто неприличной фантазией для тех, кто всерьёз занимается наукой. Действительно, принцип причинности, положенный в основу физики, гласит, что тело может начать движение, если на него подействовала внешняя физическая сила. Другими словами, твердое тело не может самостоятельно начать движение и самостоятельно менять свою скорость перемещения. За сомнения в таких разговорах больно бьют. Вызов ньютоновским аксиомам смело бросил лишь барон Мюнхгаузен. За это стал смешным и потешным на все времена.

Казалось, Ньютоновы законы движения навсегда закрыли “антинаучные утопии” барона Мюнхгаузена. Теперь то, что было написано в приключениях лейб-гвардии подполковника, стало считаться весёлым анекдотом. Наконец-то провели линию между бесплодными фантазиями и серьёзной наукой.

Ньютоновская теория — это не игротка, не стихи и не псалмы. Это жесткая система, которая основана на конкретике. Она впервые объяснила законы движения планет. Во-вторых, в основе ее фундамента лежит фундаментальный принцип причинности, в справедливости которого никто не сомневался ни до, ни после Ньютона. Ньютоновские постулаты физики способны перемолоть каждого, кто попытается ее оспорить.

Но если бы это было всё, то можно было бы закрыть тему.

### Первые заморозки...

Концепция Рено Декарта<sup>1</sup> о причинах неравномерного движения планет, казалось, вполне претендовала на “окончательное решение” Вселенской задачи [1], [2], [3]. В ней гармонично нашлось место Творцу и вполне рациональным понятиям, таким, как импульс. Все тела движутся по прямым линиям, если к ним приложен первоначальный импульс. Это не вызывает вопросов. Торможение тел происходит в случае, если приложен противоположный импульс. Всё идеально просто и это, пожалуй, первый критерий истинности. По крайней мере, так казалось...

Одной из традиций британской королевской династии является не включение в состав королевской семьи католиков. Англиканской церкви больше импонировали идеи протестантизма, кредо которой — “рацио”. Католицизм, в целом, основан на постулате “верую”. Поэтому для католической Франции “вихревая теория” Р. Декарта не вызывала неприятия. То, что Творец расставил в “нужных местах” вихри, корректирующие скорость движения планет, для католиков было почти естественным. Как говорится, Творцу виднее, в каком месте вихри расставлять.

Все войны ведутся за то, чтобы жить в Будущем. Поэтому и страдания имеют смысл, если есть видение Будущего. Этого Будущего в философии Р.Декарта Исаак Ньютон не увидел. Ведь чтобы увидеть проблески Будущего, нужен рациональный прогноз. А как ты спрогнозируешь, если движения планет регулируются Творцом? Необходима рациональная теория, в основе которой лежат физические законы и математика, т.е. в основе теории должно быть “рацио”. Чтобы концепция прижилась и обрела популярность, она должна нести определенную прикладную нагрузку. Такую нагрузку, похоже, держала только теория И. Ньютона [1], [3].

Битвы за свои убеждения никогда не бывают столь жестоки, как битвы за свои заблуждения. Ожесточенная борьба между картезианцами<sup>2</sup> и ньютонианцами продолжалась. Стены европейских

<sup>1</sup>Рене Декарт (1596–1650) — французский философ XVII века, математик, физик и механик.

<sup>2</sup>Сторонников идей, созданных Р.Декартом, в научных кругах со временем стали называть картезианцами (Рене Декарт — *Renatus Cartesius*). В XX веке было даже создано международное Картезианское научное общество.



университетов сотрясали споры по поводу ньютоновских основ динамики. Часто высшим достижением мысли бывают способы ее подавления. И вот уже парламент Франции (1732 г.) употребил административный ресурс и принял решение сжечь весь тираж книг Ньютона. Правда, Вольтер<sup>3</sup> выступил против этого решения и костер на время отложили.

Обычно шахматная игра начинается с оценки позиций. Если изначально неверно оценишь позиции, то успеха не жди в этой игре. Картезианцы не поняли слабости своих позиций. Они, как всегда, продолжали “играть в шашки”, хотя на доске уже были расставлены шахматные фигуры. Мелкий масштаб создает пыль фактов, и поэтому картезианцы не увидели ошибок в ключевых узлах теории Декарта.

Ньютоновская концепция уже брала верх в интеллектуальных кругах Европы. Это было похоже на первые заморозки, которые превращают воду в пруду в едва заметные кристаллики. Начались



Базельский университет в XVIII в.

только первые заморозки, но вода еще не покрылась сплошным льдом. Еще не было трех дифференциальных уравнений для второго закона динамики. Математика должна была стать скрепами для законов Ньютона. Это случится существенно позже, в Санкт-Петербурге... Их напишет Леонард Эйлер.

А пока юный семнадцатилетний Леонард уже прочитал в университете в г. Базель<sup>4</sup> открытую лекцию “Сравнительная характеристика философии Р. Декарта и И. Ньютона”. Он однозначно стал на сторону И. Ньютона.

Юноше повезло. В свое время в университете г. Базеля учились и работали многие выдающиеся ученые того времени. Например, профессор Иоганн Бернулли<sup>5</sup> читал лекции студентам во времена учебы Леонарда.

Отец Леонарда Эйлера (Пауль Эйлер) был пастором и весьма образованным человеком. Он даже сумел получить степень магистра. Мать Леонарда Эйлера была из зажиточной семьи. Профессор



Иоганн Бернулли (1667-1748)

Иоганн Бернулли часто бывал в доме Эйлеров и даже давал частные уроки юному Леонарду. Юноша как губка впитывал смысл неспешных философских бесед в университете и дома за чайным столом. . .

Профессор И. Бернулли был, пожалуй, первым, кто осторожно начинал разговоры о недостатках ньютоновской концепции. Он был весьма человеком рациональным и никогда не был последователем картезианцев. Однако то, что говорил И. Бернулли, заставило задуматься юного Эйлера. И эта история его не отпускала всю жизнь. Было над чем задуматься. . .

Любая система на законах логики содержит предположения, которые невозможно доказать или опровергнуть, опираясь на логику этой системы. Поэтому Великое не просчитывается, оно совершается по другим законам. И вот уже История приготовила нам сюрприз.

История — фактор накопления причинности. И вот уже неспешно подключается диалектика Гегеля о переходе количества в качество. Исторический “ветер перемен” вдруг решил скорректировать

<sup>3</sup>Вольтер (Франсуа-Мари Аруэ) (1694–1778), — французский писатель и философ, один из главных представителей просветительской мысли XVIII века; поэт, прозаик, сатирик, трагик, историк и публицист.

<sup>4</sup>Университет в г. Базеле, Швейцария. Основан в 1460 г. В нем работали в свое время И. Бернулли, С. Кёниг, Г. Лопиталь, А. Клеро и др. В 1748 г. Леонарду Эйлеру пришло приглашение работать профессором в Базельском университете, но он это предложение отклонил и после отъезда (1727 г.) в Россию ни разу не приезжал на свою родину в Швейцарию.

<sup>5</sup>Иоганн Бернулли (1667–1748) — швейцарский математик, механик, врач и филолог-классицист, самый знаменитый представитель семейства Бернулли, младший брат Якоба Бернулли, отец Даниила и Николая Бернулли. Один из первых разработчиков математического анализа, после смерти Ньютона — лидер европейских математиков. Учитель Л. Эйлера. Иностранный член Парижской, Берлинской, Петербургской академий наук, а также член Лондонского Королевского общества.

направление научной мысли. Что-то случилось? Да!

Неожиданно мелькнула напудренная косичка барона фон Мюнхгаузена...

### То, что “ни в какие ворота не лезет”, проникает сквозь щель

Ветер помог стать человечеству цивилизацией. Он не только передвигал суда по морям и океанам, но и был кормильцем. Ветряные мельницы помогали крестьянам перемалывать зерно в муку. Мельница, ворочая жерновами, кажется, начала перемалывать законы Ньютона. Кто бы мог подумать?



Перемолоть в муку пшеницу твердых сортов для крестьян — целая проблема. Если насыпать зерно между двумя массивными жерновами, насаженными вертикально друг на друга, а потом вращать жерновое колесо, то горсть муки грубого помола, конечно, можно получить. Качественный помол получается лишь в случае, если оба жернова плотно прижаты друг к другу. Однако, при увеличении веса жерновых камней и уменьшении зазора между жерновами, вращать камни становится крайне тяжело и даже невозможно. При такой технологии давление на зерно равно весу верхнего камня. Этого явно недостаточно для муки, из которой выпекают хлеб. Нужен тонкий помол.

Мы не знаем имя изобретателя, который первым предложил новый способ размельчения зерна в качественную муку. Оказывается, если катать жерновое колесо **по кругу**, то давление на зерно увеличивается в два раза и более (!). Это уже революция! Например, жерновое колесо весом 1000 кг давит на зерно силой 2000 кг и более, если его катать по замкнутому **кругу**. Величина давления зависит от того, с какой скоростью катается **по кругу** жерновое колесо. Но и это не все.

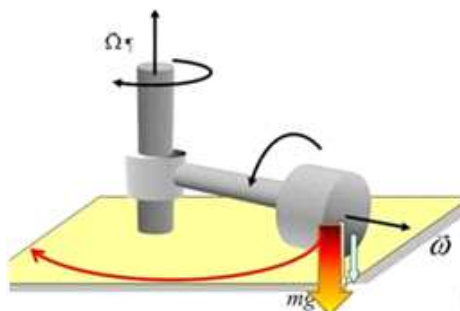
Складывалось впечатление, что при катании по кругу вес камня увеличивается (!?) в разы. Действительно, откуда же происходит увеличение давления на зерно? Если же жерновое колесо катать по прямой линии, то такой эффект увеличения веса не наблюдается. Удивительно!

Странная история! Тело не может ни увеличить, ни уменьшить свой вес, если оно — не живой организм. Масса твердого тела является величиной постоянной в процессе движения. Так утверждают постулаты физики. Почему же при движении по кругу давление на основание увеличивается? Увы, но это так. Эти очевидные практические истины были понятны крестьянам и ремесленникам еще в древние времена.

Ньютоновская механика движения не смогла объяснить этот эффект увеличения давления жернового колеса, который знали неграмотные крестьяне. Вопрос “почему” — здесь самый главный вопрос. В этом вопросе находится тугой узел причинно-следственных связей.



Крестьянская мельница  
безжалостно «перемалывает»  
законы Ньютона?



Почему жерновое колесо, катаясь по  
кругу, увеличивает давление на  
плоскость?

Существует множество “тройных коней”, которых человек не способен зафиксировать. Любая система, построенная на безупречных законах логики, оказывается, способна приобретать принципиально новые мутации, не предусмотренные этой системой.

Эти “мутации” часто возникают в форме странных парадоксов, которые лежат вне системной логики. Их нельзя доказать, или опровергнуть, опираясь только на основы этой системы. Эти “мутации-парадоксы” нам подсказывают, что в ходе рассуждений ученых произошла какая-то системная ошибка, не подвластная обычной человеческой логике. И вот уже какие-то истины, казавшиеся очевидными, вдруг рассыпаются в прах от какого-то пустяка, сущей ерунды, мелочи. Природа начала демонстрировать свою нетривиальность. . .

Но дальше — еще хуже. Момент истины — это соприкосновение с правдой. Неужели барон Мюнхгаузен вернулся?

### То, о чем даже подумать страшно. Истины, которых мы боимся. . .

Еще в древние времена было давно замечено, что вращающиеся тела ведут себя иначе, чем если они **не** вращаются. Например, катящееся колесо сохраняет свое вертикальное положение до тех пор, пока оно катится. Однако попробуйте велосипедное колесо вертикально поставить и не держать руками — и оно тут же упадет.

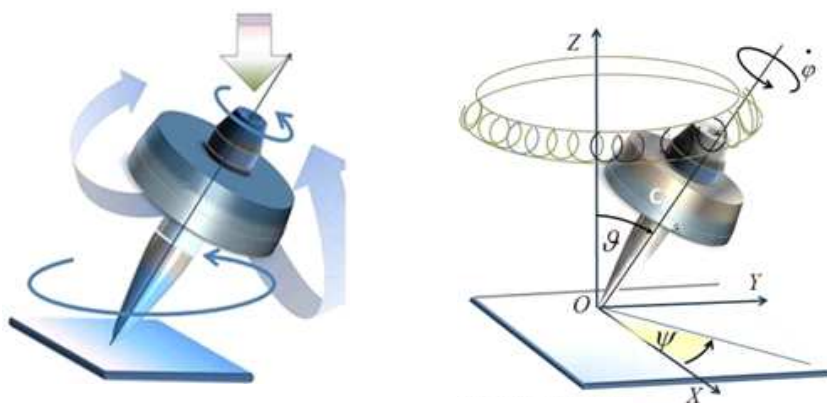


Детская игрушка – волчок – с древних времен была загадкой для ученых

Даже дети знают, что если волчок раскрутить, то он не падает, хотя и наклонен. Если же он не вращается, то он падает. Получается, что вращение придает волчку некую “живучесть” и сопротивление силе тяжести? Значит, волчок в процессе вращения создает “сам для себя” дополнительные силы, которые удерживают его от падения?

Удивительные свойства вращающихся тел часто использовались жонглерами и цирковыми артистами с древнейших времен. Вот как описывает Дж. Перри представление японского жонглера.

“Сначала он бросает наискось от себя в воздух свой большой **волчок** и подхватывает его во время вращения концом палки, острием меча, или другого подходящего предмета. Он заставляет его бежать по краю перил лестницы через дверь в дом и снова выкатываться к окну и в заключении странствовать вверх по большому пробочнику. Потом он задерживает его своими руками и несколькими ловкими закручиваниями сообщает ему новый запас вращательной силы, он заставляет его бегать вдоль по вытянутому шнуру, или по лезвию меча. Он проделывает со своим волчком всевозможные удивительные вещи, но потом сразу выходит из роли повелителя и, в конце своего представления, нищенски вымалывает несколько мелких монет” [4, с. 9].



Почему не падает волчок?  
Движение центра масс вращающегося волчка не моделируется уравнениями Ньютона для точечной массы.



Такое поведение тела противоречит классическим постулатам. Силы должны быть только внешними по отношению к телу — утверждает ньютонова механика. Другими словами, тело не может заставить себя изменить своё движение без вмешательства посторонней силы ни при каких обстоятельствах.



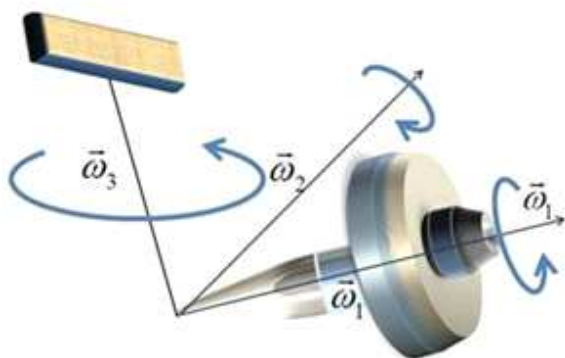
Барон Мюнхгаузен, дернув себя за волосы, вытащил себя с конём из болота

Однако, вопреки общепризнанным законам, волчок, подражая барону Мюнхгаузену, поднимает себя против силы тяжести. Этому главному парадоксу механики должно быть объяснение. Кроме волчка, этот “фокус” проделывал только барон Мюнхгаузен. Дернув себя за волосы, вытащил из болота себя и свою лошадь. Опять Мюнхгаузен вернулся?

Два “тroyанских коня” (крестьянская мельница и волчок) просто легко остановили действие фундаментального “принципа причинности”? Система демонстративно показывает свою сверхсложность, свою убийственную нетривиальность и очарование. Происходит ломка сознания. Сознание стирается в мелкую пыль. И это уже не игра в “крестики-нолики” с Природой, это игра гроссмейстерская — в шахматы, а то и выше. . .

Ведь получается, что волчок и физический маятник в процессе движения создают (самостоятельно?!) какие-то дополнительные силы, которые не относятся к внешним. Как это понимать? Это полностью расходится с тем, что утверждал Ньютон и классики науки до него.

Никто не мог объяснить эффект волчка и мельничного жернового колеса. Эта тишина потрясающая. Она подмигивает и нашептывает что-то зловещее. Кажется, всё спрятано так глубоко, что это даже и не выговоришь. Логика компромиссов в этом случае чужда и противоестественна. Махнуть бы на это рукой, да рука не поднимается.



Почему подвешенный на нитке волчок не падает, когда он вращается?

Исаак Ньютон знал о странном эффекте волчка, но не мог его объяснить этот странный эффект. Лишь в своих “Началах. . .” он кратко отметил, что эффект волчка не подчиняется законам прямолинейного движения по инерции.

**Ньютон II:** “Волчок и все его части, вследствие взаимного сцепления, вовлекают друг от друга от прямолинейного движения, не перестает вращаться (равномерно), поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха”. [1, с. 40].

Парадигма — это такая оболочка — пузырь, внутри которой живут главные смыслы любой науки. Этот пузырь постоянно надувают, поскольку он должен быть всегда “свежим и румяным”. И мы раздуваемся вместе с парадигмой. Однако в парадигме есть “дырочка”, из-за которой этот “пузырь” постоянно сдувается. В дырочку вставлен свисток. Вот этот волчок и крестьянская мельница свистят и показывают нам, в каком месте брешь в оболочке. Но мы этого свиста, как правило, слышать не хотим. Мы эту дырочку тайно заклеиваем, но свист опять приходит в наши уши. И тут главное — сделать вид, что “ничего не слышишь”. Нам так удобно.

А ведь в соответствии с парадигмой динамики, волчок не может сам себя поднять, поскольку не существует такой внешней силы, которая бы толкала центр тяжести волчка вверх — против силы тяжести. И так, волчок переломил эту ньютоновскую аксиому “через колено” легко и непринужденно. Почему законы Ньютона здесь не работают?

Что бы там ни говорила классика, а волчок себя приподнял и мир изменился. Все наши пред-

ставления о “правильном устройстве мира”, накопившиеся веками, рухнули тут же. Возникло противоречие, угрожающее основам науки.

**И. Кант**<sup>6</sup>: “Противоречие совершенно устраняет и уничтожает знание” [5, стр. 166].

Закон причинности веками казался самоочевидным, что никому и в голову не пришло в нем усомниться. И всё же, это противоречит закону причинности, суть которого в том, что действию должна предшествовать причина.

**Рене Декарт**: “Закон причинности требует, чтобы ничто не происходило без причины. Движущая причина есть сила... Никакое тело не может двигаться без силы, никакое движение не может быть задержано без силы” [6, стр.375].

**И. Кант**: “... Согласно основоположению о причинности, действия всегда суть первое основание всякой смены явлений, и потому они не могут принадлежать субъекту, который сам меняется... , потому что в таком случае были бы необходимы другие действия и другой объект, который определил бы эту смену” [5, стр. 207].

Однако, для волчка никак не просматривается посторонняя причина, которая поднимает волчок. Аналогично, для жернового колеса также не очевидна причина, по которой он кратно увеличивает свой вес.

**И. Кант**: “Если возникновение [явления] рассматривается как действие чуждой ему причины, то оно называется творением” [5, стр. 208 ].

По внешним признакам эффекты волчка и жернового колеса в силу их “противоестественности” можно было бы, действительно, отнести к категории **творения**. Однако, главное отличие **творения** от реально наблюдаемого **физического явления** в том, что последнее всегда воспроизводится опытом, а **творение** — нет, заметил И. Кант.

**И. Кант**: “Как событие среди явлений творение не может быть допущено, таким как уже сама возможность его нарушила бы единство опыта” [5, стр. 208 ].

Мыслители XVIII в. понимали, что мир состоит не из простых вещей. Мир гораздо сложнее и в нем находятся другие типы нелинейных связей, а не только та тот один линейный постулат причинности, которые все знают [5, стр. 353 ].

**И. Кант**: “Причина и действие могут существовать в одно и то же время” [5, с. 205]. Это значит, что не только причина вызывает следствие, но и следствие тут же влияет на причину.

Иммануил Кант предложил назвать *трансцендентными* явления, которые выходят за пределы наших знаний и даже, кажется, противоречат им [5, стр. 276]. Как в логических построениях зарождающейся научной теории учесть то, чего еще нет и что даже представить нельзя? Как перевести из “этого не должно быть” в “это должно быть”?

Создавалось впечатление, что не все в должной мере ученые обращают внимание на эти новые странные эффекты. Чтобы как-то выйти из тупика, предлагается, как правило, “легкое решение”, цель которого “временно заменить трудное решение” и проблему отодвинуть на “потом”.

Юный Эйлер во время своей учебы в Базельском университете, знал об этой парадоксальной проблеме. Об этом говорили Иоганн Бернулли и Мерсенн. Лейбниц утверждал, что вращающиеся тела движутся несколько иначе, чем не вращающиеся. Гюйгенс также утверждал, что период колебаний у протяженного тела отличается от колебаний маятника с точечной массой [7]. С этим надо было что-то делать.

Человеческая натура не может выносить реальность в слишком больших дозах. Природа начала Большую Игру против ньютоновской парадигмы. Никакого “злого умысла” здесь не было. Просто,

---

<sup>6</sup> **Иммануил Кант** (1724—1804). Родился и жил в столице Пруссии г. Кёнигсберге, (ныне г. Калининград, Россия). Немецкий философ, один из центральных мыслителей эпохи Просвещения. Всесторонние и систематические работы Канта в области эпистемологии, метафизики, этики и эстетики сделали его одной из самых влиятельных фигур в западной философии Нового времени.

ньютоническая концепция лишь на один штык копнула вглубь и вскрыла лишь поверхностный “линейный слой”. Дальше шли новые пласты “нелинейности” со своим скрытыми сложными связями. Значит, надо копать глубже...

Волчок и мельничные жернова — это уже новые нелинейные объекты на этой шахматной доске. Они неспешно расставлены Природой на игровом поле. И это уже была игра не в шашки, и даже не в шахматы... У этой новой игры даже правил нет. И здесь уже нельзя акцентироваться на бантиках, а надо зреть в корень.

Юный Эйлер не знал, что новая Большая Игра его не отпустит до конца его жизни. Успехов сможет добиться лишь тот, кто сумеет сфокусироваться на задаче лучше остальных.

### Путешествие в рай

Ранней весной 1727 г. в дом Эйлера пришла радостная весть. Николай Бернулли — друг их семьи — прислал письмо из далекой России, в котором сообщал, что в Российской Академии Наук, в Санкт-Петербурге, появились несколько новых вакансий.



*“Вы едете в рай ученых, и я ничего не желаю больше, чем того, чтобы Вы в Вашей поездке сохранили доброе здоровье и как можно дольше находили удовлетворение от пребывания в Петербурге”, — писал юному Леонарду профессор Х. Вольф [8, стр. 26].*

Эту добрую весть в доме ждали давно. Несколько раз уже срывалась поездка юного Леонарда в Россию. В последний раз, например, закончились вакансии по отделению математики, но появились по биологии и медицине. Однако юный Леонард не смог бы претендовать на эту вакансию, поскольку у него не было документа о медицинском образовании. Пришлось, вернуться в университет и срочно получить

дополнительное образование по биомедицинской специальности. Теперь, кажется, наконец-то появился шанс получить физико-математическую вакансию.

В родительском доме было тесно. В двух комнатах еле помещалась большая семья. Отец Леонарда (Пауль Эйлер) был мудрым человеком и давно понял, что единственный выход из беспросветного убогого прозябания и провинциальной нищеты — это дать детям наилучшее, какое только возможно, образование. Затем дети должны уехать за границу жить и работать.

Всех примиряло то, что жизнь вблизи Базеля<sup>7</sup> в XVIII в. была совсем не легкой и казалась абсолютно бесперспективной для детей. Разве что на пастора выучиться... Но о карьере пастора Леонард и слышать не хотел. Ему это было абсолютно не интересно. В Швейцарии оставаться не было никакого смысла. Это понимали все.

На протяжении всей своей жизни Эйлер при случае не уставал повторять, что теснота его Faterland<sup>8</sup> — Швейцарии — вызывает в нем отвращение [8, стр. 26]. Он больше не вернулся в Швейцарию и никогда об этом не сожалел.

Радовались родители, особенно отец, мечтавший о карьере сына в далекой России. Мать не знала, как относиться к этому событию. Материнское сердце подсказывало, что сын уезжает от нее навсегда<sup>9</sup>.

Главной надеждой семьи был сын Леонард. Он был самым способным. Все семейные скромные заработки отец тратил на учебу детей, нанимая им лучших репетиторов для домашнего образования, а позже и для учебы в университете.

С репетиторами юному Эйлеру явно повезло. В их дом приходили братья Бернулли, ставшие позже гордостью европейской науки, а также известный уже по тем временам математик Герман.

<sup>7</sup> Дом семьи Эйлера находился в четырех милях от Базеля, в швейцарской деревушке.

<sup>8</sup> В переводе с немецкого “Faterland” — Родина.

<sup>9</sup> Однако она еще встретится с сыном. После смерти мужа (Пауля Эйлера в 1745) она уедет к сыну Леонарду в Германию, где он временно жил, и будет нянчиться с его внуками.

Несмотря на бытовую стесненность, отец выделил для учебы самую большую комнату, перейдя с женой и с дочерьми в одну тесную комнату.

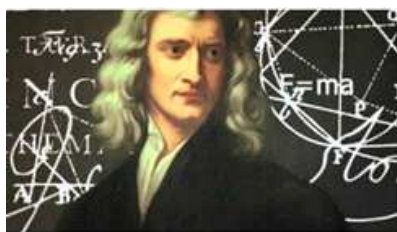
Европа в те времена была погружена в затяжной, казалось, безысходный топливный кризис. Ситуацию усугубляло тотальное похолодание, покрывшее Европу в средние века. Городские каналы Голландии, не замерзавшие веками, вдруг покрылись толстой коркой льда. Люди оказались совсем не готовы к такому развороту событий. Из-за отсутствия дров и угля было голодно и холодно. Все, кто мог, уезжали в Россию. В этом было единственное спасение. По слухам, там всем иностранцам давали прекрасное жалованье и обеспечивали работой. Кроме того, все иностранцы были защищены специальными царскими указами. И, что уж совсем невероятно, — в русских домах было тепло! О таких условиях можно было только мечтать.

Медлить с отъездом в Россию было нельзя. Возможно, это последний шанс для сына. Отец ждал такого случая всю жизнь. После спешного исполнения требуемых формальностей в начале апреля 1727 года двадцатилетний Леонард Эйлер отправился самостоятельно в неизведанную Россию.

Для молодого Эйлера предстоящая поездка в Петербург была величайшим праздником. Он жаждал работать в науке и понимал, что только в Санкт-Петербурге он сможет заниматься своей любимой математикой. Юный Эйлер считал, что ему несказанно повезло.

### Траурная месса в Лондоне

Примерно в это же время в далеком Лондоне происходили траурные мероприятия по случаю кончины Исаака Ньютона. Это время позже назовут “эпохой Ньютона”.



Исаак Ньютон (1643-1727)

Правда, в то время так никто не думал. Если бы какой-нибудь пророк сказал в то время, что “уходит эпоха Ньютона”, то все посчитали бы это неудачной шуткой. На самом деле, о “новой эпохе” никто в Лондоне не догадывался. Просто британская аристократия хоронила высокопоставленного чиновника — руководителя королевского монетного двора — сэра Исаака Ньютона, который так много сделал для развития и укрепления финансовой системы Британской Империи. Даже мало кто из близких к Ньютону людей, присутствовавших на похоронах, догадывался, что хоронят гениального физика, именем которого будет гордиться все последующие века Британская Империя. Осознание этого придет существенно позже — спустя столетие.

### Моцарт математики

Путь в Россию был долгим. Сначала Леонард плыл по Рейну до Майнца. Затем, качаясь в дилижансе по весеннему бездорожью до Любека. Далее — на корабле по Балтийскому морю до Санкт-Петербурга.

Юный Эйлер думал о том, как его встретит эта загадочная холодная Россия. Триумф в науке и высочайшее почтение императоров России и королей Европы — все это будет еще впереди у Леонарда Эйлера. Там, в далекой заснеженной России, он найдет свою судьбу, там вырастут его дети и внуки. В стенах Российской Императорской Академии Наук он сделает свои лучшие работы. Более 900 работ по математике и механике на века обессмертят имя Эйлера.

А пока он, еще совсем юный, ехал по весенней распутице в далекую и совершенно ему неизвестную Россию. После двухмесячного пути Санкт-Петербург встретил Леонарда траурной вестью: умерла императрица России Екатерина I. В день его приезда шли пышные царские похороны Екатерины. Разумеется, в этот траурный день никому не было дела до юного Эйлера. Никто не знал, какова судьба ждет Академию Наук, учрежденную покойным императором Петром Первым. Ходили всякие слухи. А ведь это была последняя надежда юного Эйлера. Пока императрица Екатерина I была жива, то поддерживала Академию Наук, продолжая дело своего мужа — Петра I.

После он узнал, что вакансия, на которую он метил, недавно была уже занята. Но отступить было некуда. О возврате на родину, в Базель, и речи быть не могло, да и деньги кончились. Леонард готов был принять любую должность, чтобы хоть как-то жить и работать. Тут уже было не до личных пристрастий. Юному Леонарду была предложена вакансия лейтенанта флота. Россия нуждалась в образованных офицерах. Леонард, не колеблясь, согласился.

В это время, к несчастью, от простуды в Петербурге умер Николай Бернулли — брат Даниила (сын Иоганна Бернулли). Даниил опасался за свое здоровье и часто жаловался, что холодный северный климат Петербурга он плохо переносит. Он покинул Петербургскую Академию Наук и уехал в Европу. Его вакансию занял юный Леонард Эйлер.

Чтобы закрепиться в Академии Наук с репутацией высококласного специалиста, Леонард Эйлер поставил перед собой цель — написать серьезный научный трактат. Историки пишут, что Леонард Эйлер стал бегло говорить по-русски уже через несколько месяцев после приезда в Петербург.

В возрасте 22 лет Леонард Эйлер публикует работу (1729), в которой представил научному сообществу новый объект математики — гамма-функцию<sup>10</sup> [9, 367-368]:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} n^x \quad (1)$$

Существенно позже (1765) Л.Эйлер удалось представить гамма функцию в виде несобственного, сходящегося интеграла

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2)$$

Поскольку  $\Gamma(n) = (n-1)!$  и интеграл (2) является непрерывной функцией по  $x$ , то гамма-функцию (1) и (2) стали трактовать как обобщение функции-факториала  $f(n) = n!$  для натуральных  $n$  на произвольное действительное число  $x$ . Это был фундаментальный прорыв в математике, поскольку гамма-функции (1) и (2) явились основой для понятия производной дробного порядка [10]. Кроме того, с помощью функции  $\Gamma(x)$  удалось вычислить интеграл Гаусса<sup>11</sup>, для которого первообразная не представляется в элементарных функциях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3)$$

Иоганн Бернулли, известный своей крайней нетерпимостью к разговорам о том, что кто-то из математиков опережает его в успехах, все же с почтением уступил пальму первенства Леонарду Эйлеру. Гений — это человек, который знает о своем выдающемся таланте и все же продолжает работать.

### Уже заготавливался порох для новой битвы...

Леонард Эйлер уже примерно знал, о чем будет писать. Задача о не падающем детском волчке завораживала и не отпускала его. Как он был благодарен своему домашнему учителю Герману (автору известного в то время трактата по механике “Форономия”), что тот в свое время посвятил Леонарда в проблемы этой загадочной науки.

Все оказалось не так просто, как он, по юношеской наивности, полагал. Хаос и неразбериха в принципах и понятиях, царившие в то время в механике и геометрии, кажется, готовы были свести с

<sup>10</sup>Позже названная в честь Л. Эйлера. Обозначение  $\Gamma(x)$  предложил в 1884 Г. Лежандр. Позже К. Вейерштрасс разработал общую теорию представления гамма функции в виде бесконечных произведений.

<sup>11</sup>Применение этого интеграла (3) известно в теории вероятностей и в современной физике.

ума кого угодно. Прежде всего, нужна была какая-то систематизация всего того, что было написано в книгах.

И главное — нельзя одновременно играть на нескольких досках и не надо хватать за рога слишком много быков сразу. Человеческая проблема — недостаток внимательности при избытии информации. Чтобы выйти из этого замкнутого круга, надо уметь себе задавать вопросы. Надо обращать внимание на знаки и ориентиры. Леонард Эйлер окунулся с головой в книги. Надо выявить иллюзии, от которых надо будет потом избавиться. Надо поймать нерв ситуации. Остальное вторично.

Продолжение следует.

## Литература

- [1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Изд.3-е. - М.: Издательство ЛКИ, 2008. - 704 с.
- [2] Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. Вселенская задача: Рене Декарт. В моей смерти прошу винить мою жизнь // “Математическое образование”. - № 1 (109). - 2024. - с.30-36.
- [3] Оникийчук В.Н., Оникийчук И.В. Вселенская задача: Исаак Ньютон // “Математическое образование”. - № 3 (111). - 2024. - с. 58-69.
- [4] Перри Дж. Вращающийся волчок. - Изд-во “РХД”, Москва-Ижевск, 2001.
- [5] Кант И. Критика чистого разума. - Издательство “Эксмо”, 2012. - 736 с.
- [6] Куно Фишер. История новой философии. Декарт, его жизнь, сочинения и учения. - “Мифрил”, Санкт-Петербург, 1994. - 527 с.
- [7] Оникийчук В.Н. Великая тайна Леонарда Эйлера. - С-Пб: Изд. “Профессионал”, 2007. - 520 с.
- [8] Рюдигер Тиле. Леонард Эйлер. - Киев: изд. “Вища школа”, 1983. - 192 с.
- [9] Прасолов В.В. Математический анализ. Теоремы и задачи. 2-е изд. - М., МЦНМО, 2023. - 480 с.
- [10] Бабенко Ю.И. Метод дробного дифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. - С-Пб: НПО “Профессионал”, 2009. - 584 с.

*Оникийчук Валерий Николаевич,  
Государственный Университет Просвещения (г. Москва),  
кафедра “Высшей алгебры, математического анализа  
и геометрии”, кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru*

*Оникийчук Игорь Валерьевич,  
инженер-математик, ПАО “Аэрофлот”, г.Москва.*

*E-mail: ionikv@inbox.ru*

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2025 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2025 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.



## Contents

<b>A. Afanasiev. On the Diversity of Solutions to Elementary Geometry Problems Using Examples of Students' Works</b>	<b>2</b>
This article presents various solutions to an interesting geometric problem, based on works of Olympiad participants. The solutions are analyzed.	
<b>D. Bavrin. Meridogon, or a Mechanism that Allows to Divide an Arbitrary Angle into an Arbitrary Number of Parts</b>	<b>9</b>
A natural, but not always obvious, approach to solving some school problems of planimetry is to move into three-dimensional space. This article discusses a method for solving a two-dimensional problem with a parameter using a mechanism in three-dimensional space.	
<b>V. Ochkov, A. Bobin, I. Izyurov., P. Poltoranin. Mathematical Education and Modern Information Technology: a Case Study</b>	<b>11</b>
This article explores how modern information technology is changing mathematics education, using the example of one particular case of solving a triangle.	
<b>A. Begunts, A. Loboda. On a Problem Related to the Riemann Zeta Function</b>	<b>19</b>
This article discusses the properties of the graph of the Riemann zeta function on the ray $(1; +\infty)$ and the problem of investigating this graph for symmetry with respect to the bisector of the first coordinate quadrant.	
<b>A. Lyakhov, D. Fomichev. An Algorithm for Blurring Image Boundaries Based on Fuzzy Sets</b>	<b>23</b>
The article describes an algorithm for blurring image boundaries based on fuzzy sets. The application of this algorithm to the blurring of simple contours is shown: stripes, squares, circles. The possibility of modeling a wake jet on the surface of water left by a moving vessel is shown.	
<b>A. Remizov. Energy Integral and Envelopes. Geodesics on Surfaces of Revolution</b>	<b>37</b>
The Newton and Euler-Lagrange equations, which allow lowering the order using the energy integral, are discussed. When moving to the constant energy equation, "superfluous solutions" may appear that are not solutions to the original second-order equation. The analysis of these "unnecessary solutions" leads to interesting results. In particular, it helps to build geodesics on surfaces of rotation.	
<b>S. Shvedenko. Towards the Definition of a Two-Sided Surface</b>	<b>50</b>
The article introduces the concept of a two-sided surface, examines the criterion of two-sidedness, and provides examples of both the fulfillment and violation of this criterion.	
<b>S. Shvedenko. What is the Area of the Möbius Strip?</b>	<b>52</b>
The paper calculates the area of the Möbius strip, considered as a two-dimensional surface in three-dimensional space, defined parametrically.	
<b>V. Solovyev. On the 100th Anniversary of the Death of A.A. Friedman (1888-1925)</b>	<b>54</b>
The article discusses the most fundamental scientific discovery made in our country in the last century. It was made by a mathematician for whom mathematics wasn't enough.	
<b>V. Onikiychk, I. Onikiychk. On Baron Munchausen's Problem. Leonhard Euler. Part 1</b>	<b>63</b>
The article tells about the beginning of the scientific activity of Leonhard Euler, in a historical context.	

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 &gt;