

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год восьмой

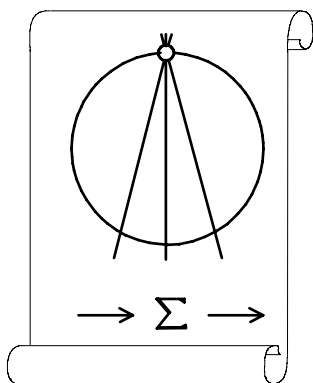
№1 (28)

Январь - март 2004 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования



Учредитель: Фонд математического
образования и просвещения

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дориченко С.А. (заместитель главного редактора)

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Саблин А.И.

№ 1 (28), 2004 г.

© “Математическое образование”, составление, 2004 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (28), январь – март 2004 г.

Содержание

Учебное пособие в журнале

- И. П. Костенко.* Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)
- Лекция 10. Числовые характеристики Н.С.В. 2
- Лекция 11. Типы случайных величин (равномерные, показательные, нормальные) 28
- А. Н. Земляков.* Алгебра*. Окончание 58

Учащимся и учителям средней школы

- А. И. Щетников.* Сумма углов звездчатого многоугольника: учебно-исследовательский семинар для 7 класса 78

Студентам и преподавателям математических специальностей

- В. В. Ивлев, А. И. Нижников.* Зависимость функций. Некоторые обобщения матриц Якоби и Вронского 87

Образовательные инициативы

- А. Ю. Эвнин.* Олимпиада абитуриентов Южно-Уральского государственного университета 100

Содержание образования. Перевод в номере

- Дж. Малати.* Математические задачи и систематические математические знания 107

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2004 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,

лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 03.04.2004 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Объем 7,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)

И. П. Костенко

Продолжаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуется лекция 10 с соответствующими упражнениями. Лекции 8, 9 опубликованы в номерах 3(26) и 4(27) за 2003 г.

Лекция 10. Числовые характеристики Н.С.В.

В предыдущей лекции мы построили модель случайной величины — функцию $f(x)$, $x \in [a; b]$, которую назвали плотностью распределения. Эта функция содержит всю вероятностную информацию о с.в.: она указывает область всех возможных значений с.в. и распределение вероятностей появления этих значений на разных участках. Так, например, модель с.в., показанная на рис. 1, говорит нам, что в левой части промежутка $[a; b]$ значения с.в. появляются чаще, чем в правой. Точнее, — на интервале $(\alpha_1; \beta_1)$ значения с.в. появляются, примерно, в четыре раза чаще, чем на $(\alpha_2; \beta_2)$, потому что левая заштрихованная площадь, примерно, в четыре раза больше правой.

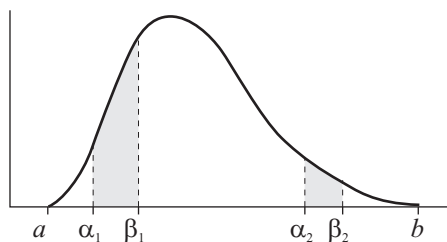


Рис. 1

Напомню, что для конкретной с.в. процесс отыскания функции-плотности бывает весьма сложным: надо провести несколько сот опытов над с.в., по результатам этих опытов построить эмпирическую функцию-плотность $f^*(x)$, после чего перейти к (p) — пределу и получить $f(x)$. Особенно деликатен последний этап, он требует особых соображений, — этой проблемы мы коснемся в следующей лекции. В данной лекции займемся более простой задачей определения числовых характеристик, обобщенно отражающих некоторые важные особенности распределения вероятностей с.в.

Итак, предстоит обобщить на непрерывные с.в. понятия математического ожидания и дисперсии, знакомые вам для случая дискретной с.в. (лек. 5). Я познакомлю вас с некоторыми другими характеристиками и с теорией их приближенных оценок.

1. Математическое ожидание

Раньше, когда мы только начинали изучение с.в., мы описывали конкретный опыт, с которым связывалась рассматриваемая с.в., и объясняли, как возникают значения с.в. в этом опыте. Теперь имеем математический аппарат для моделирования и абстрактного изучения с.в., а именно, — функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, обладающие двумя свойствами:

$$1^\circ. \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]; \quad 2^\circ. \quad \int_a^b f(x) dx = 1.$$

Поэтому, в дальнейшем я нередко буду отвлекаться от конкретики опыта и отождествлять непрерывную с.в. с ее функцией-плотностью.

Определение 1. Математическим ожиданием (или средним значением) непрерывной случайной величины X , заданной плотностью распределения $f(x)$, $x \in [a; b]$, называется число $M = M(X)$, которое вычисляется по формуле

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (1)$$

Как обычно, допускаются бесконечные границы a , $b = \infty$.

Аналогия. Обратите внимание на аналогию (1) с формулой

$$M = \sum_i x_i p_i, \quad (2)$$

определяющей математическое ожидание дискретной с.в. (лек. 5, п. 6, (3)). В формуле (1) вместо последовательности x_i дискретных значений с.в. стоят значения x , которые непрерывно “пробегают” промежуток $[a; b]$; вместо вероятностей p_i — функция-плотность $f(x)$, которая тоже задает распределение вероятностей на $[a; b]$; вместо суммы — интеграл.

Аналогия эта отражает глубокую связь между двумя, на первый взгляд, принципиально различными классами с.в. — дискретными и непрерывными. Сейчас вы увидите эту скрытую связь: мы построим последовательность дискретных с.в. \bar{X}_n , приближающихся с ростом n к с.в. X , и формула (1) закономерно появится, как предел формул (2).

Обоснование формулы (1). Пусть X — непрерывная с.в. и ее плотность распределения $f(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$. Разобьем $[a; b]$ на n мелких

(можно равных) промежутков $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и вычислим вероятности p_i появления значений с.в. X на этих промежутках (на каждом Δx_i применим к интегралу теорему о среднем):

$$p_i = \mathbf{P}(X \in \Delta x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \xi_i \in \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Каждая вероятность p_i численно равна площади S_i прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$ (рис. 2).

Используя найденные вероятности p_i , введем дискретную с.в. \bar{X}_n так:

Таблица 1

\bar{X}_n	ξ_1	ξ_2	\dots	ξ_i	\dots	ξ_n
p	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

Согласны ли вы, что с.в. \bar{X}_n “близка” к X ? Ведь ее значения $\xi_i \in \Delta x_i$ густо заполняют промежуток $[a; b]$ (в силу малости Δx_i), а характер распределения вероятностей p_i этих значений тот же, что и у с.в. X . Это наглядно видно на рис. 2: левые вероятности с.в. \bar{X}_n больше правых ($p_3 = f(\xi_3) \cdot \Delta x_3 = S_3 > S_{n-3} = f(\xi_{n-3}) \cdot \Delta x_{n-3} = p_{n-3}$), так же, как и у с.в. X .

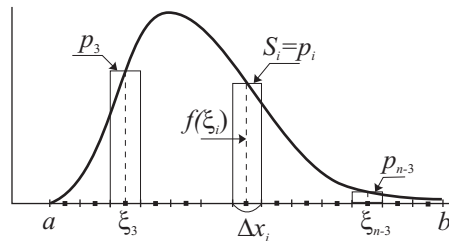


Рис. 2

Термин “близка”, конечно, требует уточнения, но строгая формализация усложнила бы рассуждения, а главное, затемнила бы их смысл.

Очевидно, чем мельче все Δx_i , и чем, следовательно, больше их число n , тем “ближе” с.в. \bar{X}_n к X . И логично определить математическое ожидание с.в. X , как предел математических ожиданий с.в. \bar{X}_n при $n \rightarrow \infty$. В итоге получаем формулу (1):

$$M(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Здесь вам надо вспомнить определение интеграла: сумма $\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i$ является интегральной суммой функции $F(x) = x \cdot f(x)$ на сегменте $[a; b]$; при $n \rightarrow \infty$ все

Δx_i неограниченно измельчаются и, в силу непрерывности функции $f(x)$, а с нею и $F(x)$, ее интегральные суммы стремятся к интегралу.

Пример 1. Вычислим математическое ожидание с.в. T_M — время ожидания поезда в метро (лек. 9, п. 2). Плотность распределения вероятностей этой с.в. нами определена (лек. 9, (1)):

$$f(x) = \frac{1}{120}, \quad x \in [0; 120].$$

Применяем формулу (1) и получаем:

$$M(T_M) = \int_0^{120} x \cdot \frac{1}{120} dx = \frac{1}{120} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{120} = 60.$$

Пример 2. Рассмотрим абстрактную с.в. Si , функция-плотность которой задана так (советую проверить выполнение свойств 1° и 2°):

$$f(x) = 0,5 \sin x, \quad x \in [0; \pi].$$

Применяем формулу (1) и вычисляем интеграл, интегрируя по частям:

$$M(Si) = 0,5 \cdot \int_0^{\pi} x \sin x dx = -0,5 \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Вывод 1. В обоих примерах значение M совпало с серединой промежутка $[a; b]$ (рис. 3, 4). Нетрудно показать, что для тех с.в. X_c , график функции-плотности $f(x)$ которых симметричен относительно прямой, проходящей через середину промежутка $[a; b]$, их математическое ожидание совпадает со серединой этого промежутка, т.е. справедлива формула

$$M(X_c) = \frac{a+b}{2}. \quad (3)$$

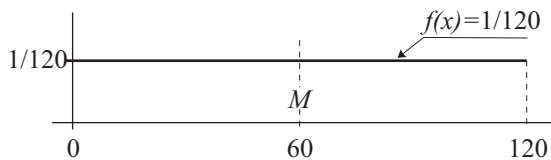


Рис. 3

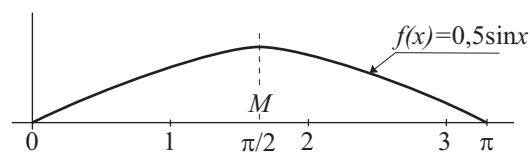


Рис. 4

Пример 3. Рассмотрим “несимметричную” с.в. Z , плотность распределения вероятностей которой задана так (проверьте свойства плотности):

$$f(x) = \frac{1}{12} (4 + 2x - x^2), \quad x \in [0; 3].$$

Ее график — часть параболы (рис. 5). Вычислим $M(Z)$, интегрируя степенные функции:

$$\begin{aligned} M(Z) &= \frac{1}{12} \cdot \int_0^3 x \cdot (4 + 2x - x^2) dx = \frac{1}{12} \cdot \left[2x^2 \Big|_0^3 + 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 \right] = \\ &= \frac{1}{12} \left[18 + 18 - \frac{81}{4} \right] = \frac{21}{16} \approx 1,3126. \end{aligned}$$

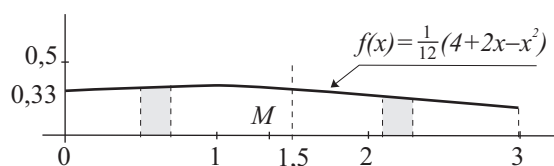


Рис. 5

Вывод 2. Математическое ожидание “несимметричной” с.в. оказалось немного сдвинутым в сторону более вероятных значений (в данном примере — влево). Сдвиг небольшой, ибо левые вероятности чуть больше правых.

Смысл числа $M(X)$. Вы видите, что математическое ожидание M непрерывной с.в. располагается в зоне наиболее вероятных значений. Число $M(X)$ указывает ориентировочно, какие значения с.в. X следует “ожидать” чаще при повторении опыта. Смысл тот же, что и для дискретных с.в.

Вместе с тем, надо отдавать себе отчет в приближенности, расплывчатости этого вывода. Что значит “чаще”? В примере 3 вероятности появления значений с.в. Z на разных участках одинаковой длины (эти вероятности равны соответствующим площадям, — рис. 5) мало отличаются друг от друга и поэтому при многократном повторении опыта значения с.в. Z могут появляться на этих участках почти одинаково часто. Правда, при очень большой серии опытов левые значения должны возникать чуть чаще правых. На это и указывает небольшой сдвиг числа $M(X)$ влево от середины отрезка $[0; 3]$.

Если бы M было сильно сдвинуто влево, мы могли бы предполагать, что левые значения с.в. гораздо более вероятны, чем правые. График функции-плотности $f(x)$ такой с.в. мог иметь отчетливо выраженный “горб” в районе, указываемом именно числом M . Такова, например, с.в., график плотности которой показан на рис. 1 (ответьте, — где предположительно располагается M ?).

Вы должны также знать, что существуют “двугорбые”, так называемые “полимодальные” с.в., — они возникают, когда статистический материал разнороден. В таких случаях наш вывод не работает.

Итак, число $M(X)$ — это одно из значений с.в. X , *среднее* (но не срединное!), точнее — **усредненное** значение, вычисленное с учетом вероятностей всех значений (иногда его называют *средним взвешенным*) и указывающее поэтому ориентировочно область наиболее вероятных и часто возникающих в опыте значений с.в. X .

Контроль 1. Непрерывная с.в. Y задана плотностью распределения $f(x) = 2x$, $x \in [0; 1]$. Проверьте выполнение двух условий, которым должна подчиняться эта функция. Нарисуйте ее график и, учитывая его вид, сделайте предположение о месте точки $M(Y)$ на отрезке $[0; 1]$. Вычислите математическое ожидание точно. Подтвердилось ли ваше предположение?

2. Дисперсия

Напомню **смысл термина** “дисперсия” (разброс). Посмотрите на рис. 6 и 7: на них условно изображены значения двух с.в. X_1 и X_2 , появившиеся в эксперименте.

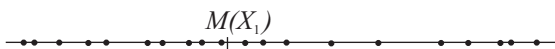


Рис. 6

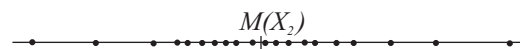


Рис. 7

У какой с.в. разброс значений больше? Думаю, вы уверенно ответите, — у первой. Значения этой с.в. широко разбросаны от $M(X_1)$, а у второй они сгущаются около точки $M(X_2)$, далекие — редки.

В случае дискретной с.в. **степень разбросанности** значений определяется, как вы знаете (лек. 5, п. 7, (3)), числом $D = D(X)$, которое называется дисперсией и вычисляется по формуле

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \quad (3)$$

Из этой формулы видно, что число D увеличивается, если у с.в. X есть далекие от M значения (велики разности $(x_i - M)$, тем более велики их квадраты), и если эти значения появляются в опытах достаточно часто (не малы вероятности p_i , а с ними и слагаемые $(x_i - M)^2 \cdot p_i$).

Как и раньше, в случае математического ожидания (1), заменяем в (3) дискретные значения x_i непрерывной переменной x , вероятности p_i — функцией-плотностью, сумму — интегралом, и приходим к следующему определению.

Определение 2. Дисперсией непрерывной с.в. X , плотность распределения которой задана функцией $f(x)$, $x \in (a; b)$, называется число $D = D(X)$, которое вычисляется по формуле

$$D(X) = \int_a^b (x - M)^2 f(x) dx, \quad (4)$$

где $M = M(X)$ — математическое ожидание с.в. X , определяемое формулой (1). Границы a и b могут быть бесконечными.

Смысл формулы (4). Обоснование формулы (4) точно такое же, как и формулы (1): строится последовательность дискретных с.в. \bar{X}_n , приближающихся к непрерывной с.в. X , и формула (4) получается, как предел формул (3). Поскольку

непрерывную с.в. X можно моделировать дискретной с.в. \bar{X}_n с достаточно большим номером, то степень разбросанности ее значений можно характеризовать дисперсией этой дискретной с.в., т.е. числом $D(\bar{X}_n)$. Но $D(\bar{X}_n) \approx D(X)$, следовательно, формула (4) тоже характеризует разброс с.в. X . Проиллюстрируем этот вывод примерами.

Вычислим дисперсию с.в. T_M (ее плотность показана на рис. 3):

$$\begin{aligned} D(T_M) &= \int_0^{120} (x - 60)^2 \cdot \frac{1}{120} dx = \left[\begin{array}{l} x - 60 = t; \quad x = 0 \Rightarrow t = -60 \\ dx = dt; \quad x = 120 \Rightarrow t = 60 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{120} \cdot \int_{-60}^{60} t^2 dt = \frac{1}{120} \cdot \frac{2 \cdot 60^3}{3} = 1200. \end{aligned}$$

Дисперсия оказалась очень большой, потому что далекие от $M = 60$ значения с.в. T_M появляются в эксперименте так же часто, как и все другие.

Изменим с.в., укоротив промежуток ее значений: $f(x) = 1$, $x \in [0; 1]$ (рис. 8). (Кстати, можете ли вы ответить, почему изменились значения функции?) Разброс значений с.в. резко уменьшился (максимальное их отклонение от математического ожидания M стало равным 0,5, тогда как у с.в. T_M — 60, правда, при этом увеличились вероятности). Дисперсия новой с.в. $T_{[0; 1]}$ тоже должна значительно уменьшиться. Вычисляем:

$$D(T_{[0; 1]}) = \int_0^1 (x - 0,5)^2 \cdot 1 dx = \int_{-0,5}^{0,5} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-0,5}^{0,5} = \frac{(0,5)^3}{3} - \frac{(-0,5)^3}{3} = \frac{1}{12} \approx 0,08.$$

Как видите, число D , определяемое формулой (4), действительно, характеризует степень разбросанности значений с.в.

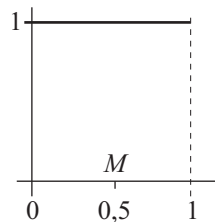


Рис. 8

Другая формула. Формула (4) допускает видоизменение, удобное для вычислений. Проследите за следующими преобразованиями:

$$D(X) = \int_a^b (x - M)^2 f(x) dx = \int_a^b (x^2 - 2Mx + M^2) f(x) dx =$$

$$= \int_a^b x^2 f(x) dx - 2M \int_a^b x f(x) dx + M^2 \int_a^b f(x) dx.$$

В правой части последнего равенства второй интеграл есть математическое ожидание с.в. X (формула (1)), а третий равен единице, по свойству функции-плотности, следовательно,

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2. \quad (5)$$

Если ввести новую с.в. X^2 , считая, что в тех опытах, где с.в. X принимает значение x , с.в. X^2 принимает значение x^2 , то формулу (5) можно записать короче и она станет удобнее для запоминания:

$$D(X) = M(X^2) - M^2. \quad (5')$$

Последняя формула¹ была справедлива и для дискретных с.в. (лек. 5, (12)).

Проиллюстрирую ценность формулы (5').

В предыдущих примерах мы могли сравнить степень разброса с.в. T_M и с.в. $T_{[0; 1]}$ без вычислений, — по виду графиков плотности (рис. 3, 8) было очевидно, что у первой с.в. разброс значительно больше, нежели у второй. Но бывает, что без вычислений это сделать затруднительно.

Сравните, например, с.в. Si (рис. 4) и с.в. Z (рис. 5), — у какой разброс больше? Не очевидно. Максимальное отклонение значений с.в. от среднего чуть больше у второй, но “зона” ее левых значений “короче”. Вероятности правых ее значений, в целом, чуть меньше, чем у с.в. Si , но левых — немного больше. Проведем расчет.

Какую формулу выберем для расчета? Сравним

$$D(Si) = 0,5 \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin x dx \quad \text{и} \quad D(Si) = 0,5 \int_0^\pi x^2 \sin x dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Очевидно, второй интеграл легче. Применяя к нему дважды метод интегрирования по частям (достройте эти вычисления сами), получим:

$$D(Si) = 0,5 \int_0^\pi x^2 \sin x dx - \frac{\pi^2}{4} = \left[\begin{array}{ll} u = x^2; & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{array} \right] = \dots$$

¹Формулу (5') следовало бы подробнее обосновать для непрерывных с.в., но мы не знаем, какой вид будет иметь функция-плотность с.в. X^2 , входящая в формулу (5). Для решения этой вспомогательной задачи нужны значительные знания (см. 2, глава 9), которых мы не касаемся в данном курсе.

$$\dots = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx \frac{9,86}{4} - 2 = 2,46 - 2 \approx 0,46$$

Рассчитаем дисперсию второй с.в. Формулы (4) и (5) приводят к интегралам:

$$D(Z) = \frac{1}{12} \int_0^3 \left(x - \frac{27}{16}\right)^2 (4 + 2x - x^2) dx$$

$$\text{и} \quad D(Z) = \frac{1}{12} \int x^2 (4 + 2x - x^2) dx - \left(\frac{27}{16}\right)^2.$$

И здесь второй интеграл проще. Раскрываем в нем скобки и вычисляем три степенных интеграла (советую проследить за вычислениями; обратите внимание на подробность записи каждого расчетного этапа, — она облегчает вычисления и уменьшает вероятность ошибки):

$$\begin{aligned} D(Z) &\approx 0,08 \cdot \left(\int_0^3 4x^2 dx + \int_0^3 2x^3 dx - \int_0^3 x^4 dx \right) - 1,3126^2 \approx \\ &\approx 0,08 \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 + 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 - \frac{x^5}{5} \Big|_0^3 \right) - 1,723 = 0,08 \cdot \left(4 \cdot 9 + 2 \cdot \frac{81}{4} - \frac{243}{5} \right) - 1,723 = \\ &= 0,08 \cdot (36 + 40,5 - 48,6) - 1,723 = 0,08 \cdot 27,9 - 1,723 \approx 0,51. \end{aligned}$$

Вот теперь можно сравнить дисперсии точно, — они получились очень близкими, вторая чуть-чуть больше, на четыре сотых.

Контроль 2. Две с.в. X_1 и X_2 имеют один и тот же промежуток значений — $[0; 1]$, но разные распределения вероятностей появления этих значений: $f_1(x) = 2x$ и $f_2(x) = 4x^3$. Проверьте выполнение двух общих требований к функции-плотности. Постройте графики этих функций и по виду оцените расположение средних значений M_1 и M_2 на промежутке $[0; 1]$. Вычислите M_1 и M_2 точно. Оправдалось ли ваше предположение? Как думаете, у какой с.в. дисперсия меньше и на много ли? Рассчитайте D_1 и D_2 точно (какой формулой выгоднее пользоваться — (4) или (5)?). Отв.: $M_1 \approx 0,67$; $M_2 = 0,8$; $D_1 \approx 0,05$; $D_2 \approx 0,03$.

3. Среднее квадратическое отклонение

Формула (4) содержит квадрат и по этой причине дает нередко очень большие значения D (как у с.в. T_M) или, наоборот, очень маленькие (как у с.в. $T_{[0; 1]}$). Неудобство снимется, если извлечь квадратный корень из дисперсии: $\sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{1200} \approx 35$, $\sigma_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{1/12} \approx \sqrt{0,08} \approx 0,29$. Вы видите, что очень большое значение первой дисперсии значительно уменьшилось (на два порядка), а очень малое второй — увеличилось. Новые числа σ_1 и σ_2 попрежнему характеризуют разброс с. в. — первое значительно больше второго.

Еще одно преимущество, полученное после извлечения корня, — уравнились размерности с.в. X и ее новой характеристики σ (прежняя характеристика разброса D имеет размерность квадрата с.в., как это видно из формулы (4)).

Определение 3. Средним квадратическим отклонением непрерывной с.в. X (кратко — с.к.о.) называется число $\sigma = \sigma(X)$, которое получается извлечением квадратного корня из дисперсии $D = D(X)$, т.е.

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (6)$$

Особой практической ценностью числа σ является то, что с его помощью можно нередко (но не всегда!) представить ориентировочно диапазон всех практически возможных значений изучаемой с.в. X . На практике нередко оказывается, что промежуток (a, b) значений с.в. X “близок” к интервалу $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$ — его называют *трехсигмовым интервалом* с.в. X . Этот факт запишем условно так:

$$(a; b) \approx (M - 3\sigma; M + 3\sigma). \quad (7)$$

Наилучшим образом эта оценка выполняется для класса **нормально** распределенных с.в., которые будем подробно изучать в следующей лекции.

Как практически используют эту оценку? Пусть изучается некоторая с.в. X , у которой не известен весь спектр значений (a, b) , но известно, что она принадлежит классу нормальных с.в. Проводят несколько десятков опытов над с.в. X , по их результатам определяют приблизительно M и σ (о том, как это делается, — в одной из следующих лекций) и трехсигмовый интервал $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$ принимают за (a, b) .

Уточнение первое. Соотношение (7), как я сказал, хорошо выполняется для нормальных с.в. В других случаях его правая часть может значительно отличаться от левой (сейчас вы увидите это на примерах), она будет “шире” левой, т.е. будет выполняться включение

$$(a; b) \subset (M - 3\sigma; M + 3\sigma). \quad (7')$$

В таких случаях говорят, что трехсигмовый интервал **покрывает** значения с.в. X .

Уточнение второе. Для нормальных с.в. (и не только для них) левая часть (7) “шире” правой и включение (7'), следовательно, не выполняется. Однако в опытах над такими с.в. их значения крайне редко выходят за пределы трехсигмового интервала (пример будет ниже). В таких случаях можно сказать, что включение (7') все-таки выполняется, но не строго, а с некоторой вероятностью p . Определение этой вероятности p для различных классов с.в. и будет одной из наших задач в следующей лекции.

Примеры. Построим двухсигмовый интервал для с.в. T_M , промежуток значений которой известен $[a; b] = [0; 120]$, а математическое ожидание и дисперсия были вычислены выше: $M_1 = 60$, $D_1 = 1200$, $\sigma_1 = \sqrt{1200} \approx 35$. Значит,

$(M - 2\sigma; M + 2\sigma) \approx (60 - 70; 60 + 70) = (-10; 130)$. Очевидно, $[0; 120] \subset (-10; 130)$ (рис. 9) и выполняется более сильное, чем (7'), включение

$$(a; b) \subset (M - 2\sigma; M + 2\sigma). \quad (8)$$

Множество значений с.в. T_M покрывается двухсигмовым интервалом.

Прделаем то же для с.в. $T_{[0; 1]}$. Здесь $[a; b] = [0; 1]$, $M_2 = 0,5$, $D_2 \approx 0,08$, $\sigma_2 \approx 0,28$. Строим двухсигмовый интервал $(M - 2\sigma; M + 2\sigma) \approx (0,5 - 0,56; 0,5 + 0,56) = (-0,06; 1,06)$. Опять выполняется (8) (рис.10), а значит, и (7').

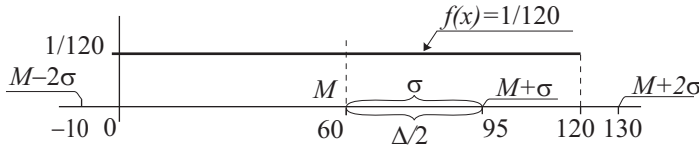


Рис. 9

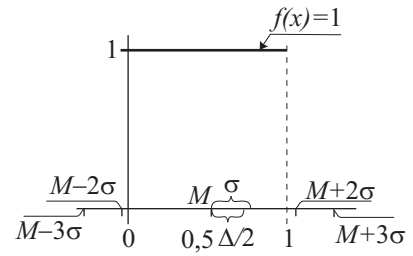


Рис. 10

Вывод. В данных двух примерах значения σ чуть больше половины максимального отклонения $\Delta = \max |x - M|$ ($\Delta_1 = 120 - 60 = 60 \Rightarrow \sigma_1 \approx 35 > (\Delta_1/2) = 30$; $\Delta_2 = 1 - 0,5 = 0,5 \Rightarrow \sigma_2 \approx 0,28 > (\Delta_2/2) = 0,25$). Именно по этой причине промежуток значений с.в. покрывается двухсигмовым интервалом (тем более, — трехсигмовым).

В следующей лекции вы увидите, что включение (8) выполняется для целого класса **равномерно** распределенных с.в. Трехсигмовый интервал в этих случаях значительно больше промежутка значений $[a; b]$. Соотношение (7) нельзя считать справедливым.

Еще пример. Рассмотрим неравномерно распределенную с.в. Si , функция-плотность которой $f(x) = 0,5 \sin x$, а значения составляют промежуток $[a; b] = [0; \pi]$. Математическое ожидание данной “симметричной” с.в. $M = (\pi/2) \approx 1,57$. Дисперсия вычисляется по формуле (5') повторным интегрированием по частям (это делалось в предыдущем разделе):

$$D_3 = D(Si) = 0,5 \cdot \int_0^\pi x^2 \sin x dx - (\pi^2/4) = \dots = (\pi^2/4) - 2 \approx 0,46.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_3 = \sqrt{D_3} \approx \sqrt{0,46} \approx 0,68$. Максимальное отклонение $\Delta_3 = \max |x - (\pi/2)| = \pi - (\pi/2) = \pi/2 \approx 1,57$. Половина максимального отклонения $(\Delta_3/2) \approx 0,78$. В данном случае $\sigma < (\Delta/2)$, поэтому двухсигмовый интервал не покрывает значений с.в. Si , а трехсигмовый — покрывает (рис. 11):

$$\begin{aligned} (M - 3\sigma; M + 3\sigma) &\approx (1,57 - 3 \cdot 0,68; 1,57 + 3 \cdot 0,68) = \\ &= (1,57 - 2,04; 1,57 + 2,04) = (-0,47; 3,61) \supset (0; \pi). \end{aligned}$$

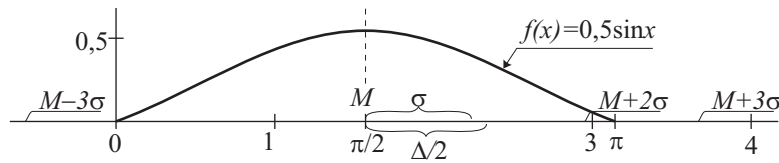


Рис. 11

Контроль 3. В условиях контрольного упражнения 2 вычислите средние квадратические отклонения для с.в. X_1 и X_2 . Постройте трехсигмовые интервалы, — выполняется ли включение (7')? Можно ли утверждать, что вероятность выхода значений с.в. X_i за пределы трехсигмового интервала очень мала? Почему? Как рассчитать эту вероятность?

Указание. Вычислите интеграл $\int_0^{M-3\sigma} f(x) dx$.

4. Свойства математического ожидания и дисперсии (линейные операции над с.в.)

В дальнейшем (лек. 12, п. 5, 7) нам придется использовать прием представления с.в. X в виде суммы более простых с.в. X_i , при этом возникнет задача определения математического ожидания и дисперсии суммы. Эта задача легко решится с помощью свойств числовых характеристик, которые будут установлены ниже. Напомню, что такое сумма с.в. (лек. 7, п. 6).

Определение 4. Суммой с.в. X_1, X_2, \dots, X_n , связанных с одним и тем же опытом, называется с.в. X , связанная с тем же опытом и принимающая при выполнении опыта значение $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, где x_i — значения с.в. X_i , появившиеся в этом же опыте ($i = 1, 2, \dots, n$).

Обозначение: $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ или короче $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Примеры. Опыт состоит в подбрасывании трех игральных костей. Дискретная с.в. X — сумма выпавших очков, она может принимать значения от 3 до 18. Эту с.в. X можно представить в виде суммы более простых с.в. следующим образом. Введем три с.в.: X_1 — число очков, выпавших на первой кости, X_2 — на второй, X_3 — на третьей. Все эти с.в., как и с.в. X , связаны с одним и тем же опытом — подбрасыванием трех костей одновременно. Очевидно, значение x , которое принимает при проведении опыта с.в. X , складывается из значений x_1, x_2, x_3 , которые принимают с.в. X_1, X_2 и X_3 . Следовательно, $X = X_1 + X_2 + X_3$.

Заметьте: каждая с.в. X_i ($i = 1, 2, 3$) может принимать 6 значений, а сумма X принимает 16 значений. Ряд распределения суммы X можно составить, рассчитав классическим способом вероятности появления в сумме 3-х, 4-х, ... 18-ти очков. Советую проделать это на досуге и вспомнить метод расчета вероятностей, с которого мы начинали. После этого можно рассчитать значения $M(X)$ и $D(X)$ по соответствующим формулам (2) и (3). Чуть ниже вы убедитесь, что этого можно достичь гораздо легче, используя свойства M и D .

Возьмем теперь две непрерывные с.в., например, $Y_1 = Y_2 = T_{[0; 1]}$ и попробуем их сложить. Эти с.в. абстрактные: мы не знаем опыта, с которым они связаны, но знаем их значения $x \in [0; 1]$ и плотность распределения вероятностей $f(x) = 1$, $x \in [0; 1]$. Нетрудно определить значения суммы $Y = Y_1 + Y_2$ — согласно определению 4, это множество чисел вида $y_1 + y_2$, $y_1, y_2 \in [0; 1]$, числа эти заполняют сегмент $[0; 2]$. А вот найти функцию-плотность суммы с.в. мы не сумеем, — это сложная задача, требующая новых знаний, которых мы не касаемся в данном курсе (см. 2, гл. 9). И тем не менее, вы сейчас сможете найти числовые характеристики суммы с.в., даже не зная ее плотности.

Сформулируем два первых свойства M и D :

$$1^\circ. M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n M(X_i); \quad 2^\circ. D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i).$$

Математическое ожидание (дисперсия) суммы нескольких с.в. равно сумме их математических ожиданий (дисперсий), если слагаемые независимы.

Для дискретных с.в. эти свойства были доказаны в лек. 7 (п. 7, п. 9). Для непрерывных с.в. мы здесь не сможем их доказать, т. к. не сумеем определить функцию-плотность суммы с.в. Придется поверить.²

Следует заметить, что свойство 1° представляет собой одну из важнейших теорем теории вероятностей, — оно носит название *теоремы сложения математических ожиданий*. Аналогично, свойство 2° — *теорема сложения дисперсий*. Эти теоремы позволяют при решении инженерных задач обходиться без знания функции-плотности суммы с.в. и довольствоваться знанием числовых характеристик суммы с.в.. На практике знание неполной информации, которую несут числовые характеристики с.в., оказывается важнее знания полной информации, заключенной в функции-плотности. Об этой практической ценности числовых характеристик я говорил вам раньше.

Применим эти свойства к предыдущим двум примерам.

Вычислим M и D для с.в. X_1 — число очков на первой кости. Поскольку вероятности всех ее значений $x_i = 1, 2, \dots, 6$ одинаковы и равны $p_i = 1/6$, то согласно формулам (2) и (5'), получаем

$$M(X_1) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1 + 2 + \dots + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5,$$

$$\begin{aligned} D(X_1) &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6} - \frac{49}{4} = \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \approx 3. \end{aligned}$$

²Доказательство можно найти в [2, гл. 8, п. 8.2], но учтите, что для его понимания нужны дополнительные знания из этой и предыдущей глав книги [2].

Поскольку $X_1 = X_2 = X_3$, то $M(X_1) = M(X_2) = M(X_3) = 3,5$ и, по свойству 1°, $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) = 3 \cdot 3,5 = 10,5$. Аналогично рассчитывается дисперсия $D(X) = 3 \cdot (35/12) = 35/4 = 8,75$.

Если вы строили ряд распределения с.в. X и вычисляли по нему $M(X)$ и $D(X)$ (ранее я предлагал сделать это), то у вас должно было получиться то же самое, только с большими затратами времени и труда.

Во втором примере расчет еще проще:

$$M(Y_1) = M(Y_2) = M(T_{[0; 1]}) = 0,5 \Rightarrow M(Y) = M(Y_1) + M(Y_2) = 1,$$

$$D(Y_1) = D(Y_2) = D(T_{[0; 1]}) = 1/12 \Rightarrow D(Y) = D(Y_1) + D(Y_2) = 1/6.$$

Напомню, что значения $M(T_{[0; 1]}) = 0,5$ и $D(T_{[0; 1]}) = 1/12$ были определены во втором разделе данной лекции.

В дальнейшем нам понадобится еще одна простая операция над случайными величинами — умножение с.в. на число.

Определение 5. Произведением числа λ на случайную величину X называется новая с.в. λX , которая принимает в опыте значение λx , в то время, как с.в. X принимает значение x .

Из определения следует, что для дискретной с.в. X ее ряд распределения отличается от с.в. λX только значениями, а не вероятностями (таблицы 1, 2).

Таблица 1

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

Таблица 2

λX	λx_1	λx_2	\dots	λx_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

В частности, если с.в. X_1 (число очков на первой кости) умножить, например, на $\lambda = 0,5$, то с.в. $0,5X_1$ будет принимать значения $x_1 = 0,5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1,5$; $x_4 = 2$; $x_5 = 2,5$; $x_6 = 3$, а вероятности значений останутся те же, что и у с.в. X_1 : $p_i = 1/6$.

Для непрерывных с.в. легко определить возможные значения с.в. λX . Если значения с.в. X составляют промежуток $[a; b]$, то промежуток значений с.в. λX станет $[\lambda a; \lambda b]$ (он увеличится, если $|\lambda| > 1$, и уменьшится, если $|\lambda| < 1$). Функция-плотность $f(x)$ с.в. X тоже немного изменится и для с.в. λX примет вид (чуть ниже поясню, почему):

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot f\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (9)$$

График функции $f_\lambda(x)$ получается из графика $f(x)$ его “растяжением” (если $|\lambda| > 1$) в λ раз и “опусканием” к оси OX тоже в λ раз. Это преобразование для случая $\lambda = 2$ показано на рис. 12-13. С помощью рисунков можно понять, почему так должно произойти, т.е. почему функция-плотность с.в. λX должна иметь вид (9). Поясню.

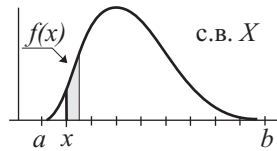


Рис. 12

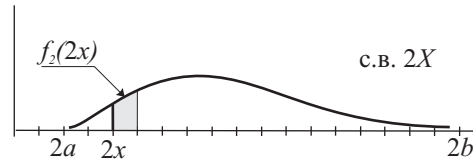


Рис. 13

На рис. 12 показан небольшой отрезок значений с.в. X (его начало в точке x) и заштрихована соответствующая ему площадь, величина которой равна вероятности появления в опыте этих значений (согласно смысла функции-плотности). Этому отрезку соответствует в 2 раза больший отрезок значений с.в. $2X$, показанный на рис. 13 (его начало в точке $2x$). Вероятность появления в опыте этих значений та же (согласно определению 5), значит вторая заштрихованная площадь должна равняться первой. Поскольку основание второй площади в 2 раза больше, чем у первой, то ее “высота” должна быть в 2 раза “ниже”. Если уменьшать длину первого отрезка, устремляя ее к нулю, то длина соответствующего ему второго отрезка тоже устремится к нулю. Первая площадь в пределе превратится в отрезок, длина которого равна значению функции-плотности $f(x)$ с.в. X в точке x , а вторая площадь — в отрезок $f_2(2x)$, т.е. в пределе получится, что $f(x) = 2f_2(2x)$, что равносильно (9).

В частности, если с.в. $Y = T_{[0; 1]}$ умножить, к примеру, на число $\lambda = 3$, то промежуток значений с.в. $3Y$ расширится в 3 раза и станет $[0; 3]$, а график ее функции-плотности “опустится” к оси OX (рис. 14, 15). Сама функция $f_3(x)$ примет вид (9), т.е. $f_3(x) = (1/3)f(x/3)$. Но $f(x/3) = 1$, ибо эта функция равна единице во всех точках отрезка $[0; 1]$ ($x \in [0; 3] \Rightarrow (x/3) \in [0; 1]$). Значит, $f_3(x) = 1/3$.

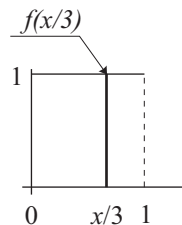


Рис. 14

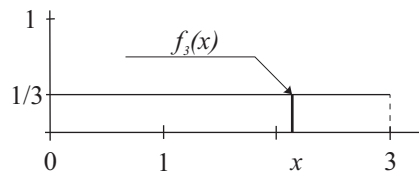


Рис. 15

Свойства, связанные с операцией умножения на число, следующие:

- 3°. $M(\lambda X) = \lambda \cdot M(X)$;
- 4°. $D(\lambda X) = \lambda^2 D(X)$ (интересно, — почему появился квадрат?);
- 5°. $\sigma(\lambda X) = \lambda \sigma(X)$.

Убедимся в справедливости свойств для дискретных с.в.

$$M(\lambda X) = \sum_i \lambda x_i p_i = \lambda \sum_i x_i p_i = \lambda M(X);$$

$$D(\lambda X) = \sum_i (\lambda x_i - \lambda M)^2 p_i = \sum_i \lambda^2 (x_i - M)^2 p_i = \lambda^2 \sum_i (x_i - M)^2 p_i = \lambda^2 D(X)$$

(теперь понятно, откуда “выскочил” квадрат).

Если X — непрерывная с.в. с множеством значений $[a; b]$ и функцией-плотностью $f(x)$, то с.в. λX будет иметь значения в промежутке $[\lambda a; \lambda b]$ и функцию-плотность (9). Вычислим математическое ожидание $M(\lambda X)$ и дисперсию $D(\lambda X)$ по соответствующим формулам (1) и (5), используя при вычислении интегралов метод замены переменной.

$$\begin{aligned} M(\lambda X) &= \int_{\lambda a}^{\lambda b} x \cdot f_{\lambda}(x) dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} x \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \left[\begin{array}{l} x = \lambda t; \quad x = \lambda a \Rightarrow t = a \\ dx = \lambda dt; \quad x = \lambda b \Rightarrow t = b \end{array} \right] = \\ &= \int_a^b \lambda t \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot f\left(\frac{\lambda t}{\lambda}\right) \lambda dt = \lambda \int_a^b t \cdot f(t) dt = \lambda M(X); \end{aligned}$$

Вычисление $D(\lambda X)$ проведите сами.

Примечание. На основании определений 4 и 5 можно составлять линейные комбинации с.в. $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n$ (*линейные функции* нескольких с.в.). В разделе 2 мы использовали квадрат с.в. X^2 . А нельзя ли ввести операцию извлечения корня из с.в. \sqrt{X} ? Можно. Более того, можно ввести самое общее понятие произвольной функции φ от одной или нескольких с.в. $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и поставить те же задачи, которые решались в данном разделе: найти числовые характеристики функции от с.в. и найти закон распределения функции с.в. В общем виде это сложные задачи, их решение можно найти в [2, главы 8 и 9]. Следует подчеркнуть, что здесь не праздное обобщение, его требует практика. Простейший пример: на вход технического устройства поступает случайное воздействие X , оно подвергается функциональному преобразованию φ , и на выходе появляется с.в. $Y = \varphi(X)$, требуется найти числовые характеристики с.в. Y или закон ее распределения.

Контроль 4. $X_1 = X_2 = T_{[0; 1]}$. Определите множество значений с.в. $Y = 0,5X_1 - 2X_2$ и найдите $M(Y)$, $D(Y)$ и $\sigma(Y)$.

5. Медиана. Мода

Наряду с математическим ожиданием M — средним взвешенным значением с.в. — в вероятностных расчетах используются и другие средние — медиана и мода.

Определение 6. Медианой непрерывной с.в. X называется такое ее значение $x = x_m$, для которого выполняется равенство

$$P(X < x_m) = P(X > x_m) = 1/2. \quad (10)$$

Смысл числа x_m легко понять с помощью графика функции-плотности $f(x)$ данной с.в. X (рис. 16). Вертикаль, проходящая через точку $x = x_m$, делит подграфик функции $f(x)$ на две равновеликие части (потому и “медиана”).

Определение 7. Модой непрерывной с.в. X называют то значение $x = M_x$, в котором ее функция-плотность достигает максимума. Модой дискретной с.в. называют ее наиболее вероятное значение.

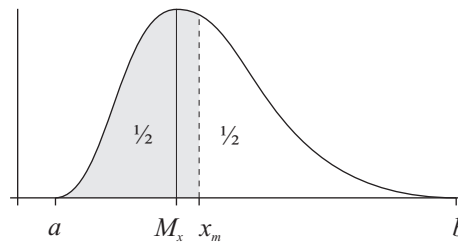


Рис. 16

На рис. 16 мода лежит левее медианы — $M_x < x_m$. Если функция-плотность $f(x)$ имеет симметричный одногорбый график (рис. 17), то все средние значения такой с.в. совпадают:

$$x_m = M_x = M = \frac{a+b}{2}.$$

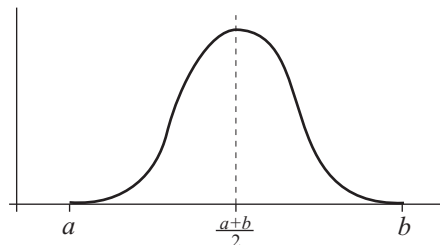


Рис. 17

Пример. Непрерывная с.в. X распределена на промежутке $[0; 2]$ по закону прямоугольного треугольника, т.е. ее функция-плотность имеет вид $f(x) = ax$, $x \in [0; 2]$. Найти коэффициент a и все средние значения x_m , M_x и M .

Решение. Как определить параметр a ? Вы помните, что функция $f(x)$ может моделировать с. в. только при условии, что площадь ее подграфика равна единице. Из этого условия и найдем a :

$$\int_0^2 ax dx = 1 \Rightarrow a \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Итак, плотность распределения с.в. X задается функцией $f(x) = 0,5x$, $x \in [0; 2]$.

Моду легко определить по графику (рис. 18), где видно, что наибольшее значение функция $f(x)$ принимает в крайней точке $x = 2$. Значит, $M_x = 2$. Из графика видно также, что медиана x_m лежит между точками $x = 1$ и $x = 2$. Определим ее значение из условия (10) $P(X < x_m) = 1/2$:

$$\int_0^{x_m} \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot x_m^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_m^2 = 2 \Rightarrow x_m = \sqrt{2} \approx 1,4.$$

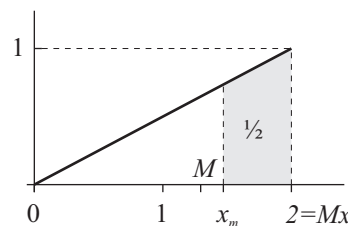


Рис. 18

Любопытно, где лежит математическое ожидание M ? Ясно, что близко от медианы x_m , но — правее или левее? Надо считать.

$$M = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{6} \cdot [2^3 - 0^3] = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

Оказалось, левее. Чуть-чуть.

Контроль 5. Плотность распределения с.в. Z задана функцией $f(x) = a \cdot (4 + 2x - x^2)$, $x \in [0; 3]$. Найдите параметр a . Постройте график функции-плотности и определите с его помощью ориентировочное расположение моды M_x . Как вам кажется, где лежит медиана x_m — правее или левее M_x ? Почему? Определите x_m точно. Где лежит математическое ожидание M ? Определите его точно.

6. Система числовых характеристик. Асимметрия. Экссесс

Математическое ожидание M и дисперсия D — две самых важных для вероятностных расчетов (прогнозов) числовых характеристики с.в. Эти числа, в сущности, обобщенно характеризуют особенности графика функции-плотности $f(x)$, которая является абстрактной моделью с.в..

Напомню **смысл** M и D .

Число M , вообще говоря, указывает ориентировочно ту область промежутка $(a; b)$, в которой располагаются более вероятные значения с.в. и над которой график функции $f(x)$ нередко (но не всегда, — рис. 18) имеет “горб” (рис. 19-20).

Число D характеризует степень разбросанности значений с.в. от ее среднего значения M . Величина D зависит от длины промежутка $(a; b)$ и от того, насколько малы вероятности далеких от M значений с.в., т.е. насколько низок график функции $f(x)$ у “краев” промежутка $(a; b)$. Очевидно, дисперсия $D(2X)$ значительно больше, чем $D(X)$ (рис. 19-20), точнее, — в 4 раза больше (см. п. 4).

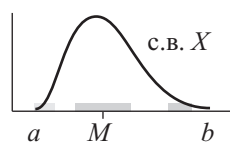


Рис. 19

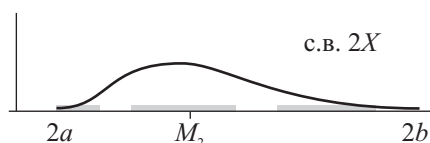


Рис. 20

Есть и другие особенности с.в. (графика ее функции-плотности $f(x)$), которые бывает необходимо оценить числом. Посмотрите на рис. 21, — вы видите три сходных распределения — 1, 2, 3, из которых первое симметричное, второе и третье — нет. Третье, очевидно, более асимметрично, нежели второе. Как оценить числом степень асимметрии? Посмотрите теперь на рис. 22, — как оценить степень островершинности двух изображенных распределений? Ответы узнаете чуть ниже.

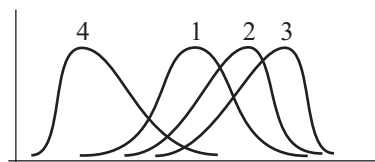


Рис. 21

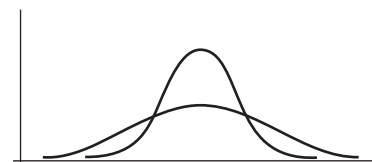


Рис. 22

Существует стройная **система характеристик с.в.** (их называют *моментами*), которая включает M , D , характеристики асимметрии, островершинности и многие другие. Эта система задается следующими двумя определениями.

Определение 8. Начальным моментом k -го порядка ($k = 1, 2, \dots$) непрерывной с.в., заданной плотностью распределения $f(x)$, $x \in (a, b)$, называется число α_k , которое вычисляется по формуле

$$\alpha_k = \int_a^b x^k f(x) dx. \quad (11)$$

Для дискретной с.в. это число вычисляется по схожей формуле

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k p_i. \quad (11')$$

Определение 9. Центральным моментом k -го порядка ($k = 1, 2, \dots$) непрерывной с.в., заданной плотностью распределения $f(x)$, $x \in (a, b)$, называется число μ_k , которое вычисляется по формуле

$$\mu_k = \int_a^b (x - M)^k f(x) dx, \quad (12)$$

$$\mu_k = \sum_i (x_i - M)^k p_i. \quad (12')$$

Примечание 1. Следует иметь в виду, что есть с.в., которые не имеют некоторых моментов. В лек. 5, п. 6 был пример дискретной с.в. с бесконечным множеством значений, у которой не было 1-го начального момента, потому что ряд (11') при $k = 1$ расходился. Непрерывная с.в., распределенная по закону Коши $f(x) = a/(1+x^2)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, тоже не имеет первых моментов. Действительно, у нее, согласно формуле (11), момент α_1 получается бесконечным:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{a}{1+x^2} dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^2}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \infty. \end{aligned}$$

Примечание 2. Иногда в теоретических рассуждениях (лек. 12, п. 2, (1)) используются так называемые *абсолютные* начальные или центральные моменты. Например, из формулы (12) получается абсолютный центральный момент C_k так:

$$C_k = \int_a^b |x - M|^k f(x) dx. \quad (12'')$$

Итак, формулами (11) и (12) определены последовательности начальных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_k, \dots$ и центральных моментов $\mu_1, \mu_2, \mu_k, \dots$. Это и есть *система* разнообразных *числовых характеристик с.в.*

Вы, конечно, заметили, что формула (11) похожа на математическое ожидание (1), а формула (12) — на дисперсию (4). Более того, M — это первый начальный момент, а D — второй центральный, т.е.

$$\alpha_1 = M, \quad \mu_2 = D.$$

Каждый другой момент α_k и μ_k несет какую-то свою часть информации о с.в. Мы не будем здесь выяснять, что это за информация, каков ее смысл (как делали ранее для M и D). Остановимся только на двух центральных моментах μ_3 и μ_4 , — они как раз и характеризуют заинтересовавшие нас асимметрию и островершинность с.в..

Асимметрия. Третий центральный момент определяется формулой

$$\mu_3 = \int_a^b (x - M)^3 f(x) dx. \quad (13)$$

Если бы мы вычисляли μ_3 для различных с.в., то заметили бы, что для симметричных распределений (кривая 1 на рис. 21), $\mu_3 = 0$; для кривых, у которых “горб” сдвинут вправо (кривые 2 и 3 на рис. 21), $\mu_3 < 0$, причем, значение μ_3 тем меньше, чем больше сдвиг; для кривых, чей “горб” сдвинут влево (кривая 4 на рис. 21), $\mu_3 > 0$.

Я не привожу здесь конкретных расчетов потому, что вычисления интеграла в формуле (13) довольно затруднительно из-за куба и требуют много времени. Некоторые примеры, а также формулы, облегчающие вычисления, будут в разделе упражнений. Здесь же попробую объяснить вам, почему значения μ_3 зависят от степени скошенности графика функции-плотности $f(x)$.

Разобьем μ_3 точкой M на два слагаемых так:

$$\mu_3 = \int_a^b (x - M)^3 f(x) dx = \int_a^M (x - M)^3 f(x) dx + \int_M^b (x - M)^3 f(x) dx = I_1 + I_2.$$

Не замечаете ли вы, что первое слагаемое отрицательно (интеграл $I_1 < 0$), а второе — положительно ($I_2 > 0$)? Ведь в первом интеграле $x \in (a; M)$, следовательно,

$$\begin{aligned} x < M &\Rightarrow x - M < 0 \Rightarrow (x - M)^3 < 0 \Rightarrow (x - M)^3 \cdot f(x) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^M (x - M)^3 f(x) dx < 0, (f(x) \geq 0). \end{aligned}$$

Для второго интеграла аналогичная цепочка приводит к $I_2 > 0$.

Если график функции $f(x)$, $x \in (a; b)$ симметричен относительно прямой $x = M$ (при этом $M = (a + b)/2$, рис. 23), то оба интеграла равны по абсолютной величине $|I_1| = I_2$ (рис. 24) и, следовательно, $\mu_3 = -|I_1| + I_2 = 0$.

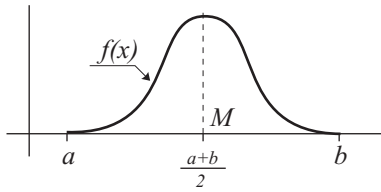


Рис. 23

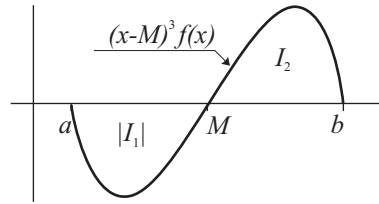


Рис. 24

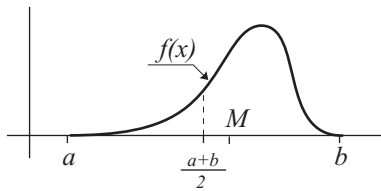


Рис. 25

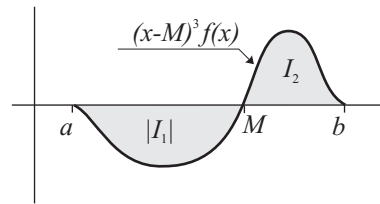


Рис. 26

Если же “горб” графика функции $f(x)$ сдвинут вправо от середины отрезка $(a; b)$ (рис. 25), то вероятности “правых” значений с.в. больше, чем вероятности “левых”, и, согласно смысла числа M , оно тоже сдвигается вправо от середины отрезка $(a; b)$. Но тогда длина отрезка $(a; M)$ больше, чем длина отрезка $(M; b)$. Отсюда следует, что подынтегральная функция первого интеграла I_1 , определенная на $(a; M)$, имеет “больше” отрицательных значений, нежели подынтегральная функция второго интеграла I_2 (она определена на $(M; b)$) имеет значений положительных (рис. 26). Именно по этой причине “отрицательность” первого интеграла I_1 перевесит “положительность” второго, т.е. $|I_1| > I_2$ (на рис. 26 первая заштрихованная площадь $S_1 = |I_1|$ больше второй $S_2 = I_2$) и, в результате, окажется $\mu_3 = -|I_1| + I_2 < 0$.

Данное рассуждение, конечно, не строго математическое, — оно логично, но использует неопределенные термины и апеллирует к интуиции. Его цель не столько доказать, сколько убедить, объяснить причины факта.

Обычно степень асимметрии с.в. измеряют несколько иным числом, а именно, μ_3 делят на куб среднего квадратического отклонения σ для того, чтобы получить безразмерную величину (μ_3 имеет размерность куба с.в.). Полученная таким образом новая характеристика скошенности обозначается Sk (от английского skew — “косой”) и носит название *коэффициента асимметрии*:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (14)$$

Эксцесс. Четвертый центральный момент определяется формулой

$$\mu_4 = \int_a^b (x - M)^4 f(x) dx. \quad (15)$$

Чем более острый “горб” имеет график функции-плотности $f(x)$ с.в. X , тем большее значение μ_4 дает формула (15). Следовательно, число μ_4 действительно

характеризует степень островершинности распределения X . Его тоже делают безразмерным, деля на σ^4 и, кроме того, вычитают 3 (сейчас поясню). Получается характеристика островершинности (“крутости”) распределения X , которую называют *эксцессом* и обозначают ε_x :

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (16)$$

В формуле (16) число 3 вычитается из отношения μ_4/σ^4 потому, что для часто встречающихся в практических исследованиях нормальных распределений (о них упоминалось в п. 3 и мы будем подробно исследовать этот класс с.в. в следующей лекции) отношение $\mu_4/\sigma^4 = 3$. Следовательно, эксцесс, определенный формулой (16), позволяет сравнивать распределения по степени островершинности с нормальным, для которого $\varepsilon_x = 0$. Кривые, более крутые, чем нормальная кривая (она выделена на рис. 27), обладают положительным эксцессом, менее крутые — отрицательным.

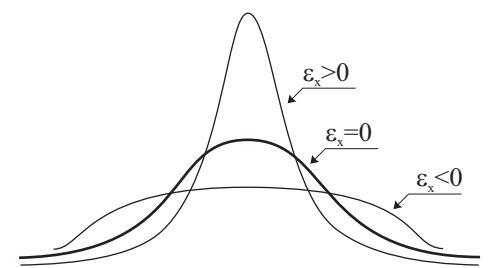


Рис. 27

Контроль 6. Распределение $T_{[0; 1]}$ задается функцией-плотностью $f(x) = 1$, $x \in [0; 1]$. Скажите, не вычисляя, каковы значения его 1-го начального и 3-го центрального моментов и какой знак эксцесса. Почему? Постройте график функции $(x - M)^3 f(x)$ и покажите с помощью графика значения $|I_1|$ и I_2 . Вычислите значения α_1 , α_2 , μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , σ , Sk , ε_x .

7. Упражнения

1. Плотность распределения с.в. X задана функцией $f(x) = ax^2$, $x \in [0; 2]$. Определите параметр a и постройте график функции $f(x)$. Учитывая вид графика, выскажите предположение, — где расположено математическое ожидание $M = M(X)$? Рассчитайте его точно. Как вы думаете, — какова вероятность $P(X < M)$, больше или меньше половины? Рассчитайте ее точно. Где лежит медиана x_m — правее или левее M ? Рассчитайте ее точно. Где расположена мода M_x ?
Отв.: $3/8$; $3/2$; $27/64$; $\sqrt[3]{4} \approx 1,59$; 2.

2. Плотность распределения с.в. X задана функцией $f(x) = a(5 - x)^2$, $x \in [1; 5]$. Определите параметр a и постройте график функции $f(x)$. Где расположено среднее значение $M = M(X)$? Рассчитайте его точно. Больше или меньше

половины вероятность $P(X > M)$? Рассчитайте ее точно. Определите два других средних значения — медиану и моду.

3. С.в. X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$, $x \in [0; 1]$. Приблизьте с.в. X дискретной с.в. \bar{X}_4 (о том, как это делается, см. п. 1): разбейте $[0, 1]$ на 4 равные части Δx_i , рассчитайте вероятности $p_i = P(X \in \Delta x_i)$, значения ξ_i с.в. \bar{X}_4 выберите серединами отрезков Δx_i и запишите ряд распределения с.в. \bar{X}_4 . Нарисуйте многоугольник распределения с.в. \bar{X}_4 и оцените расположение математического ожидания $M(\bar{X}_4)$. Вычислите точно $M(\bar{X}_4)$ и $M(X)$ — близки ли они? Приблизьте таким же образом с.в. X дискретной с.в. \bar{X}_8 и вычислите $M(\bar{X}_8)$ — приближается ли оно к $M(X)$?

4. Сравните по степени разброса значений две с.в. : $T_{[0; 1]}$, с плотностью распределения $f(x) = 1$, $x \in [0; 1]$, и с.в. X из предыдущей задачи, для которой $f(x) = 2x$, $x \in [0; 1]$. У какой из этих с.в. разброс больше и почему? Вычислите точно дисперсии и с.к.о. данных с.в., — оправдалось ли ваше предположение?

5. Сравните, как в предыдущей задаче, разброс с.в. $T_{[0; 1]}$ и с.в. Si , функция-плотность которой $f(x) = 0,5 \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

6. Сравните разброс с.в. Si и Z , у которой $f(x) = (1/12)(4 + 2x - x^2)$, $x \in [0; 3]$.

7. С.в. X подчинена закону Симпсона (“закону равнобедренного треугольника”), это значит, что функция-плотность имеет вид $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1; 1]$ (рис. 28). Какой интервал, двухсигмовый или трехсигмовый покрывает ее значения?

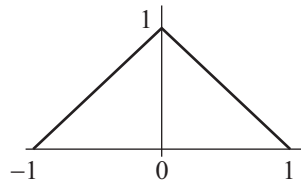


Рис. 28

Указание. При вычислении дисперсии разбейте интеграл на два интеграла, учитывая, что функция $f(x)$ задается двумя формулами: $f(x) = x + 1$, если $x \in [-1; 0]$, и $f(x) = 1 - x$, если $x \in [0; 1]$.

8. Распределение с.в. X задано на сегменте $[-1; 1]$ двумя аналитическими выражениями: $f(x) = (2/3)(x + 1)$, если $x \in [-1; 0,5]$, и $f(x) = 2(1 - x)$, если $x \in [0,5; 1]$. Постройте график функции $f(x)$, $x \in [-1; 1]$. Оцените без вычислений расположение среднего значения M и величину σ , запишите свои оценки. Вычислите M , D и σ . Что вы оценили более точно — M или σ ? Почему? Какой интервал, двухсигмовый или трехсигмовый, покрывает значения с.в. X ?

Указание. При расчете дисперсии в интегралах надо сделать подстановку $x - M = t$, она упростит вычисления.

9. Распределение с.в. Y имеет вид, изображенный на рис. 29. Составьте аналитическое выражение функции $f(x)$. Оцените расположение M . Рассчитайте его точно. Как вы думаете, у какой с.в. дисперсия больше, у с.в. Y или у с.в. X из предыдущей задачи? Рассчитайте $D(Y)$ точно. Каким интервалом, двухсигмовым или трехсигмовым, покрываются значения с.в. Y ?

Указание. При определении аналитического выражения функции $f(x)$ используйте уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$[(y - y_1)/(y_2 - y_1)] = [(x - x_1)/(x_2 - x_1)].$$

10. X — с.в., заданная в упражнении 7 (рис. 28). Определите промежуток значений с.в. $1,5X$ и нарисуйте график ее функции-плотности. Составьте аналитическое выражение этой функции.

11. Y — с.в., заданная в упражнении 9 (рис. 29). Определите промежуток значений с.в. $0,25X$ и нарисуйте график ее функции-плотности.

12. Определите промежуток значений с.в. $1,5X + 0,25Y$ (X и Y — с.в., заданные в упражнениях 7 и 9). Найдите M , D и σ этой с.в.

13. Распределение с.в. X_2 показано на рис. 30. Найдите ее дисперсию D и среднее квадратическое отклонение σ , используя свойства операций над с.в.

14. Класс с.в., распределенных по закону Симпсона с параметром a , задается функцией-плотностью $f(x) = (1/a)(1 - (|x|/a))$, $x \in [-a; a]$ (одна из таких функций с параметром $a = 1$ показана на рис. 28). Нарисуйте графики функций с параметрами $a = 2$ и $a = 0,5$. Найдите числовые характеристики M , D , σ , μ_3 , Sk , μ_4 , ε_x данного класса с.в. при произвольном значении параметра a . Оцените степень островершинности распределений при $a = 2$ и $a = 0,5$.

15. С.в. X задана плотностью распределения $f(x) = 0,5x$, $x \in [0; 2]$ (рис. 18). Найдите начальные и центральные моменты 1-го, 2-го, 3-го и 4-го порядков. Определите степень скошенности и степень крутости данной с.в.

Указание. Используйте формулы, выражающие центральные моменты через начальные: $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$, $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$, $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$.

Отв.: $4/3$; 2 ; $3,2$; $16/3$; 0 ; $2/9$; $-8/135$; $16/135$.

16. Докажите, что для любой непрерывной с.в. ее центральный момент первого порядка равен нулю.

17. С.в. X распределена на сегменте $[0; 1]$ по закону прямоугольного треугольника, т.е. $f(x) = ax$, $x \in [0; 1]$. Определите параметр a и постройте график функции-плотности. Найдите M , D , σ и Sk данного распределения.

Отв.: $2/3$; $1/18$; $1/3\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}/5$.

18. Случайные величины, подчиненные закону Лапласа, имеют плотность распределения вида $f(x) = Ae^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$. С.в. L распределена по закону Лапласа с параметром $\lambda = 1$ (рис. 31). Определите коэффициент A . Сравните с.в. L и с.в. X из упражнения 7 (закон Симпсона): а) у какой из них больше разброс значений? б) у какой больше островершинность? Найдите M , D , σ и Sk

для обоих распределений. Оцените вероятность появления значений с.в. L вне трех-сигмового интервала.

Отв.: для L — $A = 0,5$; $M = 0$; $\sigma = \sqrt{2}$; $\varepsilon_x = 3$.

19. Опыт состоит в стрельбе по мишени. С.в. S , связанная с этим опытом, принимает значения, равные расстоянию s от точки попадания до центра мишени. Известно, что эта с.в. хорошо моделируется законом Релея, т.е. ее функция-плотность имеет вид $f(s) = Ase^{-h^2s^2}$, $s \in [0; +\infty)$, где параметр h зависит от качества стрельбы, — чем больше h , тем точнее стрельба (рис. 32), а множитель A определяется известным образом по свойству функции-плотности. Будем считать $h = 1$ (график функции $f(x) = Ase^{-s^2}$ показан на рис. 32). Найдите коэффициент A , моду M_x , матожидание M_s , дисперсию D_s . Найдите вероятность того, что расстояние от точки попадания до центра мишени окажется меньше моды; истолкуйте ее геометрически с помощью рис. 32.

Отв.: 2; $1/\sqrt{2}$; $\sqrt{\pi}/2$; $(4 - \pi)/4$; 0,393.

20. В двух отделах учреждения находятся по два компьютера — старый и новый. Старые в 2–3 раза чаще выходят из строя. В первом отделе замечено, что вероятность выхода из строя старого компьютера за определенный период времени равна $p_1 = 0,6$, а второго — $p_2 = 0,3$. Во втором отделе — $p_3 = 0,7$, $p_4 = 0,2$. Рассмотрите две с.в.: X_1 — число работающих компьютеров в 1-м отделе, X_2 — во втором (точнее, число компьютеров каждого отдела, не вышедших из строя за определенный период времени). Составьте ряд распределения каждой с.в., оцените их числовые характеристики M , D , σ и Sk (у какой с.в. они больше?) и рассчитайте их точно. Сделайте выводы.

Отв.: $M_1 = 1,1$; $D_1 = 0,45$; $\sigma_1 = 0,67$; $\mu_3 = -0,036$; $Sk = -0,12$.

21. Орудие три раза стреляет в мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Случайная величина X — число попаданий. К какому классу относится данная с.в.? Составьте ее ряд распределения. Оцените расположение среднего значения M , знак и степень скошенности. Рассчитайте числовые характеристики M , D , σ и Sk .

Отв.: 1, 2; 0,72; 0,85; 0,24.

Лекция 11. Типы случайных величин (равномерные, показательные, нормальные)

Если вы внимательно изучали предыдущие лекции, то могли заметить сходство, однотипность некоторых примеров с.в., точнее — сходство распределений их вероятностей, сходство графиков-плотностей $f(x)$ (рис. 1, 2, 3).

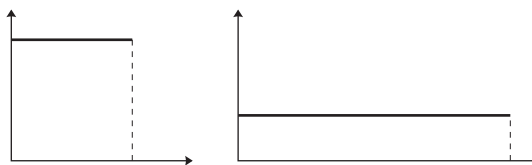


Рис. 1

Однотипные с.в. постоянно возникают в практических задачах. Часто встречающиеся типы с.в. были выделены и исследованы. Результаты абстрактного исследования (формулы) позволяют быстро анализировать разнообразные конкретные ситуации.

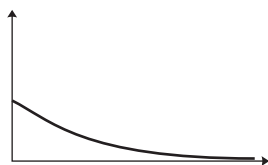
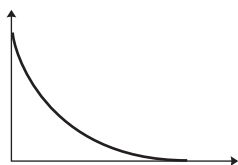


Рис. 2

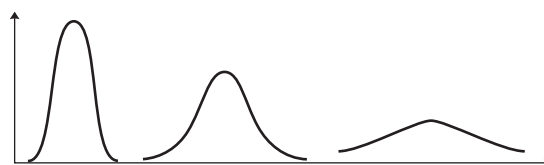


Рис. 3

В данной лекции мы рассмотрим три важнейших типа с.в.: равномерные (рис. 1), показательные (рис. 2) и нормальные (рис. 3). Как всегда, будем начинать с примеров, которые помогут выделить типовое свойство рассматриваемых с.в.. Затем уточним это свойство, определив функцию-плотность $f(x)$.

Исследование каждого типа с.в. состоит в ответе на три вопроса. Как меняется график плотности $f(x)$ при изменении параметров с.в.? Какой вид принимают формулы для вычисления числовых характеристик? Какой вид приобретает формула вероятности попадания с.в. в заданный интервал $(\alpha; \beta)$? Если помните, эти же вопросы ставились при исследовании дискретных с.в. — биномиальной и Пуассоновской (лек.7-8).

Для понимания вычислений, которых в лекции много, потребуется знание свойств показательной функции и умение находить пределы и интегралы.

1. Равномерные с.в. (типовое свойство)

Пример 1. Вспомните с.в. T_M — время ожидания поезда в метро (лек. 9, п. 2-4). Если провести большую серию опытов, то значения с.в. T_M будут появляться одинаково часто (почти!) на всех равных участках промежутка $[0; 120]$, ибо нет причины, по которой какой-то участок имел бы предпочтение.

Статистическая плотность с.в. T_M — $f^*(x)$ имеет вид ступеньчатой функции (рис. 4), а предельная функция — константа $f(x) = 1/120$ (рис. 5).

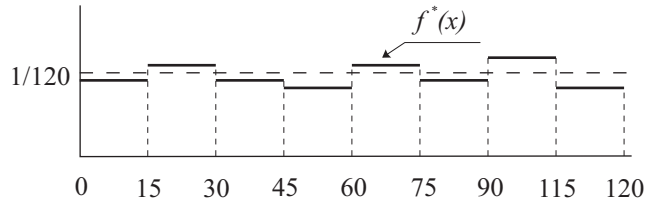


Рис. 4

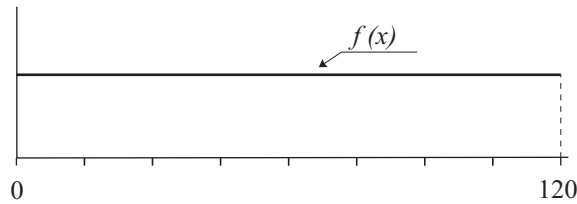


Рис. 5

Пример 2. Представьте вертикально закрепленный на оси диск, который может свободно вращаться (рис. 6). Длина окружности диска равна единице (одному метру, например). На окружности диска отмечена точка O (начало отсчета) и нанесена равномерная шкала — 1 мм, 2 мм, 3 мм, ..., 999 мм (на рис. 6 шкала растет вверх). Напротив горизонтального диаметра укреплена неподвижная стрелка ничтожно малой ширины.

Проведем следующий опыт: крутнем диск вниз и дождавшись, когда вращение закончится, отметим точку окружности M , которая остановится против стрелки (это может быть точка, отмеченная на шкале, или точка между делениями шкалы). Точке M соответствует число x , равное длине дуги OAM (напоминаю, шкала растет вверх). Число x может быть рациональным (если точка M совпадет с каким-то делением шкалы или с его долей), может быть иррациональным. Т.е. число x может быть любым из “сплошного” промежутка $[0; 1)$. Следовательно, в условиях рассматриваемого опыта нами определена непрерывная случайная величина со значениями из $[0; 1)$. Обозначим ее через $R_{[0; 1)}$.

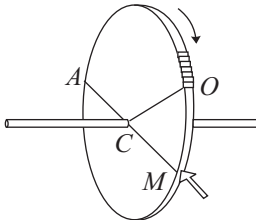


Рис. 6

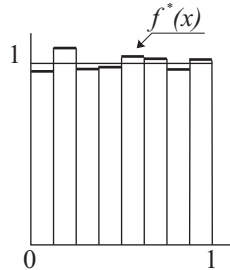


Рис. 7

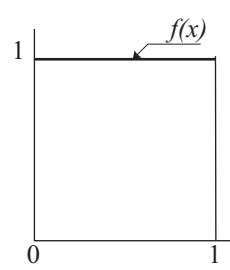


Рис. 8

Если провести опыт много раз, то отмеченные точки M заполняют окружность диска почти равномерно, а соответствующие им числа x (значения с.в.) также

равномерно заполняют промежуток $[0; 1)$. Причина та же — нет факторов, которые больше влияли бы на появление точки M в каком-то участке окружности диска, нежели в других участках той же длины.

Гистограмма, статистическая плотность $f^*(x)$ и плотность $f(x)$ с.в. $R_{[0; 1)}$ имеют вид (рис. 7-8), сходный с T_M (рис. 4-5), — они лишь “уже” и “выше”. •

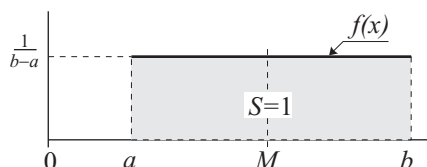


Рис. 9

Пример 3 (обобщенный). Опыт состоит в том, что на промежутке $[a; b]$ выбирается точка x случайным образом (механизм выбора может быть любым). Ясно, что получается непрерывная с.в. $R_{[a; b]}$, однотипная с предыдущими. Ее плотность распределения $f(x) = c$ показана на рис. 9. Константа c определяется из основного свойства функции-плотности (площадь подграфика функции $f(x)$ равна единице):

$$\int_a^b f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_a^b c dx = c \cdot (b - a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b - a}.$$

Итак, **типичное свойство** рассмотренных с.в. — **равномерность** заполнения промежутка $[a; b]$ ($[0; 120]$, $[0; 1)$) значениями с.в. при многократном повторении опыта.

Определение 1. Случайная величина X называется **равномерной** (или равномерно распределенной) на промежутке $[a; b]$ (или $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$), если ее плотность распределения есть константа, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in [a; b]. \quad (1)$$

Равномерные с.в. нередко встречаются в механике, как случайные углы поворота деталей механизмов. В современной вычислительной технике с.в. $R_{[0; 1]}$ (“случайное число от 0 до 1”) используется как элемент, из которого путем определенных преобразований можно построить любую непрерывную с.в. с любым распределением вероятностей.

Контроль 1. В условиях опыта, описанного в примере 2, введите другую с.в. R_φ — угол φ (меньший), который составит фиксированный радиус CO с горизонтальным диаметром CM после остановки диска (рис. 6). Каково множество значений с.в. R_φ ? Будет ли R_φ равномерной с.в.? Почему? Запишите аналитическое выражение функции-плотности $f(x)$ и постройте ее график.

2. Исследование равномерного распределения (зависимость от параметра, характеристики, попадание в интервал)

Как я сказал во введении к лекции, исследование каждого типа с.в. состоит в решении трех задач (они перечислены в заголовке раздела).

Задача 1. Какова динамика изменения графиков функции-плотности (1) при изменении равномерных с.в.?

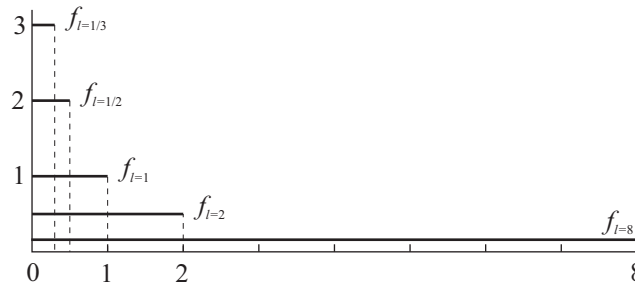


Рис. 10

Решение. Равномерные с.в. различаются между собой промежутками значений $[a; b]$. Функция (1) и ее график зависят от длины $[a; b]$, т.е. от одного параметра $l = b - a$. Надо представить себе, как меняется график плотности (1) при возрастании параметра l до бесконечности.

Закрепим $a = 0$ и станем увеличивать $b \rightarrow \infty$. Поскольку площади подграфиков любой функции-плотности должны оставаться равными единице, а сами подграфики равномерных с.в. представляют собой прямоугольники, то их высоты $h = c$ убывают и $h = c = (1/l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ (рис. 10). Если $a \neq 0$, картина та же.

Таким образом с помощью рис. 10 наглядно обозревается совокупность **всех** равномерных с.в. (точнее, их моделей).

Задача 2. Определить числовые характеристики произвольной равномерно распределенной с.в. X , заданной функцией-плотностью (1).

Решение. Математическое ожидание с.в. X совпадает со серединой промежутка $[a; b]$ (рис. 9) в силу симметрии графика $f(x)$ относительно прямой, проходящей через эту середину (лек. 10, п. 1). Этот же результат получается из общей формулы математического ожидания (лек. 10, (1)), примененной к равномерной плотности (1):

$$M = \int_a^b x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{Итак, } M_R = \frac{a+b}{2}. \quad (2)$$

Дисперсия равномерной с.в. X зависит от длины промежутка $[a; b]$: чем больше его длина l , тем больше разброс значений с.в. Точное значение D_R вычислим по общей формуле (5) из лек. 10:

$$\begin{aligned} D &= \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } D_R = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (3)$$

Среднее квадратическое отклонение тоже оценивает разброс значений с.в. и вычисляется как корень из дисперсии:

$$\sigma_R = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (4)$$

M , D и σ — главные характеристики с.в., они несут основную информацию и часто используются для решения практических задач. Другие характеристики (мода, медиана, скошенность и др.) используются реже, поэтому скажу о них кратко.

Моды равномерное распределение не имеет. **Медиана** совпадает с M_R . **Скошенность** равна нулю, — опять же, в силу симметрии графика $f(x)$. **Эксцесс** (плосковершинность) должен быть отрицательным и одинаковым для всех равномерных с.в., ибо график $f(x)$ абсолютно “плоский” — прямая линия. Можете сами вычислить эксцесс точно. Для этого посчитайте сначала 4-й центральный момент μ_4 по формуле (8), лек. 10:

$$\mu_4 = \int_a^b (x-M)^4 \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^4 dx = \dots = \frac{(b-a)^4}{80},$$

После этого используйте формулу эксцесса (лек.10, (10)):

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \dots = \frac{144}{80} - 3 = -1,2.$$

Применение формул (2), (3), (4). Из общих формул легко получить значения числовых характеристик для различных конкретных с.в.

$$M(T_M) = \frac{0 + 120}{2} = 60; \quad D(T_M) = \frac{(120 - 0)^2}{12} = 1200; \quad \sigma(T_M) = \sqrt{1200} \approx 35.$$

$$M(R_{[0; 1]}) = \frac{0 + 1}{2} = 0,5; \quad D(R_{[0; 1]}) = \frac{(1 - 0)^2}{12} = \frac{1}{12} \approx 0,08;$$

$$\sigma(R_{[0; 1]}) = \sqrt{\frac{1}{12}} \approx 0,29.$$

Оценка интервала значений. Общий вид среднего квадратического отклонения (3) позволяет распространить на все равномерные с.в. подмеченный ранее (лек. 10, п. 3) факт: область значений $[a; b]$ любой равномерной с.в. покрывается двухсигмовым интервалом $(M - 2\sigma; M + 2\sigma)$. Это значит, что выполняются неравенства $M - 2\sigma < a < b < M + 2\sigma$. Для с.в. T_M эти неравенства выглядят так:

$$\begin{aligned} M - 2\sigma &= 60 - 2\sqrt{1200} \approx 60 - 2 \cdot 35 = \\ -10 &< (a = 0) < (b = 120) < 60 + 2\sqrt{1200} \approx 60 + 2 \cdot 35 = 130. \end{aligned}$$

Для с.в. $R_{[0; 1]}$ ее область значений $[0; 1]$ покрывается даже односигмовым интервалом (проверьте сами).

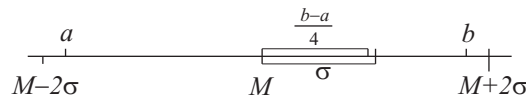


Рис. 11

Причина, по которой двухсигмовый интервал всегда покрывает $[a; b]$, состоит в том, что для равномерных с.в. σ всегда немного больше половины максимального отклонения Δ (рис. 11).

Действительно,

$$\sigma = \frac{b - a}{2\sqrt{3}} > \frac{b - a}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \Delta,$$

и, следовательно,

$$M - 2\sigma < M - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2} - \frac{b - a}{2} = a$$

Неравенство $b < M + 2\sigma$ устанавливается аналогично.

Задача 3. Какова вероятность события, состоящего в том, что при выполнении опыта над равномерной с.в. X_K появится значение, принадлежащее заданному интервалу $(\alpha; \beta)$? (Естественно считать $(\alpha; \beta) \subset [a; b]$).

Решение простое, ибо проста функция $f(x)$. Общая формула (6), (лек. 10, п. 7) дает:

$$P(X \in (\alpha; \beta)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Итак,

$$P(X_R \in [\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \quad (5)$$

Искомая вероятность численно равна площади подграфика функции-плотности $f(x)$ над интервалом $(\alpha; \beta)$.

Контроль 2. Определите M , D и σ с.в. T_{φ} (контроль 1). Проверьте выполнение правила двух сигм и проиллюстрируйте его рисунком. Определите вероятность того, что с.в. T_{φ} примет значение а) острого угла; б) острого угла, большего 60° ? (Сначала выскажите предположение, потом проверьте его расчетом). Изобразите полученные вероятности в виде площади.

3. Показательные с.в., их связь с потоком событий

Пример 4. Вспомним с.в. T_{φ} — интервал времени между двумя соседними вызовами на АТС (лек. 9, п. 2, 3, 5). Опыт здесь состоит в том, что на АТС выбирается случайно какой-то телефонный разговор и фиксируется промежуток времени от момента, когда поступил этот вызов, до момента следующего за ним вызова. Подчеркну: фиксируется не длительность разговора, а промежуток времени, протекший между соседними вызовами. Выбор разговора ограничивается определенным периодом суток, например, — от 8-ми до 9-ти часов утра.

Если провести опыт много раз, набрать статистический материал, сгруппировать его и построить гистограмму, она будет выглядеть как ступенчатая “падающая горка” (рис. 12), потому что среди появившихся значений с.в. T_{φ} будет много малых (распределение этих значений условно показано на оси OX , рис. 13). График предельной функции $f(x)$ — плавно “падающая горка” (рис. 13). Аналитическое выражение этой функции имеет вид $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, $x \in [0; +\infty)$. О том, как подбирается эта формула, мы вели речь в лек. 9, п. 5. Как подбирается параметр λ — узнаете чуть позже.

Если провести серию опытов в другое время суток, например, от 23 до 24 часов ночи, то распределение появившихся значений с.в. изменится — длительные интервалы будут чаще. Но общий характер распределения останется прежним — сначала гуще, потом реже. График предельной функции $f(x)$ сохранит вид “падающей горки”, но будет более пологим (рис. 14).

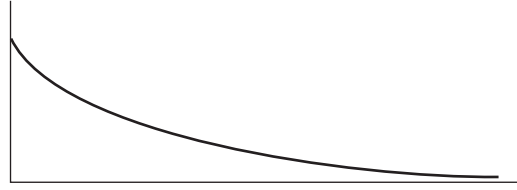


Рис. 14

Определение 2. Непрерывная с.в. X называется **показательной** (показательно распределенной), если ее функция-плотность имеет вид

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x \in [0; +\infty), \quad (6)$$

где $\lambda > 0$ — параметр, принимающий свое значение для каждой конкретной с.в. данного типа.

Чтобы данное определение было корректным, надо проверить выполнение двух свойств функции-плотности (лек. 9, п. 6):

$$1^\circ. f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0; +\infty).$$

Действительно, показательная функция всегда положительна: $e^{-\lambda x} > 0, \forall x, \forall \lambda$, а при умножении на положительное число $\lambda > 0$ знак функции сохраняется.

$$2^\circ. \int_0^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Вычислим несобственный интеграл (не забудем, что $\lambda > 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[- \int_0^b e^{-\lambda x} d(-\lambda x) \right] = - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda x} \Big|_0^b \right] = \\ &= - \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-\lambda b} - e^0] = - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda b}} + 1 = 0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Типовое свойство показательных с.в. можно описательно сформулировать так: *при выполнении большой серии опытов над с.в. ее значения появляются более часто в начале промежутка $[0; +\infty)$, а далее густота значений постепенно убывает.* Степень быстроты убывания может быть разной — от очень быстрой до очень-очень медленной. Точно характер убывания (экспоненциальный) определяется функцией (6). Следует отметить, что убывание “вогнутое”, и вогнутость функции $f(x)$ может быть очень слабо заметной при медленном убывании (при малых λ).

Связь с потоком событий. Пример 4 есть частный случай гораздо более общей ситуации. Отдельный вызов на АТС — это элемент потока вызовов, следующих друг за другом с разными интервалами. Подобные потоки событий возникают в многообразных ситуациях — очереди в билетные кассы, ремонтные мастерские, парикмахерские и т.п. В лекции 8 вы познакомились с простейшим, Пуассоновским, потоком. Если в таком простейшем потоке рассматривается обобщенная с.в. — интервал между произвольными соседними событиями потока, — то ее распределение моделируется функциями вида (6). Факт этот можно вывести теоретически.

Тем самым точно описывается класс опытов, в которых гарантировано появление показательных распределений.

Контроль 3. С.в. X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1/3$. Запишите функцию-плотность $f(x)$ и постройте ее график (учтите $e^{-1} \approx 0,37$). Вычислите вероятности попадания значений с.в. X в интервалы $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(10; 11)$. Соблюдается ли закономерность, характерная для показательных распределений?

4. Исследование показательного распределения

Задача 1. Как меняется график функции-плотности (6) при изменении параметра λ от 0 до $+\infty$?

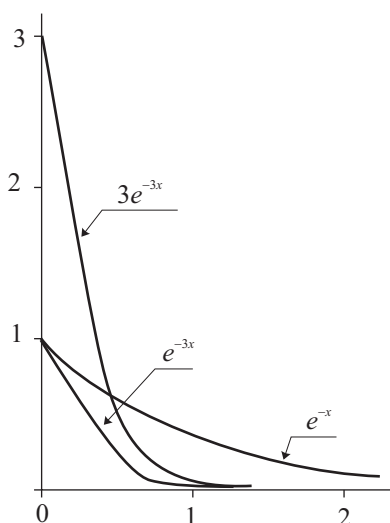


Рис. 15

Решение. Рассмотрим отдельно два случая: а) λ возрастает от 1 до $+\infty$; б) λ убывает от 1 до 0.

а) При $\lambda = 1$ функция (6) принимает вид $y_1 = e^{-x}$, $x > 0$, ее график — экспонента (рис. 15). Увеличим $\lambda = 3$. График функции $y_3 = 3e^{-3x}$ был построен раньше, в лек. 9, п. 3., рис. 13. Напомню: он получался двумя преобразованиями экспоненты: 1) $y_1 = e^{-x}$ переходит в $y_2 = e^{-3x}$, при этом все точки экспоненты приближаются к оси OX в три раза ближе, экспонента “сжимается”; б) $y_2 = e^{-3x}$ переходит в $y_3 = 3e^{-3x}$ и все ординаты графика y_2 увеличиваются в три раза, он “поднимается” (рис. 15). В результате получается более крутой график, быстро приближающийся к оси OX при увеличении x .

Ясно, что при дальнейшем увеличении $\lambda = 4; 5; \dots$ график функции-плотности (6) будет становиться все круче и круче и будет очень быстро приближаться к оси OX .

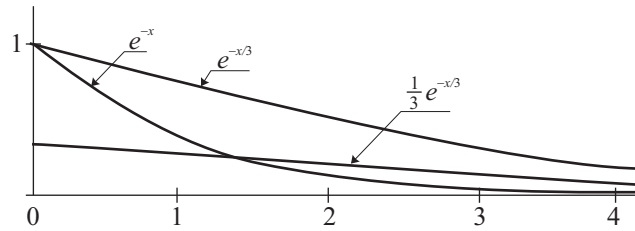


Рис. 16

б) Станем теперь уменьшать λ и пусть $\lambda = 1/3$. Преобразования экспоненты аналогичные: 1) y_1 переходит в $y_4 = e^{-\frac{1}{3}x}$, при этом все точки экспоненты удаляются от оси OX в 3 раза дальше, экспонента “растягивается”; 2) y_4 переходит в $y_5 = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$, все ординаты уменьшаются в три раза, приближаясь к оси OX (рис. 16). Получается график функции-плотности (6) — пологая “горка”, близкая к оси OX и медленно к ней приближающаяся с ростом x .

Ясно, что при дальнейшем уменьшении $\lambda = 1/4; 1/5; \dots$ графики функции (6) будут опускаться к оси OX и очень медленно снижаться при $x \rightarrow \infty$.

Вывод. Представьте теперь динамику в целом. При очень больших значениях параметра λ график показательного распределения (6) — очень крутая “горка”, вогнутая, очень быстро “падающая” к оси OX и затем выравнивающаяся почти горизонтально, почти сливающаяся с осью OX при $x \rightarrow \infty$. При уменьшении λ “горка” становится все более полой. После перехода через $\lambda = 1$ и дальнейшего уменьшения $\lambda \rightarrow 0$ “горка” делается низкой и очень-очень полой, почти горизонтальной, оставаясь тем не менее, вогнутой.

Итак, в одной динамичной картине мы обозрели **все** возможные показательные распределения.

Задача 2. Определить числовые характеристики любой показательного распределенной с.в., заданной функцией-плотностью (6).

Решение. Математическое ожидание будем отыскивать по общей формуле (лек. 10, (1)), используя определение несобственного интеграла:

$$M = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

Для вычисления определенного интеграла применим формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$:

$$\int_0^b \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x; & dv = \lambda e^{-\lambda x} dx \\ du = dx; & v = \int \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \end{array} \right] = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{b}{e^{\lambda b}} + 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^b e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^b = \\
&= -\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda b} - e^0) = -\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} + \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Продолжим отыскание M , которое принимает вид:

$$M = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{b}{e^{\lambda b}} - \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} + \frac{1}{\lambda} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{b}{e^{\lambda b}} \right) - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} + \frac{1}{\lambda}.$$

Для нахождения первого предела применим правило Лопиталья, поскольку имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$; второй предел равен нулю, ибо знаменатель неограниченно растет. Получаем:

$$M = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b'}{(e^{\lambda b})'} - 0 + \frac{1}{\lambda} = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} + \frac{1}{\lambda} = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

В итоге приходим к очень простой формуле

$$M = \frac{1}{\lambda}. \quad (7)$$

Математическое ожидание показательной распределенной с.в. есть число, обратное ее параметру λ .

В двух примерах предыдущей задачи математические ожидания равнялись, соответственно, $1/3$ и 3 (рис. 15 и 16). Чем круче “горка”, тем ближе к нулю M , чем более она пологая, тем дальше от нуля M .

Дисперсию будем отыскивать по второй общей формуле (лек. 10, (5)), учитывая найденное выше значение M :

$$D = \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx - M^2 = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\int_0^b \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \right] - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Для вычисления определенного интеграла придется дважды интегрировать по частям (проделайте это сами). В результате получим:

$$\int_0^b \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \dots = -\frac{b^2}{e^{\lambda b}} - \frac{2b}{\lambda e^{\lambda b}} - \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{e^{\lambda b}} - 1 \right).$$

Пределы находятся без труда:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{(b^2)'}{(e^{\lambda b})'} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(2b)'}{(\lambda e^{\lambda b})'} \right] - \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\lambda b}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{(2b)'}{(\lambda e^{\lambda b})'} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda b}} - \frac{2}{\lambda^2} \cdot (0 - 1) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Возвращаясь к дисперсии, окончательно получаем:

$$D = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (8)$$

В примерах задачи 1 дисперсии равны, соответственно, $1/9$ и 9 . Чем круче “горка”, тем меньше дисперсия, меньше разбросанность значений с.в.; чем более пологая “горка”, тем больше дисперсия, больше разброс значений с.в.

Среднее квадратическое отклонение есть корень из дисперсии, значит,

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (9)$$

Замечательное свойство показательных распределений: у всех с.в., распределенных по показательному закону, математическое ожидание совпадает со средним квадратическим отклонением.

Это свойство используется на практике для решения часто возникающего вопроса: распределяются ли полученные в серии опытов значения некоторой с.в. по показательному закону, или нет? Если оценки M^* и σ^* , вычисленные по имеющемуся статистическому материалу, близки, это веский довод в пользу показательного распределения. Пример будет чуть ниже.

Мода любой показательной с.в., очевидно, равна нулю.

Скошенность положительна, ибо вершина графика функции-плотности (6) всегда сдвинута в крайнюю левую точку промежутка $[0; +\infty)$. Вычислим третий центральный момент, используя несколько раз формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\left(-\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{3}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda^3} + 3 \left[-\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda} \left[-\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda} \left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{2}{\lambda^3}. \end{aligned}$$

Тогда скошенность равна

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2}{\lambda^3} \cdot \lambda^3 = 2 \quad (10)$$

Интересно: у **всех** показательных с.в. скошенность одинакова и равна 2.

Медиану и эксцесс вычислять не будем из-за длинного процесса интегрирования. Ясно, что $\varepsilon_x > 0$, ведь вершина графика функции (6) всегда острая.

Задача 3. Какова вероятность попадания значений показательной с.в. X в заданный промежуток $(\alpha; \beta) \subset [0; +\infty)$?

Решение.

$$\begin{aligned} P(X \in (\alpha; \beta)) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -(e^{-\lambda \beta} - e^{-\lambda \alpha}) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}. \end{aligned}$$

Решает задачу формула

$$P(X \in (\alpha; \beta)) = \frac{1}{e^{\lambda \alpha}} - \frac{1}{e^{\lambda \beta}}. \quad (11)$$

В частности, если $\beta = \infty$ или $\alpha = 0$, получаем формулы

$$P(X > \alpha) = \frac{1}{e^{\lambda \alpha}}, \quad (11')$$

$$P(X < \beta) = 1 - \frac{1}{e^{\lambda \beta}}. \quad (11'')$$

Контроль 4. С.в. X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 2$. Запишите выражение функции-плотности $f(x)$ и нарисуйте эскиз ее графика. Постройте график преобразованием экспоненты. Вычислите M , D и σ . Найдите вероятности попадания с.в. X в интервалы $(1; 2)$, $(1; \infty)$, $(0; 2)$. Сделайте статистические прогнозы.

5. Приложение результатов исследования

Раньше у нас уже возникал вопрос: как отыскивать параметр λ показательно распределенной с.в.? Сейчас, после проведенного исследования этой с.в., мы можем дать простой ответ.

Статистический смысл параметра λ . Как его отыскивать? Запишем формулу (7) так: $\lambda = \frac{1}{M}$. Математическое ожидание M можно найти приближенно, если провести серию из большого числа k опытов над с.в., зафиксировать появившиеся значения $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$ и вычислить их среднее арифметическое:

$$M \approx M^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k x^{(i)}.$$

Следовательно, приближенное значение λ дается формулой

$$\lambda \approx \frac{1}{M^*} = \frac{k}{\sum_{i=1}^k x^{(i)}}. \quad (12)$$

Вывод 1. Параметр λ показательной с.в. X — это число, обратное ее математическому ожиданию M . Он может быть приближенно найден из серии опытов над с.в. X делением единицы на среднее арифметическое значений, появившихся в этой серии опытов.

Если с.в. X порождается простейшим потоком событий, то число, обратное среднему значению с.в., дает среднее число событий потока в единицу времени — *интенсивность потока*. Например, если после эксперимента над с.в. T_Φ (промежуток времени между произвольными двумя соседними вызовами на АТС) среднее значение получилось $M^* = 5$ сек., или, что то же. $M^* = 1/12$ мин., это значит, что на единичном промежутке времени в одну минуту укладывается 12 пятисекундных интервалов, т.е. среднее число событий потока в минуту равно $\lambda = 12$, интенсивность потока равна 12.

Вывод 2. Если показательная с.в. X порождается Пуассоновским потоком событий, то ее параметр λ равен среднему числу событий потока в единицу времени. Эта величина называется *интенсивностью потока*.

После того, как установлено значение параметра λ показательной с.в. X , можно легко решать практические задачи. Вычислим, к примеру, вероятность того, что интервал времени между соседними вызовами на АТС окажется а) меньше 5 сек.; б) от 5 до 10 сек.; в) больше 10 сек.; г) больше 1 мин.

Применяем формулы (11''), (11), (11') и получаем:

$$\begin{aligned} P\left(X < \frac{1}{12}\right) &= 1 - \frac{1}{e^{12 \cdot \frac{1}{12}}} = 1 - e^{-1} \approx 1 - 0,368 = 0,632; \\ P\left(X \in \left(\frac{1}{12}; \frac{2}{12}\right)\right) &= e^{-1} - e^{-2} \approx 0,368 - 0,135 = 0,233; \\ P\left(X > \frac{2}{12}\right) &= e^{-2} \approx 0,135; \\ P(X > 1) &= e^{-12} = (e^{-6})^2 \approx 0,0025^2 \approx 0,00005. \end{aligned}$$

Прогнозы. Если произвольно выбирать два соседних вызова на АТС, то примерно в шести случаях их десяти промежутков времени между ними окажется меньше пяти секунд, в двух — от пяти до десяти секунд, в одном — более десяти секунд и практически никогда не превысит одной минуты.

Пример 5. Рассмотрим с.в. T_L — время работы радиолампы до выхода ее из строя. Ясно, что для разных ламп это время разное — от очень малого (лампа может выйти из строя сразу после включения) до очень большого (несколько тысяч часов).

Если проверить много ламп, замеряя время работы каждой, получим статистический материал — значения $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(k)}$ будут как-то распределяться на промежутке $[0; t_{\max}]$, где t_{\max} — максимальное время работы проверенных ламп, например, $t_{\max} = 1000$ часов. Заметить здесь закономерность (где гуще, где реже) трудно. Может показаться, что значения распределяются равномерно, и тогда за функцию-плотность вы примете $f(x) = 1/1000, x \in [0; 1000]$. Но это будет грубая, кустарная прикидка.

Применим более точный метод, который возник в этом разделе. Посчитаем статистическое среднее и статистическое квадратическое отклонение (лек. 6, (6), (8), (9')):

$$M^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k t^{(i)}; \quad \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^k (t^{(i)} - M^*)^2}.$$

И тогда мы увидим, что $M^* \approx \sigma^*$. Т. е. выполняется статистический признак показательного распределения, установленный в предыдущем разделе. Следовательно, распределение T_L правильнее считать показательным.

Определим функцию-плотность: рассчитаем, чему равен параметр λ в формуле (6). Допустим, что среднее время работы ламп получилось $M^* \approx 400$ часов. Тогда, согласно формуле (12), $\lambda = 1/400$ и плотность распределения с.в. T_L имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{400} \cdot e^{-\frac{x}{400}}.$$

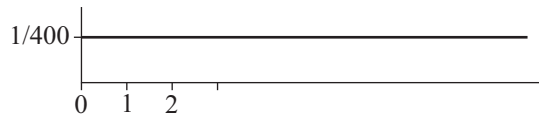


Рис. 17

График этой функции почти параллелен оси OX и визуально не отличим от прямой линии (рис. 17). Именно поэтому мы и могли ошибиться, приняв распределение за равномерное. Лишь очень далеко от начала координат график заметно опустится — в точке $x = 400$ значение функции $f(400)$ станет примерно в три раза меньше начального $f(0) = 1/400$. Действительно,

$$f(400) = \frac{1}{400} \cdot e^{-1} \approx \frac{1}{400} \cdot 0,37 \approx \frac{1}{3} \cdot f(0).$$

Вогнутость графика тоже совсем не заметна. Ее можно обнаружить с помощью тонкого математического метода — вспомните признак вогнутости из дифференциального исчисления: $f''(x) > 0$. В нашем случае

$$f''(x) = \frac{1}{400^3} \cdot e^{-\frac{x}{400}} > 0, \quad \forall x \in [0; +\infty).$$

Имея функцию-плотность, давайте решим какую-нибудь практическую задачу. Определим, к примеру, какая часть ламп проработает больше 600 часов. Используем формулу (11'):

$$P(T_L > 600) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-1,5} \approx 0,2231.$$

Прогноз. Из каждых 100 ламп примерно 22 лампы проработают более 600 часов, остальные 88 ламп — менее.

Заметьте: практически ценный вывод получен теоретически. И замечательно, что практика подтверждает подобные прогнозы. Подчеркнем также: чтобы делать достоверные прогнозы, надо хорошо понимать теорию. Если бы мы моделировали с.в. T_L равномерной плотностью $f(x) = 1/1000$, $x \in [0; 1000]$, то применяя формулу (5), получили бы $P(T_L \in [600; 1000]) = 400/600 = 0,4$. Результат в два раза больше предыдущего. Существенная ошибка в прогнозе.

Контроль 5. Представьте следующий опыт. В момент открытия некоей сберегательной кассы вы начинаете фиксировать время подхода клиентов и делаете это в течение какого-то промежутка времени, к примеру, от 8 до 11 часов утра. (Клиенты, прибывшие до открытия не учитываются). Затем выбирается случайным образом какой-то клиент и определяется промежуток времени от его прихода до прихода следующего за ним клиента. Как проверить гипотезу о показательном распределении данной с.в.? Задайте сами правдоподобную интенсивность потока клиентов, определите функцию-плотность и рассчитайте вероятность того, что этот промежуток не будет больше 5 минут?

6. Нормальные с.в. Подбор предельной функции

Мы подошли к самому важному классу случайных величин — нормально распределенных. Их роль определяется двумя обстоятельствами: они широко распространены в природе и результаты их исследования позволяют решать многие задачи математической статистики, что вы увидите в следующей лекции.

Что же **характерно** для нормальных с.в.? Какова особенность распределения на $(a; b)$ их значений, появляющихся в большой серии опытов? Если у равномерных с.в. значения появлялись одинаково часто на всех равных участках интервала $(a; b)$, у показательных — гуще в начале интервала, то значения нормальных с.в. появляются чаще в средней части $(a; b)$ и значительно реже — по краям. Существенна также симметрия распределения частот (не абсолютная, конечно).

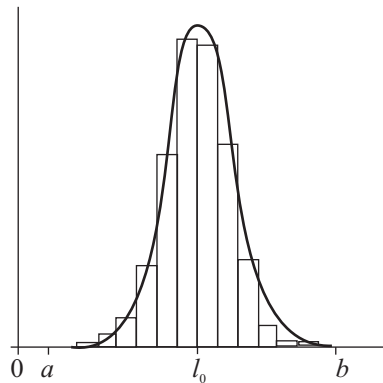


Рис. 18

Примеры. Вспомним с.в. L — размер детали, производимой автоматическим станком. Размеры конкретных деталей колеблются около планового размера l_0 , на который настроен станок. Понятно, что чаще должны появляться детали, размер l которых близок к l_0 , далекие — значительно реже. Гистограмма и предельная

функция-плотность $f(x)$ должны иметь вид, изображенный на рис. 18. В силу того, что по краям промежутка $(a; b)$ значения l появляются **значительно** реже, нежели в его средней части, высоты крайних столбиков гистограммы очень малы и функция $f(x)$ вогнута по краям.

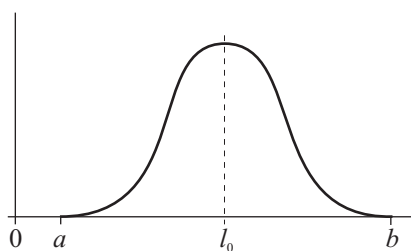


Рис. 19

Представьте теперь два станка, которые производят однотипную деталь, причем, один хорошо отрегулирован, другой плохо. Понятно, что второй станок будет чаще выдавать брак, — у него больше разброс значений, больше дисперсия. График функции-плотности для него будет “ниже” и “шире”, чем для первого (рис. 19), но общий характер распределения сохранится.

Такой же характер распределения имеет рост (вес) людей — он колеблется около некоторого среднего значения, большие отклонения редки. Ошибки различных измерений группируются около истинного значения измеряемой величины, большие ошибки редки. Многие другие процессы в природе и технике приводят к подобному распределению, — потому оно и названо *нормальным*.

Плотность распределения вероятностей всех подобных с.в. хорошо моделируется, как доказывает практика, функциями вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (13)$$

Абстрактное определение класса этих с.в. таково:

Определение 3. Случайная величина X называется *нормальной*, или нормально распределенной, если ее функция-плотность $f(x)$ может быть задана *формулой Гаусса* (13), где $a \in (-\infty; +\infty)$ и $\sigma > 0$.

Формула (13) появилась неожиданно. Может быть, вы думаете: почему она имеет такой сложный вид? Как и прежде, в случае показательных с.в. (лек. 9, п. 5), я проведу рассуждение, которое довольно естественно приведет к этой формуле и сделает понятной ее структуру.

Подбор предельной функции. Мы поняли, что график функции-плотности $f(x)$ нормальной с.в. имеет вид колоколообразной кривой: он симметричен и дважды перегибается, а по краям вогнут (рис. 19).

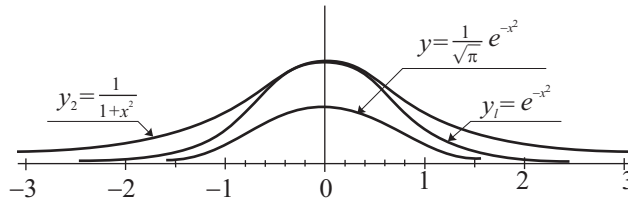


Рис. 20

Спросим себя: какие из несложных элементарных функций имеют отмеченные особенности графика? На рис. 20 показаны две такие функции: $y_1 = e^{-x^2}$ и $y_2 = \frac{1}{1+x^2}$. Обе они четные (графики симметричны), а исследование по второй производной (проведите его сами) дает две точки перегиба и вогнутость по краям.

Какая из этих функций лучше моделирует характер распределения вероятностей нормальных с.в.? Опыт (практические эксперименты) доказывает, что первая: у второй крайние значения убывают не достаточно быстро.¹

Итак, выбираем функцию $y_1 = e^{-x^2}$. Она может быть плотностью распределения, если площадь ее подграфика равна единице (лек. 9, п. 6, (6)). Площадь эта — известный интеграл Пуассона, значение которого тоже известно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Значит, плотностью может быть функция

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}.$$

График этой функции получается из графика функции $y_1 = e^{-x^2}$ умножением всех ее ординат на $1/\sqrt{\pi} \approx 0,56$, т. е. уменьшением всех ординат примерно в 2 раза (рис. 20).

Теперь надо сделать из функции f_1 класс подобных функций, графики которых “уже” и “выше” (или “шире” и “ниже”), чем график функции f_1 . Такое преобразование мы уже выполняли (лек. 9, п. 5): надо вместо x поставить λx и умножить функцию на λ , получатся функции вида $\lambda \cdot f_1(\lambda x)$. В нашем случае:

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\lambda x)^2}$$

Механизм действия проделанного преобразования при $\lambda = 2$ показан на рис. 21: каждая точка M графика функции $f_1(x)$ приближается к оси OX в два раза ближе, а затем поднимается над осью OX в два раза выше. График функции

$$f_2(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(2x)^2}$$

¹Однако есть процессы, которые лучше моделируются функцией, подобной второй, — точнее, функцией $y = 1/(\pi \cdot (1+x^2))$ (так называемое *распределение Коши*).

становится “уже” и “выше”, чем график функции $f_1(x)$. При $\lambda = 1/2$ происходит обратное — “расширение” и “опускание” графика функции $f_1(x)$.

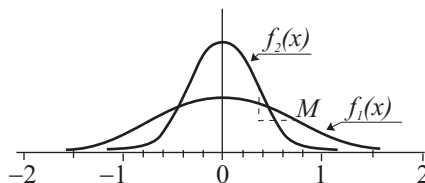


Рис. 21

Проверим, не изменилась ли после преобразования площадь подграфика. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda}(x) dx = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} d(\lambda x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Не изменилась.

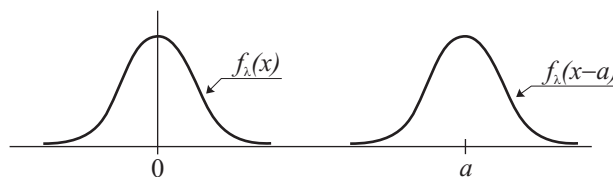


Рис. 22

Расширим класс функций $f_{\lambda}(x)$, заменяя x на $(x-a)$. График функции $f_{\lambda}(x)$ сдвинется при этом вдоль оси OX на величину a (если $a > 0$, — сдвиг вправо, если $a < 0$, — влево). Площадь подграфика, очевидно, не изменится. В итоге получим широкий класс функций, зависящих от двух параметров λ и a , графики которых имеют необходимый “колоколообразный” вид:

$$f_{\lambda,a}(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-[\lambda(x-a)]^2}.$$

Остается заметить, что параметр λ удобно брать в виде $\lambda = 1/(\sigma\sqrt{2})$, тогда σ окажется средним квадратическим отклонением нормально распределенной с.в. X — это вы увидите чуть позже. Другой параметр a оказывается математическим ожиданием этой с.в. — и это выведем позже.

Вот так и приходим к формуле (13).

Замечание. Надо понимать, что мы не вывели, не “доказали” формулу (13). Мы лишь провели некое рассуждение, которое помогло нам представить возможный путь возникновения этой формулы. “Открыл” ее великий немецкий математик Карл Гаусс (1777-1855), исследуя случайные величины, получающиеся в результате различных измерений. Поэтому нормальные с.в. часто называют *Гауссовскими*, формулу (13) — *формулой Гаусса*, а график функции (13) — *колоколом Гаусса*.

Функция Гаусса. Функцию (13) при $a = 0$ и $\sigma = 1$ называют *функцией Гаусса* и обозначают $\varphi(x)$. Она задает так называемое *стандартное* нормальное распределение:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}. \quad (\Gamma)$$

Функция эта получается из класса функций $f_\lambda(x)$ при $\lambda = 1/\sqrt{2}$. Ее график получается небольшим “расширением” и “опусканием” (коэффициент $\lambda \approx 0,7$) графика функции $f_1(x)$. Значения этой неэлементарной функции затабулированы (см. таблицу приложения 1). Вы встречались с ней в лекции 4, п. 4 — она помогала решать задачу Бернулли при большом количестве опытов (вскоре вы сможете понять, почему). Там же я подробно рассказал о свойствах этой функции и об особенностях таблицы ее значений.

Контроль 6. Обладает ли распределение, задаваемое функцией $y = 0,5 \sin x$, $x \in [0; \pi]$ характерными особенностями нормального? Почему? Задает ли нормальное распределение функция $y = 0,25 \cdot e^{-(0,25x)^2}$? Почему? Как нужно исправить эту функцию, чтобы она стала плотностью распределения некоторой нормальной с.в.? Определите параметры исправленной плотности и нарисуйте эскиз графика.

7. Исследование нормального распределения

Задача 1. Какова динамика изменения “колокола Гаусса” (графика функции (13)) в зависимости от изменения параметров σ и a ?

Решение. Зафиксируем в (13) $a = 0$, — функция-плотность примет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}x\right)^2}. \quad (14)$$

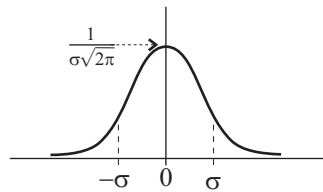


Рис. 23

Соответствующий “колокол” расположится над началом координат (рис. 23), его “высота” —

$$f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Второй параметр σ станем уменьшать, устремляя его к нулю, при этом множитель $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ будет увеличиваться и стремиться к бесконечности. Высота “колокола” будет расти (рис. 24), и сам он будет сужаться, ибо растет множитель $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, входящий в показатель функции (14).

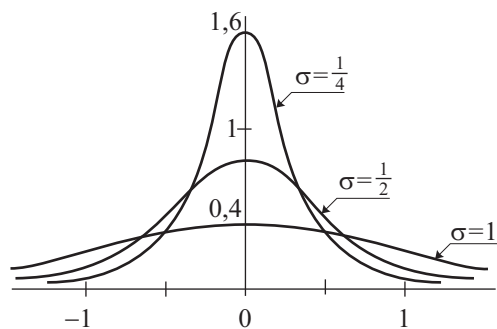


Рис. 24

Если увеличивать $\sigma \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \rightarrow 0$ и “колокол” теряет высоту, одновременно раздаваясь в ширину.

Теперь зафиксируем второй параметр σ и станем изменять a . Если $a > 0$ и $a \rightarrow +\infty$, то “колокол” будет сдвигаться вправо вдоль оси OX , не меняя формы. Это преобразование показано на рис. 22. Если $a < 0$, “колокол” сдвигается влево.

Замечания “про сигму”. Установленная выше динамика изменения “колокола” согласуется со смыслом σ — среднего квадратического отклонения. Как вы помните, величина σ определяет степень разбросанности значений с.в. X , появляющихся в серии опытов. Если σ мало, разброс мал, “колокол” узкий и высокий. Кроме этого, σ указывает расположение точек перегиба “колокола” — это точки с абсциссами $\pm\sigma$ (рис. 23). В этом нетрудно убедиться с помощью второй производной (проделайте исследование на перегиб сами).

Задача 2. Вычислить числовые характеристики нормальной с.в. X_N , заданной функцией-плотностью (13).

Решение. а) Математическое ожидание нормальной с.в. должно совпадать с точкой максимума функции-плотности, в силу симметрии ее графика, т. е.

$$M(X_N) = a. \quad (15)$$

Этот факт можно установить строго, применяя к X_N общую формулу, определяющую математическое ожидание произвольной непрерывной с.в. X (лек. 10, (1)):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Для нормальной с.в. X_N формула принимает вид:

$$M(X_N) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Интеграл кажется очень сложным, однако, подстановкой $\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} = t$ [$x = \sigma\sqrt{2}t + a$; $dx = \sigma\sqrt{2}dt$] он сводится к двум более простым (подробные выкладки проведите сами):

$$M(X_N) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Второй интеграл есть интеграл Пуассона, равный $\sqrt{\pi}$, а первый оказывается нулем, как всякий интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. Окончательно получаем:

$$M(X_N) = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\pi} \cdot 0 + \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = a.$$

б) Дисперсия. Общая формула дисперсии (лек. 10, (4)):

$$D(X) = \int_a^b (x - M)^2 f(x) dx.$$

Для нормальной с.в. дисперсия принимает вид:

$$D(X_N) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Та же подстановка упрощает интеграл (выкладки проведите сами):

$$D(X_N) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt.$$

Применяя далее формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ и полагая $u = t$; $dv = 2te^{-t^2}$, получаем:

$$D(X_N) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right].$$

Второе слагаемое равно $\sqrt{\pi}$. Вычислим первое:

$$\begin{aligned} -te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[te^{-t^2} \Big|_{-b}^b \right] = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[be^{-b^2} + be^{-b^2} \right] = \\ &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2b}{e^{b^2}} = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(2b)'}{(e^{b^2})'} = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{2}{2be^{b^2}} = 0. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$D(X_N) = \sigma^2. \quad (16)$$

в) Среднее квадратическое отклонение — это корень из дисперсии:

$$\sigma(X_N) = \sigma. \quad (17)$$

г) Центральные моменты (лек. 10, п. 6, (8)) нормальной с.в. X_N определяются интегралом

$$\mu_s(X_N) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^s e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

который той же подстановкой $x = \sigma\sqrt{2}t + a$ сводится к более простому интегралу:

$$\mu_s(X_N) = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t^s e^{-t^2} dt. \quad (18)$$

Если s - нечетно, то подынтегральная функция $t^s e^{-t^2}$ тоже нечетная и, значит, интеграл от нее равен нулю. Получается, что любой центральный момент нечетного порядка нормальной с.в. X_N равен нулю:

$$\mu_s(X_N) = 0, \quad s = 1, 3, 5, \dots \quad (19)$$

Если s — четное, то, интегрируя по частям, придем к формуле:

$$\mu_s(X_N) = \frac{(s-1)(\sigma\sqrt{2})^s}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt.$$

Вернемся к формуле (18) и поставим в ней $(s-2)$ вместо s , получим:

$$\mu_{s-2}(X_N) = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt.$$

Сравнивая правые части последних двух формул, видим, что они отличаются только множителем $(s-1)\sigma^2$. Следовательно, получается рекуррентное соотношение

$$\mu_s(X_N) = (s-1)\sigma^2\mu_{s-2}, \quad s = 0, 2, 4, \dots$$

Чтобы его использовать, вычислим сначала μ_0 :

$$\mu_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^0 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma\sqrt{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

Подставим $s = 2$ и $\mu_0 = 1$ в рекуррентное соотношение, получим: $\mu_2 = (2 - 1)\sigma^2\mu_0 = \sigma^2$. Итак, 2-й центральный момент (дисперсия) определяется формулой, которую мы уже знаем:

$$\mu_2(X_N) = \sigma^2. \quad (20)$$

Подставляем в рекуррентное соотношение $s = 4$ и $\mu_2 = \sigma^2$, получаем 4-й центральный момент:

$$\mu_4(X_N) = 3\sigma^4. \quad (21)$$

Аналогично находим 6-й и последующие четные моменты.

$$\mu_6(X_N) = 15\sigma^6. \quad (22)$$

д) Экссесс (степень островершинности) находится через 4-й центральный момент по общей формуле (лек. 10, п. 6, (10)):

$$\varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Экссесс нормального распределения получается нулевым:

$$\varepsilon_x(X_N) = 0. \quad (23)$$

е) Асимметрия (степень скошенности) находится через третий центральный момент (он равен нулю) по общей формуле (лек. 10, п. 6, (9)):

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Асимметрия нормального распределения получается нулевой:

$$Sk(X_N) = 0. \quad (24)$$

Задача 3. Пусть с некоторым опытом связана с.в. , распределенная по нормальному закону (13) с параметрами a и σ . Найти вероятность события, состоящего в том, что после проведения опыта с.в. примет значение x , не выходящее за пределы заданного промежутка $[\alpha; \beta]$.

Решение. Любую подобную задачу решает общая формула (лек. 9, п. 7, (7)):

$$P(X \in [\alpha; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

В применении к нормальной с.в., для которой плотность распределения задается функцией (13), общая формула принимает вид:

$$P(X_N \in [\alpha; \beta]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Сделаем в интеграле обычную подстановку, чуть ее изменив: $\frac{x-a}{\sigma} = t$. Отсюда $x = \sigma t + a$; $dx = \sigma dt$. Пересчитаем пределы интегрирования: если $x = \alpha$, то $t = \frac{\alpha-a}{\sigma}$; если $x = \beta$, то $t = \frac{\beta-a}{\sigma}$. С новой переменной t наш интеграл принимает вид:

$$P(X_N \in [\alpha; \beta]) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу Ньютона-Лейбница. Учтем, что первообразной для подынтегральной функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$ является интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Но это ведь известная нам функция Лапласа (лек. 4, п. 8. (I)), с помощью которой мы решали вторую задачу Бернулли. Эта функция и помогает получить удобную для вычислений формулу:

$$P(X_N \in [\alpha; \beta]) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (25)$$

Формула (25) часто применяется к промежуткам, симметричным относительно математического ожидания a . Для таких случаев ей следует придать более простой и удобный вид.

Задача 3'. Вычислить вероятность попадания нормально распределенной с.в. X в симметричный промежуток $[a-l; a+l]$.

Решение. Формула (25) для нашего промежутка принимает вид:

$$P(X_N \in [a-l; a+l]) = \Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{l}{\sigma}\right).$$

Упростим ее, используя свойство нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$:

$$P(X_N \in [a-l; a+l]) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right). \quad (25')$$

Пример. Цех завода изготавливает шарики для подшипников, заданный размер которых 10 мм, а фактический размер случаен и распределен по нормальному закону с параметрами $a = 10$ (мм), $\sigma = 0,41$ (мм). При контроле бракуются все

шарики, не проходящие в круглое отверстие диаметра $d_1 = 10,7$ мм, а также шарики, проходящие через отверстие диаметра $d_2 = 9,3$ мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

Решение. Имеем нормальную с.в. L_d — диаметр шарика. Опыт, с которым связана наша с.в., можно трактовать так: из партии шариков, выпущенных за смену, выбирается наудачу один шарик и измеряется его диаметр d .

Нас интересует событие $A = (L_d \notin [9,3; 10,7])$. Оно дополнительное к событию $\bar{A} = (L_d \in [9,3; 10,7])$, значит, $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Событие \bar{A} состоит в том, что с.в. L_d принимает значение из симметричного промежутка $[10 - 0,7; 10 + 0,7]$, и для вычисления его вероятности можно использовать формулу (25') при $a = 10$ и $l = 0,7$:

$$P(\bar{A}) = P(L_d \in [10 - 0,7; 10 + 0,7]) = 2\Phi\left(\frac{0,70}{0,41}\right) \approx 2\Phi(1,71).$$

Значение функции Лапласа найдем по таблице приложения 3: $\Phi(1,71) \approx 0,46$. Вероятность брака (событие A) в итоге считается так:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - 2\Phi(1,71) \approx 1 - 2 \cdot 0,46 = 1 - 0,92 = 0,08.$$

Ответ: браковаться будут около 8% шариков.

Контроль 7. Нарисуйте эскиз графика функции-плотности стандартной нормально распределенной с.в. X_{cm} . Как изменится график плотности нормальной с.в. X с параметрами $a = 5$, $\sigma = 2$? Почему? Нарисуйте эскиз. Покажите абсциссы точек перегиба. Чему равна дисперсия той и другой с.в.? Как она влияет на “колокол Гаусса”? Как вы считаете, какая из вероятностей больше — $P(X_{cn} \in [a - \sigma; a + \sigma])$ или $P(X \in [a - \sigma; a + \sigma])$? Почему? Рассчитайте эти вероятности точно.

8. Правило “трех сигм”. Оценка ошибки

В предыдущей лекции (лек. 10, п. 3) было высказано предположение, что с помощью среднего квадратического отклонения σ можно оценивать промежуток всех возможных значений различных с.в. так:

$$(a; b) \approx (M - 3\sigma; M + 3\sigma). \quad (26)$$

Там же мы убедились в справедливости этого предположения для некоторых конкретных примеров. Было сказано также, что оценку ошибки проведем в следующей, т. е. в данной лекции. Выполняя обещание. Инструмент, с помощью которого это можно сделать, создан — формулы (11) и (25).

Оценку ошибки будем проводить отдельно для каждого класса распределений. Для равномерных с.в., как было показано в п. 2, соотношение (26) выполняется с избытком, а именно, справедливо более сильное включение:

$$(a; b) \subset (M - 2\sigma; M + 2\sigma).$$

Проведем оценку для показательных распределений. Поставим задачу:

Задача 3'. Найти вероятность события, состоящего в том, что в опыте над показательной с.в. X_{II} , параметр которой λ , значение с.в. выйдет за пределы трехсигмового интервала $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$.

Решение. Выше (п. 4, (7), (9)) было установлено для показательных с.в., что $M = \sigma$, следовательно, наш трехсигмовый интервал принимает вид:

$$(M - 3\sigma; M + 3\sigma) = (-2\sigma; 4\sigma).$$

Поскольку показательная с.в. X_{II} принимает только положительные значения, то их выход за пределы трехсигмового интервала означает выход за пределы правого края, т. е. появление события $(X > 4\sigma)$. Рассчитаем вероятность этого события по формуле (11'), учтя, что $\sigma = 1/\lambda$ ((9)):

$$P(X > 4\sigma) = \frac{1}{e^{\lambda \cdot 4\sigma}} = \frac{1}{e^{\lambda \cdot 4 \cdot \frac{1}{\lambda}}} = e^{-4} \approx 0,0183.$$

Итак,

$$P(X \notin (M - 3\sigma; M + 3\sigma)) = P(X > 4\sigma) = 0,0183. \quad (27)$$

Прогноз. Вероятность оказалась не пренебрежимо малой. Примерно в двух опытах из ста значения показательной с.в. X_{II} будут выходить за пределы трехсигмового интервала.

Задача 3''. Найти вероятность события, состоящего в том, что в опыте над нормально распределенной с.в. X_N , параметры которой a и σ , значения с.в. X_N выйдут за пределы трехсигмового интервала $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$.

Решение. Нас интересует событие $A = (X \notin (M - 3\sigma; M + 3\sigma))$. Дополнительным к нему событием будет событие $\bar{A} = (X \in (M - 3\sigma; M + 3\sigma))$.

Найдем вероятность дополнительного события \bar{A} . Применим формулу (25') и используем таблицу значений функции Лапласа (приложение 3):

$$P(\bar{A}) = P(X \in (M - 3\sigma; M + 3\sigma)) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi(3) \approx 2 \cdot 0.49865 = 0,9973.$$

Искомую вероятность найдем с помощью формулы $P(A) = 1 - P(\bar{A})$:

$$P(X \notin (M - 3\sigma; M + 3\sigma)) \approx 1 - 0,9973 = 0.0027. \quad (28)$$

Прогноз. Вероятность практически нулевая. Из тысячи опытов над нормальной с.в. X_N примерно в трех значения с.в. может выйти за пределы трехсигмового интервала.

Итак, установлено, что соотношение (26) выполняется с очень большой вероятностью для двух основных классов с.в. Практика показывает, что так же хорошо

оно выполняется и для многих других распределений. На этом основании выведено правило, которым широко пользуются статистики.

Правило “трех сигм”. Если в результате статистического исследования некоторой случайной величины X установлено ее математическое ожидание M и среднее квадратическое отклонение σ (или их оценки M^* и σ^*), то можно с большой уверенностью считать, что при выполнении опыта над с.в. X ее значения не выйдут за пределы трехсигмового интервала $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$ (или интервала $(M^* - 3\sigma^*; M^* + 3\sigma^*)$).

Оценка ошибки правила “трех сигм”. Для равномерных с.в. правило справедливо со стопроцентной надежностью, т.е. всегда. Для показательных — с надежностью $p = 0,98$, т.е. ошибка составляет 2%. Ошибка мала, но не пренебрежимо мала. Показательные распределения — одни из наименее благоприятных для применения правила “трех сигм”. Для нормальных с.в. надежность $p = 0,997$, ошибка — 0,3%, на порядок меньше, чем для показательных. Столь же мала эта ошибка и для многих других распределений, возникающих в практической работе инженера.

Полезно знать, что применение этого правила никогда не даст ошибку, больше 11%, ибо в теории вероятностей строго доказано, что для **любой** с.в. X справедливо неравенство

$$P(X \notin (M - 3\sigma; M + 3\sigma)) < 1/9.$$

Доказательство можно найти в книге [3, с. 401], оно основано на использовании так называемого “неравенства Чебышева”², которого мы не касаемся.

В заключение сформулирую еще два простых и широко используемых правила статистики, связанных с правилом “трех сигм”.

Быстрая оценка σ . Чтобы по результатам серии опытов над с.в. X быстро оценить среднее квадратическое отклонение σ , достаточно взять максимальное отклонение появившихся значений с.в. от математического ожидания M (или от его оценки M^*) и поделить его на три.

Признак ненормального распределения. Если в серии опытов значения с.в. часто выходят за пределы трехсигмового интервала $(M - 3\sigma; M + 3\sigma)$, то весьма вероятно, что данная с.в. распределена не по нормальному закону.

Контроль 8. Серия из нескольких десятков опытов над некоторой с.в. дала ряд значений, минимальное из которых 1, максимальное 7. Значения распределены примерно симметрично относительно середины промежутка $[1; 7]$ и значительно гуще около его середины. Оцените M и σ . Запишите предполагаемый вид функции-

²Чебышев Пафнутий Львович (1821-1894) — знаменитый русский математик. Для его творчества характерно разнообразие областей исследований, умение находить элементарными средствами фундаментальные результаты, прикладная направленность. В теории вероятностей доказал в весьма общей форме закон больших чисел (лек. 10, п. 8), для чего и вывел неравенство, носящее его имя. “Неравенство Чебышева” используется во многих доказательствах теории вероятностей.

плотности. Рассчитайте вероятность того, что в опыте над исследуемой с.в. ее значение выйдет за пределы двухсигмового интервала $(M - 2\sigma; M + 2\sigma)$.

9. Упражнения

1. С.в. X распределена равномерно на промежутке $[0; 10]$. Чему равны ее числовые характеристики — M , D , σ , Sk , ε_x , мода, медиана? Проверьте, покрываются ли все значения с.в. X двухсигмовым интервалом $(M - 2\sigma; M + 2\sigma)$? Запишите функцию-плотность. Определите вероятность того, что в опыте над с.в. X появится значение, которое а) будет принадлежать интервалу $(8, 12)$; б) отклонится от M не более, чем на 2.

2. С.в. X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 0,1$. Запишите функцию-плотность $f(x)$ и проверьте выполнение двух ее общих свойств (лек. 9, п. 6). Нарисуйте эскиз ее графика. В какой точке значение функции-плотности равно 0,1? Чему равно $f(10)$? Чему равны M , D , σ , Sk ? Вычислите вероятность появления в опыте значений с.в. X , а) принадлежащих интервалу $(1; 4)$; б) меньших единицы; в) больших десяти. С какой вероятностью значения с.в. X попадают в односигмовый интервал? В какой интервал вида $(0; b)$ будут попадать значения с.в. X с вероятностью, большей, чем 0,9? При каком условии функция-плотность данной абстрактной с.в. X может моделировать распределение вероятностей конкретной с.в. T_Φ ?

3. С.в. X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 3$ и $\sigma = 1$. Запишите формулу функции-плотности данной с.в. и постройте эскиз ее графика. Каково максимальное значение этой функции? Какие точки x будут точками перегиба? За пределы какого интервала не должно выйти основание нарисованного вами “колокола”? Постройте график функции-плотности точнее, используя таблицу значений функции Лапласа. Оцените по графику вероятность появления в опыте значений с.в. X , принадлежащих промежутку $(3, 5)$. Рассчитайте эту вероятность более точно. Определите числовые характеристики данной с.в. — M , D , σ , Sk , ε_x , моду, медиану.

4. Известно, что с.в. X распределена равномерно, а также, что ее математическое ожидание равно 4 и дисперсия равна 3. Оцените промежуток ее возможных значений, а затем найдите его точно. Запишите формулу функции-плотности и постройте ее график. Оцените по графику вероятность появления в опыте значения с.в. из интервала $(4, 6)$, а затем найдите ее более точно.

5. Изучается с.в. X , связанная с неким потоком событий. Проведена большая серия опытов, зафиксированы появившиеся значения и вычислено их среднее арифметическое, которое оказалось равным 5. Оцените M , σ , μ_2 , μ_3 . Определите вероятность появления в опыте значений, а) меньших 2; б) больших 10; в) принадлежащих интервалу $(2; 10)$.

6. Докажите, что если с.в. X распределена по показательному закону, то вероятность $P(X < M)$ не зависит от величины параметра λ . Какая вероятность больше — $P(X < M)$ или $P(X > M)$? Обоснуйте ваше предположение геометрически, а затем проведите вычисления.

7. С.в. X распределена нормально с параметрами $a = 10$, $\sigma = 5$. Оцените интервал, симметричный относительно M , в который с надежностью $p = 0,9$ можно гарантировать попадание с.в. X в результате опыта. Найдите этот интервал более точно.

8. С.в. X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M = 10$. Вероятность того, что в результате опыта с.в. X примет значение из интервала $(10, 20)$, равна $0,3$. Какова вероятность попадания с.в. X в интервал а) $(0; 10)$; б) $(0; 5)$?

9. Автобусы некоторого маршрута идут в часы “пик” с интервалом 5 минут. Рассчитайте вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного автобуса а) менее одной минуты; б) более трех минут; в) от одной до трех минут. Какую с.в. вы введете для решения этой задачи? К какому классу с.в. она относится? Почему?

10. Цех завода изготавливает шарики для подшипников. Номинальный размер шариков $d_0 = 5$ мм, а фактический диаметр шарика — случайная величина D . Статистически определено среднее квадратическое отклонение этой с.в. — оно $d = 0,05$ мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального больше, чем на $0,1$ мм. Рассчитайте, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться. К какому типу с.в. относится D . Почему? Отв.: $4,6\%$.

11. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 1 мм. При визуальном измерении некоторой величины за приближенное ее значение берется ближайшее целое деление шкалы. Как часто будет появляться ошибка, а) меньшая $0,5$ мм; б) меньшая $0,2$ мм; в) большая $0,8$ мм? Какую с.в. вы введете для решения задачи? К какому типу с.в. она относится? Почему?

12. Однородная проволока длиной 1 м растягивается за концы и рвется. Расстояние от точки разрыва до левого конца проволоки есть, очевидно, случайная величина. К какому типу она относится? Почему? Определите вероятность того, что точка разрыва окажется в средней части проволоки на расстоянии не более 10 см от ее середины.

13. При работе электронной вычислительной машины время от времени возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать простейшим (Пуассоновским). Установлено, что среднее число сбоев за сутки равно $1,5$. Произошел сбой. Рассчитайте вероятность того, что после этого сбоя машина проработает без сбоев а) более суток; б) менее 8 часов; в) от двух до десяти часов.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

Алгебра*. Окончание

А. Н. Земляков

Завершаем печатать тезисы специального курса по алгебре, который читался учащимся ФМШ №18 (ныне СУНЦ) при МГУ в конце 70-х годов прошлого столетия.

VI. Трансцендентность числа e и иррациональность числа π .

Голь на выдумки хитра.

Русская поговорка

76. Основное свойство числа e состоит в том, что $(e^x)' = e^x$. За его доказательством мы отсылаем в школьный курс анализа. (Собственно, там число e и определяется этим соотношением, а потом доказывается, что

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Нетрудно показать, что этот предел совпадает с $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.)

77. Лемма из анализа. $\forall k \in \mathbb{R}$ при достаточно больших значениях x

$$x^k \cdot e^{-x} \leq \frac{M}{x^2}.$$

Доказательство. Для функции $\varphi(x) = x^{k+2} \cdot e^{-x}$

$$\varphi'(x) = (k+2)x^{k+1} \cdot e^{-x} - x^{k+2}e^{-x} = x^{k+1} \cdot e^{-x} \{(k+2) - x\} < 0,$$

если только $x > k+2$, поэтому при $x \geq k+2$ $\varphi(x) \leq M = \varphi(k+2) \Rightarrow x^k e^{-x} \leq \frac{M}{x^2}$.

78. Следствие. При $k \geq 0$ существует (несобственный) интеграл

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x^k e^{-x} dx$$

(функция $\Gamma(k)$, $k \geq 0$, называется гамма-функцией).

Доказательство. Функция $F(c) = \int_0^c x^k e^{-x} dx$ строго возрастает и ограничена:

$$\int_{k+2}^c x^k e^{-x} dx \leq \int_{k+2}^c \frac{M}{x^2} dx = \left[-\frac{M}{x}\right]_{k+2}^c = \frac{M}{k+2} - \frac{M}{c} \leq \frac{M}{k+2}.$$

79. Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Доказательство. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, поэтому

$$\int_a^b (f \cdot g)' dx = f \cdot g \Big|_a^b = \int_a^b f' \cdot g \cdot dx + \int_a^b f \cdot g' \cdot dx.$$

80. Рекуррентное соотношение для гамма-функции:

$$\forall k \geq 1 \quad \Gamma(k) = k \cdot \Gamma(k-1)$$

Доказательство. $e^{-x} = (-e^{-x})'$, поэтому, интегрируя по частям, получим:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \left[-x^k e^{-x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty kx^{k-1} \cdot e^{-x} dx = 0 + k \cdot \Gamma(k-1).$$

81. Следствие. $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \Gamma(k) = k!$

Доказательство. Из рекуррентной формулы следует, что $\Gamma(k) = k! \Gamma(0)$, причем

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^\infty = (-0) - (-1) = 1 = 0!.$$

82. Таким образом, гамма-функция — это обобщение функции $k!$ на все неотрицательные действительные числа.

Задача. Исследуйте функцию $\Gamma(k)$ и постройте ее график на отрезке $[0; 3]$.

83. Основная формула: если $f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$, то $\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^N a_k \cdot k!$, очевидным образом вытекает из следствия 81.

84. Наконец, рассмотрим интеграл Эрмита:

$$m = \int_0^\infty f(x) e^{-x} dx, \quad f(x) = \frac{x^{p-1} \{(x-1)(x-2) \dots (x-n)\}^p}{(p-1)!}, \quad p, n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. При простом $p > n$ число m целое и не делится на p .

Доказательство.

$$f(x) = \frac{(-1)^n n! x^{p-1} + Ax^p + Bx^{p+1} + \dots}{(p-1)!} \quad A, B, \dots \in \mathbb{Z},$$

поэтому из основной формулы (т.83)

$$m = \frac{(-1)^n n! (p-1)! + Ap! + B(p+1)! + \dots}{(p-1)!} = (-1)^n n! + pK, \quad K \in \mathbb{Z}.$$

85. Оказывается, что числа me^k , $k = 1, 2, \dots, n$, при достаточно больших p очень близки к целым — доказывается это опять с помощью интеграла Эрмита:

$$\begin{aligned} me^k &= e^k \int_0^\infty f(x) e^{-x} dx = \int_0^\infty f(x) e^{k-x} dx = \\ &= \int_0^k f(x) e^{k-x} dx + \int_k^\infty f(x) e^{k-x} dx = \varepsilon_k + m_k, \\ \text{где } m_k &= \int_k^\infty f(x) e^{k-x} dx = \int_0^\infty f(z+k) e^{-z} dz \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

86. Лемма 2. Все числа m_k делятся на p .

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(z+k) &= \frac{(z+k)^{p-1} \{(z+k-1) \dots (z+1) z (z-1) \dots (z+k-n)\}^p}{(p-1)!} = \\ &= \frac{Cz^p + Dz^{p+1} + \dots}{(p-1)!}, \quad (C, D, \dots \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

поэтому из основной формулы

$$m_k = \frac{Cp! + D(p+1)! + \dots}{(p-1)!} = p \cdot L_k.$$

87. Оценим теперь интегралы ε_k . На отрезке $[0; n]$, очевидно,

$$|f(x) e^{k-x}| \leq \frac{1}{(p-1)!} (n^{n+1})^p \cdot e^n = b \cdot \frac{a^{p-1}}{(p-1)!}, \quad a = n^{n+1}, \quad b = e^n n^{n+1},$$

откуда

$$|\varepsilon_k| \leq n \cdot b \cdot \frac{a^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Лемма 3. $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a^s}{s!} = 0$

Доказательство, например, вытекает из неравенства

$$\frac{a^{s+1}}{(s+1)!} \bigg/ \frac{a^s}{s!} = \frac{a}{s+1} < \frac{1}{2} \quad \text{при } s+1 > 2a.$$

88. Теорема Эрмита (1873 г.). Число e трансцендентно.

Доказательство проводится точно по схеме из т. 75: предположив противное, т. е. что

$$a_n e^n + \dots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

возьмем простое число $p > n$, $p > |a_0|$ и достаточно большое — так, чтобы выполнялось неравенство

$$|a_n| |\varepsilon_n| + \dots + |a_1| |\varepsilon_1| < 1, \quad (2)$$

где ε_k — соответствующие интегралы (т. 85, 87). Для соответствующих интегралов Эрмита имеем:

$$m e^k = m_k + \varepsilon_k \quad \Rightarrow \quad e^k = \frac{m_k + \varepsilon_k}{m}.$$

Подстановка последних выражений в уравнение (1) дает соотношение

$$(a_n m_n + \dots + a_1 m_1 + a_0 m) + (a_n \varepsilon_n + \dots + a_1 \varepsilon_1) = M + E = 0, \quad M \in \mathbb{Z}.$$

Так как $a_0 m$ не делится на p (Лемма 1 и выбор p), а $m_k \div p$ (Лемма 2), то $M \neq 0$. С другой стороны, $M = -E$, $|M| = |E| < 1$, согласно неравенству (2). Противоречие.

89. Эрмит не смог доказать трансцендентность числа π — это удалось лишь через 9 лет Линдеманду, который привлек некоторые дополнительные соображения, в частности, относящиеся к свойствам алгебраических чисел. Мы приведем это доказательство позже, предварительно глубже изучив поля и многочлены над полями.

Иррациональность числа π была установлена в 1761 г. Ламбертом, использовавшим аппарат цепных дробей (его работа называлась «Предварительное сообщение для ищущих квадратуру круга»). В 1947 г. Нивен предложил совсем простое рассуждение, аналогичное доказательству трансцендентности e ; его мы сейчас и приведем.

90. Заметим, что для многочлена $f(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ $f^{(k)}(0) = a_k k!$, поэтому формулу из т. 83 можно записать в виде

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x} dx = \sum_{k=0}^N f^{(k)}(0).$$

В аналогичном виде можно записать интеграл

$$m = \int_0^\infty f(x) \sin x \, dx$$

(отметим, что $\sin x$ и $\cos x$ — простейшие из функций, существенным образом

связанных с числом π). Именно, интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\pi} f(x) \sin x \, dx = -f(x) \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x) \cos x \, dx = \\ &= f(0) + f(\pi) + f'(x) \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(x) \sin x \, dx = \\ &= f(0) + f(\pi) - \int_0^{\pi} f''(x) \sin x \, dx = \dots \\ &\dots = \sum_{k=0}^{2k \leq N} (-1)^k \left(f^{(2k)}(0) + f^{(2k)}(\pi) \right). \end{aligned}$$

91. Допустим теперь, что $\pi = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n = \frac{q^n}{n!} x^n \left(\frac{p}{q} - x \right)^n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 4. $\forall k \quad f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \& \quad f^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z} \quad (k \leq 2n)$.

Доказательство. 1) $f^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} k! a_k \in \mathbb{Z}$ при $k \geq n$; $f^{(k)}(0) = 0$ при $k < n$.

2) $f(\pi - x) = f(x) \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x) \Rightarrow f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

92. Из Леммы 4 и формулы т.90 число m — целое, причем $m > 0$, ибо подынтегральная функция $f(x) \sin x$ положительна на отрезке $[0; \pi]$. С другой стороны,

$$\forall x \in [0; \pi] \quad f(x) \leq \frac{q^n}{n!} \pi^{2n} \Rightarrow m \leq \pi \cdot \frac{(q\pi^2)^n}{n!}.$$

По лемме 3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{(q\pi^2)^n}{n!} = 0$, поэтому при достаточно большом $n \quad m < 1$. Противоречие.

Список литературы к части I

Статьи в журнале «Квант»

1. А. Егоров, «Решетки и правильные многоугольники», 1975, № 12.
2. В. Гальперин, В. Калинин, «Многоугольники и решетки», 1978.
3. Н. Бескин, «Цепные дроби», «Бесконечные цепные дроби», 1970, №№ 1, 8.
4. Д. Фукс, М. Фукс, «О наилучших приближениях», 1971, №№ 6, 11.
5. Д. Фукс, М. Фукс, «Рациональные приближения и трансцендентность», 1973, № 12.
6. А. Земляков, «Математика бильярда» (о всюду плотности), 1976, № 5.

Популярные книги.

7. А. Нивен, «Числа рациональные и иррациональные» (Мир, 1966). (Приближения, трансцендентность, иррациональность тригонометрических функций.)

8. М. Кац, С. Улам, «Математика и логика» (Мир, 1971). (гл. 1 — приближения, счетность, трансцендентность.)

Серьезные книги и монографии.

11. А.Я. Хинчин, «Цепные дроби» (ФМ, 1961; тонкая монография).

12. Г. Дэвенпорт, «Высшая арифметика» (Наука, 1965; серьезный учебник;) (цепные дроби, упоминание о конструкции Клейна).

13. А.А. Бухштаб, «Теория чисел» (Просвещение, 1966; учебник) (цепные дроби, приближения, иррациональность π , трансцендентность e).

Часть II. Уравнения и поля.

*Гораций, много в мире есть того,
Что в вашей философии не случилось.
Но к делу.*

Шекспир

VII. Поля и многочлены.

*Там, в ночной завывающей стуже,
В поле звезд отыскал я кольцо.*

А.Блок

В этом параграфе собраны некоторые общие сведения и конструкции, касающиеся многочленов, полей, расширений. В качестве примера рассматриваются конечные поля (поля Галуа). Считаются известными понятия поля, кольца (коммутативного), кольца $F[x]$ многочленов над данным полем F , делимости и деления с остатком в кольце $F[x]$, а также конструкция полей вычетов Z_p (по простому модулю p).

1. К двум многочленам $p(x)$ и $q(x)$ над полем F можно применить алгоритм Евклида, т.е. провести последовательные деления с остатком:

$$\begin{aligned} p &= s_0 q + r_0, \\ q &= s_1 r_0 + r_1, \\ r_0 &= s_2 r_1 + r_2, \\ &\dots \\ r_{k-2} &= s_k r_{k-1} + r_k, \\ r_{k-1} &= s_{k+1} r_k \end{aligned}$$

— рано или поздно остаток будет нулевым, ибо степени r_i уменьшаются. Из этой цепочки равенств вытекают такие свойства последнего ненулевого остатка $r_k(x)$:

- (а) p и q делятся на r_k ;
- (б) $r_k = ap + bq$ для некоторых многочленов a и b ;
- (в) если d — общий делитель p и q , то r_k делится на α (поясните).

Поэтому r_k называют *наибольшим общим делителем* многочленов p и q . Если $\deg r_k = 0$, то p и q называются *взаимно-простыми*: тогда p и q не имеют общих делителей, кроме констант (т.е. многочленов степени 0). В этом случае из (б) следует существование $a, b \in F[x]$ таких, что

$$1 = ap + bq$$

2. Следствие. Если $fq : h$, причем g и h взаимно простые, то f делится на h .

Доказательство: $1 = ag + bh \Rightarrow f = a(fg) + (fb)h : h$.

3. Напомним, что многочлен p степени $n \geq 1$ называется **неприводимым** (над данным полем F !), если p не делится ни на какой многочлен меньшей степени, кроме констант.

(3) Лемма. Если p неприводим, то для любого $f \in F[x]$ либо $f : p$, либо f и p взаимно просты.

Доказательство. Если степень Н.О.Д. f и p больше 0, то этот Н.О.Д. должен быть равен p .

4. Следствие. Если p и q неприводимые, то либо они взаимно просты, либо $p = kq$, где $k \in F$ ($k \neq 0$).

Доказательство. Если p и q не взаимно просты, то $p : q$ и $q : p$, поэтому $\deg p = \deg q$ и $p = kq$.

5. Теорема о разложении. Любой многочлен f степени $n \geq 1$ представляется в виде произведения неприводимых, причем единственным образом: для любых двух таких представлений

$$f = p_1 \cdot \dots \cdot p_k = q_1 \cdot \dots \cdot q_l \quad (*)$$

$k = l$ и, после надлежащей перенумерации, $p_i = k_i q_i$, где $k_i \in F$.

Доказательство аналогично доказательству основной теоремы арифметики (о разложении натуральных чисел на простые множители). Существование показывается индукцией по n . Единственность разложения вытекает из следствий 2 и 4. Именно, если для многочленов степени меньше n единственность доказана, то из (*) для многочлена f степени n выводим, что p_1 отличается от некоторого из q_i постоянным множителем ($q_1 \cdots q_l : p_1$, и применяем следствия 2 и 4). Сокращая на p_1 , пользуемся предположением индукции.

6. Из теоремы 5 вытекает, что любой многочлен f над данным полем F представляется в виде

$$f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) p_1(x) \dots p_l(x),$$

где $\alpha_i \in F$ — корни f , а $p_j(x)$ — неприводимые над F многочлены степени ≥ 2 , которые, конечно, не имеют корней в F . Оказывается, для любого многочлена f

над F можно построить более широкое поле $K \supset F$, в котором f разлагается только на линейные множители:

$$f_n(x) = k \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i), \quad k, \alpha_i \in F.$$

Для этого последовательно расширяют поле F , «присоединяя» корни неприводимых сомножителей f степени ≥ 2 . Опишем эту конструкцию подробно.

7. Теорема А (наводящая). Пусть $F \subset K$ — два поля, $p_n(x) \in F[x]$ неприводим над F , $n \geq 2$, и $p_n(\theta) = 0$ для некоторого элемента $\theta \in K$. Обозначим

$$K_0 = \{a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1} \mid a_i \in F\} \subset K.$$

Тогда $K_0 \supset F$ — подполе поля K , и это поле K_0 будет *минимальным* расширением поля F , содержащим корень θ . (Последнее очевидно — минимальное кольцо, содержащее F и θ , должно содержать все элементы вида $a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in F$.)

(7) **Доказательство.** Если $\alpha, \beta \in K_0$, то, очевидно, $\alpha \pm \beta \in K_0$. Далее, поскольку θ — корень многочлена степени n с коэффициентами из F , то θ^n и следующие степени θ представляются в виде $a_0 + a_1\theta + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in F$, поэтому и произведение двух элементов $\alpha, \beta \in K_0$ принадлежит K_0 . Удобно отыскивать произведение следующим образом.

Элементы K_0 — это значения многочленов над F степени $< n$ в точке θ . Если $\alpha = f(\theta)$, $\beta = g(\theta)$, то $\alpha\beta = r(\theta)$, где $r(x)$ — остаток от деления $f(x) \cdot g(x)$ на $p_n(x)$: достаточно подставить $x = \theta$ в соотношение

$$f(x)g(x) = q(x)p_n(x) + r(x) \quad (\deg r < n)$$

и воспользоваться тем, что $p_n(\theta) = 0$. Таким образом, умножение в K_0 можно понимать как умножение многочленов от θ «по модулю» многочлена $p_n(\theta)$.

Осталось проверить, что для $\alpha = f(\theta) \in K_0 \setminus \{0\}$ обратный элемент $\alpha^{-1} \in K$ тоже можно записать в виде $g(\theta)$, т.е. $\alpha^{-1} \in K_0$. Поскольку p_n неприводим, а $\deg f < \deg p_n$, то f и p_n взаимно простые, поэтому из замечания в конце т.1 следует существование многочленов $a(x)$ и $b(x)$ над F таких, что $1 = af + bp_n$. Подставляя сюда $x = \theta$, получим: $1 = a(\theta)f(\theta)$, поэтому $\alpha^{-1} = a(\theta) \in K_0$. Теорема доказана.

8. Теорема о присоединении корня. Для любого неприводимого над полем F многочлена $p_n(x)$ степени $n \geq 2$ существует расширение K поля F , в котором p_n имеет хотя бы один корень.

Доказательство. Опираясь на проведенный в т.7 анализ структуры минимального расширения, мы построим *простое алгебраическое расширение* $K = F(\theta)$ поля F путем формального *присоединения корня*-символа θ многочлена p_n . Именно, рассмотрим все формальные линейные комбинации вида

$$f(\theta) = a_0 + a_1\theta + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}, \quad \text{где } a_i \in F.$$

Определим сложение и умножение формулами

$$\begin{aligned} f(\theta) + g(\theta) &= (f + g)(\theta), \\ f(\theta)g(\theta) &= r(\theta), \end{aligned}$$

где $r(x)$ — остаток от деления произведения $f(x) \cdot g(x)$ на $p_n(x)$. Дабы проверить аксиомы поля, дадим другую интерпретацию элементам нашего множества $F(\theta) = \{f(\theta)\}$: отождествим $f(\theta) \in F(\theta)$ с классом \tilde{f} всех многочленов $f_1(x) \in F[x]$, которые при делении на $p_n(x)$ дают остаток $f(x)$. Как в случае вычетов, класс многочлена $a(x)$ будем обозначать через \tilde{a} . Определения суммы и произведения в новых обозначениях примут вид

$$\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f + g}, \quad \tilde{f} \cdot \tilde{g} = \widetilde{fg},$$

поэтому выполнение всех аксиом кольца в $F(\theta) = \{f(\theta)\} = \{\tilde{f}\}$ очевидно. Существование обратного элемента для $\tilde{f} \neq 0 = \tilde{0}$ следует из того, что в этом случае $f(x)$ не делится на $p_n(x)$, поэтому (из неприводимости p_n — см. лемму т. 3) f и p_n взаимно простые, $1 = af + bp_n$, откуда $\tilde{1} = 1 = \tilde{a} \cdot \tilde{f}$.

Наконец, $\theta = \tilde{x}$, поэтому $p(\theta) = p(\tilde{x}) = \widetilde{p(x)} = \tilde{0} = 0$. Искомое расширение построено.

9. Утверждение тезиса 6 получается последовательным применением конструкции из теоремы т. 8. Получающееся в итоге поле называется *полем разложения* данного многочлена.

10. Пример. Простое алгебраическое расширение поля \mathbb{Z}_p путем присоединения корня θ неприводимого многочлена степени $n \geq 2$ есть конечное поле $\mathbb{Z}_p(\theta) = \{a_0 + a_1\theta + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1} \mid a_i \in \mathbb{Z}_p\}$, состоящее из p^n элементов. Число элементов полей разложений многочленов над \mathbb{Z}_p будет также степенью (простого) числа p . Оказывается, что число элементов **любого** конечного поля обязательно является степенью простого числа, и для любой такой степени p^k существует поле из p^k элементов! Эти факты, установленные Галуа, мы докажем после некоторой предварительной подготовки.

11. В произвольном поле F можно рассмотреть элементы $1, \bar{2} = 1+1, \bar{3} = 1+1+1, \bar{4} = 1+1+1+1, \dots, \bar{n} = 1+1+\dots+1$ (n раз). В принципе возможны два случая:

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \bar{n} \neq 0$ — тогда F называется полем *характеристики 0* (примеры: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ и их произвольные расширения);
- 2) $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\bar{n} = 0$; наименьшее из таких чисел, p , называется *характеристикой* поля F (примеры: \mathbb{Z}_p и их любые расширения).

Лемма. Характеристикой поля может быть только простое число (или 0).

Доказательство. Если p составное, $p = p_1 p_2$, $p_1, p_2 < p$, то $\bar{p}_1 \neq 0, \bar{p}_2 \neq 0$, и в то же время $\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = \overline{p_1 p_2} = \bar{p} = 0$, следовательно \bar{p}_1 и \bar{p}_2 — делители нуля.

12. Лемма. В поле характеристики p для любых элементов α и β и для любого $k \in \mathbb{N}$

$$(\alpha + \beta)^{p^k} = \alpha^{p^k} + \beta^{p^k}.$$

Доказательство. Из формулы Ньютона

$$(\alpha + \beta)^p = \alpha^p + \beta^p + \sum_{k=1}^{p-1} \overline{C_p^k} \alpha^{p-k} \beta^k = \alpha^p + \beta^p,$$

поскольку при простом p и $1 \leq k \leq p-1$ числа C_p^k делятся на p и $\overline{C_p^k} = 0$. Далее,

$$(\alpha + \beta)^{p^2} = ((\alpha^p + \beta^p))^p = \alpha^{p^2} + \beta^{p^2},$$

и так далее.

13. Любое конечное поле, конечно, имеет ненулевую характеристику: если в F всего N элементов, то среди $1, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{N}, \overline{N+1}$ найдутся два совпадающих — скажем, $\bar{k} = \bar{l}$, $k > l$; тогда $\overline{k-l} = 0$.

Заметим, что в поле F характеристики $p \neq 0$ элементы $0, 1, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}$ образуют подполе, изоморфное \mathbb{Z}_p .

14. 1-ая теорема Галуа. Число элементов конечного поля является степенью его характеристики: $N(F) = p^k$.

Доказательство. Рассмотрим подполе $F_1 \cong \mathbb{Z}_p \subset F$ (см. т. 13). Если $F \neq F_1$, то возьмем элемент $\alpha_2 \in F \setminus F_1$ и рассмотрим множество

$$F_2 = \{a_1 + a_2\alpha_2 \mid a_i \in F_1\} \subset F.$$

Заметим, что для двух его элементов из равенства $a_1 + a_2\alpha_2 = b_1 + b_2\alpha_2$ следует, что $a_2 = b_2$ — иначе $\alpha_2 \in F_1$ (объясните), — а поэтому и $a_1 = b_1$. Таким образом, в F_2 всего p^2 различных элементов. Если $F \neq F_2$, то возьмем $\alpha_3 \in F \setminus F_2$ и рассмотрим множество

$$F_3 = \{a_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \mid a_i \in F_1\} \subset F.$$

Если $a_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = b_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$, то $a_3 = b_3$ (иначе $\alpha_3 \in F_2$), поэтому $a_2 = b_2$ и $a_1 = b_1$. Следовательно, в F_3 всего p^3 различных элементов. Если $F \neq F_3$, то возьмем $\alpha_4 \in F \setminus F_3$, и т.д. Поскольку F конечно, на каком-то шаге мы получим $F = F_k$, и $N(F) = p^k$. Теорема доказана.

15. Лемма Ферма (наводящая). Если $N(F) = N$, то $\forall \alpha \in F \quad \alpha^N = \alpha$.

Доказательство аналогично доказательству Малой теоремы Ферма. Именно, если $\alpha \neq 0$, то рассмотрим все ненулевые элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1}$ поля F . Тогда $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots, \alpha\alpha_{N-1}$ тоже ненулевые и все различны, поэтому

$$\alpha\alpha_1 \cdot \alpha\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha\alpha_{N-1} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{N-1} \Rightarrow \alpha^{N-1} = 1 \Rightarrow \alpha^N = \alpha.$$

Для $\alpha = 0$ соотношение очевидно.

Следствие. В поле из N элементов многочлен $P(x) = x^N - x$ представляется в виде

$$P(x) = x^N - x = \prod_{a \in F} (x - a).$$

Итак, в поле из N элементов эти элементы суть корни многочлена P .

16. Лемма. Многочлен $P(x) = x^{p^k} - x$ ни в каком поле характеристики p не может иметь кратных корней.

Доказательство. В любом кольце многочленов $F[x]$ можно ввести формальную производную многочлена — формулой

$$\left(\sum_l c_l x^l\right)' = \sum_l l c_l x^{l-1}.$$

Если $f(x)$ имеет кратный корень, т. е. $f(x) = (x - \alpha)^2 f_1(x)$, то $f'(x) = (x - \alpha)g(x)$ (для производной в кольце $F[x]$ нетрудно проверить справедливость обычных правил «дифференцирования» — скажем, формула $(f \cdot g)'$ очевидна для произведения одночленов, а для многочленов нужно еще использовать очевидную формулу $(f + g)' = f' + g'$). Следовательно, f и f' не взаимно простые. Для нашего же многочлена $P'(x) = p^k x^{p^k-1} - 1 = -1$, поэтому $P(x)$ и $P'(x)$ взаимно простые, и $P(x)$ не может иметь кратных корней.

17. 2-ая теорема Галуа. Для любого простого p и натурального k существует поле из $N = p^k$ элементов.

Доказательство. Рассмотрим над полем \mathbb{Z}_p многочлен $P(x) = x^{p^k} - x$ и возьмем какое-нибудь поле разложения $K \supset \mathbb{Z}_p$ этого многочлена (см. тт. 6 и 9). Из леммы 12 и очевидного соотношения $(\alpha\beta^{-1})^{p^k} = \alpha^{p^k} \cdot (\beta^{p^k})^{-1}$ следует, что множество всех корней $P(x)$ образует подполе F поля K . Из леммы 16 вытекает, что поле F состоит в точности из p^k элементов!

VIII. Симметрические многочлены и алгебраические числа.

Посылай свой хлеб по водам,

Ибо спустя много дней ты его найдешь.

Экклесиаст

18. Как было установлено, для любого многочлена над полем F ,

$$p_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_i \in F, \quad (1)$$

существует поле разложения $K \supset F$, в котором

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad x_i \in K \quad (2)$$

(см. тт. 6, 9); здесь и далее мы рассматриваем только нормированные многочлены — со старшим коэффициентом 1. Раскрывая скобки в (2) и сравнивая полученное с (1), мы найдем соотношения между коэффициентами и корнями p_n — т. н. *формулы Виета*:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = -\sigma_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sigma_2(x_1, \dots, x_n),$$

...

$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \sigma_n(x_1, \dots, x_n).$$

Если корни x_i считать переменными, то выражения

$$\sigma_k(\bar{x}) = \sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

суть однородные многочлены от x_i , причем *симметрические*, т. е. инвариантные относительно любых перестановок переменных:

$$\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sigma_k(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}).$$

Эти многочлены называются *элементарными симметрическими многочленами* от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Оказывается, *любой* симметрический многочлен от переменных x_i выражается через элементарные (скажем, для $n = 2$ — через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$). Мы докажем это имеющее многочисленные приложения утверждение после необходимой подготовки.

19. Многочленом от n переменных x_1, \dots, x_n над полем F называется сумма одночленов вида

$$\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad k_i \geq 0, \quad \alpha \in F \setminus \{0\}.$$

Одночлены можно сравнивать друг с другом «по-степенно», считая, что $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ «выше» $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$, если $k_1 > l_1$; или $k_1 = l_1, k_2 > l_2$; ...; или $k_1 = l_1, \dots, k_s = l_s, k_{s+1} > l_{s+1}$. Одночлены в многочлене удобно располагать в порядке понижения.

Лемма А. Высший член произведения двух многочленов $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ равен произведению высших членов f и g .

Доказательство очевидно (объясните).

20. Очевидно, высший член $\sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ есть $x_1 x_2 \cdots x_k$.

Лемма Б. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ симметрический, $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ — его высший член, то $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \cdots \geq k_n$.

Доказательство. Если $k_s < k_{s+1}$, то, ввиду симметричности, в f есть член $\alpha x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_{s+1}} x_{s+1}^{k_s} \cdots x_n^{k_n}$, который выше высшего — противоречие.

(Конечно, для произвольных многочленов утверждение леммы неверно — приведите пример.)

21. Основная теорема. Любой симметрический многочлен $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ можно записать в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_k = \sigma_k(x_1, \dots, x_n),$$

где $g \in F[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$, причем вместо поля F можно рассматривать любое кольцо (например, \mathbb{Z}).

Доказательство. Из лемм А и Б следует, что высший член $\alpha x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ многочлена f такой же, как у произведения $\varphi = \alpha \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \cdots \sigma_n^{k_n}$ (проверьте!), и симметрический многочлен $f_1 = f - \varphi$ имеет более низкий высший член, чем f . Аналогично, вычитая соответствующее произведение φ_1 из f_1 , понижаем еще раз высший член, и так далее. Поскольку число одночленов, которые ниже $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, конечно, на каком-то шаге разность $f_k - \varphi_k$ будет константой $\omega \in F$. Итак,

$$f = \varphi + \varphi_1 + \cdots + \varphi_k + \omega = g(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \text{ч.т.д.}$$

22. Следствие (из основной теоремы и формул Виета). Пусть $p_n(x)$ — нормированный многочлен над полем или кольцом F , x_i — корни p_n в произвольном поле разложения $K \supset F$ многочлена $p_n(x)$. Тогда если $\alpha = f(x_1, \dots, x_n) \in K$ — симметрический многочлен от x_i , то α принадлежит основному полю или кольцу F .

(Например, для многочленов с целыми коэффициентами симметрические многочлены от их корней будут целыми числами — независимо от того, какому полю принадлежат корни!)

23. Применим следствие 22 к доказательству **основной теоремы алгебры**: любой многочлен $p_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени $n \geq 1$ имеет хотя бы один корень в поле \mathbb{C} . Хотя доказательство выглядит как серия трюков, до него можно догадаться.

24. Предварительно докажем, что это верно для $p_n(z) \in \mathbb{R}[z]$. Если степень n нечетна, то существует даже действительный корень — знак $p_n(x)$ при больших значениях $|x|$ совпадает со знаком x^n (обоснуйте), поэтому по теореме о промежуточном значении $p_n(x)$ имеет корень $x_0 \in \mathbb{R}$. Далее рассуждаем по индукции: допустим, что для $n = 2^{k-1}q$, где q нечетно, утверждение доказано; покажем, что тогда и многочлен степени $2^k q$ имеет хотя бы один комплексный корень.

25. Пусть $p_n(z)$ — многочлен над \mathbb{R} степени $n = 2^k q$, $K \supset \mathbb{C}$ — какое-то поле его разложения, x_1, x_2, \dots, x_n — корни p_n в поле K . Требуется доказать, что хотя бы один из x_i принадлежит \mathbb{C} .

Для фиксированного $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим элементы

$$y_{ij} = x_i x_j + c(x_i + x_j) \in K, \quad i < j.$$

Их число равно $N = C_n^2 = n(n-1)/2 = 2^{k-1}q(2^k q - 1)$. Рассмотрим над полем K многочлен

$$q_N(z) = \prod_{i < j} (z - y_{ij}).$$

Его коэффициенты — симметрические многочлены от y_{ij} , а совокупность y_{ij} не меняется при любой перестановке x_i , поэтому коэффициенты q_N также будут симметрическими многочленами от x_i (с действительными коэффициентами), и по следствию 22 $q_N \in \mathbb{R}[z]$. Согласно предположению индукции, $q_N(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень: $y_{ij} = z_0 \in \mathbb{C}$. Выведем отсюда, что и $p_n(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень — перейдем от y_{ij} обратно к x_i .

26. Предыдущее построение можно проделать для любого числа $c \in \mathbb{R}$. Взяв $N+1$ значение c , для каких-то двух многочленов $q_N^{(c)}(z)$ мы будем иметь совпадение индексов ij их комплексных корней — для этих значений c можно записать

$$\begin{aligned} y_{ij}^{c_1} &= x_i x_j + c_1(x_i + x_j) = z_1 \in \mathbb{C}, \\ y_{ij}^{c_2} &= x_i x_j + c_2(x_i + x_j) = z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Раз $c_1 \neq c_2$, то $x_i + x_j = (z_1 - z_2)/(c_1 - c_2) \in \mathbb{C}$, поэтому и $x_i x_j \in \mathbb{C}$. Значит, x_i и x_j — корни квадратного уравнения $t^2 - (x_i + x_j)t + x_i x_j = 0$ с комплексными коэффициентами, следовательно, сами комплексные. Тем самым предварительное утверждение (т. 24) доказано.

27. Доказательство основной теоремы алгебры. Пусть $p(z) \in \mathbb{C}[z]$. Рассмотрим многочлен с комплексно сопряженными коэффициентами $\bar{p}(z)$. Тогда для $q(z) = p(z)\bar{p}(z)$ имеем: $\bar{q}(z) = \overline{p(z)\bar{p}(z)} = \bar{p}(z)p(z) = q(z)$, поэтому $q(z) \in \mathbb{R}[z]$. Следовательно, $q(z)$ имеет хотя бы один комплексный корень z_0 , и либо $p(z_0) = 0$, либо $\bar{p}(z_0) = 0$; во втором случае $\overline{\bar{p}(z_0)} = p(\bar{z}_0)$, и опять $p(z)$ имеет комплексный корень.

28. Из основной теоремы алгебры и теоремы Безу вытекает, что \mathbb{C} является полем разложения для любого многочлена над \mathbb{Q} , \mathbb{R} или \mathbb{C} — такие многочлены можно представить в виде

$$p_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{C}.$$

29. Теперь мы применим следствие 22 к исследованию алгебраических чисел. Замечание т. 28 показывает, что нет нужды ограничиваться только действительными числами — проще рассматривать сразу *комплексные* алгебраические числа.

30. Определение. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называется *алгебраическим* (над полем \mathbb{Q} , или рациональным алгебраическим), если α — корень многочлена над полем \mathbb{Q} : $p(\alpha) = 0$. Если многочлен $p(x)$ неприводим над \mathbb{Q} , то естественно одновременно с $\alpha = \alpha_1$ рассмотреть и все остальные корни $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ этого многочлена — они тоже будут алгебраическими числами и называются (алгебраически) *сопряженными* с α .

Одна из фундаментальных теорем алгебры утверждает, что алгебраические числа образуют подполе \mathbb{A} поля \mathbb{C} .

Заметим, что для $\alpha \in \mathbb{A}$ алгебраичность $-\alpha$ и α^{-1} фактически очевидна: если $p_n(\alpha) = 0$, то $q_1(-\alpha) = 0$ для многочлена $q_1(x) = p_n(-x)$, и при $\alpha \neq 0$ $q_2(\alpha^{-1}) = 0$ для **многочлена** $q_2(x) = x^n p_n(x^{-1})$ (ясно, коэффициенты q_1 и q_2 рациональны!). Докажем алгебраичность $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ для алгебраических α и β .

31. Пусть α, β — корни $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ и β_2, \dots, β_m — сопряженные с $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$ алгебраические числа (т. е. корни соответствующих **неприводимых** многочленов p и q). Рассмотрим многочлен

$$f(x) = \prod_{i,j} (x - (\alpha_i + \beta_j)) \in \mathbb{C}[x].$$

Его коэффициенты симметричны как по α_i , так и по β_j , поэтому (см. доказательство основной теоремы — т. 21) их можно выразить через элементарные симметрические многочлены от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ с коэффициентами, симметрическими по β_j (продумайте!), а потом выразить через элементарные симметрические многочлены от $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и β_1, \dots, β_m с целыми коэффициентами. Следовательно (по формулам Виета), коэффициенты многочлена $f(x)$ — рациональные числа, поэтому его корень $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$ — алгебраическое число. Аналогично, рассматривая многочлен

$$g(x) = \prod_{i,j} (x - \alpha_i \beta_j),$$

доказываем алгебраичность произведения $\alpha\beta$.

32. Определение. Поле F называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен над F имеет в F хотя бы один корень. (Пример — поле \mathbb{C} .)

Теорема. Поле алгебраических чисел алгебраически замкнуто.

Доказательство. Достаточно показать, что корни многочлена

$$p(x) = x^n + \alpha x^{n-1} + \dots + \beta x + \gamma$$

с алгебраическими коэффициентами будут алгебраическими числами. Пусть $\alpha_i, \dots, \beta_j, \gamma_k$ — алгебраические числа, сопряженные с $\alpha = \alpha_1, \dots, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$. Рассмотрим многочлены $p_{i\dots jk}(x) = x^n + \alpha_i x^{n-1} + \dots + \beta_j x + \gamma_k$ (среди них и $p(x)$) и положим

$$f(x) = \prod_{i\dots jk} p_{i\dots jk}(x) \in \mathbb{A}[x].$$

Многочлен $f(x)$ не меняется при перестановках $\alpha_i, \dots, \beta_j, \gamma_k$ (между собой), откуда, как в т. 31, следует, что $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Значит, корни $p(x)$ алгебраичны.

33. Иррациональностями (над полем \mathbb{Q}) называются числа, которые получаются из рациональных применением операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней (в любом порядке и количестве). По своему определению иррациональности образуют подполе в \mathbb{C} .

Задача. Докажите, что поле иррациональностей \mathbb{J} содержится в \mathbb{A} .

Замечание. В теории Галуа доказывается, что $\mathbb{A} \neq \mathbb{J}$!

34. Наряду с алгебраическими числами важную роль играют т.н. *целые алгебраические числа* — корни многочленов с целыми коэффициентами (и старшим коэффициентом 1!). Просматривая рассуждения тт. 30–31, видим, что целые алгебраические числа образуют *кольцо* \mathbb{Z} — подкольцо поля \mathbb{A} (объясните, почему \mathbb{Z} — не подполе). Из доказательства теоремы 32 вытекает алгебраическая замкнутость кольца \mathbb{Z} — корни нормированных многочленов с целыми алгебраическими коэффициентами будут тоже целыми алгебраическими. Ясно, что $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ (объясните); т.о. — целые алгебраические числа — аналог целых чисел.

Указанные свойства целых алгебраических чисел будут играть важную роль в доказательстве трансцендентности числа π (см. след. параграф).

IX. Трансцендентность числа π

«Ты спросишь, кто велит?
— Всесильный бог деталей...»

Б. Пастернак

35. Один из основных моментов в доказательстве трансцендентности — соотношение между числами e и π :

$$e^{i\pi} = -1, \tag{0}$$

впервые установленное, по-видимому, Эйлером. Напомним, что π — это отношение длины окружности к ее диаметру, а число e определяется как предел

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

где n можно считать и действительным. Поэтому $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{x}\right)}\right)^{\frac{n}{x}} \right)^x = e^x. \quad (?!)$$

Чтобы объяснить соотношение (0), дадим неформальное определение комплексной экспоненты, исходя из предыдущей формулы.

36. Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Положим по определению

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad (1)$$

(предел последовательности комплексных чисел определяется точно так же, как и предел последовательности обычной числовой последовательности). Тогда мы должны иметь:

$$\arg e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \arctg \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \right) = y,$$

ибо при малых α $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, $\arctg \alpha \approx \alpha$; далее,

$$\begin{aligned} |e^z| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n, \\ \left| 1 + \frac{z}{n} \right| &= \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}} \approx 1 + \frac{x}{n}, \end{aligned}$$

в том смысле, что $\left| 1 + \frac{z}{n} \right| = 1 + \frac{x}{n} + \frac{\alpha_n}{n}$, $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; но тогда

$$|e^z| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + \alpha_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x + \alpha_n}}\right)^{\frac{n}{x + \alpha_n}} \right)^{x + \alpha_n} = e^x \quad (?!).$$

Из этих рассуждений и следует существование предела (1), причем $|e^{x+iy}| = e^x$, $\arg e^{x+iy} = y$, поэтому $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. В частности,

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

37. Кроме соотношения (0), далее нам потребуется разложение e^z по степеням z :

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

в том смысле, что e^z совпадает с пределом частичных сумм этого ряда. Для доказательства нужно сравнить эти суммы $1 + \dots + \frac{z^n}{n!}$ с $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

38. Теорема Линдемана (1882 г.). Число π трансцендентно.

Мы изложим доказательство, восходящее к Линдемону и Клейну, «алгебраизованное» Д. А. Граве.

Начало доказательства. Допустим противное, т.е., что число $\pi \in \mathbb{A}$. Поскольку $i \in \mathbb{A}$, то $\omega_1 = i\pi \in \mathbb{A}$. Пусть $\omega_2, \dots, \omega_m$ — алгебраические числа, сопряженные с ω_1 , т.е. корни неприводимого многочлена

$$p(x) = ax^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$$

с целыми коэффициентами. Заметим, что числа $a\omega_k$ будут корнями нормированного многочлена с целыми коэффициентами:

$$(a\omega_k)^m + aa_{m-1}(a\omega_k)^{m-1} + \dots + a^{m-1}a_1(a\omega_k) + a^ma_0 = 0,$$

т.е. $a\omega_k$ суть сопряженные *целые* алгебраические числа.

39. Идея доказательства. Поскольку $1 + e^{\omega_1} = 1 + e^{i\pi} = 0$, то $\prod_{k=1}^m (1 + e^{\omega_k}) = 0$. Раскрывая скобки, мы получим сумму слагаемых вида

$$e^{\omega_k}, e^{\omega_{k_1} + \omega_{k_2}}, \dots, e^{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \dots + \omega_{k_s}}, \dots$$

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ те из показателей $\omega_{k_1} + \dots + \omega_{k_s}$, которые отличны от 0; если $k > 0$ — сумма произведения единиц со слагаемыми с нулевыми показателями, то мы можем записать:

$$K + \sum_{r=1}^n e^{\alpha_r} = K + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_n} = 0. \quad (*)$$

Идея состоит в том, чтобы вывести из соотношения $(*)$ противоречие аналогично тому, как мы получили (§ VI) противоречие из предположения об алгебраичности e :

$$c_0 + c_1e + c_2e^2 + \dots + c_ne^n = 0, \quad c_i \in \mathbb{Z}.$$

Используя (комплексный!) интеграл типа Эрмита, для алгебраических степеней числа e можно получить представление вида

$$e^{\alpha_r} = \frac{m_r + \varepsilon_r}{m_0}, \quad 1 \leq r \leq n,$$

что после подстановки в $(*)$ дает соотношение

$$Km_0 + \sum m_r + \sum \varepsilon_r = 0.$$

Эти представления можно выбрать так, что $Km_0 + \sum m_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, а $|\sum \varepsilon_r| < 1$ — получим нужное противоречие. Существенное отличие от рассуждений Эрмита в

том, что m_r здесь будут разве что целыми алгебраическими (однако их сумма — обычным целым числом!). Чтобы не вдаваться в подробности интегрирования на комплексной плоскости, мы, следуя Граве, заменим интегрирование дифференцированием — вспомните, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=0}^N f^{(k)}(0) (= \sum c_k k!),$$

а замена $\zeta = x - \alpha$ в этом интеграле приводит к сумме $\sum f^{(k)}(\alpha)!$. Полезно уяснить соответствие между соответствующими рассуждениями здесь и в § VI.

40. Алгебраическая часть доказательства. Поскольку $a\omega_k$ — целые алгебраические, то и $a\alpha_r$ будут целыми алгебраическими. Более того, перемножив многочлены

$$q_s(x) = \prod_{k_1, \dots, k_s} (x - (a\omega_{k_1} + \dots + a\omega_{k_s})), \quad 1 \leq s \leq m,$$

(с целыми коэффициентами — объясните!) и убрав сомножитель x^{n_0} , отвечающий нулевым корням $q_s(x)$, мы получим многочлен

$$q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0, \quad \text{где } b_i \in \mathbb{Z}, \quad b_0 \neq 0,$$

корнями которого будут в точности $a\alpha_1, \dots, a\alpha_n$. Отсюда следует, что любой симметрический многочлен от $a\alpha_r$ с целыми коэффициентами есть целое число; в частности,

$$(-1)^n (a\alpha_1)(a\alpha_2) \dots (a\alpha_n) = b_0.$$

41. Аналитическая часть доказательства. Пусть $f(z) = \sum_{k=1}^N c_k z^k \in \mathbb{C}[z]$.

Положим

$$F(z) = f(z) + f'(z) + f''(z) + \dots = \sum_{k=0}^N f^{(k)}(z) (\in \mathbb{C}[z]).$$

Заметим, что $f^{(k)}(0) = c_k k!$, поэтому из разложения e^z в ряд (см. т. 37)

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= c_k k! \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^k}{k!} \right) + \\ &\quad + c_k z^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{z}{(k+1)(k+2)} + \frac{z^2}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \right) = \\ &= c_k z^k + (c_k z^k)' + \dots + (c_k z^k)^{(k)} + c_k z^{k+1} R_k(z), \end{aligned} \quad (00)$$

где

$$|R_k(z)| \leq 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \dots = e^{|z|},$$

поэтому

$$R_k(z) = \varepsilon_k(z) e^{|z|}, \quad |\varepsilon_k(z)| \leq 1.$$

Суммируя равенства (00) по k от 0 до N , получим **формулу Граве**:

$$F(0)e^z = F(z) + Q(z)e^{|z|}, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^N c_k z^{k+1} \varepsilon_k(z).$$

42. Центр доказательства. Возьмем в формуле Граве в качестве f

$$f(z) = \frac{a^{pn+p-1} z^{p-1} (z - \alpha_1)^p \cdots (z - \alpha_n)^p}{(p-1)!},$$

где простое число p мы выберем позже. (Обратите внимание на аналогию этого многочлена с многочленом в интеграле Эрмита! Сомножитель a^{pn+p-1} , разнесенный по всем линейным множителям, позволяет числитель записать в виде многочлена с целыми алгебраическими коэффициентами — $a\alpha_r \in \mathbb{Z}$.) Подставим в формулу Граве значения $z = 0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, умножим первое из соотношений на число K и сложим — учитывая (*) из т. 39, получим:

$$F(0)(K + \sum_{r=1}^n e^{\alpha_r}) = 0 = KF(0) + \sum_{r=1}^n F(\alpha_r) + \sum_{r=1}^n Q(\alpha_r)e^{|\alpha_r|}.$$

Искомое противоречие будет получено из последнего соотношения, при соответствующем выборе p .

Конец доказательства.

43. Лемма 1. $F(0)$ — целое число, не делящееся на p при достаточно больших простых p .

В самом деле,

$$f(z) = \frac{Az^{p-1} + Bz^p + \cdots}{(p-1)!}, \quad \text{где } A = (-1)^{np} a^{p-1} (a\alpha_1)^p \cdots (a\alpha_n)^p = a^{p-1} b_0^p \in \mathbb{Z},$$

а коэффициенты B, \dots симметричны по $a\alpha_r$ с целыми коэффициентами (ибо $f(z)$ не меняется при перестановке α_r), поэтому тоже целые (см. т. 40). Многочлен $F(z)$ «начинается» с $f^{(p-1)}(z)$, и

$$F(0) = \frac{(p-1)!A + p!B + \cdots}{(p-1)!} = A + p(B + \cdots) \in \mathbb{Z}.$$

Взяв $p > a$ и $p > b_0$ (p — простое), получим, что A не делится на p , поэтому и $F(0)$ не делится на p .

44. Лемма 2. $G = \sum_{r=1}^n F(\alpha_r)$ — целое число, делящееся на p .

В самом деле, разложение $f(z)$ по степеням $\zeta = z - \alpha_k$ начинается с p -ой степени, причем коэффициенты числителя суть (не симметрические!) многочлены от $a\alpha_r$ с целыми коэффициентами. Поэтому $F(\alpha_k)$ представляется в виде pA_k , где A_k — многочлен от $a\alpha_r$ с целыми коэффициентами. Очевидно, вся сумма $G = \sum_{k=1}^n F(\alpha_k)$,

как и сумма $\sum_{k=1}^n A_k$, не меняется при перестановке α_r , поэтому $\sum_{k=1}^n A_k \in \mathbb{Z}$, $G \in \mathbb{Z}$, $G : p$ (продумайте).

45. Лемма 3. При достаточно больших p $\left| \sum_{r=1}^n Q(\alpha_r) e^{|\alpha_r|} \right| < 1$.

В самом деле, так как (см. т. 41)

$$Q(\alpha_r) = \sum_{k=0}^N c_k \alpha_r^{k+1} \varepsilon_k(\alpha_r), \quad |\varepsilon_k(z)| \leq 1, \quad \text{то } |Q(\alpha_r)| \leq |\alpha_r| \cdot \sum_{k=0}^N |c_k| |\alpha_r|^k,$$

где $\sum c_k z^k = f_N(z)$ — введенный в т. 42 многочлен. Далее, из вида $f_N(z)$ следует, что

$$\sum_{k=0}^N |c_k| |\alpha_r|^k \leq \frac{M_r^p}{(p-1)!},$$

где M_r не зависит от p (!!). Поэтому каждое слагаемое в сумме $\sum Q(\alpha_r) e^{|\alpha_r|}$ стремиться к 0 при $p \rightarrow \infty$, откуда и следует требуемое.

46. Финал. Выберем простое $p > K$, удовлетворяющее требованиям лемм 1 и 3. Тогда из лемм 1 и 2 следует, что в равенстве (см. т. 42)

$$KF(0) + \sum_{r=1}^n F(\alpha_r) = - \sum_{r=1}^n Q(\alpha_r) e^{|\alpha_r|}$$

левая часть — целое не делящееся на p и поэтому отличное от нуля число, а из леммы 3 — что правая часть по модулю меньше 1. Противоречие.

47. Следствие (из теоремы Линдемана и основной теоремы теории геометрических построений). С помощью циркуля и линейки невозможно построить сторону квадрата площади, равной площади данного круга (скажем, радиуса 1).

Доказательство. В противном случае $x = \sqrt{\pi}$ — квадратичная иррациональность; тогда $x = \sqrt{\pi} \in \mathbb{A}$ и $\pi = x^2 \in \mathbb{A}$, что противоречит теореме Линдемана.

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

Учащимся и учителям средней школы

Сумма углов звездчатого многоугольника: учебно-исследовательский семинар для 7 класса

А. И. Щетников

Проектируется работа по типу семинара-погружения для школьников, начинающих осваивать курс геометрии. В качестве материала выбрана задача о сумме углов звездчатого многоугольника, для которой школьники могут изобрести и проанализировать разнообразные методы решения.

1. Введение

Придумать полноценную и при этом доступную задачу исследовательского характера для школьников вообще не просто, а для семиклассников, только что начавших изучать геометрию — не просто вдвойне. В этом отношении задача об отыскании суммы углов при вершинах звездчатого многоугольника является хорошим подспорьем для учителя, стремящегося не просто передать своим учащимся те или иные знания, но прежде всего научить их думать, а стало быть — изобретать и анализировать.

Эту задачу можно решать на занятиях математического кружка. Но гораздо эффективнее организовать для решения этой задачи двух- или даже трехдневный семинар-погружение. Наш опыт показывает, что если исходную задачу о сумме углов пятиконечной звезды решают 5–6 групп по 6–8 человек, то этими группами будет предложено как минимум три-четыре различных решения. Сопоставляя их между собой, можно уяснить для себя немало нового!

Работа семинара ежедневно идет в два такта: сначала школьники решают предложенную им задачу по группам, а потом делают доклады на общем заседании. В конце общего заседания проводится дискуссия, в которой взрослым ведущим рекомендуется участвовать на равных со школьниками — ведь школьникам интересно и очень поучительно видеть, как взрослые пытаются размышлять у них на глазах. Итогом дискуссии может быть постановка новой задачи на следующий день работы.

Задачу о сумме углов звездчатого многоугольника можно решать с семиклассниками уже на выездной школе на зимних каникулах, когда они только начали изучать геометрию и еще не приступили к изучению темы “сумма углов треугольника”. В таком случае в начале семинара нужно провести установочную лекцию-беседу и показать, как доказывается теорема о сумме внутренних углов треугольника. При этом утверждение о равенстве накрестлежащих углов принимается за

достаточно очевидную лемму, которая будет доказана в школьном курсе позднее. В этой же беседе доказываются теоремы о сумме внутренних углов многоугольника (выпуклого — строго, невыпуклого — как гипотеза, проверяемая на конкретных примерах сведением n -угольника к $(n-1)$ -угольнику) и о сумме внешних углов выпуклого многоугольника. Следует обратить внимание школьников на то, что при доказательстве этих теорем заметно удобнее обозначать величину развернутого угла одной буквой π , нежели выражать ее градусной мерой.

И конечно же, эту задачу можно решать не только с семиклассниками, но и с учащимися более старших классов. И если при работе с семиклассниками итоговый результат может состоять в построении “периодической таблицы” правильных звездочек (см. ниже), то с более старшими школьниками может быть обсужден весь круг рассматриваемых ниже проблем и теорий.

Данная задача важна еще и тем, что она прививает школьникам важнейший навык “монстростроительства” — приведения контрпримеров к тому или иному доказательству (когда доказательство не может справиться с очередным контрпримером, как японская лесопилка с железной болванкой в известном анекдоте) или утверждению. “El sueño de la razón produce monstruos” — так называется известный офорт Франсиско Гойи. Эти слова обыгрываются Анри Пуанкаре в известном пассаже из книги “Наука и метод”: “Порой логика тоже рождает чудовищ” [2, 357]. Сам термин “монстр” для обозначения парадоксальных примеров и контрпримеров был введен в эпистемологию Имре Лакатосом в замечательной книге “Доказательства и опровержения” [1], содержание которой послужило прообразом для представленной в настоящей статье методической разработки, а также для многих других разработок виртуальной Лаборатории теоретической и прикладной эпистемологии.

2. Исходная задача

Задача 1. Найдите сумму S внутренних углов при вершинах пятиконечной звезды.

Первая серия решений основывается на применении теоремы о сумме внутренних углов треугольника и ее следствий — теорем о сумме внутренних и внешних углов многоугольника. Ниже приведены два решения из этой серии.

(1) Выделим пять треугольников, у которых два внутренних угла являются углами звездочки, и один — внутренним углом “внутреннего” пятиугольника (один из таких треугольников показан на рис. 1). Сложив вместе углы всех этих треугольников, получим 5π . Эта сумма складывается из пяти углов при вершинах звездочки, взятых каждый по два раза, а также пяти углов “внутреннего” пятиугольника, в сумме равных 3π . Тем самым $2S + 3\pi = 5\pi$, откуда $S = \pi$.

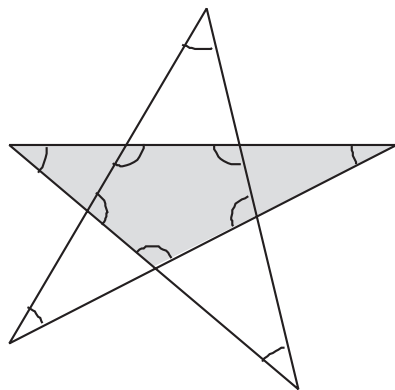


Рис. 1

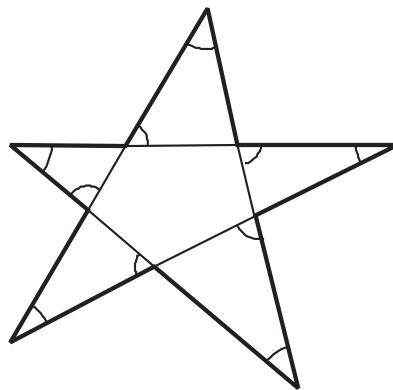


Рис. 2

(2) Сумма внутренних углов десятиугольного контура звездочки равна 8π . Эта сумма складывается из пяти углов при вершинах звездочки, пяти развернутых углов, в сумме равных 5π , и пяти внешних углов “внутреннего” пятиугольника, в сумме равных 2π (рис. 2). Тем самым $S + 5\pi + 2\pi = 8\pi$, откуда $S = \pi$.

Вторая серия решений основывается на применении теорем о равенстве накрестлежащих углов и т. п. Ниже приведены два таких решения.

(1) Используя теорему о равенстве внутренних накрестлежащих углов, перенесем угол 1 к углу 2, затем их сумму — к углу 3, затем сумму трех углов — к углу 4, затем сумму четырех углов — к углу 5 (рис. 3). Из этого решения видно, что имеет смысл нумеровать углы звездочки в порядке обхода вершин “без отрыва карандаша”.

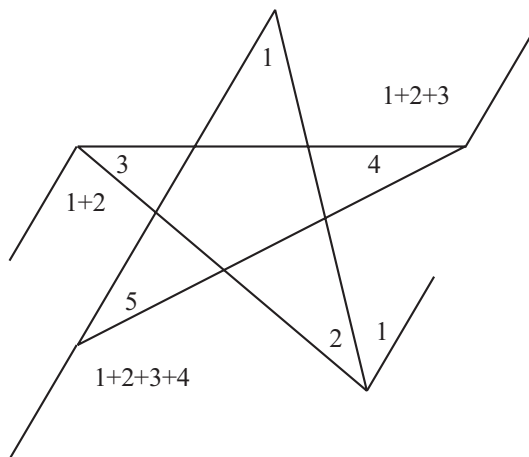


Рис. 3

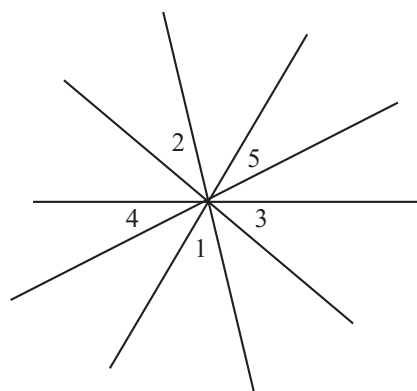


Рис. 4

(2) Через произвольную точку проведем пять прямых параллельно пяти сторонам звездочки. Устанавливая соответствие между парами параллельных прямых и собирая затем все пять углов в одну полуплоскость, несложно увидеть, что сумма углов пятиконечной звездочки равна развернутому углу (рис. 4).

3. Обобщение исходной задачи

Задача 2. Обобщите свои решения на случай семиконечной звездочки.

Работая по группам, а затем предъявляя свои решения друг другу на общем заседании, школьники скорее всего обнаружат, что имеются две различные семиконечные звездочки с разными суммами углов (рис. 5). Различие между звездочками описывается школьниками на языке построения их правильных форм: “разделим окружность на 7 частей, и в первом случае будем “перепрыгивать” через две точки на третью, а во втором — через одну на вторую”.

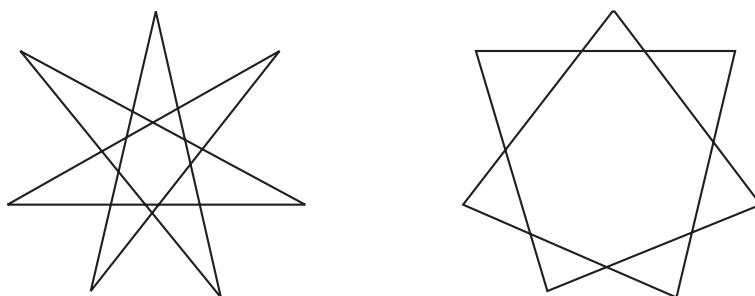


Рис. 5

Замечания.

(1) Решения второй серии (проведение параллельных прямых) оказываются более универсальными, нежели решения первой серии. Сдвигая вершины семиконечной звездочки первого типа, мы можем разрушить центральный семиугольник (рис. 6). Для такой конфигурации решения первой серии придется перестраивать заново. А решения второй серии полностью сохранят для нее свою силу.

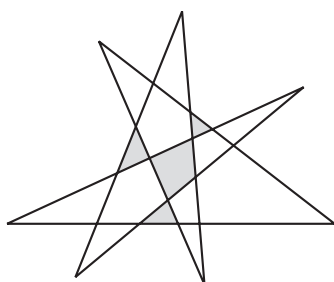


Рис. 6

(2) Усиленное решение первой серии получается обобщением на случай звездчатого многоугольника одного из способов нахождения суммы внутренних углов выпуклого многоугольника (рис. 7). В этом решении важную роль играет “самая внутренняя область”, внутри которой берется центральная точка, из которой проводятся лучи ко всем вершинам. (Впрочем, далее могут быть построены такие контрпримеры, для которых “самая внутренняя область” распадается на отдельные части.)

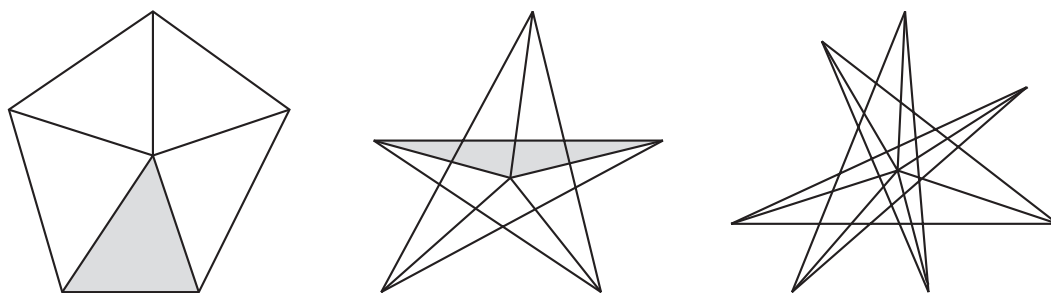


Рис. 7

(3) На рис. 8 пятиконечная звездочка сохраняет свою “звездчатость” при деформации в том смысле, что сумма углов при ее вершинах остается равной π . Тем самым сумма углов может рассматриваться как инвариант, сохраняющийся при деформациях.

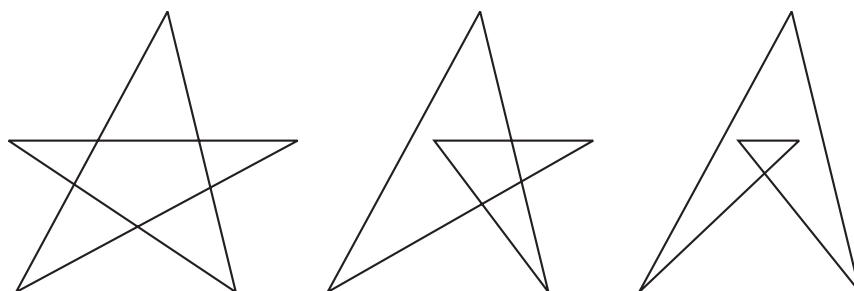


Рис. 8

(4) Звездочки, построенные с помощью приема проведения вспомогательной окружности, деления ее на n частей и проведения ломаной линии с перешагиванием на k -ую по обходу окружности вершину, можно свести в единую “периодическую таблицу”, включив в нее и случай многоугольников без самопересечения, когда $k = 1$ (рис. 9). Следует обратить внимание школьников на тот факт, что звездочка распадается на несколько отдельных звездочек в том и только в том случае, когда числа k и n не являются взаимно простыми.


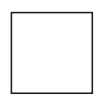
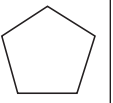
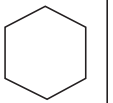
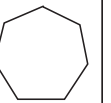
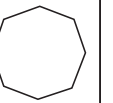
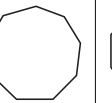
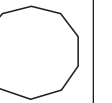

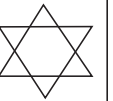
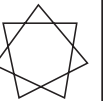
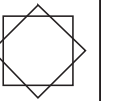
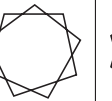
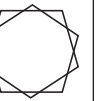
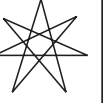
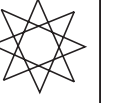
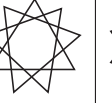
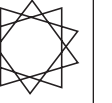
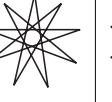
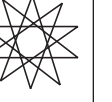
							
π	2π	3π	4π	5π	6π	7π	8π
							
		π	2π	3π	4π	5π	6π
							
				π	2π	3π	4π
							
						π	2π

Рис. 9

(5) Как будет выглядеть общая формула для суммы углов? Во-первых, она будет зависеть от числа вершин. Во-вторых, она должна содержать еще один числовой параметр — ведь имеются три существенно различных семиугольника с суммой углов π , 3π , 5π . Назовем этот параметр характеристикой “звездчатости”. Можно предположить, что общая формула для суммы углов будет иметь вид

$$S = \pi(n - 2k),$$

где n — число вершин, k — “характеристика звездчатости” (ее принято называть *степенью* звездчатого многоугольника). Мы знаем, что $k = 1$ у многоугольников без самопересечений (верхняя строка таблицы), $k = 2$ у звездчатых многоугольников второй строки, $k = 3$ у звездчатых многоугольников третьей строки, и т. д. Тем самым для многоугольников из нашей таблицы “характеристика звездчатости” совпадает с “индексом перешагивания” из предыдущего пункта.

(6) Однако существуют и другие звездочки, помимо вошедших в таблицу. К примеру, шестиконечная “звездочка” может быть не только составлена из двух треугольников, но и получена “обрубанием” одного из лучей пятиконечной звездочки (рис. 10). Такая “звездочка” также будет иметь сумму углов 2π . Поэтому ей следует приписать характеристику $k = 2$; но какой геометрический смысл теперь можно придать этой характеристике?

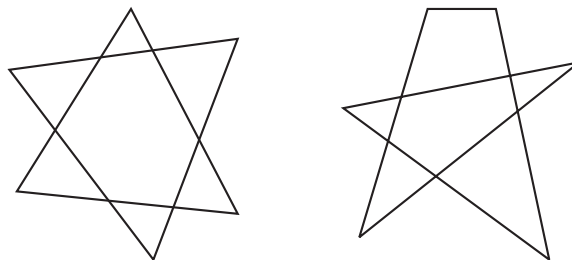


Рис. 10

(7) Отсюда возникает задача определения характеристики k по внешнему виду звездочки. Обратившись к решению, приведенному в замечании 2, можно заметить, что k — это число “петель”, сделанных линией звездочки. Можно представить себе, что контур звездочки выложен ниткой, — и эта нитка сдвигается так, чтобы получилась k -кратная петля. Можно спросить также, сколько полных оборотов сделает букашка, когда она проползет по контуру звездочки и вернется в исходное положение?

(8) Другой подход к получению ответа на этот же вопрос может состоять во введении “порядков внутренности” для тех частей, на которые линия звездочки разбивает плоскость. Припишем наружной области звездочки порядок “0”, непосредственно граничащим с ней областям — порядок “1”, областям, граничащим с этими областями — порядок “2”, и т. д. Если имеется одна “вершинная” область (то есть такая область, которая со всех сторон граничит с областями низшего порядка, она же — “самая внутренняя область” из замечания 2), то “характеристика звездчатости” k равна порядку этой области (рис. 11). Отдельно следует обсудить вопрос, как определять k , если имеется несколько “вершинных” областей. К примеру, подсчет углов фигуры, изображенной на рис. 12, дает $k = 4$, но как получить этот результат?

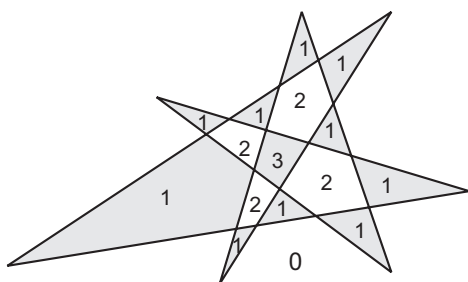


Рис. 11

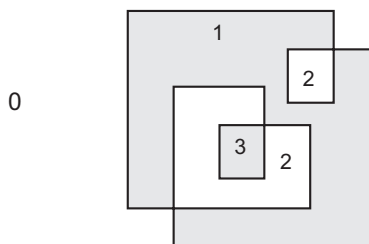


Рис. 12

3. Дополнение: ориентированные углы и площади на уроках геометрии

Рассмотрим ниже два примера использования ориентированных углов и площадей на уроках геометрии в 7 и 8 классах.

(1) При изучении темы “сумма углов многоугольника” ничто не мешает нам наряду с выпуклыми сразу же рассматривать и невыпуклые многоугольники, начиная

с четырехугольников. Естественно считать, что внутренний угол многоугольника в окрестности вершины совпадает со внутренностью самого многоугольника. Это тем более необходимо, если мы хотим, чтобы теорема о сумме внутренних углов многоугольника сохранила свою силу и для невыпуклых многоугольников.

К еще более интересным результатам приводит попытка обобщить на случай невыпуклых многоугольников теорему о сумме внешних углов. Внешний угол по определению является смежным с внутренним, дополняя его до развернутого угла. Но как быть, если внутренний угол больше развернутого? Выход состоит в том, чтобы считать *внешний* угол расположенным *внутри* многоугольника (рис. 13), и при этом имеющим *отрицательную* величину!

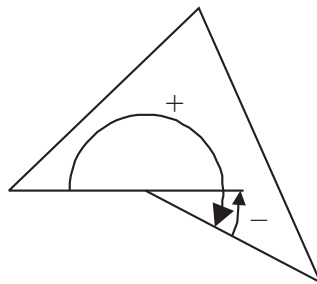


Рис. 13

(2) Доказательство теоремы о том, что *параллелограммы с равными основаниями и высотами равновелики*, общее для произвольного расположения параллелограммов, основано на поочередном отнятии равных треугольников ADF и BCE от трапеции $ABED$ (рис. 14). Однако для специального расположения параллелограммов, показанного на рис. 14, а, можно предложить и другое доказательство, в котором равные треугольники ADF и BCE прибавляются к трапеции $ABCF$. Спрашивается, можем ли мы сохранить это доказательство и для рис. 14, б?

Идея состоит в том, чтобы продолжать считать фигуру $ABCF$ — трапецией. Правда, теперь нижней части этой трапеции следует приписать положительную площадь, а верхней — отрицательную. Если к такой трапеции прибавлять “положительные” треугольники ADF и BCE , то наложенные друг на друга отрицательная часть трапеции и положительная часть треугольника взаимно уничтожатся, а положительные части трапеции и треугольника вместе дадут нужный нам параллелограмм.

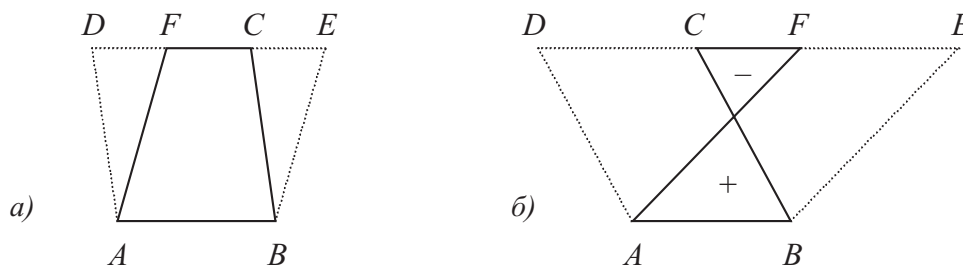


Рис. 14

Благодарности

Я выражаю свою признательность Т. П. Сушиной за апробацию представленного в этой статье комплекса задач на уроках и факультативных занятиях по геометрии в Центре образования г. Междуреченска. Я благодарю Е. Н. Игнатенкова, А. А. Мищенко, А. В. Трейера, И. А. Чернявскую, участвовавших в проведении учебно-исследовательского семинара на зимней гуманитарно-математической школе в Омске.

Литература

- 1) Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М., 1967.
- 2) Пуанкаре А. О науке. М., 1990.
- 3) Смирнова И. М., Смирнов В. А. Сумма углов звездчатого многоугольника. Математика, 2001, 1.

*Щетников Андрей Иванович,
координатор Лаборатория теоретической и
прикладной эпистемологии*

*<http://ltpe.stsland.ru>
email: schetnikov@ngs.ru*

Зависимость функций. Некоторые обобщения матриц Якоби и Вронского

В. В. Ивлев, А. И. Нижников

Излагается общая теория зависимости функций одной и многих переменных. Дается анализ ограничений существующей теории и предлагается обобщенная матрица, переходящая в граничных случаях в матрицы Якоби и Вронского. Рассматривается модель нелинейной зависимости функций, а также зависимость алгебраических многочленов.

I. Общая теория

В ряде вопросов математики [1,2,3] используется понятие общей зависимости функций многих переменных и линейной зависимости функций одной переменной. При анализе общей зависимости функций используются матрицы Якоби; линейная зависимость функций исследуется с помощью матриц (определителей) Вронского.

Начнем с общего случая зависимости функций. Рассмотрим систему m функций n переменных.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

определенных и непрерывных вместе со своими первыми частными производными в некоторой области $X \subset R^n$.

Такой областью может быть некоторая окрестность точки $x^{(0)} = (x_1^0, \dots, x_n^0)$.

Определение 1. Функция $y_m = f_m(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ называется **зависимой** в области X от функций y_1, \dots, y_{m-1} если существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(y_1, \dots, y_{m-1})$, так что имеет место

$$y_m = \Phi(y_1, \dots, y_{m-1}) \quad (2)$$

Определение 2. Система функций (1) называется **зависимой** в области X , если одна из них (неважно, какая) зависит от остальных, т.е. имеет место (2).

При отсутствии такой зависимости (2) говорят, что функции y_1, \dots, y_m **независимы** в области X .

Важным средством анализа зависимости (независимости функций) функций являются функциональные определители Якоби, составленные из первых частных производных функций (1) и имеющие вид

$$\frac{D(f_1, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \quad (3)$$

В (3) фигурируют какие-либо m переменных из n . Предполагается, что имеет место ограничение: $m \leq n$.

Теорема 1 (достаточное условие независимости).

Пусть m функций от n переменных из (1) определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда если якобиан этих функций (3) по каким-либо m переменных отличен от нуля в точке $x^{(0)}$, то эти m функций независимы в некоторой окрестности этой точки.

▼¹ Будем рассуждать от противного. Предположим, что одна из функций, например y_m , зависит от остальных, так, что

$$y_m = \Phi(y_1, \dots, y_{m-1})$$

Тем не менее якобиан этих функций (3) отличен от нуля в точке $x^{(0)}$.

Продифференцируем тождество (2) по каждой из переменных x_i , $i = \overline{1, m}$; получим систему тождеств

$$\begin{cases} \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_m} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_m} \end{cases} \quad (4)$$

Имея в виду (4), видим, что каждый элемент последней строки (3), т.е. $\frac{\partial y_m}{\partial x_1} = \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_m}{\partial x_m} = \frac{\partial f_m}{\partial x_m}$ является линейной комбинацией соответствующих элементов первых $m-1$ строк (3), умноженных соответственного на $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_{m-1}}$. Но такой определитель, известно, равен нулю, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему. ▲

Подчеркнем, что в силу непрерывности частных производных $\frac{\partial y_m}{\partial x_i}$ в (3) непрерывен и сам якобиан (3). Тогда по теореме о сохранении знака непрерывной функции, из того, что якобиан (3) отличен от нуля в точке $x^{(0)}$, следует неравенство его нулю и в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

¹Начало доказательства теоремы или решения примера будем обозначать символом ▼, окончание - символом ▲.

Пусть теперь число функций m и переменных n произвольны. Рассмотрим функциональную матрицу Якоби, составленную из частных производных функций $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$.

$$\left\| \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right\| \quad (5)$$

Назовем **рангом** матрицы (5) в некоторой области X наивысший из порядков определителей матрицы (5), не равных нулю тождественно в области X . Другими словами ранг матрицы (5) равен $r \geq 1$, если существует хотя бы один определитель порядка r , не равный нулю тождественно в X , при этом все определители порядка выше r тождественно равны нулю в X .

Теорема 2 (о выделении независимой подсистемы).

Пусть ранг матрицы Якоби (5) в точке $x^{(0)}$ равен $r < \min(m, n)$. Тогда 1) в некоторой окрестности этой точки r функций из m , входящих в отличный от нуля определитель 2-го порядка, независимы; 2) остальные $m - r$ функции зависят от них.

▼ Для определенности будем считать, что отличен от нуля в точке $x^{(0)}$ определитель, составленный из частных производных первых r функций по первым r переменным

$$\frac{D(f_1, \dots, f_r)}{D(x_1, \dots, x_r)} = \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{array} \right| \quad (6)$$

Ввиду непрерывности частных производных, определитель (6) отличен от нуля и в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда по первой теореме эти r функций независимы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Этим доказана первая часть теоремы.

Покажем далее, что, например, функция $y_{r+1} = f_{r+1}(x_1, \dots, x_n)$ зависит от первых r функций. Дополним определитель (6) строкой из частных производных и столбцом из частных производных $\frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}}, \dots, \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}}$. Получим определители $(r+1)$ -го порядка.

$$\frac{D(f_1, \dots, f_r, f_{r+1})}{D(x_1, \dots, x_r, x_{r+1})} = \left| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_r} & \dots & \frac{\partial f_{r+1}}{\partial x_{r+1}} \end{array} \right| \quad (7)$$

В соответствии с определением ранга матрицы (5), равного r , все определители $(r+1)$ -го порядка равны тождественно нулю в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Это же относится и к определителю (7). Тогда опять же из первой теоремы следует, что функция f_{r+1} зависит от первых r функций. Более детальное доказательство второй части теоремы изложено, например, в [1,2]. Аналогично доказывается зависимость функций f_{r+2}, \dots, f_m от функции f_1, \dots, f_r . ▲

Примечание. Может быть при ранге матрицы (5) r отличными от нуля несколько определителей r -го порядка. Отсюда следует, что может быть и несколько независимых подсистем из r функций, и тогда для каждой из них (подсистем) существуют свои $(m-r)$ функций, выражаемых через независимые r функций.

Частным случаем общей зависимости функций является линейная зависимость функций. В случае функций одной переменной обычно используется другой тип функциональных определителей, т.н. **определители Вронского** или **вронскианы**.

Определение 3. Функции

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x) \end{cases} \quad (8)$$

называются **линейно зависимыми** в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, если существуют постоянные C_1, \dots, C_m , не равные нулю одновременно, что имеет место тождество в этой окрестности

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(x) = 0 \quad (9)$$

причем ни одна из функций (8) не равна тождественно нулю.

Если же (9) имеет место лишь при $C_1 = \dots = C_m = 0$, то функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$ **линейно независимы**.

Пусть даны m функций $f_1(x), \dots, f_m(x)$, дифференцируемых $m-1$ раз в точке $x^{(0)}$.

Назовем функциональный определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \dots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (10)$$

определителем Вронского или вронскианом. Он широко используется в теории обыкновенных дифференциальных уравнений при анализе линейной независимости решений $f_1(x), \dots, f_m(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения m -го порядка.

Теорема 3 (необходимое условие линейной зависимости).

▼ По условию теоремы и согласно (9) имеем $\sum_{i=1}^m C_i f_i(x_i) = 0$. Дифференцируя это тождество $(m-1)$ раз, получим

$$\begin{cases} C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_m f_m(x) = 0 \\ C_1 f'_1(x) + C_2 f'_2(x) + \dots + C_m f'_m(x) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1 f^{(m-1)}_1(x) + C_2 f^{(m-1)}_2(x) + \dots + C_m f^{(m-1)}_m(x) \end{cases} \quad (11)$$

Примечания:

- Анализ изложенной теории зависимости функций позволяет выделить следующие ее ограничения и особенности.

1. Определения общей и линейной зависимости функций не зависят от числа переменных и должны иметь место при любом соотношении числа функций (m) и числа переменных (n).
 2. Аппарат якобианов при анализе зависимости функций применим лишь при $n \geq m$.
 3. Аппарат вронскианов применим лишь при $n = 1$.
- Ниже предлагаются некоторые обобщения для матриц Якоби и Вронского.

II. Линейная зависимость функций многих переменных.

1. Если число переменных x_1, \dots, x_n больше или равно числу функций f_1, \dots, f_m , т.е. $n \geq m$, то используются лишь первые частные производные и формируется матрица Якоби.

2. Если же имеется лишь одна переменная, то при анализе линейной зависимости функций используются все частные производные до $(m-1)$ -го порядка включительно и формируется матрица Вронского.

Напрашивается процедура формирования некоторой обобщенной матрицы, объединяющей обе предыдущие.

Начнем со случая линейной зависимости функций при $n > 1$.

Пусть в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$, где линейно зависимы, т.е. тождественно

$$\sum_{i=1}^m C_i f_i(x) = 0. \quad (12)$$

В силу тождественности (12) имеет место также любое равенство вида

$$\sum_{i=1}^m C_i \frac{\partial^k f_i(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0, \quad (13)$$

где $k = \overline{1, m-1}$, $k_1 + \dots + k_n = k$.

Используя (12) и (13) строим матрицу $\|V(x)\|$ m -го порядка по следующей схеме.

- а) В качестве элементов первой строки выбираем сами функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$
- б) Следующие строки формируются из первых частных производных

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{array}$$

Если при этом $n \geq m-1$, то формирование матрицы заканчивается и она имеет вид

$$\|V(x)\| = \left\| \begin{array}{ccc} f_1 & \dots & f_m \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m-1}} \end{array} \right\|. \quad (14)$$

Матрица (14) равносильно матрице Якоби с той лишь разницей, что в случае линейной зависимости в качестве первой строки используются сами функции $f_i(x)$.

в) Пусть теперь $n < m-1$. В этом случае строк с первыми частными производными “не хватает” для формирования матрицы порядка m и используются строки со вторыми частными производными.

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^2} & & \dots & \frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_1^2} \\
\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^2} & & \dots & \frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x_2^2} \\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

г) Если и этих строк недостаточно, то используются строки с частными производными третьего порядка и т.д.

В частности, при $n = 1$, приходим к матрице Вронского.

Формально имеем общий вид матрицы $\|V(x)\|$:

$$\|V(x)\| = \left\| \begin{array}{cccc}
f_1 & f_2 & \dots & f_m \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_1^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n^2} & \dots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_n^2} \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \right\| \quad (15)$$

Число строк матрицы (15) равно m .

Основные теоремы 1 и 3 дословно применимы к матрице (15); их доказательство предоставляем читателю. Подчеркнем, что условие $\|V(x)\| \equiv 0$ является лишь необходимым для существования линейной зависимости функций.

Пример. Доказать линейную зависимость функций

$$f_1 = 2(x + y + z)^2, \quad f_2 = 2xy + x^2, \quad f_3 = \frac{z^2}{2} + zx, \quad f_4 = y^2 + 2yz$$

▼ В данном случае матрицы Якоби и Вронского в “чистом” виде неприменимы. В первом случае “не хватает” переменных; во втором – число переменных больше единицы.

Выпишем обобщенную матрицу $\|V(x)\|$

$$\|V(x)\| = \left\| \begin{array}{cccc}
2(x + y + z)^2 & 2xy + x^2 & \frac{z^2}{2} & y^2 + 2yz \\
4(x + y + z) & 2y + 2x & z & 0 \\
4(x + y + z) & 2x & 0 & 2y + 2z \\
4(x + y + z) & 0 & z + x & 2y
\end{array} \right\|$$

Обозначим $V(x) = \det \|V(x)\|$.

Тогда, опустив эти сомножители, получим

$$V(x) = \begin{vmatrix} \frac{f_1}{\alpha_1} & \frac{f_2}{\alpha_2} & \dots & \frac{f_m}{\alpha_m} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m-1}} \end{vmatrix} \quad (16)$$

Итак, по аналогии с теоремами 1 и 3 можно утверждать, что условие $\|V(x)\| \equiv 0$ является **необходимым** для существования квазилинейной зависимости функций f_1, \dots, f_m . Обратно: из того, что $\|V(x)\| \equiv 0$ следует существование общей зависимости функций f_1, \dots, f_m , но не обязательно квазилинейной.

Естественно, возникает проблема выбора постоянных $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, что представляет собой отдельную задачу. Возможен их прямой перебор.

Рассмотрим частный случай: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$. Тогда, вынося в (19) за знак определителя сомножитель α^{-1} элементов первой строки, получим, что $V(x)$ из (15) и (19) совпадают при любом $\alpha \in N$ с точностью до отличного от нуля сомножителя, т.е. необходимое условие $\|V(x)\| \equiv 0$ одно и то же для любого $\alpha \in N$. Например, если f_1, \dots, f_m линейно зависимы, то $\sum_{i=1}^m C_i f_i(x) \equiv 0$. Но тогда и $\left(\sum_{i=1}^m C_i f_i(x)\right)^\alpha \equiv 0$, и раскрыв это выражение, получим аналитическое выражение для зависимости степеней функций f_1, \dots, f_m .

Пусть $n \geq m$. При этом условии стандартное применение матрицы Якоби позволяет выявить сам факт существования какой-либо зависимости функций, и лишь затем возможна попытка применения матрицы (19).

Пусть теперь имеет место квазилинейная зависимость и $1 < n < m - 1$. В этом случае для формирования матрицы $\|V(x)\|$ необходимо привлекать строки со вторыми частными производными по переменной x_1 вида

$$\frac{\partial^2 f_1^*}{\partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 f_2^*}{\partial x_1^2} \quad \dots \quad \frac{\partial^2 f_m^*}{\partial x_1^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1^*}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\alpha_i f_i^{\alpha_i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) = \alpha_i (\alpha_i - 1) f_i^{\alpha_i-2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)^2 + \alpha_i f_i^{\alpha_i-1} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} = \\ &= \alpha_i f_i^{\alpha_i-1} \left[\frac{(\alpha_i - 1)}{f_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Опуская сомножитель $\alpha_i f_i^{\alpha_i-1}$, получим элементы строки со вторыми производными по x_1 :

$$\frac{\alpha_1 - 1}{f_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \dots \frac{\alpha_m - 1}{f_m} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_1^2}.$$

Теорема 5. Пусть дана система многочленов

$$y_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} x^j, \quad j = \overline{1, m}$$

и соответствующая матрица $\|a_{ij}\|$ коэффициентов.

Тогда:

- 1) если ранг r матрицы $\|a_{ij}\|$ равен m , то функции y линейно независимы;
- 2) если ранг r матрицы $\|a_{ij}\|$ меньше m , то функции y линейно зависимы; r функций, по которым минор r -го порядка отличен от нуля линейно независимы, а остальные линейно выражаются через эти r функций;
- 3) линейная зависимость единственна, если $r = m - 1$;
- 4) система многочленов попарно различных степеней линейно независима.

В случае функций двух и более переменных принципиально подход сохраняется, однако трудоемкость вычислений существенно возрастает.

Пример. Определить зависима ли система функций

$$f_1 = x + y + z, \quad f_2 = x^2 + 2yz, \quad f_3 = \sqrt{z^2 + 2yz}, \quad f_4 = y^2 + 2yz.$$

▼ Очевидно, что система функций линейно независима. Будем искать зависимость функций в квазилинейной форме.

$$C_1 f_1^{\alpha_1} + C_2 f_2^{\alpha_2} + C_3 f_3^{\alpha_3} + C_4 f_4^{\alpha_4} = 0 \quad (*)$$

В данном случае $m = 4$, $n = 3$

В соответствии с (19) составим определитель $V(x, y, z)$

$$V(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{x+y+z}{\alpha_1} & \frac{x^2+2yz}{\alpha_2} & \frac{\sqrt{z^2+2yz}}{\alpha_3} & \frac{y+2zx}{\alpha_4} \\ 1 & 2x & \frac{y}{\sqrt{z^2+2xy}} & 2z \\ 1 & 2z & \frac{x}{\sqrt{z^2+2xy}} & 2y \\ 1 & 2y & \frac{z}{\sqrt{z^2+2xy}} & 2x \end{vmatrix} \quad (**)$$

Преобразуем определитель (**), разделив второй и четвертый столбцы на 2, третий – умножив на $\sqrt{z^2 + 2xy}$, а первый – умножив на $x + y + z$.

Это возможно, так как целью является доказать тождественное равенство нулю (*) при некоторых значениях $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Имеем

$$V(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{(x+y+z)^2}{\alpha_1} & \frac{x^2+2yz}{2\alpha_2} & \frac{z^2+2xy}{\alpha_3} & \frac{y^2+2zx}{2\alpha_4} \\ x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & z & x & y \\ x+y+z & y & z & x \end{vmatrix} \quad (***)$$

Если теперь из первого столбца (***) вычесть три остальных столбца этого же определителя, второй, третий и четвертый элементы первого столбца обратятся в нуль, а первый элемент примет вид

$$\frac{(x+y+z)^2}{\alpha_1} - \frac{x^2+2yz}{2\alpha_2} - \frac{x^2+2yz}{\alpha_3} - \frac{y^2+2zx}{2\alpha_4}$$

или, группируя, члены

$$x^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_4} \right) + z^2 \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_3} \right) + \\ + 2xy \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_3} \right) + 2yz \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_2} \right) + 2xz \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{2\alpha_4} \right).$$

Видно, что для тождественного равенства нулю этого выражения, а значит и равенства нулю $V(x, y, z)$ необходимо

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 2; \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = 1; \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_4} = 2. \quad (***)\blacktriangle$$

Условие (****) является лишь необходимым для выполнения зависимости (*). Из (****) следует ряд любопытных выводов.

1. Величины $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ определяются с точностью до постоянного сомножителя. Это значит, что выполняется необходимое условие для множества квазилинейных зависимостей (*).

2. Условие данной квазилинейной зависимости (*) выполняется только при конкретном наборе $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, равных $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 1$ и имеет вид $f_1^2 - f_2 - f_3^2 - f_4 \equiv 0$, что проверяется непосредственной подстановкой.

3. Условие квазилинейной зависимости (*) будет тем же самым, если

а) степени $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ умножить на k ;

б) вместо функций f_1, \dots, f_4 рассматривать функции

$$f_1^* = \sqrt[k]{f_1}, \quad \dots, \quad f_4^* = \sqrt[k]{f_4}.$$

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. “Курс дифференциального и интегрального исчисления”. Том 1, Санкт-Петербург, изд. “Лань”, 1997 г.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. “Основы математического анализа”. Часть 1, Москва, Наука. Физматлит, 1998 г.
3. Тихонов А.Н. и др. “Дифференциальные уравнения”. Москва, Наука. Физматлит, 1998 г.

*Ивлев Валерий Васильевич,
профессор МГОПУ им. М. А. Шолохова,
доктор технических наук*

*Нижников Александр Иванович,
профессор МСОПУ им. М. А. Шолохова,
доктор педагогических наук*

Образовательные инициативы

Олимпиада абитуриентов Южно-Уральского государственного университета

А. Ю. Эвнин

Приводятся сведения об олимпиаде 2000–2003 гг. для абитуриентов Южно-Уральского государственного университета, г. Челябинск.

В олимпиаде участвовало около 170 учащихся Челябинска, Челябинской области, а также Казахстана и Молдавии. Олимпиада прошла в два тура. Победители получили некоторые льготы при поступлении в ЮУрГУ.

Материалы олимпиады Южно-Уральского государственного университета 1999 г. приведены в статье

Вступительные экзамены в вузы. ЮУрГУ. – Математика в школе. – 2000. – 3,
а предыдущих лет — в сборнике

Олимпиады ЮУрГУ для абитуриентов. Математика. Задачи и решения. // Дильман В.Л., Заляпин В.И., Малиновский Ю.Г. и др. – Челябинск: Изд. дом Обухова. – 2000.

В настоящей публикации — условия и решения задач 2003 г., а также условия задач за 2000–2002 гг.

Первый тур

1. В ряд написаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Можно ли поставить между ними плюсы и минусы (между двумя соседними числами обязательно должен стоять знак) так, чтобы значение полученного выражения было равно а) 2002; б) 2003? Если можно, то объяснить, как. Если нельзя, то объяснить, почему.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + xy = 8; \\ y + z + yz = 15; \\ z + x + zx = 35. \end{cases}$$

3. Пусть $f(x) = x^3 + 6(x+1)^2$. Решить уравнение $f(f(f(x))) = 2003$.

4. Решить уравнение $\arcsin \frac{x}{3} + 10 \arccos x = 5\pi$.

5. Пусть $0 < x < \pi/2$. Доказать, что

$$\sec^6 x + \operatorname{cosec}^6 x + \sec^6 x \cdot \operatorname{cosec}^6 x \geq 80.$$

6. Пусть $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 \leq a_n^2$. Доказать, что

$$\begin{aligned} & (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} - a_n b_n)^2 \geq \\ & \geq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 - a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n-1}^2 - b_n^2). \end{aligned}$$

7. Доказать, что если биссектриса треугольника видна из оснований двух других биссектрис под равными углами, то треугольник равнобедренный.

8. Пусть в треугольнике некоторая сторона меньше полусуммы двух других сторон. Доказать, что угол, противолежащий этой стороне, меньше полусуммы двух других углов.

9. Высоты треугольной пирамиды пересекаются в одной точке. Доказать, что для каждой вершины углы при ней одновременно либо острые, либо прямые, либо тупые.

Второй тур

10. Совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 12y - 8 = 0; \\ 2x^2 + y^2 - 2xy + x = 0? \end{cases}$$

11. Пусть $\sin x + \sin y + \sin z = \cos x + \cos y + \cos z = 0$. Доказать:

а) $\cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x) = -3/2$;

б) $\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 3 \cos(x + y + z)$.

12. Стороны треугольника имеют длину a, b и c . Расстояния от точки M внутри треугольника до прямых, на которых лежат стороны треугольника, равны соответственно x, y и z . Найти точку M , для которой выражение $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$ принимает наименьшее значение.

13. Две перпендикулярные плоскости пересекают сферу по двум окружностям; радиусы окружностей 18 см и 25 см. Эти окружности пересекаются в двух точках, расстояние между которыми 14 см. Найти радиус сферы.

Решения задач

1. а) Если бы все знаки были плюсами, то сумма равнялась бы 5050. Из уравнения $5050 - 2x = 2002$ найдем сумму чисел, перед которыми стоят минусы. Минусы можно поставить перед числами 44, 85, 86, ..., 100.

б) Нет, так как при любой расстановке знаков значение выражения четно.

2. Перепишем уравнения в виде

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1) &= 9, (y+1)(z+1) = 16, (z+1)(x+1) = 36. \text{ Отсюда} \\ (x+1)(y+1)(z+1) &= \pm 72. \end{aligned}$$

Ответ: $(3, 5; 1; 7), (-5, 5; -3; -9)$.

3. Заметим, что $f(x) = (x+2)^3 - 2$.
Поэтому $f(f(f(x))) = (x+2)^{27} - 2$.

Ответ: $-2 + \sqrt[27]{2005}$.

4. Поскольку $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, получим уравнение $\arcsin \frac{x}{3} = 10 \arcsin x$. Докажем, что кроме очевидного нулевого корня других корней уравнение не имеет. При $x > 0$ имеем $\arcsin \frac{x}{3} < \arcsin x < 10 \arcsin x$. Значит, нет положительных корней. В силу нечетности частей (последнего) уравнения, нет и отрицательных корней.

Ответ: 0.

5. **Первое решение (замена переменной).** Обозначим $t = \cos^2 x$. Теперь при $0 < t < 1$ нужно доказать, что

$$\frac{1}{t^3} + \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{1}{t^3(1-t)^3} \geq 80.$$

После небольших преобразований последнее неравенство принимает вид

$$2 - 3t + 3t^2 \geq 80t^3(1-t)^3.$$

Сделаем еще одну замену переменной: $y = t(1-t)$. Поскольку $0 < t < 1$, имеем $0 < y \leq \frac{1}{4}$. Перепишем неравенство в виде

$$f(y) = 80y^3 + 3y - 2 \leq 0,$$

заметим, что его левая часть — возрастающая функция и $f(\frac{1}{4}) = 0$.

Второе решение (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим). В силу указанного неравенства

$$\sec^6 x + \operatorname{cosec}^6 x \geq 2 \sec^3 x \cdot \operatorname{cosec}^3 x = \frac{16}{\sin^3 2x} \geq 16.$$

Кроме того, $\sec^6 x \cdot \operatorname{cosec}^6 x = \frac{64}{\sin^6 2x} \geq 64$.

6. Если $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$, то неравенство очевидно. Пусть $a_n^2 > a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2$. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 - a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} - a_nb_n)x + (b_1^2 + \dots + b_{n-1}^2 - b_n^2) = \\ &= (a_1x + b_1)^2 + \dots + (a_{n-1}x + b_{n-1})^2 - (a_nx + b_n)^2. \end{aligned}$$

Его старший коэффициент меньше нуля, а ветви соответствующей параболы направлены вниз. С другой стороны, $f(-b_n/a_n) \geq 0$. Значит, парабола имеет общие точки с осью Ox , а дискриминант многочлена неотрицателен. Но это равносильно тому, что требовалось доказать.

7. Пусть в треугольнике ABC проведены биссектрисы AK, BM и CT , O — точка их пересечения, и $\angle BKM = \angle BTM$. Треугольники MTB и MKB равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Отсюда $BT = BK$,

$\triangle BTO = \triangle BKO$, $\angle BOK = \angle BOT$. Угол BOK — внешний в треугольнике AOB , поэтому $\angle BOK = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Аналогично $\angle BOT = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$. Из трех последних равенств получаем, что $\angle A = \angle C$.

8. Первое решение (теорема синусов). Можно считать, что диаметр описанной окружности равен 1. Тогда сторона равна синусу противолежащего угла. Имеем

$$\sin \alpha < \frac{1}{2}(\sin \beta + \sin \gamma) = \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq \sin \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Очевидно, $\frac{\beta + \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\sin \alpha$ — не наибольшая сторона, откуда $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. На промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$ синус возрастает, поэтому из доказанного неравенства $\sin \alpha < \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$ следует, что $\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Второе решение (теорема косинусов). Неравенство $\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$ равносильно тому, что $\alpha < \frac{\pi}{3}$, или $\cos \alpha > \frac{1}{2}$. Действительно,

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{b^2 + c^2 - (\frac{b+c}{2})^2}{2bc} = \frac{3(b^2 + c^2) - 2bc}{8bc} \geq \frac{3 \cdot 2bc - 2bc}{8bc} = \frac{1}{2}.$$

9. Ребро BC перпендикулярно высотам, опущенным на противоположные грани из вершин A и D . Поскольку эти высоты пересекаются, BC перпендикулярно определяемой ими плоскости, которой принадлежит ребро AD . Итак, $BC \perp AD$, т.е. $\vec{CB} \cdot \vec{DA} = 0$, или

$$\vec{CB} \cdot (\vec{CA} - \vec{CD}) = 0, \quad \vec{CB} \cdot \vec{CA} = \vec{CB} \cdot \vec{CD}.$$

Аналогично доказывается, что $\vec{CD} \cdot \vec{CA} = \vec{CB} \cdot \vec{CD}$. Значит, косинусы углов при вершине C имеют одинаковые знаки. То же имеем и для других вершин тетраэдра.

10. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + 12y = y^2 + 8; \\ (x + \frac{1}{2})^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Отсюда $|x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ и $|x - y| \leq \frac{1}{2}$, откуда $-1 \leq x \leq 0$ и $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Но тогда $x^2 + 12y \leq 1 + 6 = 7$, в то время как $y^2 + 8 \geq 8$.

Ответ: Система несовместна.

11. Заметим, что $2S = ax + by + cz$, где S — площадь треугольника. Функция f принимает наименьшее значение одновременно с функцией

$$f \cdot 2S = a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ca \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right).$$

Очевидно, что последнее выражение минимально при $x = y = z$.

Ответ: M — центр вписанной окружности.

12. В рамках данной задачи без ограничения общности можно считать, что $0 \leq x \leq y \leq z \leq 2\pi$. Рассмотрим векторы $\mathbf{r}_1 = (\cos x; \sin x)$, $\mathbf{r}_2 = (\cos y; \sin y)$, $\mathbf{r}_3 = (\cos z; \sin z)$. Эти векторы по длине равны единице, а их сумма по условию задачи равна нулевому вектору. Отсюда нетрудно получить, что попарные углы между векторами — по 120° , т.е. $x = y - \frac{2\pi}{3}$, $z = y + \frac{2\pi}{3}$. Теперь требуемые равенства проверяются непосредственной подстановкой выражений x и z через y .

13. Пусть окружности пересекаются в точках A и B , K — середина отрезка AB ; C и D — центры окружностей, O — центр сферы. Тогда, применяя несколько раз теорему Пифагора, имеем:

$$CK^2 = CA^2 - AK^2 = 18^2 - 7^2; DK^2 = AD^2 - AK^2 = 25^2 - 7^2;$$

$$OK^2 = OD^2 + DK^2 = CK^2 + DK^2; OA^2 = OK^2 + AK^2 = 900.$$

Ответ: 30 см.

Замечание. Наиболее сложными задачами оказались 6, 9 и 11б — никто из участников олимпиады не смог их решить.

Условия задач олимпиады ЮУрГУ предыдущих лет

2000 год

1. Число 12345678910111213...979899100 образовано цифрами всех целых чисел от 1 до 100, записанными подряд. Какие 100 цифр следует вычеркнуть, чтобы число, образованное оставшимися цифрами, было бы наибольшим?

2. Докажите, что для любых $0 \leq x, y, z \leq 1$ справедливы неравенства

а) $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leq \frac{3}{2}$;

б) $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leq 1$.

3. Уравнения $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ и $x^2 + \gamma x + \delta = 0$ имеют общий корень. Постройте квадратное уравнение, корнями которого являются другие корни этих уравнений.

4. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}} |x| = \frac{1}{4}(|x-2| + |x+2|)$.

5. Среди всех треугольников с данными сторонами a и b найдите тот, у которого больший угол самый маленький.

6. Докажите неравенство $\sin^2 \alpha \cdot \cos^6 \alpha \leq \frac{3^3}{4^4}$.

7. Выпуклый многогранник полностью помещается внутри куба со стороной 1. Докажите, что сумма квадратов площадей граней этого многогранника не превышает 6.

8. В автобусе для пассажиров имеются одноместные и двухместные сидения. Кондуктор заметил, что когда в автобусе сидело 13 человек, то 9 сидений оказались полностью свободными. В следующий раз в автобусе сидело 10 человек, а свободных сидений осталось 6. Сколько всего сидений в автобусе?

2001 год

1. Доказать, что перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего основания двух высот треугольника, делит третью сторону этого треугольника на две равные части.

2. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = \sqrt{1 - a^2}; \\ x^4 y^4 = \frac{8a^3 - a^2 - 6a + 2}{4} \end{cases}$$

имеет ровно два решения? Найти эти решения.

3. Какие значения может принимать сумма цифр натурального числа, делящегося на 7?

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + by + cz = a^2 + b^2 + c^2; \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2. \end{cases}$$

5. Найти все функции $f(x)$, определенные при $x > 0$, такие, что при любых $x, y > 0$ имеет место равенство

$$x^{f(y)} = y^{f(x)}.$$

6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение $y^2 = 2001 + x^2$?

7. Решить неравенство $\frac{\arccos(x^2 - x - 1) \cdot \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg}(x - 2)} \leq 0$.

8. Десять шахматистов сыграли однокруговой турнир (победа — 1 очко, ничья — 1/2 очка, поражение — 0 очков) и каждый набрал разное количество очков. Какое наименьшее число очков мог набрать победитель турнира?

2002 год

1. Пусть A — произвольное 2002-значное число, делящееся на 9, B — сумма его цифр, C — сумма цифр числа B , а D — сумма цифр числа C . Какие значения может принимать число D ?

2. Решить уравнение $(4x^2 + 6x + 4)(4y^2 - 12y + 25) = 28$.

3. Доказать, что ограниченная фигура не может иметь два центра симметрии.

4. Пусть $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}$. Найти $\frac{\sin 3x}{\sin x}$.

5. Вычислить $\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$.

6. Пусть $f(x)$ — функция, определенная при всех действительных значениях x . Доказать, что если найдется такое число a , что

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

для всех x , то функция $f(x)$ периодическая. Найти какой-либо период этой функции.

7. Доказать, что $\operatorname{tg}^2(\pi/7) + \operatorname{tg}^2(2\pi/7) + \operatorname{tg}^2(3\pi/7) = 21$.

8. Доказать, что в пространстве найдется девять точек, обладающих следующим свойством: среди любых трех из них найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1.

9. В основании пирамиды лежит параллелограмм. Доказать, что из ее боковых граней можно составить тетраэдр, и объем этого тетраэдра будет вдвое меньше объема исходной пирамиды.

*Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры
прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.*

email: evnin@prima.susu.ac.ru

Математические задачи и систематические математические знания

Дж. Малати

В российских школах алгебра, геометрия и анализ являются предметом систематического изучения, поэтому в России трудно представить западный стиль преподавания математики. Учебники в западных странах представляют собой собрания отдельных тем, взаимосвязи между которыми остаются неясными. Каждая тема организована вокруг одного или нескольких вычислительных правил. Слово “доказательство” неизвестно учащимся многих западных стран, даже в старших классах средней школы. Когда сегодня на Западе говорят о решении задач, подразумеваются задачи, решение которых не требует систематических математических знаний. (Комментарий автора — *прим. ред.*)

1. Математические задачи и движение “решение задач”

Систематическое математическое знание создавалось и развивалось в процессе решения математических задач. Одна из главных целей школьного образования состоит в сохранении человеческой культуры, включая математическую культуру. Таким образом при преподавании/изучении каждой математической темы школьное образование должно было предлагать те или иные математические задачи. Со времени окончания движения за “новую математику”, в конце 70-х годов прошлого века, эта ситуация в разных регионах мира изменилась, особенно в западных странах [Malaty 1998 и Malaty 1999]. Как реакция на движение за “новую математику” возникло движение “назад к основам”, которое делало акцент на развитие арифметических навыков. Поскольку развитие арифметических навыков не является адекватной целью математического образования, к 1985 году был выдвинут новый лозунг в качестве противовеса механическому характеру обучения арифметическим навыкам. Это лозунг “решение задач”. В соответствии с ним учителя математики занялись коллекционированием и разработкой задач, которые можно использовать в преподавании математики в школе. В основном были подобраны задачи типа головоломок, которые не требовали систематического математического знания. Этот тип задач, кроме того, не может быть охарактеризован как соответствующий определенному образовательному уровню [Pehkonen, 1992, 4]. Все

это соответствовало школьным учебным планам, не включавшим систематического изучения математики, а также совпало с нехваткой квалифицированных учителей математики в некоторых западных странах. С другой стороны, задачи такого типа вовлекали учителей, не являвшихся специалистами математического образования, к броскому лозунгу “решение задач”. Некоторые из этих учителей приняли участие в разработке теоретической основы этого движения.

2. Систематическое или несистематическое изучение математики?

В 80-е и 90-е годы прошлого века имело место широкое распространение задач типа головоломок, например, задач на перекладывание спичек [Malaty 2002] и других подобных задач, не требующих систематических математических знаний. Под вопросом остается декларация о непривязанности таких задач к определенному образовательному уровню. Одна из задач, на составление магического квадрата 3×3 , считалась подходящей для всех уровней. “Магический” характер задачи вдохновлял учителей предлагать ее даже в первых классах начальной школы. Обычно, когда она предлагалась в качестве домашней задачи детям младшего возраста, реально ее решали родители или другие взрослые. В некоторых случаях дети говорили, что дома никто не смог решить задачу.

Задачу можно решить перебором различных случаев, но нужны некоторые разумные основания, чтобы предпочесть одни случаи и исключить другие. Метод проб и ошибок не является подходящей стратегией, необходимо обращение к математическому мышлению. Магическая числовая окраска задачи является причиной, по которой в Китае в магическом квадрате Ло Шу (рис. 1) видят начала науки и математики [Swetz 1994, 35].

“Ло Шу” означает “Книги Ло”, а Ло была одной из главных рек древнего Китая. Согласно легенде, магический квадрат, изображенный на рис. 1, был мистической фигурой на панцире “божественной черепахи”.

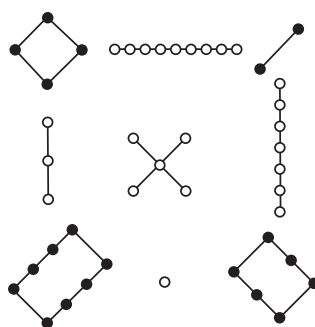


Рис. 1

Магический квадрат Ло Шу по своей форме и содержанию демонстрирует понимание числовых соотношений в рамках систематического математического знания. В углах квадрата цепочки черных жемчужин представляют четные числа, остальные цепочки белых жемчужин представляют нечетные числа. Форма черных

цепочек демонстрирует делимость четных чисел на 2. Нечетные числа мистически расположены в форме креста с числом 5 посередине. Нечетные числа считались символом полноты и неделимости. Это лежит в основе арабского талисмана “хамаса ва хомиса” или “пять и малое 5”, который можно увидеть в арабском мире на декорациях в форме человеческой ладони.

Решение задачи о магическом квадрате можно получить многими способами, при этом всегда требуется понимание числовых соотношений. Одна из подходящих стратегий решения задачи — найти число в центральном малом квадрате.

a	d	g
b	e	h
c	f	i

Рис. 2

$$(a + e + i) + (g + e + c) + (d + e + f) + (b + e + h) = 15 + 15 + 15 + 15$$

$$\implies (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) + 3e = 60$$

$$\implies 15 + 15 + 15 + 3e = 60 \implies 3e = 15 \implies e = 5.$$

Поскольку 5 — нечетное число, сумма a и i должна быть четной, так же как и сумма g и c .

Сумма двух чисел четна, если оба числа четны или оба нечетны. Предположим, что a и i нечетны, так же как g и c . В этом случае в верхнем ряду сумма чисел a и g четна, и значит d должно быть нечетным. Тогда по крайней мере все шесть чисел e, a, i, g, c, d являются нечетными. Это невозможно, так как от 1 до 9 имеется только 5 нечетных чисел.

Предположим, что a и i нечетные, а g и c четные. Тогда сумма a и g нечетна, поэтому d должно быть четным. Аналогично f, b, h должны быть четными. Это значит, что от 1 до 9 должно оказаться 6 четных чисел, что невозможно. Подобным же образом приходим к заключению, что g и c не могут быть нечетными.

Из приведенного выше рассуждения следует, что a, i, g, c должны быть четными. Таким образом, a является одним из четырех чисел 2, 4, 6, 8. Соответственно i может быть равно 8, 6, 4, 2. В каждом из этих случаев для g остается две возможности. Это значит, что всего имеется восемь различных решений задачи. Учащиеся могут показать, что из 4 случаев три являются поворотами одного, а остальные четыре являются зеркальными отражениями первых четырех.

3. Кому? Когда? И как?

При написании этой статьи я использовал поисковую систему Интернета “Google search” для проверки некоторых моментов легенды о квадрате Ло Шу. Поиск по “Lo shu” дал 3370 сайтов, а поиск по “square Lo shu” дал 953 сайта. Большинство сайтов, имеющих отношение к магическому квадрату Ло Шу, посвящены обучению математики, среди них сайт “Математический Форум”. Нельзя сказать, что я изучил все сайты, однако, те, которые я смог просмотреть, не дают точного ответа на вопрос, детям какого возраста можно предлагать эту задачу. Также не было ответа на вопрос, когда стоит предлагать эту задачу. Даже вопрос, как вводить задачу, четко не обсуждается.

Приведенное выше рассуждение принадлежит мне, я узнал о легенде про Ло Шу и об идее доказательства в возрасте 14 лет. Это предлагалось только студентам второго класса старшей средней школы, с увеличенным количеством уроков по математике. Это была часть недельного курса по истории математики [Lofty и Abu Alabbas 1958, 37-39].

Задача была удачно предложена нам в этом возрасте, при нашем уровне систематических знаний по алгебре, — это способствовало пониманию магии квадрата Ло Шу. Формулировка задачи позволяет написать 8 уравнений первой степени. Этого кажется недостаточно, чтобы найти значения 9 неизвестных в клетках квадрата. Однако форма квадрата позволяет написать девятое уравнение $3e = 15$, использованное в приведенном рассуждении.

На самом деле задачу можно предлагать уже в первых классах начальной школы, но она должна соответствовать уровню математических знаний детей. Например, если сообщить, что в центре квадрата стоит 5, это поможет некоторым учащимся найти решение; это будет подходящей задачей для учащихся 10-летнего возраста. В первых классах начальной школы задача окажется подходящей большинству учащихся, если кроме 5 в центре указать также одно из четных и одно из нечетных чисел, как на рис. 3.

		2
	5	
	1	

Рис. 3

Все это не значит, что задача безусловно хорошая. Мы должны ответить на вопросы “Кому?”, “Когда?”, “Как?”.

В случае учащихся 11-14 лет, в зависимости от содержания учебного плана и уровня класса, мы могли бы вести детей к поиску приведенного выше решения. Однако, этого не достаточно. Необходимо побуждать учащихся искать другое решение, которое может несколько отличаться от указанного. Если это не приводит к успеху, следует вернуться к нашему решению и предложить подумать, как можно продолжить решение другим способом после того, как мы определили, что в центре квадрата стоит 5. Если и эта подсказка не помогает, следует спросить о числах, которые мы исследовали в нашем решении после того, как нашли число в центре квадрата. Наконец, мы можем предложить выбрать для исследования другие числа, чем a , i , g , c (рис. 2).

4.1 Арифметические задачи

Уже в начальной школе можно предложить математические задачи, которые требуются для формирования начал систематических знаний по математике и для наращивания этих знаний. Вот одна из таких задач, предлагавшаяся ученикам первого класса в Венгрии (Hajdu 1998, 66). Мы несколько изменили используемые геометрические фигуры, но идея остается та же, что и в оригинале. В Венгрии одним из наиболее ценных принципов при обучении математике считается “принцип спирали”. Ниже при обсуждении примера мы увидим, как обучение простым задачам в первых классах оказывается фундаментом для решения систем уравнений в будущем. Этот простой пример содержит идею решения системы 5 уравнений первой степени с 5 неизвестными.

На рисунке 4 различные геометрические фигуры представляют различные натуральные числа. Сумма четырех чисел в каждой линии равна 8. Какое число представляется каждой фигурой?

При обучении решению подобных задач важно побуждать учащихся искать разные стратегии решения задачи, обсуждать все предложенные учениками стратегии и способствовать поиску новых. Каждый раз, когда учащийся предлагает некоторую стратегию, учителю следует выяснить, что лежит в основе этого выбора. Следует обсуждать не только правильные выводы, возможно, даже полезней обсуждать неверные выводы и заключения. Это и есть способ развивать способности всех учащихся класса к решению математических задач и построению систематических математических знаний. Представление задачи в виде геометрической конфигурации имеет следующий смысл: оно показывает, что задача не решается алгоритмически “слева направо”, как это происходит при механическом обучении арифметическим навыкам.

Оптимальная стратегия при решении этой задачи — найти число, представленное пятиугольником. Очень важно обсудить с учениками, почему предпочтительно начать с этой фигуры. Причина в том, что пятиугольник — единственная фигура, присутствующая в правой верхней линии.

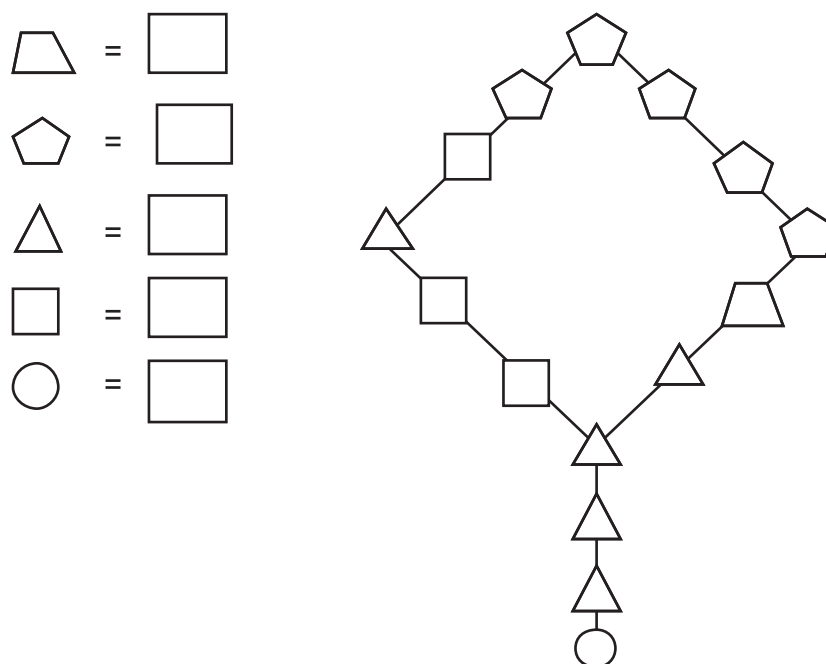


Рис. 4

Поиск другой стратегии может привести к мысли, что надо начинать искать число, представленное треугольником. Причина в том, что треугольник встречается три раза на нижней вертикальной линии. Тогда число, представленное треугольником, должно быть меньше 3. Значение 3 невозможно, так как сумма трех этих чисел равна уже 9. Значение 2 также невозможно, так как в этом случае число, представленное кругом, тоже окажется равно 2 (а разные фигуры, по условию, изображают разные числа). Значит, треугольник представляет число 1. Можно обсудить и другие стратегии решения. Выше мы отмечали, что не всякая задача нужна при построении систематического математического знания, а также что не всякая задача способствует такому построению. Здесь мы хотим добавить, что не всякий способ обучения развивает мышление учащегося. Побуждая учащихся обосновывать свои стратегии и прививая привычку искать основания способа решения, мы делаем обучение математике средством, развивающим мышление ученика (Malaty 1988).

4.2 Типы арифметических задач

Нужные для понимания систематического математического знания, а также способствующие построению такого знания арифметические задачи связаны не только с уравнениями, неизвестными или геометрическими конфигурациями. Относить к таким задачам так называемые “текстовые задачи” тоже не всегда правильно. С одной стороны, не каждая арифметическая задача является текстовой задачей, с другой стороны, текстовая задача может вовсе не оказаться задачей в математическом смысле.

Приведем пример текстовой задачи. Дедушка подарил Маше некоторую сумму денег на день рождения. Три пятых денег Маша истратила на покупку книги. Пять

седьмых оставшихся денег она положила в копилку, после чего у нее осталось еще 12 рублей. Сколько денег подарил дедушка Маше?

Является ли эта текстовая задача подходящей задачей? Может быть да, а может быть нет. Если ученики еще не решали подобных задач, она может оказаться подходящей задачей, в противном случае это не задача, а упражнение на отработку навыка.

Арифметические задачи могут относиться не только к уравнениям, неизвестным или текстовым задачам. Рассмотрим другой тип арифметических задач на следующем примере. Использовать число 2 три раза при построении выражения, значение которого равно а) 6, б) 8, в) 3, г) 1, д) 2.

5. Временной фактор и ценность задачи

Ценность задачи и ее влияние на развитие мышления учащихся зависит, среди прочего, и от временного фактора. Например, если приведенная выше текстовая задача предложена ученикам, когда они уже изучили буквенную алгебраическую символику, она не очень способствует развитию мышления учащихся. Эту задачу следует предлагать раньше, как только изучены связь между умножением и делением, а также умножение дробей. Так что это подходящая задача для учащихся примерно 5 класса. Некоторые из таких учащихся могут предложить следующий короткий способ: подаренная сумма денег равна $(5/2) \cdot (7/2) \cdot 12$ рублей. Очень важно предложить им объяснить всем остальным учащимся класса, как они пришли к такому утверждению.

Та же самая задача может оказаться подходящей для учащихся третьего и менее класса, в зависимости от их уровня. Наиболее существенное требование для решения этой задачи — владение понятием дроби. Для младших учащихся возможность решить эту задачу означает высокий уровень способности к решению задач при систематическом изучении математики.

Другая задача, упомянутая в пункте 4.2, также может иметь различное значение в зависимости от фактора времени. Задача подходит ученикам второго класса, которые освоили четыре арифметических операции. Они могут предъявить решение следующего вида: а) $2 + 2 + 2$; б) $2 \cdot 2 \cdot 2$; в) $2 + 2 : 2$; г) $2 - 2 : 2$; д) $2 + 2 - 2$.

Ту же самую задачу можно предложить учащимся позже, когда они изучат роль скобок. При этом кроме приведенных выше решений можно найти и другие, например $2 \cdot (2 + 2)$ в случае б) и $(2 + 2) : 2$ в случае д). Фактор времени может оказаться решающим не только при определении уровня задачи, но и в случае превращения упражнения на отработку навыка в содержательную задачу. Приведем пример.

В следующих записях требуется заменить знак вопроса одним из знаков “>”, “<” или “=”: а) $4 + 9 ? 6 + 9$; б) $6 + 7 ? 8 + 3$; в) $\frac{3}{5} ? \frac{4}{9}$; г) $\frac{17}{19} ? \frac{11}{13}$. Здесь а) и б) являются подходящими задачами перед изучением сложения чисел, не больших 9. Примеры в) и г) становятся подходящими задачами, если они даются перед изучением приведения дробей к общему знаменателю. Следует отметить, что задачи типа а) и б) помогают накопить предварительный опыт для понимания алгебры, который будет востребован при решении уравнений и неравенств. Части в) и г) с

одной стороны могут служить проверкой понимания дробей, а с другой стороны могут способствовать построению понятия дроби.

6. Учебники и учителя: от простых упражнений к математическим задачам

Сегодня широко распространены учебники, делающие акцент на развитии арифметических навыков. “Задачные разделы” в учебниках часто не имеют отношение к той или иной школьной теме, и нельзя полагать, что они содержат достаточный задачный материал для учеников соответствующего класса. Обычно в пособиях для учителей приводятся ответы к задачам, но не предлагается никакой стратегии использования задач при обучении математике. Необходимо иметь другие типы учебников, которые отражают природу математики, а также ее развитие как элемента культуры. Уже с первых классов учебники должны побуждать к поискам изящных рациональных решений задач, даже если эти задачи выглядят как упражнения на отработку арифметических навыков. Приведенный выше последний пример предыдущего параграфа иллюстрирует эту идею применительно к первым классам начальной школы, приведем еще пример для старших классов начальной школы (Malaty 2003). Найти рациональным, изящным способом значения следующих выражений:

- a) $7,92 + 34,9 + 2,08$
- б) $8,15 - 9,43 + 11,85 - 0,57$
- в) $6,83 + 10,4 + 0,17 + 9,6$
- г) $0,16 \cdot 0,25$
- д) $24 \cdot 17 + 17 \cdot 6$
- е) $9 \cdot 7 + 43 + 34$

Нахождение изящного решения — это творческая работа при решении подобных задач. Удовлетворение от найденного удачного решения одного из примеров служит стимулом к решению остальных примеров. Детям приходится учиться анализировать задачу, а также овладевать способами синтетической, логически продуманной записи решения. Эти способности необходимы при изучении математики, они помогают строить систему математических знаний в мышлении учащихся. Некоторых учащихся подобные задания могут привлечь к более глубоким занятиям математикой. Тип мышления при выполнении этого задания тот же самый, что при будущей работе с буквенными выражениями в алгебре. Косвенным способом дети приучаются понимать и использовать такие свойства чисел, как коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность.

Возможности творческого обучения очень зависят от учителя. Образование учителей должно приводить их к пониманию природы математики, а также устройства систематического математического знания. Это образование также должно побуждать их работать творчески. Они должны не только вдохновлять учащихся на поиски различных решений задачи, но и содействовать поиску этих решений. Необходимо поощрять творчество учителей, направленное на модификацию существующих учебных пособий, а также на создание собственных учебных пособий. Давайте, например, еще раз критически рассмотрим обсуждение в параграфе 5,

относящееся к второй задаче пункта 4.2. Мы не рассмотрели следующие возможные решения: для пункта а) $2 \cdot 2 + 2$ или $2 + 2 \cdot 2$, для пункта б) $(2 + 2) \cdot 2$, для пункта в) $2 : 2 + 2$, для пункта д) $2 \cdot 2 : 2$ или $2 : 2 \cdot 2$. Учителю следует также спросить учеников, как таким способом можно получить наибольшее число или наименьшее. Учащиеся могут обнаружить, что 0 является наименьшим возможным числом, $(2 - 2) \cdot 2$, $2 \cdot (2 - 2)$, $(2 - 2) : 2$. Можно ли получить пропущенные числа от 0 до 8, в данном случае это 4 и 5? Учащиеся могут конструировать новые аналогичные задачи, например, используя 3 вместо 2, или используя четыре двойки вместо трех и т.п. Работу такого типа я могу охарактеризовать как открытую задачу, или, в терминах Пойа, построение дерева задач.

7. Заключительные замечания

В настоящей заметке я обсуждал в основном арифметические задачи. На это есть две причины. Одна из них — механический способ обучения арифметическим навыкам в процессе движения “назад к основам”, что способствовало распространению задач типа головоломок под лозунгом “решение задач”. Поэтому важно показать, что систематическое обучение арифметике поставляет подходящие задачи, на основе которых строится систематическое математическое знание, включая алгебраические структуры. Другая очевидная причина, что в небольшой заметке следует ограничить себя одной конкретной областью.

Литература

Hajdu, S., 1998, Mathematics Enhancement Programme, Primary Demonstration Project, Practice Book, Y1a (Budapest: Muszaki)

Lotfy, A. and Abu Alabbas, A. 1958, Tarykh Alryadiyat (Cairo: Ministry of Education).

Malaty, G., 1988, How Mathematics Education Can Promote the Mind? In: Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education, p.135.

Malaty, G., 1998, Eastern and Western mathematical education: Unity, Diversity and Problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 3, pp.421-436.

Malaty, G., 1999, The Third World Mathematics Education is a Hope for the World Mathematics Education Development in the 21st Century” Proceedings of the International Conference, Mathematics Education into the 21st Century, Societal Challenges, Issues and Approaches”, Cairo, pp. 231-240.

Malaty, G., 2002, School Mathematics Geometric Problems: Past, Present and Future. In: The Mathematics Education into the 21st Century Project. Proceedings of the International Conference “The Humanistic Renaissance in Mathematics Education”, Terrasini, Palermo”, pp.240 - 244

Malaty, G., 2003, Johdatus matematiikan rakenteseen (Helsinki: National Board of Education).

Pehkonen, E., 1992, Using Problem Fields as a Method of Change. In: The Mathematics Educator, 1, pp.3-6.

Swetz, F., 1994, Seeking Relevance? Try the History of Mathematics. In: From Five Fingers to Infinity (Chicago: Open Court).

Перевод с английского: В. М. Имайкин

*Малати Джордж,
профессор университета Йоенсуу, Финляндия*

E-mail: george.malaty@joensuu.fi

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода “Серп и Молот”, д. 3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2004 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2004 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит “Обозрение Z” — научно-популярное приложение к журналу “Математическое образование”. Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I. Kostenko. Introduction to Probabilistic Prediction (continued) 2

We continue to publish the manual on probability theory. This issue contains lectures 10, 11 and the corresponding exercises. Lecture 9 was published in the issue 4(27), 2003.

A. Zemlyakov. Algebra* (finished) 58

An optional course in algebra for advanced high school students.

A. Schetnikov. A Sum of Angles of a Self-intersecting Polygon 78

The problem is supposed to be investigated by school students which start to study geometry.

V. Ivlev, A. Nizhnikov. Dependence of Functions. Some Generalizations of Wronsky and Jakoby Matrices 87

Some methods are developed to establish functional dependence of functions of one or more variables.

A. Evnin. Math Olympiad of the State University of the Southern Urals 100

The problems of the mathematical Olympiad of the State University of the Southern Urals, Chelyabinsk, years 2000–2003 and the solutions for the year 2003.

G. Malaty. Mathematical Problems and Mathematical Structures 107

About the role of arithmetic problems as relevant problems in building mathematical structures for junior school students (translated from English).