

# Математическое образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

Год одиннадцатый

№ 4 (44)

Октябрь-декабрь 2007 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

---

*Периодическое издание в области математического образования*

Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.  
Дориченко С.А. (заместитель главного редактора)  
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)  
Дубовицкий А.В.  
Комаров С.И.  
Константинов Н.Н.  
Костенко И.П.  
Саблин А.И.

№ 4 (44), 2007 г.

© “Математическое образование”, составление, 2007 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2007 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,

лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 28.12.2007 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (44), октябрь – декабрь 2007 г.

## Содержание

### Учащимся и учителям средней школы

- С. В. Дворянинов.* Что такое группы функций 2
- Е. Д. Куланин.* Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника 9
- Ф. К. Нилов.* Геометрическое доказательство достаточности признака  
прямоугольного треугольника 25

### Студентам и преподавателям математических специальностей

- А. Ф. Ляхов.* Математизация исторических исследований 28
- А. Ф. Ляхов, Ф. А. Ляхов.* Математическое моделирование динамики средних  
распределённых систем 33

### Учебное пособие в журнале

- В. Б. Дроздов.* Комплексные числа — школьникам, студентам, учителям 39

### Содержание образования

- В. М. Имайкин.* Возможное направление модернизации понятийного аппарата  
школьных предметов естественнонаучного цикла. Часть 1 60

## Что такое группы функций

С. В. Дворянинов

В статье на доступном старшим школьникам уровне рассказано об интересном и важном в современной математике понятии группы функций. Рассмотрены многочисленные примеры, описан способ получения различных групп функций.

### Введение

Понятие группы — одно из важнейших в математике. Такое же важное, как понятия числа или функции. Существует целый раздел математики — теория групп.

Как мы узнаём что-то новое? Давайте вспомним для примера числа: сначала мы узнали о *натуральных* числах, потом — о *целых*, *рациональных*, *иррациональных*, *вещественных*, потом появляются *комплексные* числа или даже *кватернионы*... Мы так и говорили: *целые* числа, *рациональные* числа, и т.д. Похожим образом обстоит дело с функциями: сначала изучаются *линейные* функции, потом *квадратичные* функции, *тригонометрические* функции, ... и только после большого количества примеров формируется общее представление о *функции* (уже без всяких прилагательных).

Давайте пройдем такой же путь и к понятию *группы*. Сейчас мы расскажем о *группах функций*. Потом вы узнаете о *других* группах, и после такого “живого созерцания” многих разнообразных примеров у вас сформируется общее понятие абстрактной группы. Таков, как говорил немецкий философ Гегель, общий путь познания — от живого созерцания к абстрактному мышлению.

Мы постараемся, чтобы содержание статьи в основном было доступно девятиклассникам. Примеры, которые содержат незнакомые девятиклассникам функции, можно пропустить. Для понимания текста необходимо твердо знать две вещи (о них обязательно говорят в школе). Первое — это определение сложной функции. Попросту говоря, сложная функция — это функция от функции. Так, например, исходя из двух функций, — квадратичной  $f(x) = x^2$  и линейной  $g(x) = 2x - 1$ , — можно построить две сложные функции. Одна функция — это  $f(g(x)) = (2x - 1)^2$ , которую обозначают  $(f \circ g)(x)$ , или просто  $f \circ g$ . Другая функция — это  $g(f(x)) = 2x^2 - 1$ , которую обозначают  $(g \circ f)(x)$ , или просто  $g \circ f$ . Обратите внимание на то, что, вообще говоря,  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ . Это означает, что операция построения сложной функции не коммутативна (по-русски — не перестановочна).

Сложную функцию называют также композицией. Заметим, что операция композиции функций ассоциативна: для любых трех функций  $f, g, h$  справедливо равенство

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Это следует из того, что значения каждой из двух сложных функций, стоящих в обеих частях этого равенства, равны  $f(g(h(x)))$ . В этом легко убедиться, если исходить из определения композиции двух функций.

Второе, без чего нам не обойтись, — это понятие обратной функции. Так, например, отыскание обратной функции для функции  $g(x) = 2x - 1$  сводится к решению уравнения  $y = 2x - 1$  относительно  $x$ . Получаемое при этом равенство  $x = \frac{y+1}{2}$  и задает обратную функцию. Традиционно, однако, аргумент функции обозначают буквой  $x$ , а значение функции — буквой  $y$ , поэтому обратная функция для функции  $g$  такова:

$$g^{(-1)}(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Здесь показатель  $(-1)$  — это не показатель степени, а обозначение именно обратной функции для функции  $g$ . Функция  $f(x) = x^2$ , как хорошо известно, при всех значениях  $x$  обратной не имеет. Если же считать, что  $x \geq 0$ , то обратная функция существует, и  $f^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$ .

**Задача.** Функция  $y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2+|x|}$  имеет обратную функцию, которая при неотрицательных значениях  $x$  задается формулой  $y = x - 2 + \sqrt{x^2 + 4}$  (проверьте это). Какой формулой задается обратная функция при отрицательных  $x$ ?

Теперь мы готовы к тому, чтобы рассмотреть

### Интересные семейства функций

Рассмотрим семейство (то есть совокупность, множество) линейных функций  $y = ax$ . Здесь число  $a$  является параметром, своего рода номером функции, поэтому функции семейства будем обозначать так:

$$f_a(x) = ax. \quad (G1)$$

Пусть  $a \neq 0$ . Есть три причины, по которым это семейство функций можно считать интересным.

Причина I. Среди этих функций есть тождественная:  $f_1(x) = x$ .

Причина II. Композиция любых двух функций этого семейства также принадлежит этому семейству. Другими словами, сложная функция, которая получается из двух линейных функций  $f_a$  и  $f_b$ , также является линейной:

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(bx) = a(bx) = (ab)x = f_c(x),$$

где  $c = ab$  — параметр сложной функции.

Причина III. Любая функция из семейства имеет обратную функцию, также принадлежащую этому семейству.

Действительно, если  $y = ax$  — некоторая функция  $f_a$  семейства, то обратная функция — это  $x = \frac{1}{a}y$  (у нас  $a \neq 0$ ), или в традиционных обозначениях  $y = \frac{1}{a}x$ . А эта функция принадлежит семейству и её параметр  $\frac{1}{a}$ . Следовательно,  $f_a^{(-1)} = f_{1/a}$ .

Разумеется, не всякое семейство функций является в указанном смысле интересным. Так, множество квадратичных функций  $y = ax^2$  не содержит тождественную функцию  $y = x$ . Другое множество функций  $\{y = x + ax^2\}$  содержит тождественную функцию (при  $a = 0$ ), но при этом, однако, сложная функция

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_b(x) + a(f_b(x))^2 = (x + bx^2) + a(x + bx^2)^2$$

задается многочленом четвертой степени и не входит в данное семейство.

Вот еще одно семейство функций, которое является интересным:

$$f_a(x) = x + a. \quad (G2)$$

Тождественная функция получается при  $a = 0$ . Сложная функция

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_b(x) + a = (x + b) + a = x + (a + b) = f_c(x)$$

принадлежит семейству и её параметр  $c = a + b$ . Если  $y = x + a$  — некоторая функция семейства, то обратная функция — это функция  $x = y - a$ , или в традиционных обозначениях  $y = x - a$ . Следовательно,  $f_a^{(-1)} = f_{-a}$ .

Теперь, когда мы уже привыкли к указанным трем условиям, которым должны удовлетворять интересные семейства функций, признаемся, что в математике такие семейства функций

называют *группами функций*, а три условия называют *аксиомами группы функций*. Другими словами, в математике есть такое

### Определение

Пусть семейство функций, определенных на всей числовой прямой, удовлетворяет трем условиям:

Семейство содержит тождественную функцию.

Композиция любых двух функций семейства также принадлежит семейству.

Каждая функция семейства имеет обратную функцию, которая также принадлежит семейству.

В таком случае данное семейство функций называют группой функций.

Теперь, используя эту новую терминологию, проверим, что семейство функций

$$f_a(x) = (1 + a)x \quad (G3)$$

при  $a \neq -1$  является группой. Действительно, тождественная функция получается при  $a = 0$ . Мы уже в первом примере видели, что композиция линейных функций является линейной функцией. Сейчас нам интересно выяснить, каким будет параметр композиции. Из равенства

$$(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = (1 + a)f_b(x) = (1 + a)(1 + b)x = (1 + c)x = f_c(x)$$

следует, что  $c = a + b + ab$ .

Теперь найдем параметр обратной функции. Решая уравнение  $y = (1 + a)x$  относительно  $x$  (здесь важно, что  $a \neq -1$ ), найдем  $x = \frac{1}{1+a}y$ , или, выделяя единицу (вам понятно, с какой целью?), получим  $x = (1 - \frac{a}{1+a})y$ . Следовательно, каждая функция семейства  $f_a$  имеет обратную функцию  $f_a^{(-1)} = f_c$ , параметр обратной функции  $c = -\frac{a}{1+a}$ .

**Упражнение 1.** Проверьте, что семейство функций

$$f_a(x) = \frac{x}{1 + ax} \quad (a \in R) \quad (G4)$$

является группой функций. Как здесь параметр  $c$  композиции двух функций  $f_a$  и  $f_b$  выражается через параметры  $a$  и  $b$ ? Ответ — в таблице на рис.1.

**Замечание.** В этом случае каждая функция семейства не определена в точке  $x = a^{-1}$  (там, где знаменатель дроби обращается в ноль). Сложная функция  $f_b(f_a)$  не определена еще и при том значении  $x$ , при котором  $f_a(x) = b^{-1}$ . В связи с этим данное семейство функций принято рассматривать на расширенной числовой прямой (или на пополненной числовой прямой). Такая прямая получается добавлением к обычной прямой новой точки, которую обозначают  $\infty$  и называют бесконечно удаленной точкой. При этом считают, что  $f_a(\infty) = \frac{1}{a}$ ,  $f_a(a^{-1}) = \infty$ . В результате на множестве  $R \cup \{\infty\}$  указанное семейство дробно-линейных функций является группой. Мы говорим об этом ввиду важности этой группы функций.

Для удобства приведем еще несколько определений и условимся относительно обозначений. Пусть  $f_a$  и  $f_b$  — две функции из группы,  $f_c$  — их композиция. Будем записывать  $c = \varphi(a, b)$  и называть функцию  $\varphi$  *групповой операцией*. Значение параметра, при котором получается тождественная функция, принято обозначать  $e$ :  $f_e(x) = x$ . Например, для группы G4  $e = 0$ . Для данной функции  $f_a$  параметр обратной функции традиционно обозначают  $a^{-1}$ . Таким образом,  $(f_a(x))^{(-1)} = f_a^{(-1)}(x) = f_{a^{-1}}(x)$ .

| №  | Функция группы            | Групповая операция           | Значение $e$ | Значение $a^{-1}$ |
|----|---------------------------|------------------------------|--------------|-------------------|
| G1 | $f_a(x) = ax$             | $\varphi(a, b) = ab$         | $e = 1$      | $\frac{1}{a}$     |
| G2 | $f_a(x) = a + x$          | $\varphi(a, b) = a + b$      | $e = 0$      | $-a$              |
| G3 | $f_a(x) = (1 + a)x$       | $\varphi(a, b) = a + b + ab$ | $e = 0$      | $-\frac{a}{1+a}$  |
| G4 | $f_a(x) = \frac{x}{1+ax}$ | $\varphi(a, b) = a + b$      | $e = 0$      | $-a$              |
| G5 | $f_a(x) = 2^a x$          | $\varphi(a, b) = a + b$      | $e = 0$      | $-a$              |

Рис.1.

**Внимание!** Здесь  $a^{-1}$  — это символическое обозначение параметра обратной функции, совсем не обязательно этот параметр совпадает с числом, обратным числу  $a$ . В некоторых случаях такое совпадение имеется.

**Упражнение 2.** Проверьте, что семейство функций

$$f_a(x) = 2^a x \quad (G5)$$

образует группу. Найдите групповую операцию и значение  $a^{-1}$ . Ответ проверьте по таблице на рис.1.

### Какая параметризация лучше?

Присмотритесь к группам G1, G3 и G5 из таблицы на рис.1. Какая из трех групп вам нравится больше остальных? Конечно, вопрос звучит не очень математически, но смысл его понятен. (Так, каждому, пожалуй, приятнее при решении квадратного уравнения найти его целые корни, чем возиться с радикалами...)

Из трех формул, самая приятная (как самая лаконичная) — это первая. Но на самом деле эти три группы состоят из одних и тех же функций, и поэтому речь идет об одной и той же группе. Это группа линейных однородных функций. Три реализации одной и той же группы отличаются лишь параметризацией функций из группы. В группе G3, очевидно, наиболее сложным образом выражается групповая операция, и как следствие сложно выражается параметр  $a^{-1}$ . Сравнивая теперь параметризации G1 и G5, следует отдать предпочтение параметризации G5.

В связи с этим принимают такое

**Определение.** Параметризацию, при которой групповая операция имеет вид  $\varphi(a, b) = a + b$ , тождественная функция получается при  $e = 0$  и (как следствие!)  $a^{-1} = -a$ , называют *канонической*. Соответствующий параметр называют каноническим и обычно обозначают буквой  $\tau$ .

**Упражнение 3.** Проверьте, что однопараметрическое семейство функций

$$f_\tau(x) = (\tau + \sqrt[3]{x})^3 \quad (G6)$$

является группой, параметризованной каноническим образом.

$$\text{Указание. } f_\tau(f_\mu(x)) = (\tau + \sqrt[3]{f_\mu(x)})^3 = (\tau + \sqrt[3]{(\mu + \sqrt[3]{x})^3})^3 = (\tau + \mu + \sqrt[3]{x})^3.$$

#### Следствия.

Если две какие-либо функции принадлежат группе функций с каноническим параметром, то их композиция — это функция из этой группы, параметр которой равен сумме параметров двух исходных функций. (Другими словами, находить композицию таких функций — очень простая задача! Можно сказать — одно удовольствие!)

Обратная функция для данной функции из группы определяется значением параметра, противоположным значению параметра данной функции.

**Пример.** Согласно упражнению 3 обратная функция для функции  $y = (2004 + \sqrt[3]{x})^3$  — это функция  $y = (-2004 + \sqrt[3]{x})^3$ . Проверьте!

## Как находить группы функций

Мы надеемся, что многие читатели готовы согласиться с тем, что группы функций — это интересный объект. Несомненно также и то, что многие могут сказать следующее: хорошо, группы функций обладают замечательными свойствами и, наверное, полезны в каких-то задачах. Но как эти группы функций находить?

Математики научились это делать. Как? Об этом мы расскажем в следующий раз. Ведь у многих наших читателей состоялась лишь первая встреча с новым понятием — группа функций. Это понятие требует времени на осмысление. Мы же стремимся к доступности нашего изложения, и поэтому не будем слишком перегружать статью.

Тем не менее, приведем такой результат, не объясняя способа его получения.

**Теорема.** Пусть  $F$  — функция, которая определена при всех действительных значениях аргумента и которая имеет обратную функцию  $F^{(-1)}$ , также определенную на всей числовой прямой. Тогда семейство функций

$$f_\tau(x) = F^{(-1)}(\tau + F(x)) \quad (1)$$

( $\tau \in R$ ) является группой, при этом параметр  $\tau$  является каноническим параметром группы.

Другими словами каждая функция  $y(x)$  из группы находится из уравнения

$$F(y) = \tau + F(x), \quad (2)$$

где  $F$  — произвольная обратимая функция, определенная на всей числовой прямой и фиксированная для данной группы.

Проверка справедливости утверждения теоремы чрезвычайно проста. Наиболее интересна замкнутость этого семейства функций относительно операции композиции функций. Вот соответствующая выкладка:

$$\begin{aligned} (f_\mu \circ f_\tau)(x) &= f_\mu(f_\tau(x)) = F^{(-1)}(\tau + F(f_\tau(x))) = \\ &= (\text{вспомните определение функции (1) из семейства}) = \\ &F^{(-1)}(\tau + (\mu + F(x))) = F^{(-1)}((\tau + \mu) + F(x)) = f_{\mu+\tau}(x). \end{aligned}$$

**Пример.** Пусть  $F(x) = x^3$ . Тогда по формуле (1) получаем семейство

$$f_\tau(x) = \sqrt[3]{\tau + x^3}. \quad (G7)$$

**Упражнение 4.** Пусть функции  $H$  и  $W$  определены при любом значении аргумента и имеют обратные. Докажите, что два семейства функций

$$h_\tau(x) = H^{(-1)}(e^\tau H(x)) \quad (3)$$

и

$$w_\tau(x) = W^{(-1)}\left(\frac{W(x)}{1 + \tau W(x)}\right) \quad (4)$$

являются группами с каноническим параметром  $\tau$ . (В формуле (3) число  $e$  — это число Эйлера,  $e = 2,718281828\dots$ ).

**Замечание.** Семейство функций (4) при необходимости рассматривается на расширенной числовой прямой.

Объясним происхождение формул (3) и (4). В основном уравнении для группы (2) выполним замену: от функции  $F$  перейдем к функции  $W$  по формуле  $F = \frac{1}{W}$ . Получим



$$\frac{1}{W(y)} = \tau + \frac{1}{W(x)}.$$

Отсюда после очевидных преобразований следует (4).

Формула (3) также получается из (2) заменой  $F = \ln H$ , где  $\ln$  — обозначение натурального логарифма.

Например, выбрав  $W(x) = x^3$ , согласно формуле (4) получим группу функций

$$w_\tau(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1 + \tau x^3}}. \quad (G8)$$

Формулы (1)—(4) можно назвать *машинами* по производству групп функций. При желании количество таких *устройств* вы можете легко увеличить.

**Упражнение 5.** Имеют ли все функции из семейства

$$f_\tau(x) = \operatorname{tg}(\tau + \operatorname{arctg} x)$$

общую область определения?

**Пример.** Каждую функцию из семейства функций

$$f_\tau(x) = 2 \operatorname{arctg}(e^\tau \operatorname{tg} \frac{x}{2}) \quad (G9)$$

будем рассматривать на интервале  $-\pi < x < \pi$ ; при этом условия значения каждой функции принадлежат этому же интервалу. Следовательно, на этом интервале определены композиции любых двух функций. Это семейство является группой функций с каноническим параметром  $\tau$ .

Приведем несколько задач, которые решаются с использованием группового подхода.

**Задача 1.** Пусть  $f_\tau(x) = \sqrt[3]{\tau + x^3}$ . Найдите композицию ста функций

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{100}.$$

Ответ: Данное семейство функций является группой G7, поэтому

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{100}(x) = f_{1+2+\dots+100}(x) = f_{5050}(x) = \sqrt[3]{5050 + x^3}.$$

**Задача 2.** Пусть  $f_a = \frac{ax}{ax+1-x}$ . Найдите композицию девяти функций

$$f_{\frac{1}{2}} \circ f_{\frac{2}{3}} \circ f_{\frac{3}{4}} \dots \circ f_{\frac{9}{10}}.$$

Ответ:  $f_{1/10}$ .

**Задача 3.** Пусть  $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$ . Найдите  $X(x) = f(f(f(\dots f(x)\dots)))$ , где символ  $f$  повторяется 100 раз.

Ответ: Данная функция — это функция из группы дробно-линейных функций  $f_\tau(x) = \frac{(2-\tau)x+\tau}{(2+\tau)-\tau x}$  с каноническим параметром  $\tau$ , получаемая при  $\tau = 1$ .

Следовательно, искомая композиция (то есть сотая итерация данной функции) — это функция группы с параметром  $\tau = 100$ , то есть

$$X(x) = f_{100}(x) = \frac{-98x + 100}{102 - 100x}.$$

Способ составления подобных задач стал понятен, и такие задачи превращаются в упражнения, похожие на решение квадратных уравнений.

## Что же такое группа

В заключение приведем формальное определение абстрактной группы.

Множество  $G = \{A, B, C, \dots\}$  называют *группой*, если:

На множестве  $G$  определена операция, которая любым двум элементам  $A$  и  $B$ , взятым в определенном порядке, ставит в соответствие единственный элемент  $C \in G$ . Это обозначают так:  $A \circ B = C$ .

Существует элемент  $E \in G$  такой, что для любого элемента  $A \in G$  имеет место равенство  $A \circ E = E \circ A = A$ . Этот элемент называют *единицей* группы.

Для любого  $A \in G$  существует элемент  $A^{-1}$  такой, что  $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = E$ . Этот элемент называют *обратным* для  $A$ .

Имеет место ассоциативность операции  $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$  для любых трех элементов из группы.

**Упражнение 6.** Проверьте, что множество целых чисел с операцией сложения является группой. Здесь  $E = 0$ ,  $z^{-1} = -z$ .

**Упражнение 7.** Проверьте, что множество ненулевых рациональных чисел с операцией умножения является группой. Здесь  $E = 1$ , обратным элементом для числа  $z$  является число  $\frac{1}{z}$ .

Сравните приведенное определение абстрактной группы с определением группы функций. Они полностью совпадают? В этих определениях одинаковое количество условий-аксиом группы? Нет, в одном случае три условия, в другом — четыре. Почему? Если сразу не можете дать ответ на этот вопрос, найдите ответ, прочитав все еще раз. Группы вообще и группы функций в частности такого внимания заслуживают!

Дворянинов Сергей Владимирович,  
доцент кафедры высшей математики и информатики  
Самарского государственного университета.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

# Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника

Е. Д. Куланин

Продолжаем серию публикаций, в которой рассматриваются взаимные расположения некоторых замечательных точек и прямых треугольника. Квадратиком отмечены начало и конец доказательства.

В этой статье мы выявим довольно неожиданную связь между прямыми Эйлера некоторых треугольников с вершинами в точках касания вписанной и невписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон и точками Фейербаха этого прямоугольного треугольника.

**Лемма 1.** Обозначим через  $D$  и  $E$  точки пересечения продолжений средних линий данного прямоугольного треугольника  $ABC$ , параллельных его катетам, с прямой, проходящей через точки касания вписанной окружности с катетами треугольника  $ABC$ , а через  $D_1$  и  $E_1$  — точки, симметричные соответственно  $D$  и  $E$  относительно середины  $M$  гипотенузы  $AB$ .

Тогда четырехугольник  $DED_1E_1$  является квадратом, вершины которого лежат на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

□ Пусть  $M_a$  и  $M_b$  — середины катетов  $BC$  и  $AC$  (рис. 1). Тогда  $\angle DB_1M_b = \angle CB_1A_1 = 45^\circ$  и из прямоугольного треугольника  $DM_bB_1$   $\angle M_bDB_1 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , но  $\angle MDE = \angle M_bDB_1 = 45^\circ$  и, таким образом, прямоугольный треугольник  $DME$  — равнобедренный.

Найдем длину отрезка  $MD$ :  $MD = MM_b + M_bD = 1/2BC + M_bB_1 = 1/2BC + M_bC - CB_1 = 1/2(BC + AC) - CB_1 = 1/2(a + b) - r$ . Но  $1/2(a + b) = R + r$  (см. доказательство следствия из [1]), поэтому  $MD = 1/2(a + b) - r = R + r - r = R$ , где  $R$  — длина радиуса описанной окружности треугольника  $ABC$ .

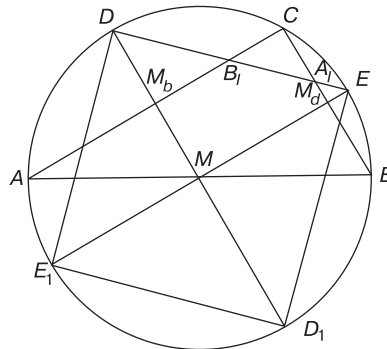


Рис. 1

Так как  $M$  — центр этой окружности, то это означает, что точка  $D$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Поскольку  $ME = MD = R$ , то точка  $E$  также лежит на этой окружности. Тогда точки  $D_1$  и  $E_1$ , симметричные  $D$  и  $E$  относительно центра  $M$  окружности, также лежат на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

Итак, все вершины четырехугольника  $DED_1E_1$  лежат на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Так как диагонали четырехугольника  $DED_1E_1$  являются взаимно перпендикулярными диаметрами описанной окружности треугольника  $ABC$ , то этот четырехугольник — квадрат.

□

**Теорема 1.** Центры окружностей Эйлера следующих четырех треугольников

$$A_aB_aB_1, A_bB_bA_1, A_cB_cB_1, A_bA_bB_c$$

с вершинами в точках касания вписанной и невписанных окружностей прямоугольного треугольника  $ABC$  с его катетами и продолжениями катетов лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  и совпадают с вершинами квадрата.

□ Рассмотрим треугольник  $A_bB_bA_I$  (рис.2). В этом треугольнике ортоцентром является точка  $B_I$  (см. теорему 1 из [1]). Пусть  $O_b$  — центр описанной окружности треугольника  $A_bB_bA_I$ , а  $D'$  — основание высоты, опущенной из вершины  $A_I$  на сторону  $A_bB_b$ . Поскольку  $\angle B_bA_bA_I = 45^\circ$ , то  $\angle D'B_bB_I = \angle A_bB_bC = 45^\circ$  и, таким образом, прямоугольный треугольник  $B_bD'B_I$  является равнобедренным, откуда следует, что точка  $D'$  совпадает с точкой  $D$  из леммы 1.

С другой стороны, точка  $O_b$  лежит на серединных перпендикулярах отрезков  $A_bA_I$  и  $A_bB_b$ , проходящих соответственно через точки  $D$  и  $C$  (прямоугольные треугольники  $A_bA_ID$  и  $A_bB_bC$  — равнобедренные), поэтому четырехугольник  $CO_bDB_I$  — параллелограмм и центр  $E_b$  окружности Эйлера треугольника  $A_bB_bA_I$ , совпадающий с серединой отрезка  $O_bB_I$  совпадает также с серединой отрезка  $DC$ .

По лемме 1 точка  $D$  лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ , тогда точка  $E_b$  лежит на окружности, гомотетичной описанной окружности треугольника  $ABC$  с центром в вершине прямого угла  $C$  и коэффициентом  $1/2$ , т.е. на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Аналогично, точка  $E$  из леммы 1 при этой же гомотетии перейдет в центр окружности Эйлера треугольника  $A_aB_aB_I$ , откуда следует, что центр окружности Эйлера треугольника  $A_aB_aB_I$  также лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Покажем далее, что вершины  $D_1$  и  $E_1$  квадрата  $DED_1E_1$  из леммы 1 лежат на стороне  $A_cB_c$  треугольника  $A_bA_cB_c$ . В самом деле, если  $K$  и  $N$  — точки пересечения прямой  $CI_c$  с прямыми  $A_I B_I$  и  $A_cB_c$  соответственно, то

$$KN = CN - CK = \frac{CB_c}{\sqrt{2}} - \frac{CB_I}{\sqrt{2}} = \frac{(CB_c - CB_I)}{\sqrt{2}} = \frac{(p - r)}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}R = DE_1 = ED_1.$$

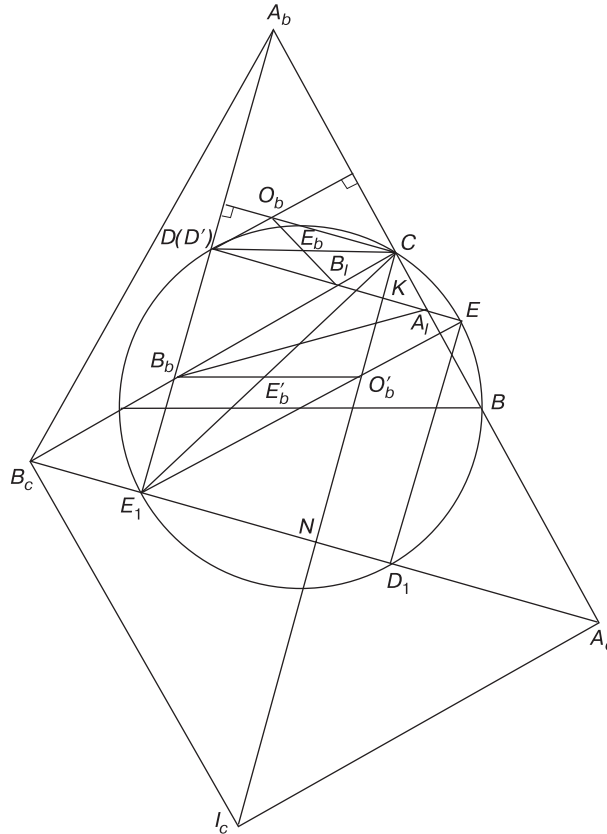


Рис. 2

Так как точки  $D$  и  $E$  лежат на прямой  $A_I B_I$ , а расстояние между прямыми  $A_I B_I$  и  $A_cB_c$  равно длине стороны квадрата  $DED_1E_1$ , то отсюда следует, что точки  $D_1$  и  $E_1$  лежат на прямой  $A_cB_c$ . Обозначим центр описанной окружности треугольника  $A_bA_cB_c$  через  $O'_b$ . Напомним, что  $B_b$  — ортоцентр треугольника  $A_bA_cB_c$  (см. теорему 1 из [1]).

Поскольку  $\angle A_b A_c B_c = 45^\circ$ , то четырехугольник  $B_b E_1 O'_b C$  — параллелограмм и, таким образом, центр окружности Эйлера  $E'_b$  треугольника  $A_b A_c B_c$  совпадает с серединой отрезка  $CE_1$ . Аналогично, центр окружности Эйлера  $E'_a$  треугольника  $A_c B_a B_c$  совпадает с серединой отрезка  $CD_1$ .

Итак, при гомотетии с центром в точке  $C$  и коэффициентом  $1/2$  вершины квадрата  $DED_1 E_1$ , лежащие на описанной окружности прямоугольного треугольника  $ABC$ , перейдут в вершины квадрата  $E_b E_a E'_a E'_b$ , которые лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , причем, поскольку  $D$  и  $E$  — середины дуг  $AC$  и  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $D_1$  и  $E_1$  — точки, диаметрально противоположные  $D$  и  $E$ , то  $E_a$  и  $E_b$  совпадают с серединами дуг  $M_a C$  и  $M_b C$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , а  $E'_b$  и  $E'_a$  — с серединами дуг, дополнительных дугам  $M_a C$  и  $M_b C$  соответственно.  $\square$

**Теорема 2.** Центры окружностей Эйлера следующих шестнадцати треугольников

$$A_a B_a B_I, A_a B_a A_I, B_a B_I A_I, B_I A_a A_I; A_b B_b A_I, A_b B_b B_I, B_b A_I B_I, A_I A_b B_I; \\ A_c B_a B_c, A_c B_a A_a, B_a B_c A_a, B_c A_c A_a; B_c A_c A_b, B_c A_c B_b, A_c A_b B_b, A_b B_c B_b$$

с вершинами в точках касания вписанной и внеписанных окружностей прямоугольного треугольника  $ABC$  с его катетами и продолжениями катетов лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

$\square$  Согласно теореме 1 из [1] четверки точек  $A_a, B_a, B_I, A_I; A_b, B_b, A_I, B_I; A_c, B_a, B_c, A_a; B_c, A_c, A_b, B_b$  являются ортоцентрическими, но четыре треугольника, вершины каждого из которых входят в одну и ту же ортоцентрическую четверку, имеют общую окружность Эйлера, поэтому с учетом теоремы 1 получим, что центры окружностей Эйлера указанных треугольников лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (рис.3).  $\square$

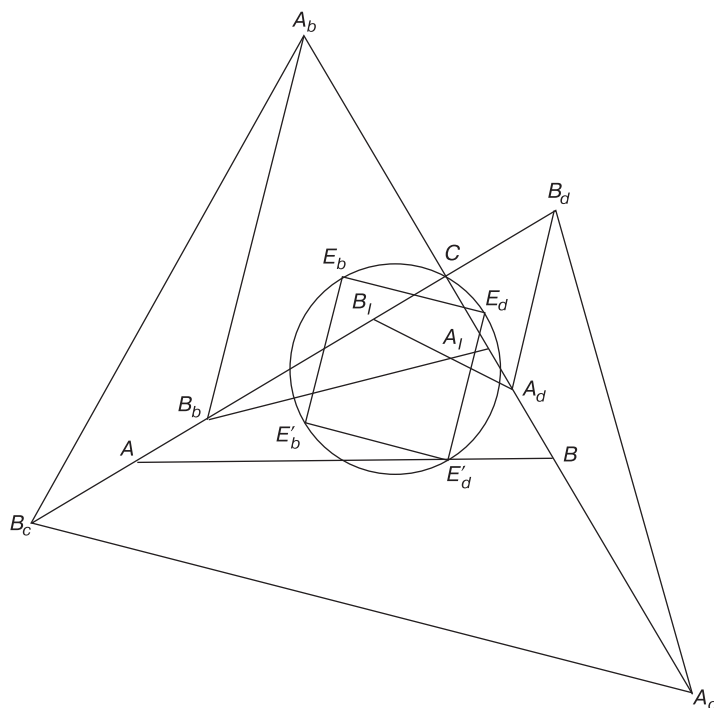


Рис. 3

**Теорема 3.** Центры окружностей Эйлера треугольников  $A_a A_b B_c$  и  $A_c B_a B_b$  с вершинами в точках касания внеписанных окружностей прямоугольного треугольника  $ABC$  с его катетами и продолжениями катетов совпадают с концами диаметра окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , перпендикулярного его прямой Эйлера.

$\square$  Поскольку  $B_c C \perp A_a A_b$  и  $A_b B_I \perp B_c A_a$  (рис. 4), то  $B_I$  — ортоцентр треугольника  $A_a A_b B_c$ . Покажем, что центр  $O_1$  описанной окружности треугольника  $A_a A_b B_c$  лежит на прямой  $A_b B_b$ .



угла  $ACA_b$  с прямой  $SO_1$ ), т.е.  $E_1P \parallel M_bC$  и, таким образом,  $E_1PCM_b$  — равнобокая трапеция ( $\angle E_1M_bC = \angle PCM_b = 45^\circ$ ).

Мы получили, что три вершины  $M_b, C, P$  равнобокой трапеции  $M_bCPE_1$  лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Поскольку вокруг равнобокой трапеции можно описать окружность, то и ее четвертая вершина  $E_1$  лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , что и требовалось доказать.

Далее,  $\angle ME_1C = 90^\circ$  как вписанный, опирающийся на диаметр  $MC$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ ,  $\angle E_1MC = \angle E_1M_bC = 45^\circ$  (углы  $E_1MC$  и  $E_1M_bC$  вписаны в окружность Эйлера и опираются на одну и ту же дугу  $E_1C$ ), откуда следует, что прямоугольный треугольник  $ME_1C$  — равнобедренный и, значит,  $E_1E \perp MC$  ( $E$  — центр окружности Эйлера треугольника  $ABC$ ).

Так как  $MC$  — это прямая Эйлера треугольника  $ABC$ , то центр  $E_1$  окружности Эйлера треугольника  $A_aA_bB_c$  совпадает с одним из концов диаметра окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , перпендикулярного прямой Эйлера этого треугольника.

Для треугольника  $A_cB_aB_b$  доказательство аналогично.  $\square$

**Следствие 1.** Центры окружностей Эйлера следующих восьми треугольников:

$$A_aA_bB_c, A_aA_bB_I, A_bB_cB_I, B_cA_aB_I; A_cB_aB_b, A_cB_aA_I, B_aB_bA_I, B_bA_cA_I$$

с вершинами в точках касания вписанной и невписанных окружностей прямоугольного треугольника  $ABC$  с его катетами и продолжениями катетов лежат на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 1.** Докажите следствие 1.

**Теорема 4.** Прямые Эйлера следующих шестнадцати треугольников

$$A_aB_aB_I, A_aB_aA_I, B_aB_I A_I, B_I A_a A_I; A_bB_bA_I, A_bB_bB_I, B_bA_I B_I, A_I A_b B_I; \\ A_cB_aB_c, A_cB_aA_a, B_aB_cA_a, B_cA_cA_a; B_cA_cA_b, B_cA_cB_b, A_cA_bB_b, A_bB_cB_b$$

с вершинами в точках касания вписанной и невписанных окружностей прямоугольного треугольника  $ABC$  с его катетами и продолжениями катетов проходят через соответствующие точки Фейербаха треугольника  $ABC$ .

$\square$  Напомним, что  $A_I$  — ортоцентр треугольника  $A_aB_aB_I$ , а по теореме 1 (см. конец ее доказательства) центр  $E_a$  окружности Эйлера треугольника  $A_aB_aB_I$  совпадает с серединой дуги  $M_aC$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (рис. 6). Так как  $A_I$  — ортоцентр треугольника  $A_aB_aB_I$ , то треугольники  $A_aB_aB_I, A_aB_aA_I, B_aB_I A_I, B_I A_a A_I$  имеют общую окружность Эйлера и, следовательно, прямые Эйлера этих треугольников совпадают соответственно с прямыми  $A_I E_a, B_I E_a, A_a E_a, B_a E_a$ .

Согласно предложению 2 и упражнению 2 из [3] прямая, проведенная через точки касания окружности  $O_2$  с окружностью  $O_1$  и прямой  $l$ , пересекающей  $O_1$ , проходит через середину одной из двух дуг, на которые прямая  $l$  делит окружность  $O_1$ .

Отсюда следует, что прямая, проведенная через точку касания  $A_a$  невписанной окружности  $I_a$  с катетом  $BC$  и точку касания  $F_a$  этой окружности с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ , пройдет также через середину  $E_a$  дуги  $M_aC$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Другими словами, точки  $A_a, F_a$  и  $E_a$  лежат на одной прямой, но  $A_aE_a$  — это прямая Эйлера треугольника  $B_aB_I A_I$ , поэтому можно сказать, что прямая Эйлера треугольника  $B_aB_I A_I$  проходит через точку Фейербаха  $F_a$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Аналогично, прямая Эйлера  $A_I E_a$  треугольника  $A_aB_aB_I$  проходит через точку Фейербаха  $F$  треугольника  $ABC$ .

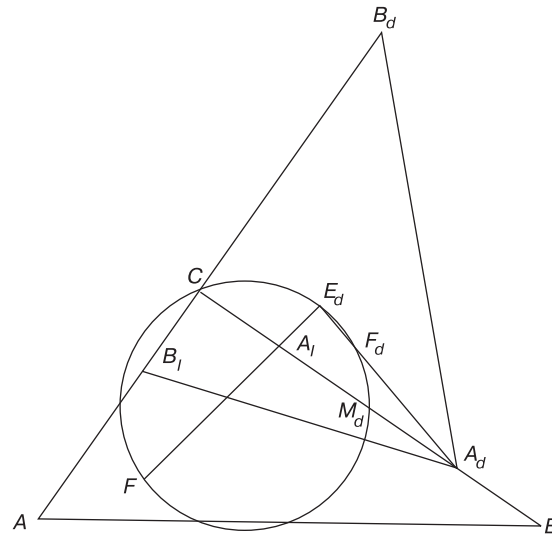


Рис. 6

Рассмотрим теперь прямую Эйлера  $B_a E_a$  треугольника  $B_I A_a A_I$  (рис. 7). Чтобы доказать, что эта прямая проходит через точку Фейербаха  $F_c$  треугольника  $ABC$ , поступим следующим образом.

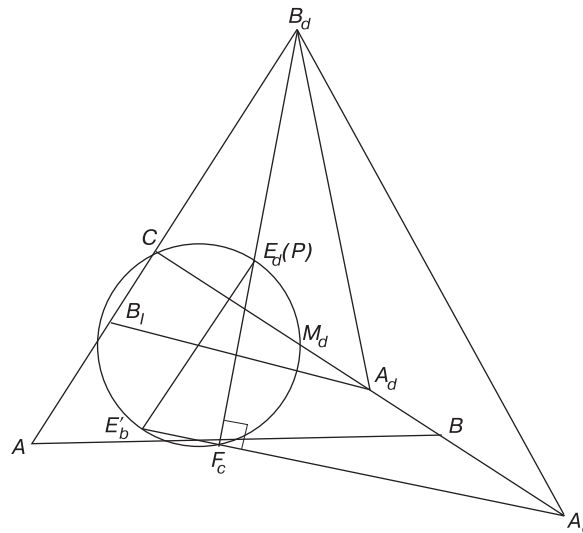


Рис. 7

Проведем прямую  $A_c F_c$ . Поскольку  $A_c$  и  $F_c$  — точки касания внеписанной окружности  $I_c$  соответственно с прямой  $CB$  и окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ , то прямая  $A_c F_c$  пересечет окружность Эйлера в середине  $E'_b$  ее дуги  $CF_c M_a$ . Соединим теперь точки  $F_c$  и  $B_a$  отрезком прямой.

Согласно следствию 6 из [1] точка  $F_c$  лежит на описанной окружности прямоугольного треугольника  $A_c C B_a$ , поэтому  $\angle B_a F_c A_c = 90^\circ$ . Тогда  $\angle E'_b F_c B_a = 180^\circ - \angle B_a F_c A_c = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ . Обозначим вторую точку пересечения прямой  $F_c B_a$  с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$  через  $P$ .

Так как точка  $E'_b$  лежит на окружности Эйлера и  $\angle E'_b F_c P = \angle E'_b F_c B_a = 90^\circ$ , то отрезок  $E'_b P$  является диаметром окружности Эйлера. Другими словами, точка  $P$  диаметрально противоположна середине  $E'_b$  дуги  $CF_c M_a$  окружности Эйлера и поэтому совпадает с серединой  $E_a$  дополнительной дуги.

Таким образом, точки  $F_c$ ,  $E_a$ ,  $B_a$  лежат на одной прямой, а это и означает, что прямая Эйлера  $B_a E_a$  треугольника  $A_a A_I B_I$  проходит через точку Фейербаха  $F_c$  треугольника  $ABC$ . Для всех остальных указанных треугольников доказательство аналогично и сводится к рассмотренным здесь двум случаям.  $\square$



**Следствие 2.** Из восьми точек касания вписанной и внеписанных окружностей с катетами и продолжениями катетов прямоугольного треугольника  $ABC$  можно выбрать шестнадцать троек, являющихся вершинами шестнадцати треугольников, прямые Эйлера которых пересекаются по четыре в точках Фейербаха треугольника  $ABC$ .

**Упражнение 2.** Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $A_aB_aA_I$ ,  $A_bB_bB_I$  и  $CA_HB_H$ , где  $A_H$  и  $B_H$  — основания высот треугольника  $A_I B_I C_I$ , опущенных из вершин  $A_I$  и  $B_I$ , пересекаются в одной точке.

**Упражнение 3.** Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $A_aB_aB_c$ ,  $A_bA_cB_b$  и  $CA_1B_1$ , где  $A_1$  и  $B_1$  — основания высот треугольника  $A_cB_cH_c$ , опущенных из вершин  $A_c$  и  $B_c$ , пересекаются в одной точке.

**Предложение 1.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  биссектриса прямого угла  $C$ , средняя линия (или ее продолжение), параллельная катету  $AC$ , прямая  $B_I C_I$ , проходящая через точки касания  $B_I$  и  $C_I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  соответственно с катетом  $AC$  и гипотенузой  $AB$ , а также прямая  $A_a C_c$ , проходящая через точки касания внеписанных окружностей треугольника  $ABC$  соответственно с катетом  $BC$  и гипотенузой  $AB$ , пересекаются в одной точке, совпадающей с центром  $O'_b$  описанной окружности треугольника  $A_c A_b B_c$ , где  $A_c$  и  $B_c$  — точки касания внеписанной окружности  $I_c$  с продолжениями катетов  $CB$  и  $CA$ , а  $A_b$  — точка касания внеписанной окружности  $I_b$  с продолжением катета  $BC$ .

Аналогично, биссектриса прямого угла  $C$ , средняя линия (или ее продолжение), параллельная катету  $BC$ , и прямые  $A_I C_I$  и  $B_b C_c$  пересекаются в одной точке, совпадающей с центром  $O'_a$  описанной окружности треугольника  $A_c B_a B_c$ .

□ Рассмотрим центр  $O'_b$  описанной окружности треугольника  $A_c A_b B_c$  (рис. 8). Так как  $A_c B = C A_b = p - a$ , то серединные перпендикуляры отрезков  $BC$  и  $A_c A_b$  совпадают, но центр описанной окружности треугольника  $A_c A_b B_c$  лежит на серединном перпендикуляре стороны  $A_c A_b$ .

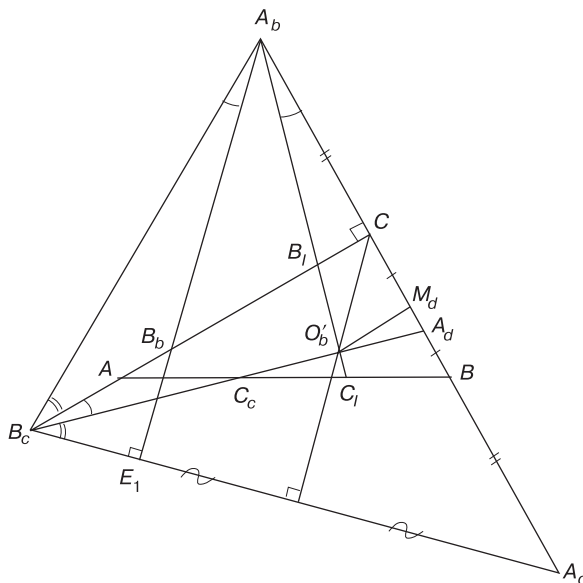


Рис. 8

Отсюда следует, что точка  $O'_b$  лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника  $ABC$ , параллельную катету  $AC$ .

Поскольку серединный перпендикуляр стороны  $A_c B_c$  совпадает с биссектрисой угла  $C$  треугольника  $ABC$ , то центр  $O'_b$  описанной окружности треугольника  $A_c A_b B_c$  лежит на биссектрисе прямого угла треугольника  $ABC$ . Далее, как мы уже знаем, точки  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $A_a$  лежат на одной прямой и  $\angle A_b B_c C = \angle A_c B_c A_a$  (см. теорему 1 из [2]), но  $B_c C$  — высота треугольника  $A_c A_b B_c$ , поэтому центр  $O'_b$  описанной окружности треугольника  $A_c A_b B_c$  лежит на прямой  $B_c A_a$ , совпадающей с прямой  $A_a C_c$ .

Аналогично, так как  $B_b$  — ортоцентр треугольника  $A_c A_b B_c$  (см. теорему 1 из [1]), то  $A_b E_1$  — высота и  $\angle B_c A_b E_1 = 90^\circ - \angle A_b B_c E_1 = 90^\circ - (\angle E_1 B_c C + \angle C B_c A_b) = 90^\circ - 45^\circ - \beta/2 = 45^\circ - \beta/2 =$

$\alpha/2$ . Отсюда следует, что  $\angle O'_b A_b A_c = \angle B_c A_b B_b = \alpha/2$ , но в доказательстве теоремы 1 из [2] показано, что точки  $A_b, B_I, C_I$  лежат на одной прямой, образующей с прямой  $A_b A_c$  угол, равный  $\alpha/2$ , а это и означает, что точка  $O'_b$  лежит на прямой  $B_I C_I$ .

Для центра  $O'_a$  описанной окружности треугольника  $A_c B_a B_c$  доказательство аналогично.  $\square$

**Предложение 2.** Центры  $O_1$  и  $O_2$  описанных окружностей треугольников  $A_a B_a B_c$  и  $B_b A_b A_c$  совпадают с основаниями высот треугольника  $C_a H_c C_b$ , проведенных из вершин  $C_a$  и  $C_b$  соответственно.

$\square$  Поскольку  $A_a$  — ортоцентр треугольника  $A_c B_a B_c$  (см. теорему 1 из [1]), то центры  $O'_a$  и  $O_1$  описанных окружностей треугольников  $A_c B_a B_c$  и  $A_a B_a B_c$  симметричны относительно прямой  $B_a B_c$ . Но по предложению 1 центр  $O'_a$  описанной окружности треугольника  $A_c B_a B_c$  лежит на биссектрисе угла  $ACB$ , поэтому центр  $O_1$  описанной окружности треугольника  $A_a B_a B_c$  лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  (рис.9).

По той же самой причине  $\angle O_1 B_c B_a = B_a B_c O'_a = \angle A_a B_c A_c = \beta/2$ , откуда следует, что точка  $O_1$  лежит на прямой  $B_c H_c$  (см. теорему 1 из [2]), но точка  $C_b$  также лежит на прямой  $B_c H_c$ , поэтому  $O_1$  лежит на стороне  $C_b H_c$  треугольника  $C_a H_c C_b$ .

Аналогично,  $O_2$  лежит на стороне  $C_a H_c$  треугольника  $C_a H_c C_b$ . Так как  $O_2$  лежит на биссектрисе внешнего угла при вершине  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , то прямая  $O_1 O_2$  совпадает с биссектрисой внешнего угла при вершине  $C$  и, следовательно, проходит через эту вершину.

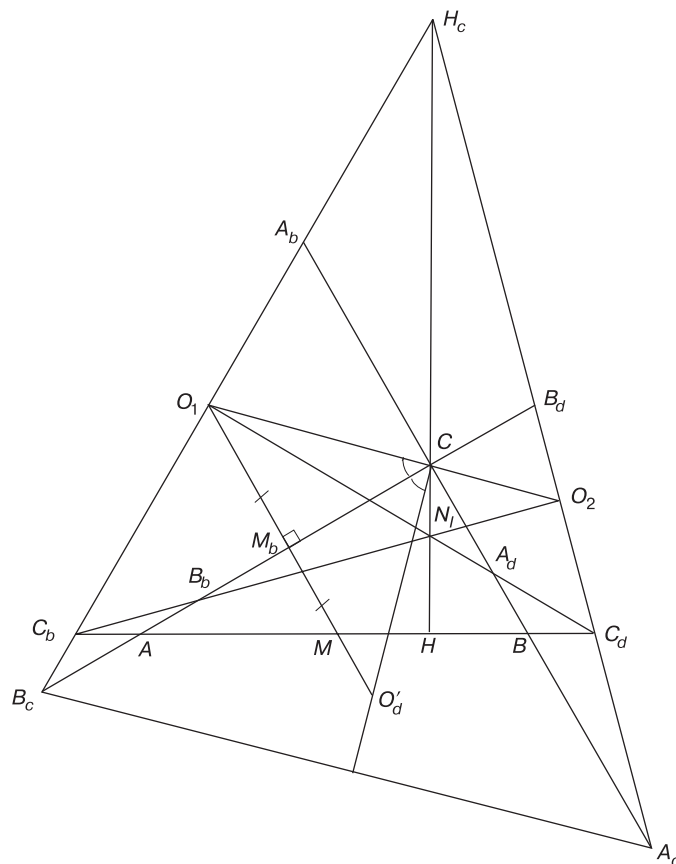


Рис. 9

Найдем длину отрезка  $MO_1$ , где  $M$  — середина  $AB$ :  $MO_1 = MM_b + M_b O_1$ . Поскольку  $CO_1$  — биссектриса угла  $ACA_b$ , получим, что прямоугольный треугольник  $O_1 M_b C$  ( $M_b$  — середина  $AC$ ) является равнобедренным и  $M_b O_1 = M_b C = 1/2 AC = b/2$ . Далее,  $MM_b = 1/2 BC = a/2$  как средняя линия треугольника  $ABC$ . Окончательно находим  $MO_1 = MM_b + M_b O_1 = a/2 + b/2 = (a+b)/2 = R+r$  (см. доказательство следствия 2 из [4]).

Аналогично,  $MO_2 = R+r = MO_1$ . Но  $AC_b = AB_b = r$  и  $BC_a = BA_a = r$ , а  $MA = MB = R$ , откуда  $MC_b = R+r = MC_a = MO_1 = MO_2$ .

Итак, точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат на окружности, построенной на  $C_bC_a$  как на диаметре, поэтому  $\angle C_aO_1C_b = \angle C_bO_2C_a = 90^\circ$  и, таким образом, точки  $O_1$  и  $O_2$  совпадают с основаниями высот  $C_aO_1$  и  $C_bO_2$  треугольника  $C_aH_cC_b$ .  $\square$

**Следствие 3.** *Четырехугольник  $A_cB_cO_1O_2$  является трапецией, диагонали  $A_cO_1$  и  $B_cO_2$  которой лежат на прямых Эйлера треугольников  $A_aB_aB_c$  и  $B_bA_bA_c$ .*

**Упражнение 4.** Докажите следствие 3.

**Упражнение 5.** Пусть  $M$  — середина гипотенузы  $AB$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$ ,  $A_c$  и  $B_c$  — точки касания его вневписанной окружности  $I_c$  с продолжениями катетов  $CB$  и  $CA$ ,  $F_a$  и  $F_b$  — внешние точки Фейербаха.

Докажите, что треугольники  $A_cF_aM$  и  $B_cF_bM$  равнобедренные ( $A_cF_a = A_cM$  и  $B_cF_b = B_cM$ ).

**Упражнение 6.** Докажите, что центры описанных окружностей треугольников  $A_aB_aB_c$  и  $B_bA_bA_c$  совпадают соответственно с центрами описанных окружностей треугольников  $B_bA_bB_I$  и  $A_aB_aA_I$ .

**Следствие 5.** *Четырехугольник  $A_I B_I O_1 O_2$  является трапецией, диагонали  $A_I O_1$  и  $B_I O_2$  которой лежат на прямых Эйлера треугольников  $B_bA_bB_I$  и  $A_aB_aA_I$ .*

**Упражнение 7.** Докажите следствие 5.

Из следствий 3 и 5 вытекает еще один способ построения точек Фейербаха  $F_a$  и  $F_b$  прямоугольного треугольника, показанный на рис. 10.

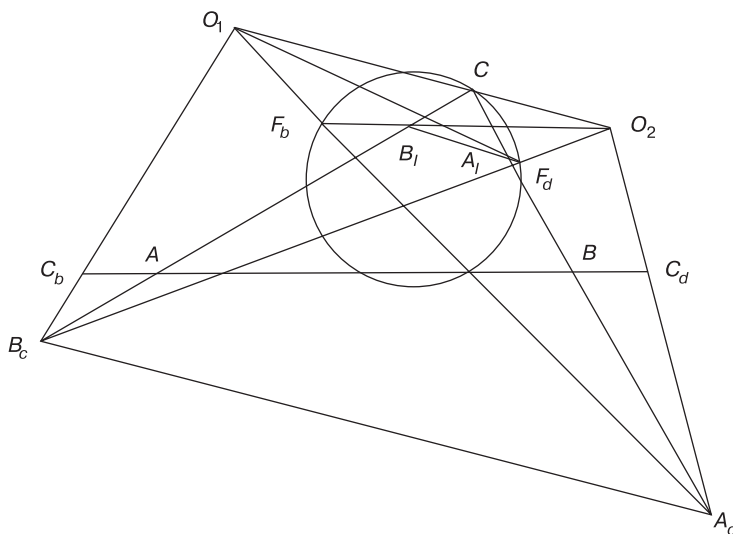


Рис. 10

**Упражнение 8.** Пусть  $O_b$ ,  $O_a$ ,  $O'_a$ ,  $O'_b$  — центры описанных окружностей треугольников  $A_bA_I B_b$ ,  $B_aB_bA_a$ ,  $A_cB_aB_c$ ,  $A_cA_bB_c$  соответственно.

Докажите, что четырехугольники  $B_bO_bA_I O'_a$  и  $A_aO_aB_I O'_b$  являются квадратами.

**Теорема 5.** *Ортоцентры  $H_I$  и  $H_c$  треугольников  $A_I B_I C_I$  и  $A_cB_cC_c$ , центры  $O_1$  и  $O_2$  описанных окружностей треугольников  $A_aB_aB_c$  и  $B_bA_bA_c$ , внешние точки Фейербаха  $F_a$  и  $F_b$  прямоугольного треугольника  $ABC$  лежат на окружности шести точек  $S_c$ , построенной на отрезке  $H_I H_c$  как на диаметре, которая касается продолжений средних линий треугольника  $ABC$ , параллельных катетам  $BC$  и  $AC$ , в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.*

$\square$  Поскольку  $C_aB_I \perp C_bH_c$  и  $C_bA_I \perp C_aH_c$  (рис. 11), то высоты  $C_aO_1$  и  $C_bO_2$  треугольника  $C_aH_cC_b$  пересекаются в точке  $H_I$ . Отсюда следует, что основания  $O_1$  и  $O_2$  этих высот лежат на окружности  $S_c$ , построенной на отрезке  $H_I H_c$  как на диаметре.

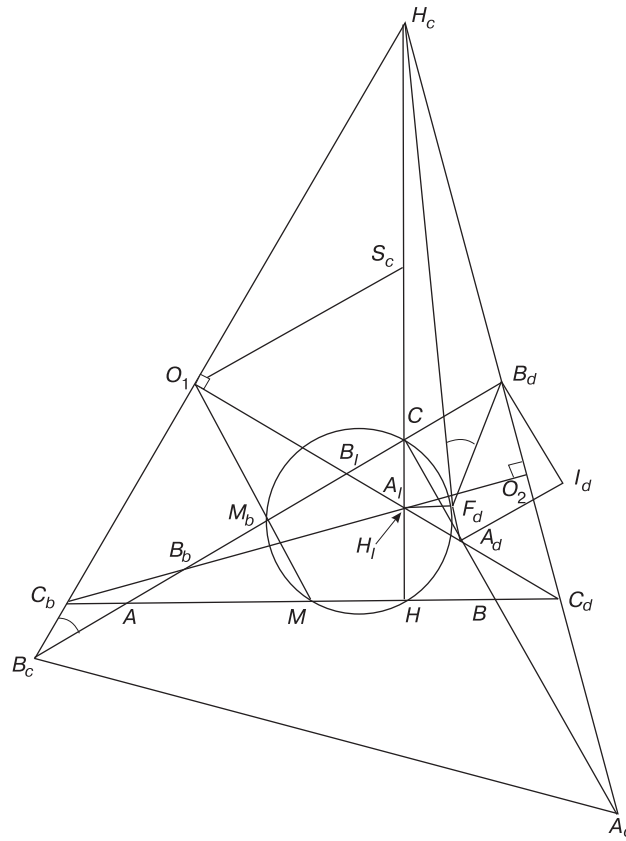


Рис. 11

Покажем, что точка Фейербаха  $F_a$  лежит на этой же окружности. Для этого достаточно установить, что  $\angle H_I F_a H_c = 90^\circ$ . Действительно,  $\angle H_I F_a H_c = 360^\circ - \angle H_c F_a B_a - \angle B_a F_a A_a - \angle A_a F_a H_I$ . Так как точки  $B_c, F_a, B_a, H_c$  лежат на окружности шести точек  $S'_b$  (см. теорему 6 из [1]), то  $\angle H_c F_a B_a = \angle H_c B_c B_a = \beta/2$ .

Далее, поскольку  $\angle B_a I_a A_a = 90^\circ$ , то дуга  $A_a B_a$  вневписанной окружности  $I_a$  соответствует прямому углу, откуда следует, что вписанный угол  $B_a F_a A_a$  этой окружности измеряется половиной дополнительной дуги, т.е. равен  $1/2(360^\circ - 90^\circ) = 135^\circ$ .

Учитывая, что точки  $F_a, H_I, A_I, A_a$  лежат на окружности шести точек  $S_a$  (см. теорему 4 из [1]), получим  $\angle A_a F_a H_I = \angle H_I A_I A_a = \angle A_I C B_b + \angle A_I B_b C = 90^\circ + \alpha/2$  (угол  $H_I A_I A_a$  — внешний угол треугольника  $A_I B_b C$ ).

Итак,  $\angle H_I F_a H_c = 360^\circ - \angle H_c F_a B_a - \angle B_a F_a A_a - \angle A_a F_a H_I = 360^\circ - \beta/2 - 135^\circ - (90^\circ + \alpha/2) = 135^\circ - \beta/2 - \alpha/2 = 135^\circ - (\alpha + \beta)/2 = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ , что и требовалось доказать. Для точки  $F_b$  доказательство проводится аналогично.

Осталось убедиться, что окружность  $S_c$  касается продолжений средних линий треугольника  $ABC$ , параллельных катетам  $BC$  и  $AC$ , в точках  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

В самом деле, в доказательстве предложения 2 установлено, что прямоугольный треугольник  $O_1 M O_2$ , где  $M$  — середина  $AB$ , является равнобедренным, но в силу того, что  $\angle O_1 H_c O_2 = 45^\circ$ , равнобедренный треугольник  $O_1 S_c O_2$ , где  $S_c$  — центр окружности  $S_c$ , является прямоугольным.

Отсюда следует, что четырехугольник  $M O_1 S_c O_2$  — квадрат, т.е.  $S_c O_1 \perp O_1 M$  и  $S_c O_2 \perp O_2 M$ . А это и означает, что окружность  $S_c$  касается прямых  $M O_1$  и  $M O_2$ , содержащих средние линии треугольника  $ABC$ , соответственно в точках  $O_1$  и  $O_2$ .  $\square$

**Следствие 6.** Диаметр окружности шести точек  $S_c$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равен сумме катетов этого треугольника.

$\square$  Согласно предложению 3 из [2] центр описанной окружности треугольника  $A_c B_c H_c$  совпадает с вершиной  $C$  прямого угла треугольника  $ABC$  (рис. 11), поэтому  $CH_c = CA_c = r$ . Точка  $C$  симметрична центру  $I$  описанной окружности треугольника  $A_I H_I B_I$  относительно прямой  $A_I B_I$ , т.е.  $CH_I = CA_I = r$ .

Теперь мы можем найти длину отрезка  $H_c H_I$ , равного диаметру окружности  $S_c$ :

$$H_c H_I = H_c C + C H_I = p + r = p + p - c = 2p - c = a + b + c - c = a + b. \quad \square$$

**Следствие 7.** Диаметр окружности шести точек  $S_c$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равен сумме диаметров описанной и вписанной окружностей этого треугольника.

**Теорема 6.** Пусть вневписанная окружность  $I_c$  касается гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  и продолжений катетов  $CA$  и  $CB$  в точках  $C_c$ ,  $B_c$ ,  $A_c$  соответственно, а вневписанные окружности  $I_a$  и  $I_b$  касаются продолжений гипотенузы  $AB$  соответственно в точках  $C_a$  и  $C_b$ ;  $H_c$  — ортоцентр треугольника  $A_cB_cC_c$ .

Тогда центр  $E_c$  окружности Эйлера треугольника  $C_a H_c C_b$  лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  и совпадает с серединой большей из тех двух дуг, на которые делит окружность Эйлера треугольника  $ABC$  его гипотенуза  $AB$ .

□ Поскольку  $\angle C_a H_c C_b = 45^\circ$ , то серединные перпендикуляры сторон  $C_a H_c$  и  $C_b H_c$  проходят через основания  $O_1$  и  $O_2$  высот  $C_a O_1$  и  $C_b O_2$  треугольника  $C_a H_c C_b$  (рис. 12), откуда следует, что четырехугольник  $O_c O_1 H_I O_2$  — параллелограмм ( $O_c$  — центр описанной окружности треугольника  $C_a H_c C_b$ ,  $H_I$  — его ортоцентр).

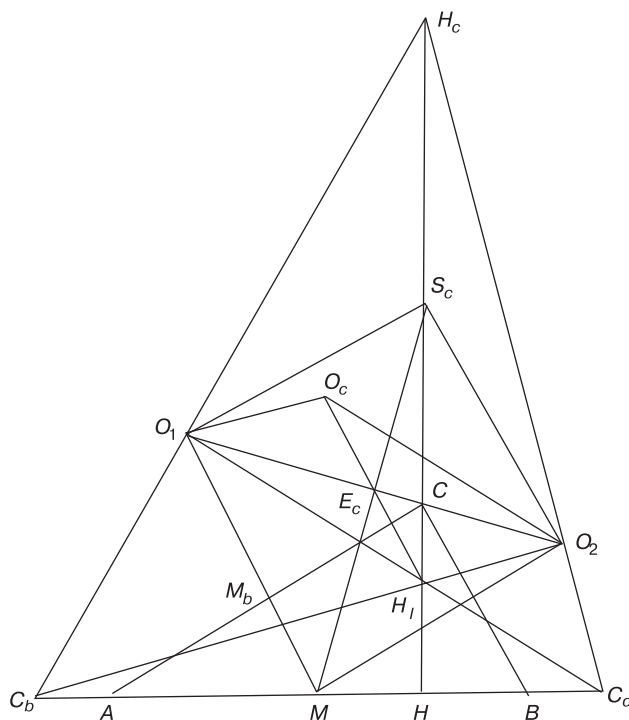


Рис. 12

Тогда центр  $E_c$  окружности Эйлера треугольника  $C_a H_c C_b$ , совпадающий с серединой отрезка  $O_c H_I$ , совпадает и с серединой отрезка  $O_1 O_2$ . Но в доказательстве теоремы 5 показано, что четырехугольник  $MO_1 S_c O_2$  — квадрат ( $M$  — середина  $AB$ ), причем прямая  $O_1 O_2$  является биссектрисой внешнего угла при вершине  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  (см. доказательство предложения 2), поэтому  $ME_c \perp O_1 O_2$  или  $\angle ME_c C = 90^\circ$ .

Так как  $MC$  — диаметр окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , то последнее равенство означает, что точка  $E_c$  лежит на этой окружности. Пусть  $P$  — точка пересечения прямой  $CE_c$  с описанной окружностью треугольника  $ABC$  (рис. 13). Биссектриса угла  $ACB$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в середине  $S_1$  дуги  $AB$ , не содержащей точку  $C$ , но  $PC \perp CS_1$ , откуда следует, что  $P$  диаметрально противоположна  $S_1$  и поэтому совпадает с серединой  $S_2$  дуги  $ACB$  описанной окружности треугольника  $ABC$ .

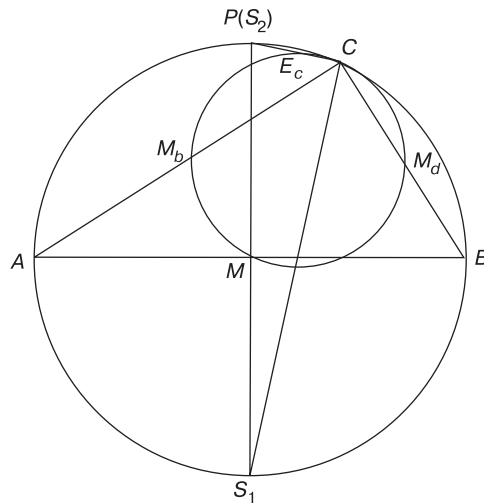


Рис. 13

Поскольку окружность Эйлера треугольника  $ABC$  гомотетична его описанной окружности с центром гомотетии в точке  $C$  и коэффициентом  $1/2$ , то при указанной гомотетии середина  $S_2$  дуги  $ACB$  описанной окружности треугольника  $ABC$  перейдет в середину дуги  $M_bCM_a$  ( $M_b$  и  $M_a$  — середины  $AC$  и  $BC$ ) окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Но точки  $S_2$ ,  $E_c$  и  $C$  лежат на одной прямой, а  $E_c$  — еще и на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , т.е.  $S_2$  перейдет в  $E_c$  и, таким образом, центр  $E_c$  окружности Эйлера треугольника  $C_aH_cC_b$  совпадает с серединой дуги  $M_bCM_a$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .  $\square$

**Предложение 3.** Центры  $O'_a$  и  $O'_b$  описанных окружностей треугольников  $A_cB_aB_c$  и  $B_cA_bA_c$  совпадают соответственно с основаниями высот треугольника  $H_aH_bC_c$ , проведенных из вершин  $H_a$  и  $H_b$ , где  $H_a$  и  $H_b$  — ортоцентры треугольников  $A_aB_aC_a$  и  $A_bB_bC_b$  (рис. 14).

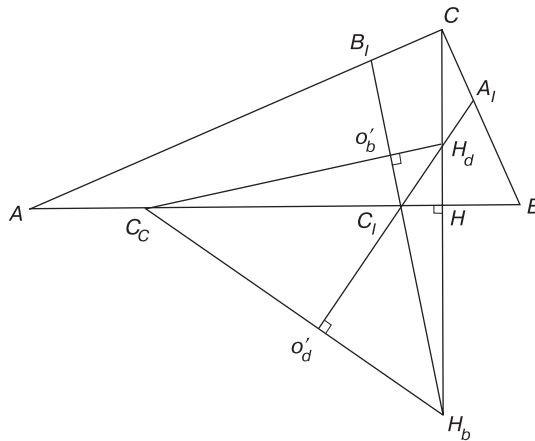


Рис. 14

**Упражнение 9.** Докажите предложение 3.

**Теорема 7.** Ортоцентры  $H_a$  и  $H_b$  треугольников  $A_aB_aC_a$  и  $A_bB_bC_b$ , центры  $O'_a$  и  $O'_b$  описанных окружностей треугольников  $A_cB_aB_c$  и  $B_cA_bA_c$ , внутренняя точка Фейербаха  $F$ , внешняя точка Фейербаха  $F_c$  прямоугольного треугольника  $ABC$  лежат на окружности шести точек  $S'_c$ , построенной на отрезке  $H_aH_b$  как на диаметре, которая касается продолжения средней линии треугольника  $ABC$ , параллельной  $BC$ , в точке  $O'_a$  и средней линии, параллельной  $AC$ , в точке  $O'_b$  (рис. 15).

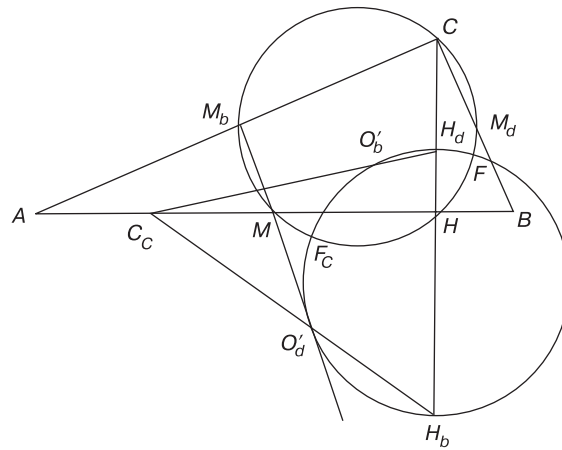


Рис. 15

**Упражнение 10.** Докажите теорему 7.

**Следствие 8.** Диаметр окружности шести точек  $S'_c$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равен разности большего и меньшего катетов этого треугольника.

**Упражнение 11.** Докажите следствие 8.

**Теорема 8.** Пусть  $H_a$  и  $H_b$  — ортоцентры треугольников  $A_aB_aC_a$  и  $A_bB_bC_b$  с вершинами в точках касания вневписанных окружностей  $I_a$  и  $I_b$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с его сторонами и продолжениями сторон,  $C_c$  — точка касания вневписанной окружности  $I_c$  треугольника  $ABC$  с его гипотенузой  $AB$ .

Тогда центр окружности Эйлера треугольника  $H_aH_bC_c$  лежит на окружности Эйлера треугольника  $ABC$  и совпадает с серединой меньшей из тех двух дуг, на которые делит окружность Эйлера треугольника  $ABC$  его гипотенуза  $AB$ .

□ Так как  $O'_a$  и  $O'_b$  совпадают согласно предложению 3 с основаниями высот  $H_aO'_a$  и  $H_bO'_b$  треугольника  $H_aH_bC_c$  (рис. 16), а  $\angle H_aC_cH_b = \angle H_aC_cH + \angle H_bC_cH = \alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2 = 45^\circ$  (напомним, что согласно предложению 1 из [1] точки  $H_a$  и  $H_b$  лежат соответственно на прямых  $C_cA_a$  и  $C_cA_b$ ), то четырехугольник  $O'_bO'_cO'_aC_c$ , где  $O'_c$  — центр описанной окружности треугольника  $H_aH_bC_c$ , является параллелограммом и поэтому центр  $E'_c$  окружности Эйлера треугольника  $H_aH_bC_c$ , совпадающий с серединой отрезка  $C_cO'_c$ , совпадает также с серединой отрезка  $O'_bO'_a$ .

Но точки  $O'_b$  и  $O'_a$  лежат на биссектрисе угла  $ACB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  (см. предложение 1), откуда следует, что прямая  $CO'_a$  является биссектрисой угла  $ACB$  и пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в середине  $S_1$  дуги  $AB$ , не содержащей точки  $C$ .

Поскольку середина  $M$  гипотенузы  $AB$  треугольника  $ABC$  совпадает с серединой отрезка  $C_cC$ , и  $\angle H_aO'_aC_c = \angle H_bO'_bC_c = 90^\circ$ , то точки  $O'_a$  и  $O'_b$  лежат на окружности, построенной на отрезке  $C_cC$  как на диаметре, причем диаметр этой окружности, проходящий через середину  $E'_c$  хорды  $O'_bO'_a$ , перпендикулярен ей.

Отсюда вытекает, что  $ME'_c \perp O'_bO'_a$  или  $ME'_c \perp CS_1$ , т.е. диаметр описанной окружности треугольника  $ABC$ , проходящий через точку  $E'_c$ , перпендикулярен хорде  $CS_1$  этой окружности и поэтому  $E'_c$  является серединой хорды  $CS_1$ .

Так как точка  $S_1$  — середина дуги  $AS_1B$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , а окружность Эйлера прямоугольного треугольника  $ABC$  гомотетична описанной окружности этого треугольника с центром гомотетии  $C$  и коэффициентом  $1/2$ , то при указанной гомотетии середина  $S_1$  дуги  $AS_1B$  перейдет в середину дуги  $MH$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ , совпадающую с серединой отрезка  $CS_1$ .

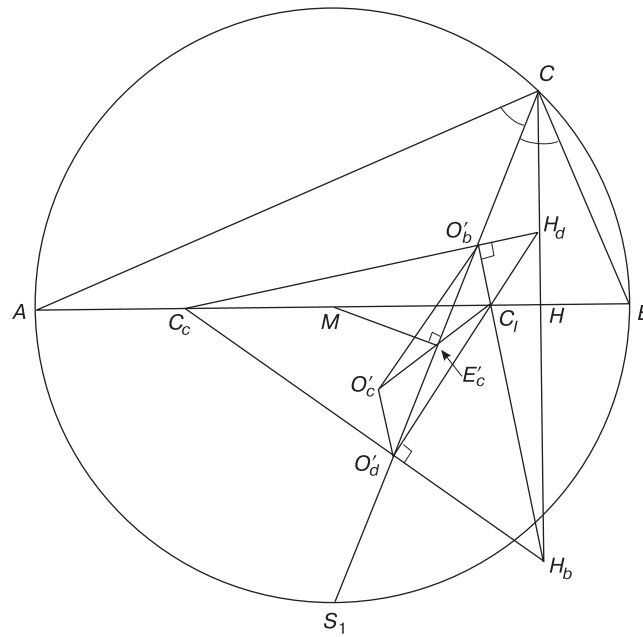


Рис. 16

А это и означает, что центр  $E'_c$  окружности Эйлера треугольника  $H_a H_b C_c$  совпадает с серединой дуги  $ME'_c H$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

**Теорема 9.** Прямые Эйлера треугольников  $C_a H_c C_b$ ,  $C_a H_c H_I$ ,  $H_c C_b H_I$ ,  $C_b C_a H_I$ ;  $H_a C_c H_b$ ,  $H_a C_c C_I$ ,  $C_c H_b C_I$ ,  $H_b H_a C_I$  проходят через соответствующие точки Фейербаха прямоугольного треугольника  $ABC$ .

□ Поскольку  $H_I$  — ортоцентр треугольника  $C_a H_c C_b$ , то треугольники  $C_a H_c C_b$ ,  $C_a H_c H_I$ ,  $H_c C_b H_I$ ,  $C_b C_a H_I$  имеют общую окружность Эйлера, центр которой совпадает по теореме 6 с серединой  $E_c$  дуги  $MCH$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (рис. 17).

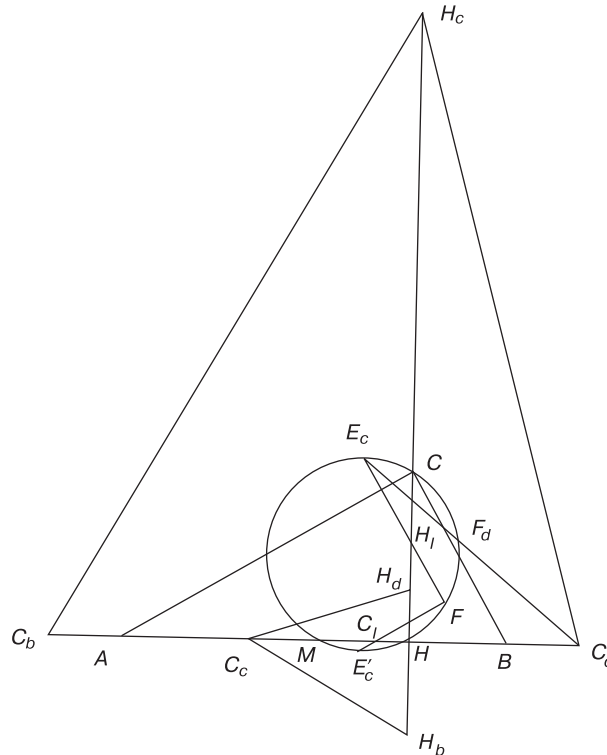


Рис. 17

Аналогично, центр общей окружности Эйлера треугольников  $H_a C_c H_b$ ,  $H_a C_c C_I$ ,  $C_c H_b C_I$ ,  $H_b H_a C_I$  совпадает с серединой  $E'_c$  дуги  $ME'_c H$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$  (см. теорему 8).



Так как  $C_a$  и  $F_a$  — точки касания вневписанной окружности  $I_a$  с прямой  $AB$  и окружностью Эйлера треугольника  $ABC$ , то прямая  $C_aF_a$  проходит через середину  $E_c$  дуги  $MCH$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$ .

Но прямая  $C_aE_c$  является прямой Эйлера треугольника  $H_cC_bH_I$ , поэтому прямая Эйлера  $C_aE_c$  треугольника  $H_cC_bH_I$  проходит через точку Фейербаха  $F_a$  прямоугольного треугольника  $ABC$ .

Точно так же показывается, что прямые Эйлера  $C_bE_c$ ,  $C_I E'_c$ ,  $C_c E'_c$  треугольников  $C_aH_cH_I$ ,  $H_aC_cH_b$ ,  $H_bH_aC_I$  проходят соответственно через точки Фейербаха  $F_b$ ,  $F$ ,  $F_c$  треугольника  $ABC$ .

Докажем теперь, что прямые Эйлера  $H_I E_c$  и  $H_c E_c$  треугольников  $C_aH_cC_b$  и  $C_aH_I C_b$  проходят соответственно через точки Фейербаха  $F$  и  $F_c$  треугольника  $ABC$ .

Действительно, через точку  $F$  проходит прямая Эйлера  $C_I E'_c$  треугольника  $H_aC_cH_b$ , но стороны треугольников  $H_aC_cH_b$  и  $C_aH_cC_b$  соответственно перпендикулярны, поэтому эти треугольники подобны и их прямые Эйлера взаимно перпендикулярны.

Итак, прямые Эйлера  $C_I E'_c$  и  $H_I E_c$  треугольников  $H_aC_cH_b$  и  $C_aH_cC_b$  проходят соответственно через диаметрально противоположные точки  $E'_c$  и  $E_c$  окружности Эйлера треугольника  $ABC$  и взаимно перпендикулярны.

Отсюда следует, что прямые Эйлера  $C_I E'_c$  и  $H_I E_c$  треугольников  $H_aC_cH_b$  и  $C_aH_cC_b$  пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера треугольника  $ABC$ . Поскольку, как уже говорилось, вторая точка пересечения прямой  $C_I E'_c$  с окружностью Эйлера треугольника  $ABC$  совпадает с точкой Фейербаха  $F$ , то это означает, что точка  $F$  и является точкой пересечения прямых  $C_I E'_c$  и  $H_I E_c$ .

Итак, прямая Эйлера  $H_I E_c$  треугольника  $H_aC_cH_b$  проходит через точку Фейербаха  $F$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Для оставшихся прямых Эйлера доказательство аналогично.  $\square$

**Упражнение 12.** Докажите теорему 4, используя то, что стороны треугольников  $A_aB_aB_I$  и  $B_cA_cA_b$ ,  $A_bB_bA_I$  и  $A_cB_aB_c$  соответственно перпендикулярны.

**Следствие 9.** Точки Фейербаха  $F$  и  $F_c$  прямоугольного треугольника  $ABC$  лежат соответственно на окружностях, построенных на отрезках  $C_I H_I$  и  $C_c H_c$  как на диаметрах.

**Упражнение 13.** Докажите следствие 9.

**Следствие 10.** Точки Фейербаха  $F_a$  и  $F_b$  прямоугольного треугольника  $ABC$  лежат соответственно на окружностях, построенных на отрезках  $H_aC_a$  и  $H_bC_b$  как на диаметрах.

**Упражнение 14.** Докажите следствие 10.

Следующая теорема является объединением теорем 2, 3, 4, 6, 8, 9 и следствия 1:

**Теорема 10.** Пусть  $I$ ,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  — вписанная и три вневписанных окружности неравностороннего прямоугольного треугольника  $ABC$ .

Обозначим через  $A_I$ ,  $A_a$ ,  $A_b$ ,  $A_c$ ;  $B_I$ ,  $B_a$ ,  $B_b$ ,  $B_c$ ;  $C_I$ ,  $C_a$ ,  $C_b$ ,  $C_c$  точки касания соответственно окружностей  $I$ ,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  с прямыми  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно, а через  $H_I$ ,  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H_c$  — ортоцентры треугольников  $A_I B_I C_I$ ,  $A_a B_a C_a$ ,  $A_b B_b C_b$ ,  $A_c B_c C_c$ .

Тогда центры окружностей Эйлера следующих тридцати двух треугольников

$$\begin{aligned} &A_a B_a B_I, A_a B_a A_I, B_a B_I A_I, B_I A_a A_I; \\ &A_b B_b A_I, A_b B_b B_I, B_b A_I B_I, A_I A_b B_I; \\ &A_c B_a B_c, A_c B_a A_a, B_a B_c A_a, B_c A_c A_a; \\ &B_c A_c A_b, B_c A_c B_b, A_c A_b B_b, A_b B_c B_b; \\ &C_a H_c C_b, C_a H_c H_I, H_c C_b H_I, C_b C_a H_I; \\ &H_a C_c H_b, H_a C_c C_I, C_c H_b C_I, H_b H_a C_I; \\ &A_a A_b B_c, A_a A_b B_I, A_b B_c B_I, B_c A_a B_I; \\ &A_c B_a B_b, A_c B_a A_I, B_a B_b A_I, B_b A_c A_I \end{aligned}$$

лежат на окружности Эйлера прямоугольного треугольника  $ABC$ , причем прямые Эйлера первых двадцати четырех треугольников из этого списка проходят через соответствующие точки Фейербаха треугольника  $ABC$  по шесть прямых Эйлера через каждую из четырех точек Фейербаха  $F$ ,  $F_a$ ,  $F_b$ ,  $F_c$ .

## Литература

- [1] Е.Д. Куланин. Окружности шести точек прямоугольного треугольника. Журнал "Математическое образование", №2(42), 2007.
- [2] Е.Д. Куланин. Прямоугольный треугольник. Журнал "Математическое образование", № 1(41), 2007.
- [3] Е.Д. Куланин. О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника. Журнал "Математическое образование", № 4(39), 2006.

*Куланин Евгений Дмитриевич,  
профессор факультета информационных технологий  
Московского городского психолого-педагогического  
университета, кандидат физ.-мат. наук,  
старший научный сотрудник.*

*E-mail: lucas03@mail.ru*

# Геометрическое доказательство достаточности признака прямоугольного треугольника

Ф. К. Нилов

Продолжаем серию заметок о признаке правильного треугольника, начатую публикациями В. Б. Дроздова, №4, 2004 г. и Б. Р. Френкина, №2, 2007 г. В заметке предложено чисто геометрическое доказательство признака.

## Комментарии (Б. Р. Френкин)

В журнале “Математическое образование” были опубликованы статьи В. Б. Дроздова (“Три заметки о решении математических задач”, 2004 г., № 4, с. 2—18) и Б. Р. Френкина (“Геометрический подход к признаку прямоугольного треугольника”, 2007 г., № 2, с. 61—62), в которых содержатся новые, более простые доказательства известного факта, часто называемого признаком прямоугольного треугольника:

Пусть  $p$  — полупериметр треугольника,  $R$  и  $r$  — радиусы его описанной и вписанной окружностей. Тогда величина  $p - 2R - r$  равна 0 в том и только том случае, когда треугольник — прямоугольный.

Необходимость условия усматривается легко, трудность заключена в доказательстве достаточности.

Ниже изложено еще одно доказательство достаточности этого признака, найденное Ф. К. Ниловым. По сложности оно сравнимо с предыдущими, но при этом замечательно тем, что является *чисто геометрическим*. Если в доказательстве В. Б. Дроздова имеются алгебраическая, тригонометрическая и геометрическая компоненты, а в моем доказательстве — последние две, то доказательство Ф. К. Нилова проведено полностью в геометрических терминах, т.е. на том языке, на котором сформулировано доказываемое утверждение.

Замечательно также то, что автор доказательства — школьник. Сейчас Фёдор Нилов учится в 11 классе лицея “Вторая школа” г. Москвы. Он с успехом участвовал в различных математических соревнованиях школьников. Эта заметка — одна из его первых публикаций. Хотелось бы пожелать Фёдору, чтобы столь удачное начало получило не менее удачное продолжение в виде плодотворной работы в сфере математики и математического образования.

## Признак прямоугольного треугольника (Ф. К. Нилов)

Пусть дан треугольник  $ABC$ . Обозначим его полупериметр, радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности через  $p$ ,  $R$  и  $r$ .

**Утверждение 1.** Для тупоугольного треугольника верно неравенство:  $p < 2R + r$ .

**Доказательство** (см. рис. 1). Будем считать, что угол  $C$  тупой. Восстановим перпендикуляр к прямой  $AC$  в точке  $C$ . Обозначим точку пересечения этого перпендикуляра с прямой  $AB$  через  $D$ , а радиус вписанной окружности прямоугольного треугольника  $ACD$  через  $r'$ . Тогда  $r' = (AC + CD - AD)/2$ .

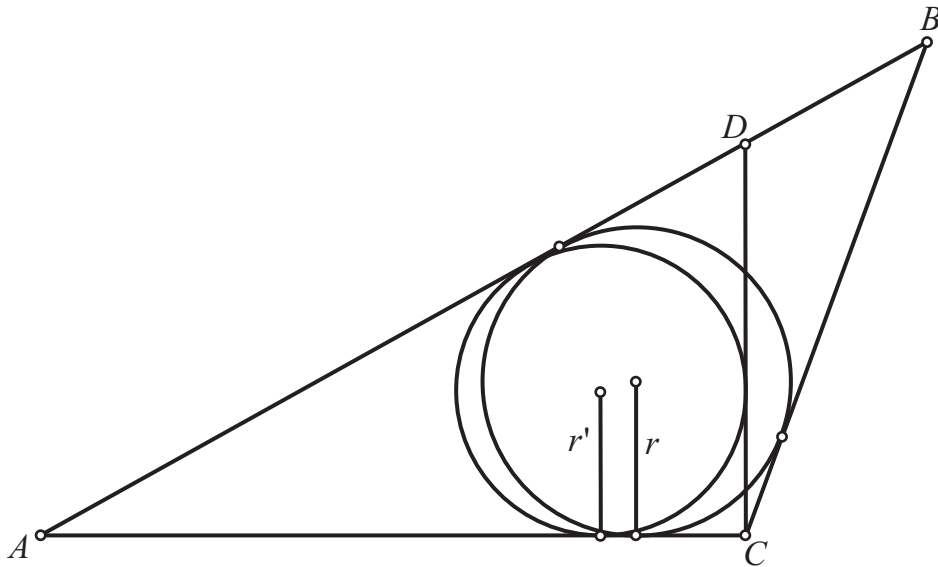


Рис. 1

Поскольку угол  $C$  тупой, то, как нетрудно видеть,  $r > r'$ . Имеем

$$2R + r > 2R + r' = \frac{2R + (AC + CD - AD)}{2} > \frac{AB + (AC + CD - AD)}{2} = \frac{(AB + AC + CD + DB)}{2} > \frac{(AB + AC + BC)}{2} = p.$$

**Утверждение 2.** Для остроугольного треугольника верно неравенство:  $p > 2R + r$ .

**Доказательство** (см. рис. 2). Обозначим центр описанной окружности треугольника  $ABC$  через  $O$ , середину стороны  $AC$  через  $M$ . Заметим, что в случае правильного треугольника наше утверждение проверяется без труда, а в остальных случаях из трёх расстояний от центра описанной окружности до сторон треугольника найдётся хотя бы одно, меньшее  $r$ . Поэтому без ограничения общности можно считать, что  $OM < r$ .

Рассмотрим точки  $X$  и  $Y$  на лучах  $BA$  и  $BC$  такие, что  $XB = 2R$  и угол  $XYB$  – прямой. Так как углы  $ABC$  и  $AOM$  равны и  $AO = R$ , то прямоугольный треугольник  $XYB$  подобен  $AOM$  с коэффициентом 2, откуда  $XY = 2AM = AC$  и  $BY = 2OM$ .

Обозначим центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  через  $I$ , а точки касания вписанной окружности со сторонами  $AB$  и  $BC$  через  $P$  и  $Q$ .

Тогда  $p = BP + AC$ .

Обозначим проекцию точки  $I$  на  $XY$  через  $Z$ . Тогда  $XZ = XY - QI = AC - r$  и  $XP = 2R - BP$ . Заметим, что  $XI^2 = XP^2 + PI^2 = XZ^2 + IZ^2$ . Значит,  $PI^2 - IZ^2 = XZ^2 - XP^2 = (AC - r)^2 - (2R - BP)^2 = (AC - r - 2R + BP) \cdot (AC - r + 2R - BP) = (p - 2R - r) \cdot (XP + XZ)$ . Теперь достаточно показать, что левая часть в этой цепочке равенств положительна (тогда положительна и правая часть, т.е.  $p > 2R + r$ ). Иначе говоря, надо показать, что  $PI > IZ$ .

Рассмотрим случай, когда  $BQ < BY$ .

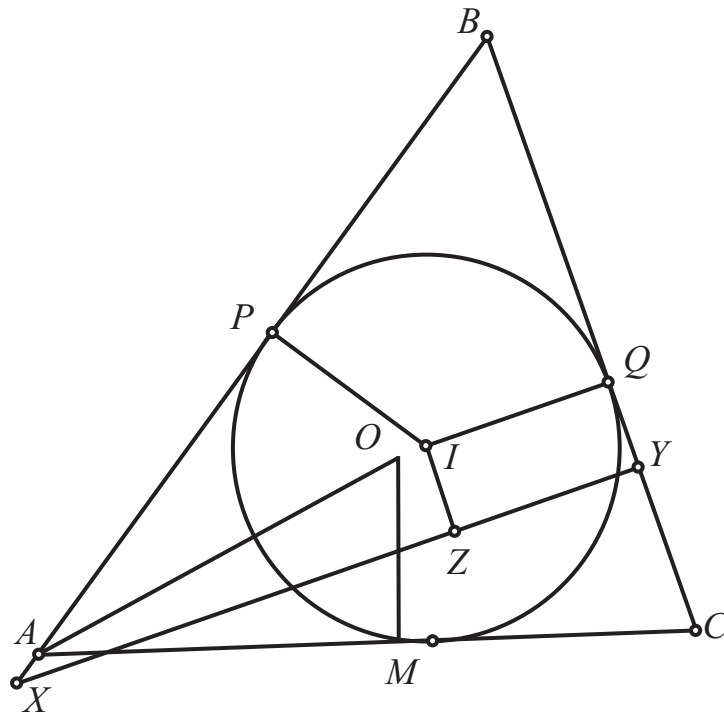


Рис. 2

Согласно сказанному выше,  $BY = 2OM < 2r$ . С другой стороны,  $BQ > IQ = r$ , поскольку угол  $QBI$  меньше половины прямого (треугольник  $ABC$  — остроугольный). Значит,  $IZ = BY - BQ < r = PI$ , что и требовалось.

Теперь рассмотрим случай, когда  $BQ > BY$ .

Очевидно, что  $BX > BA > BP$ . Поэтому прямая  $XY$ , параллельная  $QI$ , пересекает отрезок  $PI$  в некоторой точке  $N$ . Тогда  $PI > NI > IZ$ , что и требовалось.

Нилов Федор,  
 учащийся 11 класса  
 лицея "Вторая школа" г. Москвы.

## Математизация исторических исследований

А. Ф. Ляхов

При помощи математического моделирования проанализирован ряд исторических событий, по результатам анализа сделаны новые непредвзятые выводы об этих событиях.

В настоящее время очевидна предсказательная сила и глубина математического описания процессов самой разнообразной природы. Однако в силу ряда политических причин математические методы с трудом находят применение при проведении исторических исследований. В данной работе на ряде исторических сражений показано, как применение математической теории динамики средних позволяет поставить новые задачи и получить ответы на целый ряд спорных вопросов.

Известно, что для описания боя многочисленных группировок могут быть использованы статистические подходы [1].

Рассмотрим простейшую модель боя. Пусть в бою участвуют две группировки. В составе первой группировки имеется  $N_1$  однородных боевых единиц, во второй группировке —  $N_2$  боевых единиц. Обозначим через  $n_1(t)$  — среднее число боевых единиц первой группировки, в момент  $t$ ,  $\lambda_1$  — среднюю скорострельность (число выстрелов в единицу времени) для одной боевой единицы,  $p_1$  — вероятность, с которой каждый выстрел поражает единицу второй группировки. Аналогичные параметры введем для второй группировки:  $n_2(t)$ ,  $\lambda_2$ ,  $p_2$ . После поражения цели огонь переносится на непоражённые цели.

Система линейных дифференциальных уравнений, описывающих изменение численности противоборствующих сторон, имеет вид:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\Lambda_2 n_2, \quad \frac{dn_2}{dt} = -\Lambda_1 n_1,$$

где  $\Lambda_i = \lambda_i p_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $n_1 = N_1$ ,  $n_2 = N_2$  при  $t = 0$ .

Полагая  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  постоянными в течение боя, получим

$$\begin{aligned} n_1(t) &= N_1 \operatorname{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t - N_2 \sqrt{\Lambda_2 / \Lambda_1} \operatorname{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t, \\ n_2(t) &= N_2 \operatorname{ch} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t - N_1 \sqrt{\Lambda_1 / \Lambda_2} \operatorname{sh} \sqrt{\Lambda_1 \Lambda_2} t. \end{aligned}$$

Переходя от абсолютной численности боевых единиц к относительной  $\mu_1 = n_1/N_1$ ,  $\mu_2 = n_2/N_2$ , исключая время и введя коэффициент преимущества  $\chi = N_1/N_2 \sqrt{\Lambda_1/\Lambda_2}$ , получим связь численности группировок в течение боя

$$\mu_2 = \sqrt{1 - \chi^2(1 - \mu_1^2)}. \quad (1)$$

Аналогично могут быть получены формулы, связывающую численность сторон при различных способах управления огнём. Например, одна из сторон не осуществляет управления огнём или обе стороны не управляют огнём.

Приведем основные расчетные формулы, в размерных параметрах, для оценки качества управления артиллерийским огнем.

1. Управляемый бой. Обе стороны после поражения цели переносят огонь на непоражённые цели.

$$\lambda_2 p_2 (N_2^2 - n_2^2) = \lambda_1 p_1 (N_1^2 - n_1^2). \quad (2)$$

1. Одна сторона управляет переносом огня, а другая — нет.

$$n_2 = N_2 - \frac{\lambda_1 p_1}{2N_2 \lambda_2 p_2} (N_1^2 - n_1^2). \quad (3)$$

1. Обе стороны не управляют переносом огня.

$$\lambda_1 p_1 N_1 (N_1 - n_1) = \lambda_2 p_2 N_2 (N_2 - n_2). \quad (4)$$

### Литература

- [1] Е. С. Вентцель Исследование операций — М.: Наука, 1988. — 208 с.

### Анализ соотношения русских и французских потерь в Бородинском сражении

Бородинское сражение при невиданной ожесточенности и гигантских людских потерях является в некотором роде предвестником будущих позиционных битв. В течение сражения позиция русской армии практически не изменилась. Французы сумели потеснить русскую армию на незначительное расстояние, но в результате обе армии оказались обескровленными [1, 2].

Стационарность позиции, массированное использование артиллерии в ходе сражения позволяют построить динамическую математическую модель изменения численного состава армий.

В таблице приведены основные технические параметры артиллерийских орудий и огнестрельного оружия пехоты русской и французской армий [3, 4].

| Калибр             | Вес ядра | Предельная дальность<br>(практическая стрельба) | Скорострельность                    |
|--------------------|----------|---|-------------------------------------|
| 12 фунтов (121мм.) | 5,88 кг  | Ядро 2700 м (1200 м)<br>Картечь 500–600 м.      | 1 выстр. в 1 мин. 2 выстр. в 1 мин  |
| 8 фунтов (106 мм.) | 3,92 кг  | 1000–800 м<br>Картечь 500–600 м.                | 1 выстр. в 1 мин.                   |
| 6 фунтов (96 мм.)  | 2,94 кг  | Ядро 2100 м (1000–800 м)<br>Картечь 500–600 м.  | 1 выстр. в 1 мин. 2 выстр. в 1 мин. |
| 4 фунтов (84 мм.)  | 1,96 кг  | —   | —                                   |
| 3 фунтов (71мм.)   | 1,47кг   | —   | —                                   |
| Ружья 19,5–17,8 мм | 23–25 г  | 200 м<br>(эффективн. огонь 75–50 м)             | 1 выстр. 1 мин.                     |
| Штуцер 13,5–16 мм  | 20–17 г  | 700 м   | 1 выстр. 4–5 мин.                   |

В русской армии перед сражением было  $N_1 = 640$  орудий (12 фунтовых орудий — 160) во французской армии  $N_2 = 590$  орудий. Основной парк наполеоновской артиллерии составляли 6-, 4- и 3-фунтовые пушки, (12-фунтовые орудия ~ 60) [1].

В русской армии концентрация артиллерии (5,5 орудий на 1000 солдат) была выше, чем во французской армии (4,5 орудия на 1000 солдат).

Для построения математической модели определим некоторые величины и сделаем несколько вполне естественных предположений.

*Весом обобщенного залпа* будем называть вес снарядов, которые могла бы выстрелить вся артиллерия одной из стороны за один выстрел.

Вес русского залпа

$$P_p = 160 \cdot 5,88 + 480 \cdot 2,94 = 2352 \text{ кг.}$$

Вес французского залпа<sup>1</sup>

$$P_{\phi} = 60 \cdot 5,88 + 530 \cdot 2,94 = 1911 \text{ кг.}$$

Сделаем два естественных предположения.

1. Предположим, что вероятность успешного выстрела и скорострельность для русской и французской армии равны. Эти предположения вполне обоснованны, тем, что обе армии к началу войны имели большой боевой опыт.
2. При построении модели не учитывается поражающий фактор ружейного огня и фактор рукопашных пехотных и кавалерийских столкновений. Во время сражения непрерывно происходили ожесточенные перестрелки и рукопашные бои, но потери в этих столкновениях были много меньше потерь от артиллерийского огня.

Для построения модели введем некоторое усреднённое эталонное орудие, вес выстрела которого определим по следующей формуле:  $p_0 = P_p / N_1 = 3,62$  кг. Следовательно, число эталонных орудий в русской армии  $N_1 = 640$ ; во французской армии  $N_2^0 = P_{\phi} / p_0 = 528$ . При сделанных предположениях превосходство русской артиллерии, в соответствии с моделью боя, определится следующим коэффициентом  $\chi = (N_1 / N_2^0) \sqrt{\lambda_1 p_p / \lambda_2 p_{\phi}}$ , или  $\chi = 1,23$ .

Для определения потерь французской армии возьмем за основу потери русской армии, подтвержденные документами. Эти потери составили около 15 тысяч убитых и 30 тысяч раненых. Потери артиллерии, вообще говоря, неизвестны. Полагая, что потери артиллерии пропорциональны безвозвратным потерям в личном составе ( $\approx 15$  тысяч), получим, что из строя было выведено и потеряно около 82 орудий. Следовательно, на момент окончания боя оставалось 558 орудий или  $\mu_1^{(k)} = 558 / 640 \approx 0,87$ . Из (1) можно записать  $\mu_2^{(k)} = \sqrt{1 - \chi^2(1 - \mu_1^{(k)2})}$  или  $\mu_2^{(k)} \approx 0,8$ , т. е. во французской армии осталось около  $528 \mu_2^{(k)} = 423$  эталонных орудий, что будет соответствовать  $n_2 = 590 \cdot 423 / 528 \approx 471$  орудиям. Потери французской армии по артиллерии составили 119 орудий. Если учесть, что в армии Наполеона на тысячу человек приходилось 4,5 орудия, то, пересчитывая артиллерийские потери на потери личного состава, получим  $119 / 4,5 \approx 26,4$  тыс. чел.

Можно видеть, что безвозвратные потери атакующей французской армии при расчете по модели артиллерийского боя в  $\sim 1,4$ – $1,8$  раза превышают потери русской армии. Потери французской армии ранеными, по-видимому, составляли не менее 40 тысяч человек.

Заметим, что полученные значения потерь пропорциональны документально известным потерям офицерского состава. Наполеоновская армия потеряла 1 тыс. 800 офицеров, 47 (49) генералов, в русской армии погибло 23 генерала и 851 человек офицеров.

## Литература

- [1] Строков А. А. История военного искусства — «Полигон», С.-Петербург, т. 4, 1994. — 679 с.
- [2] Гарнич Н. Ф. Бородинское сражение. — сб. статей «Полководец Кутузов» под. ред. Л. Г. Бескровного, М.: АН СССР, ГИПЛ., 1955 г. — 495 с.
- [3] Прочко И. С. История развития артиллерии — Полигон, С.-Петербург, 1994 г. — 495 с.
- [4] Безотосный В. М., Васильев Н. А., Горшман А. М. Русская армия 1812–1814 г. — М.: Гуманит. Изд. ВЛАДОС, 1999 г. — 160 с.
- [5] Ляхов А. Ф. Компьютерное и математическое моделирование исторических процессов — Н. Новгород, Ученые записки Волго-Вятского отделения Международной Славянской академии наук, образования, искусств и культуры, Вып. № 6, 2000 г., с. 58–64.

<sup>1</sup>Заметим, что вес французского залпа завышен, так как значительную часть французской артиллерии составляли легкие орудия (3-фунтовые пушки). Русская конница имела четыре орудия на тысячу человек, французская — семь орудий.



## Анализ управления артиллерийским огнём в Цусимском сражении

При анализе поражения русского флота историками рассматривается большая совокупность различных факторов, способствовавших поражению. Материальные факторы, количественное и качественное превосходство, оцениваются тактические и стратегические решения русского и японского командования, оценивается управление во время боя.

При выборе основных причин разгрома различные историки предлагают свои продиктованные субъективными причинами гипотезы.

В данной работе показано, что во время сражения обе стороны осуществляли эффективное управление артиллерийским огнём.

Артиллерийский бой двух эскадр может быть проанализирован с помощью Ланчестерской модели. Во время основного времени сражения эскадры двигались параллельными курсами, т. е. практически оставались неподвижными относительно друг друга. В таблице приведены сравнительные параметры артиллерии эскадр, взятые из литературы [2, 3].

| 6–12 дюймов                     | Русский флот  | Японский флот |
|---------------------------------|---------------|---------------|
| Орудий на борт (общ.)           | 87            | 128           |
| Вес выстрела (ср.), кг.         | 14323 (164,6) | 13462 (105,2) |
| Скорострельность(ср.) выс./мин. | 161           | 376-640       |
| Выпущено снарядов               | 1200          | 5748          |
| Количество попаданий            | 47            | 326           |
| Вероятность попаданий           | 0,039         | 0,05          |
| Потери (пушек практические)     | 70            | 30            |

Осуществим пересчет японских орудий в эквивалентное количество русских орудий. Для этого разделим вес японского залпа на вес выстрела русского орудия  $N_2 = 13462/164,6 \approx 82$ . Вероятность попадания русской и японской артиллерии  $p_1 = 0,04$ ,  $p_2 = 0,05$  и потери русского флота — 70 орудий, приведены в таблице, т. е. начальное количество орудий  $N_1 = 87$ , конечное число —  $n_1 = 17$ .

Проведя расчет хорошо организованного артиллерийского боя для минимальной скорострельности японского флота по формуле (2), получим, что потери японского флота в этом случае составляли бы 35 реальных орудий. При расчете с максимальной скорострельностью японский флот, потерял бы 25 орудий.

Для расчета потерь плохо организованного артиллерийского боя одной из сторон используем формулу (3).

При плохо организованном управлении огнем русского флота и хорошо организованном огне японского флота потери японского флота при минимальной скорострельности составят 15 орудий, при максимальной — 7 орудий.

При хорошо организованном управлении огнем русского флота и плохо организованном огне японского флота потери японского флота при минимальной скорострельности составят 49 орудий, при максимальной — 27 орудий.

Если управление огнём организовано плохо у обеих сторон, то по формуле (4) получим: при минимальной скорострельности японского флота потери составили бы 39 орудий, а при максимальной скорострельности — 24 орудия.

Сравнивая полученные результаты с данными, приведенными в таблице, можно сделать следующие содержательные выводы:

- качество управления артиллерийским огнём русской эскадры было не хуже, а скорее даже лучше управления огнём японской эскадры;
- артиллерийское поражение было вызвано количественным и качественным превосходством артиллерии на японских кораблях.

В заключение заметим, что приведённый анализ может быть уточнён за счёт более корректного сравнения скорострельности артиллерии противостоящих сторон. Для этого можно

использовать данные о количестве выпущенных снарядов, приведённые в таблице. Из неё следует, что японский флот выпустил около 603,5 тонн снарядов, русский флот — 197,4 тонн, т. е. скорострельность японской артиллерии в три раза выше скорострельности русской артиллерии.

### Литература

- [1] Е. С. Вентцель. Исследование операций. — М.: Наука, 1988. — 208 с.
- [2] В. Кофман. Цусима: анализ против мифов. — В журнале «Наваль» N1/92.
- [3] Крестьянинов В. Я. Цусимское сражение 14–15 мая 1905 г. СПб: «Галерея Принт», 1998.

## Сравнительный анализ качества танков Красной армии с танками немецкой армии в оборонительной фазе Курской битвы

Курская битва — одно из крупнейших сражений Второй Мировой войны. Это сражение было последней попыткой немецкого командования перехватить стратегическую инициативу, которая была утрачена после поражения под Сталинградом.

Немецкая идеологическая машина, поставленная перед фактом поражения на Курской дуге, всячески пыталась принизить значение победы Красной армии, фальсифицируя реальные данные о соотношении сил и потерях.

В настоящее время нашей стране навязывают ложное, порождающее комплекс неполноценности видение истории. Один из важных методов фальсификации связан с восхвалением немецкой армии и немецкой техники и принижением качества Красной Армии.

Мы будем говорить о превосходстве тех или иных танков в конкретной ситуации, а именно в оборонительной фазе Курского сражения. Будем полагать, что «качество» танка на поле боя определяется многими параметрами: непосредственно самой техникой, экипажем, командованием танкового подразделения взаимодействием его с пехотными, артиллерийскими подразделениями и т. д. Из формулы (1) коэффициент превосходства может быть записан в виде  $\chi = \sqrt{(\mu_2^2 - 1)/(\mu_1^2 - 1)}$ , или, переходя к размерным параметрам, получим  $\chi = N_1/N_2 \chi_1$ ,  $\chi_1 = \sqrt{(N_2^2 - n_2^2)/(N_1^2 - n_1^2)}$ .

Определим коэффициент превосходства танков Красной Армии в оборонительной фазе сражения с 5 по 12 июля 1943 года на Воронежском фронте.

На 5 июля 1943 года Воронежский фронт имел в своём составе около 2100 танков (включены резервные 2 и 10 танковые корпуса), группа армии «Юг» — примерно 1700 танков (включен 24 резервный танковый корпус). Заметим, что погрешность этих данных не превышает 10 %.

Установить достоверные потери по приводимым документам не удастся, танки постоянно ремонтировались, подходили небольшие резервы (5 %), поэтому остановимся на известном количестве боеготовых танков на 12 июля 1943 года [1, 2].

Воронежский фронт имел примерно 1600 танков. Здесь не учитывается 5-я Гвардейская Танковая Армия (818 танков), которая была введена в сражение под Прохоровкой 12 июля из стратегических резервов Красной Армии. Группа армий «Юг» на 12 июля имела в своём составе около 700 танков.

Подставляя данные значения в формулу для коэффициента превосходства, получим  $\chi_1 \approx 1,3$ ,  $\chi = 1,6$ .

Проведённые исследования позволяют утверждать, что в оборонительной фазе Курского сражения (с 5 по 12 июля) на Воронежском фронте коэффициент превосходства Красной армии был равен 1,6, а один «усреднённый» танк Красной армии превосходил «усреднённый» танк немецкой армии в 1,3 раза.

### Литература

- [1] Л. Лопуховский. Прохоровка без грифа секретности. — М.: ЭКСМО, 2005 г. с. 616.
- [2] Стивен Ньютон. Курская битва. Немецкий взгляд — М.: ЭКСМО, 2006 г. с. 574.

# Математическое моделирование динамики средних распределённых систем

А. Ф. Ляхов, Ф. А. Ляхов

Предложен способ моделирования взаимодействия боевых группировок, учитывающий распределенный характер расположения группировок на местности.

При статистическом исследовании дискретных случайных процессов сложных систем, структура которых представима в виде взаимосвязанных групп однородных элементов, широко используются различные модели динамики средних [1, 2]. Частным случаем таких моделей являются ланчестерские модели боя, описывающие столкновение больших группировок. Заметим, что эти модели не учитывали распределенный характер расположения группировок на местности. В работе впервые предлагается модель, учитывающая распределенный характер боевых группировок.

Если группы боевых средств, участвующих в бою, достаточно многочисленны, то случайности, связанные с состоянием каждой отдельной единицы (поражена – не поражена; выстрелила – не выстрелила), мало сказываются на состоянии всей группы в целом. Согласно закону больших чисел, относительное число сохранившихся боевых единиц с той и другой стороны будет близко к некоторому среднему значению, т. е. к его математическому ожиданию. Для таких групп могут быть созданы сравнительно простые методы учета противодействия, в которых можно отказаться от рассмотрения подробностей, связанных с состоянием каждой отдельной боевой единицы, а изучать изменение состава всей группой в целом.

Построение распределенных моделей боя предполагает введение некоторых усредненных локальных в пространстве характеристик боевых единиц.

Для описания боя распределённых группировок введём понятие поверхности боя — двумерную поверхность  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  (рельеф местности)<sup>1</sup>. Вместо отдельных боевых единиц, входящих в группировки, будем рассматривать сплошные среды из боевых единиц. При этой идеализации предполагается, что группировки непрерывно заполняют всю поверхность боя.

При описании свойств боевых группировок удобнее использовать лагранжевы координаты. Обозначим эти координаты через  $\xi_i = \{\xi_i^1, \xi_i^2, \xi_i^3\}$ ,  $i = 1, 2$  (координаты для каждой группировки);  $\Xi \subset \mathbb{R}^2$  — параметризующая область для  $\Sigma$ ,  $\Sigma = \{\xi_i = \varphi_i(u), u = \{u^1, u^2\} \in \Xi\}$ . Положение каждой боевой единицы описывается эйлеровыми координатами  $x_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\}$ ,  $x_i = x_i(\xi_i, t)$ , где  $t \in T = [t_1, t_2]$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  — область определения времени.

Введем распределенные характеристики боевых группировок. Плотности боевых единиц на единицу площади имеют вид:  $\rho_i = \rho_i(x_i, t)$ , плотности скорострельности —  $\lambda_i = \lambda_i(x_i, t)$ . «Поверхностные плотности» вероятностей поражения боевых средств противника равны

$$p_i = p_i(x_1, x_2, t, \rho_1(x_1, t), \rho_2(x_2, t)).$$

Распределение огня группировки по группировке противника характеризуется плотностью вероятности выбора боевой единицей единицы из группировки противника в качестве цели:  $\nu_i = \nu_i(x_1, x_2, t, \rho_1(x_1, t), \rho_2(x_2, t))$ . При этом, выбор в качестве цели точек на  $\Sigma$ , в которых плотность боевых единиц равна нулю, запрещён:

$$\nu_1(x_1, x_2, t, \rho_1(x_1, t), \rho_2(x_2, t)) = \begin{cases} n u_1(x_1, x_2, t, \rho_1(x_1, t), \rho_2(x_2, t)), & \rho_2(x_2, t) \neq 0, \\ 0, & \rho_2(x_2, t) = 0. \end{cases}$$

Аналогичное условие имеет место для  $\nu_2$ .

<sup>1</sup>Будем полагать, что  $\Sigma$  — простая гладкая  $k$ -мерная поверхность в  $\mathbb{R}^n$ , т. е. окрестность любой точки на поверхности является гомеоморфным образом  $k$ -мерного шара, этот гомеоморфизм гладкий и удовлетворяет требованию регулярности. Будем также полагать, что  $\Sigma$  допускает параметризацию и для рассматриваемой задачи  $k = 2$ ,  $n = 2, 3$ .

Условия нормировки имеют вид<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} (\forall x_1)(\forall t) \quad \int_{\Sigma} \nu_1 dx_2 &= 1, \\ (\forall x_2)(\forall t) \quad \int_{\Sigma} \nu_2 dx_1 &= 1. \end{aligned}$$

Можно видеть, что предлагаемая модель боевых группировок в виде сплошных сред допускает предельный переход к известным ланчестерским моделям, не учитывающим их распределённый характер.

В [1] показано, что каждая боевая группировка осуществляет пуассоновский поток успешных выстрелов, это же свойство предполагаем сохранившимся в нашей модели. Введём «поверхностную плотность» средней плотности пуассоновских потоков выстрелов  $\omega_i = \lambda_i p_i \nu_i$ .

Основной характеристикой движения боевых единиц в эйлеровых координатах являются поля скоростей:  $\vec{v}_i = \frac{\partial x_i(\xi_i, t)}{\partial t} |_{\xi_i = \xi_i(x_i, t)}$ . Рассмотрим индивидуальный «объем»  $S_1$  боевых единиц<sup>3</sup>. Запишем для него закон изменения «массы»<sup>4</sup>. Если бы группировка противника не воздействовала на этот индивидуальный объем, то имел бы место закон сохранения «массы». Во время боя «масса» убывает следующим образом:

$$\frac{dm_1(t, S_1)}{dt} = - \int_{S_1} dx_1 \int_{\Sigma} \omega_2(x_1, x_2) \rho_2(x_2, t) dx_2.$$

Аналогичное уравнение может быть записано для второй группировки.

Полная производная по времени от «массы», с учетом зависимости индивидуального «объема» от времени, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \rho = \int_{S(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right).$$

Поскольку индивидуальный «объем»  $S$  — произвольный, то внешнее интегрирование может быть отброшено. В итоге получим систему уравнений, описывающую изменение плотности боевых группировок:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \vec{v}_1) + \int_{\Sigma} \omega_2 \rho_2 dx_2 = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_2 \vec{v}_2) + \int_{\Sigma} \omega_1 \rho_1 dx_1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В частных случаях удастся найти аналитическое решение системы (1).

Пусть движение отсутствует:  $\vec{v}_{1,2} \equiv \vec{0}$ . Будем рассматривать одномерный случай:  $\dim \{x_i\} = 1$ . Уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \int_{\Omega} \omega_2 \rho_2 dx_2 = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \int_{\Omega} \omega_1 \rho_1 dx_1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\Omega = (-\infty, +\infty)$ . Предположим, что  $\omega_1 = \omega_1^0 f_1(\rho_2)$ ,  $\omega_2 = \omega_2^0 f_2(\rho_1)$ ,  $\omega_{1,2} \equiv \text{const}$ . Система (2) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \omega_1^0 f_2(\rho_1) T_2(t) = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \omega_2^0 f_1(\rho_2) T_1(t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

<sup>2</sup>В общем случае данные интегралы являются интегралами Лебега. В данном исследовании они рассматриваются как интегралы Римана:  $\int_{\Sigma} \nu_1 dx_2 = \int_{\Omega} \nu_1(x_1, x_2(\xi_2(u), t), \rho_1(x_1, t), \rho_2(x_2(\xi_2(u), t), t)) \sqrt{\det G(u)} du$ , где  $G(u)$  — первая квадратичная форма поверхности  $\Sigma$ .

<sup>3</sup>Индивидуальным «объемом» назовем некоторое множество боевых единиц, состоящее из одних и тех же боевых единиц в любой момент времени.

<sup>4</sup>Массой «объема»  $S$  естественно назвать  $m = \int_S \rho$ .

где  $T_i(t) = \int_{\Omega} \rho_i(x_i, t) dx_i$ . Зададим конкретный вид функций  $f$ . В случае, когда  $f_i \equiv Id$ , т.е.  $f_i(\rho) \equiv \rho$ , систему (3) можно свести к одному нелинейному интегро-дифференциальному уравнению 2-го порядка. Выразив из первого уравнения  $\rho_1(x, t)$

$$\int_{\rho_1^0(x)}^{\rho_1(x,t)} \frac{d\rho_1}{\rho_1} = - \int_0^t \omega_1^0 T_2 dt \Rightarrow \rho_1(x, t) = \rho_1^0(x) \exp \left( - \int_0^t \omega_1^0 \int_{\Omega} \rho_2 dx_2 dt \right),$$

здесь  $\rho_1^0(x)$  — начальная плотность 1-ой группировки и подставив во второе уравнение системы (3), получим:

$$-\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \rho_2 \omega_2^0 \exp \left( - \int_0^t \omega_1^0 T_2 dt \right) \int_{\Omega} \rho_1^0(x) dx.$$

Прологарифмировав левую и правую части, а затем, продифференцировав их по времени, окончательно имеем:

$$\frac{\rho_{2tt}}{\rho_{2t}} = \frac{\rho_{2t}}{\rho_2} - \omega_1^0 \int_{\Omega} \rho_2 dx \quad (4)$$

Уравнение (4) может быть исследовано с помощью численных методов.

Анализ возможных значений «поверхностной плотности» пуассоновских потоков выстрелов показывает необходимость специального учёта областей, в которых отсутствуют боевые единицы противника. Действительно, если  $f$  выбрать в виде  $f_i(\rho) = 1$ , то система (3) утрачивает физический смысл, поскольку при таком виде  $f$  группировки будут вести огонь по областям, где плотности равны нулю. В этом случае плотности группировок в этих областях примут отрицательные значения. Введем «пространственные» (по координате  $x$ ) носители плотностей:  $\Omega_i(t) = \supp_x \rho(x, t) \equiv \{x; \rho(x, t) \neq 0\}$ . В дальнейшем будем рассматривать только  $t \in T$ ,  $T = \{t; \Omega_i(t) \equiv \Omega_i(0)\}$ . Физически это означает, что мы рассматриваем систему (2) на тех временах, когда плотности группировок еще ни в одной точке не обратились в ноль (кроме тех точек, на которых они были равны нулю при  $t = 0$ ). Интегрирование по  $\Omega$  будет заменено интегрированием по  $\Omega_i = \Omega_i(0)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \omega_2^0 \int_{\Omega_2} \rho_2 dx_2 = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \omega_1^0 \int_{\Omega_1} \rho_1 dx_1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из первого уравнения системы (5) получим:

$$\rho_1(x_1, t) = \rho_1^0(x_1) - \int_0^t \omega_2^0 \int_{\Omega_2} \rho_2(x_2, \tau) dx_2 d\tau,$$

подставляя его во второе уравнение, окончательно будем иметь<sup>5</sup>:

$$\rho_2(x_2, t) = \text{mes}(\Omega_1) \omega_1^0 \omega_2^0 \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\eta \int_{\Omega_2} \rho_2(\xi, \eta) d\xi - \omega_1^0 t \int_{\Omega_1} \rho_1^0(\xi) d\xi + \rho_2^0(x_2).$$

Вид полученного интегрального уравнения позволяет предположить, что решение системы (5) имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_1(x_1, t) = \rho_1^0(x_1) + T_1(t), \\ \rho_2(x_2, t) = \rho_2^0(x_2) + T_2(t). \end{cases}$$

<sup>5</sup>Предполагаем, что  $\Omega_i(0)$  — измеримое множество.

Эта замена сводит (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} T_1' + \omega_2^0 \text{mes}(\Omega_2) T_2 + \omega_2^0 \int_{\Omega_2} \rho_2^0(x) dx = 0, \\ T_2' + \omega_1^0 \text{mes}(\Omega_1) T_1 + \omega_1^0 \int_{\Omega_1} \rho_1^0(x) dx = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Введем обозначения:  $\alpha_i = \omega_i^0 \text{mes}(\Omega_i)$ ,  $\beta_i = \omega_i^0 \int_{\Omega_i} \rho_i(x) dx$ :

$$\begin{cases} T_1' + \alpha_2 T_2 + \beta_2 = 0, \\ T_2' + \alpha_1 T_1 + \beta_1 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Общее решение системы (7) имеет вид:

$$\begin{cases} T_1 = a_1 e^{\lambda t} + b_1 e^{-\lambda t} + c_1, \\ T_2 = a_2 e^{\lambda t} + b_2 e^{-\lambda t} + c_2, \end{cases}$$

здесь  $\lambda = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ ,  $c_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i}$ ,  $a_1 = -\gamma a_2$ ,  $b_1 = \gamma b_2$ ,  $\gamma = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$ .

Начальные условия для (7) имеют вид:

$$\begin{cases} T_1(0) = 0, \\ T_2(0) = 0, \end{cases}$$

из них окончательно находим:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\lambda} \right), \quad b_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2}{\lambda} \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left( -\frac{\beta_1}{\lambda} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_1}{\lambda} + \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right).$$

В общем случае анализ решения системы (3) возможен только численными методами. Проведём численное исследование боя двух группировок, которые находятся на одной линии. Рассмотрим распределённую модель такого боевого столкновения (рис. 1).

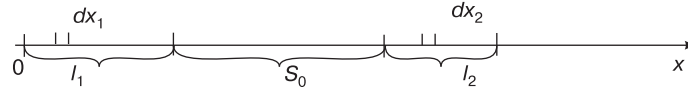


Рис. 1.  $l_1$  — длина линии, на которой распределены боевые единицы первой группировки;  $l_2$  — длина линии, на которой распределены боевые единицы второй группировки;  $S_0$  — расстояние между группировками

Ведущие бой группировки удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \int_{-l_1}^{l_1} \lambda_1 \rho_1(x_1, t) p_1(x_1, x_2) \nu_1(x_1, x_2) dx_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_2(x_2, t), \\ \int_{-l_2}^{l_2} \lambda_2 \rho_2(x_2, t) p_2(x_1, x_2) \nu_2(x_1, x_2) dx_2 = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_1(x_1, t). \end{cases} \quad (8)$$

Построим разностную схему, аппроксимирующую систему интегральных уравнений. Для этого в системе (2) заменим интегралы квадратурной формулой Гаусса для пяти узлов.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_2(z_j, t) = - \sum_{i=1}^5 c_i \omega_1(z_i, z_j) \rho_1(z_i, t), \\ \frac{d}{dt} \rho_1(z_j, t) = - \sum_{i=1}^5 c_i \omega_2(z_i, z_j) \rho_2(z_i, t), \end{cases} \quad (9)$$

$j = 1, \dots, 5$ ; здесь  $c_i$  — постоянные коэффициенты формулы Гаусса:

$$c_1 = c_5 = \frac{161}{450} - \frac{13\sqrt{70}}{900}, \quad c_2 = c_4 = \frac{161}{450} + \frac{13\sqrt{70}}{900}, \quad c_3 = \frac{128}{225},$$

$z_i$  — узлы интерполирования формулы Гаусса,

$$\omega_1(z_i, z_j) = \lambda_1 \cdot p_1(z_i, z_j) \cdot \nu_1(z_i, z_j),$$

$$\omega_2(z_i, z_j) = \lambda_2 \cdot p_2(z_i, z_j) \cdot \nu_2(z_i, z_j).$$

Для решения системы уравнений (9) используем метод прогноза-коррекции второго порядка. В результате получим итерационные формулы для вычисления распределения боевых единиц группировок:

$$\begin{cases} \rho_1^0(z_j, t_n) = \rho_1(z_j, t_{n-2}) + 2 \cdot \tau \cdot F_1(\rho_2(z_i, t_{n-1})), \\ \rho_1(z_j, t_n) = \rho_1(z_j, t_{n-1}) + \frac{\tau}{2} \cdot (F_1(\rho_2^0(z_i, t_n)) + F_1(\rho_2(z_i, t_{n-1}))), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2^0(z_j, t_n) = \rho_2(z_j, t_{n-2}) + 2 \cdot \tau \cdot F_2(\rho_1(z_i, t_{n-1})), \\ \rho_2(z_j, t_n) = \rho_2(z_j, t_{n-1}) + \frac{\tau}{2} \cdot (F_2(\rho_1^0(z_i, t_n)) + F_2(\rho_1(z_i, t_{n-1}))), \end{cases}$$

где

$$F_1(\rho_2(z_i, t)) = - \sum_{i=1}^5 c_i \cdot \omega_2(x_1(z_i), x_2(z_i)) \cdot \rho_2(x_2(z_i), t),$$

$$F_2(\rho_1(z_i, t)) = - \sum_{i=1}^5 c_i \cdot \omega_1(x_1(z_i), x_2(z_i)) \cdot \rho_1(x_1(z_i), t),$$

$j = \overline{1, 2}, i = \overline{1, 5}$ .

Разгонные точки  $\rho_k(z_j, t_0)$ ,  $\rho_k(z_j, t_1)$  определяются из начальных условий и по схеме Рунге-Кутты второго порядка:

$$\begin{cases} \rho_1(z_j, t_1) = \rho_1(z_j, t_0) + \tau \cdot F_1(\rho_2(z_i, t_0) + \frac{\tau}{2} \cdot F_2(\rho_1(z_i, t_0))), \\ \rho_2(z_j, t_1) = \rho_2(z_j, t_0) + \tau \cdot F_2(\rho_1(z_i, t_0) + \frac{\tau}{2} \cdot F_1(\rho_2(z_i, t_0))). \end{cases}$$

На рис. 2 показано распределение боевых единиц группировок перед началом боя и после боя, при следующем наборе параметров:  $M_1 = 200$ ,  $M_2 = 220$ ,  $S_0 = 45$ ,  $\lambda_1 = 22$ ,  $\lambda_2 = 21$ ,  $l_1 = 40$ ,  $l_2 = 30$ ,  $p_1 = 1/(x_1 - x)$ ,  $p_2 = 2/(x_1 - x)$ ,  $q_1 = 3/(x_1 - x)$ ,  $q_2 = 1/(x_1 - x)$ .

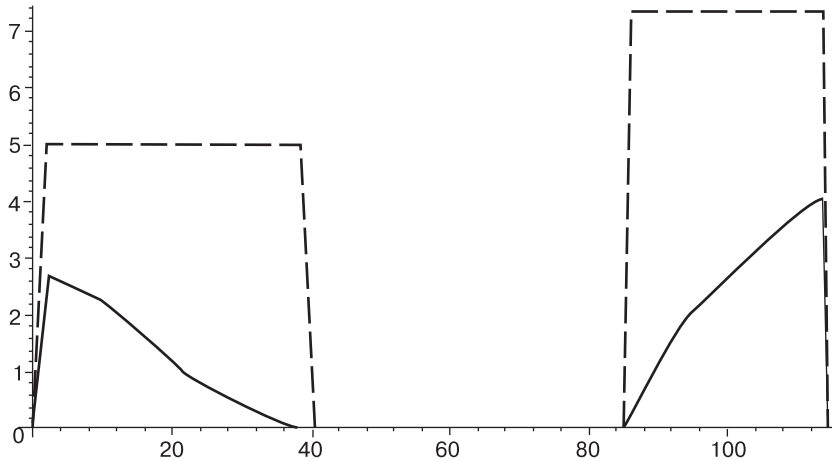


Рис. 2. Пунктирные линии соответствуют начальному распределению боевых единиц группировок, сплошные линии — распределению боевых единиц группировок после боя.  
Выигрывает вторая группировка

### Литература

- [1] Вентцель Е.Н. «Введение в исследование операции». — М.: Сов. Радио. 1964 г. — 388 с.
- [2] Бомас В. В. Модели динамики средних в задачах анализа сложных систем. — М.: Изд. МАИ, 1991 г. — 19 с.

*Ляхов Александр Федорович,  
доцент кафедры теоретической механики  
механико-математического факультета  
Нижегородского государственного университета  
имени Н.И.Лобачевского.*

*Email: Lyakhov@mm.unn.ac.ru*

*Ляхов Федор Александрович,  
магистрант второго года обучения  
факультета Общей и прикладной физики НГГУ.*

*Email: fedor.lyakhov@gmail.com*



## Комплексные числа — школьникам, студентам, учителям

В. Б. Дроздов

Предлагаем вниманию читателя учебное пособие, представляющее собой доступное школьникам введение в теорию комплексных чисел. В настоящем выпуске публикуется первая часть пособия. Окончание — в следующем номере.

### От автора

Комплексные числа изучались нашими предками уже столетие назад — в знаменитом учебнике Андрея Петровича Киселева «Элементарная алгебра» им посвящена целая глава. Выпускники средних школ 1973 года застали еще прекрасный учебник Кочетковых «Алгебра и элементарные функции», подробно рассказывающий о комплексных числах.

Но вскоре грянула разрушительная «реформа» школьного математического образования, принесяшая новые, «научные» учебники. И открылось: основными понятиями математики являются не число и функция, а множество и его элементы. Оказалось, что нет равных треугольников, а есть *конгруэнтные*. Впрочем, назвать равнобедренный треугольник «конгруэнтнобедренным» академик-новатор не решился, проявил непоследовательность. Дискутировался схоластический вопрос: вершины треугольника принадлежат ему или нет? Абсурд усугубляла неудобная символика теории множеств.

«Хотели как лучше, а получилось как всегда...» В стране резко упал уровень математического образования. Всеобщее возмущение остановило «реформу». Но признать ее полный провал тогда не решились, и классические, проверенные десятилетиями учебники не вернулись в школу. Одной из жертв математической «перестройки» стали комплексные числа: их стали изучать только в спецшколах.

Поскольку книги и брошюры, посвященные комплексным числам, издавались очень давно и в настоящее время превратились в библиографическую редкость, вниманию читателей предлагается пособие «Комплексные числа — школьникам, студентам, учителям», текст которой удостоен Почетной грамоты Министерства просвещения.

Книга содержит весьма широкий материал: собственно комплексные числа, их приложения в алгебре и анализе, геометрии и физике. Дана разноуровневая система упражнений. Затронуты исторические вопросы, а также гиперкомплексные числа.

Она адресуется школьникам физико-математических классов, число которых сейчас расширяется; студентам первого курса, которые впервые знакомятся с комплексными числами; учителям, ведущим кружок, элективный курс, а также всем любителям математики.

### § 1. Возникновение комплексных чисел

Ещё в античном мире был известен тот факт, что диагональ квадрата со стороной, равной 1, не выражается никаким рациональным числом, т. е. не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Это привело к расширению поля рациональных чисел до поля действительных чисел, с помощью которых может быть вычислена любая геометрическая или физическая величина. Поле действительных чисел явилось тем фундаментом, на котором возникло дифференциальное и интегральное исчисление. Однако по ряду причин возникла потребность в расширении понятия числа даже за пределы континуума действительных чисел — посредством введения так называемых комплексных чисел.

Простейшая процедура, требующая применения комплексных чисел, есть решение квадратных уравнений. Напомним, как обстояло дело с линейным уравнением  $ax = b$ , когда нужно было найти удовлетворяющее ему значение переменной  $x$ . Решение имеет вид  $x = \frac{b}{a}$ , и введение дробных чисел как раз обусловливается требованием, чтобы всякое линейное уравнение с целыми коэффициентами (при  $a \neq 0$ ) было разрешимо.

Уравнения вроде  $x^2 = 2$  не имеют решений в области рациональных чисел, но имеют таковое в расширенном поле всех действительных чисел. Но даже поле действительных чисел недостаточно обширно, чтобы в нем было разрешимо любое квадратное уравнение. Например, следующее очень простое уравнение  $x^2 = -1$  не имеет действительных решений, так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным.

Формальное применение формулы корней квадратного уравнения к уравнению  $x^2 + 2x + 3 = 0$  дает:  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-2}$ . Мы пока не знаем, какой смысл скрывается за символом  $\sqrt{-2}$ , однако предположим, что равенство  $(\sqrt{a})^2 = a$  формально верно для любого действительного  $a$  и для любого символа  $b - b = 0$ . Тогда

$$x_1 + x_2 = (-1 - \sqrt{-2}) + (-1 + \sqrt{-2}) = -1 - 1 + (-\sqrt{-2} + \sqrt{-2}) = -2.$$

$$x_1 \cdot x_2 = (-1 - \sqrt{-2}) \cdot (-1 + \sqrt{-2}) = 1 - \sqrt{-2} + \sqrt{-2} - (-2) = 3.$$

Следовательно, теорема Виета формально верна и для уравнения с отрицательным дискриминантом.

Мнимые числа обязаны своим рождением одной реальной математической задаче — решению уравнений третьей степени. Рассмотрим уравнение  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . Легко проверить, что это уравнение имеет корень  $x = 4$ . Для этого достаточно испытать все делители свободного члена:  $(-4)$ . Для уравнений вида  $x^3 + px + q = 0$ , к которому может быть приведено любое кубическое уравнение  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ), в середине XVI века была получена так называемая формула Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Применим ее к данному уравнению:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Для решения уравнения необходимо извлекать кубические корни из чисел  $2 + 11\sqrt{-1}$  и  $2 - 11\sqrt{-1}$ , т. е. оперировать с числами вида  $a + b\sqrt{-1}$ , где  $a$  и  $b$  — действительные числа.

Проведя формальные вычисления, можно показать, что

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 3 \cdot 2^2 \sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 8 - 6 + 12\sqrt{-1} + (-1)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1};$$

аналогично,

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1},$$

так что

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 + (\sqrt{-1} - \sqrt{-1}) = 4.$$

При решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом объявлялось, что выражение  $\sqrt{-1}$  (или  $\sqrt{B}$ , где  $B < 0$ ), не имеет смысла. И это представлялось вполне разумным, так как не существует действительного числа, удовлетворяющего квадратному уравнению с отрицательным дискриминантом:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - D > 0$$

для любого  $x$ , так как  $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$  и в этом случае  $x^2 + px + q \neq 0$  для любого  $x$ .

Однако при решении кубических уравнений оказалось уже невозможным просто отмахнуться от квадратных корней из отрицательных чисел: формальные операции с числами вида  $a + b\sqrt{-1}$ , смысл которых был неясен в то время, неожиданно привели к верному результату и в области действительных чисел.

Математики того времени крайне неохотно шли на изучение выражений вида  $a + b\sqrt{-1}$ . Они называли их «мнимыми» числами, несуществующими, невозможными, «чисто софистическими» числами, «потайными» решениями уравнений. Считалось очевидным, что они не имеют никакого реального содержания.

Один из величайших математиков мира Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), относившийся к мнимым числам с восхищением, в то же время называл их «выродком мира идей», «почти двойственным существом», находящимся между «быть» и «не быть»; говорят, он даже завещал начертать на своей могиле знак  $\sqrt{-1}$  как символ перехода от «мира реального» в «мир потусторонний». Ему принадлежат слова:

«Из иррациональностей возникают количества невозможные, или мнимые, удивительной природы, но пользы которых все же невозможно отрицать... Это есть тонкое и чудное пристанище человеческого духа, нечто пребывающее между бытием и небытием.»

Однако еще в XVII–XVIII веках было обнаружено, что многие сложные и громоздкие выражения, встречающиеся в элементарной и высшей математике, легко вычислить, если воспользоваться мнимыми числами. Но недоверие к этим числам было настолько велико, что нередко математики поступали так: сначала вычисляли то или иное сложное выражение с помощью мнимых чисел, а затем доказывали полученную таким образом формулу «строго», без привлечения этих чисел, другими средствами.

В течение последних 200 лет комплексные числа (так предложил называть мнимые числа великий немецкий математик К. Ф. Гаусс) нашли многочисленные и совершенно неожиданные применения. Так, например, с помощью комплексных чисел Гаусс в 1796 году сумел найти ответ на чисто геометрический вопрос: при каких натуральных  $n$  можно построить циркулем и линейкой правильный  $n$ -угольник.

Сейчас комплексные числа являются мощным орудием исследования и широко применяются в различных математических дисциплинах, а так же в картографии, электротехнике, гидродинамике, теоретической механике, в специальной теории относительности А. Эйнштейна и релятивистской электродинамике, в сопротивлении материалов. Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных небесных тел и искусственных спутников Земли под влиянием силы притяжения к «сплюснутому сфероиду», форму которого имеет земной шар.

## § 2. Понятие комплексного числа

Будем рассматривать возможные пары вещественных чисел  $a$  и  $b$ . Каждой такой паре чисел  $a$  и  $b$ , взятых в определенном порядке, поставим в соответствие новый математический объект, который назовём *комплексным числом* и обозначим символом  $a + ib$ . Число  $a$  называется *вещественной частью* комплексного числа  $a + bi$ , а число  $bi$  — *мнимой частью*. При этом символ  $a + bi$  рассматривается как цельный символ и знак «+», имеющийся в нём, пока не обозначает действия сложения, поскольку это действие ещё не определено для комплексных чисел. Аналогично,  $bi$  пока не обозначает произведения  $b$  на  $i$ .

Комплексные числа  $a_1 + b_1i$ , и  $a_2 + b_2i$  назовем равными и запишем  $a_1 + b_1i = a_2 + b_2i$ , если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ . Целесообразность и даже единственная возможность такого определения будет показана в § 3.

Комплексные числа  $a + bi$  и  $a - bi$  назовем сопряжёнными.

Арифметический корень  $\sqrt{a^2 + b^2}$  назовем абсолютной величиной или модулем комплексного числа  $a + bi$ .

Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, т. е. оно имеет вид  $a+0i$ , то его условимся считать равным вещественному числу  $a$ . В частности,  $0+0i=0$ . При этом соглашении всякое вещественное число будет частным случаем комплексного числа.

Комплексное число, у которого мнимая часть не равна нулю, назовём мнимым числом.

Если вещественная часть мнимого числа равна нулю, т. е. оно имеет вид  $0+bi$ , его назовём чисто мнимым числом и обозначим  $bi$ . Чисто мнимое число  $0+1i=i$  назовём мнимой единицей.

Комплексные числа  $a+bi$  и  $-a-bi$  назовём противоположными.

Легко проверить, что для комплексных чисел справедливы рефлексивное, симметричное и транзитивное свойства равенств.

Так как комплексное число  $a+bi$  однозначно определено упорядоченной парой вещественных чисел  $(a, b)$ , то множество комплексных чисел можно определить как множество всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел.

С другой стороны, каждой упорядоченной паре действительных чисел однозначно соответствует точка плоскости с координатами  $(a, b)$  и наоборот. Поэтому между множеством всех комплексных чисел и множеством всех точек плоскости существует взаимно-однозначное соответствие.

Каждой точке плоскости однозначно соответствует вектор, проведенный из начала координат в эту точку. Значит, множество комплексных чисел можно интерпретировать как множество всевозможных векторов, проведенных из общей точки — начала координат.

Так как множество действительных чисел изображается то оси  $OX$ , то геометрически видно, что множество действительных чисел составляет часть множества комплексных чисел, изображаемых точками плоскости  $XOY$ .

Однако множество действительных чисел является полем, поэтому определим в дальнейшем операции над комплексными числами так, что бы множество комплексных чисел бы полем, включающим в себя в качестве подполя поле действительных чисел.

Интересно, что мощность множества комплексных чисел равна мощности континуума, т. е. мощности сегмента  $[0; 1]$ .

Геометрическая интерпретация комплексного числа играет исключительную роль в теории комплексных чисел. Она показывает естественность определения комплексных чисел на языке пар, а значит и эквивалентного определения комплексного числа как символа  $a+bi$ . Ведь ранее изучалось множество вещественных чисел как множество точек прямой линии. Теперь мы изучаем множество комплексных чисел, т. е. множество точек плоскости, включающее множество точек оси  $OX$ .

Естественно, что, определяя множество комплексных чисел как множество всевозможных пар вещественных чисел, придется установить такие операции над этими парами, которые автоматически переходили бы в операции, введённые для другого построения комплексных чисел как множества символов вида  $a+bi$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа. Иначе получится противоречие между двумя эквивалентными определениями.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел делает наглядным сложение и вычитание комплексных чисел как сложение и вычитание векторов, изображающих соответствующие комплексные числа, что оправдывает операции сложения и вычитания комплексных чисел, которые будут введены в § 3, с геометрической стороны.

### § 3. Операции над комплексными числами

Суммой двух комплексных чисел  $a_1+b_1i$  и  $a_2+b_2i$  назовём комплексное число вида

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i, \quad \text{т. е.} \quad (a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

Произведением двух комплексных чисел  $a_1+b_1i$  и  $a_2+b_2i$  назовём комплексное число вида  $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ , т. е.

$$(a_1+b_1i) \cdot (a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2) + (a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Из определения суммы комплексных чисел следует, что комплексное число  $a + bi$  можно рассматривать как сумму вещественного числа  $a$  и чисто мнимого числа  $bi$ . Действительно,

$$(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)i = a + bi.$$

Из определения произведения комплексных чисел следует, что комплексное число  $bi$  можно рассматривать как произведение вещественного числа  $b$  на мнимую единицу. Действительно,

$$(b + 0i) \cdot (0 + 1i) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1) + (b \cdot 1 + 0 \cdot 0)i = 0 + bi = bi.$$

Теперь символ  $a + bi$  можно с полным правом рассматривать как сумму вещественного числа  $a$  с вещественным числом  $b$ , умноженным на мнимую единицу. Легко проверить, что сумма двух противоположных чисел равна  $0 + 0i = 0$ .

Рассмотрим, какой смысл имеет «таинственный» символ  $i$ , введённый без всякого пояснения. Для этого вычислим  $i^2$  по введённому правилу умножения комплексных чисел:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1 + 0i = -1.$$

Итак,  $i$  — это символ, обладающий свойством  $i^2 = -1$ . Аналогично можно показать, что  $(-i)^2 = -1$ .

В поле вещественных чисел отсутствует элемент, квадрат которого меньше 0. Подобный элемент, добавленный в это множество вместе с такими определениями операций над элементами полученного множества, которые бы соответствовали аксиомам расширения числового множества, позволяет решить многие не решенные ранее задачи математики, под новым углом зрения взглянуть на вещественные числа.

Операции сложения и умножения над комплексными числами введены именно так, чтобы  $i^2 = -1$ . Ведь при решении кубических уравнений с действительными коэффициентами мы встретились с выражениями вида  $A + B\sqrt{-1}$  тогда ещё не зная, как понять введенный по необходимости (непосредственно из формулы Кардано) символ  $\sqrt{-1}$ , не имеющий, с первого взгляда, никакого смысла. Теперь истинная причина появления символа  $a + bi$ , где, как выяснилось,  $i^2 = -1$ , понятна.

Дедуктивность такого определения комплексного числа и основных операций — сложения и умножения комплексных чисел — не следует преувеличивать. Эта дедуктивность, пусть логически безупречная, продиктована как приведенными выше, так и другими соображениями.

Очевидно, что сложение и умножение в множестве комплексных чисел всегда выполнимо и с однозначным результатом.

Обратимся к определению равенства комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1i = a_2 + b_2i) \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2).$$

Если допустить возможность данного равенства при  $b_1 \neq b_2$ , то при сохранении обычных правил арифметики, к чему мы и стремимся, получим:

$$i = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2},$$

т. е.  $i$  оказалось вещественным числом. Полученное противоречие показывает, что  $b_1 = b_2$ , но тогда  $a_1 = a_2$ . Ясно, что корректное определение равенства комплексных чисел нельзя дать каким-либо другим способом. Геометрическая интерпретация комплексных чисел делает приведенное выше определение их равенства особенно наглядным: два комплексных числа равны, если точки, изображающие эти числа, совпадают.

Определения равенства, суммы и произведения комплексных чисел являются основополагающими в арифметике комплексных чисел. На основе их и арифметики вещественных чисел строятся остальные арифметические действия над комплексными числами. Введённые определения диктуются желанием сделать арифметику комплексных чисел похожей на арифметику вещественных чисел. Это желание естественно, поскольку множество всех вещественных чисел есть

подмножество множества комплексных чисел, а операции над комплексными числами мы вводим так, чтобы множество комплексных чисел превратилось в поле, содержащее поле вещественных чисел в качестве подмножества.

В множестве же вещественных чисел суммы вида  $a + bi$  складываются и умножаются именно так, как построены определения суммы и произведения комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1x) + (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x;$$

$$(a_1 + b_1x)(a_2 + b_2x) = a_1a_2 + a_1b_2x + b_1a_2x + b_1b_2x^2 = a_1a_2 + b_1b_2x^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)x.$$

(Заметим, что в основе этих преобразований лежат законы арифметических операций — коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный.) Положив  $x = i$ , получим правила сложения и умножения комплексных чисел.

Применим определения сложения и умножения комплексных чисел к комплексным числам вида  $a + 0i$ , т. е. к вещественным числам:

$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) = (a_1a_2 - 0 \cdot 0) + (a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0)i = a_1a_2 + 0i.$$

Следовательно, произведение двух вещественных чисел есть вещественное число

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + (0 + 0)i = (a_1 + a_2) + 0i.$$

Следовательно, сумма двух вещественных чисел есть вещественное число.

Благодаря введённым выше определениям сложения и умножения комплексных чисел, для них справедливы коммутативный и ассоциативный законы сложения и умножения, а также дистрибутивный закон умножения относительно сложения. Одной из причин принятых определений как раз и было желание сохранить в новом множестве старые законы операций.

Доказательства этих свойств операций проводятся путем непосредственной проверки и совершенно элементарны. Если сложение и умножение комплексных чисел определить как-либо иначе, то основные законы арифметических действий, справедливые для вещественных чисел, не будут верны для комплексных чисел.

Вычитание комплексных чисел определяется так же, как и вычитание вещественных чисел: разностью комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называют такое комплексное число  $z_3$ , которое в сумме с  $z_2$  дает  $z_1$ .

Для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  и их разность  $z_3 = z_1 - z_2$  существует и единственна. Действительно, по определению  $z_2 + z_3 = z_1$ . Пусть  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$ ,  $z_3 = a_3 + b_3i$ . Тогда

$$(a_2 + x) + (b_2 + y)i = a_1 + b_1i,$$

откуда, по определению равенства комплексных чисел, имеем:  $a_2 + x = a_1$  и  $b_2 + y = b_1$ . Тогда  $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ .

Деление комплексных чисел определяется так же, как и деление вещественных чисел: частным от деления комплексного числа  $z_1$  на комплексное число  $z_2 \neq 0 + 0i$  называется такое комплексное число  $z_3$ , которое при умножении на  $z_2$  дает  $z_1$ .

Для любых комплексных чисел  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  ( $z_2 \neq 0 + 0i$ ) их частное  $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$  существует, единственно и вычисляется по формуле:

$$z_3 = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Действительно, по определению,  $z_2 \cdot z_3 = z_1$ , или  $(a_2 + b_2i) \cdot (x + yi) = a_1 + b_1i$ .

$$(a_2x - b_2y) + (a_2y + b_2x)i = a_1 + b_1i,$$

откуда

$$\begin{cases} a_2x - b_2y = a_1, \\ a_2y - b_2x = b_1. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений получаем:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Так как  $z_2 \neq 0 + 0i$ , то  $a_2 \neq 0$  или  $b_2 \neq 0$ , тогда  $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ , и  $x$  и  $y$  существуют и единственны.

Практически комплексные числа делят другим способом, используя свойство комплексно-сопряжённых чисел:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |a + bi|^2 = |a - bi|^2.$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Из рассмотренных свойств комплексных чисел видим, что сумма, произведение, разность и частное комплексных чисел есть тоже комплексное число, т. е. в множестве комплексных чисел выполнимы действия сложения и умножения, подчиняющиеся основным арифметическим законам, а также обратные им действия вычитания и деления, за исключением деления на нуль. Следовательно, множество комплексных чисел есть поле, включающее в себя поле вещественных чисел.

**Замечание 1.** Заметим, что для комплексных чисел невозможно определить понятия «больше» и «меньше» так, чтобы сохранились в силе известные ранее связи этих понятий с арифметическими действиями и чтобы это отношение задавало на множестве действительных чисел обычное отношение порядка. В самом деле, предположим, что мы каким-нибудь способом определили для комплексных чисел понятие «больше» так что из двух различных комплексных чисел одно и только одно всегда больше другого. Тогда  $i > 0$  или  $i < 0$ . Если  $i > 0$ , то  $i \cdot i > 0 \cdot i$ , т. е.  $i^2 > 0$ , откуда  $-1 > 0$  — противоречие. Если  $i < 0$ , то  $i \cdot i > 0 \cdot i$  и  $i^2 > 0$ , откуда  $-1 > 0$  — тоже противоречие.

**Замечание 2.** Рассмотрим следующий вопрос: куда в соответствии с введенными определениями включить число 0? Является ли оно мнимым, чисто мнимым? Прежде всего, 0, конечно, — действительное число. С другой стороны,  $0 = 0 + 0i$  относится к чисто мнимым числам, так как чисто мнимым числом называется число вида  $0 + bi$ , где  $b$  — любое вещественное число (в том числе и вещественное число 0). Однако 0 не является мнимым числом, так как, согласно определению, мнимое число — это число, у которого мнимая часть не равна 0, т. е. мнимое число — комплексное число, не являющееся действительным.

Об определениях не говорят, верны они или нет. Определение не может быть неверным, оно может быть целесообразным или нецелесообразным. В свете этого включение числа 0 в чисто мнимые более удобно, чем противоположное решение вопроса. Оно позволяет без всяких ограничений формулировать такие утверждения: всякое комплексное число является суммой действительного числа и чисто мнимого числа; чисто мнимые числа, и только они, противоположны своим сопряженным; сумма двух чисел является чисто мнимым числом тогда и только тогда, когда их действительные части противоположны, и т. д. Принятое определение удобно и в «высшей математике».

Комплексные числа обладают рядом интересных свойств, таких как:

- 1)  $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|$ , откуда  $|z^n| = |z|^n$ .
- 2)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ , если  $z_2 \neq 0 + 0i$ .
- 3)  $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ .
- 4)  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .
- 5)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$ .
- 6)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .
- 7) Обозначим число, сопряжённое числу  $z = a + bi$ , т. е.  $a - bi$  через  $\bar{z}$ . Тогда  $\bar{\bar{z}} = a - (-bi) = a + bi$ , т. е.  $z$  и  $\bar{z}$  — числа взаимно сопряжённые.

- 8)  $(z = \bar{z}) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R})$ .
- 9)  $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$ ,
- 10)  $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$ .
- 11)  $|\bar{z}| = |z|$ .
- 12)  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ .
- 13)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$  и вообще  $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ .
- 14)  $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$ , откуда  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .
- 15)  $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ .

Докажем одно из этих свойств, а именно, свойство (3). (Ряд других свойств будет доказан в § 5.) Пусть  $z_j = a_j + b_j \cdot i$ , тогда имеем

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n a_j + i \sum_{j=1}^n b_j \right| = \sqrt{\left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)^2}.$$

Докажем, что

$$\sqrt{\left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)^2} \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j^2 + b_j^2} = \sum_{j=1}^n |z_j|$$

или

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \right)^2.$$

Применим метод математической индукции:

- 1)  $n = 1, 2$ :  $|z_1| \leq |z_1|$  — верно,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  — верно;
- 2)  $n = k$ : допустим, что  $|z_1 + z_2 + \dots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k|$ ;
- 3)  $n = k + 1$  (докажем, опираясь на (2))

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \dots + z_{k+1}| &= |(z_1 + z_2 + \dots + z_k) + z_{k+1}| \leq \\ &\leq |z_1 + z_2 + \dots + z_k| + |z_{k+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать, откуда верно неравенство:

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n b_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \right)^2.$$

Из свойств (13) и (14) следует **теорема**: При замене в многочлене с действительными коэффициентами произвольного значения аргумента сопряжённым ему числом значение многочлена тоже заменится сопряжённым ему числом.

Из равенства  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  следует другое интересное свойство:

$$|(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i| = |a_1 + b_1 i| \cdot |a_2 + b_2 i|,$$

откуда

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2),$$



т. е. мы доказали, что произведение суммы двух квадратов на сумму двух квадратов можно представить в виде суммы двух квадратов.

Положив  $z_1 = z_2$ , т. е.  $a_1 = a_2 = a$  и  $b_1 = b_2 = b$ , имеем:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Последняя формула даёт все множество целочисленных прямоугольных треугольников при различных  $a$  и  $b$ .

Например, при  $a = 2$ ,  $b = 1$  имеем:  $3^2 + 4^2 = 5^2$ . При  $a = 3$ ,  $b = 2$  —  $5^2 + 12^2 = 13^2$  и т. д.

Так как  $(a_1a_2 - b_1b_2)^2 \geq 0$ , то  $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geq (a_1b_2 + a_2b_1)^2$  — двумерный вариант неравенства Коши:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

Рассмотрим извлечение корней из комплексных чисел. Пусть  $z = a + bi$  — комплексное число. Квадратным корнем из числа  $z$  называется комплексное число  $\omega$  такое, что  $\omega^2 = z$ . В этом случае пишут  $\omega = \sqrt{z}$ . Найдём выражение  $\sqrt{a + bi}$  через  $a$  и  $b$ . Для этого положим  $\omega = u + vi$ , тогда  $(u + vi)^2 = a + bi$  или  $u^2 - v^2 + 2uvi = a + bi$ , откуда имеем систему уравнений для определения  $u$  и  $v$ :

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a, \\ 2uv = b, \end{cases}$$

откуда  $v = \frac{b}{2u}$ . Тогда имеем

$$u^2 - \frac{b^2}{4u^2} = a \quad \text{или} \quad 4u^4 - 4au^2 - b^2 = 0,$$

откуда ( $D > 0$ )

$$u_{1,2}^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad u_2^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Так как  $u \in \mathbb{R}$ , то  $u^2 > 0$  и значение  $u_2^2$  не подходит, поэтому

$$u_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{b}{2u_1} &= \frac{b}{2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} = \frac{b\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}} = \\ &= \frac{b\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - a^2)}} = \frac{b}{|b|} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$v_2 = \frac{b}{2u_2} = -\frac{b}{|b|} \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a},$$

но

$$\frac{b}{|b|} = \begin{cases} 1, & \text{если } b > 0, \\ -1, & \text{если } b < 0, \end{cases}$$

т. е.  $\frac{b}{|b|} = \text{sign } b$ . Окончательно находим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = u_1 + iv_1 &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \text{sign } b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \\ \omega_2 = u_2 + iv_2 &= -\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \cdot \text{sign } b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i \cdot \operatorname{sign} b \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right).$$

Итак, из любого комплексного числа  $z = a+ib$  можно извлечь квадратный корень, причем, если  $z \neq 0$ , то этот корень имеет два значения, отличающиеся друг от друга знаком.

Попробуем тем же способом извлечь кубический корень из комплексного числа  $z = a+ib$ :  $\omega = \sqrt[3]{z}$ , если  $\omega^3 = z$ . Положив  $\omega = u+iv$ , имеем:  $(u+iv)^3 = a+bi$ , откуда

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = a, \\ 3u^2v - v^3 = b. \end{cases}$$

Из второго уравнения  $u = \sqrt{\frac{v^3+b}{3v}}$ , подставим в первое уравнение

$$\sqrt{\frac{v^3+b}{3v}} \cdot \frac{v^3+b}{3v} - 3v^2 \cdot \sqrt{\frac{v^3+b}{3v}} = a,$$

или

$$\frac{v^3+b}{3v} \left( \frac{b-8v^3}{3v} \right)^2 = a^2, \quad \text{т.е.} \quad (v^3+b)(b-v^3) = 27v^3a^2.$$

Обозначив  $v^3 = t$  и выполнив элементарные преобразования, получим кубическое уравнение

$$t^3 - \frac{3}{4}bt^2 - \frac{27a^2+15b^2}{64}t + \frac{b^3}{64} = 0.$$

Для уничтожения члена  $-\frac{3}{4}bt^2$  положим  $t = t_1 - \frac{\frac{3}{4}b}{3} = t_1 - \frac{b}{4}$ . Тогда относительно  $t_1$  получим уравнение:

$$t_1^3 - \frac{27}{64}(a^2+b^2)t_1 + \frac{27b}{4 \cdot 64}(a^2+b^2) = 0.$$

Применим формулу Кардано:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Дискриминант

$$D = \frac{3^6}{64^3}(a^2+b^2)^2(b^2-a^2-b^2) = -\frac{3^6}{64^3}(a^2+b^2)^2 \cdot a^2 \leq 0.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt[3]{-\frac{27b(a^2+b^2)}{8 \cdot 64} + \frac{3^3}{8^3}(a^2+b^2)ai} + \sqrt[3]{-\frac{27b(a^2+b^2)}{8 \cdot 64} - \frac{3^3}{8^3}(a^2+b^2)ai} = \\ &= \frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2+b^2} \cdot \sqrt[3]{-b+ai} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2+b^2} \cdot \sqrt[3]{b+ai} = \frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2+b^2} \left( \sqrt[3]{-b+ai} - \sqrt[3]{b+ai} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2+b^2} \left( \sqrt[3]{-b+ai} - \sqrt[3]{b+ai} \right) - \frac{b}{4}; \\ v &= \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{\frac{3}{8} \sqrt[3]{a^2+b^2} \left( \sqrt[3]{-b+ai} - \sqrt[3]{b+ai} \right) - \frac{b}{4}}. \end{aligned}$$

Для определения  $v$  необходимо извлечь кубический корень из комплексных чисел  $\pm b+ai$ , т. е. мы пришли опять к ранее поставленной задаче и образовался порочный круг. Таким образом, извлечь кубический корень из комплексного числа общего вида в алгебраической форме невозможно.

Два раза применяя формулу извлечения квадратного корня, можно получить четыре значения корня четвертой степени из комплексного числа. Например:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-7+24i} &= \sqrt{\sqrt{-7+24i}}; \\ \sqrt{-7+24i} &= \pm \left( \sqrt{\frac{25-7}{2}} + i\sqrt{\frac{25+7}{2}} \right) = \pm(3+4i); \\ \sqrt{3+4i} &= \pm \left( \sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}} \right) = \pm(2+i); \\ \sqrt{-3-4i} &= \pm i \left( \sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}} \right) = \pm i(2+i) = \pm(-1+2i).\end{aligned}$$

Извлекать корни пятой степени из комплексных чисел общего вида в алгебраической форме невозможно, так как при этом получится уравнение пятой степени, не разрешимое в радикалах.

#### § 4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой: между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие. Комплексное число  $z = a + bi$  задается двумя действительными числами  $a$  и  $b$ . Поэтому естественно каждому комплексному числу  $z = a + bi$  поставить в соответствие точку  $(a, b)$  и обратно (рис. 1). При этом получим взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек плоскости. Действительным числам соответствуют точки оси абсцисс, а чисто мнимым числам — точки оси ординат, в частности, числу  $i$  ставится в соответствие точка  $(0, 1)$ .

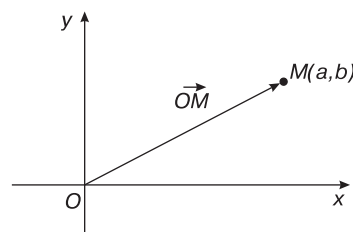


Рис. 1.

Вместо точек плоскости можно рассматривать их радиус-векторы. Тогда получаем взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и радиус-векторами  $\vec{OM}$ .

Изображение комплексных чисел с помощью векторов удобно тем, что при этом сложение и вычитание комплексных чисел получают простое геометрическое истолкование.

Действительно, пусть комплексному числу  $z_1 = a + bi$  соответствует вектор  $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$ , а комплексному числу  $z_2 = c + di$  соответствует вектор  $\vec{ON} = c\vec{i} + d\vec{j}$  (рис. 2).

Так как  $z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$  и  $\vec{OM} \pm \vec{ON} = (a \pm c)\vec{i} + (b \pm d)\vec{j}$ , то если числу  $z_1$  соответствует вектор  $\vec{OM}$ , а числу  $z_2$  соответствует вектор  $\vec{ON}$ , то числу  $z_1 + z_2$  соответствует вектор  $\vec{OM} + \vec{ON}$ , а числу  $z_1 - z_2$  соответствует вектор  $\vec{OM} - \vec{ON}$ .

Установим геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$ :

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками плоскости, изображающими эти числа.

Наряду с декартовой системой координат существует полярная система координат, в которой решение ряда математических задач гораздо проще, чем в декартовой. Чтобы задать полярную систему координат, необходимо выбрать точку  $O$  (полюс) и выходящий из этой точки луч  $l$  (полярную ось). Положение точки  $M$  на плоскости задается двумя числами — длиной вектора  $\vec{OM}$  и углом  $\varphi$ , который этот вектор образует с полярной осью (рис. 3). Угол  $\varphi$  отсчитывается против часовой стрелки и измеряется в радианах. Число  $r \geq 0$  и  $r$  однозначно определено положением точки  $M$ .

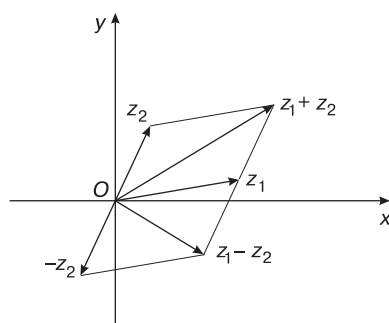


Рис. 2.

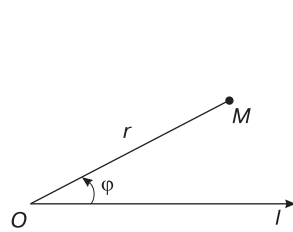


Рис. 3.

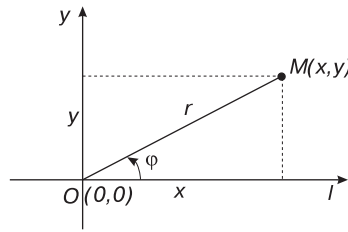


Рис. 4.

Угол  $\varphi$  определен положением точки  $M$  не однозначно, а с точностью до числа, кратного  $2\pi$ . Если  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ , то  $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . Для точки  $O$  координата  $\varphi$  не определена. Совместим полюс с началом координат  $O(0,0)$  и направим полярную ось  $l$  вдоль положительного направления оси  $Ox$  (рис. 4). Тогда получим следующую связь между декартовыми координатами  $(x, y)$  и полярными координатами  $(r, \varphi)$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \varphi = \frac{x}{r}; \\ \sin \varphi = \frac{y}{r}. \end{cases}$$

Каждой точке  $M(x, y)$  плоскости однозначно соответствует комплексное число  $z = x + yi$ . Используя связь между декартовыми и полярными координатами, запишем число  $z$ , выразив его через  $r$  и  $\varphi$ :

$$z = r \cos \varphi + i \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Очевидно, что модуль комплексного числа  $z$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = r$$

совпадает с длиной вектора, изображающего комплексное число.

Радианная мера угла, образованного этим вектором с положительным направлением оси абсцисс, называется аргументом комплексного числа  $z$ :  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ ,  $|z| \geq 0$  и  $(|z| = 0) \Leftrightarrow (z = 0)$ .

Аргумент любого комплексного числа  $z \neq 0$  имеет бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на числа кратные  $2\pi$ . Значение аргумента  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$  называется главным значением аргумента и обозначается  $\varphi_0 = \arg z$ ; тогда  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$ , где  $n$  — любое целое число.

Запись комплексного числа  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется тригонометрической формой числа  $z$ .

Из изложенного выше ясно, что алгебраическая форма комплексного числа соответствует прямоугольной декартовой системе координат, а тригонометрическая форма соответствует полярной системе координат. Многие задачи, относящиеся к комплексным числам, легче решить, предварительно записав их в тригонометрической форме.

## § 5. Операции над комплексными числами в тригонометрической форме

Возьмем два произвольных комплексных числа, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Найдём  $z_1 \cdot z_2$ :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2;$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= (z_1 z_2) z_3 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \cdot r_3 (\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) = \\ &= r_1 r_2 r_3 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)). \end{aligned}$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)),$$

откуда

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|, \quad \text{а} \quad \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdots z_n) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 + \cdots + \text{Arg } z_n.$$

Последнее равенство означает, что обе части совпадают с точностью до кратного  $2\pi$ .

Найдем  $\frac{z_1}{z_2}$  при условии  $z_2 \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg } \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

Сопоставим арифметические действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме.

Так как при сложении и вычитании комплексных чисел вещественная часть суммы (разности) равна сумме (разности) вещественных частей слагаемых и мнимая часть суммы (разности) равна (разности) мнимых частей слагаемых, т. е. вещественные и мнимые части преобразуются отдельно, то сложение и вычитание комплексных чисел удобнее выполнять в алгебраической форме.

В противоположность этому при умножении и делении комплексных чисел в алгебраической форме вещественная часть произведения (частного) зависит от вещественной и мнимой частей множителей (делимого и делителя) и мнимая часть произведения (частного) зависит от вещественной части и мнимой части множителей (делимого и делителя); что следует из формул:

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i, \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

Поэтому умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнять в тригонометрической форме: при этом модули преобразуются отдельно, а аргументы — отдельно.

Докажем некоторые свойства комплексных чисел, используя их запись в тригонометрической форме:

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n.$$

Пусть  $z_k = r_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ , тогда  $\bar{z}_k = r_k (\cos \varphi_k - i \sin \varphi_k) = r_k (\cos(-\varphi_k) + i \sin(-\varphi_k))$ .

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left( \cos \sum_{k=1}^n \varphi_k + i \sin \sum_{k=1}^n \varphi_k \right) = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left( \cos \sum_{k=1}^n \varphi_k - i \sin \sum_{k=1}^n \varphi_k \right).$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n &= r_1 \cdot r_2 \cdots r_n (\cos(-\varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_n) + i \sin(-\varphi_1 - \varphi_2 - \cdots - \varphi_n)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) - i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)), \end{aligned}$$

откуда  $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$ .

Пусть  $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ , тогда

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$$

и

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = \left| r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left( \cos \sum_{k=1}^n \varphi_k + i \sin \sum_{k=1}^n \varphi_k \right) \right| = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n.$$

Откуда следует, что

$$|z^n| = |z|^n.$$

В доказанном равенстве  $|z^n| = |z|^n$  положим  $z = a + bi$ , тогда имеем:  $|(a + bi)^n| = (\sqrt{a^2 + b^2})^n$ , откуда

$$(a^n - C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^4 a^{n-4} b^4 - C_n^6 a^{n-6} b^6 + \cdots)^2 + (C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + C_n^5 a^{n-5} b^5 - \cdots)^2 = (a^2 + b^2)^{2n}.$$

В заключение установим геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел.

Формула  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$  показывает, что для нахождения произведения  $z_1 \cdot z_2$  надо сначала увеличить модуль числа  $z_1$  в  $|z_2|$  раз, не изменяя его аргумента, а затем увеличить аргумент полученного числа на  $\text{Arg } z_2$ , не изменяя его модуля. Первая из этих операций геометрически означает гомотетию относительно точки  $O$  с коэффициентом  $|z_2|$  а вторая — поворот относительно точки  $O$  на угол, равный  $\text{Arg } z_2$ .

Если  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , то умножение  $z_1$  на  $r_2$  дает указанную здесь гомотетию, а умножение полученного результата на  $(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  — поворот.

Считая  $z_2 = \text{const} = c$ ,  $z_1 \neq \text{const} = z$ , можно сформулировать результат так: формула  $\omega = cz$  определяет на комплексной плоскости композицию гомотетии относительно точки  $O$  (с коэффициентом  $|c|$ ) и поворота относительно той же точки  $O$  (на угол  $\text{Arg } c$ ).

Так как

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|} \cdot |z_1| (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

то геометрический смысл деления комплексных чисел сводится к геометрическому смыслу умножения с той лишь разницей, что  $|z_1|$  уменьшается в  $|z_2|$  раз и поворот точки  $z' = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  вокруг начала координат  $O$  осуществляется на угол  $(-\varphi_2)$ , т.е. на угол  $\varphi_2$  против часовой стрелки (рис. 5).

## § 6. Формула Муавра и её приложения

Из формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме можно сделать предположение, что

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

т.е.

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{и} \quad \text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z.$$

Так как  $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ , то достаточно доказать, что

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

— формула Муавра. Эта формула была получена французским математиком Муавром в 1707 году.

Применим для доказательства метод математической индукции:

1.  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^1 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \\ \cos n\varphi + i \sin n\varphi &= \cos 1 \cdot \varphi + i \sin 1 \cdot \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi; \end{aligned}$$

2.  $n = k$ : предположим, что при  $n = k > 1$  формула Муавра верна:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi;$$

3.  $n = k + 1$ : докажем, опираясь на (2), что формула Муавра будет верна и при  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Более того, формула Муавра справедлива для всех целых чисел. Действительно, при  $n = 0$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^0 = 1, \quad \cos 0 \cdot \varphi + i \sin 0 \cdot \varphi = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

Пусть  $n > 0$ , тогда  $-n < 0$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos n\varphi + i \sin n\varphi} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi).$$

Перейдем к извлечению корня  $n$ -ой степени из комплексного числа.

Как и для действительных чисел корнем  $n$ -ой степени из комплексного числа называется такое комплексное число  $\omega$ , что  $\omega^n = z$ .

**Теорема.** Корень  $n$ -ой степени из любого отличного от нуля комплексного числа имеет в поле комплексных чисел  $n$  различных значений

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где  $k = 0; 1; 2; \dots; n-1$ .

Эти значения изображаются вершинами правильного  $n$ -угольника с центром в начале координат.

Если  $z = 0$ , то  $\sqrt[n]{z} = 0$  — корень имеет одно нулевое значение.

**Доказательство.** Представим число в тригонометрической форме, так как в алгебраической форме извлечь корень степени  $n > 2$  из комплексного числа нельзя:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Пусть  $\omega = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$ , тогда

$$\omega^n = \rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

откуда

$$\rho^n \cos n\psi + i \rho^n \sin n\psi = r \cos \varphi + i r \sin \varphi,$$

следовательно,

$$\begin{cases} \rho^n \cos n\psi = r \cos \varphi, \\ \rho^n \sin n\psi = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (*)$$

$$\rho^{2n}(\cos^2 n\psi + \sin^2 n\psi) = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

а так как  $r > 0$  и значит  $\rho > 0$ , то  $\rho = \sqrt[n]{r^2} = \sqrt[n]{r}$ .

Чтобы установить, что  $\rho = \sqrt[n]{r}$  можно воспользоваться тем, что у равных комплексных чисел модули равны.

Равенства (\*) дают:

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos \varphi, \\ \sin n\psi = \sin \varphi. \end{cases} \quad (**)$$

Из (\*\*) имеем:

$$\begin{cases} -2 \sin \frac{n\psi - \varphi}{2} \cdot \sin \frac{n\psi + \varphi}{2} = 0; \\ 2 \sin \frac{n\psi - \varphi}{2} \cdot \cos \frac{n\psi + \varphi}{2} = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна дизъюнкции четырех систем

$$\begin{cases} \sin \frac{n\psi - \varphi}{2} = 0, \\ \sin \frac{n\psi - \varphi}{2}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sin \frac{n\psi + \varphi}{2} = 0, \\ \cos \frac{n\psi + \varphi}{2}; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin \frac{n\psi - \varphi}{2} = 0, \\ \cos \frac{n\psi + \varphi}{2}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sin \frac{n\psi + \varphi}{2} = 0, \\ \sin \frac{n\psi - \varphi}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Из 1  $n\psi - \varphi = 2\pi k$ , откуда  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ , где  $k$  — любое целое число. Так как  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , то 2 несовместна.

Из 3

$$\begin{cases} n\psi - \varphi = 2\pi k, \\ n\psi - \varphi = \pi + 2\pi m. \end{cases}$$

откуда

$$\varphi + 2\pi k = -\varphi + \pi + 2\pi m,$$

т.е.  $2\varphi = \pi(1 + 2l)$  и 3 совместна только для конкретной серии  $\varphi = \frac{\pi}{2}(1 + 2l)$ , значит 3 не подходит.

Система 4 равносильна

$$\begin{cases} n\psi + \varphi = 2\pi k, \\ n\psi - \varphi = 2\pi m. \end{cases}$$

4 не подходит по той же самой причине, что и 3.

Итак,  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ . Это равенство можно установить короче, заметив, что у равных комплексных чисел аргументы могут отличаться на  $2\pi k$ .

Получим:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где  $r \in \mathbb{Z}$ .

Однако не всегда различным значениям  $k$  будут соответствовать различные числа  $\omega_k$ .

$$\begin{aligned} \omega_{n+k} &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi(n+k)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(n+k)}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \pm 2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \pm 2\pi \right) \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \omega_k \end{aligned}$$

Следовательно, полученная формула определяет  $n$  различных комплексных чисел  $\omega_k$ , которые можно получить, придавая  $k$  любые  $n$  последовательных целых значений; для простоты берут  $k = 0; 1; 2; \dots; n-1$ .



Выпишем все  $\omega_k$ :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right); \\ \omega_2 &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{n} \right); \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_k &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{n} \right); \\ &\dots\dots\dots \\ \omega_n &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} \right).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что точки, изображающие все полученные значения  $\omega_k$  лежат на окружности с центром в начале координат радиуса  $\sqrt[n]{r}$  и делят эту окружность на  $n$  равных частей (дуга между любыми двумя соседними точками составляет  $\frac{2\pi}{n}$  радиан), т. е. являются вершинами правильного  $n$ -угольника.

**Пример:**  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ .

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1(\cos 0 + i \sin 0)} = 1 \cdot \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{n} \right) = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n},$$

где  $k = 0; 1; 2; \dots; n-1$ .

Обозначим через  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon^k &= \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon^n &= \cos \frac{2\pi n}{n} + i \sin \frac{2\pi n}{n},\end{aligned}$$

Таким образом, комплексные корни из 1 суть степени  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  первое мнимое значение корня из 1 (при  $k = 1$ ).

$$\begin{aligned}\omega_k &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \cdot \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) = \omega_0 \cdot \varepsilon^k.\end{aligned}$$

Следовательно, все значения  $\sqrt[n]{z}$  можно получить из начального значения  $\omega_0$  последовательным умножением его на значения корня  $n$ -ой степени из 1, т. е. на  $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^{n-1}$ :

$$\sqrt[n]{z} = \omega_0; \varepsilon\omega_0; \varepsilon^2\omega_0; \dots; \varepsilon^{n-1}\omega_0.$$

**Пример:** Решить уравнение  $z^5 = 1$ .

$$z = \sqrt[5]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}, \quad \text{где } k = 0; 1; 2; 3; 4.$$

$$z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$z_2 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$z_3 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5};$$

$$z_4 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5};$$

$$z_5 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Видим, что  $\bar{z}_5 = z_2$ ;  $\bar{z}_4 = z_3$ .

С другой стороны,  $z^5 - 1 = 0$ , т. е.

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

$z_1 = 1$ , осталось решить возвратное уравнение  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ . Применяем известный алгоритм:

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0;$$

обозначим  $z + \frac{1}{z}$  через  $x$ , тогда

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = x^2 - 1; \quad x^2 - 2 + x + 1 = 0; \quad x^2 + x - 1 = 0; \quad D > 0; \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Получаем два квадратных уравнения:

$$z^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad z^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}z + 1 = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm i \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4};$$

$$z_{3,4} = -\frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}$$

Так как  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{2\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{2\pi}{5}$  — положительные числа, то

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \text{и} \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4};$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\pi}{5} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4};$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Кроме того, значение  $\sin 18^\circ$  можно получить еще двумя искусственными приёмами.

**Замечание.** Понятие арифметического корня при переходе от действительных чисел к комплексным теряет прежний смысл, и все значения корня оказываются совершенно равноправными между собой. Поэтому символ  $\sqrt[n]{z}$  означает не одно число, а любое из  $n$  значений корня.

Действительно, в поле действительных чисел символом  $\sqrt[n]{a}$  обозначают лишь одно арифметическое значение корня. При этом правила действий над радикалами относятся именно к арифметическим значениям. В поле же комплексных чисел невозможно выбрать для каждого из выражений  $\sqrt[n]{a}$  какое-нибудь одно значение в качестве «главного» («арифметического») так, чтобы применительно к этим значениям оставались справедливыми правила действий над радикалами.

Предположим противное: для любого  $n$  (или даже только для  $n = 2$ ) и для любого комплексного числа  $a$  мы каким-то способом выбрали одно из значений  $\sqrt[n]{a}$  так, что для этих «главных» значений корня справедливо тождество:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Тогда имеем:

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-1)(-a)} = \sqrt{-1}\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = -\sqrt{a},$$

ибо  $(\sqrt{-1})^2 = -1$  независимо от того, какое из значений  $\sqrt{-1}$  ( $i$  или  $-i$ ) принято в качестве главного. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим некоторые применения формулы Муавра.

### 1. Тригонометрические функции кратных дуг

Преобразовав левую часть формулы Муавра  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$  по формулам бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \cos^n x + C_n^1 \cos^{n-1} x (i \sin x) + C_n^2 \cos^{n-2} x (i \sin x)^2 + \dots + C_n^k \cos^{n-k} x (i \sin x)^k + \dots + (i \sin x)^n = \\ = \cos nx + i \sin nx, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - C_n^6 \cos^{n-6} x \sin^6 x + \dots + \\ + i(C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots) = \cos nx + i \sin nx, \end{aligned}$$

откуда, из условия равенства двух комплексных чисел, имеем:

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots, \\ \sin nx &= C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots. \end{aligned}$$

Пусть  $n$  — четное число,  $n = 2m$ , тогда последние члены в формулах  $\cos nx$  и  $\sin nx$  соответственно будут:

$$(i \sin x)^{2m} = (-1)^m \sin^{2m} x = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin nx;$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} C_n^{n-1} \cos x (i \sin x)^{2m-1} &= \left( \frac{1}{i} C_n^1 \cos x \sin^{n-1} x \right) \left( \frac{i^{2m}}{i} \right) = \\ &= -(C_n^1 \cos x \sin^{n-1} x) (-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos x \sin^{n-1} x. \end{aligned}$$

Пусть  $n$  нечетное число и  $n = 2m + 1$ , тогда последние члены в формулах  $\cos nx$  и  $\sin nx$  соответственно будут:

$$\begin{aligned} C_n^{n-1} \cos x (i \sin x)^{2m} &= C_n^1 (\cos x) i^{2m} \sin^{n-1} x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos x \sin^{n-1} x; \\ \frac{1}{i} (i \sin x)^{2m+1} &= i^{2m} \sin^{2m+1} x = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin nx. \end{aligned}$$

Формулы для  $\cos nx$  и  $\sin nx$  можно получить последовательным применением теорем сложения: найти  $\sin 3x$ ,  $\sin 4x$  и т. д.  $\cos 3x$ ,  $\cos 4x$  и т. д., затем, подметив закономерность, сделать предположение и доказать его строго методом математической индукции.

### 2. Преобразование степеней $\cos^n x$ и $\sin^n x$ в тригонометрические многочлены

Тригонометрическим многочленом  $n$ -го порядка называется выражение вида

$$P(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

при этом предполагается, что  $|a_n| + |b_n| \neq 0$ .

Положим  $u = \cos x + i \sin x$ ,  $v = \cos x - i \sin x$ , тогда имеем:  $\cos x = \frac{u+v}{2}$ ;  $\sin x = \frac{u-v}{2i}$ ,  $uv = 1$ . По формуле Муавра

$$u^n = \cos nx + i \sin nx, \quad v^n = (\cos(-x) + i \sin(-x))^n = \cos(-nx) + i \sin(-nx) = \cos nx - i \sin nx.$$

Отсюда

$$\cos nx = \frac{1}{2}(u^n + v^n) \quad \text{и} \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(u^n - v^n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos^n x &= \left( \frac{u+v}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} (u^n + C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 + \dots + C_n^k u^{n-k} v^k + \dots + C_n^n v^n = \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} (\cos nx + C_n^1 \cos(n-2)x + C_n^2 \cos(n-4)x + \dots). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sin^n x = \frac{1}{2^n i^n} (u-v)^n = \frac{1}{2^n i^n} (u^n - C_n^1 u^{n-1} v + C_n^2 u^{n-2} v^2 - C_n^3 u^{n-3} v^3 + \dots)$$

При четном  $n = 2k$  получим:

$$\sin^{2k} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}} (\cos 2kx - C_{2k}^1 \cos(2k-2)x + C_{2k}^2 \cos(2k-4)x - \dots).$$

При нечетном  $n = 2k+1$  получим:

$$\sin^{2k+1} x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} (\sin(2k+1)x - C_{2k+1}^1 \sin(2k-1)x + C_{2k+1}^2 \sin(2k-3)x - \dots).$$

Полученные равенства можно доказать методом математической индукции, исходя из равенств  $\cos^{n+1} x = \cos^n x \cdot \cos x$ ,  $\sin^{n+1} x = \sin^n x \cdot \sin x$  и выражений (по предположению) для  $\cos^n x$  и  $\sin^n x$  из формул

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}, \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}. \end{aligned}$$

**Выводы:** 1.  $\cos nx$  и  $\sin nx$  можно преобразовать в однородные многочлены степени  $n$  относительно  $\cos x$  и  $\sin x$ .

2. Всякая целая неотрицательная степень косинуса и синуса  $\cos^n x$  и  $\sin^n x$ , а также всякое произведение этих степеней может быть преобразовано в тригонометрический многочлен.

### 3. Вычисление суммы косинусов и синусов дуг, образующих арифметическую прогрессию

Найдем суммы:  $\sum_{k=0}^n \cos(a + kh)$  и  $\sum_{k=0}^n \sin(a + kh)$ . Вычислим  $(\cos a + i \sin a) \cdot z^k$ , где  $z = \cos h + i \sin h$ :

$$(\cos a + i \sin a) \cdot (\cos h + i \sin h)^k = \cos(a + kh) + i \sin(a + kh).$$

Положим в последнем равенстве  $k = 0; 1; 2; \dots; n$  и сложим эти равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(a + kh) + i \sum_{k=0}^n \sin(a + kh) &= (\cos a + i \sin a)(1 + z + z^2 + \dots + z^n) = (\cos a + i \sin a) \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \\ &= (\cos a + i \sin a) \frac{\cos(n+1)h - 1 + i \sin(n+1)h}{\cos h - 1 + i \sin h} = (\cos a + i \sin a) \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \frac{-\sin \frac{n+1}{2}h + i \cos \frac{n+1}{2}h}{-\sin \frac{h}{2} + i \cos \frac{h}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left( a + \frac{nh}{2} \right) + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \sin \left( a + \frac{nh}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^n \cos(a + kh) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \cos \left( a + \frac{nh}{2} \right),$$
$$\sum_{k=0}^n \sin(a + kh) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}h}{\sin \frac{h}{2}} \sin \left( a + \frac{nh}{2} \right).$$

Последние две формулы могут быть получены искусственным путем: достаточно найти

$$\sin \frac{h}{2} \sum_{k=0}^n \cos(a + kh) \quad \text{и} \quad \sin \frac{h}{2} \sum_{k=0}^n \sin(a + kh).$$

Полученные суммы применяются для вычисления многих других сумм.

*Дроздов Виктор Борисович,*  
*г. Рязань.*

# Возможное направление модернизации понятийного аппарата школьных предметов естественнонаучного цикла. Часть 1

В. М. Имайкин

В первой части статьи рассматривается возможность введения в школьный курс современного математического понятия динамической системы.

В статье предлагается ввести в содержание среднего общего образования освоение ряда новых понятий, относящихся к предметам естественнонаучного цикла (сюда же относим и математику). Это понятия, формирующие способности системного мышления, а также видения процессов и работы с ними. Инновационный характер введения таких понятий определяется тем, что:

- Оно означает “обновление знаний, необходимое для вхождения в перспективные области наук и практик”, см. [1, с.24].
- В отличие от традиционных монопредметных новые понятия являются комплексными, полипредметными, облегчающими “работу по включению детей в осмысление комплексных проблем современности и попытки культивировать способы их решения” (там же).
- Их освоение потребует также обновления набора способов учебной деятельности учащихся.
- Эти понятия транслируются в учебный процесс с современного этапа развития науки, т.е. они являются актуальными и развивающимися в реальной научно-исследовательской деятельности.

В рамках программы “Северо-Западный округ — научное будущее России: Воспроизводство фундаментальной (практико-ориентированной) науки на территории СЗАО и стратегические типы занятости молодежи” эта работа соответствует направлению “Повышение эффективности педагогической, управленческой, дидактико-методической деятельности в системе образования” и включается в подпрограмму В, [1, с.27].

В первой части статьи описано одно из таких понятий — понятие динамической системы — и обсуждается возможность его освоения в общем среднем образовании.

## 1. Динамическая система

В общих чертах *динамическую систему* можно описать следующим образом. Имеется некоторый набор возможных состояний системы, который называют *пространством состояний* системы или *фазовым пространством*. В каждый момент времени система принимает одно из возможных состояний в пространстве состояний. С течением времени состояние системы изменяется, т.е. происходит *эволюция системы*. Закон эволюции системы предполагается известным, или его можно выявить исходя из условий конкретной задачи; иногда он остается неявным. Зная состояние системы в начальный момент времени и закон эволюции, в принципе можно определить состояние системы в любой момент времени. Некоторые характеристики системы, остающиеся неизменными в процессе эволюции, являются *инвариантами* динамической системы.

В математике теория динамических систем является современной, активно развивающейся отраслью. Например, в издании ВИНТИ “Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. (Фундаментальные направления)” динамическим системам посвящены первые 4 тома. Одна из возможных математических формализаций понятия динамической системы описана в [2, с.179].

Категориальной основой понятия является категория процесса.

### 1.1. Примеры из школьного курса математики

#### а) Равномерное прямолинейное движение

Рассмотрим равномерное прямолинейное движение одного тела со скоростью  $v$ . Состояние системы в каждый момент времени определяется числом  $x(t)$ , где  $t$  — время,  $x(t)$  — положение тела в момент времени  $t$  в некоторой системе координат. Закон движения имеет вид  $x(t) = x_0 + vt$ , где  $x_0$  — положение тела в начальный момент времени. В данном случае инвариантом системы являются скорость  $v$ , а также, например, кинетическая энергия тела  $mv^2/2$ , где  $m$  — масса тела.

Большим классом школьных арифметических задач является класс задач на совместное равномерное прямолинейное движение двух тел. Пусть тела движутся со скоростями соответственно  $v_1, v_2$ . Состояние системы в каждый момент времени определяется парой чисел  $x_1(t), x_2(t)$ , задающих положение обоих тел в момент  $t$  относительно некоторой системы координат. Закон движения состоит из двух соотношений  $x_1(t) = x_{01} + v_1t, x_2(t) = x_{02} + v_2t$ , где  $x_{01}, x_{02}$  — положения соответственно первого и второго тел в начальный момент времени.

**Замечание 1.** Задачи этого типа вводятся в начальных классах, когда дети не владеют понятием системы координат, а также понятием отрицательного числа. Задачи подразделяются на задачи на встречное движение тел и на движение тел в одном направлении. Вводятся дополнительные понятия скорости сближения, а также скорости удаления тел. Нам кажется, что после освоения понятий системы координат и отрицательного числа полезно вернуться и провести рефлексивный анализ всего класса задач с точки зрения понятия динамической системы.

**Пример.** Рассмотрим следующую задачу: Легковая машина, скорость которой 62 км/ч, догоняет грузовую машину, скорость которой 47 км/ч. Через сколько времени и на каком расстоянии от начала движения легковая автомашин догонит грузовую, если первоначальное расстояние между ними было 60 км? (см. [3], стр. 381, задача 1330).

**Решение 1.** Введем систему координат (числовую прямую), у которой начало координат совпадает с местом начала движения легковой машины, положительное направление совпадает с направлением движения, единица измерения составляет 1 км. Пусть  $t$  — время, измеряемое от начала движения легковой машины в часах. Тогда закон движения первой машины записывается как  $x_1(t) = 62t$ , закон движения второй машины как  $x_2(t) = 60 + 47t$ . В момент  $T$ , когда легковая машина догонит грузовую, выполняется соотношение  $62T = 60 + 47T$ , откуда находим:  $T = 4(\text{ч})$ , и легковая машина пройдет за это время  $62 \cdot 4 = 228(\text{км})$ . Ответ: легковая машина догонит грузовую через 4 часа после начала движения, пройдя за это время 228 км.

**Решение 2.** Покажем, что система координат носит вспомогательный характер, т.е. задачу можно решить, выбрав систему координат более-менее произвольно. При этом законы движения тел в разных системах координат, могут, разумеется, выглядеть по-разному. Например, выберем начало координат в точке, где в момент начала движения находилась грузовая машина, а направление оси выберем противоположным направлению движения. Тогда закон движения грузовой машины записывается как  $x_2(t) = -47t$ , а легковой машины как  $x_1(t) = 60 - 62t$ . В момент  $T$  выполнено соотношение  $-47T = 60 - 62T$ , откуда  $T = 4(\text{ч})$ ,  $x_1(T) = -228(\text{км})$ . Требуется провести различие между координатой, которая в данном случае выражается отрицательным числом, и расстоянием, которое положительно.

**Замечание 2.** Подобного типа задачи постепенно исчезают из учебников математики. Наш взгляд, правильный методический ход заключается в том, чтобы использовать массив таких задач для освоения двух важных единиц содержания — понятия отрицательного числа и процедуры введения системы координат. Это естественный ход, если смотреть на такие задачи с точки зрения понятия динамической системы. Еще более сильный ход получится, если начать

обсуждать стоящие за такими задачами идеализации и выводить учащих на понятие модели и типа модели (физическая, математическая).

### б) Задачи на втекание и вытекание воды из бассейна

С точки зрения понятия динамической системы, это задачи того же типа, что и на равномерное движение тел. Состояние системы в каждый момент времени определяется объемом воды в бассейне и скоростью изменения этого объема. Объем является аналогом пройденного пути, а расход воды — аналогом скорости движения.

**Пример.** Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 мин. Сначала открыли горячий кран. Через сколько минут надо открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилос в 1,5 раза больше, чем холодной? (см. [4], стр. 213, задача 196).

**Решение.** Состояние системы в данный момент времени определяется количеством горячей и количеством холодной воды в ванне, а также скоростями поступления горячей и холодной воды. За единицу измерения объема примем объем ванны. Тогда скорость поступления горячей воды выражается как  $1/23$ , а холодной как  $1/17$ , где время измеряется в минутах. Начинаем отсчитывать время от момента открывания горячего крана. Закон поступления горячей воды записывается как  $V_1(t) = (1/23)t$ . Пусть холодную воду надо открыть через  $T$  минут. Тогда закон поступления холодной воды выражается как  $V_2(t) = (1/17)(t - T)$  при значениях времени, не меньших чем  $T$ . Пусть  $K$  — момент наполнения ванны. Условие наполнения записывается равенством  $(1/23)K + (1/17)(K - T) = 1$  (\*). К этому моменту поступило  $(1/23)K$  горячей и  $(1/17)(K - T)$  холодной воды. По условию задачи,  $(1/23)K = 1,5(1/17)(K - T)$  (\*\*). Решая систему уравнений (\*) и (\*\*), находим,  $T = 7$ (мин),  $K = 69/5$ (мин). Ответ: через 7 минут.

### в) Дискретное время. Запрещенные и допустимые состояния. Учет инвариантов системы

Рассмотрим две широко известных “фольклорных” задачи, которые часто входят в олимпиадные сборники; эти задачи обычно рассматривают как задачи на смекалку, на развитие мышления ребенка. Интересно проанализировать их с точки зрения понятия динамической системы. Уже просто введение пространства состояний помогает ввести размышления по поводу задачи в определенное русло и существенно продвинуться в решении. О полезности понятия пространства состояний (фазового пространства) хорошо рассказано в книге [5], глава 1.

Первая задача — о перевозе мужиком через реку в лодке волка, козы и капусты. В лодке может поместиться только мужик плюс еще один предмет. В отсутствие мужика волк съест козу, а коза съест капусту. Мужик нужно переправить всех без потерь с одного берега реки на другой.

Абстрагируемся от процесса погрузки в лодку и выгрузки из нее, и будем рассматривать только моменты времени после того, как погрузка/разгрузка произведена. Тем самым, в отличие от предыдущих классов задач, нам достаточно рассмотреть не все непрерывное течение времени, а лишь отдельные моменты, которые можно пронумеровать: 1, 2, 3, ... Получается так называемая система с *дискретным временем*.

Состояние системы определяется тем, как распределены мужик (М), волк (В), коза (Ко) и капуста (Ка) в лодке и по берегам реки. Такое состояние удобно записать в виде разделенной на три части строки, причем левая часть показывает, кто находится на левом берегу, правая часть — кто на правом берегу, средняя часть — кто в лодке. Итак, исходное состояние нашей системы:

$$M \ B \ Ko \ Ka \ | \ |$$

Решение задачи заключается в том, чтобы написать цепочку состояний, ведущую к желаемому конечному состоянию

$$| \ | \ M \ B \ Ko \ Ka$$

По условию задачи, во-первых, в лодке не может быть больше двух пассажиров, т.е. в средней части строки нельзя ставить больше двух знаков; во-вторых, один из пассажиров лодки



обязательно мужик. Все возможные состояния, не удовлетворяющие этим условиям, являются *запрещенными*. Например, запрещенными являются такие состояния:

$$\begin{array}{cc|cc} K a & & M & B & K o & \\ M & K o & & B & K a & \end{array}$$

Далее, по условию запрещенными являются состояния, где без мужика на одном берегу остаются волк и коза, или коза и капуста, например:

$$\begin{array}{cc|cc} B & K o & & M & K a & \\ & & & B & M & & K o & K a \end{array}$$

— запрещенные состояния. Все незапрещенные состояния будем называть *допустимыми*. Уточним требование к решению: надо написать цепочку допустимых состояний, переводящую исходное состояние в конечное. Запись решения оставляем читателю в качестве упражнения.

Вторую задачу цитируем по [6] (стр. 3, задача 4). Из бочки вина перелили ложку его в (неполный) стакан с чаем. А потом такую же ложку (неоднородной) смеси из стакана — обратно в бочку. Теперь и в бочке, и в стакане имеется некоторый объем посторонней жидкости (вина в стакане, чая в бочке). Где объем посторонней жидкости больше: в стакане или в бочке?

Будем рассматривать систему, каждый раз после того, как произведено очередное действие — переливание. Состояние системы определяется количеством жидкости каждого вида в бочке, стакане и ложке; это снова система с дискретным временем.

**Решение 1.** За единицу измерения объема примем ложку.

Момент 1. Объем вина в бочке — Б, в стакане — С, в ложке — 0. (Для школьников средних классов надо пояснить, что Б и С могут выражаться положительными дробными числами, для школьников старших классов — что, вообще говоря положительными вещественными).

Действие 1. Из бочки берут ложку вина.

Момент 2. Бочка: Б-1 (вино), ложка: 1 (вино), стакан: С (чай).

Действие 2. Ложку вина выливают в стакан с чаем.

Момент 3. Бочка: Б-1 (вино), ложка: 0, стакан: С (чай) + 1 (вино).

Действие 3. Из стакана берут ложку смеси. Пусть в нее попало количество Х вина, тогда чая в ложке 1-Х.

Момент 4. Бочка: Б-1 (вино), ложка: Х (вино) + (1-Х) (чай), стакан: С - (1-Х) (чай) + (1-Х) (вино).

Действие 4. Ложку смеси выливают в бочку с вином.

Момент 5. Бочка: (Б-1+Х) (вино) + (1-Х) (чай), ложка: 0, стакан: С - (1-Х) (чай) + (1-Х) (вино).

Мы видим, что в бочке 1-Х чая, а в стакане 1-Х вина, т.е. объемы посторонних жидкостей одинаковы.

**Замечание 3.** Напомним, что инвариантами являются характеристики системы, которые не меняются со временем. У рассмотренной системы есть очевидный инвариант — общий объем жидкостей, который остается неизменным во все моменты 1-5.

**Решение 2.** Рассмотрим всего одно сложное действие, которое включает в себя все действия 1-4, и всего два состояния системы — начальное и конечное (т.е. моменты 1 и 5). При таком взгляде на систему можно заметить еще два инварианта — не изменился объем жидкости в бочке и объем жидкости в стакане. Отсюда сразу следует, что объемы посторонних жидкостей равны.

### г) Разные задачи

Приведем примеры задач, которые можно рассматривать с точки зрения понятия динамической системы. Для некоторых задач нетривиальной работой является уже выяснение, что является состоянием системы и каков закон ее эволюции. Задачи Г.1 – Г.6 см. в [6], номера соответственно 5, 10, 17, 20, 57, 61; Г.7 — в [7], стр. 44, номер 7; Г.8 – Г.10 — в [8], соответственно стр. 52, номер 9, стр. 55, номера 16, 17.

Г.1. Из А в В и из В в А на рассвете (одновременно) вышли навстречу друг другу (по одной дороге) две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждая продолжала

идти с той же скоростью, и первая пришла (в В) в 4 часа дня, а вторая (в А) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

Г.2. Улитка за день залезает вверх по столбу на 3 см, а за ночь, уснув, нечаянно спускается на 2 см. Высота столба 10 м., а наверху лежит вкусная для улитки конфета. Через сколько дней улитка ее достанет?

Г.3. От города А до города В расстояние 40 км. Два велосипедиста выехали из А и из В одновременно и навстречу друг другу, один со скоростью 10 км в час, а другой — 15 км в час. Муха вылетела с первым из А со скоростью 100 км в час, долетела до второго, села ему на лоб и полетела обратно к первому, села ему на лоб, вернулась ко второму и так далее, пока они не столкнулись лбами и не раздавили ими муху. Сколько километров она пролетела всего?

Г.4. Имея два сосуда объемом 5 литров и 3 литра, отмерь один литр (получи его в одном из сосудов).

Г.5. Нарисовать на плоскости  $(x, y)$  кривые, заданные параметрически:  $(x = \cos(2t), y = \sin(3t))$ ,  $(x = t^3 - 3t, y = t^4 - 2t^2)$ .

Г.6. Окружность радиуса  $r$  катится внутри круга по окружности радиуса 1 (без скольжения). Нарисовать всю траекторию одной из точек катящейся окружности (эта траектория называется *гипоциклоидой*) при  $r = 1/3$ , при  $r = 1/4$ , при  $r = 1/n$ , при  $r = 1/2$ .

Г.7. Игра “Чехарда”. В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т.е. прыгают друг через друга, причем если кузнечик А прыгает через кузнечика В, то после прыжка он оказывается от В на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину?

Г.8. Овчарка погналась за лисой, когда между ними было расстояние 99 м. Скачок лисы 1,1 м, скачок овчарки 2,2 м. Когда овчарка делает 19 скачков, лиса делает 29 скачков. Сколько метров проскачут они, пока овчарка догонит лису?

Г.9. Три велосипедиста начали с общего старта движение по круговой дорожке. Первый делает полный круг за 21 мин, второй за 35 мин, а третий — за 15 мин. Через сколько минут они еще раз окажутся вместе в начальном пункте?

Г.10. Ежедневно Он подходил к городским часам ровно в 19.00. Она же появлялась почти всегда в тот момент промежутка времени между 19.00 и 20.00, когда воображаемая биссектриса угла, образованного часовой и минутной стрелками, проходила бы на циферблате через цифру 6. В какой момент времени появлялась Она?

## 1.2. Примеры из школьного курса физики

Анализ упражнений из учебника [9], раздел “Механика”, показал, что решение любого упражнения может быть проведено на основе понятия динамической системы.

### а) Кинематические задачи

В упражнениях по кинематике законы эволюции даны в явном виде, и основная работа направлена на выбор подходящей системы отсчета, интерпретацию условия по отношению к этой системе, а также пересчет координат при переходе из одной системы отсчета в другую. Для примера рассмотрим два задания.

**Упражнение 2, №2 (стр. 28).** По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу равномерно движутся два поезда со скоростями 72 км/ч и 102 км/ч. Длина первого поезда 900 м, второго 140 м. В течение какого времени один поезд проходит мимо другого?

**Решение.** В принципе, состояние системы можно характеризовать положениями четырех точек: начала и конца первого и, соответственно, второго поезда. Однако, при выборе удачной системы отсчета, можно ограничиться наблюдением лишь за двумя точками. А именно, выберем начало отсчета в точке встречи поездов, и время начнем отсчитывать с этого момента. Один поезд будет проходить мимо другого до тех пор, пока не совпадут положения концов поездов. Направление координатной оси совпадает с направлением движения первого поезда. Пусть  $x_1$  — координата конца первого поезда,  $x_2$  — координата конца второго поезда. Законы движения имеют вид  $x_1(t) = -900 + 20t$ ,  $x_2(t) = 140 - 28,3t$ , где расстояние измеряется в метрах, время

в секундах, и скорости пересчитаны из км/ч в м/сек. Приравнивая эти выражения, находим искомое время, которое равно примерно 21,5 сек.

**Упражнение 2, №3 (стр. 28).** Какую скорость относительно воды должен сообщить мотор катеру, чтобы при скорости течения реки, равной 2 м/с, катер двигался перпендикулярно к берегу со скоростью 3,5 м/с относительно берега?

**Решение.** Выберем две системы отсчета, одну — связанную с берегом, вторую — движущуюся вместе с водой. Время отсчитываем от момента начала движения катера, в начальный момент времени системы отсчета совпадают, а начало координат совпадает с точкой, откуда катер начал движение; см. рис. 1.

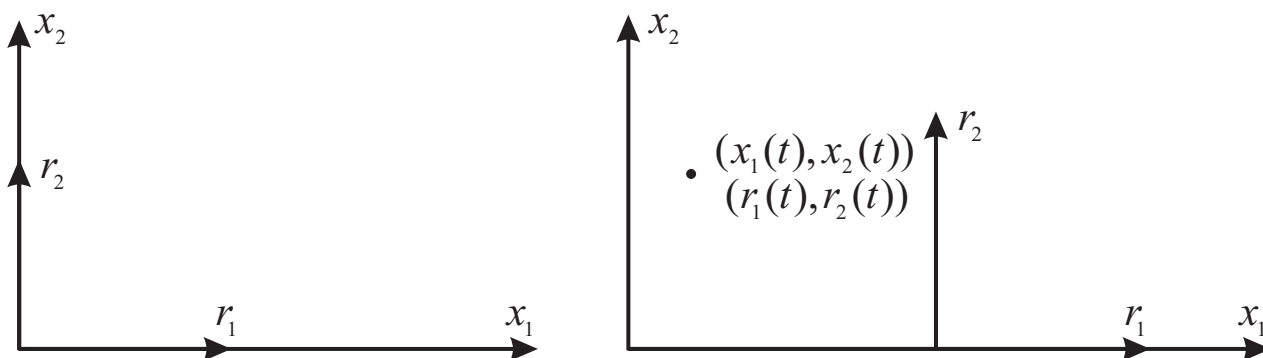


Рис. 1.

На рисунке показаны обе системы координат, слева — в начальный момент времени, справа — спустя некоторое время  $t$ . На правом рисунке изображена также некоторая движущаяся точка, которая имеет координаты  $(x_1(t), x_2(t))$  в неподвижной системе отсчета и  $(r_1(t), r_2(t))$  в движущейся системе. Эти координаты связаны соотношениями  $r_1(t) = x_1(t) - 2t$ ,  $r_2(t) = x_2(t)$ . Задача заключается в том, чтобы найти вектор скорости катера относительно подвижной системы координат, когда задан закон движения катера относительно неподвижной системы координат, когда задан закон движения катера относительно неподвижной системы координат имеет вид  $x_1(t) = 0$ ,  $x_2(t) = 3,5t$ . Подставив эти формулы в соотношения между координатами, получаем закон движения катера относительно подвижной системы:  $r_1(t) = -2t$ ,  $r_2(t) = 3,5t$ . Это значит, что вектор скорости катера относительно подвижной системы имеет координаты  $(-2; 3,5)$ , см. рис. 2.

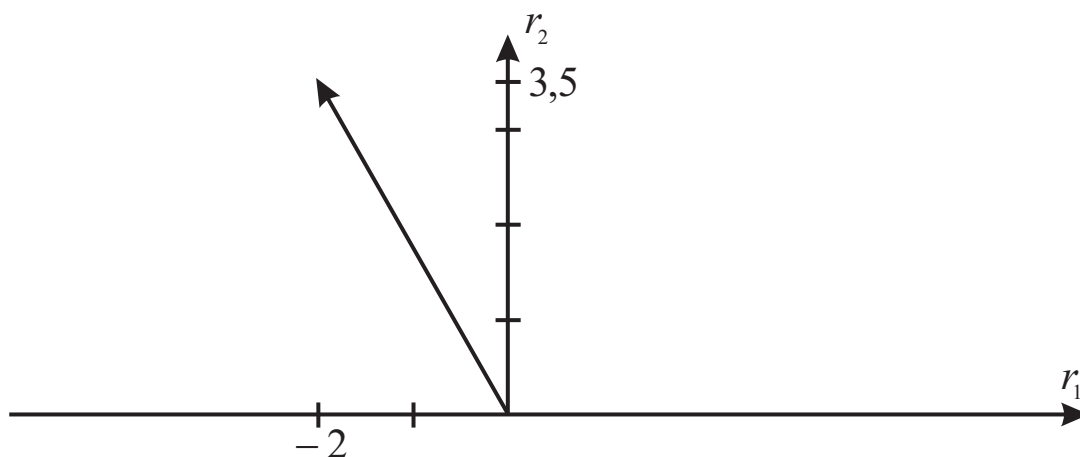


Рис. 2.

Простые геометрические вычисления показывают, что величина скорости составляет примерно 4 м/сек, а направлена скорость примерно под углом 60 градусов к береговой линии, против течения реки.

**Замечание 4.** Эти задачи практически не отличаются от текстовых задач из задачников по математике, и специального изучения требует вопрос, как при работе с ними можно осваивать

содержание физического образования.

### б) Динамические задачи

В задачах из подраздела “Динамика” привлекается дополнительное понятие силы. При решении конкретных задач по силам определяются ускорения, что позволяет определить закон эволюции системы. Рассмотрим некоторые примеры.

**Упражнение 6, №9 (стр. 77).** Найдите модуль скорости вагона, движущегося равномерно по закруглению радиусом 98 м, если шар, подвешенный на нити к потолку вагона, отклоняется на угол 45 градусов от вертикали. С какой силой нить действует на шар, если его масса 10 кг?

**Решение.** В данном случае закон движения относительно системы отсчета, связанной с Землей, нам задан — это равномерное круговое движение с неизвестной величиной  $v$  линейной скорости и известным радиусом  $R$ . Такое движение определяет ускорение, направленное к центру окружности и равное по величине  $a = v^2/R$ . Это ускорение, в свою очередь, определяет равнодействующую сил, приложенных к телу, см. рис. 3.

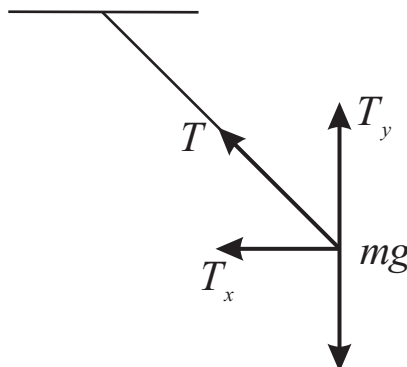


Рис. 3.

На тело действуют сила тяжести и сила натяжения нити  $T$ , показаны проекции силы натяжения на горизонтальную и вертикальную оси. Поскольку движения в вертикальном направлении не происходит, заключаем, что вертикальная проекция равна по величине силе тяжести  $mg$ , а известная величина угла в 45 градусов позволяет сделать вывод, что горизонтальная проекция равна по величине вертикальной и, следовательно, тоже равна  $mg$ . Эта горизонтальная проекция является равнодействующей всех сил, действующих на тело, а значит, ее величина равна  $at$ . Отсюда  $a = g = v^2/R$ . Из этого соотношения находим неизвестное значение  $v$ . Ответ на второй вопрос находится при помощи чисто геометрического вычисления.

### в) Задачи из раздела термодинамика. Неявный закон эволюции

Полномасштабное описание систем термодинамики как динамических систем требует очень развитого математического аппарата, который вряд ли можно освоить в рамках общеобразовательной средней школы. Рассмотрим, например, распространение тепла в тонком металлическом стержне. Соответствующий опыт описан в учебнике [10], параграф 4. Математически состояние неравномерно нагретого стержня можно описать как функцию распределения температуры, заданную на некотором отрезке. Предположим для простоты, что на концах стержня поддерживается определенная фиксированная температура (один конец нагревается на свечке, а другой касается теплоотводящей стенки). Тогда пространством состояний системы будет *пространство функций*, принимающих на концах отрезка заданные значения. Это пространство *бесконечномерно*. Чтобы найти закон эволюции такой системы, т.е. узнать, как меняется распределение температуры со временем, надо решить соответствующую *краевую задачу для уравнения теплопроводности*. Уравнение теплопроводности относится к специальному классу *уравнений в частных производных*. С точки зрения программ по математике этот материал соответствует второму-третьему курсу физико-математических факультетов высших учебных заведений.

Однако многие задачи из раздела термодинамики связаны с рассмотрением макроскопических характеристик, например, установившихся значений объема, давления и температуры в

случае идеального газа. В данном случае набор значений этих трех параметров и может считаться состоянием системы. В задаче обычно описаны начальное и конечное состояния системы; как именно происходит эволюция от начального к конечному состоянию — для решения задачи несущественно, т.е. закон эволюции системы можно считать неявным. Решение задачи основано на соотношениях между параметрами (газовых законах), которые выполняются в каждом фиксированном состоянии. В итоге оправдан подход к задаче как к динамической системе с дискретным временем — рассматриваем только начальный и конечный моменты.

**Пример (см. [9], глава 10).** Баллон вместимостью  $0,02 \text{ м}^3$ , содержащий воздух под давлением  $4 \cdot 10^5 \text{ Па}$  соединяют с баллоном вместимостью  $0,06 \text{ м}^3$ , из которого воздух выкачан. Температура остается постоянной. Найти давление, установившееся в сосудах.

**Решение.** Положим  $v_1 = 0,02 \text{ м}^3$ ,  $v_2 = 0,06 \text{ м}^3$ ,  $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $T$  — температура в первом баллоне. Начальное состояние системы —  $(v_1, p_1, T)$ , конечное состояние —  $(v_1 + v_2, p_2, T)$ , где  $p_2$  — неизвестное давление, которое надо найти. По условию задачи, температура  $T$  не изменилась, значит, в соответствии с законом Бойля-Мариотта, не изменилось и произведение объема на давление. Имеем:  $p_1 \cdot v_1 = p_2(v_1 + v_2)$ , откуда легко найти  $p_2$  (ответ:  $10^5 \text{ Па}$ ).

Подобный подход можно применять и к другим термодинамическим задачам, например, задачам на изменение агрегатного состояния вещества.

**Замечание 5.** С точки зрения динамических систем можно рассматривать и многие химические задачи, например, задачи на расчет количеств веществ, образующихся в результате химических реакций. В таких задачах из химического знания используется лишь вид реакции и значения атомных весов элементов, участвующих в реакции. Начальное и конечное состояния системы можно записать как совокупность пар (вещество, количество вещества) для всех веществ, имеющихся до начала реакции, а затем для всех веществ, имеющихся после реакции. Расчеты делаются на основании закона сохранения массы и на основе пропорциональности количеств веществ в соединении атомным весам. Предлагаем читателю проанализировать с этой точки зрения, например, задачи параграфа 29 из учебного пособия [11].

## 2. Методический комментарий

Не следует считать, что автор предлагает учителю того или иного предмета естественнонаучного цикла, владеющему понятием динамической системы и желающему ввести его в содержание общего среднего образования, в какой-то момент объявить ученикам 5, 6, 7... класса: “Мы с вами начинаем изучать понятие динамической системы и будем изучать его до окончания школы”. Практика введения этого понятия означает, на наш взгляд, некоторую специальную расстановку акцентов при освоении учебного материала.

Так, в средних классах при решении определенного типа задач — обращать внимание на видение описанной в задаче системы, на набор ее возможных состояний, на способы описания этих состояний, добиваться понимания, как система переходит из предыдущего состояния в следующее и т.п. Возможны и желательны специальные подборки задач.

С точки зрения динамической системы для учащихся хорошо актуализируется понятие функции — не как абстрактного числового соответствия, а как практически значимого закона изменения во времени состояния или некоторой частной характеристики системы. При хорошей подборке примеров нетрудно актуализировать все основные виды элементарных функций: линейную (равномерное движение точки по прямой), тригонометрические (равномерное движение точки по окружности), экспоненциальную (остывание нагретого тела) и т.п. Аналогично, актуализируется понятие вектора как одного из возможных способов записи состояния системы. Например, в рассмотренной выше термодинамической задаче состояние представлено трехмерным вектором  $(v, p, T)$ .

В старших классах при изучении простейших дифференциальных уравнений можно дать формальное определение динамической системы и рефлексивно проанализировать рассмотренные к этому времени задачи. Впрочем, не совсем ясно, насколько в настоящий момент стабильно присутствие этой темы в программе общеобразовательной средней школы.

Понятие динамической системы по существу математическое. Полипредметность его мы понимаем в том смысле, что сквозь призму этого понятия очень эффективно просматривать огромный массив учебных заданий из других предметов естественнонаучного цикла — физики, химии, возможно, биологии и географии — и выявлять, где действительно используется соответствующее предметное знание, а что можно передать математике. Последнее можно сделать всякий раз, когда задача в той или иной мере осознана как задача о динамической системе.

### Литература:

1. Половкова М.В., Громыко Н.В. Стратегическая образовательная инициатива. В сборнике “Северо-Западный Округ — стратегическая инициатива: интеграция науки, промышленности и образования”. М.: Пушкинский институт. НИИ инновационных стратегий развития общего образования, 2006.
2. Математический энциклопедический словарь, под ред. Ю. В. Прохорова, М.: “Советская энциклопедия”, 1988.
3. Совайленко В.К., Лебедева О.В. Математика. Учебник для 5 класса средней школы. Ростов-на-Дону, “Феникс”, 1998.
4. Имайкин В.М., Филановская Т.Б. Целые и рациональные алгебраические выражения. Учебное пособие для 6-9 классов средней школы. М.: Институт учебника “Пайдейя”, 1998.
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: “РХД”, 2000.
6. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. М.: Издательство МЦНМО, 2004.
7. Летняя школа СУНЦ МГУ. М.: ЛЕНАНД, 2005.
8. Кордемский Б.А., Ахадов А.А. Удивительный мир чисел. М.: “Просвещение”, 1986.
9. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Сотский Н.Н. Физика. Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений. М.: “Просвещение”, 2002.
10. Перышкин А.В. Физика. 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: “Дрофа”, 2006.
11. Габриэлян О.С. Химия. 8 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: “Дрофа”, 2006.

*Имайкин Валерий Марсович,  
старший научный сотрудник НИИ ИСРОО  
Департамента образования г. Москвы,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*Email: ivm61@mail.ru*

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167. E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2007 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2007 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

|   |          |
|---|----------|
| <b>S. Dvoryaninov. What is a Group of Functions</b> | <b>2</b> |
|---|----------|

The notion of group of functions is introduced for school students aged 15-17. Numerous examples and some ways of obtaining function groups are discussed.

|   |          |
|---|----------|
| <b>E. Kulanin. Euler Lines and Feuerbach Points of a Rectangular Triangle</b> | <b>9</b> |
|---|----------|

The author continues to study mutual arrangement of some remarkable points and straight lines of a rectangular triangle.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>F. Nilov. Geometric Proof of a Rectangular Triangle Indication</b> | <b>25</b> |
|---|-----------|

The paper completes the series of publications on a rectangular triangle indication. The indication is proven in a purely geometric manner.

|  |           |
|--|-----------|
| <b>A. Lyakhov. Mathematics Approach to Historical Research</b> | <b>28</b> |
|--|-----------|

Some new conclusions concerning famous historical events are given based on mathematical approach.

|  |           |
|--|-----------|
| <b>A. Lyakhov, F. Lyakhov. Mathematical Modelling of Spatially Distributed Systems Mean Values' Dynamics</b> | <b>33</b> |
|--|-----------|

Some method of constructing dynamics of mean values is suggested, for systems with a prescribed spatial distributions.

|   |           |
|---|-----------|
| <b>V. Drozdov. Complex Numbers for School Students and Teachers</b> | <b>39</b> |
|---|-----------|

An elementary introduction to the complex number theory for school teachers and students. The first part of the manual.

|  |           |
|--|-----------|
| <b>V. Imaykin. Dynamical Systems for School Students</b> | <b>60</b> |
|--|-----------|

The possibility of introducing the notion of dynamical systems to school programs is discussed.