

ISSN 1992-6138

# Математическое Образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

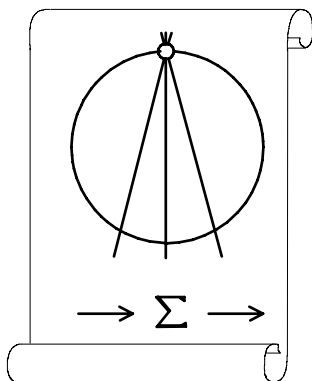
Год тринадцатый

№ 1 (53)

январь – март 2010 г.

Москва

*Периодическое издание в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.  
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)  
Дубовицкий А.В.  
Комаров С.И.  
Константинов Н.Н.  
Костенко И.П.  
Саблин А.И.

№ 1 (53), 2010 г.

© “Математическое образование”, составление, 2010 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2010 г.  
“Математическое образование”, периодическое издание.  
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.  
Подписано к печати 31.03.2010 г.  
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.  
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.  
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.  
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (53), январь – март 2010 г.

## Содержание

### **Методика преподавания математики**

- А. Я. Белов, Р. Явич.* Проблемы одаренности и стадийность математического образования 2

### **Учащимся и учителям средней школы**

- Н. С. Астапов.* Теорема о базисе в задачах 6
- Ф. Л. Варпаховский, О. С. Логвиненко.* О наибольшем периметре выпуклого пятиугольника заданного диаметра 12
- Туан Ле.* Продолжение исследования одного неравенства с радикалом 17

### **Студентам и преподавателям математических специальностей**

- А. И. Рубинштейн.* О некоторых динамических системах второго порядка (дополнение к стандартному ВТУзовскому курсу математики) 24
- С. В. Дворянинов.* О принципах суперпозиции 31

### **Учебное пособие в журнале**

- С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев.* Лекции по аналитической геометрии (продолжение) 36

### **Информация**

- О выходе книги В. В. Цукермана 78
- Об изменении состава редколлегии журнала 78

## **Проблемы одаренности и стадийность математического образования**

*А. Я. Белов, Р. Явич*

Значительное число учащихся в математике понимают очень мало. Из остальных часть именуются “математически одаренными”. Однако сложность школьной и вузовской математики не такова, чтобы она была не доступна основной массе учащихся. Аналогичная ситуация и с другими предметами. В связи с этим мы предполагаем, что обучение и овладение предметом, а также выработка соответствующей интуиции происходят поэтапно, и каждый этап имеет свои задачи и свою методику реализации. Нарушение этапности (в особенности невнимание к специфике первого этапа) зачастую приводит к печальным последствиям. В этом одна из причин плохого понимания предмета. При начале занятий ключевое значение имеет выработка правильного отношения к предмету, говоря точнее, преодоление отношения к нему как к своду формальных правил и плохо осмысленных предписаний. Первая фаза обучения должна иметь именно это своей целью. И лишь во вторую очередь — выработку знаний, умений навыков, овладение фактическим материалом.

### **Введение**

Одаренность детей всегда была и остается по сегодняшний день загадкой для многих исследователей, учителей и родителей. Как следствие, возникает проблема диагностики и развития одаренных детей на всех этапах их обучения. Понимание проблем адаптации, стоящих перед одаренными детьми, имеет огромное значение.

Однако проблема одаренности имеет и другой аспект. Так ли “бездарны” остальные дети? Не является ли в ряде случаев так называемая “бездарность” следствием неправильной ориентации личности? Не является ли эта ориентация следствием некоторых аспектов традиционной системы образования? И если да, то что тут можно делать?

С одной стороны, подавляющее число учащихся в математике понимают очень мало. Остальные именуются “математически одаренными”. С другой стороны, объективная сложность школьной и вузовской математики не такова, чтобы она была не доступна основной массе учащихся. Аналогичная ситуация и с другими предметами.

Нам представляется необходимым сравнить не только интеллектуальные качества “одаренных” и “бесталанных” учащихся, но и особенности поведения, а также отношения к предмету.

### **Проблема неправильной личностной ориентации**

В процессе преподавания возникает следующее наблюдение. “Слабые” учащиеся относятся к предмету как к своду неких правил и инструкций. И главное — не нарушить правило, не совершить ошибку. Те учащиеся (школьники или студенты), которые смогли преодолеть такое отношение к предмету, учатся значительно эффективнее и называются “одаренными”. Споры нет, у них уже есть заслуга.

Опыт говорит, что главное отличие настоящего отличника от рядового студента заключается прежде всего не в интеллекте. Дело в том, что у отличника здравый смысл направлен на сам предмет. Содержание занятий, в подавляющем большинстве случаев, особых требований к интеллекту не предъявляет (традиционная методика старается максимально уйти от трудных доказательств). Собственно творческая одаренность проявляется на более высоком уровне.

### **Стадийность образования и пути решения методической проблемы**

Обратимся к опыту кружкового преподавания. Существует мнение, что студенты вуза в основной массе “слабые” и их нельзя учить так, как учат (12-летних) школьников на кружках. Методы кружкового преподавания годятся только для “сильных”. Это значит, что студентов

надо учить традиционно, обучая стандартным приемам решения задач из стандартного материала. От этого они, впрочем, не становятся сильнее.

Но что такое кружковое преподавание? Отчего происходит отношение к предмету как к набору формальных правил? Что тут можно сделать? В связи с этим хотелось бы сделать несколько замечаний о ведении математического кружка для не математиков.

Кружки интересны, прежде всего, тем, что отбор материала более гибок, чем в стандартной школьной или вузовской программе. Он управляется интересами учащихся и преподавателей, он более естественный. С разнообразным материалом происходит экспериментирование. Мы убеждены, что накопленный опыт может оказаться важным и для преподавания “слабым” учащимся.

Рассмотрим вопрос о стадийности математического образования. При первом знакомстве математика — это прежде всего наука о решении занимательных задач и головоломок (и немного — о некоторых интересных природных закономерностях). Первоначальное обращение к математике должно быть именно таким узким.

При этом недопустимо доказывать вещи, которые “и так очевидны”. Вначале нужно увидеть, как строгие рассуждения позволяют получить нетривиальные результаты, и только потом осознать, что же такое строгое рассуждение. Но это — работа следующего этапа.

Изучение математики вообще и любой темы, в частности, состоит из (по меньшей мере) двух этапов, которые нельзя смешивать. Первый этап заключается в формировании интуиции (“мыслеобразов”), затем следует собственно осознание и затем — формирование умения управлять своим мышлением.

Как говорил Р. Бернс: “Твой стиль, суховатый и сдержанно краткий, без умолку хвалят друзья. Уздечка нужна, чтобы править лошадкой, но где же лошадка твоя?” Традиционное преподавание начинается именно с уздечки. Преждевременное наведение строгости крайне вредно. Оно вызывает так называемый “эффект сороконожки”<sup>1</sup>. Учеба состоит из нескольких этапов. Деятельности по прохождению разных этапов друг с другом очень плохо совместимы.

В качестве иллюстрации расскажем о преподавании метода математической индукции, следуя И. С. Рубанову.

Традиционное (т.е. плохое) преподавание этого метода состоит в его словесном описании, формализации. Манипуляции закрепляются упражнениями на доказательство тождеств.

Правильное же преподавание состоит в том, что вначале формируется интуитивное представление.

Сначала может разбираться, например, такая

**Задача 1.** Число составлено из 27 единиц, идущих подряд. Доказать, что оно делится на 27.

Идея доказательства состоит в разбиении на 3 блока по 9 единиц идущих подряд. Каждый из них делится на 9, а произведение такого блока на число 1000000001 делится на 27.

Далее разбирается следующая

**Задача 2.** Число составлено из 81 единицы, идущей подряд. Доказать, что оно делится на 81.

Затем идет работа с аналогичной задачей о числе, составленном из 243 единиц, и т.д. В конце концов, учащимся надоедает решать задачи-близнецы и они захотят рассуждать “в общем виде”. Но как сформулировать “общий вид” утверждения? С этого начинается осознание.

Разбирается также еще несколько серий задач подобного рода. Например, следующая

**Задача.** 4 прямые разбивают плоскость на области. Доказать, что эти области можно покрасить в черный и белый цвета так, чтобы соседние области были раскрашены в разные цвета.

Идея решения состоит в том, что если есть раскраска разбиения плоскости тремя прямыми, то можно получить раскраску для разбиения плоскости четырьмя прямыми.

Далее обсуждается случай большего числа прямых и работа производится по той же схеме, что и для предыдущей серии. Точно так же у учащиеся формируется потребность рассуждать

---

<sup>1</sup>Согласно легенде, сороконожка разучилась ходить, когда ее убедили сознательно двигать каждым членом. Отсюда возник соответствующий психологический термин.

в общем виде.

Итак, первый этап в преподавании индукции заключается в разборе нескольких ключевых задач. При этом формируется *интуитивное ощущение*, что задача “для чего-то большего” часто сводится к задаче “для чего-то меньшего”.

Формулировка метода получается только после того, как соответствующие рассуждения будут проведены в общем виде, и на первых порах метод математической индукции будет назван “планом решения задачи”.

Процесс обучения любому предмету, в том числе математике, начинается с создания интуиции. Это означает создание поля мыслеобразов, которыми обрабатывается той или иной круг задач. Иногда говорят о “словоформах”.

Создание интуиции также происходит в два этапа. Первый этап состоит в “вызывательной процедуре” (по выражению оккультистов), т.е. в привлечении мыслеобразов из здравого смысла. Второй состоит в собственно формировании профессиональных мыслеформ.

Механизм вызова или привлечения (мыслеформ, словоформ) особенно важен для преподавания математики не математикам и, вообще, для взрослого человека, когда он хочет изучить тот или иной предмет.

В связи с этим, хотелось бы поговорить о математическом кружке для не математиков.

Когда говорят, что “студенты не понимают понятие скорости” — это и правда, и неправда. Студенты действительно затрудняются дать формальное определение скорости как производной, но интуитивное ощущение скорости есть у любого нормального человека.

Точно так же, каждому нормальному человеку ясно, что с практической точки зрения яблоко бесконечно больше атома и бесконечно меньше Земли. В то же время абстрактные рассуждения с величинами разного порядка малости усваиваются с большим трудом. Причина не в том, что эти рассуждения сложные, а в некотором культурном барьере.

Итак, первый этап формирования интуиции состоит в привлечении здравого смысла, наглядных представлений и т.п. Эти “бытовые мыслеформы” служат исходным материалом при формировании (можно сказать — преподавании) мыслеобразов, относящихся к самому предмету.

Р. Фейнман в своих знаменитых лекциях по физике активно занимается вызовом мыслеобразов. Например, разбирая понятие мгновенной скорости, он приводит диалог полицейского и дамы:

- Вы ехали со скоростью 60 миль в час.
- Простите Сэр, но я за последний час 60 миль не проехала.
- Но Вы ехали со скоростью 30 метров в секунду!
- Но штрафуют за 60 миль в час, а не за 30 метров в секунду!

В привлечении мыслеобразов и состоит так называемый “принцип наглядного обучения”.

Есть расхожее мнение, что математика для не математиков, скажем, инженеров, должна преподаваться так, чтобы обучать прежде всего так называемому утилитарно полезному. Мы придерживаемся прежде всего той точки зрения, что утилитарно необходимое человек выучит сам, а наша цель — объяснить человеку, зачем это ему нужно (т. е. создать внутренние стимулы), привлечь образы здравого смысла и, наконец, если есть возможность, начать ставить математическое мышление.

Поскольку люди плохо учатся зачастую не потому, что глупые, а потому что неправильно относятся к предмету, целью может являться выработка правильного отношения к предмету. Привлечь здравый смысл и продемонстрировать эстетику можно уже на нескольких занятиях. Поэтому даже такие краткие курсы оказываются достаточно важными. Мы имели опыт ведения математического кружка для химиков. За одно занятие в неделю невозможно обучить математике. Однако можно показать, что за математической красотой стоит физический смысл, и начать ставить понимание физической сути предмета. Сила всегда приходит в облике красоты. Beauty is power itself. В качестве примера был взят закон распределения молекул по скоростям

и оценка скорости химических реакций. Цель не в том, чтобы обучить математике, а в том, чтобы выработать правильное отношение к ней на примере одного сюжета. В дальнейшем двое учащихся докладывали свои работы на школьных научных конференциях в Москве и Обнинске. Такой подход мы бы назвали “пробным обучением”. Многие пороки так называемого “традиционного обучения” вытекают из принципа сознательности обучения, предполагающего, что человек воспринимает мир прежде всего через узкую щель сознания. На самом деле сознание — это только инструмент управления мышлением и оно не является главным адресатом в процессе обучения.

Недопустимо и вредно стремиться к осознанию чего бы то ни было без предварительного формирования интуитивных образов. Сказанное отнюдь не умаляет роль сознания. В математике много стандартных для этой науки рассуждений, связанных с рефлексией, проведение таких рассуждений включает управление мышлением. Более того, преимущества взрослого человека заключаются именно в умении управлять своим мышлением. Мы не против “узечки”, просто она имеет смысл при наличии “лошадки”.

Отметим, что на определенном этапе развития (на нем находятся ученики старших классов математических школ и останавливается большинство учителей) на первый план выходит вопрос строгости математических рассуждений. Отсюда перекося в сторону строгости в школьном преподавании и недостатки традиционного стиля, вызванные субъективным развитием школьных учителей. Строгость возводится в абсолют и человек начинает стремиться к нему. Ему нужно прочувствовать, что же такое строгое доказательство. “Аксиоматические игры” на доказательство “и так очевидных вещей” и т. п. нужно отнести именно к этому этапу образования, а раньше этого следует избегать.

## Заключение

Подводя итоги, отметим, что обучение и овладение предметом а также выработка интуиции происходит поэтапно и каждый этап имеет свои задачи и свою методику реализации. При начале занятий ключевое значение имеет выработка правильного отношения к предмету, говоря точнее, преодоление отношения к нему как к своду формальных правил и плохо осмысленных предписаний. И первая фаза обучения должна иметь это своей целью и лишь во вторую очередь выработку знаний, умений навыков, овладение фактическим материалом. Выработка математического мышления и концепции строгости относятся ко второму этапу. Доказательство “очевидных” утверждений, а также “аксиоматические игры” должны относиться к третьему этапу.

Пропуск первого этапа приводит к более тяжелым последствиям, чем пропуск любого другого, поскольку приводит к разрушению мотивации. Поэтому его труднее исправить, в отличие от сбоев в обучении при прохождении последующих этапов. Плохое понимание предмета и отвлечение к нему зачастую связано со сбоем в первом этапе.

Исправление ошибок первого этапа является трудной и важной педагогической задачей. В ряде случаев может оказаться успешным показ красоты предмета на специально выбранном примере. Это можно сделать за небольшое количество занятий, и ценность такой работы, при условии ее успешности, оказывается достаточно высокой, зачастую даже больше, чем остальное математическое образование.

*Белов Алексей Яковлевич,  
профессор МИОО  
доктор физ.-мат. наук.*

*Email: kanelster@gmail.com*

*Явич Роман,  
профессор Ariel Academic Center,  
Самария, Израиль.*

## Теорема о базисе в задачах

Н. С. Астапов

Теорема о существовании и единственности разложения вектора на плоскости или в пространстве по базису применяется к решению ряда геометрических задач. Подборка задач сделана так, чтобы показать силу и универсальность метода.

В школьном курсе геометрии есть такие теоремы:

**Теорема 1.** Произвольный вектор на плоскости можно, причем единственным образом, разложить по любым двум неколлинеарным векторам плоскости.

**Теорема 2.** Произвольный вектор в пространстве можно, причем единственным образом, разложить по любым трем некомпланарным векторам пространства.

С помощью этих теорем легко решаются задачи о принадлежности нескольких точек одной прямой или о пересечении нескольких прямых в одной точке, о параллельности отрезков, об отношении длин параллельных отрезков, например: доказать, что диагонали параллелепипеда пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Интересно заметить, что с помощью векторов можно решить многие задачи, ничего не рисуя. Векторный метод позволяет кратко записывать доказательства теорем и решения задач. К числу таких задач относится и следующая задача: доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой. Решение этой задачи можно найти, например, в книге: Готман Э. Г., Скопец З. А. “Задача одна — решения разные”, М.: Просвещение, 2000.

Назовем *базисом на плоскости* любые два неколлинеарных вектора плоскости, а *базисом в пространстве* — любые три некомпланарных вектора в пространстве. Теперь можно коротко сказать, что обе теоремы утверждают существование и единственность разложения любого вектора по базису (если вектор лежит на плоскости, то он разлагается по базису плоскости; если вектор лежит в пространстве, то он разлагается по базису пространства). Применим эти теоремы для решения конкретных задач.

**Задача 1.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  расположены точки  $C_1$  и  $B_1$  так, что  $AC_1/AB = m$  и  $AB_1/AC = k$ . Отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $M$ . В каком отношении точка  $M$  делит каждый из этих отрезков?

**Решение.** Обозначим  $CM/CC_1 = x$ ,  $BM/BB_1 = y$ . В качестве базиса плоскости треугольника  $ABC$  выберем векторы  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ . Для вычисления  $x$  и  $y$  выразим вектор  $\overrightarrow{AM}$  двумя различными способами. Точка  $M$  лежит на отрезке  $CC_1$ , поэтому  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{CC_1} = \vec{c} + x(-\vec{c} + m\vec{b})$ , а так как точка  $M$  лежит и на отрезке  $BB_1$ , то  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + y(-\vec{b} + k\vec{c})$ . Пользуясь теоремой 1, получим систему двух уравнений  $mx = 1 - y$  и  $1 - x = ky$  относительно двух неизвестных  $x$  и  $y$ , отсюда находим

$$x = \frac{1 - k}{1 - mk}, \quad y = \frac{1 - m}{1 - mk}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{y}{1 - y} = \frac{1 - m}{m - mk}, \quad \frac{CM}{MC_1} = \frac{x}{1 - x} = \frac{1 - k}{k - mk}.$$



**Замечание.** Решение задачи годится для любого расположения точек  $B_1$  и  $C_1$  внутри отрезков  $AC$  и  $AB$ . Если, например,  $BB_1$  и  $CC_1$  — две медианы треугольника, то есть  $m = 1/2$  и  $k = 1/2$ , то  $CM/MC_1 = (1 - k)/(k - mk) = 2$  и  $BM/MB_1 = (1 - m)/(m - mk) = 2$ . Таким образом доказано, что любая медиана делится точкой пересечения с другой медианой на отрезки в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины. Попутно установлено разложение вектора  $\overrightarrow{AM}$  по базису:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m - mk}{1 - mk} \overrightarrow{b} + \frac{k - mk}{1 - mk} \overrightarrow{c}.$$

**Задача 2.** В дополнение к условию Задачи 1 проведем прямую  $AM$  до пересечения со стороной  $BC$  треугольника  $ABC$  в точке  $A_1$ . Выразить отношения  $AM/MA_1$  и  $CA_1/CB$  через  $m$  и  $k$ .

**Решение.** Обозначим  $MA_1/AM = z$  и  $CA_1/CB = n$ . Запишем вектор  $\overrightarrow{MA_1}$  двумя различными способами. Имеем  $\overrightarrow{MA_1} = z\overrightarrow{AM}$ . Кроме того, так как точка  $A_1$  принадлежит отрезку  $CB$ , то  $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{c} + n(-\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b})$ . Используя теорему 1 и разложение вектора  $\overrightarrow{AM}$  по базису, получим систему двух уравнений

$$(z + 1) \frac{m - mk}{1 - mk} = n, \quad (z + 1) \frac{k - mk}{1 - mk} = 1 - n, \quad (*)$$

из которой находим:  $n = (m - mk)/(m + k - 2mk)$ .

Заметим, что

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{z} = \frac{m + k - 2mk}{(1 - m)(1 - k)} = \frac{k}{1 - k} + \frac{m}{1 - m} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B},$$

тем самым доказана *теорема Ван-Обеля*: если три отрезка, соединяющих вершины треугольника с точками на противоположных сторонах, имеют общую точку  $M$ , то отношение, в котором точка  $M$  делит каждый из этих отрезков (считая от вершины), равно сумме отношений, в которых два других отрезка делят стороны треугольника (считая от этой же вершины). Применяя теорему Ван-Обеля и теорему о биссектрисе треугольника в случае, когда точка  $M$  является точкой пересечения биссектрис  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  треугольника  $ABC$ , получим величину отношения отрезков, на которые точка пересечения биссектрис делит биссектрису  $AA_1$ :

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{AB + AC}{BC}.$$

Разделим первое уравнение системы (\*) на второе и приведем полученное равенство к виду

$$\frac{m}{1 - m} \cdot \frac{1 - n}{n} \cdot \frac{1 - k}{k} = 1$$

(это равенство называется “условием Чевы для треугольника”). Таким образом доказан частный случай *прямой теоремы Чевы*: если  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  — внутренние точки сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  соответственно и три отрезка  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке, то выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Более подробно о теоремах Чевы и Ван-Обеля можно прочитать в книге: Балк М. Б. “Геометрические приложения понятия о центре тяжести”, М.: Физматгиз, 1959. Из этой же книги выбраны условия следующих трех задач.

**Задача 3** (Теорема Гаусса). Если противоположные стороны произвольного (в том числе невыпуклого или с самопересечением сторон) четырехугольника при продолжении попарно пересекаются, то середины диагоналей и середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон четырехугольника, лежат на одной прямой (прямой Гаусса).

**Решение.** Пусть точка  $K$  — середина диагонали  $BD$ , точка  $L$  — середина диагонали  $AC$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $R$  — точка пересечения сторон  $AB$  и  $CD$ ,  $S$  — точка пересечения сторон  $BC$  и  $AD$ , точка  $M$  — середина отрезка  $RS$ . Докажем, что точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на одной прямой. В качестве базиса выберем векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$  и  $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ . Тогда  $\overrightarrow{DB} = \alpha \vec{a} + \gamma \vec{c}$ , причем  $\alpha \neq 1$  и  $\gamma \neq 1$ , потому что  $AB$  не параллельна  $CD$  и  $AD$  не параллельна  $BC$ . Вектор  $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(1-\alpha)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\vec{c}$ . Для определения вектора  $\overrightarrow{DR}$  выразим его двумя различными способами через векторы базиса. Так как точка  $R$  принадлежит прямой  $CD$ , то  $\overrightarrow{DR} = m\vec{c}$ . Кроме того, точка  $R$  принадлежит прямой  $AB$ , поэтому  $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{AB} = \vec{a} + k(-\vec{a} + \overrightarrow{DB}) = (1-k+k\alpha)\vec{a} + k\gamma\vec{c}$ . Применяя теорему 1, получим систему уравнений  $1-k+k\alpha=0$  и  $m=k\gamma$  для нахождения  $k$  и  $m$ . Напомним, что  $\alpha \neq 1$  и  $\gamma \neq 1$ . В результате имеем  $\overrightarrow{DR} = \frac{\gamma}{1-\alpha}\vec{c}$ . Аналогично  $\overrightarrow{DS} = \frac{\alpha}{1-\gamma}\vec{a}$ . И, наконец,

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DR} + \overrightarrow{DS}) = \frac{\alpha\gamma}{2(1-\gamma)}\vec{a} + \frac{\alpha\gamma}{2(1-\alpha)}\vec{c} = \frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)}\overrightarrow{KL}.$$

Следовательно, три точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на одной прямой, причем

$$\frac{KM}{KL} = \frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)(1-\gamma)}.$$

Заметим, что точки  $L$  и  $M$  совпадают тогда и только тогда, когда  $\alpha + \gamma = 1$ , то есть когда точка  $C$  лежит на прямой  $AB$ .

**Задача 4** (Теорема Симсона–Жергона). Отрезки, соединяющие соответственно середины противоположных сторон и середины диагоналей произвольного (в том числе невыпуклого, с самопересечением сторон или пространственного) четырехугольника, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

**Решение.** Пусть  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно, а  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  произвольного пространственного четырехугольника  $ABCD$ . Выберем базис  $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ . Для любой точки  $S_1$  прямой  $A_1C_1$  имеем  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DC_1} + m\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{DC_1} + m(\overrightarrow{C_1D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1}) = \frac{1}{2}\vec{c} + m(-\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})) = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}m(-\vec{c} + \vec{a} + \vec{b})$ .

Аналогично, для любой точки  $S_2$  прямой  $B_1D_1$  имеем  $\overrightarrow{DS_2} = \overrightarrow{DD_1} + k\overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{DD_1} + k(\overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB_1}) = \frac{1}{2}\vec{a} + k(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}(-\vec{c} + \vec{b})) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}k(-\vec{a} + \vec{c} + \vec{b})$ .

Если прямые  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  пересекаются, то существуют такие значения параметров  $m$  и  $k$ , при которых точки  $S_1$  и  $S_2$  совпадают, то есть  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DS_2}$ . Пользуясь теоремой 2, получим систему уравнений  $m = 1 - k$ ,  $m = k$ ,  $1 - m = k$ , которая имеет единственное решение  $m = k = 1/2$ . При этих значениях параметров точки  $S_1$  и  $S_2$  являются серединами отрезков  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  соответственно. Таким образом доказано, что середины отрезков  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  совпадают, причем  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DS_2} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ . Если точка  $K$  — середина отрезка  $MN$ , то

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DS_2},$$

то есть середины всех трех отрезков совпадают и задача решена. Отметим, что для плоского четырехугольника нельзя применять теорему 2, потому что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  не являются базисом плоскости, поэтому используем проведенные вычисления следующим образом. Точки  $S_1$ ,  $S_2$  при  $m = k = 1/2$  являются серединами отрезков  $A_1C_1$ ,  $B_1D_1$  и совпадают с точкой  $K$  потому, что  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DS_2} = \overrightarrow{DK}$ . Для пространственного четырехугольника условие задачи можно сформулировать короче: доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. Интересно, что эта же точка является центроидом (центром масс) тетраэдра — точкой пересечения медиан тетраэдра.

**Задача 5.** Пусть  $ABCD$  — произвольный пространственный (но не плоский) четырехугольник;  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — произвольные внутренние точки отрезков  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. Доказать, что если две прямые  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  пересекаются, то выполняется следующее равенство (“условие Чебы для четырехугольника”):

$$\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1.$$

**Решение.** Обозначим  $AA_1/A_1B = k/k_1$ ,  $BB_1/B_1C = l/l_1$ ,  $CC_1/C_1D = m/m_1$ ,  $DD_1/D_1A = n/n_1$ . Выберем базис  $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ . Для произвольной точки  $S_1$  прямой  $C_1A_1$  имеем  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DC_1} + x\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{DC_1} + x(-\overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1})$

$$= \frac{m_1}{m + m_1} \vec{c} + x \left( -\frac{m_1}{m + m_1} \vec{c} + \vec{a} + \frac{k}{k + k_1} (-\vec{a} + \vec{b}) \right).$$

Аналогично для произвольной точки  $S_2$  прямой  $B_1D_1$  имеем  $\overrightarrow{DS_2} = \overrightarrow{DD_1} + y\overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{DD_1} + y(-\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB_1})$

$$= \frac{n}{n + n_1} \vec{a} + y \left( -\frac{n}{n + n_1} \vec{a} + \vec{c} + \frac{l_1}{l + l_1} (-\vec{c} + \vec{b}) \right).$$

Если прямые  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  пересекаются, то существуют такие значения параметров  $x$  и  $y$ , для которых  $\overrightarrow{DS_1} = \overrightarrow{DS_2}$ . Применяя теорему 2, получим систему уравнений

$$x \frac{k_1}{k + k_1} = \frac{n}{n + n_1} (1 - y), \quad x \frac{k}{k + k_1} = \frac{l_1}{l + l_1} y, \quad (1 - x) \frac{m_1}{m + m_1} = \frac{l}{l + l_1} y. \quad (**)$$

Исключив  $x$  из первых двух уравнений системы (\*\*), найдем выражение

$$\frac{1}{y} = \frac{(n + n_1)k_1l_1 + (l + l_1)nk}{nk(l + l_1)},$$

анализируя которое, получим неравенство  $0 < y < 1$ . Такое же неравенство  $0 < x < 1$  можно получить и для  $x$ . Из последних двух уравнений системы (\*\*) найдем

$$\frac{1}{y} = \frac{(k + k_1)m_1l_1 + (m + m_1)kl}{km_1(l + l_1)}.$$

Приравнявая два выражения для  $1/y$ , после упрощений получим равенство  $nk_1l_1m = n_1k_1l_1m_1$ , равносильное “условию Чебы для четырехугольника”. Задача решена. Неравенства  $0 < x < 1$  и  $0 < y < 1$  означают, что точка пересечения прямых  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$  должна принадлежать отрезкам  $A_1C_1$  и  $B_1D_1$ . Заметим, что для плоского четырехугольника выбранные три вектора не являются базисом, поэтому нельзя применять теорему 2 и выполнение “условия Чебы для четырехугольника” не является обязательным.

**Задача 6** (вариация задачи М433, “Квант”, 1977, №3). В пространстве расположены пять различных точек  $A, B, C, D$  и  $E$  так, что  $BC \parallel AD$ ,  $CD \parallel BE$ ,  $DE \parallel AC$  и  $AE \parallel BD$ . Доказать, что  $AB \parallel CE$ .

**Решение.** Так как  $BC \parallel AD$ , то четыре точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат в одной плоскости. Точка  $E$  принадлежит этой же плоскости  $BCD$ , потому что  $CD \parallel BE$ . Следовательно, все пять точек  $A, B, C, D$  и  $E$  лежат в одной плоскости. Если все пять точек лежат на одной прямой, то утверждение задачи ( $AB \parallel CE$ ) справедливо. Теперь рассмотрим случай, когда какие-либо три точки, например,  $B, C$  и  $D$  не лежат на одной прямой. Выберем в качестве базиса векторы  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ . Запишем в векторном виде условия параллельности прямых:  $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BE} = l\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{AE} = n\overrightarrow{BD}$ . Выразим вектор  $\overrightarrow{AB}$  через векторы базиса тремя различными способами:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = n\overrightarrow{BD} - l\overrightarrow{CD} = n\overrightarrow{BD} - l(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = l\overrightarrow{BC} + (n-l)\overrightarrow{BD}, \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = m\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BC} = m(-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}) - \overrightarrow{BC} = m(-\overrightarrow{BD} + l\overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{BC} = \\ &= m(-\overrightarrow{BD} + l(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})) - \overrightarrow{BC} = -(ml+1)\overrightarrow{BC} + m(l-1)\overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 1, получим систему четырех уравнений

$$k = l = -ml - 1, \quad n - l = -1 = ml - m,$$

которая имеет два решения:

$$k = l = -m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad k = l = -m = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Других решений нет. Выразим вектор  $\overrightarrow{CE}$  через базисные векторы:

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} - l\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{BD} = -(l+1)\overrightarrow{BC} + l\overrightarrow{BD}.$$

Так как  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = l\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$  и  $-(l+1)/l = l/(-1) = -l$  при  $l = (\pm\sqrt{5}+1)/2$ , то  $\overrightarrow{CE} = -l\overrightarrow{AB}$  и задача решена.

Оба полученных решения алгебраической системы уравнений реализуются геометрически: первое — для правильного пятиугольника  $ABCDE$ , второе — для правильного пятиугольника  $ADBEC$ . Построим неправильный пятиугольник, удовлетворяющий всем условиям задачи. Для этого выберем три произвольные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащие на одной прямой, например, так:  $AB = 1$ ,  $BC = 2$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ . Построим  $\overrightarrow{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{BA}$ . Тогда пятиугольник  $ABCDE$  — искомый (проверку предоставляем читателю). Другое решение этой задачи есть в книге Прасолова В.В. “Задачи и теоремы по планиметрии”, ч. 2, стр. 9, 16, №13.10 (второе издание, М.: Наука, 1991).

Следующие три задачи предлагались в разные годы на вступительных экзаменах в Новосибирский государственный университет.

**Задача 7** (НГУ, 2001 г., ММФ). В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$ , у которой отношение основания  $AB$  к основанию  $CD$  равно 2:3. Точки  $K, L, M, N$  лежат на ребрах  $SA, SB, SC, SD$  соответственно. Известно, что  $SM = MC$ ,  $SK : KA = 3 : 2$ , отрезки  $KN$  и  $LM$  параллельны. Найти длину отрезка  $KN$ , если  $LM = 5$ .

**Решение.** Выберем в качестве базиса векторы  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$  и  $\vec{s} = \overrightarrow{AS}$ . Имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KN} &= \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{SN} = \frac{3}{5}\vec{s} + t(-\vec{s} + \vec{d}) = (\frac{3}{5} - t)\vec{s} + t\vec{d}, \\ \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{LS} + \overrightarrow{SM} = m\overrightarrow{BS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = m(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \\ &= m(-\vec{b} + \vec{s}) + \frac{1}{2}(-\vec{s} + \vec{d} + \frac{3}{2}\vec{b}) = (-m + \frac{3}{4})\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} + (m - \frac{1}{2})\vec{s}.\end{aligned}$$

Из условия задачи  $\overrightarrow{KN} = n\overrightarrow{LM}$ . Применяя теорему 2, получим систему уравнений  $n(-m + \frac{3}{4}) = 0$ ,  $\frac{1}{2}n = t$ ,  $n(m - \frac{1}{2}) = \frac{3}{5} - t$ . Отсюда  $m = \frac{3}{4}$ ,  $n = \frac{4}{5}$ . Следовательно  $KN = 4$ .

**Задача 8** (НГУ, 2002 г., ММФ). В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с основанием  $ABCD$  и боковыми ребрами  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  точки  $M, N, F, G$  — середины ребер  $A_1 B_1, CC_1, AD$  и  $CD$  соответственно. Плоскость  $FB_1 D_1$  пересекает отрезок  $MN$  в точке  $K$ , а плоскость  $GB_1 D_1$  — в точке  $L$ . Найти отношение  $MK : KL : LN$ .

**Решение.** Выберем в качестве базиса векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$  и  $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ . Имеем  $\overrightarrow{MK} = t\overrightarrow{MN} = t(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{C_1 N}) = t(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a})$ , с другой стороны

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{B_1 K} = \overrightarrow{MB_1} + k\overrightarrow{B_1 D_1} + m\overrightarrow{D_1 F} =$$

$$= \frac{1}{2} \vec{b} + k(\vec{d} - \vec{b}) + m(-\vec{a} - \frac{1}{2} \vec{d}) = -m \vec{a} + (\frac{1}{2} - k) \vec{b} + (k - \frac{1}{2}m) \vec{d}.$$

Из этих двух выражений вектора  $\overrightarrow{MK}$ , пользуясь теоремой 2, получим систему уравнений:  $-m = -\frac{1}{2}t$ ,  $\frac{1}{2} - k = \frac{1}{2}t$ ,  $k - \frac{1}{2}m = t$ . Отсюда  $t = MK/MN = 2/7$ . Аналогично вычислим  $ML/MN = 2/5$ . И окончательно находим ответ  $10 : 4 : 21$ .

**Задача 9** (НГУ, 2008 г., ММФ). В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Точки  $K, L, M, N$  расположены соответственно на ребрах  $AB, AD, SB, SC$  так, что  $AK = KB, AL = LD, SM = 2BM$  и прямая  $LN$  параллельна плоскости  $DKM$ . Найти отношение  $SN : NC$ .

**Решение.** В качестве базиса пространства выберем векторы  $\vec{a} = \overrightarrow{BA}, \vec{c} = \overrightarrow{BC}, \vec{s} = \overrightarrow{BS}$ . В качестве базиса плоскости  $DKM$  возьмем векторы  $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$  и  $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{s}$ . Выразим двумя различными способами вектор  $\overrightarrow{BN}$ . Так как точка  $N$  принадлежит ребру  $SC$ , то  $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BS} + x\overrightarrow{SC} = \vec{s} + x(-\vec{s} + \vec{c}) = x\vec{c} + (1-x)\vec{s}$ . Кроме того, прямая  $LN$  параллельна плоскости  $DKM$ , поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} + y\overrightarrow{KD} + z\overrightarrow{KM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + y(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}) + z(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{s}) = \\ &= (1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)\vec{a} + (\frac{1}{2} + y)\vec{c} + \frac{1}{3}z\vec{s}. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 2, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0, \quad x = \frac{1}{2} + y, \quad 1 - x = \frac{1}{3}z.$$

Отсюда находим  $x = 3/8$ , следовательно  $SN : NC = x/(1-x) = 3/5$ .

На примере решения приведенных задач показана сила и универсальность векторного метода. Аппарат векторной алгебры оказывается удобным и плодотворным при решении не только геометрических задач, но и задач физики, техники и даже экономики.

Астапов Николай Степанович,  
доцент кафедры высшей математики  
механико-математического факультета НГУ,  
кандидат физ.-мат. наук.

Email: nika@hydro.nsc.ru

# О наибольшем периметре выпуклого пятиугольника заданного диаметра

Ф. Л. Варнаховский, О. С. Логвиненко

В заметке рассмотрена задача о наибольшем периметре выпуклого 5-угольника заданного диаметра. Показано, что решением является правильный 5-угольник. Материал статьи можно рекомендовать для изучения в профильных старших классах, а также для факультативных занятий.

В настоящей заметке рассмотрен частный случай общей задачи о наибольшем периметре выпуклого  $n$ -угольника заданного диаметра. Естественно было бы ожидать, что максимальный периметр достигается в случае правильного  $n$ -угольника, но для  $n = 4$  это не так. Действительно, ясно, что существует выпуклый четырехугольник, содержащий правильный треугольник диаметра  $d$ , периметр которого поэтому больше  $3d$ , тогда как периметр квадрата диаметра  $d$  равен  $2\sqrt{2}d$ . В связи с этим интересно выяснить, как обстоит дело в случае  $n = 5$ .

Введем следующее определение.

**Определение.** Выпуклый многоугольник диаметра 1 будем называть *оптимальным*, если его периметр больше периметра любого другого выпуклого многоугольника диаметра 1.

**Теорема 1.** Все стороны оптимального пятиугольника меньше 1.

**Доказательство.** Пусть сторона  $FT$  рассматриваемого пятиугольника  $FPMNT$  равна 1. Для доказательства проверим, что периметр  $p$  пятиугольника  $FPMNT$  меньше периметра правильного пятиугольника диаметра 1.

Проведем две окружности  $\omega(T, FT)$ ,  $\gamma(F, FT)$ <sup>1</sup>.

Очевидно, что вершины  $P, M, N$  пятиугольника будут лежать в области, ограниченной окружностями  $\omega$  и  $\gamma$  и стороной  $FT$  (рис. 1).

Пусть хотя бы одна из прямых  $PM$  и  $MN$  пересекает дуги обеих окружностей  $\omega, \gamma$ .

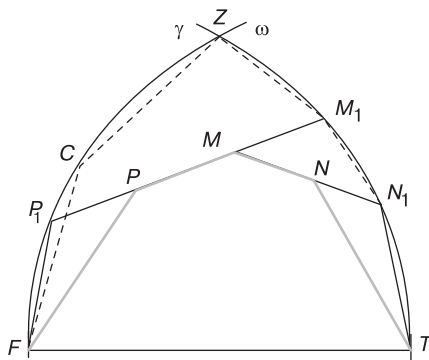


Рис. 1.

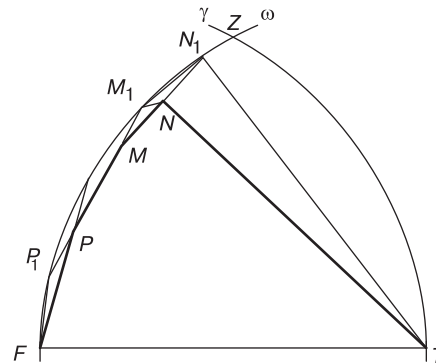


Рис. 2.

Из рис. 1 видно, что периметр  $p$  рассматриваемого пятиугольника  $FPMNT$  меньше периметра шестиугольника  $FCZM_1N_1T$ , где  $C$  — середина дуги  $FP_1Z$ , так как сумма расстояний от точки дуги окружности до ее концов принимает наибольшее значение, когда эта точка делит дугу пополам.

Таким образом, получаем:  $p < 4 \sin 15^\circ + 1 + \frac{\pi}{3} \approx 3,082$ .

Периметр правильного пятиугольника единичного диаметра равен  $10 \sin 18^\circ \approx 3,090$ , откуда следует, что пятиугольник  $FPMNT$  не является оптимальным.

Случай, когда обе прямые  $PM, MN$  пересекают дугу только одной из окружностей  $\omega, \gamma$ , рассматривается аналогично (рис. 2),

$$p < FP_1 + P_1M_1 + M_1N_1 + 1 + 1 < \frac{\pi}{3} + 1 + 1 \approx 3,047.$$

<sup>1</sup>Т.е. окружность с центром  $T$  радиуса  $FT$  и с центром  $F$  радиуса  $FT$  — прим. ред.

Теорема доказана.

**Теорема 2.** В оптимальном пятиугольнике по крайней мере три диагонали равны 1.

**Доказательство.** В силу теоремы 1 одна из диагоналей оптимального пятиугольника равна 1. Пусть в пятиугольнике  $FPMNT$  (рис. 3)  $PT = 1$ .

Проведем две окружности:  $\omega(T, PT = 1)$  и  $\gamma(P, PT = 1)$ . Ясно, что все вершины пятиугольника будут являться внутренними или граничными точками области, ограниченной окружностями  $\omega, \gamma$ . При этом одна из вершин  $M, N, F$  лежит по одну сторону от диагонали  $PT$ , а две другие — по другую.

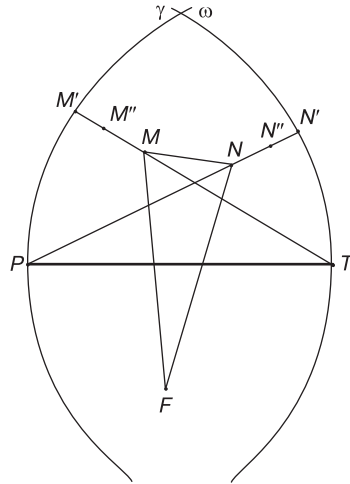


Рис. 3.

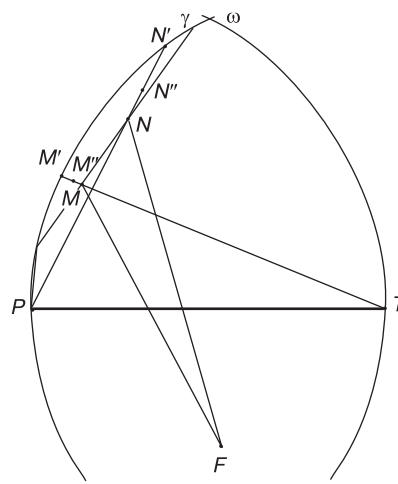


Рис. 4.

Рассмотрим первый случай, когда прямая  $MN$  пересекает дуги обеих окружностей  $\omega$  и  $\gamma$ .

Допустим, что диагональ  $FM < 1$  и точка  $M$  отлична от точки  $M'$ . Тогда, сместив точку  $M$  в близкую точку  $M''$  вдоль прямой  $TM'$ , мы получили бы пятиугольник большего периметра, т. е. пятиугольник  $FPMNT$  не был бы оптимальным.

Можно поэтому считать, что у оптимального пятиугольника хотя бы одна из диагоналей  $FM, TM'$  равна 1.

Аналогично, хотя бы одна из диагоналей  $FN, PN'$  равна 1.

Точно так же рассматривается второй случай, когда прямая  $MN$  пересекает только одну из окружностей  $\omega, \gamma$  (рис. 4). В этом случае точка  $N$  является внутренней, поскольку у оптимального пятиугольника никакая сторона не может быть равна 1. Теорема доказана.

**Теорема 3.** В оптимальном пятиугольнике по крайней мере четыре диагонали равны 1.

**Доказательство.** В силу теоремы 2 три диагонали пятиугольника равны единице, при этом возможны два случая:

- 1) Две из этих трех диагоналей имеют общую вершину, но не имеют общих вершин с третьей.
- 2) Одна из двух диагоналей с общей вершиной имеет общую вершину с третьей.

Рассмотрим первый случай. На рис. 5 представлен пятиугольник  $MNTFP$ , в котором  $FM = FN = TP = 1$ .

Проведем три окружности  $\gamma(N, NF = 1)$ ,  $\omega(M, MF = 1)$ ,  $\varphi(F, FM = FN = 1)$ . Обозначим точки пересечения окружностей  $\varphi$  и  $\omega$  через  $L$ , а окружностей  $\varphi$  и  $\gamma$  — через  $K$ .

Ясно, что вершины  $P$  и  $T$  пятиугольника, с одной стороны, будут лежать по разные стороны от сторон  $FM$  и  $FN$ , вне треугольника  $MNF$ , т. к. пятиугольник выпуклый, а с другой стороны, должны лежать в области, ограниченной окружностями  $\gamma, \omega$  и  $\varphi$  (соответствующие две области затусеваны на рис. 5). При этом точка  $P$  не может лежать на дуге  $MK$ , а точка  $T$  не может лежать на дуге  $NL$ , так как в противном случае мы получили бы, что сторона пятиугольника равна 1, а это невозможно ввиду теоремы 1.

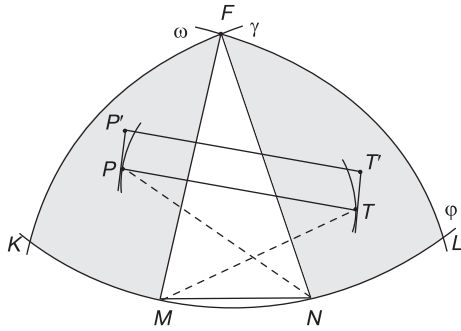


Рис. 5.

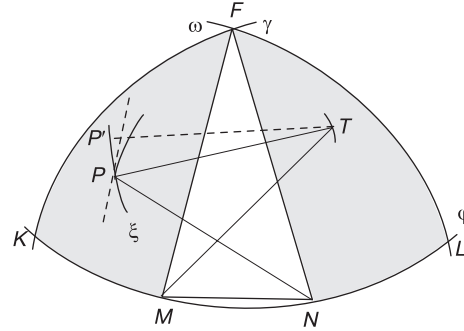


Рис. 6.

Допустим, что  $NP < 1$  и  $MT < 1$ . Проведем два эллипса:

$l_1$  с фокусами  $M, F$ , проходящий через точку  $P$ ;

$l_2$  с фокусами  $N, F$ , проходящий через точку  $T$ .

При этом возможны два случая:

а) обе касательные в точке  $P$  и в точке  $T$  соответственно к эллипсам  $l_1$  и  $l_2$  перпендикулярны отрезку  $PT$ .

Сместим отрезок  $PT$  параллельно самому себе вдоль касательных  $PP'$  и  $TT'$  на столь малое расстояние, что точки  $P'$  и  $T'$  останутся в соответствующих областях, а длины диагоналей  $NP'$  и  $MT'$  будут по-прежнему меньше 1. При этом периметр пятиугольника  $MP'FT'N$  будет больше периметра исходного пятиугольника  $MPFTN$ .

Но тогда пятиугольник  $MPFTN$  не был бы оптимальным. Значит, по меньшей мере одна из диагоналей  $NP, MT$  равна 1.

б) Одна из касательных в точке  $P$  или в точке  $T$  к эллипсам  $l_1$  и  $l_2$  соответственно не перпендикулярна отрезку  $PT$ .

Допустим, что касательная в точке  $P$  к эллипсу  $l_1$  не перпендикулярна отрезку  $PT$ . Проведем окружность  $\xi$  с центром в точке  $T$  и радиусом  $PT = 1$  (рис. 6).

Сместим точку  $P$  по дуге окружности  $\xi$ , в близкую точку  $P'$ , лежащую вне эллипса. При этом длина  $PT$  не изменится, а расстояние  $PP'$  можно взять настолько малым, что точка  $P'$  также будет внутренней точкой рассматриваемой области. А это значит, что диагональ  $NP'$  не станет больше 1. Периметр полученного таким образом пятиугольника  $MP'FTN$  будет больше периметра исходного пятиугольника  $MPFTN$ . Но это противоречит тому, что пятиугольник  $MPFTN$  — оптимальный.

Таким образом, в оптимальном пятиугольнике по крайней мере одна из диагоналей  $NP$  и  $MT$  равна единице.

Теперь рассмотрим второй случай. На рис. 7 представлен пятиугольник  $MPFTN$ , в котором  $TP = MT = NP = 1$ .

Предположив, что  $NF < 1$  и  $MF < 1$  и заменив точку  $F$  близкой точкой  $F'$ , мы получим, что периметр пятиугольника  $MPF'TN$  больше периметра исходного пятиугольника  $MPFTN$ .

Но тогда пятиугольник  $MPFTN$  не был бы оптимальным.

Таким образом, в оптимальном пятиугольнике по крайней мере одна из диагоналей  $NF, MF$  равна единице. Теорема доказана.



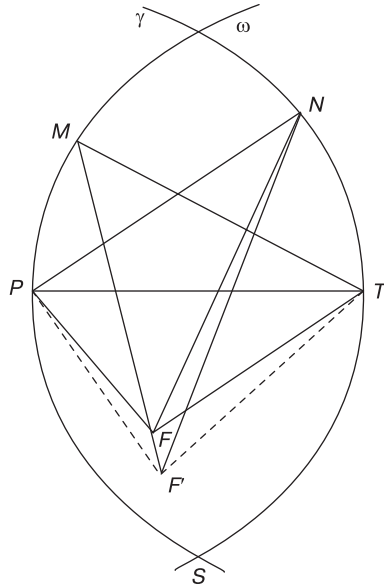


Рис. 7.

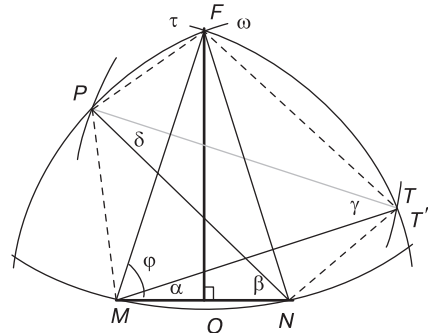


Рис. 8.

**Теорема 4.** *Оптимальным пятиугольником является правильный пятиугольник.*

**Доказательство.** Рассмотрим пятиугольник  $MPFTN$ , у которого четыре диагонали равны 1 (по теореме 3 только такой пятиугольник может быть оптимальным).

Пусть  $PN = MT = FM = FN = 1$ ,  $PT = c$  (рис. 8).

Положим  $\angle FMN = \angle FNM = \varphi$ ,  $\angle TMN = \alpha$ ,  $\angle PNM = \beta$ ,  $\angle NPT = \delta$ ,  $\angle PTM = \gamma$ ,  $FO \perp MN$ . Нетрудно показать, что периметр  $p$  пятиугольника  $MPFTN$  равен:

$$p = 2 \cos \varphi + 2 \sin \frac{\varphi - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sqrt{(c-1)^2 + 4c \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{(c-1)^2 + 4c \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $c = 1$ , т. е. все диагонали пятиугольника равны 1. В этом случае

$$\begin{aligned} p &= 2 \cos \varphi + 4 \sin \frac{\gamma + \delta}{4} \cos \frac{\gamma - \delta}{4} + 4 \sin \frac{2\varphi - (\alpha + \beta)}{4} \cos \frac{\beta - \alpha}{4} \leq \\ &\leq 2 \cos \varphi + 4 \sin \frac{\gamma + \delta}{4} + 4 \sin \frac{2\varphi - (\alpha + \beta)}{4} = 2 \cos \varphi + 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{4} + 4 \sin \frac{2\varphi - (\alpha + \beta)}{4} = \\ &= 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi - (\alpha + \beta)}{4} \leq 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4}, \end{aligned}$$

так как  $\beta + \alpha = \delta + \gamma$ . Исследуем функцию  $g(\varphi) = 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4}$ .

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= -2 \sin \varphi + 2 \cos \frac{\varphi}{4} = 2 \left( \sin(-\varphi) + \sin \left( 90^\circ - \frac{\varphi}{4} \right) \right) = \\ &= 4 \sin \left( 45^\circ - \frac{5}{8} \varphi \right) \cos \left( \frac{3}{8} \varphi + 45^\circ \right). \end{aligned}$$

Так как  $2 \cos \varphi < 1$ , то  $\cos \varphi < 1/2$ ,  $\varphi > 60^\circ$ .

Значит  $60^\circ < \varphi < 90^\circ$ , и мы получаем, что  $67,5^\circ < \frac{3}{8} \varphi + 45^\circ < 78,75^\circ$ . Последнее неравенство означает, что  $(\frac{3}{8} \varphi + 45^\circ)$  — угол первой четверти, т. е.  $\cos(\frac{3}{8} \varphi + 45^\circ) > 0$ .

$$\sin \left( \frac{90^\circ - \frac{5}{4} \varphi}{2} \right) \begin{cases} < 0 & \text{при } \frac{5}{4} \varphi > 90^\circ, \text{ т. е. } \varphi > 72^\circ, \\ = 0 & \text{при } \frac{5}{4} \varphi = 90^\circ, \text{ т. е. } \varphi = 72^\circ, \\ > 0 & \text{при } \frac{5}{4} \varphi < 90^\circ, \text{ т. е. } \varphi < 72^\circ. \end{cases}$$

Поэтому  $p \leq 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4} \leq 2 \cos 72^\circ + 8 \sin 18^\circ$ .

Таким образом, в случае  $c = 1$  периметр пятиугольника не превосходит периметра правильного пятиугольника.

Рассмотрим теперь случай, когда  $c < 1$ .

Проведем эллипсы через точки  $P$  и  $T$  с фокусами соответственно в точках  $F, M$  и  $F, N$ . Пусть хотя бы один эллипс пересекает соответствующую дугу  $\omega$  или  $\tau$  (рис. 8). Пусть, например, эллипс, проведенный через точку  $T$ , пересекает дугу  $\tau$ . Тогда, сместив вершину  $T$  в близкую точку  $T'$  дуги  $FT$ , мы получим пятиугольник большего периметра.

Остается, следовательно, проверить случай, когда оба эллипса касаются соответствующих дуг. Но из геометрических соображений ясно, что существует не более одной точки дуги  $\tau$ , в которой соответствующий эллипс касается этой дуги внешним образом (рис. 9). Тем же свойством обладает симметричная точка дуги  $\omega$ . Поэтому, если оба эллипса касаются соответствующих дуг, то  $\alpha = \beta$ . Оценим периметр пятиугольника в этом случае.

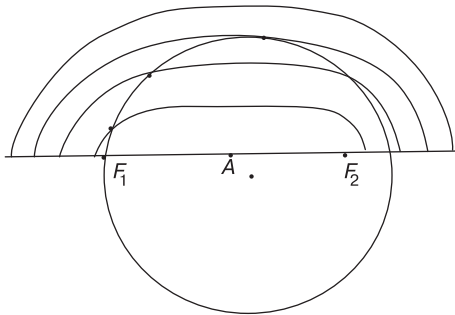


Рис. 9.

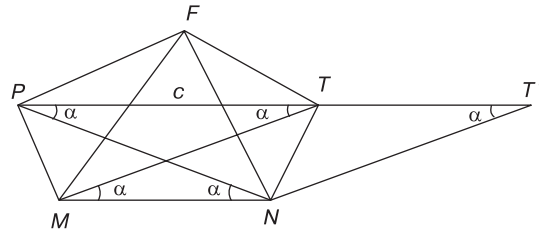


Рис. 10.

Так как  $\alpha = \beta$  имеем, что  $PT \parallel MN$ , откуда  $\gamma = \alpha$ ,  $\delta = \alpha$  (рис. 10). Ввиду этого, несложно показать, что  $c = 2 \cos \alpha - 2 \cos \varphi$ ,  $p = 2\sqrt{1 - 2c \cos \varphi} + 4 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} + 2 \cos \varphi$ .

Докажем неравенство  $\sqrt{1 - 2c \cos \varphi} < 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 1 - 2c \cos \varphi - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - 2c \cos \varphi - 2(1 - \cos \alpha) = 1 - 2c \cos \varphi - 2\left(1 - \left(\frac{c}{2} + \cos \varphi\right)\right) = \\ &= 1 - 2c \cos \varphi - 2 + c + 2 \cos \varphi = -1 + c + 2 \cos \varphi(1 - c) = (1 - c)(-1 + 2 \cos \varphi) < 0, \end{aligned}$$

так как  $c < 1$ ,  $(1 - c) > 0$  и  $2 \cos \varphi - 1 < 0$ ,  $\varphi > 60^\circ$ . Таким образом:

$$1 - 2c \cos \varphi < 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \text{ т. е. } \sqrt{1 - 2c \cos \varphi} < 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} p &= 2 \cos \varphi + 2\sqrt{1 - 2c \cos \varphi} + 4 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} < 2 \cos \varphi + 4 \sin \frac{\alpha}{2} + 4 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} = \\ &= 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4} \cos \frac{\varphi - 2\alpha}{4} \leq 2 \cos \varphi + 8 \sin \frac{\varphi}{4} \leq 2 \cos 72^\circ + 8 \sin 18^\circ. \end{aligned}$$

Иначе говоря, периметр пятиугольника  $MPFTN$  и в этом случае меньше периметра правильного пятиугольника. Теорема доказана.

Вопрос о том, каким является оптимальный  $n$ -угольник при  $n > 5$ , остается открытым.

Варпаховский Федор Леонидович,  
доцент кафедры алгебры, геометрии и методики  
их преподавания математического факультета МГПУ.  
Email: varpah@ya.ru

Логвиненко Оксана Сергеевна,  
учитель математики и информатики  
ГОО СОШ №307 г. Москвы.  
Email: noli\_k@mail.ru

# Продолжение исследования одного неравенства с радикалом

Туан Ле

В статье "Simple trigonometric substitutions with broad results", Mathematical Reflection, 2009, выпуск 6, в разделе "Problem for Independent Study" авторы С. Daniel и V. Verdan привели интересную задачу о неравенстве, предложенную Bui Viet Anh. Подразумевается, что ее решение может быть основано на тригонометрическом подходе. В настоящей статье снова рассматривается эта задача, но с другой точки зрения. В частности, представлены два других решения задачи, каждое из которых опирается на некоторое преобразование и неравенство Шура. Затем проводится дальнейшее исследование и предлагается несколько возможных обобщений задачи. Наконец, показано, что обобщенное неравенство можно применить для вывода ряда сложных неравенств.

## 1. Введение

Неравенства — сложная, но интересная тема, которая часто появляется в задачах математических олимпиад. Если к алгебраическим неравенствам с частями в виде многочленов имеется общий подход на основе неравенства Шура, то неравенства с частями в виде радикалов, вообще говоря, труднее. В статье [1] автор предлагает следующую интересную задачу и ее решение, использующее тригонометрический метод:

Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}} \geq 2.$$

Тригонометрический подход является разумным для работы с подобного рода задачами. Он возникает достаточно естественно, поскольку многие тригонометрические выражения можно представить в виде радикалов от алгебраических выражений. В настоящей статье мы представляем два других решения этой задачи, использующих специальное преобразование исходного неравенства, с применением затем к преобразованному неравенству неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим (СА-СГ) и неравенства Шура. Обратимся к этим решениям.

**Решение 1.** Сначала, применяя неравенство СА-СГ к каждому множителю выражения  $(a+b)(b+c)(c+a)$ , мы получаем:

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8}.$$

Используя эту оценку, мы видим, что выполнено следующее неравенство:

$$2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}} \geq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Значит, теперь достаточно показать, что:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Умножив обе части на  $(a+b)(b+c)(a+c)$  и сократив одинаковые члены с обеих сторон, мы приходим к:

$$(a+b+c)^3 - 4(a+b+c)(ab+bc+ac) + 9abc \geq 0.$$

Полученное выше неравенство есть *неравенство Шура степени 3*.

Равенство имеет место в случае  $a = 0$ ,  $b = c$ , а также при всех возможных перестановках указанных связей.

**Решение 2.** Обозначим  $a + b + c = p$ ,  $ab + bc + ac = q$  и  $abc = r$ . Перепишав формулу от  $a, b, c$  в терминах  $p, q, r$ , мы получим:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{p^3 - 2pq + 3r}{pq - r}, \quad 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}} = 2\sqrt{\frac{r}{pq - r}}.$$

Мы пропустим проверку двух написанных выше тождеств и будем считать, что они верны. С их учетом левую часть можно переписать следующим образом:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}} = \frac{p^3 - 2pq + 3r + 2\sqrt{r(pq - r)}}{pq - r}.$$

А тогда исходное неравенство равносильно следующему:

$$p^3 - 4pq + 9r + 2\sqrt{r(pq - r)} - 4r \geq 0.$$

Теперь мы снова используем *неравенство Шура степени 3*, но не совсем прямо. В терминах  $p, q, r$  вместо  $a, b, c$  оно имеет вид:

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$2\sqrt{r(pq - r)} - 4r \geq 0. \quad (*)$$

Применяя неравенство СА-СГ, получаем:

$$r(pq - r) \geq 8r.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей и умножая обе части на 2, имеем:

$$2\sqrt{r(pq - r)} \geq 4r\sqrt{2} \geq 4r.$$

Таким образом, неравенство (\*) верно.

Равенство имеет место при  $a = 0$ ,  $b = c$ , а также при всех возможных перестановках указанных связей.

## 2. Обсуждение

Заметим, что наше неравенство, хотя оно совершенно симметрично, не обращается, как обычно, в равенство при  $a = b = c$ , но обращается в равенство при  $a = 0$ ,  $b = c$ . Также, изучая решение 2, мы можем понять, что постоянная 2 не является наиболее точной постоянной для этого неравенства. Действительно, можно доказать следующее более точное неравенство:

**Задача 1.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа. Докажите, что:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2.$$

**Решение.** Применяя тот же метод, что и в рассмотренном выше решении 1, мы видим, что достаточно показать:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2,$$

что уже сделано выше в решении 1.

Равенство имеет место при  $a = 0$ ,  $b = c$ , а также при всех возможных перестановках указанных связей.

### 3. Обобщения

На основе рассмотренных выше случаев мы можем записать следующее более общее неравенство, которое облегчит нам исследование задачи нахождения наиболее точных констант, при которых неравенство выполняется:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^k \geq 2,$$

где одна из констант  $u$  или  $k$  положительна.

Мы подойдем к этой общей задаче по трем различным направлениям: фиксируя  $k$ , фиксируя  $u$  и фиксируя  $u$  и  $k$  вместе. В первых двух случаях мы зафиксируем правую часть равной 2 и будем изучать задачу “нахождения наилучшего значения  $u$  или  $k$ ”. Кроме того, мы будем искать наименьшее значение выражения, когда оба  $u$  и  $k$  являются постоянными, — это конечная цель нашей работы. Из первого направления возникает следующая задача:

**Задача 3.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа и  $u = \text{const} \geq \frac{1}{2}$ . Найти максимальное значение  $k$ , при котором всегда верно следующее неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^k \geq 2.$$

**Решение.** Заметим, что при  $k > 1$  написанное выше неравенство не выполняется, если  $b = c = 1$ , и  $a$  стремится к 0. Действительно, в этом случае имеем:

$$\frac{a}{2} + \frac{2}{1+a} + u \left( \frac{a}{2(1+a)^2} \right)^k \geq 2,$$

что равносильно

$$u \left( \frac{a}{2(1+a)^2} \right)^k \geq \frac{a(3-a)}{2a+2}.$$

Поскольку при  $a \in (0, 1)$  верно неравенство  $\frac{a(3-a)}{2a+2} > \frac{a}{2}$ , приходим к следующему неравенству:

$$u \left( \frac{a}{2(1+a)^2} \right)^k > \frac{a}{2}.$$

Разделив обе части на  $\left( \frac{a}{2(1+a)^2} \right)^k$ , мы получим нижнюю оценку для  $u$ :

$$u > \frac{\left( 2(1+a)^2 \right)^k}{2a^{k-1}}.$$

Когда  $a$  стремится к 0, правая часть стремится к бесконечности, поскольку  $k > 1$ . Значит, неравенство не может выполняться при всех  $a$ , так как  $u$  — постоянное число.

Итак, в этом случае неравенство не выполняется. Поэтому максимальное значение  $k$ , если оно существует, должно находиться в промежутке  $(0, 1]$ .

**2-й случай:**  $k \in (0, 1]$ .

**Утверждение.** Если  $u \geq 4$ , то  $k = 1$  — максимальное значение, при котором неравенство выполняется. Если же  $u < 4$ , то  $k = \frac{\log 2u}{\log 8}$  — максимальное значение, при котором неравенство выполняется.

**Решение в случае  $u \geq 4$ .** Максимальное  $k$ , как утверждается выше, равно 1. Чтобы это доказать, мы используем тот же самый метод, что и в решении 1 в начале статьи. Итак, достаточно показать, что верно следующее неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geq 2,$$

что уже сделано выше.

Равенство имеет место при  $a = 0, b = c$ , а также при всех возможных перестановках указанных связей. Таким образом, при  $u \geq 4$  наше утверждение верно.

**Решение в случае  $u < 4$ .** Максимальное значение  $k$  равно  $\frac{\log 2u}{\log 8}$ . Чтобы это показать, мы используем тот же метод, что и во втором решении. Значит, нам надо только доказать, что верно следующее неравенство:

$$p^3 - 2pq + 3r + ur^{\frac{\log 2u}{\log 8}} (pq - r)^{1 - \frac{\log 2u}{\log 8}} \geq 2(pq - r).$$

Перепишем его в виде:

$$p^3 - 4pq + 9r + ur^{\frac{\log 2u}{\log 8}} (pq - r)^{1 - \frac{\log 2u}{\log 8}} - 4r \geq 0. \quad (*)$$

Поскольку  $1 - \frac{\log 2u}{\log 8} \geq 0$ , применяя неравенство СА-СГ к  $pq$  и учитывая, что  $u \geq 1/2$ , мы получим:

$$ur^{\frac{\log 2u}{\log 8}} (pq - r)^{1 - \frac{\log 2u}{\log 8}} \geq ur^{\frac{\log 2u}{\log 8}} (8r)^{1 - \frac{\log 2u}{\log 8}} = 4r.$$

Кроме того, верно, что  $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$ , в силу *неравенства Шура степени 3*. Поэтому (\*) верно.

Равенство имеет место при  $a = b = c$  или  $a = 0, b = c$ , а также при всех возможных перестановках указанных связей.

Тем самым, завершено изучение задачи 3.

Теперь посмотрим на приведенное выше общее выражение со второй точки зрения, что сформулировано в следующей задаче:

**Задача 4.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа, а  $k$  — фиксированная положительная постоянная из промежутка  $(0, 1]$  (поскольку мы уже показали выше, что неравенство не всегда верно при  $k > 1$ ). Найти минимальное значение  $u$ , такое что всегда верно следующее неравенство:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \right]^k \geq 2.$$

**Решение.** Рассмотрим случай равенства  $a = b = c$ . Получим оценку снизу:  $u \geq 2^{3k-1}$ . Мы покажем, что величина в правой части и есть наилучшее (минимальное) значение  $u$ . Действительно, надо только проверить, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2^{3k-1} \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \right]^k \geq 2.$$

Используя тот же метод, что и во втором решении в начале статьи, можно переписать неравенство следующим образом:

$$p^3 - 2pq + 3r + 2^{3k-1} r^k (pq - r)^{1-k} \geq 2(pq - r). \quad (**)$$

Применяя неравенство СА-СГ к  $pq$ , имеем:

$$2^{3k-1} r^k (pq - r)^{1-k} \geq 2^{3k-1} r^k (8r)^{1-k} = 4r,$$

поскольку  $1 - k \geq 0$ . Кроме того, неравенство  $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$  тоже верно в силу *неравенства Шура степени 3*. Сложив два эти неравенства, мы получим (\*\*).

Равенство имеет место, когда  $a = b = c$  или  $a = 0, b = c$ .

Теперь перейдем к третьей точке зрения на различные виды нашего неравенства, которая приведет нас к интересному минимальному значению общего выражения:

**Задача 5.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные целые числа,  $u$  и  $k$  — положительные постоянные. Найти минимальное значение следующего выражения:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^k.$$

**Решение.** Рассматривая предыдущие решения для двух предыдущих видов общего неравенства, мы видим, что имеет место скачкообразное изменение значения левой части, когда  $k$  становится больше 1. Поэтому важно рассмотреть минимальное значение этого общего выражения в следующих двух случаях:

**Случай 1:**  $k \leq 1$ .

**Утверждение.** Минимум в этом случае равен:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \frac{u}{8^k} & \text{ при } u \in (0, 2^{3k-1}) \text{ и } a = b = c, \\ 2, & \text{ при } u \in [2^{3k-1}, \infty) \text{ и } a = 0, b = c. \end{aligned}$$

**Доказательство утверждения.** Сначала покажем, что минимум равен  $\frac{3}{2} + \frac{u}{8^k}$ , если  $u \in (0, 2^{3k-1})$ . Действительно, поскольку  $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8}$  по неравенству СА-СГ, имеем:

$$u \left( \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right)^k \geq \frac{u 8^{1-k} abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Осталось только проверить, что:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{u 8^{1-k} abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{2} + \frac{u}{8^k}.$$

Используя тот же метод, что и во втором решении в начале статьи, мы должны только доказать, что:

$$8^k(p^3 - 4pq + 9r) + pq(2^{3k-1} - u) - r(9 \cdot 2^{3k-1} - 9u) \geq 0.$$

Применяя неравенство СА-СГ к  $pq$ , имеем:

$$pq(2^{3k-1} - u) - r(9 \cdot 2^{3k-1} - 9u) \geq 9r(2^{3k-1} - u) - r(9 \cdot 2^{3k-1} - 9u) = 0.$$

Более того,  $8^k(p^3 - 4pq + 9r) \geq 0$  по *неравенству Шура степени 3*. Из этих двух неравенств мы заключаем, что исходное неравенство верно.

Равенство имеет место при  $a = b = c$ .

Наконец, покажем, что минимум равен 2, если  $u \in [2^{3k-1}, \infty)$ .

Для этого применим тот же метод, что и в первом решении в начале статьи. С его помощью получим, что следующее неравенство, очевидно, верно:

$$u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^k \geq \frac{2^{3k-1} 8^{1-k} abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Поэтому достаточно показать, что:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2,$$

что уже сделано выше.

Равенство имеет место в случае  $a = 0, b = c$  и при всех возможных перестановках указанных связей.

**Случай 2:**  $k > 1$ .

В этом случае автору не удалось найти решение несмотря на многочисленные попытки. Удалось только показать, что появляется важное изменение в положении точки минимума указанного выше выражения: если она есть, то отличается от случаев  $a = b = c$  или  $a = 0, b = c$ , или от любой из их перестановок. Другими словами, наиболее вероятно, что точка минимума имеет место при  $a = b$ , при этом  $c$  — некоторое неизвестное положительное действительное число. Поэтому мы оставляем этот случай читателям в качестве нерешенной задачи.

**Нерешенная задача.** Пусть  $a, b, c$  — положительные действительные числа, а  $u, k$  — положительные постоянные,  $k > 1$ . Найти минимальное значение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + u \left[ \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right]^k.$$

#### 4. Приложения

Наш общий результат не только интересен, но и полезен при выводе других видов неравенств. В качестве иллюстрации приведем два примера достаточно трудных задач, которые нелегко решить, используя другие методы вроде “приведения к сумме квадратов” или “группировки переменных”. Однако при помощи общего результата, полученного в случае 1, мы получим короткие и простые решения.

**1-я задача.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа. Доказать, что

$$\frac{3a^3 + abc}{b^3 + c^3} + \frac{3b^3 + abc}{a^3 + c^3} + \frac{3c^3 + abc}{a^3 + b^3} \geq 6.$$

(Tran Quoc Anh)

**Решение.** Применяя неравенство СА-СГ, получим:

$$abc \left( \frac{1}{a^3 + b^3} + \frac{1}{b^3 + c^3} + \frac{1}{c^3 + a^3} \right) \geq \frac{3abc}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}}.$$

Достаточно доказать, что

$$\frac{a^3}{b^3 + c^3} + \frac{b^3}{a^3 + c^3} + \frac{c^3}{a^3 + b^3} + \frac{abc}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3)}} \geq 2.$$

Пусть  $a^3 = x, b^3 = y, c^3 = z$ , приходим к

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} + \sqrt[3]{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2,$$

что верно в силу нашего полученного выше результата с  $k = \frac{1}{3}$  и  $u = 1$ .

Равенство имеет место при  $a = b = c$ .

Таким образом, исходное неравенство верно.

**Замечание.** Используя тот же метод, как в этом решении, с  $k \geq 3$ , можно легко показать, что

$$\frac{ka^3 + abc}{b^3 + c^3} + \frac{kb^3 + abc}{a^3 + c^3} + \frac{kc^3 + abc}{a^3 + b^3} \geq \frac{3k+1}{2}.$$

**2-я задача.** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные действительные числа, из которых никакие два не равны нулю. Доказать, что



$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2(ab+bc+ac)} \geq 2.$$

(quykhthn-qa1 на форуме MathLinks)

**Решение.** Мы покажем, что верно следующее неравенство:

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2(ab+bc+ac)} \geq \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (***)$$

Положим  $a+b+c = p$ ,  $ab+bc+ac = q$  и  $abc = r$  и перепишем это неравенство в следующем виде:

$$3(pq-r) \geq 8q\sqrt[3]{r}.$$

Применяя СА-СГ, мы видим, что  $p \geq 3\sqrt[3]{r}$ , так что достаточно показать:

$$q\sqrt[3]{r} \geq 3r.$$

Это очевидно верно, поскольку  $q \geq 3\sqrt[3]{r^2}$ .

Итак, неравенство (\*\*\*) верно. Теперь достаточно только показать, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Это неравенство верно в силу полученного выше общего результата с  $k=1$  и  $u=4$ .

Равенство имеет место при  $a=b=c$  или  $a=0, b=c$ .

## Литература

- [1] Campos Daniel and Verdiyan Verdan. Simple trigonometric substitutions with broad results. *Mathematical Reflection*, Issue 6 (2009).

Tuan Le,  
 учащийся 12 класса школы Fairmont H.S.,  
 Anaheim, CA, USA.

Email: kid10462000@yahoo.com

Перевод с английского: Имайкин В.М.

## О некоторых динамических системах второго порядка (дополнение к стандартному ВТУзовскому курсу математики)

*А. И. Рубинштейн*

В вузовском математическом образовании почти не уделяется внимания качественному исследованию дифференциальных уравнений — мощному методу изучения важнейшего класса естественнонаучных моделей. Знакомство с этими вопросами, идущими от А. Пуанкаре и А. Ляпунова, представляется весьма желательным. Например, с элементами качественного исследования динамических систем на плоскости.

Дифференциальные уравнения являются одним из немногочисленных разделов математики, непосредственно находящих применение в инженерных исследованиях. Вместе с тем, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений в курсе математики технических университетов уделено очень мало внимания. На этот факт указывал ещё академик Л. С. Понтрягин, несколько раз читавший в середине пятидесятых годов на механико-математическом факультете МГУ основной курс обыкновенных дифференциальных уравнений, на основе которого он написал позже учебник [1]. Ещё в авторском вступлении к [1] Лев Семенович говорит: «Наиболее важные и интересные применения обыкновенные дифференциальные уравнения находят в теории колебаний и в теории автоматического управления». В [1] подробно обсуждена (стр. 218–224) первая в истории науки корректная работа по теории автоматического управления — работа русского инженера Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876 год), исследовавшая центробежный регулятор Уатта паровой машины и установившая критерии (практические!) его устойчивой работы. Работа Вышнеградского была написана раньше классического мемуара А. Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [2] (конец 19 столетия) и работ А. М. Ляпунова об устойчивости движения.

В [1] (стр. 244–250) изложено и исследование А. А. Андронова о работе (автоколебаниях) лампового генератора. О необходимости построения математической теории генераторов автоколебаний говорил в конце 20-х годов XX столетия Л. И. Мандельштам.

Исследованию (даже в простейших случаях) бифуркаций, то есть качественного изменения топологии траекторий динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (например, на плоскости) при малых изменениях параметров в правых частях, вообще не уделено в математических курсах ВУЗов никакого внимания.

Некоторым аспектам указанных вопросов, для понимания которых не требуется каких-либо знаний, выходящих за рамки математики двух первых курсов ВУЗов, и посвящена предлагаемая работа.

Среди динамических систем, математической моделью которых является автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

в различных вопросах радиотехники, автоматического регулирования и т.д. часто возникает вопрос существования периодических решений  $x(t+T) = x(t)$ ,  $y(t+T) = y(t)$  для любых  $t \in (-\infty; +\infty)$  и некоторого  $T > 0$ , являющихся *предельными циклами* (см. например, [1] стр.

224–243). Известно, что в этом случае функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  не могут одновременно быть линейными. Естественно стремиться рассматривать наиболее простые нелинейные функции, например, многочлены порядка больше единицы. На приведенных выше страницах монографии [1] рассматривается система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (2)$$

очевидное периодическое решение (траектория) которой

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (3)$$

является предельным циклом (устойчивым), а любое решение (2) имеет вид

$$\begin{cases} x = \cos t (1 - Ce^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \\ y = \sin t (1 - Ce^{-2t})^{-\frac{1}{2}} \end{cases}, \quad 1 - Ce^{-2t} > 0. \quad (4)$$

Легко понять, что движение точки  $(x, y)$  по траекториям (3), (4) происходит с постоянной угловой скоростью:

$$\frac{d}{dt} \left( \arctg \frac{y(t)}{x(t)} \right) = 1. \quad (5)$$

Степени многочленов в правых частях (2), очевидно, равны трем.

Естественно задать вопрос: существуют ли динамические системы вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_1 + B_1x + C_1y + D_1x^2 + 2E_1xy + F_1y^2 \\ \frac{dy}{dt} = A_2 + B_2x + C_2y + D_2x^2 + 2E_2xy + F_2y^2, \end{cases} \quad (6)$$

среди траекторий которых есть траектория (3), имеющие предельные циклы?

В силу непрерывности, условие типа (5) — движения по круговой траектории с постоянной угловой скоростью — является достаточно жестким. Без такого условия круговая траектория системы вида (6), являющаяся предельным циклом, существует, например, у системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x+2)y + x^2 + y^2 - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x(x+2), \end{cases} \quad (7)$$

см. [3], стр. 512. Из (7) легко следует, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 - 1) = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1),$$

то есть  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  — решение (7). То, что это предельный цикл, показано на стр. 512 монографии [3]. Понятно, что (3) не является решением (7). Подставляя (3) в (6), получаем

$$\begin{cases} -\sin t = A_1 + B_1 \cos t + C_1 \sin t + D_1 \frac{1 + \cos 2t}{2} + E_1 \sin 2t + F_1 \frac{1 - \cos 2t}{2} \\ \cos t = A_2 + B_2 \cos t + C_2 \sin t + D_2 \frac{1 + \cos 2t}{2} + E_2 \sin 2t + F_2 \frac{1 - \cos 2t}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A_1 + \frac{1}{2}(D_1 + F_1) = 0, & B_1 = 0, & C_1 = -1, & E_1 = 0, & \frac{1}{2}(D_1 - F_1) = 0, \\ A_2 + \frac{1}{2}(D_2 + F_2) = 0, & B_2 = 1, & C_2 = 0, & E_2 = 0, & \frac{1}{2}(D_2 - F_2) = 0 \end{cases}$$

и система (6) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + A_1(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = x + A_2(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (8)$$

Точки покоя системы (8) — решения алгебраической системы

$$\begin{cases} -y + A_1(1 - x^2 - y^2) = 0 \\ x + A_2(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}, \quad A_1^2 + A_2^2 > 0 \quad (9)$$

— нетрудно найти:

$$\begin{cases} x_0^{(\pm)} = \frac{A_2}{2(A_1^2 + A_2^2)} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)} \right) \\ y_0^{(\pm)} = -\frac{A_1}{2(A_1^2 + A_2^2)} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$A_1 x_0^{(\pm)} + A_2 y_0^{(\pm)} = 0. \quad (11)$$

Произведем замену переменных, соответствующую повороту вокруг точки  $(x = 0, y = 0)$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (A_1 \xi - A_2 \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (A_2 \xi + A_1 \eta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (A_1 x + A_2 y) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} (-A_2 x + A_1 y). \end{cases} \quad (12)$$

При этом точки покоя (10) будут лежать на оси  $\xi = 0$  (ось  $O\eta$ ). Подстановка (12) в (8) дает

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\eta + \sqrt{A_1^2 + A_2^2} (1 - \xi^2 - \eta^2) = \Phi(\xi, \eta) \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi = \Psi(\xi, \eta). \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) следует, что

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{-\eta + \sqrt{A_1^2 + A_2^2} (1 - \xi^2 - \eta^2)}, \quad (14)$$

откуда

$$\eta(-\xi) = \eta(\xi). \quad (15)$$

Соотношения (14) и (15) означают, что фазовая картина всех траекторий — решений (8) и (13) симметрична относительно прямой  $A_1 x + A_2 y = 0$  или  $\xi = 0$ . В силу этого любая ограниченная траектория оказывается замкнутой, а точка  $(x_0^{(-)}; y_0^{(-)})$  имеет тип «центр». При повороте (12) эта точка переходит в точку

$$\left( \xi_0 = 0; \eta_0^{(-)} = \frac{2\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}{1 + \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)}} \right), \quad 0 < \eta_0^{(-)} < 1. \quad (16)$$

Точка  $(x_0^{(+)}, y_0^{(+)})$  переходит в точку

$$\left( \xi_0 = 0; \eta_0^{(+)} = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)}}{2\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \right), \quad \eta_0^{(+)} < -1 \quad (17)$$

Очевидно, что  $\eta_0^{(-)} \eta_0^{(+)} = -1$ . Так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= -2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \xi, & \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} &= -1 - 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \eta, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} &= 1, & \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

то характеристическое уравнение линеаризованной системы (13) в точке  $(\xi_0 = 0; \eta_0^{(-)})$  — точке (16), есть

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\left(1 + \frac{4(A_1^2 + A_2^2)}{1 + \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)}}\right) \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(1 + \frac{4(A_1^2 + A_2^2)}{1 + \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)}}\right) = 0$$

и имеет чисто мнимые корни, а в точке  $(\xi_0 = 0; \eta_0^{(+)})$  — точке (17) —

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sqrt{1 + 4(A_1^2 + A_2^2)} = 0 \quad (19)$$

и имеет действительные корни противоположных знаков. То есть линеаризованная система (13) имеет точку покоя  $(\xi_0 = 0; \eta_0^{(+)})$  типа «седло». По теореме о седле (см., например [1], стр. 253–260) точка  $(x_0^{(+)}; y_0^{(+)})$  (см. (10)) системы (8) также имеет тип «седло».

Как уже отмечалось (рассуждение после (14), (15)), точка покоя  $(x_0^{(-)}; y_0^{(-)})$  для системы (8) имеет тип «центр». Этот факт можно также установить, вычисляя индекс Пуанкаре ([3], стр. 217), или воспользовавшись теоремой 47 на стр. 300 в [3].

Замкнутая траектория системы (13), содержащая внутри все остальные замкнутые траектории, является сепаратрисой, выходящей (при  $t = -\infty$ ) и входящей (при  $t = +\infty$ ) в точку  $(x_0^{(+)}; y_0^{(+)}) = (\xi_0 = 0; \eta_0^{(+)})$ . Касательные прямые к этой сепаратрисе в указанной точке определяются собственными векторами

$$\vec{h}_1 = \left( (1 + 4(A_1^2 + A_2^2))^{\frac{1}{4}}; 1 \right), \quad \vec{h}_2 = \left( - (1 + 4(A_1^2 + A_2^2))^{\frac{1}{4}}; 1 \right),$$

соответствующими собственным значениям — корням (19):

$$\lambda_1 = (1 + 4(A_1^2 + A_2^2))^{\frac{1}{4}}, \quad \lambda_2 = - (1 + 4(A_1^2 + A_2^2))^{\frac{1}{4}}.$$

Легко видеть, что при  $\lim |x| = \lim |y| = +\infty$ , в силу (8) имеем:  $\frac{dy}{dx} \approx \frac{A_2}{A_1}$ , поэтому

$$y \approx \frac{A_2}{A_1}x + C, \quad (20)$$

т.е. неограниченные при  $t \rightarrow \pm\infty$  траектории асимптотически параллельны. Очевидно, что прямые (20) перпендикулярны прямой  $A_1x + A_2y = 0$  — оси симметрии фазового портрета системы (8) или (13). Фазовый портрет эскизно достаточно просто изобразить для системы (8) при  $A_1 = A_2 = -1$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + (x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x + (x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

В этом случае точки покоя есть

$$(x_0^{(-)}, y_0^{(-)}) = \left( \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right), \quad (x_0^{(+)}; y_0^{(+)}) = (-1; 1).$$

Следует отметить, что при изменении значений  $A_1, A_2$  ( $A_1^2 + A_2^2 > 0$ ) не происходят бифуркации.

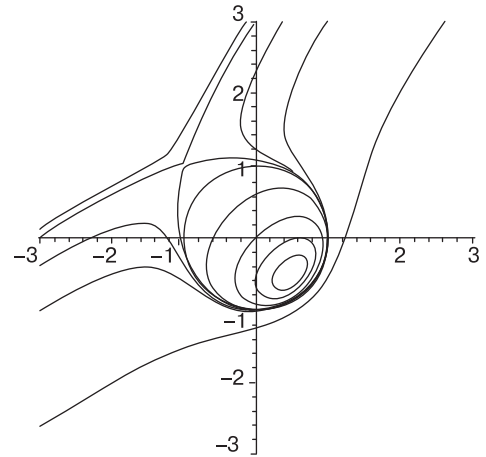


Рис. 1.

Теперь выясним, что происходит при изменении параметров  $A_1, A_2$  в системе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + A_1 x(x^2 + y^2 - 1), \\ \frac{dy}{dt} = x + A_2 y(x^2 + y^2 - 1), \end{cases} \quad (21)$$

имеющей при всех  $A_1, A_2$  решение (3). Так как по (21)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = (A_1 x^2 + A_2 y^2) (x^2 + y^2 - 1),$$

то при  $A_1^2 + A_2^2 > 0$  система (21) имеет траекторию  $x^2 + y^2 = 1$  предельным циклом; при

$$\left[ \begin{cases} A_1 > 0, \\ A_2 \geq 0, \\ A_1 \geq 0, \\ A_2 > 0, \end{cases} \right. \text{ — неустойчивым; при } \left[ \begin{cases} A_1 < 0, \\ A_2 \leq 0, \\ A_1 \leq 0, \\ A_2 < 0, \end{cases} \right. \text{ — устойчивым.}$$

Соответственно, точка  $(0; 0)$  покоя является устойчивым и неустойчивым фокусом. Заметим, что при  $A_1^2 + A_2^2 = 0$  точка  $(0; 0)$  является центром.

Если  $(x_0; y_0)$  — точка покоя системы (21), отличная от  $(0; 0)$ , то, очевидно,  $x_0 y_0 \neq 0$ . Следовательно, в случае  $A_1 A_2 < 0$ , который только и осталось разобрать, точки покоя определяются системой алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -y + A_1 x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ x + A_2 y(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

и удовлетворяют соотношению

$$-\frac{y}{x} = \frac{A_1}{A_2} \frac{x}{y} \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -\frac{A_1}{A_2} > 0.$$

Таким образом,

$$y_0 = kx_0, \quad \text{или} \quad y_0 = -kx_0, \quad \text{где} \quad k = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} > 0. \quad (23)$$

Из первого соотношения в (22) при  $x \neq 0$  получаем

$$\mp \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} + A_1 \left( \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) x_0^2 - 1 \right) = 0,$$

откуда

$$x_0^2 = \frac{1 \mp \frac{1}{A_1} \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}} = \frac{1 \mp (\operatorname{sgn} A_1) \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}} > 0. \quad (24)$$

По (24) имеем:

а) если  $0 < -A_1 A_2 \leq 1$ , то  $x_0^2 = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}$  и  $x_0 = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}}$ ,  $y_0 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} x_0$ , причем  $x_0^2 + y_0^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}} > 0$ , т.е. помимо точки покоя  $(x = 0, y = 0)$  имеются две точки покоя  $\left(x_0; \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} x_0\right)$ , обе лежащие вне окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ;

б) если  $-A_1 A_2 > 1$ , то  $x_0^2 = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}} > 0$  и  $x_0 = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}}$ ,  $y_0 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} x_0$ , т.е. помимо точки покоя  $(x = 0, y = 0)$  имеются четыре точки покоя, две из которых

$$\left( x_0 = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}}; y_0 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} x_0 \right)$$

лежат вне окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , а две другие —

$$\left( x_0 = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{-A_1 A_2}}}{1 - \frac{A_1}{A_2}}}; y_0 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} x_0 \right)$$

— внутри окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Можно показать, что в случае  $A_1 A_2 < 0$  точки покоя, лежащие вне окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , имеют тип «седло», а внутри окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  — тип «центр»

Таким образом, при изменении значений  $A_1, A_2, A_1^2 + A_2^2 > 0$  в системах (21), в отличие от систем (8), происходят бифуркации:  $\min(A_1; A_2) \geq 0 \rightarrow A_1 A_2 < 0 \rightarrow \max(A_1; A_2) \leq 0$ .

На рис. 2 и 3 приведены эскизы фазовых портретов соответственно систем

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (25)$$

и

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \quad (26)$$

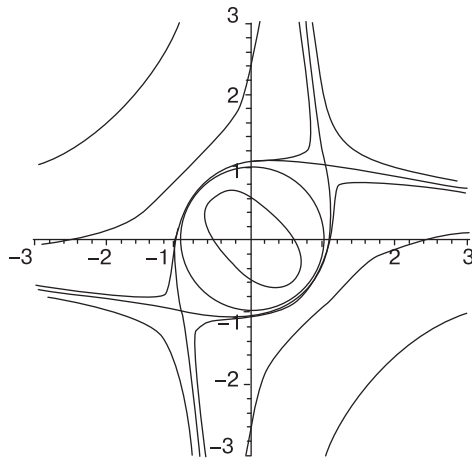


Рис. 2.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x - y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$

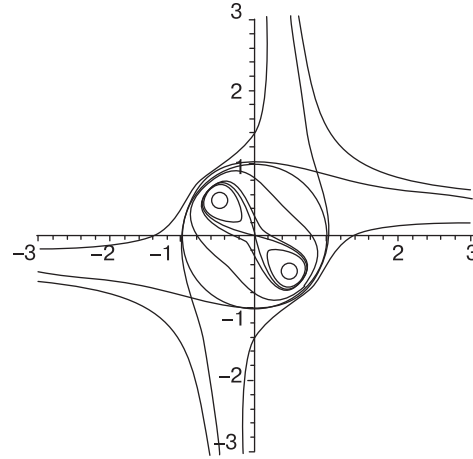


Рис. 3.  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$

Система (25) имеет три точки покоя:

$$(0; 0), \quad (1; 1), \quad (-1; -1), \quad (27)$$

система (26) — пять точек покоя:

$$(0; 0), \quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (28)$$

Замена

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases} \quad (29)$$

приводит систему (25) к виду

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\eta(\xi^2 + \eta^2) \\ \frac{d\eta}{dt} = -\xi(\xi^2 + \eta^2 - 2), \end{cases} \quad (30)$$

откуда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{\eta} \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad (31)$$

а систему (26) — к виду

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \eta(1 - 2(\xi^2 + \eta^2)) \\ \frac{d\eta}{dt} = \xi(3 - 2(\xi^2 + \eta^2)), \end{cases} \quad (32)$$

откуда

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{\eta} \frac{3 - 2(\xi^2 + \eta^2)}{1 - 2(\xi^2 + \eta^2)}. \quad (33)$$

Из (31) и (33) следует, что фазовые портреты систем (25) и (26) симметричны относительно прямых  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$ , то есть прямых  $x + y = 0$  и  $x - y = 0$ . Поэтому все ограниченные траектории систем (25) и (26) являются замкнутыми. Отсюда и точки покоя внутри окружности  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  должны иметь тип «центр».

При  $\lim |x| = \lim |y| = +\infty$  траектории (25) и (26) ведут себя подобно решениям

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

то есть  $xy \approx C$ . Значит, в пределе траектории — равнобокие гиперболы с асимптотами  $x = 0$  и  $y = 0$ .

### Литература

- [1] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1965 (второе издание).
- [2] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
- [3] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г., Качественная теория динамических систем второго порядка, М.: Наука, 1966, 568 стр.

*Рубинштейн Александр Иосифович,  
профессор кафедры высшей математики  
Московского Государственного Университета Леса,  
профессор кафедры высшей математики  
Национального исследовательского ядерного  
университета (МИФИ), доктор физ.-мат. наук.*



# О принципах суперпозиции

С. В. Дворянинов

В сентябре 2010 г. исполнилось бы 75 лет доктору физико-математических наук, профессору Самарского государственного университета Льву Мейлиховичу Берковичу. Эта заметка посвящается памяти замечательного математика, педагога и человека.

Универсальный принцип суперпозиции иллюстрируется рядом примеров возрастающей сложности — от алгебраических уравнений до нелинейных дифференциальных уравнений.

## 1. О принципе суперпозиции для алгебраических уравнений

Первым *принцип суперпозиции* в математике открыл Франсуа Виет. Этот принцип сейчас изучают в школе. Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

и предположим, что нам известно одно решение этого уравнения  $x = x_1$ . Для отыскания других решений сделаем в уравнении замену

$$x = x_1 + z, \quad (2)$$

где  $z$  — новая неизвестная. Данное уравнение принимает вид

$$(x_1 + z)^2 + p(x_1 + z) + q = 0, \quad \text{или} \quad x_1^2 + 2x_1z + z^2 + px_1 + pz + q = 0.$$

По предположению сумма первого, четвертого и шестого слагаемых равна нулю. Следовательно,  $2x_1z + z^2 + pz = 0$ , или  $z(2x_1 + z + p) = 0$ . Если предположить, что  $z = 0$ , то корень  $x$  будет равен известному корню  $x_1$ , и новых корней уравнения не получается. При  $z \neq 0$  отсюда следует равенство  $z = -2x_1 - p$ . По формуле (2) получаем, что

$$x = -x_1 - p. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет найти *все* корни уравнения, если известен *один*. Одновременно доказано, что корней (различных) у квадратного уравнения не может быть более двух.

Хорошо известно, что в квадратном уравнении можно сделать и другую полезную замену:

$$x = \frac{z}{x_1}. \quad (*)$$

Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$\frac{z^2}{x_1^2} + p\frac{z}{x_1} + q = 0, \quad \text{или} \quad z^2 + pzx_1 + qx_1^2 = 0.$$

Так как по условию  $px_1 = -q - x_1^2$ , то  $z^2 + z(-q - x_1^2) + qx_1^2 = 0$ . Отсюда  $z(z - q) - x_1^2(z - q) = 0$ , или  $(z - q)(z - x_1^2) = 0$ . Если  $z - x_1^2 = 0$ , то  $x = x_1$ , и нового корня квадратного уравнения мы не находим. Следовательно,  $z - x_1^2 \neq 0$  и поэтому  $z = q$ . Согласно (\*), находим выражение второго корня квадратного уравнения через первый:

$$x = \frac{q}{x_1}. \quad (4)$$

Формулы (3), (4) задают все решения квадратного уравнения через известный корень.

Аналогичные формулы Виета существуют для алгебраических уравнений любой степени. Так например, для уравнения третьей степени  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  при  $a \neq 0$  третий корень уравнения  $x_3$  выражается через два других известных корня  $x_1$  и  $x_2$  по формуле

$$x_3 = -\frac{d}{ax_1x_2}. \quad (5)$$

Формулы (3), (4), (5) представляют принцип суперпозиции в простейшем (алгебраическом) случае.

Хорошо известно также, что решения (или корни) биквадратного уравнения четвертой степени  $x^4 + px^2 + q = 0$  выражаются через корни *другого* уравнения, а именно квадратного уравнения  $Y^2 + pY + q = 0$ , по формуле  $x = \pm\sqrt{Y}$ .

## 2. О принципе суперпозиции для линейных дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение  $y'' + y = 0$  имеет два частных решения:  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$ , что легко проверить непосредственными вычислениями производных этих функций. Замечательно то, что всякое или, как говорят, *общее* решение этого дифференциального уравнения выражается через эти два решения следующим образом:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \text{или} \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. Еще пример: общее решение уравнения  $y'' - y = 0$  дается формулой  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ .

Решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами умел Л. Эйлер в конце 18-го века. Также и в случае, когда коэффициенты дифференциального уравнения  $n$ -го порядка зависят от независимой переменной, доказано, что общее решение такого уравнения есть линейная комбинация  $n$  его линейно независимых решений:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (6)$$

Формула (6) выражает *принцип линейной суперпозиции*.

Аналогичным образом можно исследовать любую *возвратную* (= *рекуррентную*) последовательность, определяемую соотношением

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}.$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}.$$

Разыскивая решение этого уравнения в виде геометрической прогрессии  $x_n = \lambda^n$ , получим квадратное уравнение относительно  $\lambda$

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6,$$

из которого находим  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ . Общее решение возвратного уравнения имеет вид  $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$  и выражается через два частных решения  $2^n$  и  $3^n$  — таково здесь проявление принципа линейной суперпозиции.

## 3. О принципе суперпозиции для уравнения Риккати

Нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t) \quad (7)$$

первого порядка относительно неизвестной функции  $y$ , зависящей от независимой переменной  $t$ , называют *уравнением Риккати*. Пусть известно некоторое частное решение  $y_1$  уравнения (7). Выполним замену, которую мы делали при решении квадратного уравнения:  $y = y_1 + z$ , где  $z$  — новая искомая функция. Относительно функции  $z$  получается уравнение

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z. \quad (8)$$

Последнее уравнение (8) — частный случай *уравнения Бернулли* (общее уравнение Бернулли получается при замене показателя степени 2 на некоторое постоянное число  $n$ ). Уравнение (8) заменой  $z = \frac{1}{u}$  приводится к некоторому линейному неоднородному дифференциальному уравнению, общее решение которого имеет вид

$$u = CY(x) + f(x).$$

Здесь  $f(x)$  — частное решение последнего уравнения,  $Y(x)$  — частное (ненулевое) решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения,  $C$  — произвольная постоянная. В итоге получаем такую формулу для решения уравнения Риккати:

$$y = y_1 + \frac{1}{CY(x) + f(x)} \quad (9)$$

Формула (9) аналогична формуле корней биквадратного уравнения — решение уравнения Риккати выражается через решение некоторого *другого* дифференциального уравнения, при этом используется также одно решение уравнения Риккати.

Хорошо известно, для любых четырех решений уравнения Риккати (7) (то есть для четырех функций  $y(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ , зависящих от переменной  $t$ ) остается постоянной (не зависящей от  $t$ ) следующая величина, которую называют *ангармоническим отношением* этих четырех функций:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C \quad (10)$$

Пусть функции  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$ , являются частными решениями уравнения Риккати (7). Тогда из формулы (10) можно найти функцию  $y(t)$

$$y(t) = \frac{(y_1 - y_3)y_2C + y_1(y_3 - y_2)}{(y_1 - y_3)c + (y_3 - y_2)}. \quad (11)$$

В формуле (11)  $C$  — это произвольная постоянная, зависящая от начального условия для решения  $y(t_0)$ . Формула (11) выражает общее решение уравнения Риккати через любые три его частных решения.

Легко увидеть, как нарастает сложность тех формул, которые выражают *принцип суперпозиции* — **представление общего решения задачи через ее частные решения**. Для алгебраических уравнений — это сравнительно простые алгебраические формулы (3), (4), (5). Для линейного дифференциального уравнения общее решение является линейной комбинацией его частных решений. Для нелинейного уравнения Риккати общее решение (11) есть нелинейная функция от трех его частных решений. Причина этого обстоятельства понятна: мы рассматриваем все более и более сложные задачи. А что будет дальше? Что будет, например, для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка выше первого? Или для линейных уравнений с частными производными? История здесь интересная!

#### 4. Уравнение Ермакова-Пинни

Киевский профессор математики В. П. Ермаков (1845–1922) в 1880 году опубликовал работу, в которой показал, что общее решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a(x)y - by^{-3} = 0 \quad (12)$$

(здесь  $b$  — положительное число) выражается через решения *другого* дифференциального уравнения  $Y'' + a(x)Y = 0$ , точнее через такие два его решения  $Y_1(x)$  и  $Y_2(x)$ , которые образуют так называемую *фундаментальную систему решений*. Соответствующая формула Ермакова такова:

$$y(x) = \sqrt{AY_1^2 + BY_1Y_2 + CY_2^2}.$$

Здесь  $A, B, C$  — произвольные числа, удовлетворяющие условию  $B^2 - 4AC = -4b$ . В итоге на самом деле (как и положено дифференциальному уравнению второго порядка) общее решение уравнение Ермакова зависит от *двух* произвольных постоянных (а не от трех, как может показаться на первый взгляд).

Формула Ермакова является проявлением принципа нелинейной суперпозиции — общее решение уравнения Ермакова имеет вид

$$y = F(Y_1(x), Y_2(x), c_1, c_2),$$

где  $Y_1(x), Y_2(x)$  — фундаментальная система решений некоторого присоединенного уравнения. Интересно отметить, что этот же результат в 1950 году, то есть спустя 70 (!) лет после появления работы Ермакова, получил американский математик Е. Риппеу, не знакомый с работой Ермакова. Теперь уравнение (12) называют уравнением Ермакова-Пинни.

В словаре [1] о В. П. Ермакове сказано кратко: “русский математик и педагог, член-корреспондент Петербургской Академии Наук с 1884 года, автор трудов по математическому анализу”.

В словаре [5] отмечается, что родился Василий Павлович 27 февраля (11 марта по новому стилю) в селе Терюха Гомельской области Белоруссии, в 1868 году окончил Киевский университет, профессором которого стал в 1877 году. В 1870 г. открыл весьма чувствительный признак сходимости рядов. Уделял много времени педагогической деятельности, в 1884-86 годах издавал “Журнал элементарной математики”.

Интересно говорится о нем в книге [2]: “Профессор Василий Павлович Ермаков, весьма известный в высшей математике и много сделавший также для улучшения преподавания математики в школе, владел особым способом чтения математических книг. Он читал первую страницу новой книги, чтобы узнать, какую задачу себе ставит автор, затем последнюю страницу, чтобы узнать, к какому результату автор приходит, и, закрыв книгу, самостоятельно находил путь получения результата. Не раз способ решения, найденный таким образом Ермаковым, оказывался отличным от того, которым пользовался автор книги. Наука в этих случаях обогащалась новыми методами.

Желательно, чтобы школьник, читая рассказы о решении новых для него задач, поступал по способу профессора Ермакова, стараясь каждый раз самостоятельно найти решение задачи или, что еще лучше, дать свой оригинальный способ решения. С таких попыток самостоятельного решения задач началась творческая работа почти всех крупных математиков. В “Журнале элементарной математики”, издававшемся профессором Ермаковым для учителей и учащихся школ, с самостоятельного решения простых вопросов начал свое творчество один из самых гениальных русских математиков — Георгий Феодосьевич Вороной (“Разложение многочленов на множители, основанное на свойстве корней квадратного уравнения.” Журнал элементарной математики, 1886, стр. 11). В том же журнале печатали свои первые юношеские попытки математического творчества известные впоследствии профессора-математики Д. А. Граве, И. И. Иванов, В. Ф. Каган, И. И. Чистяков и другие.”

## 5. Уравнение Куммера-Шварца

Другим примером уравнения, для которого справедлив принцип нелинейной суперпозиции, является такое нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{2} \frac{y''}{y} - \frac{3}{4} \left( \frac{y'}{y} \right)^2 + by^2 = a(x).$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$y(x) = (AY_1^2 + BY_1Y_2 + CY_2^2)^{-1}.$$

Здесь постоянные числа  $A, B, C$  удовлетворяют условию  $B^2 - 4AC = -4b$ ,  $Y_1(x)$ ,  $Y_2(x)$  — фундаментальная система решений уравнения  $Y'' + a(x)Y = 0$ .

## Литература

- [1] Советский энциклопедический словарь, М.: Советская энциклопедия, 1985.
- [2] Депман И.Я. Рассказы о решении задач, Л.: Детгиз, 1957.
- [3] Berkovich L.M. On the method of exact linearization of autonomous ordinary differential equations, Max-Planck-Institut für Mathematik. Bonn. Preprint Series 2001 (73).
- [4] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, М.: Физматлит, 1959.
- [5] Математический энциклопедический словарь. М.: Научное издательство “Большая Российская энциклопедия“, 1995.
- [6] Добровольский В.А. Василий Петрович Ермаков, М.: 1981.

*Дворянинов Сергей Владимирович,  
доцент кафедры прикладной математики  
Самарского государственного аэрокосмического  
университета имени академика С. П. Королева,  
канд. физ.-мат. наук.*

*E-mail: dvoryan@yandex.ru*

## Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Продолжаем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержатся темы 9 и 10. Темы 7 и 8 опубликованы в предыдущем номере журнала.

### Тема 9

## Прямая в пространстве

Прямая в пространстве — объект более сложный для изучения, чем прямая на плоскости или плоскость в пространстве. Связано это с тем, что пространство трехмерно, т. е. в нем есть три степени свободы, а прямая — одномерна (на прямой лишь одна степень свободы). С другой стороны, каждое уравнение, связывающее координаты в пространстве, устраняет только одну степень свободы. Поэтому прямая в пространстве, как правило<sup>1</sup>, описывается *двумя* уравнениями!

### 56. Канонические уравнения прямой в пространстве

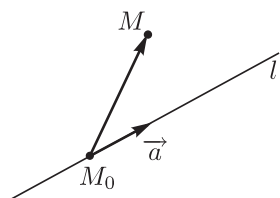


Рис. 9.1. К выводу канонического уравнения прямой в пространстве

Предположим, что нам нужно выписать уравнения прямой  $l$  в пространстве, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно вектору  $\vec{a}(p, q, r)$  (вектор  $\vec{a}$ , как и ранее, называется *направляющим вектором* прямой). Возьмем произвольную точку  $M(x, y, z)$  в пространстве (рис. 9.1) и выясним, при каких условиях эта точка попадет на прямую  $l$ .

Ясно, что это произойдет тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  окажется коллинеарен вектору  $\vec{a}$ :

$$M \in l \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$$

Кроме того, два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны:

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_0M} = t\vec{a},$$

где  $t$  — какое-то вещественное число. Запишем это условие через координаты:

$$x - x_0 = tp, \quad y - y_0 = tq, \quad z - z_0 = tr \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (9.1)$$

Итак, уравнения, описывающие прямую  $l$ , имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (9.2)$$

Здесь  $(x_0, y_0, z_0)$  — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой  $l$ , а  $(p, q, r)$  — координаты направляющего вектора прямой.

Уравнения (9.2) принято называть *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

<sup>1</sup>Исключения из этого правила связаны с природой вещественных чисел. Например уравнение  $x^2 + y^2 = 0$  в трехмерном пространстве задает прямую, которую также можно описать двумя уравнениями:  $x = 0, y = 0$ .

## 57. Параметрические уравнения прямой в пространстве

Напомним, что параметрические уравнения — это уравнения, описывающие зависимость координат от параметра:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , где  $t$  — это и есть параметр. Например, можно считать, что  $t$  — это время и воспринимать параметрические уравнения как уравнения движения материальной точки.

Чтобы получить *параметрические уравнения прямой в пространстве*, достаточно записать равенства (9.1) в виде системы:

$$\begin{cases} x - x_0 = tp, \\ y - y_0 = tq, \\ z - z_0 = tr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tp, \\ y = y_0 + tq, \\ z = z_0 + tr. \end{cases} \quad (9.3)$$

## 58. Общие уравнения прямой в пространстве

Другой подход к составлению уравнений прямой в пространстве основывается на том, что две непараллельные плоскости пересекаются по прямой. Поэтому рассмотрим две плоскости, описываемые уравнениями

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (9.4)$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (9.5)$$

В предыдущих темах мы выяснили, что эти плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда координаты их нормалей  $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$  не пропорциональны.

Основываясь на рис. 9.2, можно понять, что точка  $M(x, y, z)$  будет лежать на прямой  $l$  тогда и только тогда, когда она попадет как в плоскость  $\pi_1$ , так и в плоскость  $\pi_2$ . Значит, ее координаты должны удовлетворять как уравнению (9.4), так и уравнению (9.5). Поэтому уравнения прямой  $l$  — это система

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Такую систему принято называть *общими уравнениями прямой в пространстве*.

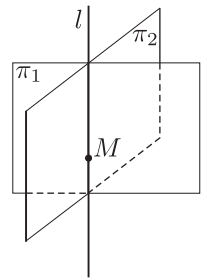


Рис. 9.2. К общему уравнению прямой в пространстве

## 59. Уравнения прямой в проекциях

Есть еще один интересный способ задать прямую в пространстве, а именно, ее проекциями на координатные плоскости.

Рассмотрим канонические уравнения прямой  $l$ :

$$l: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Из уравнений можно выписать координаты точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , через которую проходит прямая, и найти направляющий вектор  $\vec{a}(p, q, r)$  прямой. Попытаемся составить уравнение проекции прямой  $l$  на плоскость  $z = 0$ . Ясно, что эта проекция должна проходить через проекцию  $M_1(x_0, y_0, 0)$  точки  $M_0$  на ту же плоскость параллельно проекции направляющего вектора  $\vec{a}_1(p, q, 0)$ .

Таким образом, уравнение прямой  $l_1$  (проекции  $l$  на плоскость  $z = 0$ ) — это каноническое уравнение прямой на плоскости:

$$l_1: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \quad z = 0.$$

Обратите внимание, что на самом деле здесь выписаны *два* уравнения плоскостей:

$$\pi_1: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \quad \text{и} \quad Oxy: \quad z = 0$$

Аналогично выписываются уравнения проекций прямой  $l$  на плоскости  $x = 0$  и  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} l_2: \quad & \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \quad x = 0, \\ l_3: \quad & \frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r}, \quad y = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим первые уравнения плоскостей из выписанных выше пар уравнений:

$$\begin{aligned} \pi_1: \quad & \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \\ \pi_2: \quad & \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \\ \pi_3: \quad & \frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r}. \end{aligned}$$

На рис. 9.3 изображены две такие плоскости, причем показано, что они пересекаются по прямой  $l$ . Этот факт несложно проверить аналитически. Действительно, условие пересечения плоскостей — это система:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r}, \\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \end{cases}$$

Но из нее немедленно следует двойное равенство:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r} = \frac{y - y_0}{q},$$

т. е. уравнения прямой  $l$ .

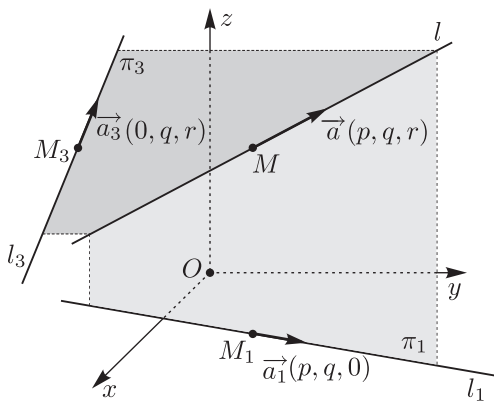


Рис. 9.3. Уравнение прямой в проекциях

Кроме того, хотелось бы отметить, что в уравнении плоскости  $\pi_1$  отсутствует координата  $z$ . Это означает, что если точка  $(x, y, 0)$  принадлежит плоскости  $\pi_1$ , то этой же плоскости будет принадлежать точка  $(x, y, z)$  с любым  $z$ . Иными словами, мы можем точку  $(x, y, 0)$  перемещать вдоль вертикальной линии, все время оставаясь в плоскости  $\pi_1$ . Следовательно, плоскость  $\pi_1$  параллельна оси  $Oz$ .

Аналогично, плоскость  $\pi_2$  параллельна оси  $Ox$ , а плоскость  $\pi_3$  — оси  $Oy$ . В связи с этим они называются *проектирующими плоскостями*, а система

$$l: \quad \begin{cases} \frac{x - x_0}{p} = \frac{z - z_0}{r}, \\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}, \\ \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \end{cases} \quad (9.7)$$

называется *уравнениями прямой в проекциях*.



## 60. Взаимное расположение прямых в пространстве

Как известно, две прямые  $l$  и  $l'$  в пространстве могут совпадать ( $l = l'$ ), быть параллельными ( $l \parallel l'$ ), пересекаться в некоторой точке  $M$  ( $l \cap l' = M$ ) или скрещиваться ( $l \nparallel l'$ ). Наша задача — научиться различать эти ситуации по каноническим уравнениям прямых:

$$l: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}; \quad l': \frac{x - x'_0}{p'} = \frac{y - y'_0}{q'} = \frac{z - z'_0}{r'}.$$

Из этих уравнений получаем точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , принадлежащую прямой  $l$ , точку  $M'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ , через которую проходит прямая  $l'$ , и направляющие векторы  $\vec{a}(p, q, r)$  и  $\vec{a}'(p', q', r')$  этих прямых. Построим также вектор

$$\vec{m} = \overrightarrow{M'_0 M_0}(x_0 - x'_0, y_0 - y'_0, z_0 - z'_0).$$

Оказывается, исследуя эти три вектора, можно понять, как расположены прямые  $l$  и  $l'$ . Обратимся к рис. 9.4.

На рис. 9.4, а отражена ситуация, когда прямые совпадают:  $l = l'$ . Ясно, что при этом все три вектора:  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$  и  $\vec{m}$  коллинеарны (их координаты пропорциональны). Более того, коллинеарность этих векторов *равносильна* тому, что прямые совпадают.

Приведем пример совпадающих прямых, заданных разными уравнениями:

$$l: \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 4}{2};$$

$$l': \frac{x - 4}{4} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 2}{-4}.$$

Здесь  $\vec{a}(-2, 1, 2)$ ,  $\vec{a}'(4, -2, -4) = -2\vec{a}$  и  $\vec{m} = (-2, 1, 2) = \vec{a}$ .

Предположим теперь, что  $l \neq l'$ , но  $l \parallel l'$  (рис. 9.4, б). Тогда их направляющие векторы должны быть коллинеарны, т. е.

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'},$$

но  $\vec{m} \nparallel \vec{a}$ .

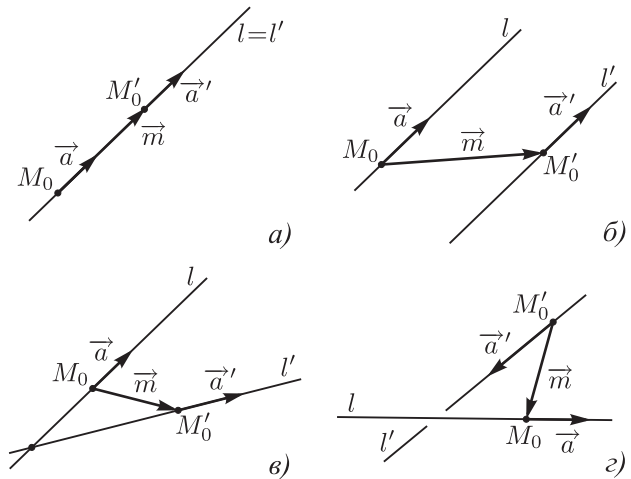
Выпишем координаты направляющих векторов и вектора  $\vec{m}$  для прямых:

$$l: \frac{x}{-2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 4}{2}; \quad l': \frac{x - 4}{4} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 2}{-4}.$$

$\vec{a}(-2, 1, 2)$ ,  $\vec{a}'(4, -2, -4) = -2\vec{a}$ ,  $\vec{m}(-4, 1, 2)$ . Легко заметить, что  $\vec{a} \parallel \vec{a}'$ , но  $\vec{m} \nparallel \vec{a}$ . Значит, эти прямые параллельны, но не совпадают.

Пересекающиеся прямые изображены на рис. 9.4, в. При этом, конечно,  $\vec{a} \nparallel \vec{a}'$ . Однако и в том случае, когда прямые скрещиваются (рис. 9.4, г), направляющие векторы прямых не могут быть параллельны! Как же отличать эти случаи друг от друга?

Внимательно исследуя рис. 9.4, можно заметить, что случай скрещивающихся прямых отличается от всех остальных тем, что скрещивающиеся прямые *не могут лежать в одной плоскости*. В частности, векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$  и  $\vec{m}$  некопланарны, а в первых трех случаях указанные векторы компланарны!



**Рис. 9.4.** Взаимное расположение прямых в пространстве: а) совпадающие; б) параллельные; в) пересекающиеся; г) скрещивающиеся

Ответить на вопрос о компланарности трех векторов можно с помощью смешанного произведения: векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$  и  $\vec{m}$  компланарны тогда и только тогда, когда  $\langle \vec{a}, \vec{a}', \vec{m} \rangle = 0$ . Осталось вспомнить, что смешанное произведение можно вычислить с помощью определителя:

$$\langle \vec{a}, \vec{a}', \vec{m} \rangle = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ x_0 - x'_0 & y_0 - y'_0 & z_0 - z'_0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, если этот определитель отличен от нуля, то прямые скрещиваются, а если равен нулю, то лежат в одной плоскости, т. е. могут совпадать, быть параллельными или пересекаться. Проиллюстрируем это на примере.

**Пример 9.1.** Выяснить взаимное расположение прямых:

$$l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-2}{3}, \quad l_2: \frac{x-3}{0} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{-1}, \quad l_3: \frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}.$$

**Решение.** Выпишем сначала их направляющие векторы:

$$\vec{a}_1(1, 2, 3), \quad \vec{a}_2(0, 2, -1), \quad \vec{a}_3(2, 1, -1).$$

Точки  $M_i$ , принадлежащие прямым  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), имеют координаты:

$$M_1(3, -5, 2), \quad M_2(3, -5, -1), \quad M_3(6, -2, 4).$$

Введем векторы  $\vec{m}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2}(0, 0, -3)$  и  $\vec{m}_{13} = \overrightarrow{M_1M_3}(3, 3, 2)$ .

Вычисляя смешанное произведение

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{m}_{12} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

убеждаемся, что  $l_1 \div l_2$ .

Теперь исследуем взаимное положение прямых  $l_1$  и  $l_3$ , для чего найдем определитель:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{m}_{13} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1(2+3) - 2(4+3) + 3(6-3) = 0.$$

Поскольку смешанное произведение равно нулю, прямые  $l_1$  и  $l_3$  лежат в одной плоскости. С другой стороны,  $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_3$  (почему?). Значит, соответствующие прямые непараллельны и могут только пересекаться!

Предлагаем читателю исследовать взаимное расположение прямых  $l_2$  и  $l_3$  по предложенной выше схеме самостоятельно.

## 61. Уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым

Из школьного курса стереометрии известно, что существует единственная прямая  $l$ , пересекающая каждую из двух данных скрещивающихся прямых  $l_1$  и  $l_2$  под прямым углом (рис. 9.5). Эта прямая называется *общим перпендикуляром* к скрещивающимся прямым.

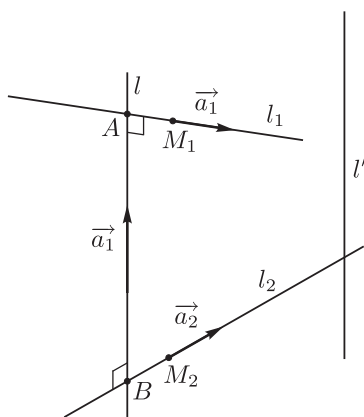


Рис. 9.5. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Цель этого пункта — выписать уравнения общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым, если они заданы каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1};$$

$$l_2: \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}.$$

Из канонических уравнений мы легко можем определить точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , принадлежащие прямым  $l_1$  и  $l_2$ , и их направляющие векторы  $\vec{a}_1(p_1, q_1, r_1)$  и  $\vec{a}_2(p_2, q_2, r_2)$ .

Однако чтобы выписать канонические уравнения общего перпендикуляра  $l$ , нам необходимо знать его направляющий вектор  $\vec{a}(p, q, r)$  и какую-нибудь точку  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ .

Начнем с направляющего вектора. Поскольку  $l \perp l_1$  и  $l \perp l_2$ , то можно утверждать, что  $\vec{a} \perp \vec{a}_1$  и  $\vec{a} \perp \vec{a}_2$ . Кроме того, из определения векторного произведения следует, что  $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \perp \vec{a}_1$  и  $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \perp \vec{a}_2$ . Значит, в качестве направляющего вектора общего перпендикуляра можно выбрать  $\vec{a} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ . Его координаты легко найти с помощью стандартной формулы, вычисляющей векторное произведение.

Но вот точку  $M_0 \in l$  угадать крайне сложно. Действительно, если в качестве  $M_0$  выбрать какую-либо точку на одной из прямых  $l_1$  или  $l_2$ , то мы не сможем гарантировать, что прямая  $l'$ , проходящая через нее параллельно вектору  $\vec{a}$ , пересечет вторую прямую. Так что никакой априорной информации для выбора точки  $M_0$  у нас нет.

Однако кроме канонических уравнений прямых существуют еще и общие уравнения, описывающие прямую как пересечение двух плоскостей. Посмотрим, можно ли по каноническим уравнениям прямых  $l_1$  и  $l_2$  найти две плоскости, которым принадлежит их общий перпендикуляр. Для этого полезно представить себе ситуацию, в которой общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым виден совершенно отчетливо. Это происходит, например, в прямом параллелепипеде, т. е. в таком параллелепипеде, где боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 9.6).

Если в качестве скрещивающихся прямых выбрать  $l_1 = (D_1A_1)$  и  $l_2 = (AB)$ , то их общим перпендикуляром будет ребро  $(AA_1) = l$ . Действительно, поскольку параллелепипед прямой, то все ребра (в частности,  $(AA_1)$ ) перпендикулярны как нижнему, так и верхнему основаниям. Значит, ребро  $(AA_1)$  перпендикулярно всем прямым, лежащим в основаниях. Поэтому  $(AA_1) \perp l_1$  и  $(AA_1) \perp l_2$ . Кроме того, прямая  $(AA_1)$  пересекает прямую  $l_1$  в точке  $A_1$ , а прямую  $l_2$  в точке  $A$ .

Из рисунка видно, что ребро  $(AA_1)$  является пересечением граней  $ADD_1A_1$  и  $ABB_1A_1$ , иначе говоря,  $l = \pi_1 \cap \pi_2$ . Поэтому, если выписать уравнения этих плоскостей, можно получить общие уравнения прямой  $l$  (см. стр. 37).

Начнем с уравнения плоскости  $\pi_1$ . Из рисунка видно, что плоскость  $\pi_1$  проходит через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  параллельно векторам  $\vec{a}_1(p_1, q_1, r_1)$  и  $\vec{a}(p, q, r)$ . Координаты  $\vec{a}_1$  мы знаем из уравнений прямой  $l_1$ , а координаты направляющего вектора  $\vec{a}$  общего перпендикуляра нам известны как результат векторного произведения  $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ . Поэтому мы легко можем написать уравнение

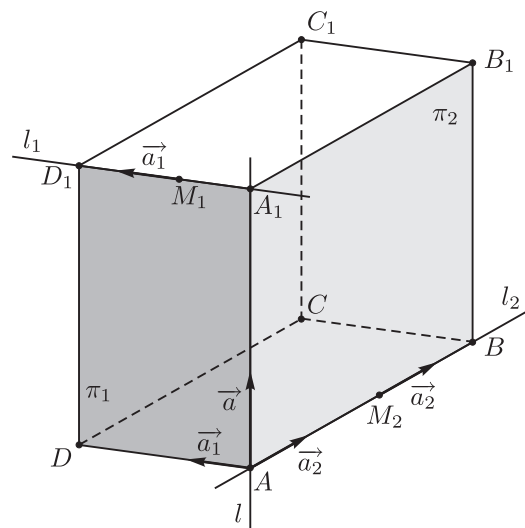


Рис. 9.6. Прямой параллелепипед

плоскости  $\pi_1$ :

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, плоскость  $\pi_2$  проходит через точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  параллельно векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{a}_2(p_2, q_2, r_2)$ . Следовательно, уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Осталось записать полученные уравнения плоскостей в виде системы (9.8), что даст нам *уравнения общего перпендикуляра*.

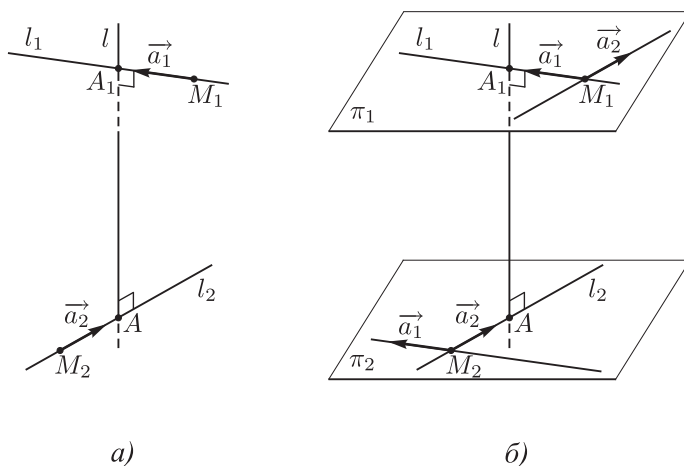
$$l: \begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Заметим, что для любых скрещивающихся прямых можно построить прямой параллелепипед так, чтобы исходные прямые являлись продолжением его скрещивающихся ребер. Подумайте, как это можно сделать (ответ приведен на следующей странице).

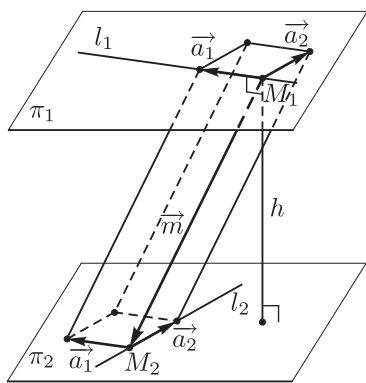
В примере 9.10 разобрана конкретная задача на уравнение общего перпендикуляра. Мы же со своей стороны хотим порекомендовать не зубрить формулу (9.8), а запомнить рис. 9.6 и тот факт, что общий перпендикуляр получается как пересечение подходящих граней прямого параллелепипеда.

## 62. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Вычислим расстояние между скрещивающимися прямыми. Напомним, что это расстояние является длиной отрезка общего перпендикуляра, заключенного между точками пересечения перпендикуляра со скрещивающимися прямыми. На рис. 9.7,  $a$  — это длина отрезка  $AA_1$ .



**Рис. 9.7.** Расстояние между скрещивающимися прямыми



**Рис. 9.8.** Параллелепипед для определения расстояния между скрещивающимися прямыми

$\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}$ .

Осталось сообразить, как найти высоту параллелепипеда. Вспомним, что объем  $V$  параллелепипеда можно вычислить как произведение  $Sh$  (где  $h$  — высота, а  $S$  — площадь основания) или как модуль смешанного произведения

$$V = |\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{m} \rangle|.$$

С другой стороны, площадь основания — это площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , которая совпадает с длиной векторного произведения

$$S = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|.$$

Таким образом, искомое расстояние

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{m} \rangle|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}. \quad (9.9)$$

Подробные вычисления приведены в примере 9.11.

## 63\*. Проективная плоскость

В лекции, посвященной прямой на плоскости, мы познакомились с таким интересным геометрическим объектом, как проективная прямая. Напомним, она возникает как многообразие модулей пучка прямых на плоскости, проходящих через заданную точку.

Здесь мы продолжим знакомство с проективными объектами, исследовав пучок прямых пространства, проходящих через начало координат.

Множество, точками которого являются прямые пространства, проходящие через начало координат, называется *проективной плоскостью* и обозначается  $\mathbb{P}^2$ .

Любая точка проективной плоскости, т. е. прямая, проходящая через начало координат, однозначно определяется своим направляющим вектором и описывается уравнениями

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Таким образом, в качестве координат на проективной плоскости можно было бы выбрать тройку чисел  $(p, q, r)$ . Однако при умножении такой тройки на любое ненулевое число  $\lambda$  мы получаем новую тройку, хотя прямая не меняется. Поэтому, как и в случае проективной прямой, координатами на множестве прямых, проходящих через начало координат, является тройка чисел с точностью до пропорциональности:  $(p : q : r)$ . Это означает, что для любого ненулевого числа  $\lambda$

$$(p : q : r) = (\lambda p : \lambda q : \lambda r).$$

**63.1. Карты.** Хотелось бы как-то представить себе проективную плоскость. Иными словами, найти подходящий геометрический объект, каждая точка которого изображает точку проективной плоскости, или прямую, проходящую через начало координат. Это можно сделать как аналитически, так и геометрически.

*Аналитический подход.* Обозначим через  $U_x$  подмножество точек проективной плоскости, отвечающих тем прямым

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

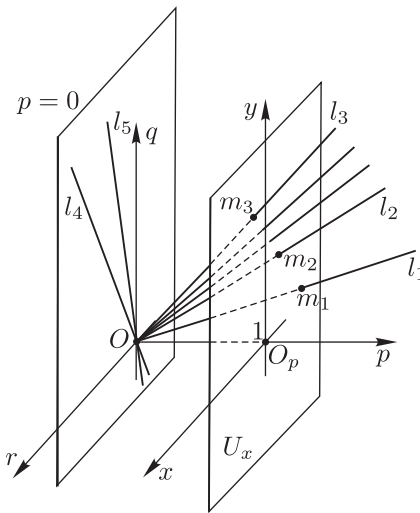
у которых координата  $p$  направляющего вектора отлична от нуля. Тогда пара чисел  $\left(\frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right)$  взаимно однозначно соответствует одной из таких прямых или точке на проективной плоскости. Поэтому можно утверждать, что подмножество  $U_x$  проективной плоскости — это то же самое, что и обыкновенная плоскость. Проиллюстрируем это соображение геометрически.

*Геометрический подход.* Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат  $(Oprq)$  и через точку  $(1, 0, 0)$  проведем плоскость  $U_x$ , описываемую уравнением  $p = 1$  (рис. 9.9).

Тогда «большинство» интересующих нас прямых пересекут эту плоскость ровно в одной точке. Более точно этот факт можно описать, если в плоскости  $U_x$  ввести систему координат  $(O_pxy)$ . Тогда прямая

$$l: \quad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

пересечет плоскость  $U_x$  тогда и только тогда, когда  $p \neq 0$ , причем точка пересечения  $m$  будет иметь координаты  $\left(1, \frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right)$  в исходной системе координат или  $\left(\frac{q}{p}, \frac{r}{p}\right)$  в системе координат  $(O_pxy)$ .



**Рис. 9.9.** Карта  $U_x$  проективной плоскости

Плоскость  $U_x$  называют *картой* проективной плоскости именно потому, что каждая ее точка изображает какую-то точку проективной плоскости, причем близкие точки проективной плоскости изображаются близкими точками карты (см. рис. 9.9).

К сожалению, не все прямые, проходящие через начало координат, или точки проективной плоскости, оставят свой след на карте. Например, прямые  $l_4$  и  $l_5$  на рис. 9.9 не пересекут карту, поэтому карта изображает лишь часть проективной плоскости, хотя и довольно значительную.

Ясно, что в карте  $U_x$  будут отсутствовать те точки проективной плоскости, которые соответствуют прямым

$$l: \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Любая из этих прямых лежит в плоскости  $p = 0$ , параллельной  $U_x$ , и проходит через начало координат. Но мы уже знаем, что множество прямых на плоскости, проходящих через одну точку, есть не что иное, как проективная прямая  $\mathbb{P}^1$ . Обозначим эту проективную прямую, лежащую в исследуемой проективной плоскости, через  $\mathcal{L}_\infty$ .

Таким образом, можно заключить, что проективная плоскость состоит из карты  $U_x$  (обыкновенной плоскости) и проективной прямой  $\mathcal{L}_\infty$ . Возникает вопрос: а как эти куски проективной плоскости соотносятся между собой?

Для этого выберем какую-нибудь плоскость  $\pi$ , проходящую через начало координат и пересекающую как карту  $U_x$  (по прямой  $l_\pi$ ), так и плоскость  $p = 0$  (по прямой  $l$ ) (рис. 9.10). С точки зрения проективной геометрии плоскость  $\pi$  состоит из прямых, проходящих через

начало координат, т. е. является проективной прямой. Обозначим эту прямую, лежащую, очевидно, в проективной плоскости, через  $\mathcal{L}_\pi$ . Обратите внимание, что на карте  $U_x$  вся проективная прямая  $\mathcal{L}_\pi$ , за исключением одной точки (какой?), выглядит как обычная прямая  $l_\pi$ .

На прямой  $l_\pi$  выберем последовательность точек  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , «уходящую в плюс бесконечность». Эта последовательность соответствует прямым  $l_1, l_2, \dots$  (точкам проективной плоскости). Причем в пределе получается прямая  $\lim_{m_i \rightarrow \infty} l_i = l$  — пересечение плоскостей  $\pi$  и  $p = 0$ . Она соответствует некоторой точке  $m \in \mathcal{L}_\infty$  проективной плоскости.

Можно на прямой  $l_\pi$  выбрать последовательность точек  $m_{-1}, m_{-2}, \dots$ , «уходящую в минус бесконечность», и убедиться, что в пределе получится та же самая точка  $m$  проективной плоскости.

Оказывается, что множество точек  $\mathcal{L}_\pi$  проективной плоскости, большая часть которого на карте выглядит как прямая  $l_\pi$ , на проективной плоскости напоминает замкнутую кривую (к обоим бесконечно удаленным концам прямой  $l_\pi$  подклеивается точка  $m \in \mathcal{L}_\infty$ ).

Можно выбрать еще две карты — плоскость  $U_y: q = 1$  и плоскость  $U_z: r = 1$ . Тогда любая точка проективной плоскости (прямая пространства, проходящая через начало координат) попадет хотя бы в одну карту. Иными словами,  $\mathbb{P}^2 = U_x \cup U_y \cup U_z$ .

На рис. 9.11 показаны две карты  $U_x$  и  $U_y$ . Обратите внимание, что любая прямая, кроме  $\{p = 0, q = 0\}$ , попадает либо в одну, либо в другую карту. Значит, объединение  $U_x \cup U_y$  дает всю проективную плоскость, кроме одной единственной точки.

К сожалению, рис. 9.11 может дать ложное представление о проективной плоскости, поскольку может показаться, что в реальности две карты пересекаются по прямой. На самом деле общая часть двух карт представляет собой проективную плоскость без двух проективных прямых. Действительно, прямая

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

оставляет след на обеих картах  $U_x$  и  $U_y$  тогда и только тогда, когда одновременно  $p \neq 0$  и  $q \neq 0$ . Чтобы представить себе ситуацию более наглядно, рассмотрим рис. 9.12, на котором прямые, не представленные хотя бы в одной из карт  $U_x$  или  $U_y$ , расположены в плоскостях, закрашенных серым цветом.

Прямые, лежащие в плоскости  $p = 0$ , не попадают в карту  $U_x$ , а лежащие в плоскости  $q = 0$  — в карту  $U_y$ . Все остальные прямые пересекут обе карты  $U_x$  и  $U_y$ . С точки зрения проективной геометрии прямые, проходящие через  $O(0, 0, 0)$  и расположенные в плоскости  $p = 0$ , представляют собой проективную прямую  $\mathcal{L}_{p=0}$ , а расположенные в плоскости  $q = 0$ , — проективную прямую  $\mathcal{L}_{q=0}$ . Значит, действительно  $U_x \cap U_y$  — это вся проективная плоскость без двух проективных прямых.

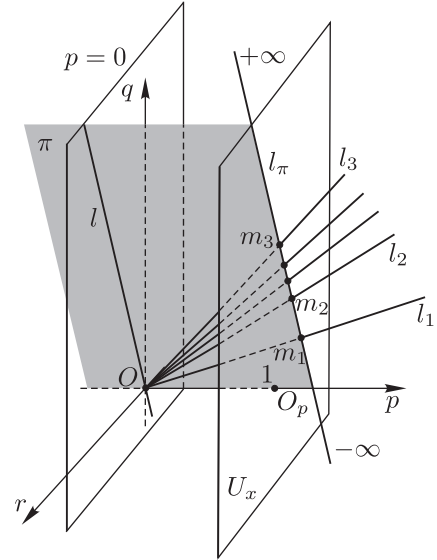


Рис. 9.10. Проективная прямая  $\mathcal{L}$ , соответствующая прямым в плоскости  $\pi$

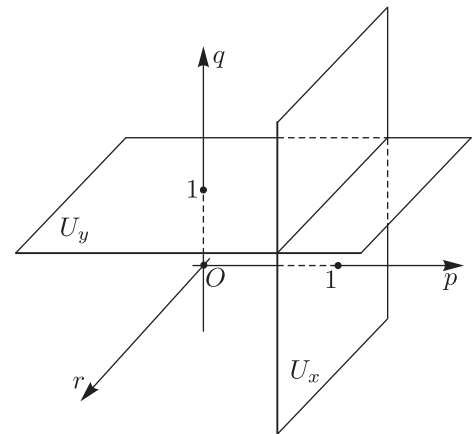


Рис. 9.11. Две карты проективной плоскости

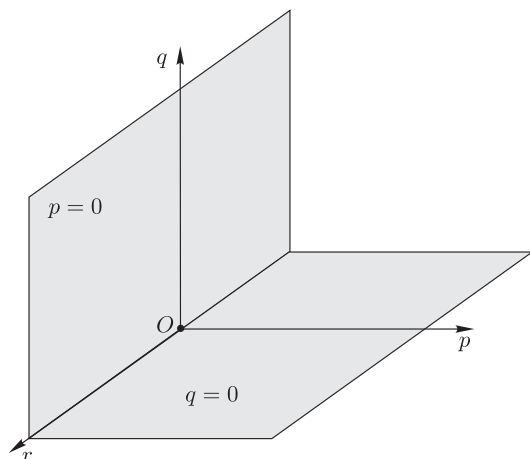


Рис. 9.12. Множество прямых, не попавших в объединение карт  $U_x \cup U_y$

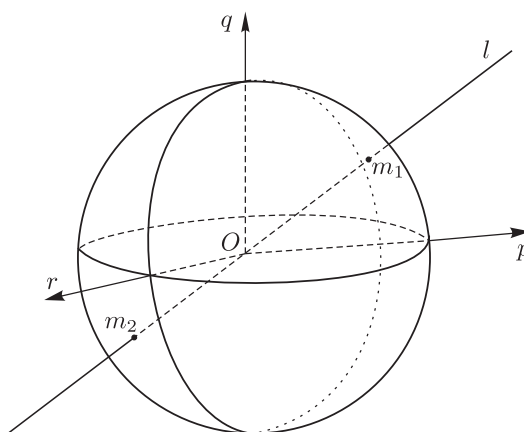


Рис. 9.13. Сфера как проективная плоскость

**63.2. Альтернативная модель проективной плоскости.** Есть еще один взгляд на проективную плоскость. Построим сферу единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 9.13).

Тогда каждая прямая, проходящая через начало координат, пересечет эту сферу ровно в двух точках. Поэтому можно сказать, что проективная плоскость представляет собой сферу, у которой склеили все диаметрально противоположные точки! Довольно трудно представить себе, что произойдет со сферой после такой склейки. Однако такая модель тоже имеет право на существование.

**63.3. Прямые проективной плоскости.** Как мы выяснили, проективная плоскость локально (т.е. небольшая ее часть) очень похожа на обычную плоскость. Поэтому естественно задать вопрос: что представляют собой прямые на такой плоскости? Для этого зафиксируем карту  $U_x$  и рассмотрим там какую-нибудь прямую  $l_\pi$  (рис. 9.10). Эта прямая изображает прямые, проходящие через начало координат и лежащие в плоскости  $\pi$ . Иными словами, прямая на карте действительно изображает некую проективную прямую  $\mathcal{L}_\pi$  проективной плоскости, но не всю, а без одной точки (почему?).

Проведем на карте  $U_x$  две параллельные прямые  $l_\pi$  и  $l_{\pi'}$ . Они изображают проективные прямые  $\mathcal{L}_\pi$  и  $\mathcal{L}_{\pi'}$ , соответствующие прямым в плоскостях  $\pi$  и  $\pi'$  (рис. 9.14).

Видно, что плоскости  $\pi$  и  $\pi'$  пересекаются по прямой  $l$ , которая соответствует некоторой точке  $m$  проективной плоскости. Это свидетельствует о том, что проективные прямые  $\mathcal{L}_\pi$  и  $\mathcal{L}_{\pi'}$  (изображенные в карте параллельными прямыми  $l_\pi$  и  $l_{\pi'}$ ) в действительности имеют общую точку  $m$ , которая просто не видна на карте.

Иными словами, можно утверждать, что любые проективные прямые проективной плоскости пересекаются, т.е. на проективной плоскости нет параллельных прямых. Факт удивительный, но он объясняет странный тезис: параллельные прямые пересекаются на бесконечности. Действительно, поскольку точка  $m$ , о которой шла речь выше, не представлена на карте  $U_x$ , ее можно считать бесконечно удаленной. Однако доказано, что она принадлежит обеим проективным прямым  $\mathcal{L}_\pi$  и  $\mathcal{L}_{\pi'}$ , которые в «конечной части», т.е. на карте, изображаются параллельными прямыми.

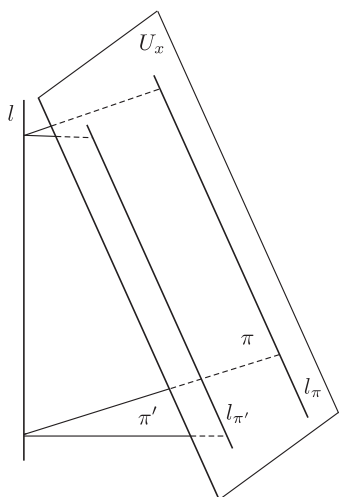


Рис. 9.14. Две проективные прямые

## Примеры решения типовых задач

**Пример 9.2.** Прямая задана общими уравнениями:

$$l: \begin{cases} 2x - 5y + 4z + 5 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$



Записать ее канонические уравнения.

**Решение.** Чтобы выписать канонические уравнения прямой (9.2), нужно найти хотя бы одну точку, лежащую на прямой, и направляющий вектор прямой.

Начнем с точки. Ясно, что если точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  принадлежит прямой  $l$ , то ее координаты должны удовлетворять системе, выписанной в условии примера. Однако в этой системе 2 уравнения и три неизвестных! Поэтому система не определена (действительно, множество решений системы — это координаты *всех* точек на прямой, а их бесконечно много). Но ведь достаточно одного решения! Поэтому положим, например,  $z = 1$  (можно брать любое удобное числовое значение). Тогда система сводится к уравнениям:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -9, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем  $x = -2y$  и подставляем это соотношение в первое:

$$-4y - 5y = -9,$$

откуда  $y = 1$ . Значит,  $x = -2$ . Вспоминая, что мы положили  $z = 1$ , находим координаты точки  $M_0(-2, 1, 1)$ , принадлежащей данной прямой.

С направляющим вектором дело обстоит не так просто. Чтобы понять, как вычислить его координаты, рассмотрим рис. 9.15. На нем изображена плоскость  $\pi_1$ , уравнением которой является первое уравнение системы (9.10), и плоскость  $\pi_2$ , уравнением которой является второе уравнение системы.

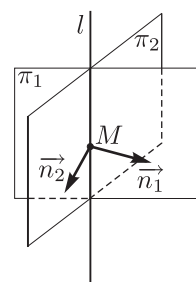


Рис. 9.15. Рисунок к задаче 9.2

Поскольку прямая  $l$  лежит в плоскости  $\pi_1$ , то она перпендикулярна нормали к этой плоскости, т. е.  $l \perp \vec{n}_1(2, -5, 4)$ . Кроме того, прямая  $l$  лежит и в плоскости  $\pi_2$ , а значит, перпендикулярна и вектору  $\vec{n}_2(1, 2, -1)$ . Таким образом, направляющий вектор  $\vec{a}$  прямой должен быть перпендикулярен как вектору  $\vec{n}_1$ , так и  $\vec{n}_2$ .

Известно, что векторное произведение  $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$  перпендикулярно обоим векторам  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ . Поэтому вектор  $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$  можно выбрать в качестве направляющего. Осталось вспомнить, как ищутся координаты векторного произведения. Для этого достаточно вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Итак, направляющий вектор — это вектор  $\vec{a}(-3, 6, 9)$ .

Значит, канонические уравнения данной прямой имеют вид:

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{9}.$$

**Пример 9.3.** Выписать уравнения прямой  $l$ , проходящей через точки  $M_1(0, 2, -1)$  и  $M_2(-1, 2, 3)$ .

**Решение.** Пара точек на прямой определяет ее направляющий вектор  $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}(-1, 0, 4)$ . Таким образом, требуется выписать уравнения прямой, проходящей через точку  $M_1$  параллельно вектору  $\vec{a}$  (формула (9.2) на стр. 36):

$$l: \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{4}.$$

**Пример 9.4.** Дана пара прямых:

$$\begin{aligned} l_1: \quad & \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}, \\ l_2: \quad & \frac{x+2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-2}. \end{aligned}$$

Убедиться в параллельности этих прямых и выписать уравнение плоскости содержащей эти прямые.

**Решение.** Выпишем координаты направляющих векторов прямых и вектора  $\vec{m}$ , соединяющего точки  $M_1(0, 1, -1) \in l_1$  и  $M_2(-2, 0, 1) \in l_2$ :

$$\vec{a}_1(2, 3, -1), \quad \vec{a}_2(4, 6, -2), \quad \vec{m}(-2, -1, 2).$$

Так как  $\vec{a}_2 = 2\vec{a}_1$ , то прямые параллельны. Кроме того, координаты векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{m}$  непропорциональны. Следовательно (см. стр. 39),  $l_1 \neq l_2$ .

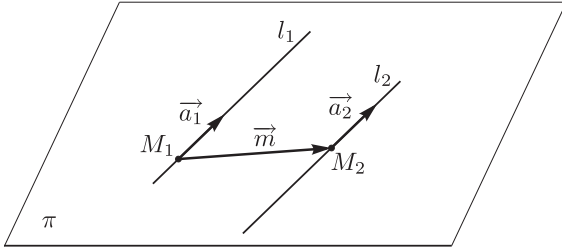


Рис. 9.16. Рисунок к задаче 9.4

Плоскость  $\pi$ , проходящая через прямые  $l_1$  и  $l_2$ , должна содержать точки  $M_1(0, 1, -1)$  и  $M_2(-2, 0, 1)$  (рис. 9.16). В частности, вектор  $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2} \parallel \pi$ . Кроме того, поскольку на плоскости  $\pi$  лежит прямая  $l_1$ , направляющий вектор прямой  $\vec{a}_1$  тоже параллелен  $\pi$ . Таким образом, нам нужно написать уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам, ей параллельным. Такая задача уже решена в примере к теме 8. Для этого достаточно ввести вектор  $\overrightarrow{M_1M}(x, y-1, z+1)$  с началом в  $M_1$  и концом в произвольной точке  $M(x, y, z)$  и заметить, что  $M \in \pi$  тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{m}$  и  $\overrightarrow{M_1M}$  компланарны, т. е.

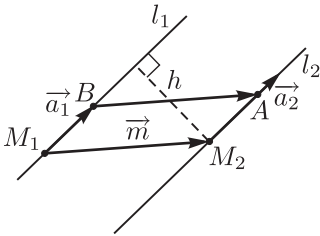
$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y + 4z + 6 = 0.$$

**Пример 9.5.** Найти расстояние между параллельными прямыми:

$$l_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}, \quad l_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-2}.$$

**Решение.** Изобразим параллельные прямые на рис. 9.17, отметив на нем известные данные:  $M_1(0, 1, -1)$ ,  $M_2(-2, 0, 1)$ ,  $\vec{a}_1(2, 3, -1)$ .

На векторах  $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}(-2, -1, 2)$  и  $\vec{a}_1$  построим параллелограмм  $M_1M_2AB$ . Его высота  $h$  и будет искомым расстоянием.



Известно, что длина векторного произведения  $||[\vec{m}, \vec{a}_1]||$  равна площади  $S$  построенного параллелограмма. Поэтому отношение  $S/||\vec{a}_1||$  — длина высоты  $h$ , т. е. расстояние, которое требуется найти.

Вычислим сначала координаты векторного произведения:

$$[\vec{m}, \vec{a}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Рис. 9.17. Расстояние между параллельными прямыми

Следовательно,

$$S = ||[\vec{m}, \vec{a}_1]|| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Длина основания  $||\vec{a}_1|| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$ . Поэтому,

$$\rho(l_1, l_2) = h = 3\sqrt{\frac{5}{14}} = \frac{3\sqrt{70}}{14}.$$

**Пример 9.6.** Написать уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через прямую  $l_1$  параллельно прямой  $l_2$ , если

$$l_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{5}, \quad l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+2}{0}.$$

**Решение.** Из уравнения первой прямой выписываем координаты точки  $M_1(-2, 4, 0) \in l_1$  и координаты направляющего вектора  $\vec{a}_1(3, 2, 5)$ . Из уравнения прямой  $l_2$  извлекаем координаты ее направляющего вектора  $\vec{a}_2(2, 1, 0)$ .

По условию плоскость  $\pi$  проходит через прямую  $l_1$ . В частности, она содержит точку  $M_1$  и параллельна вектору  $\vec{a}_1$ . Кроме того, из условия известно, что  $\pi \parallel l_2$ . Следовательно,  $\pi \parallel \vec{a}_2$ .

Таким образом, нужно написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1(-2, 4, 0)$  параллельно векторам  $\vec{a}_1(3, 2, 5)$  и  $\vec{a}_2(2, 1, 0)$ :

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y-4 & z \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x + 10y - z - 50 = 0.$$

**Пример 9.7.** Убедившись, что прямые

$$l_1: \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{6}, \quad l_2: \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{12}$$

пересекаются, вычислить косинус угла между ними.

**Решение.** Координаты направляющих векторов прямых определяем из уравнений:  $\vec{a}_1(4, 3, 6)$  и  $\vec{a}_2(5, 3, 12)$ . Так как их координаты непропорциональны, то прямые не параллельны. Значит,  $l_1$  и  $l_2$  либо пересекаются, либо скрещиваются, причем они будут пересекаться тогда и только тогда, когда лежат в одной плоскости.

Прямая  $l_1$  проходит через точку  $M_1(-6, 1, -2)$ , а  $l_2$  через  $M_2(-5, 2, -2)$ . Рассмотрим вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}(1, 1, 0)$ . Ясно, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$  компланарны, что можно проверить с помощью смешанного произведения:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-12) - 3 \cdot (-12) + 6 \cdot 2 = 0.$$

Поскольку смешанное произведение равно нулю, то соответствующие векторы компланарны и прямые действительно пересекаются.

Очевидно, что один из углов  $\varphi$  между пересекающимися прямыми совпадает с углом между их направляющими векторами. Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 12}{(\sqrt{16+9+36})(\sqrt{25+9+144})} = \frac{101}{\sqrt{61} \cdot 178} = \frac{101\sqrt{10858}}{10858}.$$

**Пример 9.8.** Убедившись, что прямая  $l: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$  параллельна плоскости  $\pi: -x + y + z - 6 = 0$ , вычислить расстояние  $\rho(l, \pi)$  от прямой до плоскости.

**Решение.** Направляющий вектор прямой имеет координаты  $\vec{a}(4, 3, 1)$ . Координаты нормали к плоскости:  $\vec{n}(-1, 1, 1)$ . Их скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{n}) = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ . Значит,  $\vec{a} \perp \vec{n}$ . Поэтому  $l \parallel \pi$ .

Расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой равно расстоянию от любой точки прямой до этой плоскости. Известны координаты по крайней мере одной точки  $M_0 \in l$ :  $M_0(-1, 2, 1)$ . Таким образом, нужно вычислить расстояние  $\rho(M_0, \pi)$ , что легче всего можно сделать с помощью нормального уравнения плоскости.

Чтобы из уравнения плоскости, данного в условии, получить нормальное уравнение, нужно исходное уравнение поделить на нормирующий множитель  $N = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ :

$$\pi: -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} = 0.$$

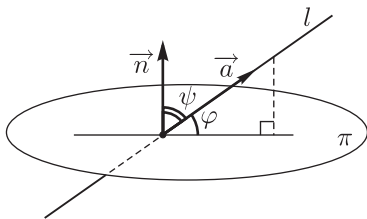
Теперь искомое расстояние равно

$$\left| -\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{6}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Пример 9.9.** Найти угол между прямой  $l: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{0}$  и плоскостью  $\pi: 2x - y + 5z - 6 = 0$ .

**Решение.**

Из рис. 9.18 видно, что  $\sin \varphi = |\cos \psi|$ . Действительно, в случае, если угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{a}$  окажется тупым, то косинус угла  $\varphi$  будет отрицательным, а синус угла  $\varphi$  все равно должен остаться неотрицательным, поэтому берем абсолютную величину от  $\cos \psi$ . Но  $\psi$  — это угол между векторами  $\vec{n}(2, -1, 5)$  и  $\vec{a}(2, 3, 0)$ . Следовательно,



**Рис. 9.18.** Угол между прямой и плоскостью

$$\sin \varphi = |\cos \psi| = \frac{|4 - 3|}{(\sqrt{4 + 1 + 25})(\sqrt{4 + 9})} = \frac{1}{\sqrt{390}} = \frac{\sqrt{390}}{390}.$$

**Пример 9.10.** Написать уравнения общего перпендикуляра  $l$  к скрещивающимся прямым

$$l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}, \quad l_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

**Решение.** Прежде всего выпишем все данные, которые можно извлечь из условия. Направляющие векторы прямых:  $\vec{a}_1(2, 3, -1)$ ,  $\vec{a}_2(3, 3, 2)$ . Точки  $M_1(2, -1, 0)$ ,  $M_2(3, -1, 2)$  принадлежат прямым.

Направляющий вектор  $\vec{a}$  общего перпендикуляра должен быть ортогонален как  $\vec{a}_1$ , так и  $\vec{a}_2$ . Поэтому в качестве такого вектора можно выбрать векторное произведение

$$\vec{a} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2],$$

которое вычисляется через определитель

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Следовательно, направляющий вектор общего перпендикуляра  $\vec{a}(9, -7, -3)$ .

Теперь воспользуемся рис. 9.6, на котором видно, что общий перпендикуляр получается как пересечение плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

Плоскость  $\pi_1$  проходит через точку  $M_1(2, -1, 0)$  параллельно векторам  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}$ . Поэтому ее уравнение записывается как

$$\begin{aligned} \pi_1: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 9 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow -16(x-2) - 3(y+1) - 41z = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16(x-2) + 3(y+1) + 41z = 0 \Leftrightarrow 16x + 3y + 41z - 29 = 0. \end{aligned}$$

Плоскость  $\pi_2$  проходит через точку  $M_2(3, -1, 2)$  параллельно векторам  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}$ .

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 9 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-3) + 27(y+1) - 48(z-2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x + 27y + 48z + 108 = 0.$$

Искомое уравнение общего перпендикуляра можно записать как систему:

$$l: \begin{cases} 16x + 3y + 41z - 29 = 0, \\ 5x + 27y + 48z + 108 = 0. \end{cases}$$

**Пример 9.11.** Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}, \quad l_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

**Решение.** Воспользуемся полученными в примере 9.10 результатами:  $\vec{a}_1(2, 3, -1)$ ,  $\vec{a}_2(3, 3, 2)$ ,  $\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}(1, 0, 2)$ .

Вновь обратимся к рис. 9.8, на котором изображен параллелепипед, высота которого и есть искомое расстояние. Объем параллелепипеда вычисляется как абсолютная величина смешанного произведения  $V = |\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{m} \rangle|$ , где

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{m} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-3) = 3,$$

тогда  $V = 3$ . Площадь основания — это длина векторного произведения

$$S = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = |\vec{a}|.$$

Координаты этого векторного произведения уже получены в примере 9.10:  $\vec{a}(9, -7, -3)$ . Отсюда

$$S = \sqrt{81 + 49 + 9} = \sqrt{139}.$$

Значит, искомое расстояние равно

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{V}{S} = \frac{3}{\sqrt{139}} = \frac{3\sqrt{139}}{139}.$$

## Контрольные вопросы

- 9.1. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве. Каков смысл коэффициентов, входящих в уравнение?
- 9.2. Что называется общими уравнениями прямой в пространстве? Как перейти от канонических уравнений прямой к ее общим уравнениям?
- 9.3. Запишите параметрические уравнения прямой в пространстве. Сравните их с параметрическими уравнениями прямой на плоскости. Что между ними общего и в чем различие?
- 9.4. Запишите уравнение прямой в проекциях. Каков геометрический смысл проектирующих плоскостей?
- 9.5. Сформулируйте условие параллельности прямых в пространстве.
- 9.6. Опишите различные случаи взаимного расположения прямых в пространстве. Как определить эти случаи по каноническим уравнениям прямых?

- 9.7. Как найти расстояние между параллельными прямыми, заданными каноническими уравнениями?
- 9.8. Опишите алгоритм выписывания уравнения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.
- 9.9. Опишите методику вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми. Сделайте поясняющий рисунок.
- 9.10. Как вычислить расстояние от прямой до плоскости, параллельной этой прямой?
- 9.11. Опишите алгоритм вычисления угла между прямой и плоскостью.

## Задачи

- 9.1°. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(1, 2, -3)$  параллельно вектору  $\vec{l} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ .
- 9.2°. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(0, 1, 2)$  перпендикулярно плоскости  $2x - 3y + z - 1 = 0$ .
- 9.3°. Составьте параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точки  $P(1, 2, -1)$  и  $Q(2, 1, 3)$ .
- 9.4. Известны общие уравнения прямой  $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$  Запишите канонические и параметрические уравнения этой прямой. Найдите проекции этой прямой на координатные плоскости.
- 9.5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$  перпендикулярно плоскости  $x + y - z = -1$ .
- 9.6. Приведите уравнения прямой  $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$  к каноническим.
- 9.7. Прямая проходит через точку  $A(5, 2, -1)$  перпендикулярно плоскости, содержащей ось  $Oy$ , и параллельной вектору  $\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ . Составьте канонические и параметрические уравнения этой прямой.
- 9.8. Прямая проходит через точки  $A(0, 1, -2)$  и  $B(1, 3, 4)$ . Запишите канонические уравнения этой прямой.
- 9.9. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  перпендикулярно плоскости  $x + 4y - 3z + 7 = 0$ .
- 9.10. Найдите уравнения проекции прямой  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$  на плоскость  $x - y + 3z + 8 = 0$ .
- 9.11. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1, 0, 1)$  параллельно прямой  $\begin{cases} 3x - y + 2z = 7, \\ x + 3y - 2z = 3. \end{cases}$
- 9.12. Исследуйте взаимное расположение прямых  $l_1$  и  $l_2$ :
- а)  $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{1}; l_2 : \begin{cases} x - z = 1, \\ y + z = 1; \end{cases}$
- б)  $l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}; l_2 : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$
- в)  $l_1 : \begin{cases} x = t - 3, \\ y = 2t - 1, \\ z = t - 1; \end{cases} l_2 : \begin{cases} x - 3z + 4 = 0, \\ y - z - 2 = 0; \end{cases}$
- г)  $l_1 : x = \frac{y-9}{4} = -\frac{z+2}{3}; l_2 : \frac{x-2}{2} = -\frac{y}{2} = \frac{z+7}{9}.$
- 9.13. Найдите расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{-8} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-2}.$$

9.14. Напишите уравнение плоскости, содержащей прямые:

а)  $l_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-3}$  и  $l_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{-6}$ ;

б)  $l_1 : \begin{cases} x - z + 2 = 0, \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$  и  $l_2 : \begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = t + 4, \\ z = t + 2. \end{cases}$

9.15. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки  $A(1, -2, 3)$  на ось  $Oy$ .

9.16. Напишите уравнения общего перпендикуляра к прямым

$$\frac{x}{1} = \frac{y-9}{4} = \frac{z+2}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{9}.$$

Найдите расстояние между этими прямыми.

9.17. Найдите расстояние от точки  $A(0, 2, -3)$  до прямой, заданной уравнениями  $x = y = z$ .

9.18. Найдите координаты точки пересечения прямой  $l$  и плоскости  $\pi$ , если

а)  $l : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$  и  $\pi : x + 2y - z - 2 = 0$ ;

б)  $l : \begin{cases} x = t + 3, \\ y = -t - 2, \\ z = 8 \end{cases}$  и  $\pi : 5x + 9y + 4z - 25 = 0$ ;

в)  $l : \frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$  и  $\pi : 2x + y + 7z - 3 = 0$ .

9.19. Найдите координаты точки пересечения прямой  $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$  и плоскости, в которой расположены ось  $Ox$  и точка  $M(6, -1, 7)$ .

9.20. Первая прямая задана системой  $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$  Вторая прямая проходит через точку  $P(7, 3, 2)$  параллельно первой. Напишите систему уравнений второй прямой и укажите координаты точки пересечения этой прямой с плоскостью  $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ .

9.21. Найдите угол между прямой  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-1}$  и плоскостью  $x + y + z - 1 = 0$ .

9.22. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку  $A(0, 0, 3)$  и прямую  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}$ , и укажите угол между этой плоскостью и осью  $Oy$ .

9.23. Прямая задана системой  $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y + z = 1. \end{cases}$  Найдите угол между этой прямой и плоскостью, проходящей через точки  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(-1, 2, 3)$  и  $C(0, 2, 1)$ .

9.24. Плоскость задана уравнением  $2x + 3y - 5z + 1 = 0$ . Запишите уравнение прямой, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через точку  $M(1, 5, -2)$ . Найдите точку пересечения полученного перпендикуляра и данной плоскости.

9.25\*. Найдите проекцию точки  $P(5, 2, -1)$  на плоскость  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

9.26\*. Найдите точку  $B$ , симметричную точке  $A(1, 3, -4)$  относительно плоскости  $3x + y - 2z = 0$ .

9.27\*. Найдите проекцию точки  $M$  на прямую  $l$ , если

а)  $M(2, -1, 3)$  и  $l : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t - 7, \\ z = 2t + 2; \end{cases}$  б)  $M(1, 1, 1)$  и  $l : \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ .

9.28\*. Определите координаты точки  $Q$ , симметричной точке  $P(4, 1, 6)$  относительно прямой

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

9.29\*. Найдите вектор  $\vec{b}$ , симметричный вектору  $\vec{a}(1, 2, 3)$  относительно плоскости, заданной уравнением  $x + y - z + 1 = 0$ .

## Тема 10

### Плоские кривые второго порядка

В этой теме мы начинаем знакомство с кривыми второго порядка, играющими важную роль в небесной механике, в геометрической оптике и других научных областях. Будем считать, что на плоскости фиксирована прямоугольная система координат  $Oxy$ .

**63.4. Определение.** *Кривой на плоскости*, или *плоской кривой*, называется множество геометрических образов решений уравнения  $F(x, y) = 0$ , где  $F$  — произвольная функция двух переменных. Кривая называется *алгебраической*, если  $F$  — многочлен от двух переменных.

Сразу отметим, что в вещественной геометрии (переменные могут принимать только вещественные значения) существуют уравнения, например  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , которые не имеют решений, поэтому соответствующие кривые — пустые множества. Нас, естественно, будут интересовать кривые, у которых есть вещественные точки, т. е. решения соответствующего уравнения.

**63.5. Определение.** Алгебраическая кривая, описываемая уравнением  $F(x, y) = 0$  называется кривой *второго порядка*, или *коникой*<sup>1</sup>, если  $F(x, y)$  — многочлен второй степени:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c. \quad (10.1)$$

Известно, что непустые множества, описываемые уравнением (10.1), — это либо пара прямых (вырожденный случай), либо парабола, либо эллипс, либо гипербола<sup>2</sup>. Нам интересны именно последние три типа кривых.

### 64. Основные понятия, связанные с параболой

**64.1. Определение.** Коника называется *параболой*, если найдется прямоугольная система координат  $Oxy$ , в которой она описывается уравнением

$$y^2 = 2px, \quad (p > 0). \quad (10.2)$$

При этом и система координат, и само уравнение называются *каноническими*.

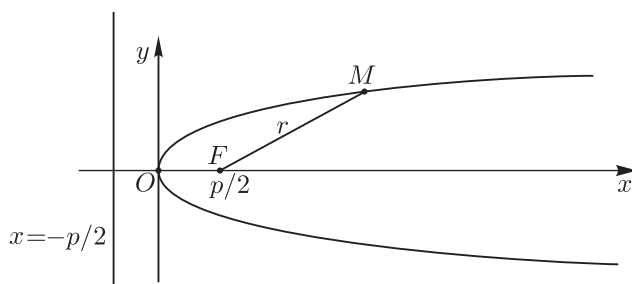


Рис. 10.1. Парабола

Попытаемся изобразить параболу (рис. 10.1). Прежде всего заметим, что на ней нет точек  $(x, y)$  с  $x < 0$ , поскольку  $y^2 \geq 0$ . Кривая проходит через начало координат, так как пара чисел  $(0, 0)$  удовлетворяет уравнению параболы. Если точка с координатами  $(x, y)$  принадлежит конике, то и точка с координатами  $(x, -y)$  тоже лежит на кривой. Значит, ось  $Ox$  является осью симметрии параболы.

Ось симметрии параболы принято называть ее *осью* (на рис. 10.1 это ось  $Ox$ ). Точка параболы с координатами  $(0, 0)$  называется ее

*вершиной* (на рис. 10.1 точка  $O$ ). Число  $p$  в уравнении параболы называют *фокальным параметром*, а число  $p/2$  — *фокусным расстоянием*. Точку  $F(p/2, 0)$  именуют *фокусом параболы*. Вертикальная прямая, описываемая уравнением  $x = -p/2$  — это *директриса параболы*. Длину

<sup>1</sup>Название «коника» кривая второго порядка получила благодаря тому, что она может быть реализована как сечение кругового конуса подходящей плоскостью.

<sup>2</sup>Доказательство этого факта выходит за рамки нашей программы.



отрезка, проведенного из фокуса параболы к точке  $M$  на ней, называют *фокальным радиусом* этой точки (на рис. 10.1 это расстояние  $r = FM$ ).

## 65. Директориальное свойство параболы

**65.1. Теорема.** Множество точек, равноудаленных от фокуса и директрисы, составляет параболу.

**Доказательство.** Фактически нам нужно доказать два утверждения: 1) если точка  $M(x, y)$  принадлежит параболе, то расстояние от нее до директрисы равно фокальному радиусу; 2) если расстояние от точки  $M(x, y)$  до директрисы равно длине отрезка  $MF$ , то точка  $M$  принадлежит параболе.

Расстояние от точки  $M(x, y)$  до директрисы равно  $MA = x + \frac{p}{2}$  (см. рис. 10.2) (при этом неважно, лежит ли точка  $M$  на параболе или нет).

Фокальный радиус  $r$  находим по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника  $FBM$ . Длина катета  $BM$  равна  $|y|$  (точка  $M$  может лежать и ниже оси абсцисс), а катета  $FB$  —  $|x - \frac{p}{2}|$  (координата  $x$  может оказаться меньше, чем  $p/2$ ). Значит,

$$r^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

При вычислении расстояния  $MF$  не учитывалось, что точка  $M$  принадлежит параболе.

Таким образом, для доказательства первого утверждения достаточно показать, что квадрат фокального радиуса равен квадрату расстояния от точки  $M$  до директрисы, т. е.

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad (10.3)$$

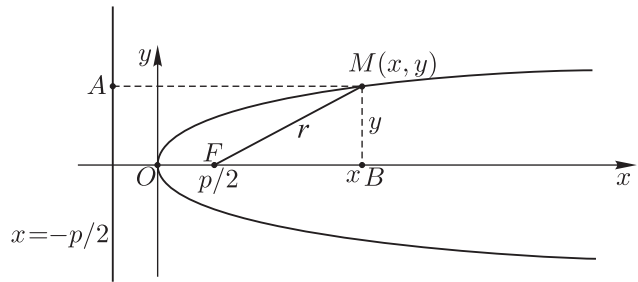
выполняется тогда и только тогда, когда точка  $M$  лежит на параболе, т. е.  $y^2 = 2px$ . Докажем это.

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 = 2px. \quad (10.4)$$

Предположим теперь, что расстояние от точки  $M$  до директрисы равно  $MF$ , т. е.

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = \left(x + \frac{p}{2}\right). \quad (10.5)$$

Нужно показать, что точка  $M$  при этом обязательно попадет на параболу. Иными словами, ее координаты удовлетворяют соотношению  $y^2 = 2px$ . Возведя в квадрат равенство (10.5), получим соотношение (10.3). Можно вновь проделать равносильные преобразования (10.4), которые доказывают необходимое условие:  $y^2 = 2px$ .  $\square$



**Рис. 10.2.** Рисунок к доказательству директориального свойства параболы

## 66. Оптическое свойство параболы

Когда рассуждают об оптических свойствах кривой или поверхности, интересуются ответом на вопрос о том, как будет себя вести луч света после отражения от этой кривой или поверхности. Вопрос, заметьте, не праздный. Ответы на такие вопросы необходимо знать, например, при изготовлении зеркал или излучающих антенн с заранее заданными свойствами.

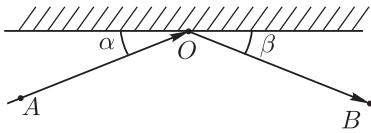


Рис. 10.3. Плоское зеркало

при этом называется *углом падения*, а  $\beta$  — *углом отражения*. Предположение геометрической оптики гласит, что  $\alpha = \beta$ .

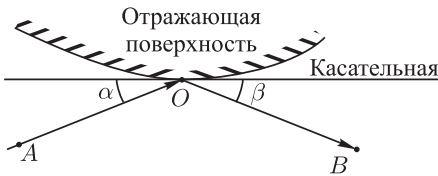


Рис. 10.4. Кривое зеркало

При исследовании такого рода задач будем придерживаться хотя и не очень точных, но вполне приемлемых предположений геометрической оптики: луч света распространяется по прямой, а при отражении от идеально ровной поверхности угол падения равен углу отражения. Последнее замечание стоит пояснить на рисунке. Падающий луч  $AO$  (рис. 10.3) отражается от прямой поверхности в точке  $O$ , а луч  $OB$  считается отраженным лучом. Угол  $\alpha$

Если отражающая поверхность ровная, то совершенно понятно, что считать углом падения, а что углом отражения. А что делать, если отражающая поверхность кривая? В этой ситуации принято проводить касательную к отражающей поверхности и углы падения и отражения отмерять именно от касательной, как это показано на рис. 10.4.

Таким образом, для исследования оптических свойств параболы нам сначала нужно получить уравнение касательной к ней.

**66.1. Касательная к параболе.** В курсе математического анализа вы уже изучали уравнение касательной к графику функции. Любую из частей параболы (верхнюю или нижнюю) можно воспринимать как график функции  $y = \pm\sqrt{2px}$ . Выведем уравнение касательной к параболе, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  параболы, считая, что  $y_0 \geq 0$ . Второй случай ( $y_0 < 0$ ) разберите самостоятельно.

Напомним, что уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пусть  $f(x) = \sqrt{2px}$ , тогда<sup>3</sup>  $f'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}$ . Вспомним теперь, что точка  $M_0(x_0, y_0)$  лежит на параболе, т. е.  $y_0 = \sqrt{2px_0}$ . С учетом этого находим:

$$f'(x_0) = \frac{p}{y_0}.$$

Подставляя найденное значение производной в уравнение касательной, получаем:

$$y = y_0 + \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

Рис. 10.5. Рисунок к доказательству оптического свойства параболы

что можно переписать как

$$yy_0 = y_0^2 + px - px_0.$$

Опять воспользуемся соотношением  $y_0^2 = 2px_0$  и заменим в предыдущем уравнении  $y_0^2$ :

$$yy_0 = p(x + x_0). \quad (10.6)$$

Это уравнение касательной и будем использовать в дальнейшем.

**66.2. Теорема.** Если из фокуса параболы выпустить луч света, то после отражения от параболы он станет параллелен ее оси.

**Доказательство.** На рис. 10.5 изображена парабола, описываемая каноническим уравнением  $y^2 = 2px$ , луч света, выпущенный из фокуса  $F$  параболы, точка  $M(x_0, y_0)$ , в которой он отражается от кривой и касательная к параболе ( $BM$ ).

<sup>3</sup>Мы считаем, что  $x_0 \neq 0$ . Если же  $x_0 = 0$ , то касательная к параболе — вертикальная прямая.

Через точку  $M$  проведен луч  $[MN)$ , параллельный оси параболы. Ясно, что угол  $\angle BMF = \alpha$  является углом падения. Нужно доказать, что  $\angle NMA = \beta$  — угол отражения. Для этого достаточно проверить равенство:  $\alpha = \beta$ .

Так как луч  $[MN)$  параллелен оси абсцисс, то  $\angle NMA = \angle FBM$ . Таким образом, достаточно проверить равенство:  $\angle FBM = \angle BMF$ , что будет верно тогда и только тогда, когда  $|BF| = |FM|$ .

Напомним, что  $|FM| = r$  — фокальный радиус, который по директориальному свойству параболы равен  $x_0 + \frac{p}{2}$ .

Точка  $B$  — это точка пересечения касательной к параболе с осью абсцисс. Поскольку уравнение касательной  $yy_0 = p(x + x_0)$ , а координаты точки  $B(x_1, 0)$ , то значение  $x_1$  получается из уравнения касательной, если положить в нем  $y = 0$ :

$$0 \cdot y_0 = p(x_1 + x_0) \Leftrightarrow x_1 = -x_0.$$

Длина отрезка  $BF$  равна  $|BO| + |OF|$ . Но  $|OF| = \frac{p}{2}$ , т.к. координаты фокуса  $F(\frac{p}{2}, 0)$ , а  $|BO| = |x_1| = x_0$ . Следовательно,  $|BF| = x_0 + \frac{p}{2} = |FM|$ . Значит, треугольник  $BMF$  равнобедренный и нужное равенство углов доказано.  $\square$

## 67. Основные понятия, связанные с эллипсом

**67.1. Определение.** Коника называется *эллипсом*, если найдется прямоугольная система координат  $Oxy$ , в которой она описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a \geq b > 0). \quad (10.7)$$

При этом система координат, как и само уравнение, называется *канонической*.

Перед тем как изобразить эллипс на рисунке, заметим, что если координаты  $(x, y)$  удовлетворяют его уравнению, то  $|x| \leq a$ . Действительно, если  $|x| > a$ , то  $\frac{x^2}{a^2} > 1$  и чтобы равенство (10.7) было верным, необходимо  $\frac{y^2}{b^2} < 0$ , что невозможно. Аналогично,  $|y| \leq b$ . Значит, вся кривая расположена внутри прямоугольника, изображенного на рис. 10.6.

Точки с координатами  $(\pm a, 0)$  и  $(0, \pm b)$  принадлежат эллипсу. Они называются его *вершинами*. Отметим также, что оси координат являются осями симметрии эллипса, так как вместе с каждой точкой  $(x, y)$  эллипса эта кривая содержит точки  $(\pm x, \pm y)$ , что легко видно из уравнения (10.7). Сам эллипс изображен на рис. 10.6.

Начало координат  $O(0, 0)$  служит центром симметрии эллипса и называется его *центром*.

В табл. 10.1 приведены инварианты эллипса для случая  $a \geq b$ .

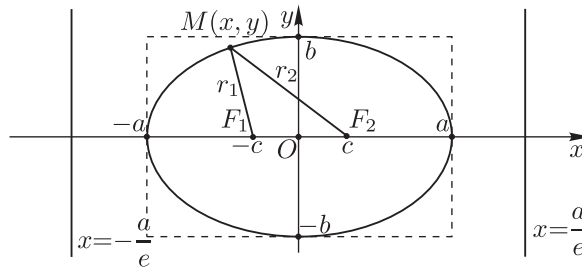


Рис. 10.6. Эллипс

## 68. Фокальное свойство эллипса

**68.1. Теорема.** Сумма расстояний от произвольной точки эллипса, описываемого уравнением (10.7), до фокусов постоянна и равна  $2a$ .

Таблица 10.1. Инварианты эллипса ( $a \geq b$ )

$a$	большая полуось
$b$	малая полуось
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	линейный эксцентриситет
$2c$	фокусное расстояние
$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	числовой эксцентриситет <sup>4</sup>
$x = 0$	малая ось
$y = 0$	большая (фокальная) ось
$O(0, 0)$	центр
$(\pm a, 0), (0, \pm b)$	вершины
$(\pm c, 0)$	фокусы
$x = \pm \frac{a}{e} \ (e \neq 0)$	директрисы
$r_1, r_2$	фокальные радиусы

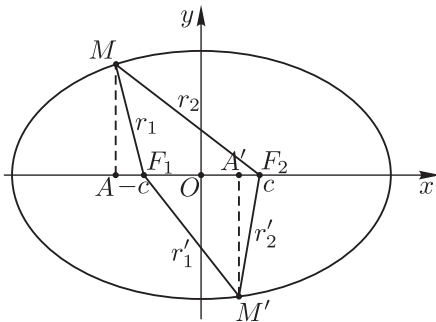


Рис. 10.7. Фокальные радиусы эллипса

соотношение  $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ :

$$\begin{aligned}
 r_1^2 &= (x+c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \\
 &= x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 + 2cx + c^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

Но  $c^2 = a^2 - b^2$ , а  $2cx = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot ax$ , поэтому

$$r_1^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2 = e^2 x^2 + 2eax + a^2 = (ex + a)^2.$$

Следовательно,  $r_1 = |ex + a|$  (напомним, что  $r_1$  — это расстояние, а потому должно быть неотрицательным). Оценим знак выражения  $ex + a$ . Оно, конечно, положительно, если  $x \geq 0$ , так как  $a > 0$  и  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \geq 0$ .

Пусть  $x < 0$ . Тогда

$$ex + a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -ex \Leftrightarrow a \geq e|x| \Leftrightarrow |x| \leq \frac{a}{e}.$$

<sup>4</sup>Числовой эксцентриситет эллипса часто называют просто эксцентриситетом эллипса

В нашей ситуации  $|x| \leq a$ , поскольку  $x$  — абсцисса точки на эллипсе. Кроме того, в силу уравнения (10.7)  $a \geq b$  и поэтому  $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ . Следовательно,  $a \leq \frac{a}{e}$  и  $ex + a \geq 0$ . Итак,  $r_1 = ex + a$ .

Для вычисления  $r_2$  нужно воспользоваться прямоугольным треугольником  $F_2A'M'$ . Приведем вычисления, опуская подробности:

$r_2^2 = |A'F_2|^2 + |A'M'|^2$ ;  $|A'M'| = |y|$ ,  $|A'F_2| = |c - x|$ . Поэтому

$$\begin{aligned} r_2^2 &= (c - x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + c^2 + b^2 - 2cx = \\ &= \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2 - 2cx = (ex)^2 - 2aex + a^2 = (a - ex)^2, \end{aligned}$$

следовательно,  $r_2 = |a - ex| = a - ex$ .

В результате фокальные радиусы точки  $M(x, y)$  на эллипсе равны

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex, \quad (10.8)$$

а их сумма постоянна и равна  $2a$ .  $\square$

**68.2. Теорема.** Множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух выбранных точек постоянна, является эллипсом.

**Доказательство.** Обозначим выбранные точки, о которых идет речь в теореме, через  $F_1$  и  $F_2$  и введем систему координат с началом в середине отрезка  $F_1F_2$ , как показано на рис. 10.8. Пусть  $|F_1F_2| = 2c$ , а сумма расстояний  $|MF_1|$  и  $|MF_2|$  равна  $2a$ . Тогда из неравенства треугольника получаем:  $2a = r_1 + r_2 > 2c$  (рис. 10.8).

По теореме Пифагора получаем:

$$r_1^2 = B + 2xc, \quad r_2^2 = B - 2xc, \quad \text{где } B = x^2 + y^2 + c^2.$$

По условию теоремы  $r_1 + r_2 = 2a$ , что можно переписать как

$$\sqrt{B + 2xc} + \sqrt{B - 2xc} = 2a.$$

Возведя это равенство в квадрат и приведя подобные члены, получим

$$2B + 2\sqrt{B^2 - 4x^2c^2} = 4a^2,$$

откуда

$$a^2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4x^2c^2}}{2}.$$

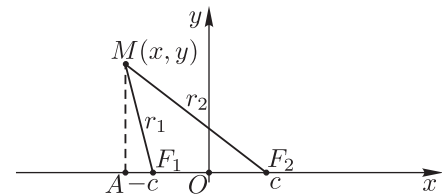
Это выражение напоминает формулу для вычисления корней квадратного уравнения  $X^2 - BX + C = 0$ , где  $C = x^2 \cdot c^2$ . Действительно, дискриминант этого квадратного уравнения равен  $D = B^2 - 4C = B^2 - 4x^2c^2$ . Кроме того, коэффициент при  $X$  в нем равен  $-B$ . Поэтому его корни выглядят так:

$$X_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4x^2c^2}}{2}.$$

Следовательно,  $a^2$  — корень такого уравнения, т. е. соотношение

$$a^4 - Ba^2 + x^2c^2 = 0$$

является тождеством.



**Рис. 10.8.** Иллюстрация к доказательству теоремы 68.2

Подставим в него значение  $B = y^2 + x^2 + c^2$  и преобразуем:

$$a^4 - y^2 a^2 - x^2 a^2 - c^2 a^2 + x^2 c^2 = 0,$$

что можно переписать как

$$y^2 a^2 + x^2 (a^2 - c^2) = a^4 - c^2 a^2.$$

Деля последнее соотношение на  $a^2(a^2 - c^2)$ , получаем уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $b^2 = c^2 - a^2$ .  $\square$

## 69. Директориальное свойство эллипса

**69.1. Теорема.** Отношение расстояний от точки на эллипсе до фокуса и до ближайшей к нему директрисы равно числовому эксцентриситету  $e$  (см. табл. 10.1).

**Доказательство.** Возьмем точку  $M(x, y)$  на эллипсе, уравнение которого  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Расстояние от нее до фокуса  $F_1$  — это фокальный радиус  $r_1 = ex + a$  (уравнение (10.8)).

Расстояние до директрисы — это длина отрезка  $DM$ , равная  $\left| \frac{a}{e} + x \right|$  (из рис. 10.9). Поэтому искомое отношение равно

$$\frac{r_1}{|DM|} = \frac{ex + a}{\left| \frac{a}{e} + x \right|} = e. \quad \square$$

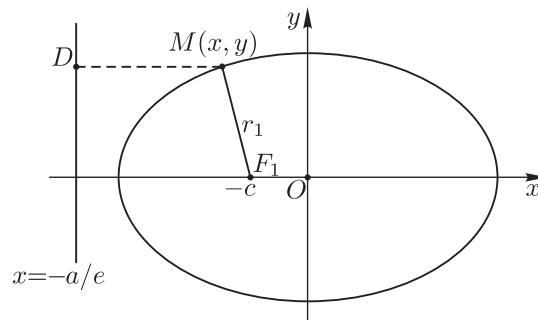


Рис. 10.9. К доказательству директориального свойства эллипса

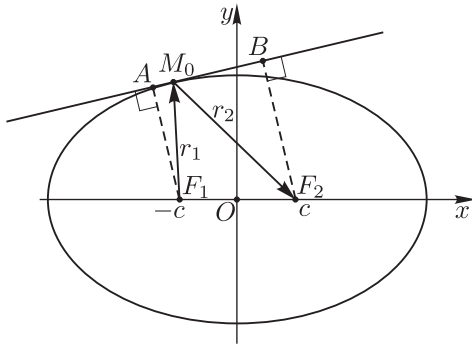
## 70. Оптическое свойство эллипса

Начнем с уравнения касательной к эллипсу.

**70.1. Уравнение касательной к эллипсу.** Касательная к эллипсу (10.7), проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , описывается уравнением

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0. \quad (10.9)$$

**Доказательство.** Выведем это уравнение в предположении, что точка  $M_0$  лежит на верхней половине эллипса, т. е.  $y_0 > 0$ . Случай  $y_0 < 0$  проверяется аналогично.



**Рис. 10.10.** К доказательству оптического свойства эллипса

Верхнюю часть эллипса можно рассматривать как график функции

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ее производная имеет вид

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{bx}{a\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

т. к.  $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ .

По формуле касательной получаем

$$y = y_0 - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Умножим последнее равенство на  $y_0/b^2$ :

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) \Leftrightarrow \frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Осталось заметить, что  $\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} = 1$ , так как  $M_0(x_0, y_0)$  — точка на эллипсе.  $\square$

**70.2. Теорема.** Луч света, выпущенный из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса попадет в другой фокус (рис. 10.10).

**Доказательство.** Возьмем произвольную точку  $M_0(x_0, y_0)$  на верхней части эллипса и соединим ее с фокусами. Проведем через точку  $M_0$  касательную ( $AB$ ) к эллипсу (рис. 10.10). Для доказательства теоремы нам достаточно проверить, что  $\angle AM_0F_1 = \angle BM_0F_2$ .

Так как треугольники  $AM_0F_1$  и  $BM_0F_2$  прямоугольные, то нужное равенство углов будет верным тогда и только тогда, когда эти треугольники подобны. Подобие докажем, вычислив отношения соответствующих сторон.

Гипотенузы рассматриваемых треугольников — это фокальные радиусы, которые уже были вычислены (см. (10.8)):

$$|M_0F_1| = r_1 = a + ex, \quad |M_0F_2| = r_2 = a - ex.$$

Длины же катетов  $F_1A$  и  $F_2B$  можно интерпретировать как расстояния от соответствующих фокусов до касательной.

Вычисление расстояния от точки до прямой на плоскости обсуждалось в теме «Прямая на плоскости». Прежде всего уравнение касательной (10.9) нужно привести к нормальному виду. Введем обозначение:

$$N = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}.$$

Тогда нормальное уравнение касательной к эллипсу запишется так:

$$\frac{x_0x}{Na^2} + \frac{y_0y}{Nb^2} - \frac{1}{N} = 0.$$

Координаты первого фокуса  $F_1(-c, 0)$ . Поэтому

$$|F_1A| = \left| \frac{x_0(-c)}{Na^2} + \frac{y_0 \cdot 0}{Nb^2} - \frac{1}{N} \right| = \left| \frac{x_0(-c)}{Na^2} - \frac{1}{N} \right| = \frac{1}{Na^2} |x_0c + a^2|.$$

Аналогично,

$$|F_2B| = \left| \frac{x_0c}{Na^2} - \frac{1}{N} \right| = \frac{1}{Na^2} |x_0c - a^2|.$$

Значит,

$$\frac{|F_1 A|}{|F_2 B|} = \frac{|x_0 c + a^2|}{|x_0 c - a^2|}.$$

Воспользуемся соотношением  $c = ea$  (табл. 10.1).

$$\frac{|F_1 A|}{|F_2 B|} = \frac{|x_0 ea + a^2|}{|x_0 ea - a^2|} = \frac{|x_0 e + a|}{|x_0 e - a|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|F_1 M_0|}{|F_2 M_0|}.$$

Отсюда следует подобие треугольников и требуемое равенство углов.  $\square$

## 71. Основные понятия, связанные с гиперболой

**71.1. Определение.** Гиперболой называется коника, в некоторой прямоугольной системе координат описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, \quad b > 0). \quad (10.10)$$

Это уравнение (как и соответствующая система координат) называется каноническим.

Исследуем форму гиперболы. Заметим, что кривая симметрична как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат. Если  $|x| = a$ , то из уравнения (10.10) следует, что  $y = 0$ . Значит, точки  $(\pm a, 0)$  лежат на гиперболе (они называются ее *вершинами*). Если же  $|x| < a$ , то  $\frac{x^2}{a^2} < 1$  и равенство (10.10) не может быть выполнено. Следовательно, в полосе, заключенной между вертикальными прямыми  $x = \pm a$ , нет точек гиперболы.

Разрешим теперь уравнение гиперболы относительно  $y$ :

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \quad (10.11)$$

и вычислим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \pm b \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} = \pm \frac{b}{a}.$$

Этот предел показывает, что при *больших* положительных  $x$  гипербола ведет себя как пара прямых  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Эти прямые называют *асимптотами* гиперболы.

Гипербола изображена на рис. 10.11, а ее инварианты приведены в табл. 10.2.

**Таблица 10.2.** Инварианты гиперболы

$a$	действительная полуось
$b$	мнимая полуось
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	линейный эксцентриситет
$2c$	фокусное расстояние
$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	числовой эксцентриситет <sup>5</sup>
$x = 0$	мнимая ось
$y = 0$	действительная (фокальная) ось
$O(0, 0)$	центр
$(\pm a, 0)$	вершины
$(\pm c, 0)$	фокусы
$x = \pm \frac{a}{e}$	директрисы
$y = \pm \frac{b}{a}x$	асимптоты
$r_1, r_2$	фокальные радиусы



## 72. Фокальное свойство гиперболы

**72.1. Теорема.** Модуль разности расстояний от точки на гиперболе до фокусов постоянен и равен  $2a$ :

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

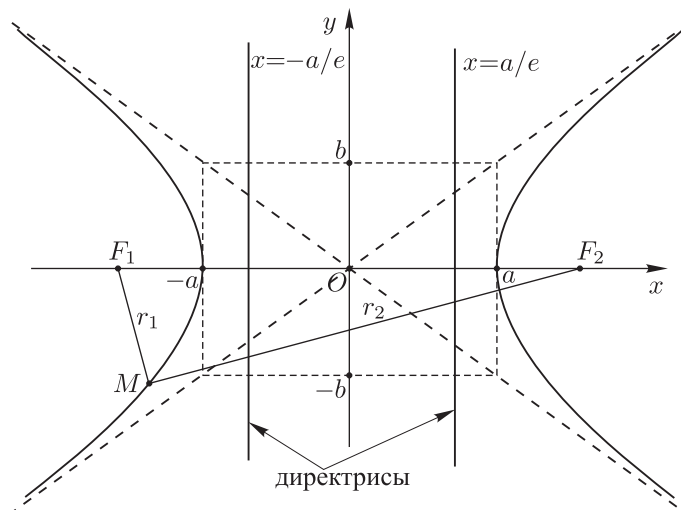


Рис. 10.11. Гипербола

**Доказательство.** Прежде всего нам нужно вычислить фокальные радиусы  $r_1$  и  $r_2$  точки  $M(x, y)$  (рис. 10.12). Сделаем это в предположении, что точка  $M$  лежит на правой ветви гиперболы, оставив случай левой ветви в качестве упражнения. Первый фокальный радиус ищем из прямоугольного треугольника  $F_1AM$ . Так как  $F_1(-c, 0)$ , то  $|F_1A| = x + c$ . Кроме того,  $|AM| = y$ . Значит,  $r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$ .

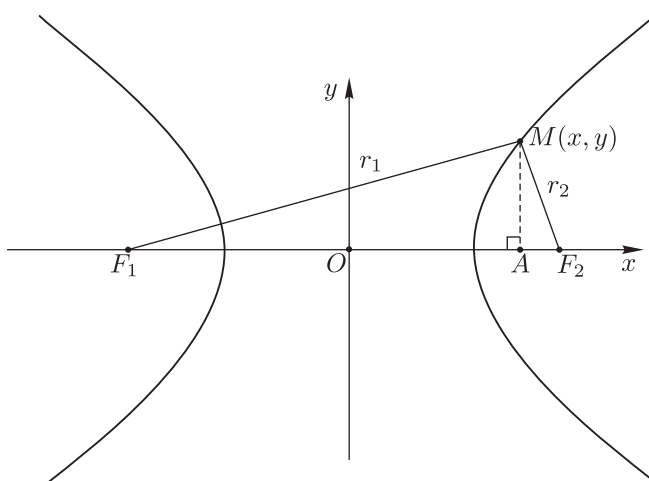


Рис. 10.12. Вычисление фокальных радиусов

Заменим в этом выражении  $y^2$ , воспользовавшись соотношением (10.11), и раскроем квадрат.

$$r_1^2 = x^2 + 2xc + c^2 + b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) x^2 + 2xc + c^2 - b^2.$$

<sup>5</sup>Числовой эксцентриситет гиперболы часто называют просто эксцентриситетом гиперболы.

Вспомним, что  $c^2 = a^2 + b^2$ , тогда

$$r_1^2 = \left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 + 2xc + a^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2xc + a^2.$$

Учтем, что  $\frac{c}{a} = e$ :  $r_1^2 = e^2 x^2 + 2xea + a^2 = (ex + a)^2$ . Значит,  $r_1 = ex + a$  (поскольку  $ex + a > 0$  при  $x > 0$ ).

Второй фокальный радиус вычисляем из треугольника  $F_2AM$ :

$$\begin{aligned} r_2^2 &= (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 - 2xc + c^2 - b^2 = \\ &= \left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2}\right) x^2 - 2xc + a^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2xc + a^2 = e^2 x^2 - 2xea + a^2 = (ex - a)^2. \end{aligned}$$

Отсюда  $r_2 = |ex - a|$ . Выясним знак выражения  $ex - a$  при условии  $x \geq a$  (точка  $M$  лежит на правой ветви гиперболы).

Напомним, что  $e = \frac{c}{a}$  и  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Поэтому  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ . Значит,  $ex > x \geq a$  и выражение  $ex - a$  положительно, откуда  $r_2 = ex - a$ .

Вспоминая, что  $r_1 = ex + a$ , получим:  $|r_1 - r_2| = 2a$ .

Мы доказали требуемое при условии, что точка лежит на правой ветви гиперболы, т.е.  $x > 0$ . Приведем значения фокальных радиусов для всех точек гиперболы, оставив несложные вычисления в качестве упражнения:

$$r_1 = \begin{cases} a + ex, & \text{если } x > 0, \\ -(a + ex), & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} ex - a, & \text{если } x > 0, \\ -(ex - a), & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad (10.12)$$

Из этих формул легко следует доказываемая теорема.  $\square$

### 73. Директориальное свойство гиперболы

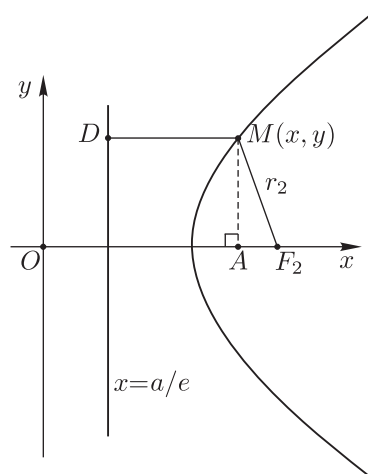


Рис. 10.13. К доказательству директориального свойства гиперболы

**73.1. Теорема.** Отношение расстояния от точки гиперболы до фокуса к расстоянию от этой точки до ближайшей к фокусу директрисы равно числовому эксцентриситету  $e$ .

**Доказательство.** Докажем это свойство для правой ветви гиперболы, поскольку для левой ветви рассуждения аналогичны.

Расстояние от точки  $M(x, y)$  до фокуса  $F_2$  — это фокальный радиус  $r_2 = ex - a$  (см. (10.12)). Расстояние от  $M$  до директрисы — длина отрезка  $MD$ , равная  $x - a/e$  (см. рис. 10.13). Следовательно,

$$\frac{r_2}{|MD|} = \frac{ex - a}{x - a/e} = e. \quad \square$$

## 74. Оптическое свойство гиперболы

**74.1. Уравнение касательной к гиперболе.** Как вы уже поняли из предыдущего материала, для проверки оптических свойств кривой нам нужно уравнение касательной к ней. Выведем уравнение касательной к гиперболе в точке  $M(x_0, y_0)$  в предположении, что обе координаты этой точки положительны.

Тогда  $y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$  и  $y' = \frac{b}{a^2} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}$ . Умножив числитель и знаменатель производной на  $b$ , получим

$$y' = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

Таким образом, уравнение касательной к гиперболе, проведенной в точке  $M(x_0, y_0)$ , имеет вид:

$$y = y_0 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0).$$

Умножим уравнение на  $\frac{y_0}{b^2}$ :

$$\frac{yy_0}{b^2} = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0}{a^2} (x - x_0) = \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Заметим, что  $\frac{y_0^2}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = -1$ . Перепишем уравнение касательной в виде

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (10.13)$$

**74.2. Теорема.** Луч света, выпущенный из фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы совпадет с лучом, выпущенным из другого фокуса (рис. 10.14).

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся рис. 10.14, на котором изображена прямая  $(AB)$ , касающаяся гиперболы в точке  $M(x_0, y_0)$ ; лучи  $[F_2M)$  и  $[F_1C)$ , выпущенные из фокусов гиперболы. Нам предстоит доказать, что луч  $[F_2M)$  после отражения от гиперболы пойдет вдоль луча  $[MC)$ . Это произойдет тогда и только тогда, когда углы  $\alpha = \angle BMF_2$  и  $\beta = \angle AMC$  будут равны между собой.

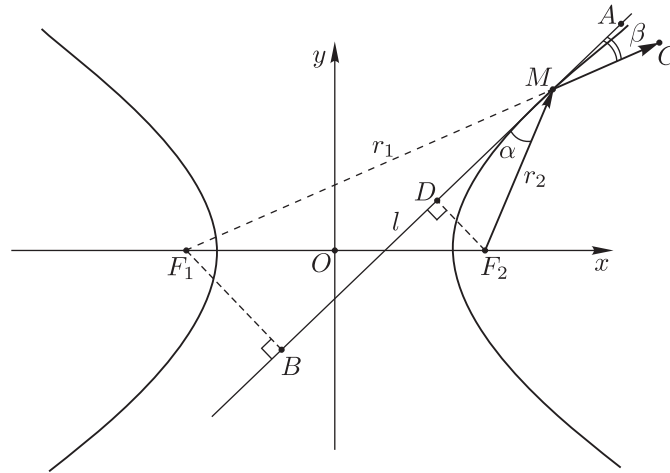


Рис. 10.14. К доказательству оптического свойства гиперболы

Заметим, что  $\angle F_1MB = \angle AMC = \beta$  как вертикальные. Поэтому достаточно проверить равенство  $\angle F_1MB = \angle BMF_2 = \alpha$ .

Последнее равенство равносильно подобию прямоугольных треугольников  $F_1MB$  и  $F_2DM$ . Заметим, что их гипотенузы — это фокальные радиусы, которые мы уже знаем:  $|F_1M| = r_1 = a + ex_0$  и  $|F_2M| = r_2 = ex_0 - a$ . Вычислим длины катетов  $BF_1$  и  $DF_2$ , интерпретируя их как расстояния от фокусов до касательной.

Приведем уравнение касательной (10.13) к нормальному виду:

$$\frac{x_0}{a^2 N} x - \frac{y_0}{b^2 N} y - \frac{1}{N} = 0.$$

Здесь  $N = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$ . Тогда расстояние от  $F_1$  до касательной равно

$$|F_1B| = \left| \frac{x_0}{a^2 N}(-c) - \frac{y_0}{b^2 N} \cdot 0 - \frac{1}{N} \right| = \left| \frac{x_0 c}{a^2 N} + \frac{1}{N} \right|,$$

а расстояние от  $F_2$  до нее —

$$|F_2D| = \left| \frac{x_0}{a^2 N}(c) - \frac{y_0}{b^2 N} \cdot 0 - \frac{1}{N} \right| = \left| \frac{x_0 c}{a^2 N} - \frac{1}{N} \right|.$$

Следовательно,

$$\frac{|F_1B|}{|F_2D|} = \frac{\left| \frac{x_0 c}{a^2 N} + \frac{1}{N} \right|}{\left| \frac{x_0 c}{a^2 N} - \frac{1}{N} \right|} = \frac{|x_0 c + a^2|}{|x_0 c - a^2|} = \frac{x_0 e + a}{x_0 e - a} = \frac{r_1}{r_2}$$

и подобие нужных треугольников доказано.  $\square$

## 75. Полярная система координат

*Полярная система координат* — это двумерный аналог сферической, широко используемой в астрономии, в радарной технике, а также во многих других технических областях. Со сферической системой координат вы познакомитесь на втором курсе, а мы займемся полярной системой, поскольку она важна не только для аналитической геометрии. С ней важно познакомиться, чтобы схематически изображать кривые, заданные уравнениями в полярной системе координат. Это необходимо для решения задач, связанных с вычислением длин кривых и площадей фигур,

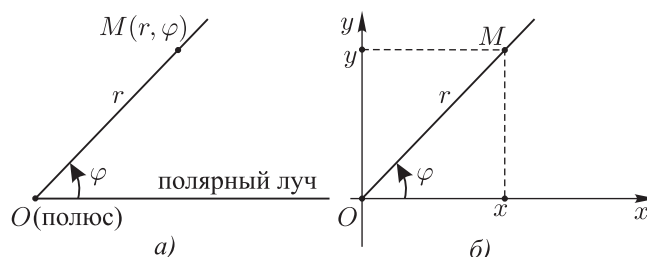
заданных именно в такой системе координат. Но решить такого рода задачи довольно сложно, не имея изображения соответствующей кривой.

**75.1. Определение.** Полярная система координат состоит из *полюса* (точка, в которой размещается наблюдатель) и *полярного луча*, т. е. фиксированного направления. При этом каждая точка плоскости определяется расстоянием  $r$  от нее до полюса и углом  $\varphi$  между лучом, направленным от полюса к точке, и полярным лучом (рис. 10.15, а). Угол лежит в полуинтервале  $\varphi \in [0, 2\pi)$  или  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ . Во втором случае угол, измеренный против часовой стрелки (как на рисунке) считается положительным, а против — отрицательным.

Если ввести прямоугольную систему координат, совместив ее начало с полюсом, а ось  $Ox$  направить вдоль полярного луча, то легко можно найти связь между полярными и декартовыми координатами точки (рис. 10.15, б). Из прямоугольных треугольников получаем соотношения:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (10.14)$$

Рис. 10.15. Полярная система координат



Изобразим некоторые простые кривые, заданные уравнениями в полярной системе координат.

**Пример 10.1.** Изобразить кривую, описываемую в полярной системе координат уравнением:  $r = 1$ .

**Решение.** Фактически нам нужно нарисовать множество точек, отстоящих от полюса на расстоянии 1. Ясно, что это окружность радиуса 1 с центром в полюсе, так что и начертить ее легко.

**Пример 10.2.** Изобразить кривую, описываемую в полярной системе координат уравнением:  $r = 2 \cos \varphi$ .

**Решение.** Прежде чем приступать к изображению кривой обратим внимание, что  $r$  — это расстояние, которое не может быть отрицательным. Поэтому координата  $\varphi$  точек, лежащих на нашей кривой, должна быть такой, что  $\cos \varphi \geq 0$ . Это дает нам диапазон изменения угла:  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Таким образом, если совместить полярную и декартову систему координат, то вся искомая кривая будет расположена правее оси  $Oy$ .

После такого анализа нужно изобразить несколько точек кривой. Если  $\varphi = 0$ , то  $r = 2 \cos 0 = 2$ . Поэтому точка  $M$  с полярными координатами  $(2, 0)$  лежит на кривой. Если теперь угол  $\varphi$  увеличивать от 0 до  $\pi/2$ , то  $r = 2 \cos \varphi$  будет уменьшаться от 2 до 0. Кроме того,  $\cos \varphi$  — функция четная. Значит, кривая будет симметрична относительно полярного луча. Подводя итог исследованиям, изобразим кривую на рис. 10.16.

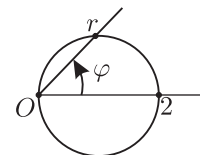


Рис. 10.16. Схематическое изображение кривой  $r = 2 \cos \varphi$

Полученная кривая напоминает окружность диаметром 2 с центром в точке  $(1, 0)$ . В декартовой системе координат эта окружность описывается уравнением:  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . Раскроем в нем скобки, приведем подобные члены и подставим соотношения (10.14), чтобы переписать уравнение окружности в полярной системе координат (проделайте эти действия самостоятельно).

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получаем:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Поэтому в полярной системе координат это уравнение выглядит как

$$r^2 = 2r \cos \varphi \Leftrightarrow r = 2 \cos \varphi.$$

Итак, мы убедились, что изображенная нами кривая действительно является окружностью.

**Пример 10.3.** Изобразить кривую, описываемую в полярной системе координат уравнением:  $r = \sin 3\varphi$ .

**Решение.** Как и в предыдущем примере, найдем допустимые значения угла  $\varphi$ , определяемые неравенством:  $\sin 3\varphi \geq 0$ . Решение такого неравенства имеет вид:

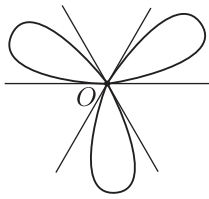
$$2\pi k \leq 3\varphi \leq \pi + 2\pi k,$$

где  $k$  — произвольное целое число. Отсюда

$$\frac{2\pi k}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}.$$

Меняя  $k$  от 0 до 2, получим три сектора, в которых расположена наша кривая:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$



**Рис. 10.17.** Схематическое изображение кривой  $r = \sin 3\varphi$

Поскольку функция  $\sin 3\varphi$  — периодична с периодом  $2\pi/3$ , то участки кривых, расположенные в указанных секторах, будут получаться друг из друга поворотом. Поэтому достаточно понять, как изображается кривая, лежащая в первом секторе.

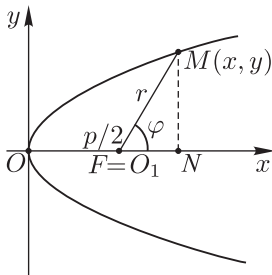
Если  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi/3$ , то  $r = \sin 3\varphi = 0$ . Можно сказать, что рассматриваемый участок кривой «начинается» и «заканчивается» в полюсе. Кривая будет максимально удалена от полюса на 1 при  $\varphi = \pi/6$ . Поэтому изобразить ее несложно (рис. 10.17).

Мы советуем вам поупражняться в изображении подобных кривых, решая задачи 10.24–10.27.

## 76. Уравнения плоских кривых второго порядка в полярной системе координат

Как известно из механики, все небесные тела (в первом приближении) движутся по кривым второго порядка, а в астрономии принято работать в полярной или сферической системе координат. Поэтому очень полезно получить уравнения коник в полярной системе координат.

**76.1. Парабола в полярной системе координат.** Рассмотрим параболу, заданную в канонической прямоугольной системе координат уравнением  $y^2 = 2px$ . Полюс полярной системы координат расположим в фокусе параболы, а полярный луч направим вдоль ее оси (рис. 10.18).



**Рис. 10.18.** Парабола в полярной системе координат откуда вытекает уравнение параболы в полярных координатах:

Из прямоугольного треугольника  $O_1MN$  находим, что  $|O_1N| = r \cos \varphi$ . Кроме того,  $|O_1N| = x - \frac{p}{2}$ . Поэтому связь прямоугольных и полярных координат в этом случае выглядит как

$$x = r \cos \varphi + \frac{p}{2}, \quad y = r \sin \varphi.$$

Кроме того, здесь  $r$  — это фокальный радиус, который по директориальному свойству параболы (стр. 55) равен  $r = x + \frac{p}{2}$ . Подставляя сюда вместо  $x$  его выражение через полярные координаты, получим

$$r - p = r \cos \varphi,$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}. \quad (10.15)$$

**76.2. Эллипс в полярной системе координат.** Рассмотрим эллипс, заданный в канонической системе координат уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярный луч направим вдоль большой его оси (рис. 10.19).

Длина отрезка  $ON$  будет равна  $|O_1N| = x + c$ . Кроме того, из прямоугольного треугольника та же величина равна  $|O_1N| = r_1 \cos \varphi$ , где  $r_1$  — с одной стороны фокальный радиус, а с другой — полярный, т.е.  $r_1 = r$ . Приходим к уравнению

$$x + c = r_1 \cos \varphi. \quad (10.16)$$

Фокальный радиус эллипса нам известен (см. стр. 59):

$$r_1 = a + ex, \quad (10.17)$$

где  $e$  — числовой эксцентриситет эллипса:  $e = \frac{c}{a}$ . Выразим из соотношения (10.16)  $x$  и подставим в (10.17):

$$r_1 = a + e(r_1 \cos \varphi - c) \Leftrightarrow r_1 = a + er_1 \cos \varphi - \frac{c^2}{a}.$$

Выражая из последнего равенства  $r_1$  и вспоминая, что  $r_1 = r$  — полярный радиус, получаем

$$r = \frac{a - \frac{c^2}{a}}{1 - e \cos \varphi}.$$

Обозначим теперь через  $p$  фокальный параметр эллипса

$$p = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

и перепишем полученное уравнение эллипса в полярной системе координат:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (10.18)$$

**76.3. Гипербола в полярной системе координат.** Рассмотрим правую ветвь гиперболы (рис. 10.20), описываемую уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фокальный радиус  $r_2$  вычисляется по формуле:  $r_2 = ex - a$ , где  $e = \frac{c}{a}$  — числовой эксцентриситет гиперболы. Кроме того, из прямоугольного треугольника  $AF_2M$  находим  $x - c = r_2 \cos \varphi$ . Отсюда  $x = r_2 \cos \varphi + c$ . Подставим найденное значение  $x$  в формулу фокального радиуса:

$$r_2 = er_2 \cos \varphi + ec - a$$

и выразим  $r = r_2$

$$r = \frac{ec - a}{1 - e \cos \varphi}.$$

Как и в случае эллипса обозначим через фокальный параметр  $p$  константу

$$p = ec - a = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

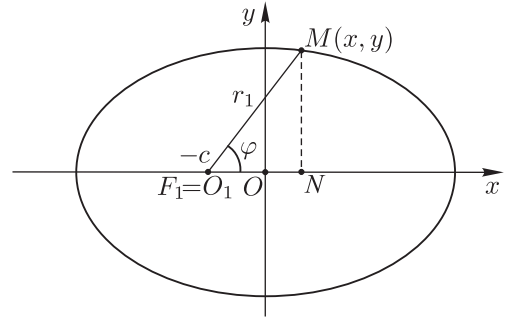


Рис. 10.19. Эллипс в полярной системе координат

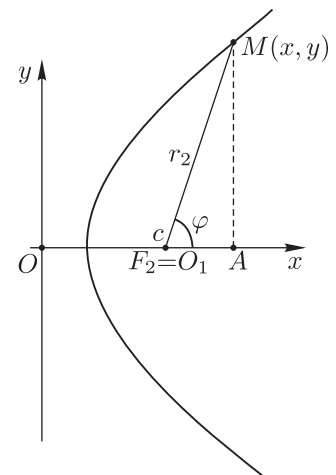


Рис. 10.20. Правая ветвь гиперболы

После чего выпишем требуемое уравнение:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (10.19)$$

**76.4. Итог.** Сравнивая уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат (10.15), (10.18) и (10.19), можно заметить, что выглядят они абсолютно одинаково, если ввести числовой эксцентриситет параболы  $e = 1$ .

В этих обозначениях тип кривой полностью определяется величиной числового эксцентриситета. У эллипса он

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1,$$

у гиперболы

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1,$$

а у параболы  $e = 1$ .

## Примеры решения типовых задач

**Пример 10.4.** Изобразить кривую, описываемую уравнением  $y^2 = -5x$ , определить ее тип, указать координаты вершины и фокуса. Записать уравнение директрисы.

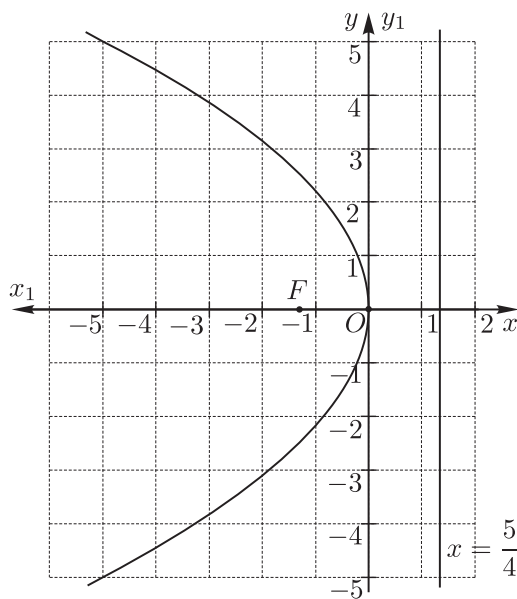


Рис. 10.21. К примеру 10.4

**Решение.** Сравнивая исходное уравнение с каноническим уравнением параболы (10.2), получаем, что данное уравнение описывает параболу. Действительно, сделав замену переменных  $y_1 = y$  и  $x_1 = -x$ , приходим к

$$y^2 = -5x \Leftrightarrow y_1^2 = 5x_1 \Leftrightarrow y_1^2 = 2 \cdot \frac{5}{2} x_1.$$

Таким образом, фокальный параметр параболы  $p = \frac{5}{2}$ . Парабола симметрична относительно оси  $Ox$  и ее ветви направлены влево (см. рис. 10.21). Вершина параболы — точка  $O(0, 0)$ .

В системе координат  $Ox_1y_1$  координаты фокуса  $F(5/4, 0)$  и уравнение директрисы  $x_1 = -5/4$ . Очевидно, что в системе координат  $Oxy$  соответственно получаем координаты  $F(-5/4, 0)$  и уравнение директрисы  $x = 5/4$ .

**Пример 10.5.** Изобразить кривую, описываемую уравнением  $4x^2 + y^2 = 16$ . Определить ее тип, найти координаты вершин, фокусов, а также составить уравнения директрис. Вычислить эксцентриситет.

**Решение.** Сделав элементарные преобразования исходного уравнения

$$4x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1,$$

приходим к каноническому уравнению эллипса с параметрами полуосей  $a = 2$  и  $b = 4$ . В результате координаты вершин эллипса  $A_1(2, 0)$ ,  $A_2(-2, 0)$ ,  $B_1(0, -4)$ ,  $B_2(0, 4)$ .

Обратим внимание, что  $b > a$ . Это обуславливает специфику при решении данной задачи. Можно ввести новые переменные так, как это было сделано в предыдущем примере, а можно сразу учитывать эту особенность при вычислении параметров эллипса.



Действительно, эксцентриситет в данном случае вычисляется по формуле<sup>6</sup>

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

Так как  $b > a$ , то *фокальная ось* (прямая, на которой расположены фокусы) — это ось  $Oy$  (см. рис. 10.22), тогда координаты фокусов —  $F_1(0, -2\sqrt{3})$ ,  $F_2(0, 2\sqrt{3})$ .

Эксцентриситет эллипса будет равен

$$e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Директрисы располагаются перпендикулярно фокальной оси, т. е. в данном случае перпендикулярно оси  $Oy$  (см. рис. 10.22). Уравнения директрис:

$$y = \pm \frac{b}{e} \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{\sqrt{3}/2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

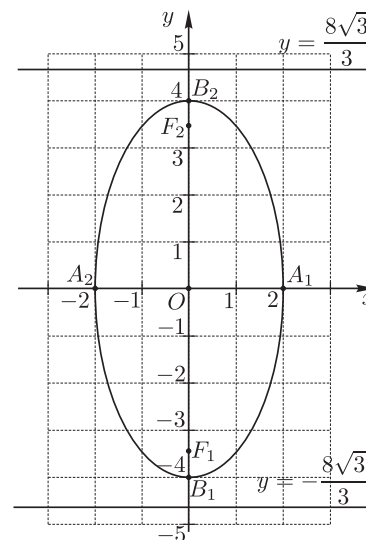


Рис. 10.22. К примеру 10.5

**Пример 10.6.** Построить кривую по ее уравнению  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$ . Определить тип кривой, найти координаты вершин, фокусов, а также составить уравнения директрис и асимптот. Вычислить эксцентриситет.

**Решение.** Уравнение  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$  описывает гиперболу. Однако это уравнение отличается от канонического (10.10) знаком при  $x^2$  и  $y^2$ , поэтому сделаем замену переменных  $x_1 = y$ ,  $y_1 = x$ , тогда уравнение примет вид

$$\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{49} = 1.$$

Для этого уравнения  $a = 4$ ,  $b = 7$ , а также применимы все формулы из табл. 10.2.

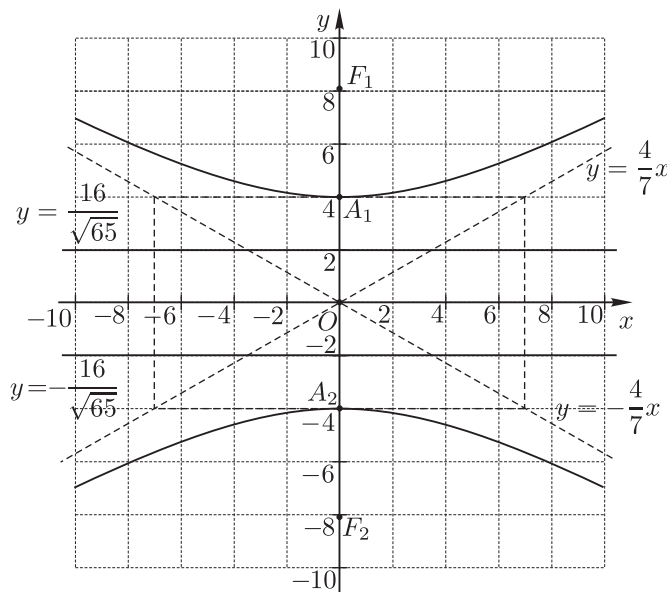


Рис. 10.23. К примеру 10.6

<sup>6</sup>Очевидно, что с помощью формулы из табл. 10.1 при  $b > a$  линейный эксцентриситет вычислять нельзя!

Итак, в системе координат  $Ox_1y_1$  вершины гиперболы  $A_1(4, 0)$ ,  $A_2(-4, 0)$ ; фокусы  $F_1(c, 0)$ ,  $F_2(-c, 0)$ , где линейный эксцентриситет  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$ . Уравнения директрис —

$$x_1 = \pm \frac{a}{e} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{4^2}{\sqrt{65}} \Leftrightarrow x_1 = \pm \frac{16\sqrt{65}}{65}.$$

Уравнения асимптот:

$$y_1 = \pm \frac{b}{a}x_1 \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{7}{4}x_1.$$

В системе координат  $Oxy$  соответственно получаем: координаты вершин  $A_1(0, 4)$ ,  $A_2(0, -4)$ ; фокусы  $F_1(0, \sqrt{65})$ ,  $F_2(0, -\sqrt{65})$ ; уравнения директрис  $y = \pm \frac{16\sqrt{65}}{65}$  и уравнения асимптот  $y = \pm \frac{4}{7}x$  (см. рис. 10.23).

**Пример 10.7.** Изобразить кривую  $x^2 + y^2 - 4x = 5$ .

**Решение.** Для решения задачи приведем исходное уравнение к каноническому виду уравнения параболы (10.2) или эллипса (10.7), или гиперболы (10.10). Для этого воспользуемся формулой

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2. \quad (10.20)$$

Из заданного уравнения получаем

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 = 5 &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

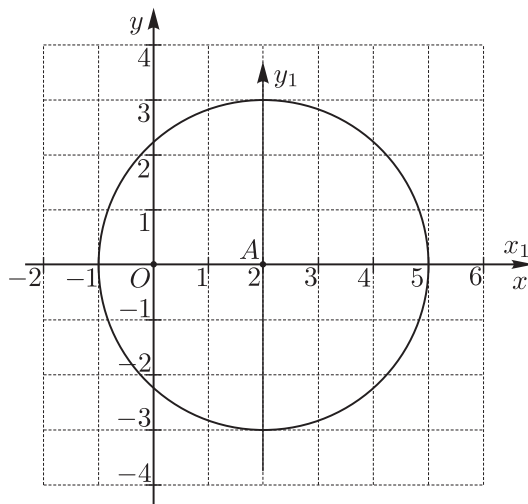


Рис. 10.24. К примеру 10.7

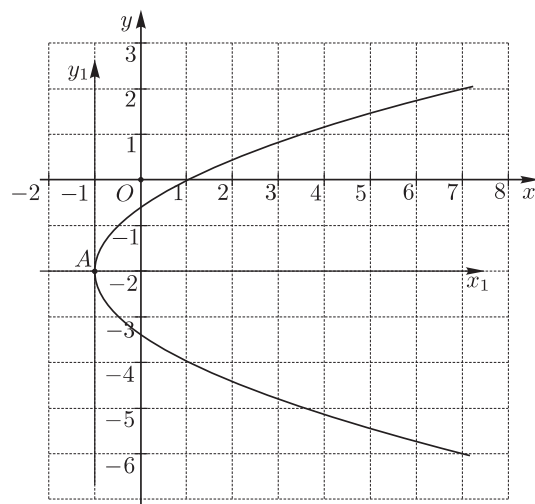


Рис. 10.25. К примеру 10.8

Вводя новые переменные  $x_1 = x - 2$ ,  $y_1 = y$ , получаем каноническое уравнение эллипса с равными полуосями, а точнее, окружности

$$\frac{x_1^2}{3^2} + \frac{y_1^2}{3^2} = 1.$$

Центр окружности в системе координат  $Ax_1y_1$  расположен в точке  $A(0, 0)$ . Так как  $x = x_1 + 2$ ,  $y = y_1$ , то центр окружности в системе координат  $Oxy$  расположен в точке  $A(2, 0)$ . Радиус окружности равен трем (см. рис. 10.24).

**Пример 10.8.** Изобразить кривую  $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ .

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся формулой (10.20):

$$\begin{aligned} y^2 + 4y - 2x + 2 = 0 &\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 - 4 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y + 2)^2 = 2x + 2 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 2(x + 1). \end{aligned}$$

Если ввести новые переменные  $x_1 = x + 1$ ,  $y_1 = y + 2$  и соответствующую систему координат  $Ax_1y_1$ , то уравнение линии принимает вид

$$y_1^2 = 2x_1,$$

что является каноническим уравнением параболы 10.2. Координаты точки  $A$  в системе  $Oxy$  согласно введенным преобразованиям  $x = x_1 - 1 = 0 - 1 = -1$ ,  $y = y_1 - 2 = 0 - 2 = -2$ , т. е.  $A(-1, -2)$  является вершиной параболы (см. рис. 10.25).

Для изображения линии строим параболу  $y_1^2 = 2x_1$  в системе координат  $Ax_1y_1$ , а затем строим систему координат  $Oxy$ , смещенную по оси  $Ax_1$  на единицу вправо и по оси  $Ay_1$  на 2 единицы вверх (см. рис. 10.25).

**Пример 10.9.** Изобразить кривую, описываемую уравнением  $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$ .

**Решение.** Для изображения линии воспользуемся приемами из предыдущих примеров 10.7, 10.8:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 32x + 25y^2 + 50y - 359 = 0 &\Leftrightarrow 16(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 2y) - 359 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16(x^2 - 2x + 1) - 16 + 25(y^2 + 2y + 1) - 25 - 359 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 16(x - 1)^2 + 25(y + 1)^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1. \end{aligned}$$

Введем новые переменные  $x_1 = x - 1$ ,  $y_1 = y + 1$ , тогда уравнение линии принимает вид

$$\frac{x_1^2}{5^2} + \frac{y_1^2}{4^2} = 1,$$

т. е. согласно 10.7 данная линия является эллипсом с полуосями  $a = 5$  и  $b = 4$ . Изобразим эллипс в системе координат  $Ax_1y_1$  (см. рис. 10.26), где согласно введенным преобразованиям  $x = x_1 + 1$ ,  $y = y_1 - 1$  в системе координат  $Oxy$  координаты точки  $A(1, -1)$ . Далее строим систему координат  $Oxy$ , смещенную относительно системы координат  $Ax_1y_1$  влево и вверх на единицу (см. рис. 10.26).

**Пример 10.10.** Изобразить кривую, описываемую уравнением  $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y = 127$ .

**Решение.** Для получения канонического уравнения линии выделим полные квадраты в исходном уравнении:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 54x - 16y^2 - 64y = 127 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(x^2 - 6x) - 16(y^2 + 4y) = 127 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(x^2 - 6x + 9) - 9 \cdot 9 - \\ &\quad - 16(y^2 + 4y + 4) + 4 \cdot 16 = 127 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(x - 3)^2 - 81 - 16(y + 2)^2 + 64 = 127 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9(x - 3)^2 - 16(y + 2)^2 = 144 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - 3)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1. \end{aligned}$$

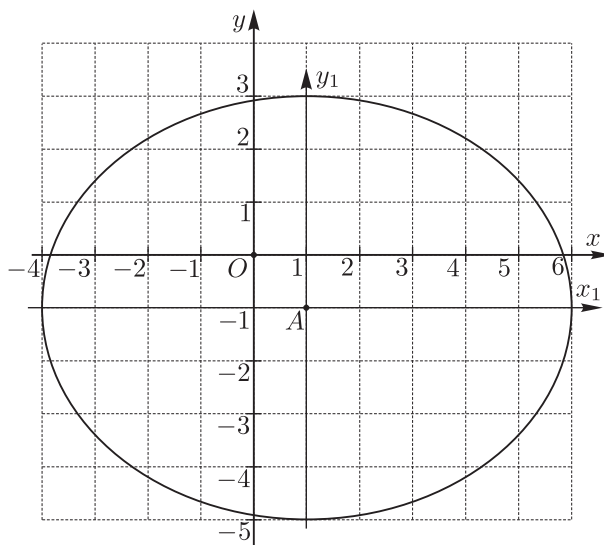


Рис. 10.26. К примеру 10.9

В системе координат  $Ax_1y_1$  при  $x_1 = x - 3$ ,  
 $y_1 = y + 2$  уравнение линии принимает вид

$$\frac{x_1^2}{16} - \frac{y_1^2}{9} = 1.$$

Таким образом, исследуемая линия является гиперболой с полуосями  $a = 4$ ,  $b = 3$ . На рис. 10.27 изображена эта гипербола в системе  $Ax_1y_1$ . Согласно введенным преобразованиям  $x = x_1 + 3$ ,  $y = y_1 - 2$  в системе  $Oxy$  координаты точки  $A(3, -2)$ . Поэтому строим систему координат  $Oxy$  смещенную влево на 3 единицы и вверх на 2 единицы относительно системы  $Ax_1y_1$  (см. рис. 10.27).

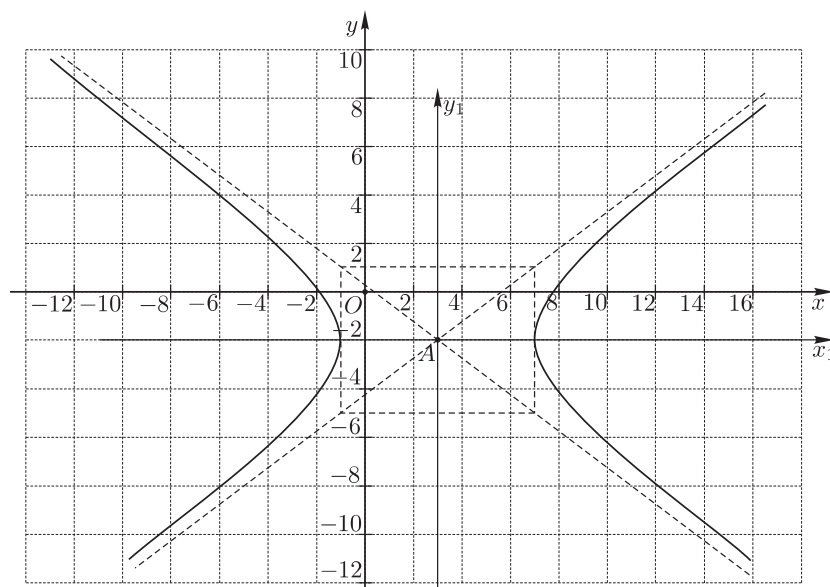


Рис. 10.27. К примеру 10.10

## Контрольные вопросы

- 10.1. Напишите канонические уравнения параболы. Объясните особенности ее расположения на плоскости.
- 10.2. Что называется фокальным параметром параболы? Как определить координаты фокуса параболы?
- 10.3. Чему равен числовой эксцентриситет параболы?
- 10.4. Сформулируйте директориальное свойство параболы.
- 10.5. Сформулируйте оптическое свойство параболы.
- 10.6. Напишите каноническое уравнение окружности. Укажите координаты ее центра. Как определить, чему равен радиус окружности?
- 10.7. Напишите каноническое уравнение эллипса. Что называется полуосями эллипса? Каковы особенности расположения эллипса на плоскости в зависимости от полуосей?
- 10.8. Что называется числовым эксцентриситетом эллипса? Что характеризует числовой эксцентриситет эллипса?
- 10.9. Чему равен числовой эксцентриситет окружности? Где расположены фокусы и директрисы окружности?
- 10.10. Запишите координаты фокусов эллипса для двух случаев:
  - а) фокусы лежат на оси  $Ox$ ;
  - б) фокусы лежат на оси  $Oy$ .

Для каждого из этих случаев запишите уравнение директрис эллипса.

- 10.11. Сформулируйте директориальное свойство эллипса.  
10.12. Сформулируйте оптическое свойство эллипса.  
10.13. Напишите канонические уравнения гиперболы, назовите ее полуоси. Как определить, какая полуось является действительной, а какая мнимой?  
10.14. Напишите уравнения асимптот гиперболы.  
10.15. Запишите координаты фокусов гиперболы и уравнения директрис для двух случаев:  
а) фокусы лежат на оси  $Ox$ ;  
б) фокусы лежат на оси  $Oy$ .  
10.16. В чем заключается директориальное свойство гиперболы?  
10.17. Сформулируйте оптическое свойство гиперболы.  
10.18. Объясните, как по уравнению кривой второго порядка понять, к какому типу относится кривая? В чем суть метода выделения полного квадрата?  
10.19. Запишите уравнение кривой второго порядка в полярной системе координат.

## Задачи

- 10.1°. Изобразите кривые:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } y^2 = 6x; & \text{б) } x^2 = 3y; & \text{в) } y^2 = -2x; & \text{г) } x^2 = -y; \\ \text{д) } x^2 + y^2 = 64; & \text{е) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; & \text{ж) } 3x^2 + 4y^2 = 12; & \text{з) } x^2 - 9y^2 = 0; \\ \text{и) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1; & \text{к) } 16x^2 - 9y^2 = 144. & & \end{array}$$

- 10.2°. Постройте параболу  $y^2 = 2x$ , укажите координаты вершины и фокуса, а также запишите уравнение директрисы.  
10.3°. Составьте уравнение окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки  $A(1, 2)$ ,  $B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $C(0, -2)$ ,  $D(-2, 0)$ ,  $E(2, -2)$ ?  
10.4°. Центр окружности радиуса 5 находится в точке  $C(-1, 3)$ . Запишите уравнение этой окружности. Лежат ли точки  $P(3, 4)$  и  $Q(2, -1)$  на этой окружности?  
10.5°. Составьте каноническое уравнение эллипса, полуоси которого  $a = 3$ ,  $b = 4$ .  
10.6°. Изобразите эллипс  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Найдите координаты его фокусов и эксцентриситет. Запишите уравнение директрис эллипса.  
10.7°. Изобразите эллипс  $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ . Найдите координаты его фокусов и эксцентриситет. Запишите уравнение директрис эллипса.  
10.8°. Постройте гиперболы:

$$\text{а) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad \text{б) } y^2 - 4x^2 = 16.$$

Напишите уравнения асимптот и директрис этих гипербол. Укажите координаты их фокусов и эксцентриситет. Под каким углом пересекаются асимптоты каждой из гипербол?

- 10.9. Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:  
а) парабола симметрична оси  $Oy$ , лежит в верхней полуплоскости и имеет параметр  $p = 6$ ;  
б) парабола симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $M(2, -6)$ ;  
в) парабола симметрична относительно оси  $Oy$  и проходит через точку  $K(4, 8)$ .  
10.10. Составьте уравнение параболы, симметричной относительно оси  $Ox$  и проходящей через точки  $O(0, 0)$  и  $B(8, 1)$ .

- 10.11. Определите координаты вершины и фокальный параметр  $p$  парабол, заданных уравнениями:

а)  $y = x^2 - 6x + 1$ ;    в)  $x = 2y^2 - 4y$ ;    б)  $y = -x^2 + 8x + 3$ ;    г)  $x = 1 - 5y - y^2$ .

Изобразите эти параболы.

- 10.12. Известно, что точки  $O(0, 0)$  и  $M(4, 0)$  являются концами одного из диаметров окружности. Составьте ее уравнение.
- 10.13. В каких точках окружность  $x^2 + y^2 = 4$  пересекает прямую  $2x + y - 2 = 0$ ?
- 10.14. Укажите координаты центров окружностей и их радиусы. Изобразите окружности:

а)  $x^2 + y^2 - 6x = 0$ ;    в)  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$ ;  
 б)  $x^2 + y^2 = 8y$ ;    г)  $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 17, 5$ .

- 10.15. Составьте уравнение эллипса в канонической системе координат, если известно, что:

- а) эллипс проходит через точки  $A(0, 2)$  и  $B(5, 0)$ ;  
 б) эллипс проходит через точки  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$  и  $Q\left(-1, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ;  
 в) расстояние между фокусами эллипса равно 8, а его большая полуось  $a = 5$ ;  
 г) эксцентриситет эллипса равен  $\sqrt{5}/3$ , а его большая полуось  $a = 3$ ;  
 д) эксцентриситет эллипса равен  $\sqrt{15}/4$ , а его большая полуось  $b = 4$ .

- 10.16. Абсциссы всех точек окружности  $x^2 + y^2 = 25$  сокращены в пять раз. Напишите уравнение полученной кривой, укажите координаты ее фокусов и эксцентриситет.

- 10.17. Ординаты всех точек окружности  $x^2 + y^2 = 9$  увеличены в 4 раза. Напишите уравнение полученной кривой, укажите координаты ее фокусов и эксцентриситет.

- 10.18. Составьте уравнение гиперболы в канонической системе координат, если известно, что фокусы гиперболы лежат симметрично относительно начала координат на оси  $Ox$ , а также:

- а) расстояние между фокусами равно 12, а между вершинами равно 6;  
 б) точки  $M_1(2, -5)$  и  $M_2(\sqrt{2}, 2\sqrt{5})$  лежат на гиперболе;  
 в) полуось  $a = 2$ , а эксцентриситет  $e = \sqrt{2}$ ;  
 г) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет  $e = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ;  
 д) расстояние между директрисами равно  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ , а эксцентриситет  $e = \sqrt{5}$ ;  
 е) расстояние между директрисами равно  $\frac{18}{\sqrt{13}}$ , а уравнения асимптот  $y = \pm \frac{2}{3}x$ .

- 10.19. Известен закон движения точки, в котором параметром  $t$  является время. По какой траектории движется точка, если ее декартовы координаты выражаются формулами:

а)  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 5 \sin t$ ;    б)  $x = -t^2 + 2$ ,  $y = 3 - t$ ;    в)  $x = 1 - t$ ,  $y = 2t^2 - 3t$ ;  
 г)  $x = -6t + t^2$ ,  $y = t - 1$ ;    д)  $x = 4t^2 + 1$ ,  $y = 2t - 2$ ;    е)  $x = a(1 + \cos t)$ ,  $y = a(1 + \sin t)$ ?

- 10.20. Приведите уравнения кривых к каноническому виду, определите их тип, укажите формулы преобразования координат. Изобразите кривые:

а)  $y = x^2 - 6x + 1$ ;    б)  $x^2 + 9y^2 - 6x = 0$ ;    в)  $x^2 - y^2 - 6x = 0$ ;  
 г)  $6y^2 - 12y = x - 8$ ;    д)  $x^2 + y^2 + 2y = 3$ ;    е)  $y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$ ;  
 ж)  $9x^2 + y^2 + 2y = 8$ ;    з)  $x^2 + 9y^2 + 2x - 8 = 0$ ;    и)  $4x^2 - y^2 + 8y = 0$ ;  
 к)  $y^2 + 3x - 6y + 12 = 0$ ;    л)  $x^2 - y^2 + 6x - 4y = 4$ ;    м)  $x^2 + 4y^2 + 16y = 0$ ;  
 н)  $x^2 - y^2 = 2x - 2y - 1$ ;    о)  $x^2 - y^2 = 2x$ ;    п)  $x^2 + 4x - 24y + 76 = 0$ ;  
 р)  $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ ;    с)  $5x^2 + 2y^2 - 40x + 8y + 78 = 0$ .

10.21. Изобразите линии на плоскости, которые описываются уравнениями:

а) $x = \sqrt{-y}$ ;	з) $y = -2 + \sqrt{-x - 5}$ ;	б) $y = \sqrt{2x - x^2}$ ;
и) $x = 2 + \sqrt{15 + 2y - y^2}$ ;	в) $y = -3 - \sqrt{14x - x^2}$ ;	к) $y = -2 + \sqrt{-x - 5}$ ;
г) $y = 3 + \sqrt{4 - y}$ ;	л) $x = -4 - \sqrt{-8 + 6y - y^2}$ ;	д) $y = \sqrt{8x - 2x^2}$ ;
м) $y = -2 + \sqrt{8 - 18x - 9x^2}$ ;	е) $x = \sqrt{-3y^2 + 12y - 3}$ ;	н) $x = 1 - 2\sqrt{-y^2 - 2y + 3}$ ;
ж) $x = 3 + \sqrt{y^2 - 2y + 5}$ ;	о) $y = -1 - \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ .	

10.22. Изобразите области, ограниченные линиями, и укажите координаты точек пересечения линий:

а)  $y = 4 - x^2$ ;  $3x - 2y - 6 = 0$ ;  
б)  $x = \sqrt{36 - y^2}$ ;  $x = -6 - \sqrt{36 - y^2}$ ;  
в)  $x = 8 - y^2$ ;  $x = -2y$ ;  
г)  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ;  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ;  $y = 0$ ;  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;  
д)  $x^2 - 4y + y^2 = 0$ ;  $x^2 - 8y + y^2 = 0$ ;  $y = x$ ;  $x = 0$ .

10.23. Изобразите области, определенные неравенствами:

а)  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $x \geq \frac{1}{2}$ ;  $y \geq 0$ ;  
б)  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ;  
в)  $y \geq x^2$ ,  $y \leq 4 - x^2$ ;  
г)  $y^2 - x^2 \leq 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 9$ ;  
д)  $x^2 + y^2 \geq 2x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4x$ .

10.24. Изобразите кривую, заданную в полярной системе координат уравнением  $r = 4 \sin \varphi$ .

10.25. Изобразите кривую, заданную в полярной системе координат уравнением  $r = 2 \cos 2\varphi$ .

10.26. Изобразите кривую, заданную в полярной системе координат уравнением  $r = 3 \sin^2 2\varphi$ .

10.27. Изобразите кривую, заданную в полярной системе координат уравнением  $r^2 = \sin 2\varphi$ .

10.28\*. Вершина правильного треугольника со стороной  $a$  лежит в фокусе параболы, а противоположащая этой вершине сторона — на директрисе. Найдите фокальный параметр этой параболы.

10.29\*. Точка  $M(2, 1)$  — середина хорды параболы  $y^2 = 4x$ . Составьте уравнение прямой, на которой лежит эта хорда.

10.30\*. Докажите, что из всех точек эллипса ближайшей к фокусу и наиболее удаленной от него являются вершины, расположенные на фокальной оси.

10.31\*. Орбита земного шара — эллипс, большая полуось которого равна  $150 \cdot 10^6$  км, а эксцентриситет равен 0,017. Имея в виду, что Солнце находится в фокусе этого эллипса, вычислите, на сколько длиннейшее расстояние от Земли до Солнца в июне больше кратчайшего расстояния в декабре. Используйте результат предыдущей задачи.

10.32\*. Докажите, что проекция окружности на плоскость, не параллельную и не перпендикулярную плоскости, в которой лежит окружность, есть эллипс. Найдите зависимость эксцентриситета этого эллипса от угла  $\varphi$  между плоскостями.

10.33\*. Найдите эксцентриситет гиперболы, асимптоты которой перпендикулярны.

10.34\*. На гиперболе  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$  укажите точку, которая в три раза дальше от одной асимптоты, чем от другой.

10.35\*. Вершины гиперболы находятся в фокусах эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , а ее фокусы — в вершинах этого эллипса. Найдите эксцентриситет гиперболы.

## Информация

*От редакции*

### **О выходе книги В. В. Цукермана**

В издательстве “Икар” вышла в свет книга Виталия Владимировича Цукермана “Действительные числа и основные элементарные функции”, аннотация которой была опубликована в нашем журнале, №2(50), 2009г. Особенностью книги является мотивированность теорем, а также строгие доказательства всех утверждений. Книгу можно приобрести в киоске Института русского языка имени А.С.Пушкина по адресу: Москва, ул. Волгина, д. 6. Цена 300 руб.

### **Об изменении состава редколлегии журнала**

На заседании редакционной коллегии журнала “Математическое образование”, состоявшемся 8 января 2010г., из состава редколлегии выведен Сергей Александрович Дориченко по его просьбе. Благодарим Сергея Александровича за длительное плодотворное сотрудничество.



## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2010 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2010 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,  
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

**A. Belov, R. Yavich. Problem of Giftedness and Stages in Math Education 2**

Some pupils understand mathematics well and are considered to be gifted. The authors explain that for the rest students it is possible to make studying of mathematics easier and clearer if provide it in proper stages.

**N. Astapov. Theorem on Vector Basis in Geometric Problems 6**

The theorem on vector basis provides a universal and powerful tool for solving numerous geometric problems.

**F. Varpakhovsky, O. Logvinenko. On Maximal Perimeter of a Convex Pentagon with a Fixed Diameter 12**

It is shown that the regular pentagon has the maximal perimeter among all of the convex pentagons with a fixed diameter.

**Tuan Le. A Further Investigation on an Inequality of Root 17**

An interesting inequality containing square root is studied. Some generalizations and applications are considered.

**A. Rubinstein. On Some Dynamical Systems of the Second Order 24**

Some dynamical systems in plane, with polynomial right hand sides, are studied by qualitative methods.

**S. Dvoryaninov. On Superposition Principles 31**

The universal superposition principle is shown appearing from algebraic to nonlinear differential equations.

**S. Kuleshov, A. Salimova, S. Stavtsev. Lectures on Analytic Geometry (continued) 36**

Themes 9 and 10, equation of a straight line in 3D space and equations of conics in plane are considered.

**Information 78**