

# Математическое Образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

Год двадцатый

**№ 1 (77)**

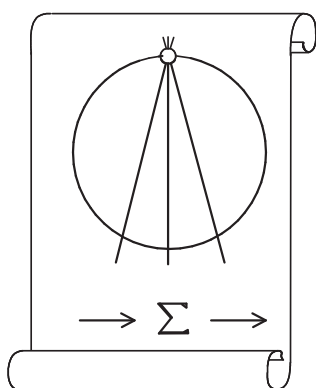
январь - март 2016 г.

Москва

*Периодическое издание в области математического образования*



Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”  
[www.lomonosovclub.com](http://www.lomonosovclub.com)



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.  
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)  
Дубовицкий А.В.  
Канель-Белов А.Я.  
Комаров С.И.  
Константинов Н.Н.  
Костенко И.П.  
Саблин А.И.

№ 1 (77), 2016 г.

© “Математическое образование”, составление, 2016 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2016 г.  
“Математическое образование”, периодическое издание.  
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.  
Подписано к печати 31.03.2016 г.  
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.  
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.  
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.  
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (77), январь – март 2016 г.

## Содержание

### **Актуальные вопросы математического образования**

*Н. Х. Розов.* Логика и школа 2

### **Учащимся и учителям средней школы**

*В. Б. Дроздов.* Физика и математика треугольника Шварца 6

*А. Ф. Ляхов.* Построение линии сгиба в оригами 10

### **Студентам и преподавателям математических специальностей**

*В. В. Ивлев.* Об одном приближении схемы гибели и размножения (продолжение) 19

*Д. В. Гусев.* Обход конечным автоматом с четырьмя камнями  $k$ -мерного пространства за полиномиальное время 23

### **Из истории математического образования**

*С. В. Жаров.* Педагогическое наследие профессора Е. С. Березанской и современное начальное образование 44

### **Содержание образования: математика**

*А. А. Привалов.* К изучению основ теории множеств на математическом кружке средней школы 49

## Логика и школа

*Н. Х. Розов*

В статье развивается и обосновывается положение о том, что изучения школьной математики не достаточно для формирования общей логической культуры учащихся, и что это формирование должно выполняться в рамках отдельного школьного предмета “Логика”.

Логическое мышление для всего общества, для публичной и личной жизни каждого имеет исключительное значение. Логика служит компасом, рассудительно направляющим поступки человека, она помогает избежать ошибочных решений и не поддаться обману, уйти от конфликтных ситуаций и предвосхитить развитие событий, отличить истину от лжи. Именно обучение логически, “здро”, правильно рассуждать играет ведущую, определяющую роль в формировании интеллектуального потенциала и креативности молодого человека, в формировании такой личности, которая сегодня должна быть приспособлена жить в нашем неоднозначном, недоброжелательном и противоречивом мире.

Для этого нужно обеспечить целенаправленное ознакомление школьников с основными классическими универсальными законами логического мышления, что возможно только в рамках специальной дисциплины “Логика”. Однако наша школа фактически не уделяет внимания систематическому воспитанию логического мышления учащихся.

Правда, существует расхожая точка зрения (берущая начало от математиков — методистов и педагогов), что оно автоматически, самопроизвольно и самодостаточно формируется в процессе изучения курса школьной математики (особенно геометрии). В обязательном минимуме содержания основных образовательных программ по учебному предмету “Математика” на базовом уровне среднего общего образования даже имеется следующая (довольно пустая) фраза: “Универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности”. Школьная математика упорно и настойчиво предпринимает усилия для обучения учащихся, помимо содержательной части своей дисциплины, ещё и общей “логике мышления”, хотя непонятно, кто, когда и почему поручил именно ей это делать.

Для обоснования такой позиции, кроме эмоциональных общих слов и демонстрации олимпиадных логических задач, обычно приводятся классические максимы “великих” — вроде: “математику уже потому изучать следует, что она ум в порядок приводит”. А для исправления того печального положения, что с логикой рассуждений у учеников дело обстоит всё-таки из рук вон плохо, постоянно выдвигается одно и то же требование — увеличить число часов на курс математики. (Но не разъясняется, на что конкретно пойдут “добавляемые” часы: на решение очередных десятков формальных задач? на новые упражнения в занудных и громоздких преобразованиях? на дополнительные репетиции ЕГЭ?)

Будем объективны: школьная математика в определенном смысле действительно вносит свой вклад в развитие у учащихся умения рассуждать, делать правильные выводы, обосновывать утверждения — ведь она неотделима от логических построений. Но все они на самом деле подспудно опираются прежде всего на “общелогические” законы, что, впрочем, специально никогда не акцентируется. (И это не удивительно: ведь сами учителя математики с наукой “Логика” не знакомы.)

При этом в головы школьников постоянно и настойчиво грузятся особые, специфически математические приёмы рассуждений, символические обозначения, кванторы, знакоупотребление. Встречал ли кто-либо в обычной человеческой деятельности, в разговоре или в письме, нагромождения знаков дизъюнкции и конъюнкции (ставшие чуть ли не обязательными при решении уравнений и неравенств)? Пристрастной проверке владения кванторами посвящены сверхпопулярные сегодня формальные “задачи с параметрами”, скажем: “Найти все значения  $c$ , для каждого из которых существует хотя бы одно такое значение  $b$ , что при любом значении  $a$  уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два различных корня”. На всё это расходуется много сил и времени, но так ли уж это актуально для реальной житейской практики?

Весь этот весьма специфический набор понятий и инструментов (который относится к “математической логике”) действительно используется и — весьма эффективно! — обслуживает определённые абстрактные научные теории. Но законы математической логики отнюдь не являются универсальными, имеют подчас нулевое применение в большинстве областей человеческой деятельности, в обычных жизненных ситуациях. Достаточно сказать, что в таких ситуациях многие математики сами оказываются столь же беспомощными, как и все люди, — и их не спасает умение решать столь любимые ими искусственные “логические задачки”.

Хочется остановиться и ещё на одном фрагменте “логики школьной математики”. Учителя хорошо знают, с какими муками учащиеся усваивают (если вообще усваивают) смысл выражений “необходимо”, “достаточно”, “необходимо и достаточно”. Но насколько это оправдано, кому это потребуется в “послешкольной” практической жизни? Доводилось ли кому-нибудь на работе, дома, в автобусе, в магазине, на отдыхе, в разговоре хоть раз услышать чью-либо фразу с использованием этого пресловутого “необходимо и достаточно”? Да, этот оборот речи исключительно полезен в математической науке, его для своего удобства учёные-математики и придумали, но причём здесь школьники? Чтобы звонко и “научно” сформулировать на уроке теорему Пифагора? Ведь в школе изучается не *наука* “Математика”, а *предмет* “Математика”, что принципиально не одно и то же. Поэтому не понятнее ли и проще будет ученику, если вместо одной теоремы с этим словосочетанием использовать два отдельных утверждения вида “Если ... , то ... ”?

Может быть, здесь уместно вспомнить высказывание Л. Д. Ландау: “Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путём изучения ненужных вещей люди будто бы научатся логически мыслить”.

Об ущербности “логического обучения” в нашей школе свидетельствует и тот печальный факт, что слишком многие учащиеся не понимают различий в смысле союзов “и”, “или” в разных контекстах (не обязательно математических!), не могут точно объяснить значение слов “некоторый”, “любой”, “всякий”, “каждый”, “какой-то”, “заданный”, “фиксированный”, “определённый”, “произвольный”, “тогда и только тогда”, “один и только один” и др. К сожалению, это свидетельствует и о явных недостатках в преподавании русского языка, о прискорбном отсутствии взаимодействия этой дисциплины с математикой.

С утверждением об “автоматическом” привитии логического мышления в ходе изучения математики можно поспорить. Сколько раз приходилось встречать категорические высказывания, что математика приучает ученика всегда задавать вопрос “Почему?”, требует ничего не принимать на веру, всё строго, скрупулезно обосновывать, чтобы отличать истину от лжи. Но насчёт “ничего не принимать на веру” — сказано, пожалуй, слишком сильно.

Внимательно посмотрите школьные учебники — там значительное число математических фактов принимается именно “на веру”, как “директивные истины свыше”. Как появляется правило сложения обыкновенных дробей? Что за число  $2\sqrt{3}$ ? Почему при решении уравнения  $x^2 + 4x = 2x - 5$  можно перейти к уравнению  $x^2 + 2x + 5 = 0$ ? Почему отрезок, соединяющий точку внутри многоугольника с точкой вне него, пересекает его контур? Подобные факты в лучшем случае иллюстрируются примерами, картинками, словами “как мы хорошо знаем” — и даже не упоминается, что доказательства, конечно, были бы нужны, но из дидактических соображений опущены. Впрочем, все мы понимаем, что никакой “полной” логической строгости

достичь в школе в принципе невозможно. Да и, слава Богу, ни в коем случае не нужно.

Подавляющее большинство школьных (и олимпиадных) математических задач построено по детерминированной схеме: “Известно, что ...” → “Доказать, что ...”. Иначе говоря, никакого самостоятельного поиска результата не предполагается — он уже чётко сформулирован, а цель состоит лишь в его обосновании путём формальных рассуждений на базе известного фактического материала. (Недаром наиболее сложными считаются те, весьма редкие, задачи по геометрии, где условие допускает неоднозначность конфигурации с разными ответами.) Тем самым типичные задачи подспудно воспитывают в молодом человеке привычку действовать лишь при наличии точной формулировки итогового результата, гасят инициативность, порождают формализм и послушание при выполнении задания. Прекрасная начальная школа чиновника: выполняй только то, что тебе уже предписано!

Кстати, несоразмерное стремление попутно обучать учащихся “логике” приносит невосполнимые убытки самой школьной математике. Вместо того, чтобы знакомить (хотя бы на описательном уровне) с имеющими общеобразовательное значение содержательными понятиями, алгебра “закопалась” в бесконечном формализме решения искусственных вычурных логарифмико-тригонометрических уравнений. Ограничиваясь ради “эрзац-логики” нескончаемым изучением скучных окружностей и однообразных пирамид, геометрия обедняет своё познавательное и образовательное предназначение, страдает крайней сухостью и блёклостью изложения, оторванностью от реальной действительности. Она явно злоупотребляет вниманием к мало кому нужной технике векторных вычислений (и всё более превращается в аналитическую геометрию 1-го курса вуза). Ей явно не хватает интересной и важной информации об удивительном многообразии фигур и тел в окружающем нас мире, заботы о воспитании сверхактуального для взрослой жизни пространственного воображения и геометрического мышления.

Напомним, что активное возражение В. И. Арнольда вызывало “засилье аксиоматико-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе)”; он отмечал, что “выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики”, а “результатом явилось повсеместно наблюдаемое отвращение к математике”.

Весьма неубедительно многократно многими повторенное утверждение, что математика — наилучший путь воспитания логического мышления учащихся, единственный, исключительный и эффективный подходящий инструмент. Что, в информатике, физике, химии, лингвистике, истории нет поводов для пристальных логических рассматриваний? Например, так называемые “качественные задачи по физике” развивают умение находить и взвешивать различные аргументы, видеть разные варианты и скрытые обстоятельства, делать на их базе чёткие выводы, не владея априорной информацией о том, что в действительности имеет место. Тем самым, помимо логики рассуждений, стимулируется развитие креативного мышления, поисковой самостоятельности. Отличные возможности для развития логической культуры представляют шахматы (кстати, в ряде стран в школах введён такой предмет), игра в бридж, головоломки, технические задачи, криптография.

Конечно, изыски логики в математике привлекают особо интересующихся. Но необходимость заучивания скучных формальных рассуждений учебника отталкивают от неё “массового” школьника, не имеющего должного интеллектуального потенциала (в силу возраста, недостатков развития или иных причин). При изучении математики они испытывают дискомфорт, вырабатывают стойкую неприязнь к предмету и даже получают психологическую травму. А ведь именно такие ученики, составляющие большинство, должны быть в центре особого внимания — в том числе и для воспитания их мышления. Но в последние десятилетия отмечается снижение уровня общей математической подготовки учащихся и, естественно, навыков проводить логические рассуждения. Теперь почти все школьные задачи представляют собой чисто вычислительные упражнения, сводящиеся к громоздким и длинным преобразованиям, а “задачи на доказательство” практически исчезли.

Несомненно, что каждый школьный предмет, и математика в их числе, должен быть ориентирован в первую очередь на максимально эффективное освоение учащимися именно своего собственного содержания. “Чтобы привести ум в порядок”, математику изучать необходимо, но недостаточно. Как необходимо сосредотачивать внимание на логических моментах всех других предметов. А воспитание подлинной культуры логического мышления должно быть отдано дисциплине, содержащей основы науки, которая веками занималась именно этим.

Поэтому поддерживаемая сегодня Минобрнауки точка зрения на логику как на ненужный в школе предмет представляется глубоко ошибочной.

*Розов Николай Христович,  
декан факультета педагогического образования  
МГУ им. М. В. Ломоносова, профессор,  
доктор физ.-мат.наук.*

*E-mail: fpo.mgu@mail.ru*

## Физика и математика треугольника Шварца

*В. Б. Дроздов*

В статье изложен физический метод решения задачи Шварца о треугольнике наименьшего периметра, вписанном в данный остроугольный треугольник. Выведен ряд соотношений между характеристиками исходного треугольника и его треугольника Шварца.

Немецкий математик Герман Амандус Шварц (1843–1921) сформулировал и решил интересную и трудную задачу: «В остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра». И хотя задача относится к элементарной геометрии, её решение весьма неэлементарное и длинное. А результат таков: вершинами искомого треугольника Шварца  $A_1B_1C_1$  являются основания высот данного треугольника  $ABC$ , см. рис. 1.

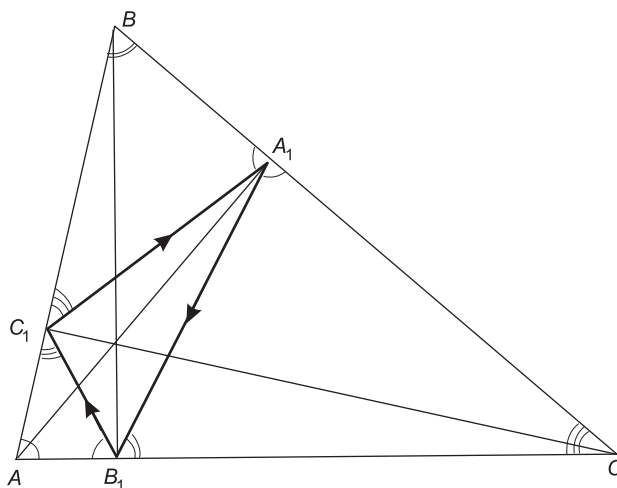


Рис. 1.

### 1. От физики к геометрии

Замечательно, что физика, приходя на помощь геометрии, дает изящное и короткое решение этой задачи. Нам потребуется принцип известного французского математика Пьера Ферма (1601–1665): «Луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками по тому пути, вдоль которого время его прохождения меньше, чем вдоль любого из других путей, соединяющих эти точки». Понятно, что начальная и конечная точки в частном случае могут совпадать.

Вначале отметим, что треугольники  $A_1BC_1$  и  $ABC$  подобны, как имеющие общий угол  $B$  и пропорциональные стороны, его заключающие:

$$\cos B = \frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1B}{AB}.$$

Аналогично доказывается подобие треугольников:  $AB_1C_1$  и  $ABC$ ;  $A_1B_1C$  и  $ABC$ . Изобразим на рисунке равные углы равным числом дуг. Становится очевидным, что

$$\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1; \quad \angle BB_1C_1 = \angle A_1B_1B; \quad \angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C.$$



То есть высоты треугольника  $ABC$  являются биссектрисами треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Теперь вообразим, что стороны треугольника  $ABC$  зеркальные. Поместим в точку  $A_1$  точечный источник света и направим один из его лучей в точку  $B_1$ . Тогда в соответствии с законом отражения света — «угол отражения равен углу падения», этот луч попадет в точку  $C_1$  и далее вернется в исходную точку  $A_1$ . Видим, что в силу принципа Ферма световой луч идет в оптически однородной среде по кратчайшему пути. Следовательно, периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  будет наименьшим по сравнению с другим расположением хотя бы одной точки:  $A_1, B_1, C_1$ . Ибо, если взять хотя бы одну из точек  $A_1, B_1, C_1$  в других местах на сторонах  $BC, AC, AB$  соответственно, то равенство хотя бы одной пары углов  $\angle AA_1C_1$  и  $\angle AA_1B_1$ ;  $\angle BB_1C_1$  и  $\angle A_1B_1B$ ;  $\angle A_1C_1C$  и  $\angle B_1C_1C$  нарушится. Значит, свет тогда не пойдет по наименьшему периметру треугольника Шварца.

## 2. От геометрии к тригонометрии

Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Применим к треугольнику  $AB_1C_1$  теорему синусов:

$$\frac{B_1C_1}{\sin A} = \frac{AC_1}{\sin B}.$$

Но из треугольника  $ACC_1$  имеем:  $AC_1 = b \cos A$ . Тогда

$$B_1C_1 = \frac{b}{\sin B} \sin A \cos A = 2R \sin A \cos A = R \sin 2A.$$

Аналогично,

$$A_1C_1 = R \sin 2B \text{ и } A_1B_1 = R \sin 2C.$$

Периметр треугольника Шварца

$$2P_{\text{ш}} = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

Но он не превосходит периметра треугольника, состоящего из средних линий исходного  $\triangle ABC$ :

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Таким образом, получаем нестрогое неравенство

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leq \sin A + \sin B + \sin C, \quad (1)$$

знак равенства в котором будет лишь в случае, когда медианы совпадают с соответствующими высотами, то есть только для равностороннего треугольника.

## 3. От тригонометрии к алгебре

Умножим обе части неравенства (1) на

$$2R = \frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C}:$$

$$\frac{a}{\sin A} \cdot 2 \sin A \cos A + \frac{b}{\sin B} \cdot 2 \sin B \cos B + \frac{c}{\sin C} \cdot 2 \sin C \cos C \leq a + b + c$$

или

$$2a \cos A + 2b \cos B + 2c \cos C < a + b + c.$$

Заменим в последнем неравенстве косинусы углов треугольника  $ABC$ :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Тогда придем после очевидных алгебраических преобразований и упрощений к неравенству, связывающему длины сторон  $a, b, c$  треугольника:

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \geq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2. \quad (2)$$

Очевидно, что знак равенства в неравенстве (2) будет в том и только в том случае, когда  $a = b = c$ , то есть  $\triangle ABC$  — равносторонний.

#### 4. Отношение площадей

Представляет несомненный геометрический интерес выяснить, в каких пределах находится отношение  $\frac{S_{\text{ш}}}{S}$  площади треугольника Шварца к площади исходного треугольника.

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{\text{ш}} &= \frac{1}{2} B_1 C_1 \cdot C_1 A_1 \cdot \sin(180^\circ - 2C) = \frac{1}{2} R \sin 2A \cdot R \sin 2B \cdot \sin 2C = \\ &= \frac{R^2}{2} \sin 2A \sin 2B \sin 2C. \\ S &= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{S_{\text{ш}}}{S} = \frac{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}{4 \sin A \sin B \sin C} = 2 \cos A \cos B \cos C.$$

Ясно, что  $\frac{S_{\text{ш}}}{S}$  может быть сколь угодно близким к нулю. Выразив из теоремы косинусов  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$ , получим:

$$\frac{S_{\text{ш}}}{S} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2}.$$

Для исследования последнего отношения мы вынуждены применить искусственный прием:

$$\left(\frac{S_{\text{ш}}}{S}\right)^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)^2 \cdot (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16a^4b^4c^4},$$

что преобразуем так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_{\text{ш}}}{S}\right)^2 &= \frac{(c^2 + (a^2 - b^2))(c^2 - (a^2 - b^2))(b^2 + (c^2 - a^2))(b^2 - (c^2 - a^2))}{16a^4b^4c^4} \times \\ &\times \frac{(b^2 + (c^2 - a^2))(b^2 - (c^2 - a^2))(a^2 + (b^2 - c^2))(a^2 - (b^2 - c^2))}{16a^4b^4c^4} = \\ &= \frac{1}{16} \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{c^4} \cdot \frac{b^4 - (c^2 - a^2)^2}{b^4} \cdot \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{a^4} = \\ &= \frac{1}{16} \left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{c^2 - a^2}{b^2}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \left(\frac{b^2 - c^2}{a^2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Видим, что  $\left(\frac{S_{\text{ш}}}{S}\right)_{\max}^2 = \frac{1}{16}$ , то есть  $\left(\frac{S_{\text{ш}}}{S}\right)_{\max} = \frac{1}{4}$ , что будет только в случае равностороннего треугольника. Итак,

$$0 < \frac{S_{\text{ш}}}{S} \leq \frac{1}{4}.$$

## 5. Отношение периметров

Наконец, найдем отношение периметра  $2P_{\text{ш}}$  треугольника Шварца к периметру  $2P$  исходного треугольника. Поскольку

$$2P_{\text{ш}} = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \text{ и } 2P = 2R(\sin A + \sin B + \sin C),$$

то

$$\frac{2P_{\text{ш}}}{2P} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{2(\sin A + \sin B + \sin C)}.$$

Преобразуем числитель и знаменатель дроби отдельно:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + \sin(2\pi - (2A+2B)) = \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) - 2 \sin(A+B) \cos(A+B) = \\ &= 2 \sin(A+B) \cdot (\cos(A-B) - \cos(A+B)) = \\ &= 2 \sin(\pi - C) \cdot 2 \sin A \sin B = \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C. \\ \text{б) } 2(\sin A + \sin B + \sin C) &= \\ &= 2 \left( 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin(\pi - (A+B)) \right) = \\ &= 2 \left( 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = \\ &= 4 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = \\ &= 8 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{2P_{\text{ш}}}{2P} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

Ранее было установлено, что  $\frac{S_{\text{ш}}}{S} = 2 \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{4}$ , откуда  $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ .

Обозначим углы по-другому:  $\cos D \cos E \cos F \leq \frac{1}{8}$ . Мы вправе предположить, что  $D = 90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $E = 90^\circ - \frac{B}{2}$ ,  $F = 90^\circ - \frac{C}{2}$ , так как  $D + E + F = 270^\circ - \frac{A+B+C}{2} = 270^\circ - 90^\circ = 180^\circ$ , как и должно быть для треугольника. Имеем:

$$\cos \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right) \cos \left( 90^\circ - \frac{B}{2} \right) \cos \left( 90^\circ - \frac{C}{2} \right) \leq \frac{1}{8},$$

то есть  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ , причём равенство имеет место только для равностороннего треугольника. Поэтому отношение периметров:

$$\frac{2P_{\text{ш}}}{P} \leq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

А равенство достигается только в случае равностороннего треугольника.

Дроздов Виктор Борисович,  
г. Рязань.

# Построение линии сгиба в оригами

*А. Ф. Ляхов*

В данной работе приводится теорема об однозначном определении линии перегиба листа бумаги по заданным координатам точки, в которую осуществляется перемещение угла квадрата. Это соответствие носит взаимно однозначный характер, то есть по заданной линии перегиба можно найти точку, в которую осуществляется перегиб угла квадрата. Приводится решение задачи об удвоении куба.

Эти задачи и их решения могут быть использованы на факультативных занятиях по геометрии.

В Японии из-за её географического островного положения, изолированности от основного материка и ограниченности ресурсов сформировалась своя особая культура и соответствующие ей математические подходы, отличные от евроазиатских подходов. В XI веке возникла особая «храмовая математика», одним из разделов которой является искусство оригами – искусство построения бумажных фигур из листа бумаги.

В классической геометрии существует целый раздел задач, в которых все построения и доказательства осуществляются с помощью простейших инструментов: циркуля и линейки. В геометрической теории оригами основной объект — это квадратный лист бумаги, складывая который, можно получить различные геометрические фигуры с заданными соотношениями сторон.

Заметим, что геометрическая теория оригами не «изоморфна» классической геометрии. Ряд задач на построение, которые представляются неразрешимыми в классической геометрии, например, задача о трисекции угла и задача об удвоении куба разрешаются в рамках построений геометрии оригами.

В настоящее время практически все задачи, относящиеся к классической геометрии, решаются с помощью аналитических методов. Эти же аналитические методы применимы и для решения задачи геометрии оригами.

Поскольку геометрическая теория оригами появилась в современном информационном пространстве сравнительно недавно, то множество задач, которые можно исследовать методами оригами, оказались в стороне от основных научных интересов. Можно сделать предположение о том, что решение и исследование этих оригинальных задач методами оригами позволяет сформулировать и найти некоторые теоремы и их обобщения, которые не рассматривались в классической геометрии [12].

Заметим, что простейшие элементы оригами используются в практике преподавания геометрии в младших классах школы [9, 10].

В данной работе приводится теорема об однозначном определении линии перегиба листа бумаги по заданным координатам точки, в которую осуществляется перемещение угла квадрата. Это соответствие носит взаимно однозначный характер, то есть по заданной линии перегиба можно найти точку, в которую осуществляется перегиб угла квадрата. Приводится решение задачи об удвоении куба.

## История возникновения оригами

Оригами (яп. 折り紙, букв.: «сложенная бумага») — вид декоративно-прикладного искусства складывания фигурок из бумаги. Предполагается, что первые оригами появились в синтоистских храмах в X–XI веках.

В Японии бумаге придавалось особое значение: слова «бумага» и «Бог» на японском языке созвучны (то и другое звучит как: Ками).

В силу жесткой ограниченности природных ресурсов островов японцы не могли осуществлять реальные жертвоприношения животных. Это привело к тому, что реальные жертвы стали заменяться некоторыми бумажными фигурами.

В монастырях из бумаги начали складывать необычные бумажные фигурки. Они символизировали богов, животных, людей, даже времена года и природные явления. Эти фигуры делались из целого листа бумаги. Порвать лист бумаги считалось страшным грехом, лист всегда использовался целиком.

Постепенно регламентированное число церковных фигурок всё больше возрастало, соответственно развивалась техника и теория оригами.

При сложении фигур из листов бумаги возникало множество проблем: как разделить сторону бумажного квадрата в нужных пропорциях, как осуществить сгиб бумаги под нужным углом и т.д.?

Решение этих задач находилось после долгого мысленного моделирования процессов сложения листов и производило впечатление озарения, посланного богами. При этом вырабатывались некоторые простейшие общие правила построения линий сгиба, то есть возникали и развивались дедуктивные математические методы.

Аналогичные процессы возникновения дедуктивных методов имели место на заре европейской цивилизации.

В VI веке до нашей эры в Древней Греции произошло уникальное явление, начало формироваться рациональное, нерелигиозное отношение к природе. Одна из сторон этого нового видения мира выразилась в создании дедуктивного подхода, обобщающего практические приемы измерений и вычислений, то есть к появлению науки математики.

По-видимому, в Древней Греции существовали религиозные обряды, которые включали в себя доказательства математических теорем. Заметим, что, сам термин «теорема» означает божественное зрелище, раскрывающееся перед глазами зрителей при исполнении обряда [4]. Всё геометрическое учение Пифагора строилось как часть некоторого универсального мистического учения, описывающего все стороны жизни общества и все явления природы. Исследованию проблем возникновения и начального развития математики посвящено множество работ [1–5].

Оригами проникло в Европу как некое экзотическое восточное развлекательное искусство. Для европейцев оно не несло в себе никакого сакрального смысла. Искусство оригами в Европе практически выродилось в конструирование сложных моделей с использованием множества листов бумаги, клея, ножниц и других инструментов и материалов.

Для описания процедуры построения фигурок из бумаги существует формализованный язык оригами [6]. Этот язык состоит из набора условных знаков, необходимых для того, чтобы записать схему складывания даже самого сложного изделия.

Условные знаки играют роль своеобразных «букв», а их последовательность образуют некоторый текст, следуя которому можно воспроизвести любую фигуру. Эти знаки содержат двенадцать видов стрелок, пять видов линий и четырнадцать знаков, указывающих на действия.

Другой способ передачи информации о построении бумажной фигуры связан с понятием паттерна. Если развернуть любую бумажную фигуру в исходный плоский лист, то на листе останутся линии перегиба.

Паттерн (в переводе с английского *«crease pattern»* — рисунок складок) — это один из видов диаграмм оригами, представляющий собой чертёж, на котором изображены все складки готовой модели. Паттерн бывает удобен для описания сложных моделей, когда обычная запись слишком громоздка. Паттерны широко используются при проектировании в современной технике.

### Аксиоматика классического оригами: правила Фудзиты

Аналогично набору аксиом классической геометрии, в оригами существует набор из семи правил, формально описывающие геометрические построения с помощью плоского оригами. Фактически они описывают все возможные способы получения одной новой складки на листе бумаги путём совмещения уже существующих различных элементов листа — точек и линий. Под линиями подразумеваются края листа или складки бумаги, под точками — пересечения линий. Важным моментом является то, что сгиб формируется единственной складкой, причём в результате складывания фигура остается плоской.

Правила Фудзиты [7]:

**Правило 1.** Пусть заданы две точки  $p_1$  и  $p_2$ , тогда лист можно сложить так, что данные две точки будут лежать на складке.

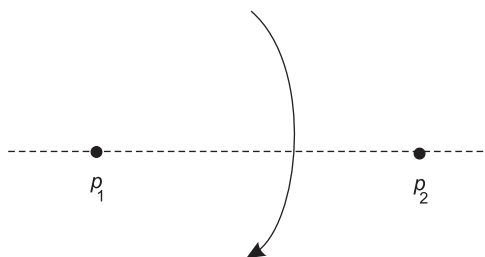


Рис. 1.

**Правило 2.** Пусть заданы две точки  $p_1$  и  $p_2$ , тогда лист можно сложить так, что одна точка перейдёт в другую.

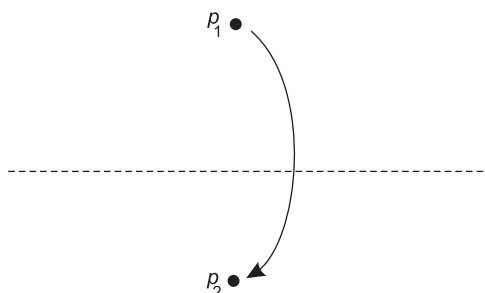


Рис. 2.

**Правило 3.** Пусть заданы две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , тогда лист можно сложить так, что одна прямая перейдёт в другую.

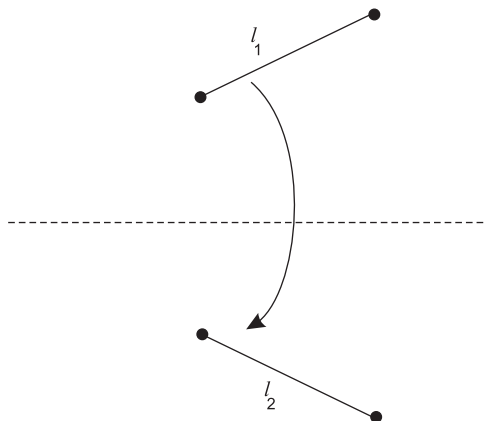


Рис. 3.

**Правило 4.** Пусть заданы прямая  $l_1$  и точка  $p_2$ , тогда лист можно сложить так, что точка попадёт на складку, а прямая перейдёт сама в себя (то есть линия складки будет ей перпендикулярна).

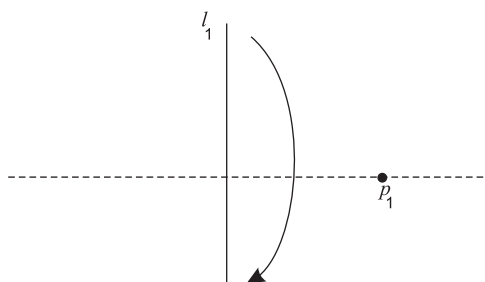


Рис. 4.

**Правило 5.** Пусть заданы прямая  $l_1$  и две точки  $p_1$  и  $p_2$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $p_2$  попадёт на складку, а  $p_1$  — на прямую  $l_1$ .

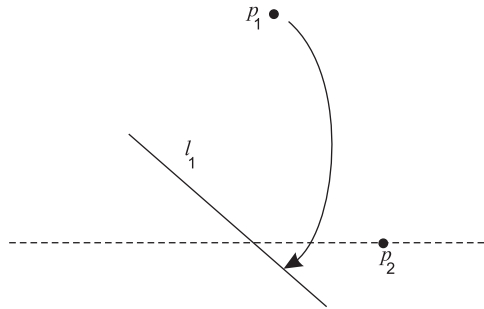


Рис. 5.

**Правило 6.** Пусть заданы две прямые  $l_1$  и  $l_2$  и две точки  $p_1$  и  $p_2$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $p_1$  попадёт на прямую  $l_1$ , а точка  $p_2$  попадёт на прямую  $l_2$ .

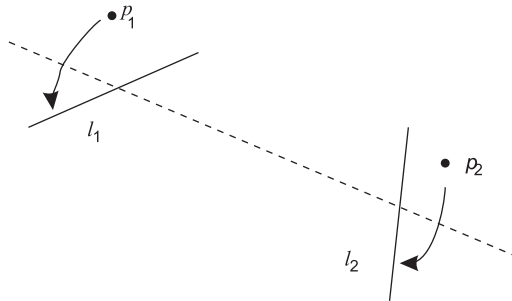


Рис. 6.

**Правило 7.** Пусть заданы две прямые  $l_1$  и  $l_2$  и точка  $p$ , тогда лист можно сложить так, что точка  $p$  попадёт на прямую  $l_1$ , а прямая  $l_2$  перейдёт сама в себя (то есть линия складки будет ей перпендикулярна).

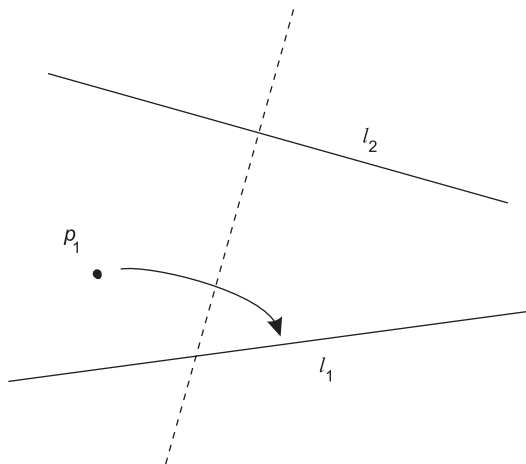


Рис. 7.

### Основная геометрическая теорема оригами

В настоящее время сформулирована и доказана основная геометрическая теорема оригами — теорема Хага. В этой теореме показано, как можно разделить сторону квадрата на три равные части. Теорем Хага получила дальнейшее развитие в работах Коджи и Мицуге Фушими, в которых была показана возможность деления стороны квадрата в любом рациональном отношении [7, 8].

Приведём доказательство расширенной теоремы Хага (рис. 8).

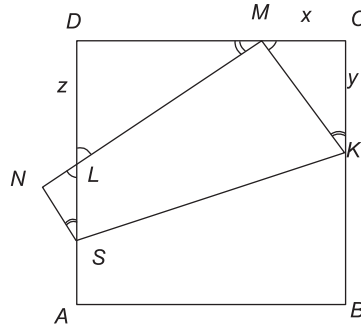


Рис. 8.

Пусть точка  $M$  делит сторону  $DC$  в рациональном отношении,  $MC = x$  — рациональное число. При складывании листа по линии складки  $KS$  угол  $B$  ложится на точку  $M$ , а угол  $A$  — на точку  $N$ . Пусть  $KC = y$ , тогда  $KB = KM = 1 - y$ . По теореме Пифагора для треугольника  $MCK$  следует, что  $y = \frac{1-x^2}{2}$ . Пусть  $DL = z$ , а  $ML = l$ . Из подобия треугольников  $MCK$  и  $LDM$  следует, что

$$z = \frac{2x}{1+x}, \quad l = \frac{1+x^2}{1+x}, \quad LN = 1 - ML = \frac{x(1-x)}{1+x}.$$

Из подобия треугольников  $MCK$  и  $LNS$  следует:

$$AS = NS = \frac{(1-x)^2}{2}.$$

Если сторону квадрата разделить в отношении  $x : (1-x)$ , то другая сторона квадрата будет разделена на части:

$$\frac{2x}{1+x}, \quad \frac{x(1-x)}{1+x}, \quad \frac{(1-x)^2}{2}, \quad \frac{1-x^2}{2}.$$

Например, если  $x = 1/2$ , то  $y = 3/8$ ,  $z = 2/3$ , то есть  $z = LD = 2/3$ , а соответственно,  $LA = 1/3$ . Последние соотношения соответствуют классической теореме Хага.

### Теорема о построении линии перегиба квадрата при сгибе угла в заданную точку

В приведенной выше теореме и в целом ряде подобных теорем [7] точка  $M$ , в которую осуществляется перегиб вершины квадрата, принадлежит стороне квадрата. Все эти теоремы могут быть обобщены на случай произвольного расположения точки  $M$  в плоскости квадрата.

**Теорема:** Дана точка квадрата  $M$  с координатами  $(x_0, y_0)$ . При перемещении угла квадрата в эту точку образуется линия перегиба, и эта линия единственная.

**Доказательство.** Существует два варианта расположения точки перегиба  $M(x_0, y_0)$  в квадрате, приводящие к качественно различным геометрическим фигурам. Приведем доказательство теоремы для каждого варианта.

*1 вариант:* Дан квадрат с единичной стороной. Пусть точка  $M(x_0, y_0)$  — точка, лежащая в квадрате  $ABCD$  (рис. 9). Перегиб угла  $D$  в эту точку приводит к образованию линии перегиба  $KL$



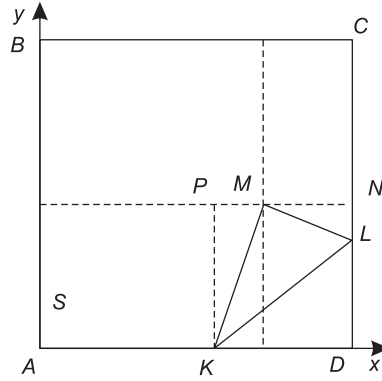


Рис. 9.

Из аксиомы Фудзиты известно, что линия перегиба определяется двумя точками. Покажем, что точки  $K$  и  $L$  определяются однозначно.

Представим координаты точки  $L$  в виде  $(1, y)$ . Выразим координату  $y$  через известные координаты точки  $M(x_0, y_0)$ . Пусть  $ML = LD = y$ , тогда  $NL = y_0 - y$ .  $\triangle MNL$  — прямоугольный. По теореме Пифагора  $ML^2 = NM^2 + NL^2$ .  $NM = 1 - x_0$ . Тогда  $y^2 = (1 - x_0)^2 + (y_0 - y)^2$ . Выразив из последнего выражения  $y$ , получаем:

$$y = \frac{(1 - x_0)^2 + y_0^2}{2y_0}.$$

Таким образом, координаты точки  $L$  определены.

Представим координаты точки  $K$  в виде  $(x, 0)$ . Выразим координату  $x$  через известные координаты точки  $M(x_0, y_0)$ . Пусть  $MK = KD = x$ , тогда  $MP = (x_0 - 1 + x)$ , а  $KP = y_0$ .  $\triangle KMP$  — прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора  $x^2 = y_0^2 + (x_0 - 1 + x)^2$ . Или  $x^2 = y_0^2 + (x_0 - 1)^2 + 2(x_0 - 1)x + x^2$ . Выразив из последнего выражения  $x$ , получаем:

$$x = \frac{y_0^2 + (x_0 - 1)^2}{2(1 - x_0)}.$$

Таким образом, координаты точки  $K$  определены.

Точки прямой  $KL$  определяются однозначно.

*2 вариант:* Дан квадрат с единичной стороной. Пусть точка  $M(x_0, y_0)$  находится в квадрате, как это показано на рисунке (рис. 10).

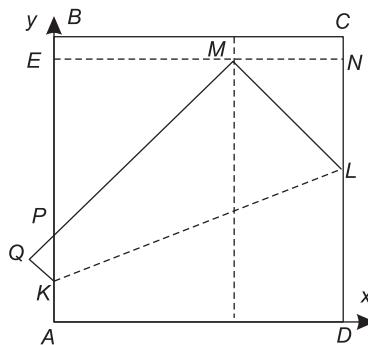


Рис. 10.

Из аксиомы Фудзиты известно, что линия перегиба определяется двумя точками. При перегибе угла квадрата в точку  $M(x_0, y_0)$  образуется линия  $KL$ . Покажем, что точки  $K$  и  $L$  определяются однозначно.

Представим координаты точки  $L$  в виде  $(1, y)$ . Выразим координату  $y$  через известные координаты точки  $M(x_0, y_0)$ .

Пусть  $LD = ML = y$ , тогда  $NL = y_0 - y$ ,  $CL = 1 - x_0$ .  $\triangle MNL$  — прямоугольный. По теореме Пифагора

$$y^2 = (y_0 - y)^2 + (1 - x_0)^2.$$

Упрощая выражение, окончательно получим:

$$y = \frac{y_0^2 + (1 - x_0)^2}{2y_0}.$$

Координаты точки  $L(1, y)$  определены.

Представим координаты точки  $K$  в виде  $(0, z)$ . Выразим координату  $z$  через известные координаты точки  $M(x_0, y_0)$ . Прямоугольные треугольники  $MNL$ ,  $EPM$ ,  $QPK$  подобны между собой. Запишем следующие пропорции  $\frac{PE}{EM} = \frac{MN}{NL}$ ,  $EM = x_0$ ,  $NL = y_0 - y$ ,  $MN = 1 - x_0$ . Отсюда следует:

$$PE = \frac{x_0(1 - x_0)}{(y_0 - y)}.$$

Подставляя  $y$ , получим:

$$PE = \frac{2x_0y_0(1 - x_0)}{y_0^2 - (1 - x_0)^2}.$$

Треугольник  $MEP$  — прямоугольный. По теореме Пифагора  $MP^2 = EM^2 + PE^2$ . Зная значения  $PE$  и  $EM$ , выраженные через  $x_0$  и  $y_0$ , получаем:

$$MP^2 = x_0^2 + \frac{2x_0^2y_0^2(1 - x_0)^2}{(y_0^2 - (1 - x_0)^2)^2}, \quad MP = \sqrt{\frac{x_0^2y_0^4 + (1 - x_0)^4}{(y_0^2 - (1 - x_0)^2)^2}}.$$

$\triangle QPK \sim \triangle MNL$ , следовательно, имеют место пропорции  $\frac{QK}{QP} = \frac{NL}{MN}$ , откуда  $QK = QP \frac{NL}{MN}$ . Выше показано, что  $NL = y_0 - y = \frac{y_0^2 - (1 - x_0)^2}{2y_0}$ , а  $MN = 1 - x_0$ ,  $QP = 1 - PM$ , т.е.

$$QP = 1 - \sqrt{\frac{x_0^2y_0^4 + (1 - x_0)^4}{(y_0^2 - (1 - x_0)^2)^2}}.$$

Отсюда получаем

$$QK = \left(1 - \sqrt{\frac{x_0^2y_0^4 + (1 - x_0)^4}{(y_0^2 - (1 - x_0)^2)^2}}\right) \cdot \frac{y_0^2 - (1 - x_0)^2}{2y_0(1 - x_0)}.$$

При перегибании листа  $QK = KA = z$ . Координаты точки  $K(0, z)$  определены.

Точки прямой  $KL$  определяются однозначно. Теорема доказана.

Таким образом доказано, что если на плоскости квадрата задана точка, то при перегибе к ней угла квадрата образуется линия сгиба, и эта линия единственна.

Обратное утверждение. Задав координаты точек линии сгиба, можно однозначно определить координаты точки, в которую осуществляется перегиб угла квадрата.

Из теоремы следует, что линия перегиба может задаваться косвенно, через задание соответствия координат двух точек, лежащих на заданных линиях. В качестве примера приведём задачу об удвоении куба.

### Задача об удвоении куба

В классической задаче об удвоении куба требуется построить куб, объем которого в два раза больше объема заданного начального куба [11]. Эта задача так и не была решена в рамках классической геометрии.

В геометрии оригами удаётся разделить сторону квадрата в отношении  $\frac{BK}{AK} = \sqrt[3]{2}$  (рис. 11).



Заметим также, что число  $\sqrt[3]{2}$  было получено как решение уравнения четвертого порядка. Следовательно, построив соответствующие уравнения более высокого порядка, можно получить и другие иррациональные числа.

### Заключение

Оригами — это уникальный раздел геометрии, имеющий свой свод правил, аксиом и теорем. Развитие теории оригами позволит систематизировать и обобщить множество задач, встречающихся в инженерной практике при создании и проектировании различных складывающихся плоских объектов.

Приведенные решения задач и исследования могут быть использованы на факультативных занятиях по геометрии в старших классах.

### Литература

- [1] Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. — М.: Наука, 1991. — 224 с.
- [2] Клайн М. Математика. Утрата определённости. — М.: Мир, 1984. — 434 с.
- [3] Панов В.Ф. Математика древняя и юная. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. — 648 с.
- [4] Щетников А.И. Возникновение теоретической математики и пифогорейская сотериология воспоминания // Математическое образование. - № 4(35). - 2005. - с. 17
- [5] Щетников А.И. Геометрия как форма свободного образования: истоки античной традиции. // Актуальные проблемы подготовки будущего учителя математики. Историко-математический и историко-методические аспекты. Вып.4. Изд-во Калужского пед.ун-та. - 2002. - с. 75–78.
- [6] Оригами. URL: <http://ru.wikipedia/wiki/Оригами>
- [7] Хага Кадузуо. Оригамика. Математические опыты со складыванием бумаги. — М.: МЦНМО, 2002. — 160 с.
- [8] Касахара К., Тасахама Т. Оригами для знатоков. — Изд. Alsio, 1987. — 168 с.
- [9] Белим С.Н. Задачи по геометрии, решаемые методами оригами. — М.: изд. «Аким», 1998. — 66 с.
- [10] Афонькин С.Ю., Капитонова И.В. Оригами и геометрия. — Чебоксары: ЧГУ, 1993. — 28 с.
- [11] Прасолов В.В. Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. — М.: Наука, 1992. — 80 с.
- [12] Грищенко Д.И. Оригами, или что можно получить с помощью складывания листа бумаги // Математическое просвещение. — 2013. - Вып. 17. - С. 68–87.

*Ляхов Александр Фёдорович,  
доцент кафедры теоретической,  
компьютерной, экспериментальной математики  
Института Информационных технологий,  
математики и механики  
Нижегородского государственного университета  
им. Н. И. Лобачевского (Национального  
исследовательского университета),  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: Lyakhov@mm.unn.ru*

## Об одном приближении схемы гибели и размножения (продолжение)

*В. В. Ивлев*

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой для прямых уравнений схемы гибели и размножения с большим числом состояний предложен непрерывный аналог — прямое уравнение Колмогорова. В данной работе рассматривается система обратных уравнений схемы гибели и размножения и ее сведение к обратному уравнению Колмогорова. Получен ряд выражений для средних характеристик времени поглощения и их начальных моментов.

**1. Обратное уравнение Колмогорова.** Рассмотрим обратные уравнения схемы гибели и размножения

$$\frac{d}{dt}P_{i,n}(t) = \lambda_i P_{i+1,n}(t) - [\lambda_i + \mu_i]P_{i,n}(t) + \mu_i P_{i-1,n}(t), \quad (1)$$

где  $P_{i,n}(t)$  — вероятность нахождения системы массового обслуживания (СМО) в момент времени  $t$  в состоянии с  $n$  занятыми каналами при условии, что в начальный момент времени  $t = 0$  СМО находилась в состоянии с  $i$  занятыми каналами ( $i < n$ );  $\lambda_i, \mu_i$  — интенсивность переходов СМО из состояния с  $i$  занятыми каналами в состояния с  $i + 1$  и  $i - 1$  занятыми каналами соответственно.

Как и в [1], при  $N \gg 1$  (общее число каналов) перейдем к относительным переменным

$$x = iN^{-1}, \quad y = nN^{-1}, \quad \Delta x = N^{-1}.$$

Тогда (1) в разностной форме принимает вид

$$\frac{d}{dt}P(x, y, t) = \lambda(x)P(x + \Delta x, y, t) - [\lambda(x) + \mu(x)]P(x, y, t) + \mu(x)P(x - \Delta x, y, t). \quad (2)$$

Подчеркнем, что в обратных схемах рассуждения ведутся “в прошлом”, т.е. в интервале времени  $[0; \Delta t]$ . При этом начальное состояние  $x$  может меняться за время  $\Delta t$  на  $\pm \Delta x$  с интенсивностями соответственно  $\lambda(x)$  и  $\mu(x)$  или не меняться с интенсивностью  $1 - \lambda(x) - \mu(x)$ . Таким образом, в (2)  $x$  — переменная величина, а  $y$  — постоянно.

Прямой переход в (2) при  $N \rightarrow \infty$  не имеет смысла, так как, хотя и  $N \gg 1$ , тем не менее, конечно.

Поступим, как и в [1]. Введем другой марковский процесс с дискретом в  $k$  раз меньшим

$$\overline{\Delta x} = \Delta x k^{-1} = [Nk]^{-1}.$$

Уравнение (2) сохраняет вид и для нового процесса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{P}(x, y, t) = \overline{\lambda}(x)\overline{P}(x + \overline{\Delta x}, y, t) - [\overline{\lambda}(x) + \overline{\mu}(x)]\overline{P}(x, y, t) + \overline{\mu}(x)\overline{P}(x - \overline{\Delta x}, y, t) \quad (3)$$

Теперь, для приближения введенного процесса к исходному, введем следующие условия эквивалентности: интенсивности переходов  $\bar{\lambda}(x)$  и  $\bar{\mu}(x)$  должны быть такими, чтобы перемещения этих процессов в единицу времени и их дисперсии были равными. Тогда (см. [1])

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}[k^2(\mu + \lambda) - k(\mu - \lambda)], \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2}[k^2(\mu + \lambda) + k(\mu - \lambda)].$$

Кстати,  $\bar{\lambda} + \bar{\mu} = k^2(\mu + \lambda)$ ;  $\bar{\lambda} - \bar{\mu} = k^2(\mu - \lambda)$ .

В правой части (3) разложим функции  $\bar{P}(x \pm \Delta x, y, t)$  в ряд Тейлора относительно  $\Delta x = [Nk]^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{P}(x, y, t) &= a(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}(x, y, t) + b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{P}(x, y, t) + \\ &+ a(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{P}(x, y, t) \cdot \frac{1}{3!kN} + b(x) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \bar{P}(x, y, t) \cdot \frac{1}{4!k^2N^2} + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a(x) = \frac{\mu(x) - \lambda(x)}{N}$ ;  $b(x) = \frac{\mu(x) + \lambda(x)}{2N^2}$ . Наконец, переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  (теперь это возможно), получим обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{P}(x, y, t) = a(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}(x, y, t) + b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{P}(x, y, t). \quad (5)$$

В дальнейшем для упрощения обозначений будем писать  $P$  вместо  $\bar{P}$ .

**2. Среднее время поглощения.** Пусть многоканальная СМО начинает функционировать с долей  $x$  занятых каналов. При занятости всех каналов  $y = 1$  СМО попадает в точку поглощения и процесс останавливается. Интерес представляет среднее время перехода СМО из состояния  $x$  в состояние  $y = 1$ .

Точка поглощения  $y_1$  может быть и меньше  $y = 1$ . С точки зрения надежности, среднее время поглощения понимается как среднее время безотказной работы устройства, состоящего из  $N$  элементов и начинающего работу с  $x$  отказавшими элементами. При этом за отказ устройства (точку поглощения) принимается выход из строя всех  $N$  элементов или доли их  $y_1$ .

Используем известную формулу для среднего времени безотказной работы

$$T(x, y_1) = \int_0^\infty \int_0^{y_1} P(x, y, t) dy dx \quad (6)$$

где  $\int_0^{y_1} P(x, y, t) dy$  — вероятность безотказной работы устройства. Подставим в (5) формулу (6), т.е. проинтегрируем слагаемые в (5) по  $y$ , а затем по  $t$ :

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^{y_1} P(x, y, t) dy \right] dt = a(x) \frac{\partial T(x, y_1)}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 T(x, y_1)}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^{y_1} P(x, y, t) dy \right] dt = \int_0^{y_1} P(x, y, t) dy \Big|_0^\infty = -1,$$

уравнение для  $T(x, y_1)$  принимает вид

$$a(x) \frac{\partial T(x, y_1)}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 T(x, y_1)}{\partial x^2} + 1 = 0, \quad (8)$$

Рассмотрим граничные условия для (8). Очевидно, что в точке поглощения  $y_1$  имеем (см. [2]):

$$T(x, y_1) |_{x=y_1} = 0.$$

Далее, точка  $x = 0$  представляет собой отражающий экран и в этом случае (см. [2])

$$\frac{d}{dx}T(x, y_1) |_{x=0} = 0.$$

Решая (8) при заданных граничных условиях, получим:

$$T(x, y_1) = \int_x^{y_1} e^{\int_0^x \beta(x) dx} \left\{ \int_0^x b(x)^{-1} e^{-\int_0^x \beta(x) dx} dx \right\} dx, \quad (9)$$

$$\beta(x) = 2N \frac{\mu(x) - \lambda(x)}{\mu(x) + \lambda(x)}, \quad b(x) = \frac{\mu(x) + \lambda(x)}{2N^2}.$$

Удается явно найти решение  $T(x, y_1)$  при  $\mu(x) = \mu = const$ ,  $\lambda(x) = \lambda = const$ . Это решение имеет вид

$$T(x, y_1) = \frac{1}{b\beta} \left[ x - y_1 + \frac{e^{\beta y_1} - e^{\beta x}}{\beta} \right]. \quad (10)$$

**3. Моменты распределения времени поглощения.** Характеристика  $T(x, y_1)$ , рассмотренная выше, является первым начальным моментом распределения времени поглощения. Поставим более общую задачу определения начальных моментов с использованием (5).

Пусть  $m_s = \int_0^\infty t^s P(x, y, t) ds$  — начальный момент  $s$ -ого порядка распределения  $P(x, y, t)$ .

Воспользуемся интегральным преобразованием Меллина

$$M\{f(t)\} = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt = f^*(s). \quad (11)$$

Любопытным здесь является следующее обстоятельство. При целом  $s \geq 1$  и функциях  $f(t)$ , имеющих смысл распределения, само преобразование (11) является моментом порядка  $s - 1$ :

$$f^*(s) = m_{s-1}$$

и можно непосредственно использовать решение для изображений, не переходя к оригиналам.

Применим преобразование (11) к обратному уравнению (5). Получим:

$$b(x) \frac{d^2 m_s(x, y_1)}{dx^2} + a(x) \frac{dm_s(x, y_1)}{dx} + s m_{s-1}(x, y_1) = 0 \quad (12)$$

Поясним вывод свободного члена  $s m_{s-1}(x, y_1)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 \frac{\partial P(x, y_1, t)}{\partial t} dt &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (t^2 P(x, y_1, t)) - s t^{s-1} P(x, y_1, t) \right\} dt = \\ &= t^2 P(x, y_1, t) |_0^\infty - s \int_0^\infty t^{s-1} P(x, y_1, t) dt = -s m_{s-1}(x, y_1). \end{aligned}$$

Уравнение (12) — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, причем имеет место рекуррентная зависимость  $m_s$  от  $m_{s-1}$ . Перейдем к решению (12). Граничные условия имеют вид:

$m_s(x, y_1)|_{x=y_1} = 0$  — при нахождении СМО в точке поглощения  $y_1$  время достижения этой точки равно нулю;

$\frac{d}{dx}m_s(x, y_1)|_{x=0} = 0$  — есть отражающий экран.

Решая (12) с учетом граничных условий, получим:

$$m_s(x, y_1) = \int_x^{y_1} e^{\int_0^x \beta(x) dx} \left\{ \int_0^x s m_{s-1}(x, y_1) b(x)^{-1} e^{-\int_0^x \beta(x) dx} dx \right\} dx. \quad (13)$$

В частности, при  $s = 1$ , полагая  $m_0(x, y_1) = 1$ , получим (9) для  $T(x, y_1)$ .

Читатель, при желании, может при постоянных  $\mu = const$ ,  $\lambda = const$  получить явные выражения для  $m_2(x, y_1)$ ,  $m_3(x, y_1)$  ..., а также первые центральные моменты — дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

### Литература

1. Ивлев В.В. Об одном приближении схемы гибели и размножения // Математическое образование. - № 1(69). - 2014.
2. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.

*Ивлев Валерий Васильевич,  
профессор кафедры математического анализа  
Московского Государственного  
педагогического университета,  
доктор технических наук.*

*E-mail: vvivlev@yandex.ru*



## Обход конечным автоматом с четырьмя камнями $k$ -мерного пространства за полиномиальное время

Д. В. Гусев

В работе описана система “лабиринт-робот”, действующая на основе некоторого конечного автомата. Предложен алгоритм обхода пространства  $\mathbb{Z}^k$  для любого  $k$  роботом с четырьмя камнями, причем время посещения точки полиномиально по координатам этой точки. Обсуждаются оценки оптимального числа камней.

### 1. Введение

Данная работа посвящена исследованию задач о поведении роботов в лабиринтах. Спектр подобных задач довольно обширен и затрагивает ключевые аспекты теоретической Computer Science. Конечно, решение таких задач не означает автоматического решения серьезных проблем теории сложности. Тем не менее, рассмотрение данных вопросов может положительно сказаться на понимании сути теоретической Computer Science. Есть надежда, что поведение роботов в лабиринтах является хорошей моделью для нетривиальных теоретико-информационных задач, и отработка методов и подходов к исследованию поведения роботов даст более серьезные результаты в будущем. Также стоит отметить, что подобные задачи и, в частности, задача из этой статьи, могут быть интересны для школьников, интересующихся теоретической Computer Science, и их учителей.

Основным действующим лицом исследуемой области является робот (некоторый конечный автомат),двигающийся в среде. Средой может являться некоторый граф, часто это граф Келли некоторой группы, и основной задачей робота является посещение всех вершин этого графа. Довольно полный обзор подобных задач можно найти в книге [2]. Часто в среде помещаются некоторые движимые объекты, которые мы будем называть *камнями*. Робот может взаимодействовать с камнями, ощущая их и двигая. Подобное взаимодействие существенно разнообразит действие робота. Стандартная формулировка задачи в данном случае — это определить, какое минимальное количество камней необходимо роботу для обхода среды. Некоторые примеры подобных задач рассмотрены в [3]. Также довольно интересными может оказаться рассмотрение поведения робота в случайной среде. Проблемы такого рода предполагается исследовать в последующих работах. Добавление возможности роботу пользоваться датчиком случайных битов может служить хорошей иллюстрацией значимости случайности в алгоритмических задачах.

В данной работе будут рассмотрены вопросы построения полиномиальных по времени алгоритмов обхода роботом пространства  $\mathbb{Z}^k$ . Задача обхода роботом пространства  $\mathbb{Z}^k$  полностью решена, то есть известны алгоритмы с минимальным количеством камней для всех  $k$  и известно, что они оптимальны. Для  $k = 1$  необходимо 2 камня, для  $k > 2$  — 3. Тем не менее, при  $k > 3$  оптимальные алгоритмы используют эмуляцию машины Минского [4], что приводит к их очень медленной работе. Соответственно, встает вопрос построения быстрых алгоритмов обхода  $\mathbb{Z}^k$ . Быстрота может быть выражена следующим образом: робот сделает полиномиальное от максимума модулей координат количество ходов, чтобы посетить точку с такими координатами. Для маленьких  $k$  задача имеет известные решения: в частности для  $k = 1$  необходимо 2 камня, для  $k = 2$  — 3. Буньковой показано, что достаточно 3-х камней. Алгоритм, представленный в этой работе, делает это с использованием 4-х камней.

## 2. Постановка задачи

Начнём с более формального описания модели, в которой мы будем работать, и задачи, которую мы хотим решить.

**2.1. Базовые определения.** В рамках данной работы, средой, в которой движется робот, будем считать некоторую группу. Тогда нашу модель можно описать с помощью следующих определений.

**Определение 1.** Системой *лабиринт-робот* называется  $L = (G, R, n, D)$ , где  $G$  — некоторый граф,  $R$  — *конечный автомат* (мы его определим ниже),  $n$  — неотрицательное целое число,  $D$  — подмножество  $G^1$ .

**Комментарий.** В литературе (см., например, [1]) под конечным автоматом понимают следующий объект:  $(G, A, s \in G)$ , где  $G$  — некоторый ориентированный граф, стрелки которого помечены буквами некоторого алфавита  $A = \{a\}$ ,  $s$  — вершина графа  $G$ , называемая текущим состоянием автомата. В ряде случаев  $G$  — это граф Келли некоторой группы.

Определение 1 даёт формализацию интуитивного понятия компьютера с конечной памятью, пусть даже и большой. Вершина графа  $G$  символизирует внутреннее состояние компьютера, т.е. способ заполнения всех ячеек (например, терабайтный винчестер может находиться в  $2^{10^{12}}$  состояниях), а буква символизирует переход от одного состояния к другому под действием внешнего сигнала.

**Определение 2.** Конечный автомат  $R = (Q, q_0, \delta)$  называется *автоматом робота*. Здесь  $Q$  — множество состояний автомата,  $q_0 \in Q$  — *начальное состояние* автомата,  $\delta \subset Q \times \{0, 1\}^n \rightarrow Q$  — *функция переходов* в автомате.

**Замечание 1.** Переходы в автомате  $R = (Q, q_0, \delta)$  осуществляются по битовым векторам длины  $n$ , т.е. сообщениям, которые автомат воспринимает.

**Определение 3.** *Состоянием* системы лабиринт-робот называется набор  $(a, s_1, s_2, \dots, s_n, q)$ , где  $a \in G$ ,  $s_i \in G$ ,  $q \in Q$ . Будем называть  $a$  — *расположением робота*,  $s_i$  — *расположениями камней*. Начальным состоянием системы лабиринт-робот будет  $(e, e, e, \dots, e, q_0)$ , где  $e$  — нейтральный элемент  $G$ .

**Определение 4.**  $\{d_1, d_2, \dots, d_m\} = D$ ,  $d_i \in G$  называют *переходными элементами* системы лабиринт-робот.

**Определение 5.** *Ходом* в состоянии  $q \in Q$  называется  $(d, p)$ , где  $d \in D$ ,  $p \in \{0, 1\}^n$ , причём если в это состояние есть переход по вектору  $p'$ , в котором  $i$ -й бит 0, то в  $p$   $i$ -й бит должен быть 0.

**Определение 6.** *Результатом хода* робота в состоянии системы  $(a, s_1, s_2, \dots, s_n, q)$  будет состояние  $(a', s'_1, s'_2, \dots, s'_n, q')$  со следующими свойствами. Пусть  $(d, p)$  соответствующий состоянию  $q$ ;  $a' = ad$ ,  $s'_i = s_i d$ , если  $i$ -ый бит  $p$  равен 1, иначе  $s'_i = s_i$ ;  $w \in \{0, 1\}^n$ , причём  $i$ -ый бит  $w$  равен 1, если  $a' = s'_i$ , иначе 0; из состояния  $q$  в автомате  $R$  по вектору  $w$  есть переход в состояние  $q'$ .

В целом, система лабиринт-робот  $L$  работает так. Начинаем с начального состояния и поочередно изменяем состояния согласно ходам робота. То есть, можно сказать, что данная система генерирует последовательность состояний  $\{l_k\}_{k=1}^\infty$ , согласно вышеописанным правилам.

**Лемма 1.** Пусть система находится в состоянии  $l_k = (a, s_1, s_2, \dots, s_n, q)$ , и  $q$  соответствует  $(d, p)$ . Тогда, если  $i$ -ый бит  $p$  равен 1, то  $a = s_i$ .

**Доказательство.** В начальном состоянии это выполняется, так как для любого  $i$   $a = s_i$ . Докажем это для произвольного состояния  $(a, s_1, s_2, \dots, s_n, q)$ . Пусть  $q$  соответствует  $(d, p)$ , тогда если  $i$ -ый бит  $p$  равен 1, то, согласно определению, все векторы, по которым есть переходы

<sup>1</sup>По смыслу — это множество, где находятся камни и автомат, см. ниже.

в  $q$ , имеют  $i$ -ый бит, равный 1. Следовательно, по определению результата хода робота для состояния  $l_{k-1}$ ,  $a = s_i$ .  $\square$

Более наглядно всю эту конструкцию можно представить так. Имеется робот, которому соответствует конечный автомат  $R$ ,  $n$  камней и сам лабиринт (группа  $G$ ). В каждый момент времени робот и камни находятся в каком-то элементе группы  $G$ ,  $a$  и  $s_i$  соответственно. Также в каждый момент времени определено состояние автомата  $q$ . Каждому состоянию  $q$  соответствует ход робота  $(d, p)$ , где  $d$  — какой-то элемент группы,  $p$  — номера камней, которые необходимо подвинуть. В каждый момент времени робот делает ход, т.е. ходит сам и двигает некоторый набор камней (возможно пустой) в направлении элемента  $d$ . При этом, согласно лемме, могут двигаться только те камни, с которыми робот имеет одну позицию. После сделанного хода робот понимает, какие камни находятся с ним в одной позиции, и в соответствии с этим знанием изменяет состояние своего автомата.

Отметим, что с подобным определением не совсем удобно работать, поскольку построение конечного автомата  $R$  может быть технически сложной задачей. Поэтому мы будем представлять робота скорее как некоторую программу, пользующуюся конечной памятью. Аналогами переходов в автомате будут специальные инструкции «сделать ход в таком-то направлении, взяв с собой такие-то камни». Эти инструкции будут возвращать наборы камней, с которыми робот находится в одной позиции. Более-менее понятно, почему эти два определения будут эквивалентны. С одной стороны, конечный автомат может эмулировать такую программу, взяв за состояния текущее местоположение в программе и состояние её памяти (их конечное количество). С другой стороны, довольно легко можно написать программу, которая реализует конечный автомат. Тем не менее, в ходе наших рассуждений подобные программы, реализующие необходимую нам логику, мы не будем описывать явно, просто будем говорить, что они существуют.

**2.2. Постановка задачи в общем случае.** Задачи, которые предлагается решать в связи с системой робот-лабиринт, могут быть описаны в следующем ключе. Пусть зафиксирована группа  $G$ , направления ходов  $D$ ,  $n$  — количество камней. Возникает следующий вопрос: *существует ли такой робот (автомат  $R$ ), который сможет обойти все элементы  $G$ , т.е. для любого  $a \in G$  будет существовать  $k$ , такое, что  $l_k = (a, \dots)$ .*

Ещё более интересным вопросом может быть следующий: *каково минимальное количество камней  $n$  при фиксированной группе  $G$ , направлениях возможных ходов  $D$ , при которых существует робот, обходящий  $G$ .*

Выбор группы  $G$  и множества  $D$  может быть различным. Обычно множество  $D$  состоит из порождающих элементов группы и их обратных. Например, для свободной группы  $F_2$  порожденной  $a, b$ , множество  $D$  логично взять  $a, b, a^{-1}, b^{-1}$ . Случай, который будем изучать мы, — это случай  $\mathbb{Z}^k$ . В этом случае множество  $D$  будет состоять из базисных элементов и их отрицаний.

Также может стать интересным вопрос количества ходов, которое потребуется для обхода. В случае бесконечных групп его можно выразить в следующих терминах: какое количество ходов потребуется для того, чтобы обойти какое-либо подмножество  $G$  (интересует прежде всего зависимость количества ходов от расположения, размера и других характеристик подмножества).

**2.3. Постановка задачи в случае  $\mathbb{Z}^k$ .** В случае  $\mathbb{Z}^k$  минимальное количество камней, необходимых для обхода, зависит от  $k$ . В случае  $k = 1$  необходимо 2 камня, в остальных случаях известно, что можно обойтись 3-мя камнями. При этом эти оценки точны, то есть известно, что с меньшим количеством камней это сделать нельзя. Однако в известных решениях этой задачи, в случае  $k > 3$  для обхода  $\mathbb{Z}^k$  робот эмулирует машину Минского. Несмотря на то, что вычислительные мощности машины Минского и машины Тьюринга одинаковы, реализация даже самых простых алгоритмов требует экспоненциального от размера входа времени. Поэтому робот, использующий машину Минского для обхода  $\mathbb{Z}^k$ , потратит как минимум экспоненциальное время для её посещения. Тем не менее, хочется предъявить какие-либо полиномиальные обходы при всех  $k$ . Формально это можно описать так. Введём на  $\mathbb{Z}^k$  систему координат, тогда определение полиномиальности будет следующим.

**Определение 7.** Пусть робот начинает двигаться из начала координат и  $T(d)$  — это номер хода, когда впервые роботом посещена клетка  $d$ . Тогда обход считается *полиномиальным*, если существуют константы  $C, r$  такие, что для любой  $d$  имеем  $T(d) < Cp(d)^r$ , где  $p(d)$  — максимум модулей координат  $d$ .

Для  $k = 1, 2$  стандартные обходы (с 2-мя и 3-мя камнями) и так являются полиномиальными. Для  $k = 3$  также известен полиномиальный обход, использующий 3 камня. Для больших размерностей можно обобщить обход для  $k = 3$ , и получить полиномиальные обходы, использующие  $k$  камней. Собственно, с улучшением последних оценок и связана данная работа. В её рамках будет предъявлен полиномиальный обход, использующий 4 камня, и работающий для любой размерности  $k > 1$ .

Общая схема доказательства существования такого обхода следующая. Для начала показываем, каким образом можно получить двоичное представление числа из внешней памяти (внешней памятью можно назвать некоторую специальную конфигурацию камней в пространстве). Потом предъявляем обход  $\mathbb{Z}^k$  (в данном случае обход это некоторый путь на  $\mathbb{Z}^k$ , обходящий всё пространство), при этом описывается способ получения направления хода по его номеру в пути. Далее описываем сам обход: робот будет обходить  $\mathbb{Z}^k$  по построенному нами пути, храня во внешней памяти номер текущего хода. Умение узнать двоичное представление номера хода позволит нам узнавать необходимое направление движения.

### 3. Простые алгоритмы обхода при различных $k$

Перед тем как представить основной результат работы, рассмотрим простые алгоритмы обхода  $\mathbb{Z}^k$  при различных  $k$ , про которые говорилось выше. В частности, будут описаны алгоритмы для  $k = 1, 2$ , семейство полиномиальных алгоритмов для больших размерностей и алгоритм, эмулирующий машину Минского и использующий 3 камня.

**3.1. Случай  $k = 1$ .** Случай  $k = 1$ , естественно, самый простой. Для обхода  $\mathbb{Z}$  роботу достаточно использовать всего 2 камня ( $A$  и  $B$ ). При описании будем считать, что на  $\mathbb{Z}$  есть система координат, и робот и камни располагаются в точках (клетках) с соответствующими им координатами. Схема алгоритма обхода в виде действий робота представлена ниже.

**Начальная конфигурация:** камни  $A$  и  $B$  и робот в точке 0.

- 1: **цикл** // повторять бесконечно
- 2: передвинуть камень  $A$  в положительную сторону
- 3: идти в отрицательную сторону до встречи с камнем  $B$
- 4: передвинуть камень  $B$  в отрицательную сторону
- 5: идти в положительную сторону до встречи с камнем  $A$

Очевидно, что в результате исполнения подобного алгоритма любая клетка  $\mathbb{Z}$  будет посещена каждая клетка, причем легко посчитать, что для  $n > 0$  потребуется  $2n^2 - n$  ходов, чтобы посетить клетку с координатой  $n$ , а для  $n < 0$  —  $2n^2 + n$  ходов.

**3.2. Случай  $k = 2$ .** Алгоритм обхода пространства  $\mathbb{Z}^2$  будет использовать 3 камня. Один из вариантов построения этого алгоритма — это использование обхода всех клеток прямоугольного равнобедренного треугольника с стороной  $n$  с использованием 3-х камней ( $A$ ,  $B$  и  $C$ ). Схема этого обхода следующая:

**Начальная конфигурация:**  $A$ ,  $B$  и робот в точке  $(0, 0)$ ,  $C$  в точке  $(n, 0)$

**Конечная конфигурация:**  $A$ ,  $B$  в точке  $(n, 0)$ ,  $C$  в точке  $(n, n)$ , все клетки треугольника  $(0, 0)$ ,  $(n, 0)$ ,  $(n, n)$  посещены

- 1: **цикл**
- 2: перенести  $A$  в направлении  $(1, 0)$
- 3: перейти в направлении  $(-1, 0)$
- 4: идти до камня  $B$  в направлении  $(0, 1)$
- 5: перенести  $B$  в направлении  $(1, 1)$
- 6: идти до камня  $A$  в направлении  $(0, -1)$

- 7: **если**  $A$  и  $C$  в одной клетке **то**
- 8:     **выход из цикла**
- 9: поменять местами  $B$  и  $C$

Легко убедиться, что подобный алгоритм действительно исполняет требуемое, при этом он выполняется за  $\mathcal{O}(n^2)$  ходов (каждая клетка треугольника посещается не больше константы раз, в основном, 2 раза).

Теперь можно легко предъявить алгоритм обхода квадрата со стороной  $n$ .

**Начальная конфигурация:**  $A, B$  и робот в точке  $(0, 0)$ ,  $C$  в точке  $(n, 0)$

**Конечная конфигурация:**  $A, B$  и робот в точке  $(0, 0)$ ,  $C$  в точке  $(n, 0)$ , все клетки квадрата  $(0, 0), (n, 0), (n, n), (0, n)$  посещены

- 1: обойти треугольник  $(0, 0), (n, 0), (n, n)$
- 2: обойти треугольник  $(n, 0), (n, n), (0, n)$
- 3: обойти треугольник  $(n, n), (0, n), (0, 0)$
- 4: обойти треугольник  $(0, n), (0, 0), (n, 0)$

Аналогично, асимптотика этого алгоритма  $\mathcal{O}(n^2)$ . В итоге обход всей  $\mathbb{Z}^2$  можно совершить следующим образом:

**Начальная конфигурация:**  $A, B, C$  и робот в точке  $(0, 0)$

- 1: передвинуть  $C$  в направлении  $(1, 0)$
- 2: **цикл**   //  $i$ -ая итерация,  $A, B$  в точке  $(-i + 1, -i + 1)$ ,  $C$  в точке  $(i, -i + 1)$
- 3:   обойти квадрат  $(-i + 1, -i + 1), (i, -i + 1), (i, i), (-i + 1, i)$
- 4:   передвинуть  $A$  и  $B$  в точку  $(-i, -i)$
- 5:   дойти до точки  $C$  и передвинуть в  $(i + 1, -i)$
- 6:   вернуться в  $(i, -i + 1)$

Главная идея алгоритма — обходить квадраты, которые расширяются на каждой итерации на одну клетку в каждую сторону. Так как на каждую итерацию тратится квадратичное от её номера количество ходов, для обхода всех клеток с координатами, по модулю меньшими  $n$ , потребуется  $\mathcal{O}(n^3)$  ходов.

**3.3. Случай  $k > 2$ .** Для начала предъявим алгоритм обхода  $\mathbb{Z}^3$  с использованием 3-х камней. Общая схема обхода такова: будем поочерёдно обходить границы вложенных друг в друга кубов  $K_n$  с диагоналями  $(-n + 1, -n + 1, -n + 1), (n, n, n)$ , начиная с  $n = 1$ . Границы таких кубов представляют собой 6 квадратов, поэтому их можно обойти с помощью обходов квадратов, представленных выше. Точное доказательство того, что это можно проделать с помощью 3 камней, здесь переводить не будем. Однако заметим, что границу каждого  $K_n$  в данной схеме можно обойти за квадратичное по  $n$  время, поэтому обход целых  $K_n$  будет занимать  $\mathcal{O}(n^3)$  времени.

Для произвольного  $k$  алгоритм будет основан на той же идее, и будет использовать  $k$  камней. Будем обходить границы  $k$ -мерных кубов  $K_n$  с диагоналями  $(-n + 1, \dots, -n + 1), (n, \dots, n)$ . Границы этих кубов составлены из  $k - 1$ -мерных кубов в количестве  $2k$ , поэтому нам необходим алгоритм обхода  $k - 1$ -мерного куба со стороной  $n$ . Этот алгоритм будет состоять в следующем: пусть  $k - 1$  находится в одной точке, и ещё один камень на расстоянии  $n$  от них, например  $(0, \dots, 0)$  и  $(n, \dots, 0)$  (векторы длиной  $k - 1$ ). Будем обходить пространство  $\mathbb{Z}^{k-1}$  с помощью  $k - 1$  камня, только в положительных координатах (для этого кубы  $K_n$  нужно расширять не по всем  $2k - 2$  направлениям, а по  $k - 1$ ) до тех пор, пока не наткнёмся на удалённый камень. Доказательство того факта, что с помощью  $k$  камней можно обойти  $\mathbb{Z}^k$ , здесь приводить не будем, однако отметим, что асимптотика подобного обхода будет  $\mathcal{O}(n^k)$ .

**3.4. Обход с помощью машины Минского.** Как говорилось раньше, любое  $\mathbb{Z}^k$  можно обойти, используя всего 3 камня. Для это роботу необходимо смоделировать машину Минского. Машина Минского представляет собой конечный автомат и два счётчика, которые можно инкрементировать и декрементировать. Подобная система имеет ту же вычислительную мощность, что и машина Тьюринга. Робот может довольно легко смоделировать машину, для этого

ему достаточно хранить камни  $B$  и  $C$  на расстоянии значений счётчиков от камня  $A$ . Для обхода такой конструкцией  $\mathbb{Z}^k$  можно использовать путь, обходящий  $\mathbb{Z}^k$  (например, такой, как мы опишем ниже), то есть некоторую бесконечную последовательность направлений, причем  $i$ -ое направление алгоритмически вычислимо по  $i$ . Тогда робот будет хранить в машине номер текущего направления, вычислять его, сдвигать по этому направлению всю машину и увеличивать номер на единицу. Если считать что «центр» машины — это камень  $A$ , тогда в ходе такого алгоритма  $A$  обойдёт все пространство. Отметим, что примерно такой же схемой мы воспользуемся в нашем алгоритме, только для считывания номера будет использоваться 4 камня. Это позволит нам избавиться от экспоненциальной асимптотики.

#### 4. Получение двоичного представления числа

Первым результатом, приближающем нас к построению полиномиального обхода, будет алгоритм получения двоичного представления числа. Предположим, что робот имеет во внешней памяти некоторую информацию, к примеру, число  $n$ . Самый простой способ хранения  $n$  — это расположить два камня на таком расстоянии. Очевидно, что для обработки такой информации требуется нетривиальная логика, так как внутренняя память робота ограничена константой. Способ обработки этой информации может существенно зависеть от задачи, которую необходимо выполнить роботу. В рамках нашей задачи необходимо получить двоичное представление числа  $n$ , начиная с младшего бита до самого старшего единичного. Более конкретно это означает, что робот получает биты в потоковом режиме, т.е. повторяет два действия: узнать следующий бит числа, если таковой имеется, проделать какую-либо внутреннюю логику (обработать этот бит). Покажем, что существует быстрый (полиномиальный от  $n$ ) алгоритм получения числа  $n$  таким способом, использующий 2 дополнительных камня.

Пусть имеются камни  $A$  и  $B$ , задающие  $n$ ; будем считать, что они неподвижны. Также есть два вспомогательных камня  $C$  и  $D$ . В рамках данного алгоритма все камни будут находиться на одной прямой, для удобства введём на ней систему координат.

Для начала предъявим алгоритм деления отрезка длины  $k$  пополам и получение остатка при этом делении. Схема алгоритма приведена ниже.

**Начальная конфигурация:** камни  $C$  и  $D$  в точках с координатами 0 и  $k$ , робот в точке 0

**Конечная конфигурация:**  $C$ ,  $D$  и робот в точке  $\lfloor k/2 \rfloor$ , в память записан остаток при делении на 2

- 1: **цикл**
- 2: идти в положительную сторону до камня  $D$
- 3: передвинуть камень  $D$  на одну клетку в отрицательную сторону
- 4: **если** камни  $C$  и  $D$  на одной клетке **то**
- 5:     записать в память, что остаток равен 1
- 6:     **выход из цикла**
- 7: идти в отрицательную сторону до камня  $C$
- 8: передвинуть камень  $C$  на одну клетку в положительную сторону
- 9: **если** камни  $C$  и  $D$  на одной клетке **то**
- 10:     записать в память, что остаток равен 0
- 11:     **выход из цикла**

Легко видеть, что после  $d$  итераций цикла координаты камней  $C$  и  $D$  будут  $d$  и  $k - d$  соответственно, поэтому при четном  $k$  алгоритм завершится после  $k/2$  циклов с нужным результатом, а при нечётном — после  $\lceil k/2 \rceil$  циклов.

Теперь, пользуясь данным делением, предъявим алгоритм получения всех битов числа  $n$ , начиная с младшего.

**Начальная конфигурация:** камни  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и робот в точке 0,  $B$  в точке  $n$

**Конечная конфигурация:** камни  $A$ ,  $C$ ,  $D$  и робот в точке 0,  $B$  в точке  $n$ , в память поочерёдно записаны биты числа  $n$  начиная с младшего

- 1: идти в положительную сторону с камнем  $D$  до камня  $B$
- 2: вернуться в точку 0
- 3: **цикл** //  $i$ -ая итерация,  $C$  в точке 0,  $D$  в точке  $\lfloor n/2^{i-1} \rfloor$
- 4: выполнить деление для камней  $C$  и  $D$  //  $C$  и  $D$  в точке  $\lfloor n/2^i \rfloor$
- 5: записать остаток при делении в память
- 6: выполнить внутреннюю логику // эта часть зависит от применения алгоритма
- 7: **если**  $C$  и  $D$  находятся в точке 0 **то**
- 8: **выход из цикла**
- 9: **иначе**
- 10: перенести  $C$  в точку 0

Заметим, что в ходе  $i$ -ой итерации цикла происходит деление отрезка длиной  $\lfloor n/2^{i-1} \rfloor$ . Остаток при этом делении соответствует  $i$ -ому биту числа  $n$  (если младший бит принять первым), поэтому алгоритм будет записывать в память действительно требуемый результат. Теперь осталось доказать, что алгоритм работает за допустимое время.

**Лемма 2.** Алгоритм получения битов числа  $n$  работает за время  $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$ .

**Доказательство.** Посчитаем для начала, сколько ходов тратится на каждую операцию деления. Пусть начальное расстояние между  $C$  и  $D$  равно  $k$ . Тогда  $k$  ходов потратится на сдвиги камней, а на проходы между камнями будет потрачено  $\sum_{i=1}^k i$ . Итого всего ходов на одно деление потратится:

$$k + \sum_{i=1}^k i = k + \frac{(k+1)k}{2} = \frac{(k+3)k}{2}$$

Очевидно, что в ходе алгоритма будет выполнено деление числа  $n$ , поэтому  $T(n) \geq (n+3)n/2$ . Для оценки сверху посчитаем количество всех ходов в алгоритме. Сначала будет выполнено  $n$  ходов, потом для каждой операции деления числа  $k$  будет выполнено  $k$  дополнительных ходов и сама операция деления (всего  $(k+5)k/2$ ). Пусть  $2^s - 1$  — наименьшее число такого вида, которое не меньше  $n$ . В алгоритме для  $2^s - 1$  и  $n$  одинаковое количество делений ( $s$ ), но каждое деление в алгоритме для  $2^s - 1$  занимает не меньше времени, чем соответствующие деление для  $n$ . Поэтому верно следующее:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T(2^s - 1) = 2^s - 1 + \sum_{i=1}^s \frac{(2^i + 4)(2^i - 1)}{2} = \\ &= 2^s - 1 + \sum_{i=1}^s (2^{2i-1} + 3 \cdot 2^{i-1} - 4) \leq 2^{s+2} + \sum_{i=1}^s 2^{2i-1} \leq \\ &\leq 2^{s+2} + \sum_{i=1}^{2s-1} 2^i < 2^{s+2} + 2^{2s} \leq 8n + 4n^2. \end{aligned}$$

Таким образом, верно, что  $n^2/2 \leq T(n) \leq 8n + 4n^2$ , откуда следует требуемое.  $\square$

## 5. Построение пути обхода $\mathbb{Z}^k$

Существенная часть алгоритма полиномиального обхода роботом  $\mathbb{Z}^k$  — это построение пути обхода  $\mathbb{Z}^k$ . Обход, который будет нами построен, пройдет через каждую клетку пространства ровно 1 раз. Общий подход к его построению таков: строим семейство обходов  $k$ -мерных кубов с длинами сторон равными степеням двойки, потом на основе этих обходов получаем обход всего пространства. Опишем основные термины, в которых будем производить построение.

На  $\mathbb{Z}^k$  есть  $2k$  возможных направлений движения. Если есть направление движения  $i$ , противоположное направление будем обозначать  $-i$ . Введём определение пути.

**Определение 8.** *Путь* — упорядоченный набор, конечный или бесконечный, направлений движения. Если  $m$  — путь, то  $m[i]$  — направление движение  $i$ -ого хода этого пути. Нумерация ходов ведётся с единицы.

**Определение 9.** Пусть  $m = a_1 a_2 \dots a_k$  — путь, тогда:

- 1)  $-m = -a_1 - a_2 \dots - a_k$
- 2)  $\overline{m} = a_k a_{k-1} \dots a_1$
- 3)  $\overline{-m}$  — обход пути  $m$  в обратную сторону.

**Замечание 2.** Конечные самонепересекающиеся пути длины  $k$  затрагивают  $k+1$  клетку пространства.

**Замечание 3.** Чтобы получить сдвиг между начальной и конечной точкой пути по направлению  $i$ , нужно просуммировать все ходы в направлении  $i$  с плюсом и в направлении  $-i$  с минусом.

Основным инструментом построения обхода будет группа  $G_k$ , действующая на направлениях движения. Она будет действовать так: если элемент  $g \in G_k$  переводит направление  $i$  в  $j$ , то он  $-i$  переведет в  $-j$ . Эта группа изоморфна  $S_k \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$  ( $\mathbb{Z}_2$  —  $k$  раз). Тривиально определяется действие этой группы на путях одинаковой длины:  $g(a_1 a_2 \dots a_k) = g(a_1)g(a_2) \dots g(a_k)$ , где  $g \in G_k$ ,  $a_1 a_2 \dots a_k$  — путь длины  $k$ .

**5.1. Обход  $k$ -мерного куба со стороной 2.** Для построения обхода всего пространства нам потребуются обходы кубов с различными длинами сторон. Начнём с построения обхода куба со стороной 2. На самом деле, построенный нами обход эквивалентен обходу, полученному с помощью кодов Грея [5]. Тем не менее, необходимо описать подобный обход в наших терминах.

Рассмотрим  $k$ -мерный куб со стороной 2,  $k \geq 1$ . Обход такого куба можно представить как самонепересекающийся путь длины  $2^k - 1$ . Построим семейство  $M_k$  таких обходов следующим образом: предъявим один обход, а остальные получим как орбиту действия  $G_k$  над этим обходом. Заметим, что любой  $g \in G_k$  соответствует какому-то движению в пространстве  $\mathbb{Z}^k$  поэтому при действии элементами  $G_k$  на обход куба будет получаться также обход куба.

Обозначим направления движения  $x_1, -x_1, x_2, -x_2, x_3, -x_3 \dots$ . Рассмотрим последовательность путей  $\{m_i\}$  построенную по следующему рекуррентному правилу:  $m_1 = 1$ ,  $m_i = m_{i-1} x_i \overline{-m_{i-1}}$ .

**Лемма 3.** Путь  $m_k$  с началом в клетке  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_k$  обходит куб с диагональю  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_k$   $\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_k$  (номера координат соответствуют номерам направлений).

**Доказательство.** Будем доказывать по индукции. Для  $k = 1$  доказательство очевидно. Пусть для  $k = i - 1$  факт верен. Докажем его для  $k = i$ .

Заметим, что  $m_{i-1}$  — обход куба с диагональю  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_i \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0)}_{i-1}$ . Ход по направлению  $x_i$  переводим нас в точку с последней координатой равной 1. Так как путь  $\overline{-m_{i-1}}$  обратен пути  $m_{i-1}$ , в проекция на первые  $i - 1$  координату мы вернёмся обратно, точно таким же путём как и пришли. Следовательно, учитывая ход в направлении  $x_i$ , с помощью  $\overline{-m_{i-1}}$  мы обойдём куб с диагональю  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1)}_{i-1} \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_i$ . Заметим, что сначала мы обошли «нижнюю» половину куба, перешли в «верхнюю» и обошли её также как и «нижнюю», только в обратную сторону. Итого каждая клетка куба с диагональю  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_i \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_i$  была посещена.  $\square$

Рассмотрим теперь произвольный элемент  $m \in M_k$ . Так как  $M_k$  — орбита элемента  $m_k$  при действии группы  $G_k$ , то  $m$  можно представить в следующем виде  $m = g(m_k)$ ,  $g \in G_k$ . Докажем несколько лемм.



**Лемма 4.** Начальная и конечная точки пути  $m$  соседние, причём чтобы перейти из начала в конец, необходимо пойти по направлению  $g(x_k)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать этот факт для  $m_k$  и направления  $x_k$ . Посчитаем сдвиг по каждому направлению. Заметим, что каждому направлению в  $m_{k-1}$  соответствует противоположное направление в  $\overline{m_{k-1}}$ . Поэтому сдвиги  $m_{k-1}$  и  $\overline{m_{k-1}}$  компенсируются. Таким образом остаётся один ход в направлении  $x_k$ . Отсюда следует требуемое.  $\square$

**Определение 10.** Будем называть направление  $g(x_k)$  *основным* направлением  $m = g(m_k)$ . Ребро между начальной и конечной клеткой также будем называть *основным*.

**Определение 11.** Пусть  $s$  — клетка куба  $C$ , который обходит путь  $m$ . Тогда будем говорить, что направления  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ребер куба  $C$ , выходящих из  $s$ , задают клетку при обходе  $m$ .

**Лемма 5.** Начальная клетка обхода  $m$  задаётся  $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_k)$ , конечная  $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{k-1}), g(-x_k)$ .

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что начальная и конечные клетки  $m_k$  задаются  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и  $x_1, x_2, \dots, -x_k$ . Действительно, при построении  $m_k$  начальная клетка была 0, а весь куб лежал в неотрицательной части пространства. А конечная клетка должна только одним направлением отличаться от начальной, и это направление  $x_k$  (заменятся на  $-x_k$ ).  $\square$

**Лемма 6.** Количество путей из  $M_k$ , имеющих одинаковое основное направление и одинаковые направления, задающие начальную клетку (следовательно и конечную) равно  $(k-1)!$

**Доказательство.** Имеется  $2^k$  вариантов выбрать направления для начальной клетки, из них выбрать основное —  $k$  вариантов, итого  $k2^k$  вариантов. Все такие конфигурации равнозначны. Мощность  $M_k$  —  $k!2^k$ , следовательно ответ  $k!2^k / (k2^k) = (k-1)!$   $\square$

**5.2. Обход  $k$ -мерного куба со стороной  $2^n$ .** Теперь построим множество  $M_{k,n}$  обходов  $k$ -мерного куба со стороной  $2^n$ , для  $k \geq 2, n \geq 1$ . Основное свойство, которое мы хотим реализовать в  $M_{k,n}$ , — это то, что начальная и конечная клетки будут вершинами куба, лежащими на одном ребре. Аналогично, будем называть это ребро и соответствующее ему направление основными. Построение будет проводиться также как и для  $M_k$ : сначала построим одного базового представителя данного множества, а остальных будем получать как орбиту при действии на этого представителя группой  $G_k$ . То, что в итоге мы построим, будет обобщением кривой Гильберта (Пеано) на  $k$ -мерный случай [6, 7, 8].

**5.2.1. Общий случай обхода.** Для  $M_{k,1}$  построение очевидно, просто положим  $M_{k,1} = M_k$ .

Для  $M_{k,2}$  построение будет менее тривиальным. Общий вид базового пути  $m_{k,2}$  будет следующим:  $s, k, g_{-k}(\overline{s})$ . При этом  $g_{-k}$  меняет местами  $x_k$  и  $-x_k$ ,  $s$  — это последовательность следующих ходов  $g_1(m_k), m_k[1], g_2(m_k), m_k[2], \dots, m_k[2^{k-1}-1], g_{2^{k-1}}(m_k)$ , где  $g_i \in G_k$  — некоторые элементы группы. Поскольку  $m_k = m_{k-1}x_k\overline{m_{k-1}}$  и в  $m_{k-1}$  нет ходов по направлениям  $x_k$  и  $-x_k$ , по-другому  $m_{k,2}$  можно представить как  $2^k$  упорядоченных элементов из  $M_k$ , причем между парами соседних есть ходы из  $m_k$  (их как раз  $2^k - 1$ ). Другими словами,  $g_1(m_k), m_k[1], g_2(m_k), m_k[2], \dots, m_k[2^k-1], g_{2^k}(m_k)$ , где  $g_i = g_{-k}g_{-g_{2^k-i+1}}$ ,  $g_{-}$  переводит все  $i$  в  $-i$ .

Геометрически этот обход выглядит следующим образом. Наш  $k$ -мерный куб  $C$  можно представить как куб  $C_0$  со стороной 2, у которого клетки — кубы со стороной 2. Пусть эти клетки  $C_1, C_2, \dots, C_{2^k}$  занумерованы в таком порядке, в каком базовый путь  $m_k$  обходит куб  $C_0$ . Тогда, путь  $m_{k,2}$  обойдет поочерёдно все  $C_1, C_2, \dots, C_{2^k}$ , делая переходы от  $C_i$  к  $C_{i+1}$  в соответствии с  $m_k$  (то есть просто делая ход в направлении  $m_k[i]$ ).

Посмотрим, как конкретно необходимо обойти  $C_i$  (или другими словами задать  $g_i$ ), чтобы путь получился корректным. Для начала докажем лемму.

**Лемма 7.** Пусть  $C_i$  и  $C_{i+1}$  — соседние кубы в  $C_0$ , а  $d$  — клетка в  $C_i$ . Тогда существует такой путь  $m \in M_k$ , обходящий  $C_i$ , что клетка  $d$  — начальная, а конечная клетка касается  $C_{i+1}$ .

**Доказательство.** Так как начальная клетка пути уже зафиксирована, необходимо правильно выбрать основное ребро. Заметим, что в силу построения  $C_i$  и  $C_{i+1}$  имеют общую  $k-1$ -мерную границу. Есть два случая:  $d$  касается этой границы и  $d$  не касается. В первом случае есть  $k-1$  вариантов выбрать основное ребро так, чтобы конечная клетка тоже лежала на этой границе (все рёбра идущие из  $d$ , кроме параллельного границе). Во втором случае такое ребро только одно — ребро, ведущее из  $d$  и перпендикулярное границе. С фиксированным основным ребром и фиксированной начальной клеткой есть  $(k-1)!$  путей. Таким образом, в одном случае есть  $(k-1)(k-1)!$  подходящих путей, в другом  $(k-1)!$ .  $\square$

**Лемма 8.** *Обход  $C_1$  всегда имеет основное направление  $x_1$ .*

**Доказательство.** Переход из  $C_1$  в  $C_2$  происходит по направлению  $m_k[1] = x_1$ . Начальная клетка  $C_1$  задаётся направлениями  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , поэтому выполняется первый случай из доказательства леммы, следовательно, основное направление  $x_1$ .  $\square$

**Теорема 1.** *Существует набор  $g_i$ , с которыми  $m_{k,2}$  действительно обходит куб  $C$ .*

**Доказательство.** Заметим, что в силу построения пути, вторая половина — это первая, отражённая относительно гиперплоскости, делящей куб пополам и перпендикулярной  $x_k$ , и пройденная в обратную сторону. Таким образом, нам необходимо зафиксировать обходы первых  $2^{k-1}$  маленьких кубов так, чтобы мы дошли из начальной точки до границы  $C_{2^{k-1}}$  и  $C_{2^{k-1}+1}$  (она лежит на предыдущей гиперплоскости).

В кубе  $C_1$  известна начальная клетка. Это начальная клетка всего пути (её можно задать направлениями  $x_1, x_2, \dots, x_k$  в большом кубе). Выберем обход в этом кубе так, чтобы конечная клетка касалась  $C_2$  (это можно сделать, согласно лемме). Теперь должен произойти ход  $m_k[1]$ . После него мы действительно в кубе  $C_2$ , так как сейчас находимся на границе этих кубов и  $m_k[1]$  перпендикулярно ей по построению. Теперь нам известна начальная клетка в  $C_2$ . Аналогично построим путь в  $C_2$  и так далее, до  $C_{2^{k-1}}$  включительно, в итоге получаем требуемый путь.  $\square$

Заметим, что в построенном нами обходе начальная и конечная клетки находятся в вершинах куба  $C$ , причем начальная клетка задаётся направлениями  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , а основное направление  $x_k$ .

Построим теперь  $M_{k,n}$ , а точнее одного его представителя  $m_{k,n}$ . Положим его следующим:  $g_1(m_{k,n-1}), m_k[1], g_2(m_{k,n-1}), m_k[2], \dots, m_k[2^k - 1], g_{2^k}(m_{k,n-1})$  ( $g_i \in G_k$  такие же, как и для  $m_{k,2}$ ). Таким образом,  $m_{k,n}$  выражается рекурсивно через  $m_{k,n-1}$ .

**Теорема 2.** *Путь  $m_{k,n}$  обходит  $k$ -мерный куб со стороной  $2^n$ , причем начальная клетка пути задаётся направлениями  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , а основное направление  $x_k$ .*

**Доказательство.** Докажем по индукции. Для  $n = 2$  это утверждение мы уже доказали. Пусть факт верен для  $n - 1$ , докажем для  $n$ .

Заметим, что если в пути  $m_{k,2}$  все обходы маленьких кубов  $C_i$  (они обходятся путями  $g_i(m_k)$ ), заменить на пути  $g_i(m_{k,n-1})$ , с одной стороны получается путь  $m_{k,n}$  (он по определению таков). С другой стороны обходы маленьких кубов  $C_i$  заменились на обходы кубов размера  $2^{n-1}$ , причем направления, задающие начальные и конечные клетки, не изменились (в силу предположения индукции). Следовательно, переходы между кубами остались корректными (если конечная клетка  $C_i$  была соседней начальной клетки  $C_{i+1}$ , то в новых кубах они тоже будут соседними, причём переход между ними будет иметь такое же направление  $m_k[i]$ ). Начальные и конечные клетки всего пути аналогично остались  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и  $x_1, x_2, \dots, -x_k$ . Таким образом  $m_{k,n}$  действительно поочерёдно обходит  $2^k$  кубов размера  $2^{n-1}$ , то есть куб размера  $2^n$ .  $\square$

**5.2.2. Пример выбора  $g_i$ .** Как было показано выше, существуют такие  $g_1, g_2, \dots, g_{2^k}$ , при которых пути  $m_{k,n}$  обходят кубы соответствующих размеров. При этом, в доказательстве допускалось в некоторых ситуациях выбирать произвольное основное ребро, т.е.  $g_i(k)$  было не фиксировано. В этой части мы предъявим конкретный выбор  $g_i(k)$ , при котором обход будет

корректен. Это знание нам необязательно для дальнейшего построения алгоритма, поэтому можно его рассматривать как дополнительную информацию.

Будем строить значения  $g_i(k)$  на основе ходов в пути  $m_k$ . Положим  $g_1(x_k) = x_1$ ,  $g_{2^{k-1}}(x_k) = x_k$ ,  $g_{2^q}(x_k) = g_{2^{q+1}}(x_k) = m_k[2^q]$ , где  $q$  от 1 до  $2^{k-2} - 1$  (можно задать первые  $2^{k-1}$ , остальные получаются из симметрии). При этом желательно знать направления, задающие начальную клетку  $g_i(m_k)$ , то есть те направления куда переходят  $x_1, x_2, \dots, x_k$  под действием  $g_i$  (не обязательно знать, что куда конкретно переходит, можно определить просто множество). Очевидно, что для  $g_1$  это множество и есть  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Теперь пусть для  $g_i$  это множество известно и равно  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $a_j$  — это или  $x_j$  или  $-x_j$ ), тогда если  $i$  четное, то для  $g_{i+1}$  оно останется таким же, иначе  $a_1$  и  $a_{g_i(x_k)}$  обратятся (если  $i = 1$ , то при этом ничего не изменится).

**Лемма 9.** При вышеописанных  $g_i$  обход куба  $m_{k,2}$ , а значит и  $m_{k,n}$ , корректен.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное  $g_i$  с множеством направлений  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Если  $i$  — чётное, то основное ребро в обходе куба  $C_i$  имеет направление  $m_k[i]$ . Значит, если из начальной клетки  $C_i$  мы шагнём в направлении  $m_k[i]$ , мы попадем в конечную клетку  $C_i$ . Если шагнем ещё раз, мы попадём в куб  $C_{i+1}$ , причем в клетку с такими задающими направлениями, как и начальная клетка  $C_i$ . Заметим, что это начальная клетка  $C_{i+1}$ , поэтому переход из  $C_i$  в  $C_{i+1}$  корректен. Аналогично, можно доказать для случая  $i = 1$ , так как  $m_k[1] = 1$ .

Если  $i$  — нечётное, то доказательство будет аналогично предыдущему пункту, только шагать надо сначала в направлении  $g_i(x_k)$ , при этом обратится направление  $g_i(x_k)$  (станет  $-g_i(x_k)$ ), потом в направлении  $m_k[i]$ , (станет направлением  $-m_k[i]$ ). Так как все нечётные  $m_k[i]$  либо  $x_1$ , либо  $-x_1$ , клетка, в которую мы пришли, будет задаваться направлениями  $-a_1, a_2, \dots, -a_{g_i(x_k)}, \dots, a_k$ , что соответствует начальной клетке  $C_{i+1}$ ; опять получаем, что переход корректен.

Если  $i = 2^{k-1}$ , то в силу симметрии построения  $g_{2^{k-1}} = g_{2^{k-1}-1}$ , поэтому здесь ситуация будет аналогична чётному случаю.  $\square$

Таким образом, мы получили набор  $g_i$  с явно заданными основными направлениями. Заметим, что даже в этих условиях каждое  $g_i$  можно выбирать по-разному, а именно,  $(k-1)!$  способами (этот факт мы доказывали ранее). Приведём явные примеры построения  $m_{k,n}$  для  $k = 2, 3$ .

В случае  $k = 2$  существует всего один набор  $g_i$ , образующих корректный путь. Этот набор следующий:  $g_1$  переводит  $x_1 \rightarrow x_2$ ,  $x_2 \rightarrow x_1$ ,  $g_2 = g_3$  тождественны,  $g_4$  переводит  $x_1 \rightarrow -x_2$ ,  $x_2 \rightarrow -x_1$ . Сами  $m_{2,n}$  можно увидеть на рисунке 1.

При  $k = 3$  каждую  $g_i$  можно выбрать как минимум 2-мя способами, при этом  $g_i(x_3)$  равны следующим направлениям:  $x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, -x_2, -x_2, -x_1$ . Примеры на рисунке 2.

### 5.3. Обход $\mathbb{Z}^k$ .

Построение пути обхода куба со стороной  $2^n$  нам было необходимо для постройки обхода  $\mathbb{Z}^k$ . Наш обход посетит каждую клетку один раз, причем число ходов, необходимое для посещения клетки, будет полиномиальным от её координат.

Начнём построение обхода с введения специального элемента  $g_H \in G_k$ .  $g_H$  будет действовать на основные  $k$  направлений следующим образом:  $x_1 \rightarrow -x_1$ ,  $x_2 \rightarrow -x_k$ ,  $x_i \rightarrow x_{i-1}$ , для  $i > 2$ .

**Лемма 10.** Порядок  $g_H$  равен  $2(k-1)$

**Доказательство.** Легко видеть, что при действии  $g_H$  образуется два цикла:  $x_1$  и  $-x_1$ , все остальные направления не цикличны. Длины циклов 2 и  $2(k-1)$ , откуда получаем требуемое.  $\square$

Теперь определим рекурсивно следующую бесконечную последовательность путей  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ .  $h_1 = m_k$ ,  $h_n = h_{n-1}g_H^{n-1}(l)$ , где  $l$  — это  $m_k[1]$ ,  $g_2(m_{k,n-1})$ ,  $m_k[2]$ ,  $\dots$ ,  $m_k[2^k - 1]$ ,  $g_{2^k}(m_{k,n-1})$ , то есть  $g_H^n(m_{k,n})$  без обхода первого куба со стороной  $2^{n-1}$ .

**Теорема 3.** Путь  $h_n$  — это обход  $k$ -мерного куба со стороной  $2^n$ , причём конечная клетка обхода — это вершина куба заданная направлениями  $g_H^n(-x_1)$ ,  $g_H^n(x_2)$ ,  $\dots$ ,  $g_H^n(x_k)$ .

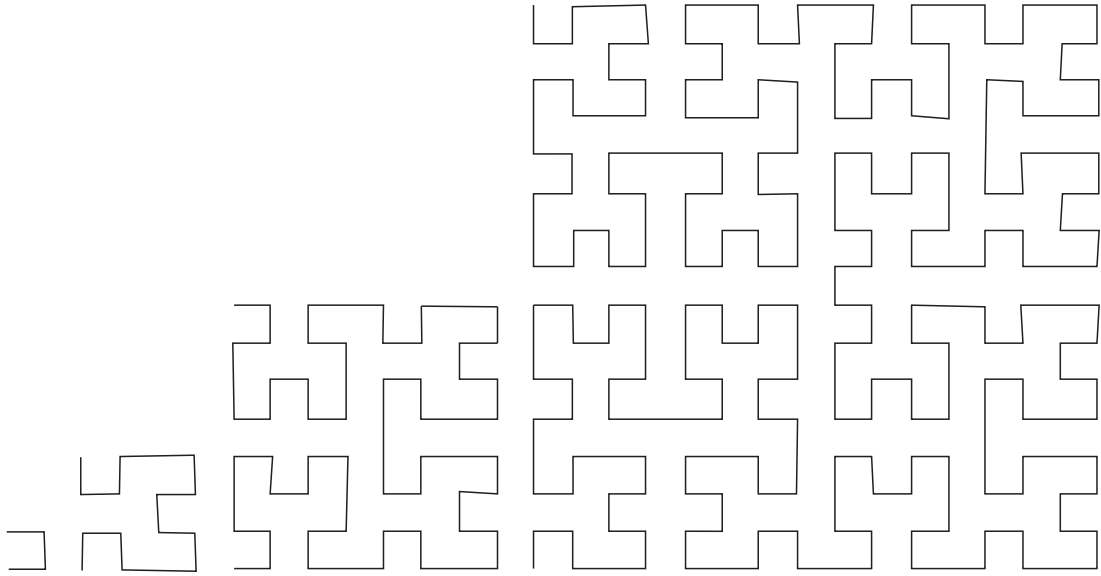


Рис. 1. Пути  $m_2, m_{2,2}, m_{2,3}, m_{2,4}$ . Начало координат — левая нижняя точка, направление  $x_1$  — влево,  $x_2$  — вверх

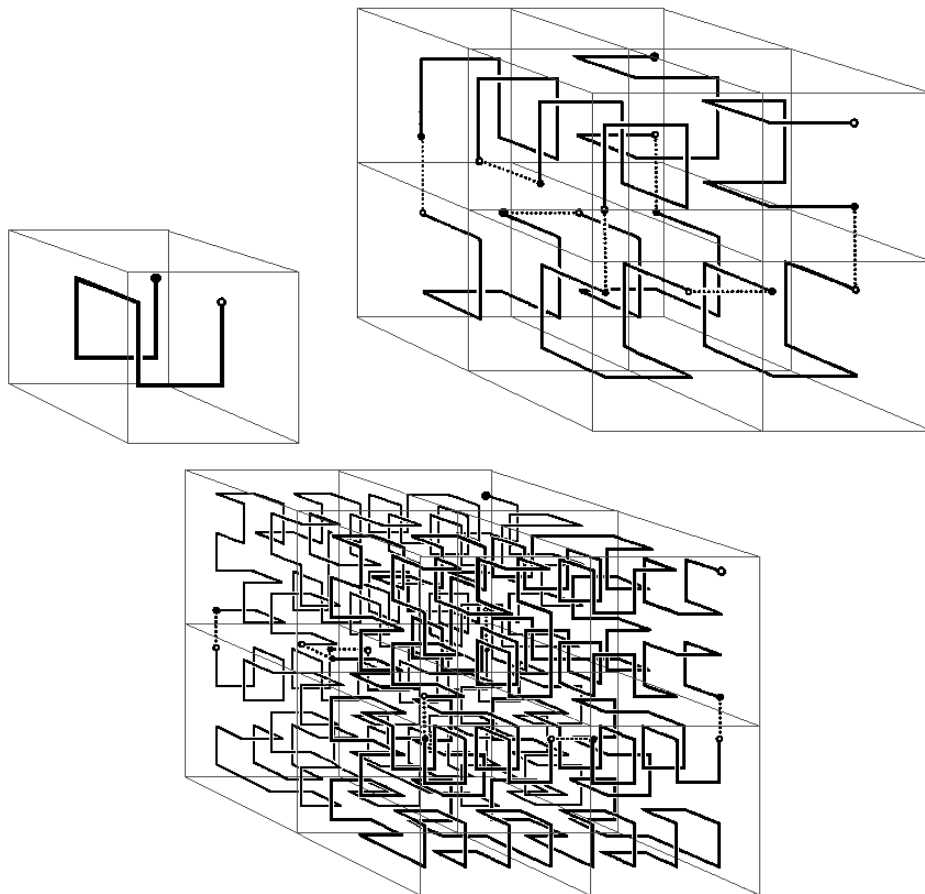


Рис. 2. Примеры путей  $m_3, m_{3,2}, m_{3,3}$ . Начало координат — левая верхняя ближняя точка, направление  $x_1$  — вниз,  $x_2$  — влево,  $x_3$  — вглубь

**Доказательство.** Докажем по индукции. При  $n = 1$  достаточно показать, что конечная клетка искомая. Действительно, в обходе  $m_k$  конечная клетка задаётся направлениями  $x_1, x_2, \dots, -x_k$ . Легко видеть, что  $g_H(-x_1), g_H(x_2), \dots, g_H(x_k)$  — те же самые направления.

Пусть факт верен для  $n - 1$ , докажем для  $n$ . Рассмотрим наш куб как кубы  $C_1, \dots, C_{2^k}$  со

стороной  $2^{n-1}$ . Заметим, что  $h_n$  — это  $g_H^{n-1}(m_{k,n-1})$  с заменой обхода куба  $C_1$  на  $h_{n-1}$ . Покажем, что замена произведена корректно, для этого достаточно доказать, что последняя клетка нового обхода  $h_{n-1}$  и старого обхода  $g_H^{n-1}(g_1(m_{k,n-1}))$  куба  $C_1$  совпадают.

Заметим, что при любом выборе набора  $g_i$ , основное направление старого обхода куба  $C_1$  —  $g_H^{n-1}(x_1)$ . Следовательно, его конечная клетка задаётся направлениями  $g_H^{n-1}(-x_1), g_H^{n-1}(x_2), \dots, g_H^{n-1}(x_k)$  (начальная задаётся  $g_H^{n-1}(x_1), g_H^{n-1}(x_2), \dots, g_H^{n-1}(x_k)$ ). По предположению индукции аналогичными направлениями задаётся последняя клетка обхода  $h_{n-1}$ .

Осталось показать, что конечная клетка  $h_n$  — это  $g_H^n(-x_1), g_H^n(x_2), \dots, g_H^n(x_k)$ . Конечная клетка обхода — это конечная клетка пути  $g_H^{n-1}(m_{k,n-1})$ . Конечная клетка  $g_H^{n-1}(m_{k,n-1})$  — такая же, как конечная клетка  $g_H^{n-1}(m_k)$ , а для неё этот факт очевиден доказательства для  $n = 1$ .  $\square$

Теперь на основе этой последовательности построим обход  $\mathbb{Z}^k$ . Начнём обход из нулевой точки и будем идти по следующему бесконечному пути:  $h_1, h_2 \setminus h_1, h_3 \setminus h_2, \dots, h_n \setminus h_{n-1} \dots$  (где  $h_i \setminus h_{i-1}$  — обход  $h_i$  без первой части, которая совпадает с  $h_{i-1}$ ). Фактически это «предел» последовательности  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ , поэтому будем обозначать его  $h_\infty$ . Части  $h_\infty$ , соответствующие  $h_i$ -ым, будем называть этапами обхода пространства.

**Лемма 11.** *Бесконечный путь  $h_\infty$  не имеет самопересечений.*

**Доказательство.** Действительно, пусть произошло самопересечение, тогда оно произошло на  $i$ -ом этапе построения  $h_\infty$ , при этом известно, что  $h_i$  обходит соответствующий ему куб без самопересечений. Получаем противоречие.  $\square$

Теперь перейдём к описанию того, как  $h_\infty$  заполняет пространство. Пусть  $K_n$  — куб, который обходит  $h_\infty$  по завершении  $n$ -ого этапа.

**Лемма 12.** *Куб  $K_{n+1}$  можно получить растяжением куба  $K_n$  по направлениям  $g_H^n(x_1), g_H^n(x_2), \dots, g_H^n(x_k)$ .*

**Доказательство.** Заметим, что  $K_n$  — это первый маленький куб при обходе  $K_{n+1}$  с помощью  $g_H^n(m_{k,n})$ , а значит, он соответствует вершине с направлениями рёбер  $g_H^n(x_1), g_H^n(x_2), \dots, g_H^n(x_k)$ . Поэтому, если растянуть  $K_n$  по этим направлениям, получится  $K_{n+1}$ .  $\square$

Таким образом, часть пространства, которую обходит  $h_\infty$ , растёт с помощью растяжений кубов в различные стороны в 2 раза. Так,  $g_H$  имеет порядок  $2(k-1)$ ; направления растяжений будут повторяться с такой же частотой.

Рассмотрим, какие габариты будут иметь кубы  $K_n$ . Для этого будем исследовать их проекции на каждую из  $k$  пар направлений. На первом этапе все проекции будут отрезками  $[0, 1]$ . Изменение этих отрезков будет значительно отличаться для направлений  $x_1, -x_1$  и всех остальных. Будем обозначать за  $l_n$  и  $r_n$  координаты левого и правого концов отрезков на  $n$ -ом этапе, а за  $a_n$  — минимум их модуля.

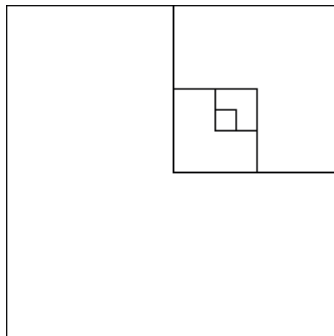


Рис. 3. Растяжения кубов в случае  $k = 2$ . Направление  $x_1$  — влево, направление  $x_2$  — вверх

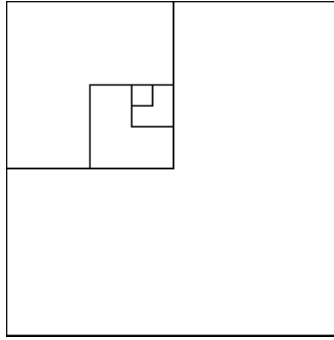


Рис. 4. Растяжение кубов в случае  $k = 3$ , проекция на направления  $x_2, x_3$ . Направление  $x_2$  — влево, направление  $x_3$  — вверх

**Лемма 13.** При проекции  $K_n$  на направление  $-x_1, x_1$  выполнено:  $a_n \geq \frac{2}{3}(2^n - 1)$ .

**Доказательство.** В силу выбора  $g_H$ , растяжения в направлениях  $x_1$  и  $-x_1$  будут чередоваться, причём, при переходе от  $2q - 1$ -ого к  $2q$ -ому этапу будет растяжение по  $-1$ , а при переходе от  $2q$ -ого к  $2q + 1$ -ому этапу — по  $1$ . Соответственно, в первом случае из координаты левого отрезка надо вычесть  $2^{2q-1}$ , во втором — к координате правого прибавить  $2^{2q}$ . Итого:

$$l_{2q-1} = l_{2q} = - \sum_{i=1}^q 2^{2i-1} = -\frac{2}{3}(4^q - 1); r_{2q} = r_{2q+1} = 1 + \sum_{i=1}^q 2^{2i} = 1 + \frac{4}{3}(4^q - 1).$$

Теперь легко проверить, что и для чётных, и для нечётных  $n$ ,  $|l_n|$  и  $r_n$  не меньше чем  $\frac{2}{3}(2^n - 1)$ .  $\square$

**Лемма 14.** При проекции  $K_n$  на направление  $-x_i, x_i$  ( $i > 1$ ) выполнено:

$$a_n \geq \frac{(2^k - 2)(2^{n-2(k-1)} - 1)}{2^{2(k-1)} - 1}.$$

**Доказательство.** Заметим, что за  $2(k-1)$  подряд идущих растяжений по  $k-1$  растяжению будет в направлениях  $x_i$  и  $-x_i$ . Рассмотрим этап  $n$  следующие за ним  $2(k-1)$  этапа. Так как по каждому направлению было  $k-1$  растяжений, концы отрезка в каждую сторону сдвинулись не меньше чем на  $\sum_{i=1}^{k-1} 2^{n+i-1}$  (эта величина, когда все растяжения были в начале). Тогда  $a_{2(k-1)q+1}$  можно оценить следующим способом.

$$\begin{aligned} a_{2(k-1)q+1} &\geq \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k-1} 2^{2(k-1)(i-1)+j} = \sum_{i=1}^q 2^{2(k-1)(i-1)} \left( \sum_{j=1}^{k-1} 2^j \right) = \\ &= (2^k - 2) \sum_{i=1}^q 2^{2(k-1)(i-1)} = \frac{(2^k - 2)(2^{2(k-1)q} - 1)}{2^{2(k-1)} - 1}. \end{aligned}$$

Теперь для произвольного  $a_n$  можно записать, что  $a_n \geq a_{2(k-1)q+1}$ , где  $2(k-1)q+1$  — наибольшее число такого вида, меньшее  $n$ . Тогда:

$$a_n \geq a_{2(k-1)q+1} \geq \frac{(2^k - 2)(2^{2(k-1)q} - 1)}{2^{2(k-1)} - 1} \geq \frac{(2^k - 2)(2^{n-2(k-1)} - 1)}{2^{2(k-1)} - 1}.$$

$\square$

**Теорема 4.** Путь  $h_\infty$  посетит каждую клетку  $d$ , причём если  $p$  — максимальный модуль координат клетки, то количество ходов  $T(d)$ , которые мы прошли до неё, будет  $\mathcal{O}(p^k)$ .

**Доказательство.** Так как  $a_n$  для всех направлений стремятся к бесконечности, на каком-то этапе все они станут больше  $p$ , следовательно, наша клетка будет лежать внутри куба, обойденного к тому времени.

Пусть  $d \in K_n$ , но  $d \notin K_{n-1}$ , то есть мы посетим клетку  $d$  на  $n$ -ом этапе. Тогда существует пара направлений  $-x_i, x_i$ , для которых  $a_{n-1} < p$ . Тогда из предыдущих двух лемм следует, что  $\log_2 p > n + c$ , где  $c$  — какая-то константа. Заметим, что  $T(d) \leq 2^{kn}$  (число клеток в кубе  $K_n$ ). Тогда

$$T(d) \leq 2^{kn} < 2^{(\log_2 p - c)k} = 2^{ck} p^k.$$

Таким образом, получаем требуемое.  $\square$

## 6. Определение направления хода по его номеру

Теперь, когда в нашем распоряжении имеется обход  $\mathbb{Z}^k$ , нам нужен инструмент для построения его локально. Например, было бы неплохо уметь определять направление хода по его номеру. Для этого построим следующую конструкцию: конечный автомат, которому на вход подаётся последовательность цифр  $2^k$ -ичного представления номера хода, начиная с самого младшего разряда, на выходе получается состояние, соответствующие направлению движения.

**6.1. Описание автомата в общем случае.** Построим конечный автомат  $A_k$ , с  $4k^2 - 2k - 2$  состояниями. Среди них есть по  $2k - 2$  состояния для каждого из  $2k$  направлений движения (будем их обозначать  $(d, i)$ , где  $d$  — направление,  $i$  — какой-то остаток при делении на  $2k - 2$ ) и  $2k - 2$  состояний для различных степеней  $g_H$  (порядок элемента  $g_H$  в  $G_k$  равен  $2k - 2$ ). Переходы в автомате устроены следующим образом. Для каждого состояния есть  $2^k$  переходов, соответствующих остаткам при делении на  $2^k$ . У любого состояния  $(d, i)$  из первого множества переходы ведут в состояние  $(g_H^i g_{a+1} g_H^{2k-1-i}(d), i + 1)$ , где  $a$  — остаток при делении на  $2^k$  (здесь и далее второй параметр состояния берётся по модулю  $2k - 2$ ). У любого состояния из второго множества, соответствующего  $g_H^i$ , если остаток  $a$  равняется 0, переход будет в  $g_H^{i+1}$ , иначе переход будет в состояние  $(g_H^i(m_k[a]), i + 1)$ .

Докажем основное свойство этого автомата.

**Лемма 15.** Пусть на вход автомату  $A_k$  поданы остатки при делении на  $2^k$ :  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , такие, что  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} = p$  как  $2^k$ -ичное число (первые цифры могут быть нулями). Тогда, в конце автомат окажется либо в состоянии  $g_H^n$ , если все остатки 0, либо в состоянии, соответствующем направлению  $(g_H^{n-1}(m_{k,n}[p]), n)$ .

**Доказательство.** Будем доказывать по индукции. Для  $n = 1$  утверждение очевидно: если  $p = 0$ , то переход будет в состояние, соответствующее  $g_H^1$ . Если  $p \neq 0$ , то переход будет в состояние  $(g_H^0(m_k[p]), 1) = (m_{k,1}[p], 1)$ .

Пусть утверждение верно для  $n = i$ , докажем для  $n = i + 1$ .

Пусть первые  $i$  остатков были нули, тогда после принятия этих остатков мы окажемся в состоянии  $g_H^i$ . Если  $a_{i+1} = 0$ , то, как и требуется, мы перейдем в состояние  $g_H^{i+1}$  просто по построению автомата. Если  $a_{i+1} \neq 0$ , то мы перейдем в состояние  $(g_H^i(m[a_{i+1}]), i + 1)$ . Рассмотрим направление движения  $g_H^i(m_{k,i+1}[p])$ . Заметим, что  $p$  делится на  $2^i$ , следовательно, ход  $m_{k,i+1}[p]$  соответствует переходу между «маленькими» кубами  $C_{a_{i+1}}$  и  $C_{a_{i+1}+1}$  при обходе  $m_{k,i+1}$ . Следовательно,  $m_{k,i+1}[p] = m_k[a_{i+1}]$ . Отсюда следует, что  $g_H^i(m_{k,i+1}[p]) = g_H^i(m[a_{i+1}])$ , следовательно как и требовалось мы перейдем в состояние  $(g_H^i(m_{k,i+1}[p]), i + 1)$ .

Теперь пусть среди первых  $i$  цифр были не нули. Тогда до перехода по  $a_{i+1}$  мы находимся в состоянии  $(g_H^{i-1}(m_{k,i}[p_i]), i)$ , где  $p_i$  — число, составленное из последних  $i$  цифр  $p$ . Посмотрим, куда нас приведёт переход по  $a_{i+1}$ . Направление изменится на следующее:

$$g_H^i g_{a_{i+1}} g_H^{2k-1-i} g_H^{i-1}(m_{k,i}[p_i]) = g_H^i g_{a_{i+1}}(m_{k,i}[p_i]).$$

Также заметим, что, в силу построения  $m_{k,i+1}$ , имеет место:  $m_{k,i+1}[p] = g_{a_{i+1}}(m_{k,i})[p_i]$ . Действительно,  $m_{k,i+1}[p]$  находится в «маленьком» кубе  $C_{a_{i+1}+1}$  (обходится с помощью  $g_{a_{i+1}}(m_{k,i})$ ), причем в этом кубе это  $p_i$ -ый ход. Значит, состояние, в которое мы перейдем, будет  $(g_H^i(m_{k,i+1}[p]), i+1)$ , что и требовалось доказать.

□

**Теорема 5.** Пусть на вход автомату  $A_k$  поданы остатки при делении на  $2^k$ :  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , такие, что  $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} — 2^k$ -ичная запись числа  $p$  без незначащих нулей. Тогда в конце автомата окажется в состоянии  $(d, n)$ , где  $d = h_\infty[p]$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $a_n$  не равен 0, поэтому, согласно предыдущей лемме, мы окажемся в состоянии  $(g_H^{n-1}(m_{k,n}[p]), n)$ . В силу построения  $h_n$ , ходы  $h_n$  и  $g_H^{n-1}(m_{k,n})$  с номерами от  $2^{n-1}$  до  $2^n - 1$  одинаковы. Заметим, что  $2^{n-1} \geq p \geq 2^n - 1$ , поэтому  $h_\infty[p] = h_n[p] = g_H^{n-1}(m_{k,n}[p])$ , что нам и требуется. □

Таким образом, после принятия цифр числа  $p$  автомат  $A_k$  окажется в одном из состояний, соответствующих направлению  $p$ -ого хода обхода  $h_\infty$ , то есть в наших руках имеется инструмент для «локального» построения обхода  $\mathbb{Z}^k$ .

**6.2. Частный случай:  $k = 2$ .** Для большей наглядности в этой секции представим обход  $\mathbb{Z}^2$  и автомат, который его строит.

На картинке представлен обход  $h_\infty$ , точнее его часть  $h_4$ . Для  $k = 2$   $g_H$  переводит  $x_1$  в  $-x_1$ ,  $x_2$  в  $-x_2$ , поэтому кубы (точнее квадраты)  $K_i$  растут по одной диагонали в разные стороны. Подобное поведение характерно только для случая  $k = 2$ . В больших размерностях рост кубов более сложно устроен.

Такая простота позволяет немного упростить  $A_2$  без потери его целевого свойства. Для каждого направления достаточно использовать по одному состоянию. Новый автомат можно увидеть на рисунке. Подобное упрощение сложно сделать в больших размерностях, т.к.  $g_H$  и  $g_i$  не всегда коммутируют в группе  $G_k$ . Именно поэтому пришлось для каждого направления ввести по  $2(k - 1)$  состояний.

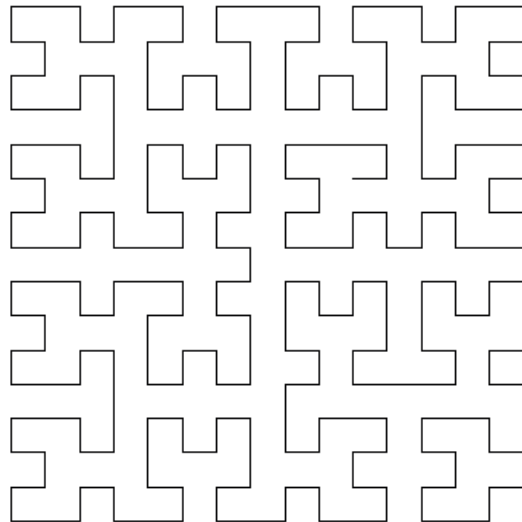
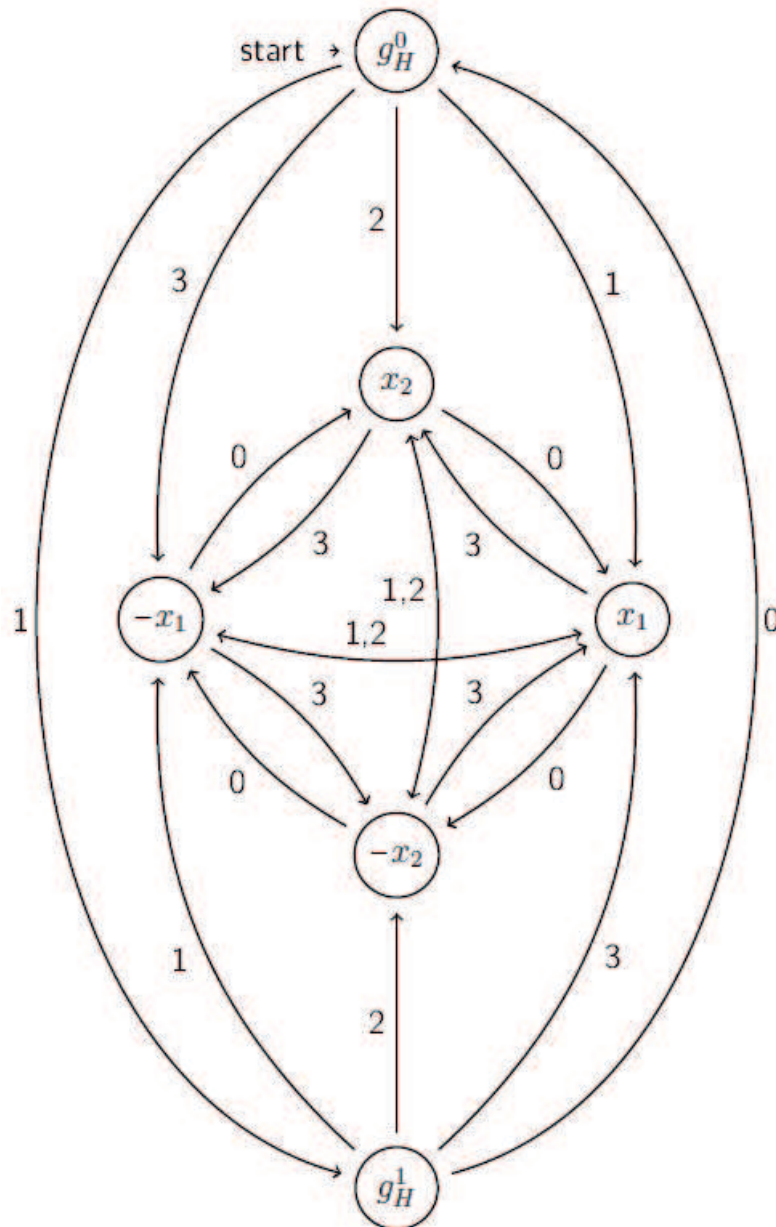


Рис. 5. Путь  $h_4$ . Направление  $x_1$  — влево, направление  $x_2$  — вверх



Рис. 6. Упрощённый автомат  $A_2$ 

## 7. Общий алгоритм полиномиального обхода с 4-мя камнями

Наконец в наших руках имеются все инструменты для описания итогового полиномиального алгоритма обхода  $\mathbb{Z}^k$  роботом, использующим 4 камня. Общая схема обхода такова. Робот на каждой итерации привязан к какой-то текущей клетке. Он держит один камень в этой клетке и ещё один на расстоянии  $n$  от неё в направлении  $x_1$ . С помощью алгоритма получения битов, он получает биты числа  $n$ , агрегирует в блоки по  $k$ , и даёт на вход автомату  $A_k$ . Когда биты заканчиваются, робот определяет, какому направлению соответствует текущее состояние  $A_k$ . По этому направлению он сдвигает дальний камень и текущую клетку вместе с камнями на ней и увеличивает расстояние между камнями на 1. Потом переходит на следующую итерацию. Заметим, что в такой схеме построения текущие клетки будут изменяться в соответствии с обходом  $h_\infty$ .

Количество камней, которые будет использовать робот, — 4: два, которые мы описали — основные, и два вспомогательных для получения битов числа. При этом стоит заметить, что подобный алгоритм может быть реализовать на конечной памяти. Во-первых, в каждый момент

мы храним не больше  $k$  битов числа  $n$ , во-вторых, размер автомата  $A_k$  зависит только от  $k$ , и его можно эмулировать на конечной памяти. Теперь опишем более подробно алгоритм.

**Начальная конфигурация:** робот и 4 камня  $A, B, C, D$  в точке 0

- 1: перенести камень  $B$  в направлении  $x_1$  и вернуться
- 2: **цикл** //  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ,  $a$  — текущая клетка
- 3: инициализировать автомат  $A_k$
- 4: идти в направлении  $x_1$  с камнем  $D$  до камня  $B$  // Начинаем выполнять считывание битов
- 5: вернуться в клетку  $a$
- 6: **цикл** //  $i$ -ая итерация,  $C$  в клетке  $a$ ,  $D$  в клетке на расстоянии  $\lfloor n/2^{i-1} \rfloor$  от  $a$
- 7: выполнить деление для камней  $C$  и  $D$
- 8: записать остаток при делении на 2 (бит) в память
- 9: **если**  $i$  делится на  $k$  **то**
- 10: агрегировать последние  $k$  полученных битов в блок (остаток при делении на  $2^k$ ) и передать автомату  $A^k$
- 11: **если**  $C$  и  $D$  находятся в клетке  $a$  **то**
- 12: **выход из цикла**
- 13: **иначе**
- 14: перенести  $C$  в клетку  $a$
- 15: **если** остались необработанные биты **то**
- 16: дописать нулевые биты в блок и передать автомату  $A^k$
- 17: получить из автомата  $A_k$  направление  $d$
- 18: дойти до  $B$ , сдвинуть в направлении  $d$  и в направлении  $x_1$  // для увеличения  $n$
- 19: вернуться в  $a$  и сдвинуть все камни в направлении  $d$

Посчитаем время, которое роботу понадобится, чтобы посетить клетку  $a$ , у которой  $p$  — модуль максимальной координаты. Для этого выясним, когда клетка  $a$  станет текущей для какой-то итерации алгоритма (в этом случае робот её точно посетит).

**Теорема 6.** Пусть  $a$  — клетка, у которой  $p$  — модуль максимальной координаты, тогда для того, чтобы она стала текущей клеткой алгоритма, потребуется  $T(p) = O(p^{3k})$  ходов алгоритма.

**Доказательство.** Пусть  $a$  — текущая клетка  $n$ -ой итерации. Будем считать, что на  $i$ -ую итерацию тратится не больше  $ci^2$  ходов, где  $c$  — константа (действительно, самое трудоёмкое действие это получение битов числа  $i$ , а оно квадратично по времени). Тогда всего количество ходов алгоритма за первые  $n$  итераций не больше чем

$$\sum_{i=1}^n ci^2 = \frac{c}{6}n(n+1)(2n+1) \leq c'n^3,$$

где  $c'$  — другая константа.

Из теоремы об асимптотике пути  $h_\infty$  известно, что  $n(p) = O(p^k)$ . Тогда получается следующая ситуация:  $T(p) \leq c'n(p)^3 = O(p^{3k})$ , что нам и требовалось.  $\square$

В итоге получаем, что в результате работы алгоритма каждая клетка  $\mathbb{Z}^k$  будет посещена, при этом в время, которое для этого потребуется, будет полиномиально от координат точки.

## 8. Нижние оценки для оптимального числа камней

Наравне с задачей нахождения алгоритма, использующего минимальное количество камней, всегда существует задача доказательства того, что меньшим количеством камней нельзя обойтись. Для задачи простого обхода  $\mathbb{Z}^k$  нижние и верхние оценки количества камней совпадают. Однако если мы будем рассматривать задачу полиномиального обхода, ситуация не такая

радужная. Для  $k > 3$  нижние и верхние оценки имеют зазор в один камень: нижняя оценка говорит, что 2-х камней недостаточно, а верхняя, что существует обход с 4-каменьями. При этом сокращение этого расстояния представляется довольно трудоёмкой задачей, поскольку, с одной стороны, доказательство, что 3-мя камнями нельзя обойтись, должно пользоваться полиномиальностью обхода (поскольку экспоненциальные обходы  $\mathbb{Z}^k$  существуют). С другой стороны, придумать полиномиальный обход с 3-мя камнями тоже не просто.

В этой секции будут приведены доказательства существующих нижних оценок. В частности, будет показано, что одного камня недостаточно для обхода любого  $\mathbb{Z}^k$  и, то что 2-х камней недостаточно для обхода  $\mathbb{Z}^k$ ,  $k > 1$ .

**Теорема 7.** *Одного камня недостаточно для обхода  $\mathbb{Z}^k$ .*

**Доказательство.**

Примерная схема доказательства такова. Пусть количество различных состояний робота равно  $s$ . Допустим, что робот смог прийти в клетку  $d$  на расстоянии много большем  $s$  от камня (расстояние будем считать в  $L_1$ -метрике). Рассмотрим, какие состояния принимал робот от последнего касания до прихода в эту клетку. Эти состояния выглядели так: сначала  $r \leq s$  каких-то состояний, потом состояния начинают повторяться с периодичностью  $T \leq s$ . Тогда относительное расположение робота в момент времени  $r+iT+c$ ,  $c < T$  можно выразить вектором  $a(c) + i\bar{b}$  (где длина  $a(c)$  не больше  $2s$  для любого  $c < T$ , и длина  $\bar{b}$  не больше  $s$  и не нулевая). Тогда, начиная с какого-то  $i$ , этот вектор никогда не станет равным 0, следовательно робот не вернётся в камень, а так же на никогда не посетит клетки  $-i\bar{b}$  для какого-то большого  $i$ . Следовательно, робот всегда вынужден находится рядом с камнем.

Пусть  $F$  — множество всех возможных относительных конфигураций робот-камень. Как мы только что показали, оно должно быть конечно. Пусть  $f_n$  — конфигурация в момент  $n$ ,  $q_n$  — состояние робота в момент  $n$ . Заметим, что, начиная с какого-то момента, пары  $(f_n, q_n)$  зациклятся (так как множество  $F \times Q$  конечно и каждая пара однозначно определяет следующую). Пусть за один цикл камень сдвинется на вектор  $\bar{a}$ , тогда если  $\bar{a} = 0$ , то очевидно, что камень не сдвинется далеко от начального положения, а следовательно, робот не сможет посетить все клетки. Если  $\bar{a} \neq 0$ , то очевидно, что робот не сможет посетить клетки  $-i\bar{a}$  для достаточно больших  $i$ .

□

**Теорема 8.** *Двух камней недостаточно для обхода  $\mathbb{Z}^k$ ,  $k > 1$ .*

**Доказательство.** Примерная схема доказательства такова. Пусть существует такая константа  $s$ , что существует бесконечно много моментов времени, когда камни находятся на расстоянии меньше  $s$ . Тогда какая-то взаимная конфигурация камней, робота и его состояния случается хотя бы два раза. Следовательно, подобные конфигурации зацикливаются. Аналогично доказательству для одного камня, можно показать, что за такой цикл оба камня сдвигаются на какой-то вектор, а значит робот не обойдёт далёкие клетки пространства, в противоположном этому вектору направлении.

Пусть для любой константы  $s$  существует такой момент, начиная с которого, камни всегда на расстоянии, большем  $s$ . Будем рассматривать поведение робота, начиная с такого момента, для константы  $s$ , много большей  $s$  ( $s$  количество состояний робота). Поведение робота можно описать следующим образом: робот как-то взаимодействует с первым камнем, потом переходит ко второму камню, взаимодействует с ним, переходит обратно к первому и так далее. Назовём один такой цикл итерацией. Пусть робот последний раз касается первого камня в состоянии  $q_1$ , потом идёт к камню 2 и первый раз касается его в состоянии  $q_2$ . Заметим, что после того как робот последний раз коснулся первого камня, не более чем через  $s$  ходов состояния начнут изменяться циклически, причём длина цикла не больше  $s$ . Тогда вектор между камнями можно записать так:

$$\bar{v} = \overline{r(q_1)} + i\overline{a(q_1)} + \overline{p(q_2)}$$

где  $\overline{r(q_1)}$  — вектор, который проходимся до начала цикла,  $\overline{a(q_1)}$  — вектор, проходимый за цикл,  $\overline{p(q_2)}$  — вектор, отвечающий за фазу при приходе во второй камень. Длины  $\overline{r(q_1)}$ ,  $\overline{p(q_2)}$  и  $\overline{a(q_1)}$  не больше  $s$ ,  $i > 0$  так как длина  $\overline{v}$  много больше  $s$ . Пусть  $f(\overline{x})$  — это вектор, где все координаты  $\overline{x}$  взяты по модулю  $s!$ . Заметим, что по  $q_1$  и  $f(\overline{v})$  можно однозначно определить состояние  $q_2$ , поскольку координаты вектора  $\overline{a(q_1)}$  не превосходят  $s$  по модулю. Таким образом, по  $q_1$  и  $f(\overline{v})$  можно определить  $q_2$ , по  $q_2$  можно однозначно определить, как робот будет взаимодействовать со вторым камнем, значит, можно однозначно определить состояние робота  $q_3$  при последнем касании со вторым камнем, и вектор  $f(\overline{u})$ , где  $\overline{u}$  — вектор между камнями в этот момент. По этому вектору и  $q_3$ , аналогично, можно однозначно определить  $q_4$  — состояние при первом касании первого камня. По вектору  $f(\overline{u})$  и состоянию  $q_4$  однозначно определяются новые состояние  $q_1$  и вектор  $f(\overline{v})$ . Таким образом, по состоянию  $q_1$  и вектору  $f(\overline{v})$  какой-либо итерации, можно определить эти же состояние и вектор для следующей итерации. Так как состояний и подобных векторов конечное число, в какой-то момент они заиклятся. Это будет означать, что заиклятся состояния  $q_2$  и  $q_4$ , а следовательно, заиклятся сдвиги обоих камней. Пусть за такой цикл один камень сдвигается на вектор  $\overline{g}$ , другой — на вектор  $\overline{h}$ . Тогда если векторы коллинеарны, то пусть  $\overline{w}$  перпендикулярен им, тогда робот никогда не посетит клетку с координатами  $i\overline{w}$ , где  $i$  достаточно большое. Иначе робот не посетит клетку с координатами  $-i(\overline{g} + \overline{h})$ , где  $i$  достаточно большое.

□

Таким образом, мы получаем требуемые оценки. Заметим, что в обоих доказательствах мы действовали следующим образом: брали некоторую характеристику состояния процесса, и показывали, что эта характеристика заикливается. Например, можно заметить, что в случае двух камней существует такое число, что координаты камней по этому модулю цикличны. Если мы посмотрим на систему с тремя камнями, подобную цикличность вряд ли можно будет обнаружить, так как уже в простых алгоритмах (например, обход плоскости) подобной цикличности не наблюдается. Тем не менее, у последовательности для конкретной характеристики состояния можно смотреть не только на её цикличность или ацикличность, но и на другие свойства, например, информационные. Возможно, поиск и рассмотрение других свойств подобных последовательностей является ключом к доказательству невозможности обхода за полиномиальное время с тремя камнями.

## 9. Заключение

По результатам работы нами получено существенное уменьшение количества требуемых камней для полиномиального обхода по  $\mathbb{Z}^k$  сравнению в базовыми алгоритмами: 4 против  $k$ . Также стоит отметить, что представленный нами алгоритм не сильно медленнее алгоритмов использующих  $k$  камней:  $\mathcal{O}(x^{3k})$  против  $\mathcal{O}(x^k)$ . В рассматриваемой задаче остаётся некоторый зазор между верхней и нижней оценкой в один камень. Разрешение данного вопроса пока видится сложной задачей, так либо требуется привести, по-видимому, довольно нетривиальный алгоритм, работающий с тремя камнями, либо доказательство невозможности обхода с 3 камнями, возможно, требующее довольно серьёзной техники.

## Литература

- [1] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Ведение в теорию автоматов. - М.: Наука, 1985. - 320 с.
- [2] Budach L. Automata and labyrinths // Mathematische Nachrichten. - 1978.
- [3] <http://www.turgor.ru/lktg/2004/avtom.ru/ru.ps>
- [4] [http://en.wikipedia.org/wiki/Counter\\_machine](http://en.wikipedia.org/wiki/Counter_machine)

- [5] Gray F. Pulse code communication / U.S. Patent 2,632,058, 1953
- [6] Hilbert D. Uber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück // Mathematische Annalen. - 1891.
- [7] Peano G. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane // Mathematische Annalen. - 1890.
- [8] Butz A.R. Convergence with Hilbert's space-filling curve // Journal of Computer and System Sciences. - 1969.

*Гусев Даниил Владимирович,  
аспирант кафедры дискретной  
математики МФТИ.*

*E-mail: GusDzerzhi@yandex.ru*

## Педагогическое наследие профессора Е. С. Березанской и современное начальное образование

*С. В. Жаров*

**Аннотация.** Имя Елизаветы Савельевны Березанской было широко известно учителям математики в середине прошлого столетия, т.к. не одно поколение школьников училось по ее книге “Сборник задач и упражнений по арифметике”, которая в течение 20 лет была утверждена стабильным учебным пособием. Многочисленные статьи в педагогической печати стали отражением ее “Методики арифметики”. В 2015 году ей исполнилось 125 лет со дня рождения. В связи с этим уместно вспомнить ее научно-методический вклад в преподавание математики, которому она отдала свыше 55 лет, из которых более 20 лет — в Московском педагогическом институте (ныне МПГУ).

**Ключевые слова:** арифметика, методика преподавания математики, начальное образование, практические задачи, творческие задачи

Имя Елизаветы Савельевны Березанской было широко известно учителям математики в середине прошлого столетия, так как не одно поколение школьников училось по ее задачнику арифметики. В 2015 году ей исполнилось 125 лет со дня рождения. В связи с этим уместно вспомнить ее научно-методический вклад в преподавание математики, которому она отдала свыше 55 лет, из которых более 20 лет — в Московском педагогическом институте (ныне МПГУ).

Родилась Е. С. Березанская 9 января 1890 года, окончила физико-математическое отделение Высших женских (Бестужевских) курсов в Петербурге (1914). Вся ее деятельность была связана с проблемами школьного преподавания математики. В 1933 году выходит в свет “Сборник задач и упражнений по арифметике” [1], который выдержал 20 изданий, был принят в качестве стабильного учебного пособия по арифметике и оказал существенное влияние на повышение математической культуры учащихся. Наряду с работой в школе Е. С. Березанская проводила громадную работу по подготовке будущих учителей математики. Она являлась одним из авторов программы курса методики преподавания математики для педагогических вузов.

С 1933 по 1940 годы Березанская Е.С. возглавляла кабинет математики Института политехнического образования, проводила большую организаторскую и методическую работу, выступала на различных съездах, конференциях, семинарах. В 1938 г. она стала кандидатом педагогических наук, с 1932 г. Е. С. Березанская — доцент, а затем профессор двух ведущих московских педвузов. Многочисленные статьи в педагогической печати стали отражением ее “Методики арифметики” [2], изданной в 1934 году и выдержавшей 5 изданий. Обе книги по арифметике были переведены на многие иностранные языки.

Упомянутые учебные пособия по арифметике по некоторым направлениям не потеряли своей актуальности и в настоящее время. Обратимся к новым ФГОС по начальному образованию [5]. В разделе “12.2 Математика и информатика” читаем: предметные результаты освоения основной образовательной программы начального общего образования с учетом специфики содержания предметных областей, должны отражать:

- “овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи, измерения, пересчета, прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов;

- умение выполнять *устно и письменно арифметические действия с числами и числовыми выражениями, решать текстовые задачи*, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, *распознавать и изображать геометрические фигуры*, работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные”.

В новых стандартах по среднему образованию (5-9 классы) [7] уже нет арифметики, как таковой, но заметим, что в разделе 9.3 “Математика и информатика” выделено, что “предметные результаты изучения предметной области “Математика и информатика” должны отражать развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений” [7].

Выделенные курсивом фрагменты широко отражены в пособиях Е. С. Березанской. В “Методике арифметики” говорится: “Преподавание арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять знания к решению задач и выполнению простейших расчетов практического характера”. Необходимо отметить, что большой раздел методики арифметики С. Е. Березанской связан с практическими задачами, непосредственными измерениями на местности и соответствующей геометрической подготовкой, что отсутствует в современном преподавании математики в начальной школе. В пособии приведено множество практических заданий для каждого класса начальной школы, при этом отдельное место занимают экскурсии, которые логично отражают межпредметные связи с другими дисциплинами. Вполне естественно, что учащиеся не будут знакомиться со счетами или арифмометром, но, к примеру, вычисление количества обоев для оклейки стен или плитки на пол с определенными размерами вполне можно включать в практическую часть арифметики начальной школы. По сути дела это есть лабораторный метод изучения математики, который также был отражен в работах С. И. Шохор-Троцкого [5] и Ф. И. Егорова [4]. Нет сомнения, что связь теории с практикой значительно повышает интерес к изучению математики.

Рассмотрим некоторые основные разделы сборника задач по арифметики, который в течение 20 лет был утвержденным официальным учебным пособием для средних школ. Прежде всего, обращается внимание на устную и письменную нумерацию, т.е. сразу отрабатывается правильное чтение чисел, которое имеет большое значение при решении задач теории чисел. Представляют интерес задачи на изменение суммы и разности при различных изменениях конкретных данных. Приведем ряд таких задач в современной редакции [1].

1. Одно слагаемое увеличено на 70. Что надо сделать с другим слагаемым, чтобы сумма увеличилась на 90? На 38? уменьшилась на 29? Осталась без изменения?
2. Что сделается с суммой чисел 4229, 3695 и 10356, если к первому прибавить 1265, ко второму - 835, а от третьего вычесть 1525?
3. В четырех вагонах было 3758 кг груза. На одной из станций в первый вагон погрузили еще 258 кг, из второго перегрузили в третий 156 кг, а из четвертого выгрузили 315 кг. Каким по весу стал груз во всех четырех вагонах?
4. Пассажирский поезд на первой станции от Москвы выпускает 112 пассажиров и берет 39 новых, на второй - берет 45 и выпускает 76, на третьей - берет 108 и выпускает 67, после этого в поезде остается 578 пассажиров. Сколько их было при отъезде из Москвы?
5. Вычитаемое уменьшено на 41. Что надо сделать с уменьшаемым, чтобы разность не изменилась?
6. Уменьшаемое увеличено на 37. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы разность не изменилась?
7. Что сделается с разностью, если от уменьшаемого отнять 42, а от вычитаемого — 18? к уменьшаемому прибавить 88, а от вычитаемого вычесть 112? к уменьшаемому прибавить 532, а к вычитаемому — 149?
8. При сложении нескольких чисел пропущена в разряде десятков цифра 5, а в разряде единиц

цифра 0 принята за 9, в разряде тысяч цифра 7 принята за 4. Тогда в сумме получается 33212. Какова истинная сумма?

9. Разность чисел равна 14583, большее равно 20230. Найти меньшее число.

10. Большее из двух чисел есть 5182, а разность их равна 1567. Найти сумму чисел.

11. К числу 385 прибавили 257. Сколько надо вычесть, чтобы в остатке снова получить 385?

12. При сложении на классной доске были стерты некоторые цифры, вследствие этого на доске осталось следующее:

$$\begin{array}{rcl} \text{а)} & 36 * 8 & \text{б)} \quad 56 * 7 \\ + & 274* & + \quad 9341 \\ & 3 * 20 & * * 32 \\ \hline & *143 & 1518* \end{array}$$

Восстановить стерты цифры.

13. Прямоугольное поле имеет в длину 2770 м, а ширина его на 584 м меньше длины. Найти периметр поля.

14. Продукция завода за первый месяц равнялась 700150 руб., за второй месяц продукция уменьшилась на 49509 руб., а за третий месяц увеличилась на 37206 руб. по сравнению с первым месяцем. Определить продукцию за 3 месяца.

Все задачи заставляют ученика понять смысл арифметического действия, без всяких переменных величин сформулировать правило нахождения неизвестного числа при сложении, вычитании, умножении или делении.

Достаточно красивые задачи были сформулированы в сборнике задач С. Е. Березанской на время, т.е. определение количества лет, месяцев и дней от данной даты или нахождение времени в пути по отъезду и прибытию. Вот несколько таких задач.

1. Какое число, месяц и год наступили, когда от начала нашей эры прошло 1) 1345 лет + 7 месяцев + 18 дней? 2) 1708 лет + 2 месяца + 21 день?

2. Путешественник выехал из Москвы 16 февраля 2000 года, а возвратился туда через 5 лет, 7 месяцев и 16 дней. В каком году, в каком месяце и какого числа он возвратился?

3. Солнце восходит 10 июня в Санкт-Петербурге в 2 часа 36 минут, а заходит в 9 час 27 мин пополудни. Сколько часов и минут продолжается день?

4. Мировая война началась 1 августа 1914 года, а Версальский мир был заключен 28 июня 1919 года. Сколько лет и месяцев длилась первая мировая война?

Если рассматривать чисто арифметические примеры, то нередко ученики путаются в выборе действий, а практическая направленность или четкое повторение правила во многом помогает найти правильный результат. Много раз приходилось давать студентам и ученикам знаменитую задачу “разделить полтину на половину” и получать неверный ответ 25, но это уже выходит за пределы начальной школы.

Выше уже упоминалась практическая направленность сборника задач С. Е. Березанской. Представляет интерес привести еще несколько интересных примеров таких задач.

1. Погонный метр рельсов весит 30 кг. Определить вес рельсов, уложенных на протяжении 65 км железнодорожного пути.

2. Железнодорожный костыль для прибивки рельсов к шпалам весит 105 г. Сколько килограммов весят 3000 костылей?

3. Ведущее колесо паровоза имеет окружность длиной в 4710 мм и делает 3 оборота в секунду. Определить скорость паровоза.

4. Определить объем деревянного бруса, поперечное сечение которого представляет собой квадрат со стороной 75 мм, а длина равна 4 м.



5. Нужно было выкачать воду. Для этого поставили 5 больших насосов и 3 малых. Большой насос выкачивал в час 125 ведер, а малый — 90 ведер. Через 5 часов вся вода была выкачана. Сколько было ведер воды было в начале?

6. Ученику задано было увеличить 378 в 17 раз, а он увеличил на 17. На сколько полученный результат меньше истинного?

Подобных задач в сборнике можно найти не одну сотню. Самое главное — сделать преподавание арифметики наиболее “живым” с привлечением большого количества житейских примеров из окружающей жизни. Каждый раздел сборника содержит очень большое количество задач с практическим содержанием. За более чем 50-летнюю историю некоторые задачи С. Е. Березанской потеряли смысл, но в сборнике сохранилось изящество и занимательность, которыми не особо отличаются современные задачки.

Для сравнения задачного материала в качестве примера современных учебных пособий рассмотрим пособия (в двух частях) для 4-го класса системы “Перспектива” авторов Г. В. Дорофеева, Т. Н. Мираковой, Т. Б. Бука [3]. На наш взгляд, эти учебники удачно согласуют чисто арифметические примеры с текстами задач различной направленности. В первой части находится раздел “Приемы рациональных вычислений” для чисел от 100 до 1000, а за ним идет рассмотрение арифметики чисел свыше 1000. Заметим, что в примерах и задачах отсутствуют буквенные выражения, т.е. практически идет изучение чисто арифметического материала. В добавление к основному материалу уроков последние задания относятся к повышенной сложности и развитию сообразительности учащихся. Приведем некоторые примеры задач, которые без сомнения являются развитием идей Е. С. Березанской, изложенных в сборнике задач по арифметике, но их количество явно меньше того, что есть в знаменитой книге.

1. Для 8 коров требуется 96 кг сена, всем поровну. Сколько килограммов сена потребуется для 4 коров при той же норме расходов сена?

2. Из двух городов навстречу друг другу выехали два автомобиля. Когда один из них проехал 96 км, а другой — на 47 км больше, между ними оставалось еще 58 км. На каком расстоянии один от другого находятся города, из которых выехали автомобили?

3. Две одинаковые бочки заполнены водой. Когда из них взяли 16 ведер воды, по 9 л в каждом, в первой бочке осталось 34 ведер воды, а во второй — 20 ведер. Сколько литров воды взяли из каждой бочки?

4. У дома высотой 22 м посадили эвкалипт. Длина саженца 2 м. Через сколько лет этот эвкалипт будет выше дома на 40 м, если в год он вырастает на 5 м?

5. В цехе по пошиву спецодежды из 56 м ткани сшили 14 одинаковых комбинезонов. Сколько таких комбинезонов можно сшить из 160 м ткани?

6. Периметр прямоугольника 152 см. Его ширина равна 16 см. Найти площадь прямоугольника.

7. Из Москвы в Киев поезд шел со скоростью 54 км/ч. Через 7 часов ему оставалось пройти еще 479 км. Найти расстояние между Москвой и Киевом [3].

Кроме обязательного материала, в учебных пособиях Г. В. Дорофеева имеются интересные задачи повышенной сложности. Некоторые примеры могут вызвать затруднения не только у малышей, но и у взрослых людей.

1. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 257, 659, 289 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое это число?

2. Может ли быть в одном месяце 5 воскресений?

3. К задуманному числу приписали цифру 8, и оно увеличилось в 14 раз. Какое число задумано?

4. В гостиницу приехали 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 туристов знали немецкий и 83 туриста знали французский. Сколько туристов знали оба языка: французский и немецкий?

5. Сумма трех последовательных чисел равна 105. Найти эти числа.

6. Сколько различных нечетных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 3, 6, 9? (Цифры в записи могут повторяться.) [3]

Среди трудных задач имеются логические задачи и разнообразные ребусы, что повышает заинтересованность к изучению арифметики. Содержание и структура учебника направлены на достижение предметных и метапредметных результатов, а также соответствуют новым стандартам. Если проводить историческую линию, то задачник Е. С. Березанской во многом является исходным материалом для современных пособий.

Всего Елизаветой Савельевной Березанской было написано 16 учебников по различным разделам школьного курса математики. На протяжении многих лет Елизавета Савельевна стремилась внедрить в школьную практику устные упражнения на уроках математики, видя в этом одно из эффективных средств поднятия качества обучения, повышения интереса к математике и развития математического мышления учащихся. Известно, что в соавторстве со своими коллегами она создала несколько задачников для устных упражнений по различным разделам школьного курса математики.

### Библиографический список

1. Березанская Е.С. Сборник задач и упражнений для средней школы. - М.: ОГИЗ, 1933. - 112 с.
2. Березанская Е.С. Методика арифметики для учителей средней школы. - М.: Учпедгиз, 1955. - 544 с.
3. Дорофеев Г.В., Миракова Т.Н., Бука Т.Б. Математика. Учебное пособие (в двух частях). - М.: Просвещение, 2014.
4. Егоров Ф.И. Методика арифметики, 7-е издание, под ред Д. Ф. Егорова. - Москва, 1917. - 453 с.
5. Шохор-Троцкий С.И. Методика арифметики. - М.: Учпедгиз, 1935. - 344 с.
6. ФГОС начального общего образования: Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 г., № 373. - 41 с.
7. ФГОС среднего (полного) общего образования: Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 г. № 373, в редакции приказов от 26 ноября 2010 г. № 1241, от 22 сентября 2011 г. № 2357.

*Жаров Сергей Викторович,  
доцент Ярославского  
государственного педагогического  
университета им. К. Д. Ушинского,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: szharv@rambler.ru*

## К изучению основ теории множеств на математическом кружке средней школы

А. А. Привалов

В статье рассказано о курсе, который знакомит школьников с элементами теории множеств и математической логики. Описана компьютерная программа, помогающая учащимся в освоении курса, в частности, в решении ряда типовых задач. Приведен пример задачи исследовательского характера с подробным решением. Показано, как знание элементов математической логики и теории множеств способствует критическому отношению к математическим моделям реальности.

Элементы теории множеств и математической логики помогают решать различные математические задачи, поэтому требуют более серьезного отношения. Такие понятия как высказывания и основные операции над ними вполне посильны учащимся, а главное полезны. Учащиеся легко строят таблицы истинности для операций: отрицание ( $\neg$ ), конъюнкция ( $\&$  или  $\wedge$ ), дизъюнкция ( $\vee$ ), строгая дизъюнкция ( $\dot{\vee}$ ), импликация ( $\Rightarrow$ ) и т.п., см. Таблицу 1.

Таблица 1

$A$	$B$	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1

Здесь, в первых двух столбцах таблицы записывают все возможные наборы значений, которые могут принимать высказывания  $A$  и  $B$ . Истинность высказывания обозначают — «1», а ложность — «0». Остальные столбцы заполняют слева направо. Так, для каждого набора значений  $A$  и  $B$  находят соответствующее значение высказываний, доказывают различные тождества. Например, легко видеть, что  $(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B)$ . Конечно, все это должно поясняться соответствующими примерами. В [1, стр. 421–464] приведены замечательные примеры, помогающие лучше понимать эти операции и строить таблицы истинности.

При знакомстве с теорией множеств, следует разделять и закрепить следующие обозначения:

1) Если  $x$  является элементом множества  $A$ , то пишут  $x \in A$  и говорят, что  $x$  *принадлежит*  $A$ . Если  $x$  не принадлежит  $A$ , то пишут  $x \notin A$ .

2) Если каждый элемент множества  $A$  является также элементом множества  $B$ , то пишут  $A \subset B$  или  $B \supset A$  и говорят, что множество  $A$  является *подмножеством* множества  $B$ . В этом случае говорят также, что  $A$  содержится в  $B$  или что  $B$  содержит  $A$ .

Заметим, что  $(x \in A)$  и  $(A \subset B)$  являются высказываниями. Высказывание  $(A \subseteq B)$  есть высказывание, являющееся дизъюнкцией высказываний  $(A \subset B)$  и  $(A = B)$ , т.е.  $(A \subseteq B) = (A \subset B) \vee (A = B)$ .

Здесь и далее будем рассматривать некоторые множества, которые будем обозначать как  $U$  или  $\Omega$ , и их подмножества  $A, B, C$  и т.д. Множество  $U$  (или  $\Omega$ ) будем называть *универсальным* или *универсумом* и считать, что всегда  $x \in U$ .

Пользуясь операциями математической логики, введем некоторые обозначения и определения операций над множествами:

1) Операция объединения ( $\cup$ ):  $A \cup B = \{x: (x \in A) \vee (x \in B)\}$ ;

2) Операция пересечения ( $\cap$ ):  $A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ ;

- 3) Операция дополнения ( $^c$ ):  $A^c = \{x: (x \in \Omega) \wedge (x \notin A)\}$ ;
- 4) Операция разности ( $\setminus$ ):  $A \setminus B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap B^c$ ;
- 5) Операция симметрической разности ( $\Delta$ ):  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ;
- 6) Пустое множество ( $\emptyset$ ):  $\emptyset = A \cap A^c = \Omega^c$ .

Пустое множество  $\emptyset$  вводится для удобства, по определению оно не содержит элементов и содержится в любом множестве. В нашем случае  $\emptyset$  не содержит элементов  $\Omega$  (такой подход бывает полезен при решении задач по теории вероятностей, когда приходится иметь дело с невозможным и достоверным событиями). Здесь полезно предложить учащимся доказать, что  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$  (для доказательства надо заметить, что  $\{\emptyset\}$  имеет один элемент  $\emptyset$ , а  $\emptyset$  не имеет элементов).

Введенные операции над множествами обладают многими свойствами. В [2, стр. 8–13] имеется более 28 тождеств и задач по этой теме. Конечно, не все задачи под силу среднему ученику 9–11 класса, но посильные для любого ученика задачи могут быть выбраны учителем.

Автор поставил цель научить учащихся выражать заданное множество через другие заданные, решать уравнения и системы уравнений с неизвестным множеством, увлечь научно-исследовательской деятельностью. Для чего была создана компьютерная программа, ознакомиться с которой можно по адресу

<http://1303mshf.ru/index.php/matematika>

(в открывшемся окне нажмите кнопку “перейдите по ссылке”). Программа имеет два окна. Первое окно — тренажер. Здесь по введенному номеру варианта (может быть любым числом) с помощью датчика псевдослучайных чисел моделируются задачи. Задачи делятся на два типа. К первому типу относятся задачи, в которых требуется решить уравнение или систему уравнений относительно неизвестного множества  $X$ . Всего задач этого типа 12, имеется 4 уровня сложности по 3 задачи в каждом. На рис. 1 представлен пример задачи 2-го уровня сложности



Балл за решенную задачу определяется формулой:

$$\text{балл} = \frac{\text{длина ответа программы}}{\text{длина ответа ученика}} \cdot \frac{\text{уровень сложности}}{k}, \quad (1)$$

где  $k = k(p)$  — коэффициент, зависящий от числа попыток  $p$ :

$$k(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p \leq 3 \\ 1 + 0,25 \cdot (p - 3), & \text{если } p > 3 \end{cases}$$

Из рис. 1 следует, что ученик решил задачу 2-го уровня сложности, множества  $B$  и  $C$  выделены (закрашены), поэтому делал более двух попыток. Отсюда, набранный им балл будет не более  $\frac{10}{7} \cdot \frac{2}{1,25} = \frac{16}{7} = 2,2857 \dots$ . Если бы он делал менее трех попыток, то балл будет равен  $\frac{20}{7}$ , в этом случае он должен представить учителю, например, такое решение

$$1) B^c = X \cup A, B^c \setminus A = (X \cup A) \cap A^c = X \cap A^c. 2) C^c = X \cap A.$$

Отсюда

$$(B^c \setminus A) \cup C^c = (X \cap A^c) \cup (X \cap A) = X \cap (A^c \cup A) = X.$$

Формула (1) найдена эмпирически при работе с учениками 9–11 классов лицея № 1303 г. Москвы. Необходимое число баллов для зачета по этому типу равно 30, из следующего расчета:  $3(1 + 2 + 3 + 4) = 30$ . Такое количество набирает средний ученик за один урок. Не каждому ученику удастся решить все 12 задач, но набрать более 30 баллов удастся почти всем. Это объясняется тем, что программа решает задачу, пользуясь только тремя операциями (дополнение, пересечение и объединение), а в распоряжении ученика имеются еще разность и симметрическая разность, поэтому длина ответа ученика практически всегда меньше ответа, полученного программой.

Отметим, что вместо обычных для таких задач кругов Эйлера–Венна [5] здесь рисуются квадраты. Это вызвано тем, что в младших классах (5–7) детям удобнее вырезать из бумаги прямоугольные области, чем составленные из частей кругов. Несложно придумать игровую задачу с вырезанием таких областей. Кроме того, по мнению автора, книгу [5] следует рекомендовать для самостоятельного чтения с последующими докладами учащихся, т.к. она имеет как математическую, так и историческую ценность.

Задач второго типа девять, они разделены на три уровня сложности (по три задачи в каждом). В этих задачах требуется выразить заданное множество через другие, тоже заданные. На рис. 2 представлен пример задачи 2-го уровня сложности.

**Задачи**

Зная множество  $\Omega = \{\omega, \mathbb{M}, \mathbb{P}, \odot, \dagger, \mathbb{Q}\}$  и его подмножества:  
 $A = \{\dagger, \odot, \mathbb{M}, \omega\}$ ,  $B = \{\dagger, \mathbb{P}, \mathbb{M}\}$ ,  $C = \{\mathbb{Q}, \odot, \mathbb{P}, \mathbb{M}\}$  и  $D = \{\dagger, \odot, \mathbb{P}, \omega\}$ ,  
 выразите  $D$  через  $A, B, C$ .

$D = B \cap A^c \cup (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$

Ответ задачи 5 засчитан  $\odot$ . Ответ программы:  
 $D = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \cup (B \cap A^c)$ .

Множество C Операция \* ( ) Is Все Результаты и др.

Рис. 2

Баллы за решенные задачи находятся по формуле (1). В частности балл, набранный учеником за эту задачу, будет не более  $\frac{20}{18} \cdot \frac{2}{1} = 2$ , (2). Необходимое число баллов для зачета по этому типу равно 18, из расчета:  $3(1 + 2 + 3) = 18$ . Эти задачи на внимательность и, после недолгой тренировки, решаются всеми учениками менее, чем за один урок.

Перейдем теперь к теоретической части, а именно к конечным множествам. Пусть множество  $U = \{a_1, \dots, a_n\}$  состоит из  $n$  элементов ( $|U| = n$ ). Каждому подмножеству  $A \subset U$  поставим в соответствие строку длины  $n$ , состоящую из нулей и единиц, на  $k$ -м месте которой находится 1, если  $a_k \in A$  и 0 — в противном случае. Множеству  $U$  соответствует строка, состоящая из единиц. Такими строками или столбцами будем обозначать подмножества  $A \subset U$  и само  $U$ . Например,  $A = (101100)$  — подмножество 6-ти элементного множества  $U = (111111)$ , состоящее из элементов

$a_1, a_3$  и  $a_4$  множества  $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ . Множество всех подмножеств  $U$  обозначается  $2^U$  и число его элементов равно  $2^{|U|}$  (что следует из основного правила комбинаторики).

В рассмотренном выше примере (рис. 1) множество  $\Omega$  состоит из четырех элементов — непересекающихся прямоугольных областей: 1, 2, 3 и 4:

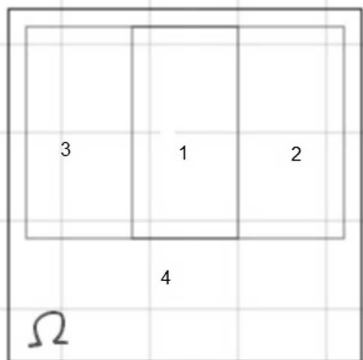


Рис. 3.

В принятых выше обозначениях, эта задача формулируется так: выразить множество  $X = (1100)$  через множества  $A = (1010)$ ,  $B = (0001)$  и  $C = (0111)$ , пользуясь операциями над множествами. В терминах обозначений математической логики, введем и обозначим высказывания:  $A = (x \in A)$ ,  $B = (x \in B)$ ,  $C = (x \in C)$  и  $X = (x \in X)$ . Тогда задача примет вид: выразить булеву переменную  $X$  через булеву переменную  $A$  и булевы функции  $B = \neg A \wedge \neg X$  и  $C = \neg A \wedge \neg X$ . Построим таблицу истинности, см. Таблицу 2.

Таблица 2

$A$	$B$	$C$	$X$	$\neg C$	$\neg B \wedge \neg A$	$\neg C \vee (\neg B \wedge \neg A)$
1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0

Таким образом, получаем:  $X = \neg C \vee (\neg B \wedge \neg A)$ .

Возвращаясь к множествам, заметим, что множество  $X$  невозможно выразить через какие-либо два подмножества из  $A, B$  и  $C$ . Но через  $A$  и  $X$  выражается любое подмножество  $U$ . В связи с этим наблюдением введем следующие определения.

*Образующими* множества  $U$  назовем минимальную систему подмножеств  $U$ , через которые выражается любое подмножество  $U$ . Число этих подмножеств обозначим  $K(|U|)$ , где  $|U|$  — мощность (т.е. число элементов) множества  $U$ .

Подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  назовем *независимыми*, если ни одно из них не выражается через другие.

Для подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множества  $U = \{a_1, \dots, a_m\}$  введем матрицу  $\Gamma(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , состоящую из  $m = |U|$  столбцов и  $n$  строк — множеств  $A_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,m})$ ,  $b_{i,j} = 1$ , если  $b_{i,j} \in A_i$  и  $b_{i,j} = 0$ , в противном случае,  $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n$ :

$$\Gamma = \Gamma(A_1, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,1} & \dots & b_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,1} & \dots & b_{n,m} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Очевидно, что образующие множества  $U$  являются независимыми (по определению).

Учащимся предлагаются три примера подмножеств 5-ти элементного множества.

1) Подмножества  $A = (10111)$ ,  $B = (11000)$  и  $C = (10101)$  не являются образующими, т.к. зависимы:  $A = C \cup B^c$

2) Независимые подмножества  $A = (01000)$ ,  $B = (00111)$ ,  $C = (11100)$  не являются образующими, т.к. этими множествами нельзя представить, например, подмножество  $(00001)$ .

3) Подмножества:  $A = (00011)$ ,  $B = (01101)$  и  $C = (11001)$  являются образующими множества  $U$ .

Отсюда, приходим к следующей задаче исследовательского характера:

**Задача.** Сколько образующих у множества  $U$  и какие подмножества являются образующими.

Первый результат учащиеся получают сразу (по ассоциации с булевыми переменными таблиц истинности): «Если множество  $U$  состоит из  $2^n$  элементов, то число его образующих равно  $n$ ».

Далее, предлагается обратить внимание на столбцы матрицы  $\mathbf{\Gamma}$ , составленной из этих образующих. Например, для 4 и 8-элементных множества имеем

$$\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, A_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Некоторые ученики замечают, что столбцы матрицы соответствуют всем подмножествам  $n$ -элементного множества. И мы формулируем этот факт в виде леммы.

**Лемма 1.** Если множество  $U$  состоит из  $2^n$  элементов, то число его образующих равно  $n$ , причем столбцы матрицы  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  образуют все возможные подмножества  $n$ -элементного множества.

Доказательство леммы проводим индукцией по  $n$ .

Этот раздел теоретической части занимает один урок, и поиск решения сформулированной выше задачи школьники проводят самостоятельно. Примерно через неделю немного учеников приносят свои решения и гипотезы, и в течение 1–2 уроков проходит обсуждение и слушание подготовленных сообщений. Приведем одно из них.

Заметим, что, так как число всех подмножеств  $n$ -элементного множества равно  $2^n$ , то столбцы матрицы  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  в лемме 1 различны. Поэтому докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — образующие множества  $U$ , то матрица  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  не содержит одинаковых столбцов.

**Доказательство.** В самом деле, если матрица  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  содержит одинаковые столбцы, например,  $j$ -й и  $k$ -й, то любые комбинации из объединений, пересечений и дополнений подмножеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будут иметь одинаковые элементы на  $j$ -м и  $k$ -м местах. А это значит, что  $A_1, A_2, \dots, A_n$  представляют не все подмножества  $U$  и не могут быть образующими. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Ответ на поставленную задачу дают две следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть множество  $U$  состоит из  $m$  элементов. Тогда число его образующих равно

$$K(m) = \lceil \log_2 m \rceil$$

где  $\lceil \log_2 x \rceil$  — верхняя целая часть числа  $x$ .

**Доказательство.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — образующие множества  $U$  и  $|U| = m$ . Тогда, в силу леммы 1,  $m > 2^{n-1}$ . Если  $m = 2^n$ , то по лемме 1 число его образующих равно  $n$ . Если же  $m > 2^n$ , то матрица  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  будет содержать одинаковые столбцы, так как различных столбцов может быть не более чем  $2^n$  и, в силу леммы 2,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  не являются образующими  $U$ . Значит,  $2^{n-1} < m \leq 2^n$ , т.е.  $n = \lceil \log_2 m \rceil$ . Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  множества  $U$ , где  $2^{n-1} < |U| \leq 2^n$ , являются образующими в том и только в том случае, если матрица  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  не содержит одинаковых столбцов, т.е. множество столбцов матрицы  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  является подмножеством множества  $2^\Omega$ , где  $|\Omega| = n$ .

**Доказательство.** Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — образующие множества  $U$ , то в силу леммы 2 матрица  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  не содержит одинаковых столбцов.

Обратно, пусть  $m = |U|$  и все столбцы матрицы  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  различны. Тогда, если  $m = 2^n$ , то в силу леммы 1, подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  являются образующими. Пусть  $m < 2^n$ , тогда дополним матрицу  $\mathbf{\Gamma}(A_1, A_2, \dots, A_n)$   $(2^n - m)$  различными столбцами, отличными от  $m$  ее первых столбцов. Полученная таким образом матрица  $\mathbf{\Gamma}_1$  будет иметь  $2^n$  различных столбцов и они будут представлять все подмножества  $n$ -элементного множества. По лемме 1 строки матрицы  $\mathbf{\Gamma}_1$  будут образующими множества  $U_1$  состоящего из  $2^n$  элементов, т.е. будут выражать любое подмножество  $U_1$  и значит подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будут выражать любое подмножество  $U$ , т.е. являться образующими  $U$ . Теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 формулируют в виде гипотез примерно 60% учеников. Они пользуются второй частью программы «Черновик», делая компьютерные проверки. В связи с этим, поясним работу нашей программы.

Программа работает с кольцом целых неотрицательных чисел, где роль операции сложения играет операция « $\wedge$ » — побитовое сложение (сложение по модулю 2), а роль операции умножения — побитовое произведение « $\&$ ». Пусть множество  $U$  состоит из  $n$  элементов. Тогда наше кольцо есть множество чисел  $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ . Двоичная запись каждого из этих чисел представляет цепочку, состоящую из нулей и единиц, длины  $n$ , т.е. подмножество множества  $U$ .

Программа умеет переводить числа в десятичной системе в двоичную и наоборот; выражать одно число через другие посредством вышеуказанных операций, представляя ответ операциями дополнения, объединения и пересечения; исполнять предложенный учеником код программы для исследований. Для примера рассмотрим задачу 28 из [2, стр. 11]: «Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$$

где  $A, B$  и  $C$  — данные множества.»

Положив  $A$  и  $X$  образующими 4-элементного множества  $U$ , например,  $a = 5$ ,  $x = 3$  ( $A = (0101)$ ,  $X = (0011)$ ), найдем  $b = 4$  ( $B = (0100)$ ) и  $c = 2$  ( $C = (0010)$ ). Обратившись к функции  $\text{resh}('5, 4, 2', A, B, C, X')$  получим ответ:  $X = C \cup (A \cap B^c)$ . После чего ученик, догадавшись, приходит к решению:

$$\begin{aligned} A \cap B^c &= A \cap (A \cap X^c)^c = A \cap (A^c \cup X) = A \cap X, \\ (A \cap B^c) \cup C &= A \cap X \cup X \cap A^c = X \cap (A \cup A^c) = X \text{ или } X = A \setminus B \cup C. \end{aligned}$$

Рассмотрим более сложное уравнение с неизвестным  $X$  и известными  $A, B$  и  $C$ :

$$X \cap (A \cup B) = A \cap B \cap C.$$

Экспериментируя с этой задачей для множеств  $U$  разных мощностей (т.е. перебирая все возможные  $X$ ) и их образующими ( $A, B, C$ ) будем получать много разных решений, наиболее понятными из которых будут решения при  $|U| = 8$ :

$$X_1 = A \cap B \cap C, \quad X_2 = X_1 \cup A^c \cap B^c \cap C^c, \quad X_3 = X_1 \cup A^c \cap B \cap C^c, \quad X_4 = X_1 \cup A^c \cap C^c$$

(соответствующий код приведен как пример в инструкции «Черновик», его «логический» аналог в [4, стр. 230]).

В следующем разделе учащимся предлагается рассмотреть следующие задачи для конечного множества  $U$  и семейств его образующих  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ :

- 1) Может ли  $U$  или пустое множество входить в образующие  $U$ ?
- 2) Существуют ли непересекающиеся образующие  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , т.е. такие, что  $\bigcap_{j=1}^n A_j = \emptyset$ ?
- 3) Существуют ли образующие  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , для которых, например,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ?
- 4) Сколькими различными (с точностью до операции дополнения) семействами образующих обладает множество  $U$ ?
- 5) Смоделировать все подмножества  $n$ -элементного множества.

Отметим последнюю из этих задач. Несмотря на известные алгоритмы, например, [6, стр. 85], ученица 9-го класса Влада Михальченко (lari.00@mail.ru) предложила следующий алгоритм, который сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  образуют базис  $n$ -мерного линейного пространства над полем  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ . Тогда любой ненулевой элемент этого пространства есть частная сумма элементов  $b_1, b_2, b_{2^n-1}$ , где  $b_{2^{k-1}(2j-1)} = A_k$ ,  $j = 1, \dots, 2^{n-k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .



**Доказательство.** Несложно заметить, что частные суммы  $S_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, 2^n - 1$  ряда  $b_1, b_2, \dots, b_{2^n-1}$  — нетривиальны и различны. Поэтому они представляют собой любой из  $2^n - 1$  ненулевых элементов нашего пространства.

Например, в 4-мерном пространстве последняя сумма  $S_{15}$  из  $b_1, \dots, b_{15}$  имеет вид:

$$S_{15} = \sum_{j=1}^{15} b_j = A_1 \wedge A_2 \wedge A_1 \wedge A_3 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_1 \wedge A_4 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_1 \wedge A_3 \wedge A_1 \wedge A_2 \wedge A_1,$$

где операция сложения обозначена как « $\wedge$ » — исключающее «или».

Интересно, что с помощью таких рядов из трех подмножеств  $A_1 = (0101)$ ,  $A_2 = (0011)$ ,  $A_3 = (0001)$  4-элементного множества Влада Михальченко решила следующую головоломку: «Симметрическая бочка имеет 4 отделения (сектора) в каждом из которых находится бутылка с ориентацией «горлышком вверх» или «горлышком вниз». Бочка вращается случайно в трех измерениях, если только хотя бы две бутылки имеют разную ориентацию, и останавливается (не вращается) если все 4 бутылки одинаково ориентированы (все «горлышком вниз» или все «горлышком вверх»). В любой момент времени мы можем остановить бочку и, открыв в ней 1-2 отделения, изменить ориентацию находящихся там бутылок. После чего бочка или продолжает вращение, или (в случае успеха) останавливается. Вопрос: можем ли мы остановить вращение бочки за конечное число таких подходов и, если да, то за какое?»

Влада показала, что вышеуказанная последовательность решает эту задачу. Однако эту задачу решают все базисы 3-мерного подпространства 4-мерного пространства. Тем более, при пошаговом внешнем действии случайной перестановки (в нашей задаче это круговая перестановка, но не произвольный цикл) и случайной операции «дополнение». Работа продолжается...

В заключение приведем интересный пример из [3, стр. 117] и [4, стр. 231]: «Когда было много разговоров о существовании «летающих тарелок», в связи с утверждениями некоторых лиц о том, что ночью ими наблюдались странные небесные тела, был произведен опрос населения двух близлежащих к месту предполагаемого появления этих тел населенных пунктов.

Систематизация результатов опроса жителей первого населенного пункта показала следующее:

- а) в небе появились сгустки слабо светящейся ионизированной пыли ( $A$ ),
- б) среди атмосферных облаков ( $B$ ) появилось одиночное светлое дискообразное тело радиусом приблизительно 100 м ( $X$ ) и больше не было никаких других тел ( $\neg Y$ ),
- в) далеко в небе показалась группа движущихся сигарообразных тел ( $Y$ ), и движение этих тел сопровождалось слабыми мерцающими разрядами атмосферного электричества ( $C$ ).

Ответы жителей второго населенного пункта можно было объединить в такие группы:

- а) не было ни светящейся ионизированной пыли ( $\neg A$ ), ни большого светлого дискообразного тела ( $\neg X$ ), ни сигарообразных тел ( $\neg Y$ ),
- б) не видели ни атмосферных облаков ( $\neg B$ ), ни светлого дискообразного тела ( $\neg X$ ),
- в) наблюдались слабые разряды атмосферного электричества ( $C$ ),
- г) среди облаков ( $B$ ) были видны сгустки слабо светящейся ионизированной пыли ( $A$ ).

На основании этих данных требовалось определить, следует ли принимать всерьез заявления некоторых лиц о наблюдавшихся ими странных небесных телах  $X$  и  $Y$  или же представления о телах  $X$  и  $Y$  могли быть вызваны комбинированными действиями атмосферных явлений  $A, B, C$ . Используя введенные обозначения, результаты опроса представим в виде следующего булева уравнения:

$$A \vee B \wedge X \wedge \neg Y \vee C \wedge Y = \neg A \wedge \neg X \wedge \neg Y \vee \neg B \wedge \neg X \vee C \vee A \wedge B. \quad (3)$$

Решение вопроса о существовании тел  $X$  и  $Y$  сводится к определению возможности разрешить уравнение (3) относительно неизвестных  $X$  и  $Y$  и выразить их как функции от элементов  $A, B, C$ . Если решение  $X(A, B, C)$ ,  $Y(A, B, C)$  существует и, кроме того,

$$X \neq \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C, \quad Y \neq \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C, \quad (4)$$

то нет оснований делать вывод о появлении каких-либо тел  $X, Y$ . Если же решения, отличного от (4), не существует, то следует отнестись к заявлениям «очевидцев» с большой серьезностью.»

То есть, при найденных из уравнения (3)  $X(A, B, C)$  и  $Y(A, B, C)$  существование объектов возможно лишь при выполнении условий:

$$X = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C, \quad Y = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

Введя базис из булевых переменных  $\#A = 01010101$ ,  $\#B = 00110011$  и  $\#C = 00001111$ , авторы показали, что существует 3072 различных неэквивалентных пар  $(X, Y)$  решений уравнения (3). Взяв одну из них  $\#X = 10000010$  и  $\#Y = 10000010$  или

$$X = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee \neg A \wedge B \wedge C, \quad Y = A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge B \wedge \neg C, \quad (5)$$

авторы [3, стр. 120] делают вывод, что «представление о существовании тела  $X$  либо не связано ни с одним из названных атмосферных явлений, либо вызвано только появлением облаков и атмосферными разрядами электричества, а представление о существовании группы тел  $Y$  вызвано либо одними облаками, либо одними атмосферными разрядами. Поэтому нет серьезных оснований считать, что небесные тела  $X$  и  $Y$  действительно существуют.»

Аналог этой задачи на множествах сводится к нахождению всех подмножества  $X$  и  $Y$  8-элементного множества  $U$ , удовлетворяющие уравнению:

$$A \cup B \cap X \cap Y^c \cup C \cap Y = A^c \cap X^c \cap Y^c \cup B \cap X^c \cup C \cup A \cap B, \quad (6)$$

где  $A, B, C$  — заданные подмножества, причем  $A = (01010101)$ ,  $B = (00110011)$  и  $C = (00001111)$  — как обычно базисные.

В окне «Черновик» учащиеся пишут соответствующий код, просматривающий все возможные значения  $x$  и  $y$  от 1 до 254, проверяя равенство (6) для  $a = 85$ ,  $b = 51$  и  $c = 15$  (двоичная запись которых —  $A, B, C$ ). Получают 3072 решения уравнения (6), одно из которых соответствует (5).

Если для решения (6) в качестве  $A, B$  и  $C$  брать произвольные образующие множества  $U$ , то также будем получать 3072 решения. Далее, легко убеждаемся, что (к удивлению учеников), при  $A = (00110011)$ ,  $B = (01010101)$  и  $C = (00001111)$ , решения вида (5) не существует. Поэтому вывод авторов вызывает сомнения. Кроме того, просматривая решения, полученные для случайно выбранных образующих множества  $U$  (в том числе и для  $a = 85$ ,  $b = 51$  и  $c = 15$  из примера авторов), получаем также по 3072 решения (пар  $X$  и  $Y$ ), 32 из которых, имеют  $X = A^c \cap B^c \cap C^c$ , а пары с  $Y = A^c \cap B^c \cap C^c$ , не встречаются. Если считать полученные решения равновероятными, то оценка вероятности существования «летающих тарелок» будет равна  $\frac{32}{3072} = \frac{1}{96} > 0,01$ . Т.е., вроде бы, к существованию «летающих тарелок» следует относиться более серьезно.

На самом деле более серьезно следует относиться к построению математических моделей рассматриваемых явлений.

### Литература

1. Пухначев Ю., Попов Ю. Математика без формул. — М.: АО «Столетие», 1995. — 512 с.
2. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: «Физматлит», 2004. — 256с.
3. Горелик А.Л., Скрипкин В.А. Методы распознавания. — М.: «Высшая школа», 1977. — 220с.
4. Бестужев-Лада И.В. Рабочая книга по прогнозированию. — М.: «Мысль», 1982. — 430с.
5. Кузичев А.С. Диаграммы Венна (история и применения). — М.: «Наука», 1968. — 252с.
6. Липский В.Л. Комбинаторика для программистов. — М.: «Мир», 1987. — 215с.

Привалов Александр Андреевич, доцент  
кафедры «Теоретическая информатика  
и дискретная математика Московского  
Государственного педагогического университета,  
учитель математики Московского химического  
химического лицея № 1303, канд. физ.-мат. наук.  
E-mail: a\_privalov@bk.ru

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.nrsmarpro.ru](http://www.nrsmarpro.ru) Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”.  
[www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанным адресам.

Отдельные материалы имеются на [www.lomonosovclub.ru](http://www.lomonosovclub.ru)

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2016 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2016 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

<b>N. Rozov. Logics and School</b>	<b>2</b>
On necessity of introducing “Logics” as a special subject of high school education.	
<b>V. Drozdov. Physics and Mathematics of Schwarz Triangle</b>	<b>6</b>
Some properties of Schwarz triangle of an acute triangle are derived.	
<b>A. Lyakhov. Constructing Fold Line in Origami</b>	<b>10</b>
Fold line of Origami geometry is constructed for the case, when a vertex of a square maps to an arbitrary point inside the square.	
<b>V. Ivlev. Approximation to the Death and Reproduction Scheme, continued</b>	<b>19</b>
The system of back equations for a death and reproduction scheme and its reduction to the back Kolmogorov equation are considered.	
<b>V. Gusev. On Finite State Automation of 4 Stones which Makes the Round of <math>\mathbb{Z}^k</math> for a Polynomial Time</b>	<b>23</b>
A finite state automation of 4 stones is constructed to make the round of $\mathbb{Z}^k$ for a polynomial time. Some estimates of the optimal number of stones are discussed.	
<b>S. Zharov. Pedagogic Heritage of Professor E. Berezanskaya and Contemporary Junior Education</b>	<b>44</b>
On activities and proceedings of Professor Elizaveta Berezanskaya (born 1890) and their influence on contemporary methodology of junior school.	
<b>A. Privalov. On Teaching Elements of Set Theory at School Study Group</b>	<b>49</b>
Some themes of math logics and set theory are suggested to study at high school study group. The corresponding computer program to help the process is described.	

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 &gt;