

ISSN 1992-6138

# **Математическое Образование**

**Журнал Фонда математического  
образования и просвещения**

**Год двадцать второй**

**№ 1 (85)**

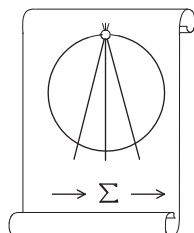
**январь — март 2018 г.**

**Москва**

*Периодическое издание в области математического образования*



Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”  
[www.lomonosovclub.com](http://www.lomonosovclub.com)



Издатель и учредитель: Фонд

математического образования и просвещения

117419 Москва, ул. Донская, д. 37

## Главный редактор

Имайкин В.М.

## Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 1 (85), 2018 г.

©“Математическое образование”, составление, 2018 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2018 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 14.04.2018 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (85), январь – март 2018 г.

## Содержание

### Памяти И. Р. Шафаревича

- М. И. Зеликин.* Гениальность. Памяти И. Р. Шафаревича 2

### Учащимся и учителям средней школы

- Е. Г. Смольянова, Н. В. Малышкина.* Гипербола и биквадратные уравнения 5
- С. М. Тахаев.* Построение четырёхугольников с заданными свойствами 10
- М. А. Тлеубергенова.* Правильный треугольник помогает решить задачу 33

### Студентам и преподавателям математических специальностей

- А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов.* Применение линейной алгебры для приведения уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду 38
- В. В. Ивлев, Е. А. Кривошей.* Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) 47
- В. Т. Мураталиева.* Алгоритмы для доказательства теорем о линейных интегро-дифференциальных уравнениях с аналитическими функциями 52
- С. В. Шведенко.* Формула замены переменных в двойном интеграле как следствие формулы Грина 56
- А. Ю. Эвнин.* Теорема Гринберга и её применение 60

### Информация

- О деятельности ФМОП в 2017 г. 66

## Памяти И. Р. Шафаревича

### Гениальность. Памяти И. Р. Шафаревича

*М. И. Зеликин*

Воспоминания о великом русском математике и общественном деятеле Игоре Ростиславовиче Шафаревиче (1923–2017) и его окружении. Первоначально помещены на странице автора воспоминаний Михаила Ильича Зеликина

<http://new.math.msu.su/departments/opu/node/22>

Публикуются с разрешения автора.

Ушел в последний путь Игорь Ростиславович Шафаревич — гениальный математик, замечательный гражданин и абсолютно бесстрашный человек — воистину рыцарь без страха и упрека. Он основал Российскую школу алгебраической геометрии, которая превратилась во всемирную. Питомцы этой школы сейчас насчитываются многими десятками, если не сотнями, и разбросаны по всему миру. В семидесятые годы моим соседом по квартире был один из любимых учеников Игоря Ростиславовича, Андрей Иванович Лапин, человек глубочайшего ума и феноменальной памяти. Я с ним очень крепко подружился. У него на квартире нередко собиралась почти вся тогдашняя компания алгебраических геометров — Манин, Тюрин, Исковских, Мойшезон, Паршин... Сейчас имена многих из них знает весь математический мир. Мне хочется хоть чуть-чуть повспоминать.

Вспоминаю поход по подмосковью, в который меня позвал мой милый сосед Андрей Иванович Лапин. Там был Игорь Ростиславович Шафаревич, Сереня Демушкин, Сурен Аракелов, и, кажется, еще кто-то из учеников Шафаревича. Гидом традиционно был Сереня Демушкин (не меняю его традиционного в нашей компании имени) — опытный походник и знаток подмосковья. Я старался держаться неподалеку от Игоря Ростиславовича и Андрея Ивановича, которые всю дорогу неудержимо говорили об истории, о религии, о политике... Для меня это была потрясающая школа. Это было время, когда Игорь Ростиславович был активным членом знаменитого центра диссидентского движения — Комитета по правам человека. Один из членов этого комитета, генерал Григоренко, уже был объявлен душевно больным и содержался в институте Сербского. К Игорю Ростиславовичу, лауреату Сталинской премии и всемирно известному математику, психиатры подступиться опасались. В середине похода был приятный дневной отдых с небольшим костром и закуской на берегу маленькой речушки. Мне тогда невероятно понравился Сурен Аракелов, про замечательные способности которого я уже слышал. Это был маленький очень живой паренек, веселый, открытый, остроумный — настоящий молодой Галуа! Он успел защитить кандидатскую диссертацию, которая теперь стала широко известной работой. Если посмотреть достаточно продвинутые статьи по алгебраической геометрии, то нетрудно встретить термины “теория Аракелова, геометрия Аракелова...”.

Через несколько дней произошло следующее. Был арестован Солженицын. Сурен Аракелов, верный ученик и последователь своего великого учителя, решил вступить в борьбу с режимом. Он изготовил два плаката — на грудь и на спину — с надписью: “Свободу Александру Солженицыну” и отправился на Красную площадь. Там его и арестовали и отправили прямехонько в институт Сербского. Выписали его через пару лет. Игорь Ростиславович приехал его навестить и поразился произошедшей перемене. Внутренний огонь его души был наглухо затоптан и погашен. Его не интересовали ни математика, ни политика, ни даже внимание его некогда обожаемого учителя. Через некоторое время он женился, нашел какую-то рутинную работу и превратился в добросовестного обывателя. Специалисты из института Сербского на этот раз блестяще продемонстрировали свою

профессиональную состоятельность. Они превратили гениального мальчишку в “нормальную” посредственность.

Вспоминается “Государство” Платона. Он описал устройство идеального, совершенного, справедливого общества, которое абсолютно устойчиво. Описав это устройство, Платон пишет: “Если в ворота нашего города постучится Гомер, мы поклонимся ему в пояс, но мы не пустим его в наш город.” Вполне понятно. Ведь гений и устойчивость — две вещи несовместные. Гений это всегда стрела, полет в непредсказуемую неизвестность!

Почему молодым Гениям так не везет? Началось с античной Греции. Возьмем хотя бы Теэтета. Он впервые ввел и изучил поля квадратичных расширений поля рациональных чисел и доказал, что элементы такого расширения описываются периодическими непрерывными дробями. Именно эта идея Теэтета лежит в основе геометрического доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, изложенного в школьном учебнике Киселева по геометрии. В его время были известны лишь четыре из правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, и додекаэдр. Теэтет открыл самый нетривиальный из правильных многогранников — правильный икосаэдр и, главное, доказал, что других правильных многогранников не существует. Эти его результаты опубликовал Платон, после чего все пять правильных многогранников стали называться платоновыми телами (а справедливо было бы называть их телами Теэтета). Платон сделал Теэтета героем одного из своих диалогов. В предисловии к диалогу автор говорит несколько осторожно-хвалебных слов, что, мол, Теэтет — талантливый молодой математик. Но в самом диалоге Теэтет выглядит просто как мальчишка для битья. Он все время дает на первый взгляд очевидные, но, как выясняется из последующих наводящих доводов Сократа, неверные ответы на хитроумные Сократовские вопросы. Между строк читается зависть Платона к своему герою. Теэтет совсем молодым мальчишкой умер от ран и болезни во время военного похода. Не уберег его Ангел-Хранитель!

Небесные Силы — странный народ! Вот удивительная история, которую рассказал мне Игорь Ростиславович. Как-то мы говорили с ним о том, как приходят в голову нужные мысли. Я сказал, что по ночам мне часто снится решение какой-нибудь проблемы, но просыпаясь, я обнаруживаю, что аргументы, казавшиеся во сне очевидными, на самом деле неверны. По-видимому во сне часто отказывает шестое чувство — чувство истинности (седьмое чувство — это чувство красоты). Игорь Ростиславович сказал, что знает противоположный случай. А именно:

Для решения некоей проблемы ему понадобились специальные свойства функций от матриц. Кто-то сказал ему, что функциями от матриц занимался Иван Александрович Лаппо-Данилевский при описании свойств краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных с рациональными коэффициентами. Но этих результатов Лаппо-Данилевский не публиковал, а записывал их только в дневниках. Игорь Ростиславович разыскал эти дневники и вычитал там следующую историю.

Был трудный период в жизни Ивана Александровича. Он страдал очень неприятной болезнью (клептоманией), которая в глазах окружающих выглядит крайне непривлекательно. Его уволили со всех мест работы и, чтобы прожить, он был вынужден устроиться работать управдомом. В свободное время он занимался математикой и записывал результаты в дневник. Для решения очередной проблемы ему надо было построить вспомогательную функцию с некоторыми специальными свойствами. Это ему очень долго не удавалось. Однажды ему приснился сон, будто бы он сидит в своем кабинете в домоуправлении и к нему на прием приходит женщина. Пожилая, некрасивая, плохо одетая. Она молча кладет на стол заявление. Иван Александрович берет бумагу и читает:

Управдому Лаппо-Данилевскому от гражданки такой-то, проживающей там-то  
(Иван Александрович пишет, что имя и адрес он не запомнил).

#### ЗАЯВЛЕНИЕ

Прошу разрешить мне продифференцировать под знаком интеграла следующую функцию.

Следует формула, число и подпись.

Иван Александрович обдумывает вопрос и накладывает резолюцию: “Разрешаю. Управдом Лашпо-Данилевский”. Женщина радостно благодарит, берет бумагу и выходит. Иван Александрович просыпается. В полу-бредовом состоянии он записывает формулу на клочке газеты обломком обгорелой спички. Ему страшно хочется спать. Он падает на подушку и засыпает. Наутро он вспоминает свой странный сон, смотрит на запись, и только тут до него доходит. Функция, которую эта бедная женщина так смиренно просила его, как управдома, ради Бога, разрешить ей продифференцировать под знаком интеграла — это та самая, позарез необходимая ему функция, которую он тщетно пытался построить самостоятельно. Вот какой образ может принять Муза математики!

Да, это действительно странные существа! Скажем, Муза Пушкина несомненно была красавицей. С другой стороны, я вспоминаю картину Анри Руссо под названием “Художник и его муза”. На фоне нарочито примитивистского пейзажа нарисована жестикулирующая парочка: мужчина и женщина. Мужчина — автопортрет самого художника — изображен в виде франта с лихо закрученными усами. А женщина — мало сказать, некрасива. — ну, чистый крокодил! Разумеется, в картине присутствует изрядная доля самоиронии. Но не только. Ведь настоящий хороший художник всегда рисует только то, что он видит, по выражению Гамлета, “в очах своей души”. По-видимому, Руссо сам изумлялся тем причудливым образам, которые показывала ему его Муза.

По традиционным шаманским поверьям, у каждого настоящего шамана существует свой собственный дух-двойник — Аями — один из духов-предков. Это, обычно, существо противоположного пола. Оно руководит духовной жизнью подопечного, воспитывает его, и отвечает за его шаманскую силу. В случае неповиновения оно строго его наказывает, насылая “шаманскую болезнь”, иногда смертельную. Аями — это аналог европейского понятия Муза. Хотел бы я знать, как выглядела Муза Шафаревича. Насколько я знаю, она ему не показывалась. Наверное, она была очень любящей, деликатной, стеснительной и по-настоящему мудрой. Результаты ее работы потрясающие. Слава Богу, он прожил долгую, плодотворную, изумительно красивую жизнь.

*Зеликин Михаил Ильич,  
заместитель заведующего кафедрой  
Общих проблем управления  
механико-математического факультета  
МГУ им. М.В. Ломоносова, член-корр. РАН,  
профессор, доктор физ.-мат. наук.*

*E-mail: mzelikin@mtu-net.ru*

## Гипербола и биквадратные уравнения

*Е. Г. Смольянова, Н. В. Малышкина*

В статье предлагается конспект занятий по одной из тем элективного курса «Геометрия плоских кривых» для старших классов средней школы. В рамках темы «Гипербола и биквадратные уравнения» исследован геометрический смысл решений биквадратных уравнений.

Учебный план профильного обучения предполагает обязательное включение элективных курсов по разным предметам как элемента вариативной части содержания образования. Элективные курсы по математике служат общим целям развития базовых и профильных курсов, а также обеспечивают начальную подготовку к будущей профессиональной деятельности, которая подразумевает достаточно высокий уровень математической культуры. Учащийся, сделавший выбор образовательной области (и соответственно тематику курса), должен также получить возможность увидеть многообразие видов связанной с ней деятельности и оценить свой потенциал с точки зрения выбранной образовательной дисциплины. В результате, учащиеся помогут выстроить собственную профессиональную траекторию. Основными ориентирами при разработке элективных курсов должны быть их вариативность, разумная ограниченность как временного объёма, так и объёма учебного материала (компактность) и, разумеется, оригинальность. При этом отбор содержания курса (и его модулей) по математике направлен на решение следующих задач:

1. совершенствование интеллектуальных возможностей учащихся, «подведение» их к индивидуальному математическому творчеству за счёт обогащения навыков самостоятельной работы;
2. знакомство с новыми подходами при решении математических задач;
3. нарушение стереотипности восприятия учебной информации и формирование умения видеть «новое в известном».

В данной статье предлагается конспект занятий по одной из тем элективного курса «Геометрия плоских кривых». В рамках темы «Гипербола и биквадратные уравнения» будет исследован геометрический смысл решений биквадратных уравнений.

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат  $XOY$  задан график  $\Gamma_p$  функции  $f(x) = \frac{p}{x}$ , ( $p > 0$ ,  $x > 0$ ). Иначе,  $\Gamma_p$  — правая ветвь гиперболы  $y = \frac{p}{x}$ . Если точки  $A(a_1; a_2)$  и  $B(b_1; b_2)$  принадлежат  $\Gamma_p$ , то

$$AB^2 = (a_1 - b_1)^2 \cdot \left( 1 + \left( \frac{p}{a_1 \cdot b_1} \right)^2 \right).$$

Зафиксируем длину хорды  $AB$ :

$$k^2 = (a_1 - b_1)^2 \cdot \left( 1 + \left( \frac{p}{a_1 \cdot b_1} \right)^2 \right). \quad (1)$$

Будем непрерывно перемещать отрезок  $AB$ , не отрывая его концы от  $\Gamma_p$  (рис. 1). Тогда переменная середина  $C$  отрезка  $AB$  опишет некоторую кривую  $\Phi$  на плоскости  $XOY$ . Найдём её уравнение. Для этого сначала определим координаты точки  $C$ :  $(x_C; y_C) = \left(\frac{a_1+b_1}{2}; p \cdot \frac{a_1+b_1}{2 \cdot a_1 \cdot b_1}\right)$ . Поскольку  $x_C = \frac{a_1 \cdot b_1}{p} \cdot y_C$ , то равенство (1) переписывается так:

$$k^2 = (a_1 - b_1)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{y_C}{x_C}\right)^2\right),$$

откуда

$$\frac{(a_1 - b_1)^2}{x_C^2} = \frac{k^2}{x_C^2 + y_C^2}. \quad (2)$$

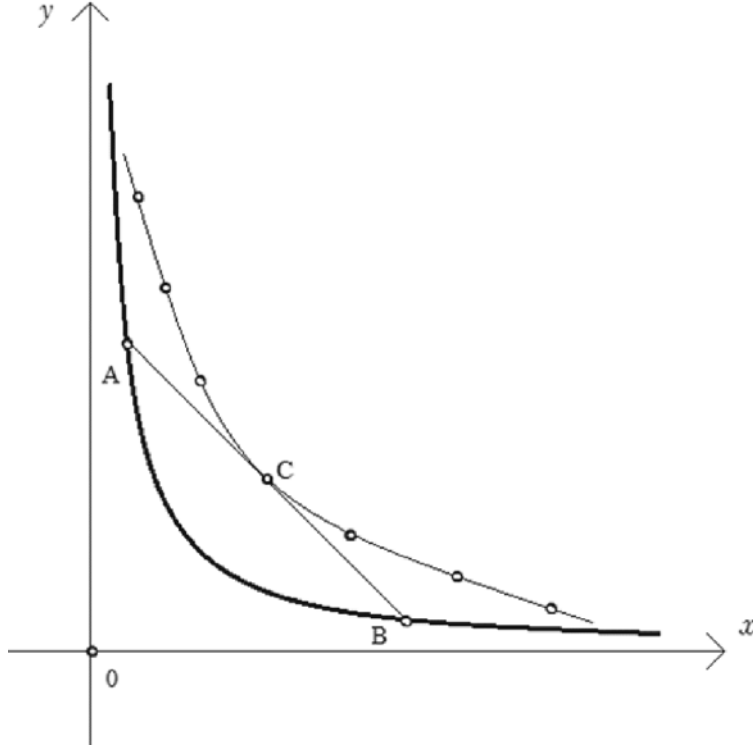


Рис. 1

Далее, из

$$\frac{(a_1 - b_1)^2}{x_C^2} = \frac{a_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + b_1^2}{a_1^2 \cdot b_1^2 \cdot y_C^2} \cdot p^2 = \frac{p^2}{y_C^2} \cdot \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} - \frac{2}{a_1 \cdot b_1}\right), \quad (3)$$

$$2 \cdot y_C = p \cdot \frac{a_1 + b_1}{a_1 \cdot b_1} = p \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}\right) \quad (4)$$

следует, что

$$\frac{(a_1 - b_1)^2}{x_C^2} = \frac{p^2}{y_C^2} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot y_C}{p}\right)^2 - \frac{4}{a_1 \cdot b_1}\right) = \frac{p^2}{y_C^2} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot y_C}{p}\right)^2 - \frac{4 \cdot y_C}{p \cdot x_C}\right) = \frac{4}{y_C} \cdot \left(y_C - \frac{p}{x_C}\right).$$

Тогда равенство (2) равносильно такому:

$$\frac{4}{y_C} \cdot \left(y_C - \frac{p}{x_C}\right) = \frac{k^2}{x_C^2 + y_C^2}$$



или, что то же,

$$\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{x_C^2 + y_C^2} + \frac{p}{x_C \cdot y_C} = 1.$$

Итак, геометрическое место  $\Phi$  середин хорд фиксированной длины  $k$  правой ветви гиперболы с параметром  $p > 0$ , определяется уравнением

$$\frac{\left(\frac{k}{2}\right)^2}{x^2 + y^2} + \frac{p}{x \cdot y} = 1. \quad (5)$$

Преобразуем его следующим образом:

$$(x \cdot y - p) \cdot (x^2 + y^2) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot x \cdot y = 0. \quad (6)$$

Выберем произвольную точку  $M(x; y) \in \Phi$  и обозначим через  $u$  произведение её координат. (Тем самым мы вводим в рассмотрение ещё одну гиперболу  $\Gamma_u$  с положительным параметром  $u$ , которая эту точку содержит.) Подставим  $x \cdot y = u$  в (6):

$$(u - p) \cdot \left(x^2 + \frac{u^2}{x^2}\right) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot u = 0,$$

откуда

$$(u - p) \cdot x^4 - u \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 \cdot x^2 + (u - p) \cdot u^2 = 0 \quad (7)$$

( $u - p > 0$  по геометрическому смыслу). Поэтому (7) есть биквадратное уравнение с коэффициентами

$$\alpha = u - p > 0; \quad \beta = -u \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 < 0; \quad \gamma = (u - p) \cdot u^2 > 0.$$

(При этом  $\gamma > \alpha^3$ , так как иначе  $p \leq 0$ .) Разрешим эти равенства относительно  $k$ ,  $p$ ,  $u$ :

$$p = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} - \alpha; \quad u = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}; \quad k = 2 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-1}} \quad (8)$$

и перейдём к обсуждению основной идеи.

Пусть в системе координат  $XOY$  имеются правые ветви  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_u$  двух гипербол с уравнениями  $y = \frac{p}{x}$  и  $y = \frac{u}{x}$ , где  $0 < p < u$ . Если  $M_0(x_0; y_0) \in \Gamma_u$  и является серединой какой-либо хорды гиперболы  $\Gamma_p$ , то будем называть её абсциссу  $(p, u)$ -точкой (рис. 2).

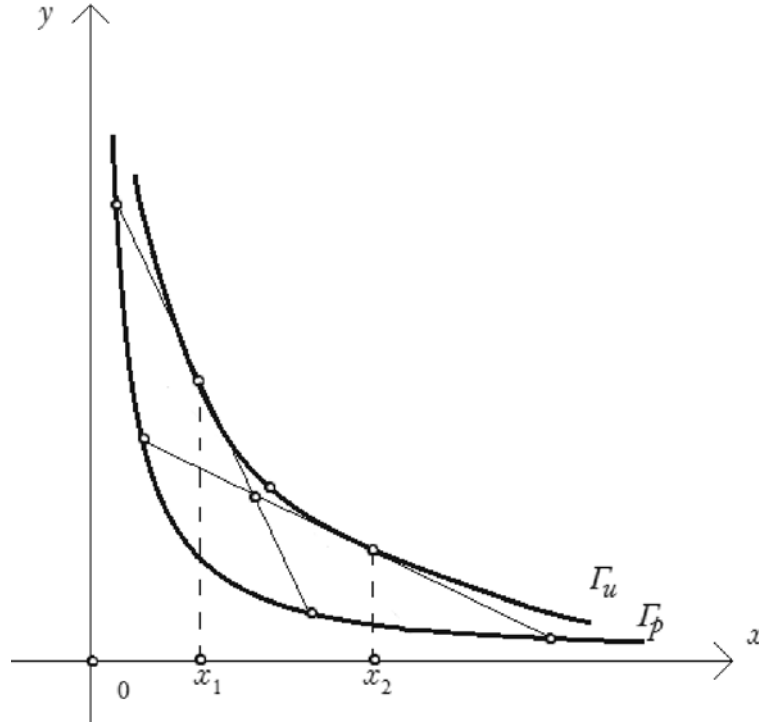


Рис. 2

Рассмотрим теперь биквадратное уравнение

$$\alpha \cdot x^4 + \beta \cdot x^2 + \gamma = 0 \quad (9)$$

с положительным дискриминантом  $D = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$ , коэффициенты которого удовлетворяют условиям:  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ ,  $\gamma > \alpha^3$ . Назовём такое уравнение *допустимым*. Тогда из предыдущего понятно, что у положительных корней  $x_1$ ,  $x_2$  уравнения (9) имеется следующий *геометрический смысл*: каждый из них является  $(p, u)$ -точкой, где  $p$  и  $u$  рассчитаны по формулам (8). (Ясно, что при этом  $u = x_1 \cdot x_2$ ).

**Пример 1.** Пусть имеем биквадратное уравнение

$$5 \cdot x^4 - 51 \cdot x^2 + 130 = 0.$$

Оно является *допустимым*, т.к.

$$\alpha = 5 > 0, \quad \beta = -51 < 0, \quad \gamma = 130 > \alpha^3 = 125 \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 26.$$

Применим формулы (8):

$$k = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2601}{26}}; \quad p = \sqrt{26} - 5; \quad u = \sqrt{26}.$$

Положительные действительные корни уравнения такие:  $x_1 = \sqrt{\frac{26}{5}}$ ;  $x_2 = \sqrt{5}$ .

Тогда каждое из этих решений является  $(p, u) = (\sqrt{26} - 5, \sqrt{26})$ -точкой.

**Замечание 1.** При фиксированной точке  $M(x; y) \in \Gamma_u$  зависимость между параметром гиперболы  $\Gamma_p$  и длиной хорды, для которой  $M$  является серединой, определяется соотношением

$$\left(\frac{k/2}{\rho}\right)^2 + \frac{p}{u} = 1,$$

где  $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ . Следовательно,

$$k < 2 \cdot |\overrightarrow{OM}|. \quad (10)$$

**Замечание 2.** Если обе части *допустимого* уравнения с положительными корнями  $x_1, x_2$  умножить на  $r \in (0; \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha^3}}) \setminus \{1\}$ , то получим, очевидно, равносильное уравнение, причём тоже *допустимое*. Однако параметр  $p$  и длина хорды — изменятся. Это значит, что «гиперболический статус»  $x_1$  и  $x_2$  будет уже другим. Рассчитаем  $p_r$  и  $k_r$  по формулам (8):

$$k_r = \sqrt{r} \cdot k; \quad p_r = p + (1 - r) \cdot \alpha = u - r \cdot \alpha.$$

Соответствующие приращения коэффициента  $p$  и длины хорды:

$$\Delta p = p_r - p = (1 - r) \cdot \alpha; \\ \Delta k = (\sqrt{r} - 1) \cdot k.$$

Таким образом, находя положительные решения *допустимого* биквадратного уравнения и имея представление о геометрическом смысле этих решений, можно дополнительно поставить вопрос о том, каким выбрать множитель  $r$ , чтобы изменить длину  $k$  хорды на «заказанную» величину  $\Delta k$ . Ясно, что это будет хорда уже другой гиперболы. Неизменной остаётся только середина этих хорд — точка  $(x_1; x_2)$ . Обратимся к уравнению из Примера 1. Так как

$$2 \cdot \rho = 2 \cdot |\overrightarrow{OM}| = 2 \cdot \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{255}}{5},$$

то, с учётом (10):

$$-6,3252 \approx -2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2601}{26}} = -k < \Delta k < \frac{2 \cdot \sqrt{255}}{5} - k = \frac{2 \cdot \sqrt{255}}{5} - 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{2601}{26}} \approx 0,0623.$$

Следовательно, «заказ» на приращение хорды должен быть в пределах указанного интервала. Например, для  $\Delta k = 0,05$  получим, что соответствующий множитель

$$r = \left( \frac{\Delta k}{k} + 1 \right)^2 = \left( \frac{1}{40} \cdot \sqrt[4]{\frac{26}{2601}} + 1 \right)^2 \approx 1,01587.$$

При этом приращение параметра гиперболы будет таким:

$$\Delta p = (1 - r) \cdot \alpha = \left( 1 - \left( \frac{1}{40} \cdot \sqrt[4]{\frac{26}{2601}} + 1 \right)^2 \right) \cdot 5 \approx -0,07936.$$

**Замечание 3.** Понятно, что выбор знака исследуемых корней уравнения (9) связан с выбором правых ветвей гипербол  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_u$ . По соображениям симметрии пары отрицательных корней обсуждать нет смысла. Геометрические свойства у них те же.

Смольянова Елена Григорьевна,  
доцент кафедры математического анализа  
факультета математики и информационных технологий  
ФГБОУ ВО МГУ им. Н.П. Огарёва, г. Саранск.

E-mail: janovaeg@mail.ru

Малышкина Наталья Васильевна,  
учитель математики высшей категории  
МОУ Лицей № 4, Республика Мордовия, г. Саранск

E-mail: nata\_malyshkina@inbox.ru

## Построение четырёхугольников с заданными свойствами

*C. M. Taxaev*

В статье проведен анализ четырёхугольников различных типов, которые можно построить в произвольном треугольнике. Получены формулы построения центров окружностей Содди. Рассмотрены некоторые ранее не исследованные вопросы, связанные с точкой Микеля. Выявленные при этом новые факты смогут дополнить уже известные.

## 1. Вступление

Четырёхугольники различных типов хорошо изучены. Обобщенный материал по ним можно найти в статьях известных геометров — Paul Yiu [1], Martin Josefsson [2], Nicusor Minculete [3] и др. В данной работе исследованы не сами четырёхугольники, а способ их построения в произвольном треугольнике путем проведения чевиан из 2-х его вершин.

## 1.1. Определения и термины

Напомним некоторые определения элементарной геометрии, использованные в статье. *Чевiana* — отрезок в треугольнике, один конец которого является вершиной, а другой лежит на противоположной этой вершине стороне. *Окружности Содди* (малая и большая) касаются 3-х взаимно касающихся окружностей, имеющих радиусы  $s - a$ ,  $s - b$ ,  $s - c$  в вершинах произвольного треугольника. *Прямая Гаусса (Ньютона)* — прямая, соединяющая середины диагоналей произвольного четырёхугольника. Проходит через середину отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон. *Построение Кириками* (2010 г.) — пересечение в одной точке прямых Гаусса трех четырёхугольников, образованных в треугольнике чевианами произвольной точки. *Окружность Эйлера (9-ти точек)* — проходит через середины 3-х сторон и основания высот треугольника. Ее центр лежит на *прямой Эйлера* в середине отрезка  $ОН$  (соединяющего центр описанной окружности и ортоцентр), её радиус равен половине радиуса описанной окружности.

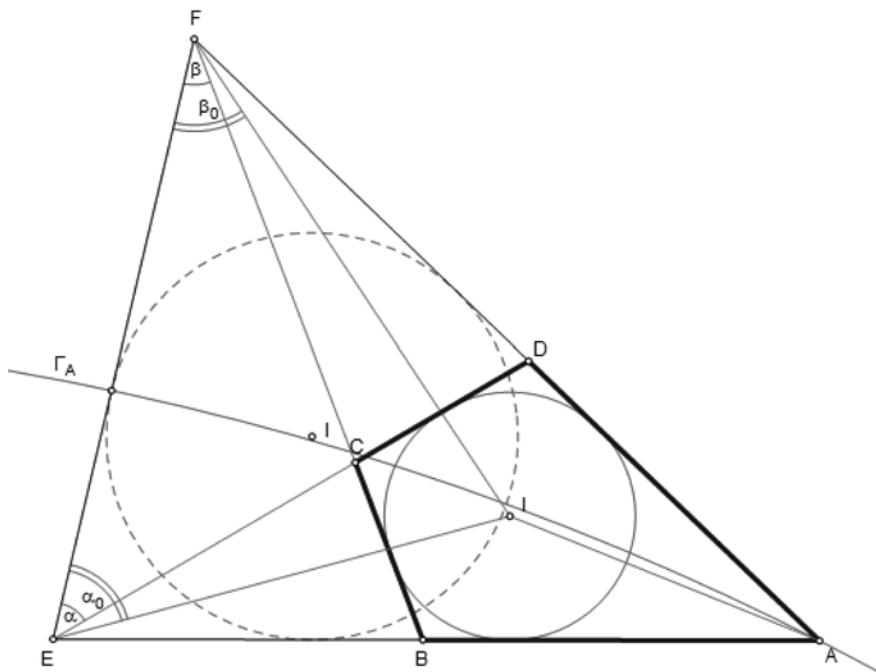


Рис. 1

## 2. Описанные четырёхугольники

См. рис 1. В литературе имеют название Tangential quadrilateral (иногда — circumscribed или circumscribable).

### 2.1. Общие положения

Пусть задан  $\triangle AEF$ . Фиксируем вершину  $A$ . Проведем из вершин  $E, F$  чевианы, чтобы образовавшийся четырёхугольник  $ABCD$  был описанным, т. е. в него можно вписать окружность. Введем обозначения:  $I$  — центр вписанной в четырёхугольник окружности, углы наклона чевиан  $ED, FB$  к стороне  $EF$  —  $\alpha, \beta$  соответственно. Проведем прямые  $EI, FI$ ,  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  — углы наклона этих прямых к стороне  $EF$ . Прямые  $AI, EI, FI$  пересекаются в точке  $I$ . Применим теорему Чебы:

$$\frac{\sin(E - \alpha_0)}{\sin \alpha_0} \cdot \frac{\sin \beta_0}{\sin(F - \beta_0)} \cdot \frac{\sin A/2}{\sin A/2} = 1 \Rightarrow \sin(E - \alpha_0) \sin \beta_0 = \sin \alpha_0 \sin(F - \beta_0). \quad (1)$$

Так как прямые  $EI, FI$  — биссектрисы  $\triangle AED$  и  $\triangle AEB$ , то

$$\alpha_0 - \alpha = E - \alpha_0; \quad \beta_0 - \beta = F - \beta_0. \quad (2)$$

Применим известную формулу:  $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$  и после несложных преобразований с учетом (2), получим

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin E - \sin F}{\sin A}. \quad (3)$$

Пусть

$$k = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{1 + k}{1 - k}; \quad (3a)$$

$$k = \frac{\sin E - \sin F}{\sin A} = \frac{\sin E - \sin F}{\sin(E + F)} = \frac{\sin \frac{E - F}{2}}{\sin \frac{E + F}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{E}{2} - \operatorname{tg} \frac{F}{2}}{\operatorname{tg} \frac{E}{2} + \operatorname{tg} \frac{F}{2}} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \frac{E}{2}}{\operatorname{tg} \frac{F}{2}} = \frac{1 + k}{1 - k} \quad (3б)$$

Подставляя (3б) в (3a), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{E}{2}}{\operatorname{tg} \frac{F}{2}}. \quad (4)$$

Следовательно, доказана

**Теорема 1.** Пусть в произвольном треугольнике проведены чевианы из 2-х вершин стороны, противоположной выбранной вершине, под углами  $\alpha, \beta$  к ней. Образовавшийся четырёхугольник будет описанным, если и только если выполняются условия (3), (4).

Подобные условия определяют построение описанных четырёхугольников относительно любой вершины треугольника. Задавая угол  $\alpha$ , вычисляем угол  $\beta$  и наоборот. Таким образом, в произвольном треугольнике всегда можно построить 3 семейства описанных четырёхугольников, вершины «С» которых лежат на пересечении соответствующих чевиан.

Ж-П Эрмани [4] показал, что геометрическим местом вершин «С» описанных четырёхугольников является гипербола, которая проходит через выбранную вершину треугольника и точку касания его вписанной окружности с противоположной стороной. При этом  $CE - CF = AE - AF$  (геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух данных точек  $E, F$  есть величина постоянная).

Следовательно, в любом треугольнике всегда можно построить три гиперболы  $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ . Найдем точку пересечения трех гипербол. Составим систему 3-х уравнений построения описанного четырёхугольника относительно вершин треугольника по формуле (4). Для удобства рассмотрим  $\triangle ABC$  с общепринятыми обозначениями:  $r, s, s - a, s - b, s - c, R, r_a, r_b, r_c$ . Здесь  $s$  — полупериметр,  $r_a, r_b, r_c$  — радиусы соответствующих внеписанных окружностей (рис. 2).

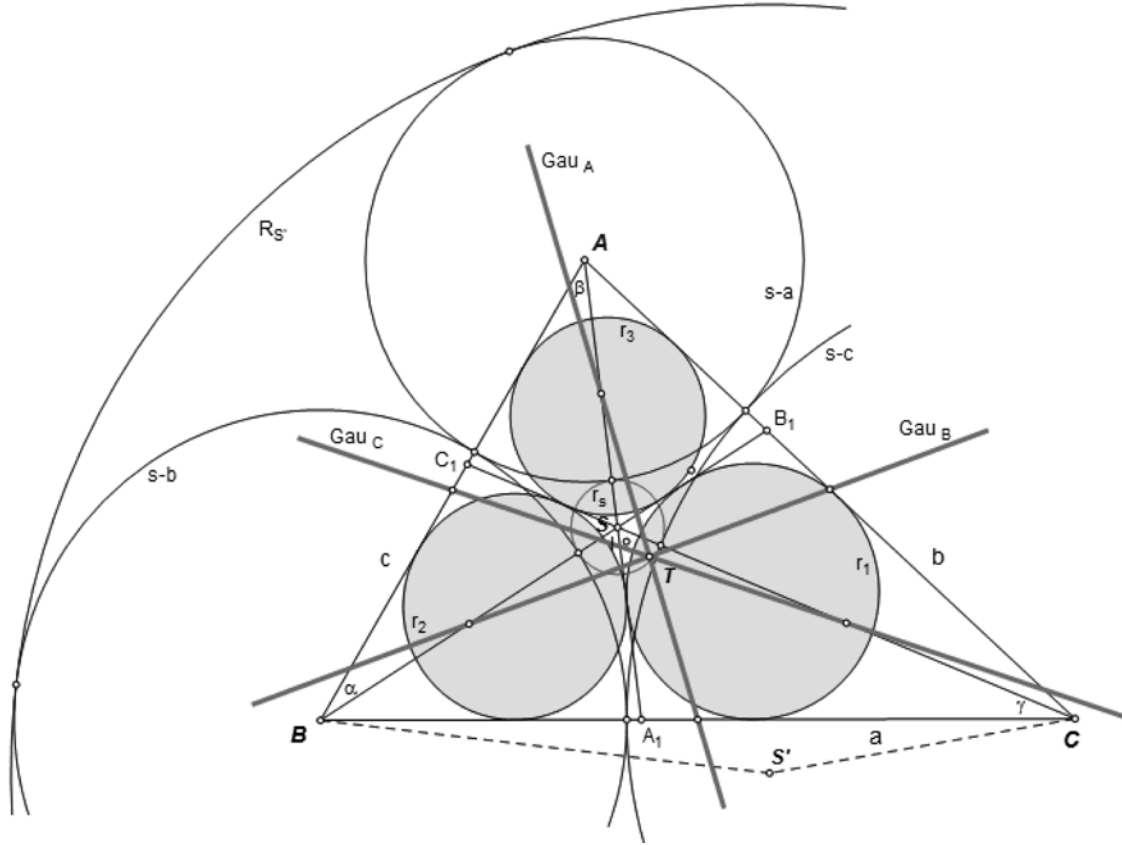


Рис. 2

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = k_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; \quad (5) \quad \operatorname{tg} \frac{A-\beta}{2} = k_2 \operatorname{tg} \frac{C-\gamma}{2}; \quad (6) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = k_3 \operatorname{tg} \frac{B-\alpha}{2}. \quad (7)$$

При этом

$$k_1 = \frac{\operatorname{tg} B/2}{\operatorname{tg} A/2}; \quad k_2 = \frac{\operatorname{tg} A/2}{\operatorname{tg} C/2}; \quad k_3 = \frac{\operatorname{tg} C/2}{\operatorname{tg} B/2}; \quad t_a = \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad t_b = \operatorname{tg} \frac{B}{2}; \quad t_c = \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

Решение системы уравнений (5)–(7) после несложных, но достаточно трудоемких преобразований сводится к решению квадратного уравнения. В результате имеем 2 решения.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_{1,2}}{2} = \frac{t_b}{1 \pm t_b \pm t_a}; \quad (8) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_{1,2}}{2} = \frac{t_a}{1 \pm t_b \pm t_a}; \quad (9) \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma_{1,2}}{2} = \frac{t_c}{1 \pm t_b \pm t_a}. \quad (10)$$

Анализ формул (8)–(10) показал, что это, вероятно, есть формулы для построения центров окружностей Содди. Знак «+» — для центра «S» малой (внутренней) окружности; знак «−» — для центра «S'» большой (внешней). Более подробную информацию об этих точках можно получить в Энциклопедии К. Кимберлинга [5] — точки  $X_{176}$ ,  $X_{175}$ . Строгий читатель, безусловно, потребует обоснование этого утверждения. Докажем это. Рассмотрим, например,  $\triangle SAB$ , где S — центр малой окружности Содди (рис.2). По теореме синусов

$$\frac{SA}{\sin \alpha} = \frac{SB}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}; \quad SA = r_8 + s - a; \quad SB = r_8 + s - b;$$

$r_8$  — радиус малой окружности Содди.

Далее нам потребуются некоторые известные формулы (см. Г.С.М. Кокстер [6]).

$$\frac{1}{r_{S(S')}} = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \pm \frac{2}{r}; \quad (11)$$

$$4R + r = r_a + r_b + r_c; \quad r_S = \frac{S}{4R + r + 2s}; \quad (11a)$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_a r_c = s^2; \quad S = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = rs. \quad (11b)$$

$$SA = \frac{S}{4R + r + 2s} + \frac{S}{r_a} = \frac{S(4R + r + 2s + r_a)}{r_a(4R + r + 2s)};$$

Аналогично

$$SB = \frac{S(4R + r + 2s + r_b)}{r_b(4R + r + 2s)}, \quad \frac{SA}{SB} = \frac{r_b(4R + r + 2s + r_a)}{r_a(4R + r + 2s + r_b)}. \quad (12)$$

Теперь рассмотрим  $\triangle S_1AB$ , где  $S_1$  — точка, определяемая формулами (8), (9). Зная тангенсы половинных углов  $\alpha$ ,  $\beta$ , найдем синусы этих углов по формуле

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha/2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha/2}.$$

Для точки « $S_1$ » имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha(\beta)}{2} &= \frac{t_b(t_a)}{1 + t_b + t_a} = \frac{r_b(r_a)}{r_a + r_b + s} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2r_b(r_a + r_b + s)}{(r_a + r_b + s)^2 + r_b^2}; \\ \sin \beta &= \frac{2r_a(r_a + r_b + s)}{(r_a + r_b + s)^2 + r_a^2} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{r_b}{r_a} \cdot \frac{(r_a + r_b + s)^2 + r_a^2}{(r_a + r_b + s)^2 + r_b^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Проведя соответствующие преобразования в (13) с учетом формул (11a), (11b), мы убедимся в тождественности формул (12) и (13). Читатель может проверить это самостоятельно. Следовательно, точки  $S$  и  $S_1$  совпадают. Аналогичное доказательство для центра  $S'$  — большой окружностям Содди.

## 2.2. Определение радиусов окружностей, вписанных в три четырёхугольника

См. рис. 2. Итак, точка  $S$  пересечения чевиан  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  образует три четырёхугольника:  $CA_1SB_1$ ;  $BC_1SA_1$ ;  $AB_1SC_1$ , в которые вписаны окружности с радиусами:  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  соответственно. Рассмотрим  $\triangle ABB_1$ , применим известную формулу

$$r_3 = \frac{c}{\operatorname{ctg} A/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2}; \quad (14a)$$

$$\operatorname{ctg} A/2 = \frac{s-a}{r}; \quad \operatorname{ctg} \alpha/2 = \frac{1 + t_b + t_a}{t_b} = \frac{s-b}{r} + 1 + \frac{s-b}{s-a}; \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} A/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2 = \frac{s-a}{r} + \frac{s-b}{r} + 1 + \frac{s-b}{s-a} = \frac{c}{r} + \frac{c}{s-a}; \quad \frac{1}{r_3} = \frac{\operatorname{ctg} A/2 + \operatorname{ctg} \alpha/2}{c}. \quad (14b)$$

Итак.

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s-a}; \quad (15a) \quad \text{или} \quad \frac{1}{r_3} - \frac{1}{s-a} = \frac{1}{r}. \quad (15b)$$

По аналогии

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s-b}; \quad (16a) \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{s-b} = \frac{1}{r}; \quad (16b)$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s-c}; \quad (17a) \quad \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s-c} = \frac{1}{r}. \quad (17b)$$

Для удобства изложения введем хорошо известное понятие кривизны окружности как величины, обратной ее радиусу. Имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть в произвольном  $\triangle ABC$  построены (пересечением чевиан через точку  $S$ ) три одновременно описанных четырёхугольника. Тогда разность кривизн каждой пары соответствующих окружностей  $(r_1, s - c; r_2, s - b; r_3, s - a)$  — величина постоянная и равна кривизне вписанной в данный треугольник окружности.

Произведем сложение (15)–(17), получим:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r} + \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + \frac{2}{r} \right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_S}. \quad (18)$$

Выражение в скобках — уравнение малой окружности Содди — формула (11). Справедлива следующая

**Теорема 3.** Сумма кривизн 3-х окружностей, вписанных в 3 четырёхугольника, образованных пересечением чевиан через центр малой окружности Содди, равна сумме кривизны вписанной окружности треугольника и его малой окружности Содди.

В заключение этого раздела представляется важным отметить следующее:

прямые Гаусса ( $\text{Gau}_A, \text{Gau}_B, \text{Gau}_C$ ) трёх четырёхугольников  $(SC_1AB_1; SA_1BC_1; SA_1CB_1)$  соответственно пересекаются в одной точке  $T$ , которая является изображением Кириками точки  $S$  (рис. 2). Аналогично, прямые Гаусса трёх 4-угольников, построенных для центра  $S'$  большой окружности Содди, также пересекаются в одной точке. Причем и эта точка является изображением Кириками точки  $S'$  (см. построение Кириками точки  $X_{3589}$  в [5]).

### 2.3. Определение радиусов окружностей, вписанных в три треугольника

Пусть вершины  $\triangle ABC$  (рис. 3) соединены с точкой  $S$ , в образованные треугольники  $(CSB, BSA, ASC)$  вписаны окружности с радиусами  $r_4, r_5, r_6$  соответственно. Рассмотрим  $\triangle BSA$  и воспользуемся формулой (14б)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_5} &= \frac{\text{ctg } \alpha/2 + \text{ctg } \beta/2}{c}; & \text{ctg } \alpha/2 &= \frac{s-b}{r} + 1 + \frac{s-b}{s-a}; \\ \text{ctg } \beta/2 &= \frac{s-a}{r} + 1 + \frac{s-a}{s-b} \Rightarrow \frac{1}{r_5} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}; \end{aligned} \quad (19)$$

Аналогично

$$\frac{1}{r_6} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-c}; \quad (20) \quad \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}. \quad (21)$$

Произведем сложение (19), (20), (21):

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} = 2 \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + \frac{2}{r} \right) - \frac{1}{r} = \frac{2}{r_S} - \frac{1}{r} \quad (22)$$

Заметим, что и здесь выражение в скобках равно  $1/r_8$  — формула (11). Перепишем уравнение (22):

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} - \frac{2}{r_S}. \quad (23)$$



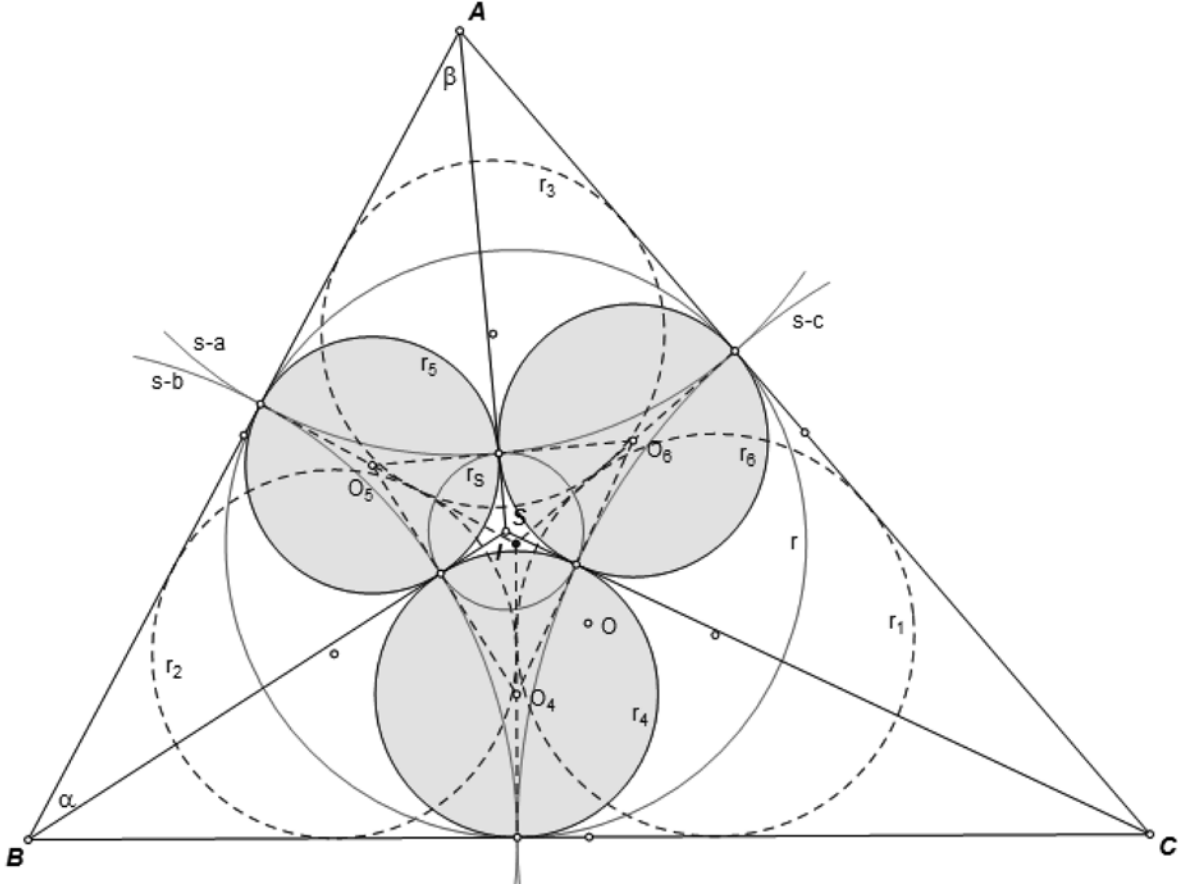


Рис. 3

Уравнение (23) показывает, что вписанная в  $\triangle ABC$  окружность  $(I, r)$  является большой окружностью Содди для треугольника центров  $O_4, O_5, O_6$  окружностей  $r_4, r_5, r_6$ . Причем знак «-» и указывает на вогнутый характер окружности « $r$ ». Любопытно, что каждая из 3-х взаимнокасающихся окружностей  $\triangle ABC - s - a, s - b, s - c$  — является большой окружностью Содди треугольников  $BSC, ASC, ASB$  соответственно. Рассмотрим, например,  $\triangle BSC, r_4$  — его вписанная окружность. Домножим в формуле (21) все члены уравнения на 2, тогда

$$\frac{2}{r_4} = \frac{2}{r} + \frac{2}{s-b} + \frac{2}{s-c} = \frac{1}{r_S} - \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-c} + \frac{2}{s-b} + \frac{2}{s-c}$$

или

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + \frac{1}{r_S} - \frac{2}{r_4}.$$

Это и есть уравнение большой окружности Содди  $\triangle BSC$ . Преобразуем формулы (19,20,21):

$$\frac{1}{r_5} + \frac{1}{s-c} = \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} + \frac{2}{r} \right) - \frac{1}{r} = \frac{1}{r_S} - \frac{1}{r}. \quad (19a)$$

Аналогично

$$\frac{1}{r_6} + \frac{1}{s-b} = \frac{1}{r_S} - \frac{1}{r}; \quad (20a) \quad \frac{1}{r_4} + \frac{1}{s-a} = \frac{1}{r_S} - \frac{1}{r}. \quad (21a)$$

Сформулируем теорему, подобную теореме 2:

**Теорема 4.** Пусть в  $\triangle ABC$  построены (пересечением чевиан через точку  $S$ ) 3 треугольника. Тогда сумма кривизн соответствующих пар окружностей  $(r_4, s-a; r_5, s-c; r_6, s-b)$  — величина



### 3.1. Общие положения

Пусть задан  $\triangle AEF$ . Фиксируем вершину  $A$ . Проведем из вершин  $E, F$  чевианы  $ED$  и  $FB$  под углами  $\alpha, \beta$  к стороне  $EF$  соответственно, чтобы образовавшийся четырёхугольник  $ABCD$  был вписанным. Хорошо известно, что окружность с радиусом, равным радиусу описанной вокруг треугольника окружности, проходит через 2 его вершины и ортоцентр. Обозначим эту окружность  $L_A$  ( $O_A, R$ ). Из вершин треугольника опустим высоты, пусть  $H$  — ортоцентр. Углы  $\phi$ , образованные чевианами  $ED, FB$  и высотами  $EN, FK$ , равны (вписаны в окружность  $L_A$  и опираются на дугу  $CH$ ).

$$\angle FBA = EDF = 90^\circ + \phi \Rightarrow \angle EDA = 180^\circ - (90^\circ + \phi) = 90 - \phi. \quad \angle FCD = \alpha + \beta.$$

Противоположные углы четырёхугольника  $ABCD$ :  $B + D = 90^\circ + \phi + 90^\circ - \phi = 180^\circ$ , это означает, что он вписанный.

$$A + C \Rightarrow 180 - (\alpha + \beta) + A = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = A. \quad (25)$$

Итак, справедлива

**Теорема 6.** В произвольном треугольнике геометрическое место вершин «С» семейства вписанных четырёхугольников (относительно любой из его вершин) — окружность « $L_i$ » ( $O_A; R$ ), проходящая через 2 другие вершины и с радиусом, равным радиусу его описанной окружности. При этом сумма углов наклона  $\alpha, \beta$  чевиан к стороне, противоположной выбранной вершине, равна углу при этой вершине.

Следует отметить, что все описанные окружности « $n$ » вокруг четырёхугольников  $ABCD$  пересекают окружность « $L_i$ » в двух точках — вершине «С» и точке « $Q$ » (пересечение соответствующей медианы и окружности « $L_i$ »). Очевидно, что в точке « $Q$ » указанные окружности касаются друг друга (пунктирная окружность). Пусть  $AC$  и  $BD$  — диагонали четырёхугольника  $ABCD$ .  $P$  — точка их пересечения (рис. 4а).

Точки  $M, N$  — середины диагоналей. Как известно, в любом треугольнике расстояние от центра описанной окружности до его стороны вдвое меньше расстояния от ортоцентра этого треугольника до противоположной вершины, а именно —  $M_A O = AH/2$  (Б. Делоне, [7]) и, следовательно, четырёхугольник  $O_A OAH$  — параллелограмм ( $OO_A = AH$ ). Точка « $Eu$ » — пересечения диагоналей параллелограмма — центр окружности Эйлера  $\triangle AEF$ . Рассмотрим  $\triangle O_A CA$ , проведем среднюю линию  $EuM$ , тогда точка  $M$  — середина диагонали  $AC$ . Значит  $EuM = O_A C/2 = R/2$ , что соответствует радиусу окружности Эйлера  $\triangle AEF$ . (Напомним, что радиус окружности Эйлера любого треугольника всегда равен половине радиуса его описанной окружности). Сформулируем следующую теорему:

**Теорема 7.** Геометрическое место точек « $M$ » середин диагоналей  $AC$  (выбранная вершина « $A$ »  $\triangle AEF$  до точки «С» на окружности « $L_A$ ») построенного в этом треугольнике произвольного вписанного четырёхугольника, есть окружность Эйлера этого треугольника.

Имеет место и обратная теорема

**Теорема 7а.** Построенный в треугольнике (пересечением чевиан из двух вершин) четырёхугольник будет вписанным, если точка « $M$ » — середина диагонали, проходящей через выбранную вершину, — лежит на окружности Эйлера этого треугольника.

**Доказательство.** Проведем отрезки  $EuM, O_A C$ . В  $\triangle AO_A C$  — отрезок  $O_A C = 2 \cdot R/2 = R$ . Следовательно вершина «С» четырёхугольника лежит на окружности « $L_A$ » и в соответствии с теоремой 6 он является вписанным.

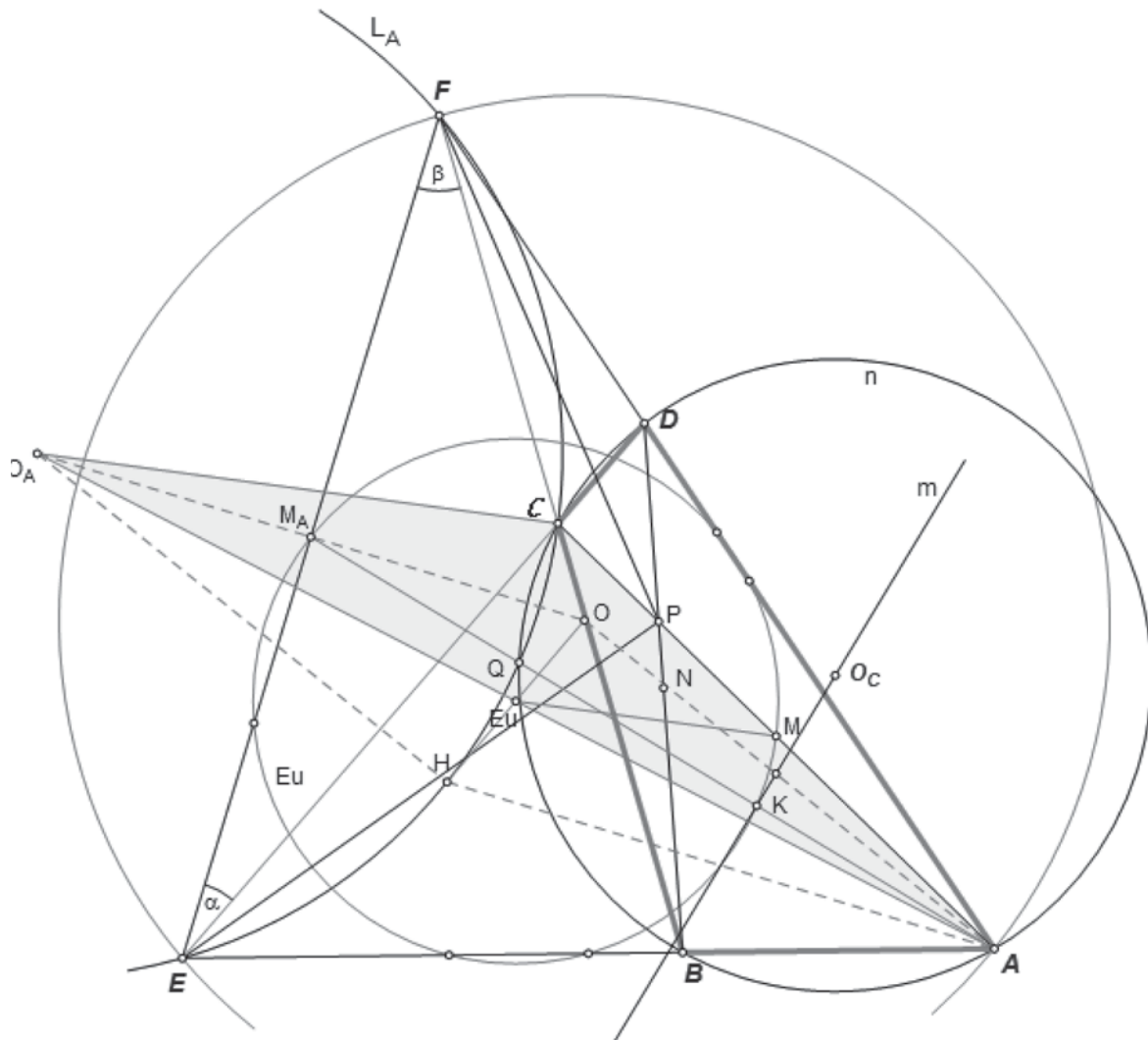


Рис. 4а

**Следствие 1.** Отрезок произвольной прямой, проходящей через вершину  $A$  (от вершины до пересечения с окружностью « $L_A$ »), дважды делится пополам в точках его пересечения с окружностью Эйлера.

**Следствие 2.** Теоремы 6 и 7 дают возможность оперативного построения вписанных четырёхугольников путем выбора либо точки « $M$ » на окружности Эйлера, либо точки « $C$ » на окружности « $L_A$ ». При этом возможно построение как выпуклых, так и самопересекающихся четырёхугольников, для которых эти теоремы также действительны. Отметим, что описанные окружности « $n$ » семейства четырёхугольников  $ABCD$  проходят через точки  $Q$  и  $A$  (при выбранной вершине  $A$ ). Отрезок  $AQ$  лежит на медиане  $\triangle AEF$ , проведенной из этой вершины.

В соответствии со Следствием 1 это есть точка  $K$  пересечения медианы и окружности Эйлера. Тогда справедлива

**Теорема 8.** Геометрическим местом точек центров описанных окружностей четырёхугольников  $ABCD$  (при выбранной вершине) является прямая « $m$ », перпендикулярная отрезку  $AQ$  в его середине.

Здесь целесообразно отметить еще одну важную особенность вписанных четырёхугольников, которая сформулирована в теореме Брокера [8]: ортоцентр  $\triangle EPF$  — точка  $O_C$  — одновременно явля-

ется центром описанной окружности четырёхугольника  $ABCD$ .

### 3.2. Окружность Микеля и сопутствующие элементы

Сейчас рассмотрим 4 треугольника  $ECB$ ,  $EDA$ ,  $FCB$ ,  $FBA$  (рис. 5), которые получаются при построении вписанного четырёхугольника  $ABCD$ .

Хорошо известно, что в соответствии с теоремой Микеля-Шнейдера для четырёхсторонника четыре окружности, описанные вокруг этих четырёх треугольников, пересекаются в одной точке Микеля (Miquel point). Также известно, что 4 центра этих окружностей лежат на одной окружности Микеля ( $O_{Mi}$ ;  $R_{Mi}$ ). Если четырёхугольник вписанный, то точка Микеля всегда лежит на прямой  $EF$ . Введем обозначения:  $O_i$ ;  $R_i$  — центры и радиусы четырёх описанных окружностей —  $\triangle AEF$ : ( $O_A$ ;  $R_A$ ),  $\triangle ECB$ : ( $O_B$ ;  $R_B$ ),  $\triangle EDA$ : ( $O_E$ ;  $R_E$ ),  $\triangle FCD$ : ( $O_D$ ;  $R_D$ ),  $\triangle FBA$ : ( $O_F$ ;  $R_F$ ).

Окружность Микеля пересекает сторону  $EF$  в двух точках:  $Mi$  — (точка Микеля) и  $T$ . Пусть

$$\angle \delta = |90^\circ - (F + \alpha)| = |(E + \beta) - 90^\circ|, \quad (26a)$$

при этом значение угла « $\delta$ » необходимо брать по абсолютной величине (в зависимости от типа треугольника), тогда

$$\cos \delta = \sin(F + \alpha) = \sin(E + \beta). \quad (26)$$

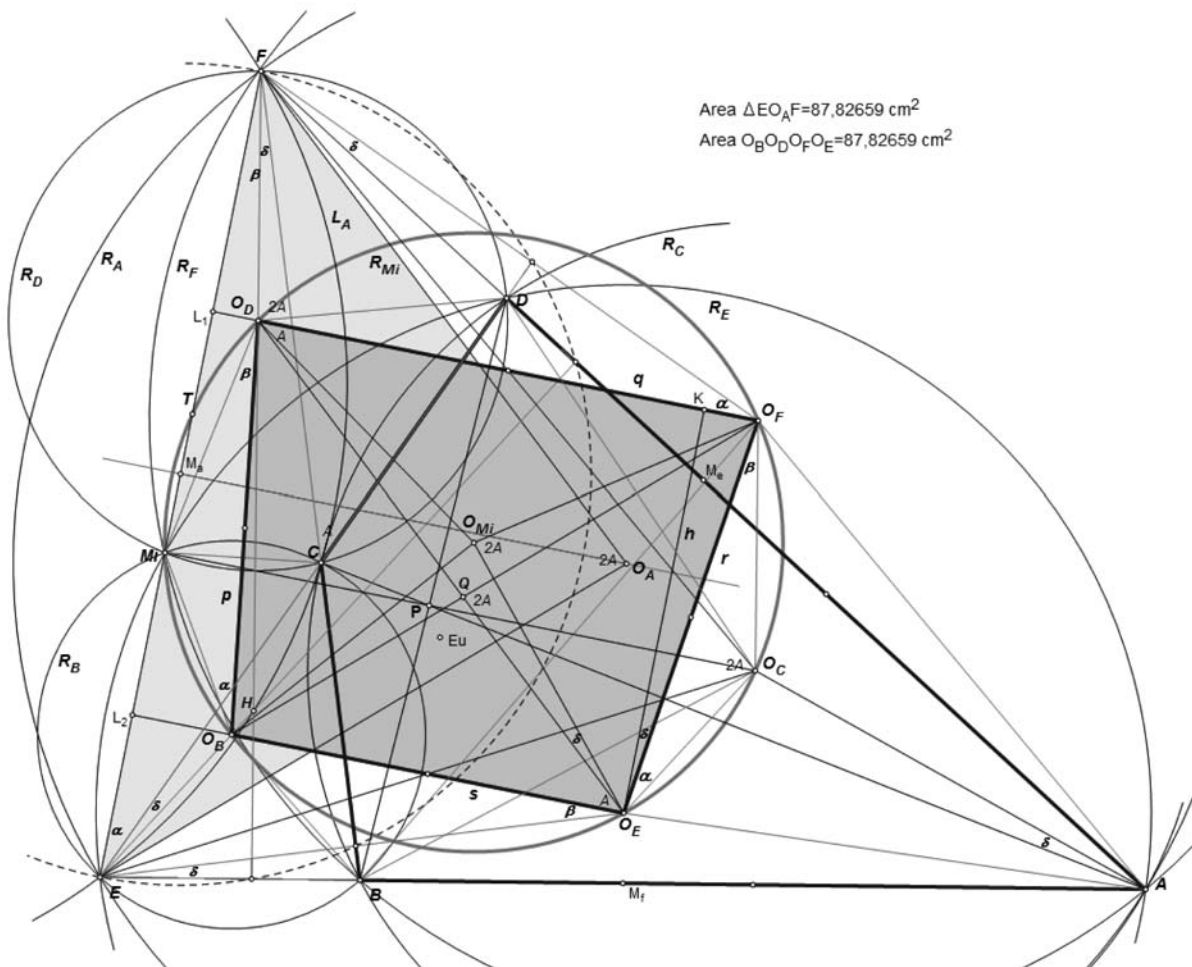


Рис. 5

Важной особенностью данной конструкции (вписанного четырёхугольника) является подобие 10-ти (!) равнобедренных треугольников с равными углами.  $\triangle EFO_A$  назовем базовым (угол при вер-

phine равен  $2A$ ) и ему подобные следующие девять:  $\triangle EO_B B$ ,  $\triangle EO_E D$ ,  $\triangle DO_D F$ ,  $\triangle BO_F F$ ,  $\triangle BO_C D$ ,

$$(\triangle O_B O_{Mi} O_D, \triangle O_E O_{Mi} O_F, \triangle O_B Q O_D, \triangle O_E Q O_F). \quad (A)$$

Подобие первых пяти треугольников очевидно — углы при вершине соответствующих треугольников являются центральными и равны  $2A$  по отношению к вписанным углам « $A$ » их описанных окружностей. Например,  $\triangle DO_D F$  —  $R_D$  его описанная окружность,  $\angle FCD = \alpha + \beta \Rightarrow \angle FCD = A$  — вписанный угол, тогда  $\angle FO_D D = 2A$  — центральный угол. Подобие остальных треугольников (в скобках) будет доказано ниже.

### 3.2.1. Вывод формул радиусов четырёх описанных окружностей, сторон и углов четырёхугольника, образованного их центрами

(пусть это будет четырёхугольник Микеля). Обозначим  $O_B O_D = p$ ;  $O_D O_F = q$ ;  $O_F O_E = r$ ;  $O_E O_B = s$ . В  $\triangle FCD$ :

$$FD = 2R_D \sin A. \quad (27)$$

Применим к  $\triangle EFD$  теорему синусов, тогда

$$\frac{FD}{\sin \alpha} = \frac{EF}{\sin(180 - (F + \alpha))};$$

с учетом (22)  $FD = EF \sin \alpha / \cos \delta$  и после подстановки в (27) получим

$$R_D = \frac{R_A \sin \alpha}{\cos \delta}. \quad (28)$$

По аналогии

$$R_B = \frac{R_A \sin \beta}{\cos \delta} \quad (29); \quad R_E = \frac{R_A \sin F}{\cos \delta} \quad (30); \quad R_F = \frac{R_A \sin E}{\cos \delta} \quad (31).$$

В  $\triangle Mi O_B C$  :  $\angle Mi O_B O_D = \alpha$ ;  $\angle Mi O_D O_B = \beta$  — как половины центральных углов  $\triangle Mi O_B$ ,  $\triangle Mi O_D C$ .

$$p = R_B \cos \alpha + R_D \cos \beta = \frac{R_A}{\cos \delta} (\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha).$$

Итак,

$$p = \frac{R_A \sin A}{\cos \delta}. \quad (32)$$

В  $\triangle EO_E L_2$ :

$$s = R_E \cos \beta - R_B \cos(90^\circ - (\alpha + \delta))$$

с учетом (25), (26) и, что  $\alpha + \delta = 90^\circ - F$  из (26а), получим

$$s = \frac{R_A \sin(F - \beta)}{\cos \delta}; \quad (33)$$

так же из  $\triangle FO_F L_1$

$$q = \frac{R_A \sin(E - \alpha)}{\cos \delta}. \quad (34)$$

Нахождение углов четырёхугольника Микеля. На рис. 5 рассмотрим четырёхугольник  $O_B O_D L_1 L_2$

$$\angle L_2 O_B O_D = 90^\circ - (\alpha + \delta) + \alpha = 90^\circ - \delta; \quad \angle O_D O_B O_E = 180 - (90 - \delta) = 90 + \delta = E + \beta; \quad (35)$$

$$\angle L_1 O_D O_B = 90^\circ - (\beta - \delta) + \beta = 90^\circ + \delta; \quad \angle O_B O_D O_F = 180 - (90 + \delta) = 90 - \delta = F + \alpha. \quad (36)$$

Следовательно,

$$\angle O_D O_B O_E = \angle CBA; \angle O_B O_D O_F = \angle CDA.$$

Так как 4 центра описанных окружностей лежат на одной окружности, то построенный четырёхугольник Микеля будет вписанным с суммами противоположных углов  $180^\circ$ .

Теперь можно подвести некоторые итоги:

1.  $O_B O_E \perp EF$ ;  $O_D O_F \perp EF$  — высоты равнобедренных  $\triangle E O_E M_i$  и  $\triangle F O_F M_i$  соответственно;
2. В соответствии с формулами (35), (36) сумма углов четырёхугольника, прилежащих к одной стороне, будет равна  $(E + \beta) + (F + \alpha) = E + F + A = 180^\circ$  и, следовательно, четырёхугольник  $O_B O_D O_F O_E$  — равнобочная трапеция;
3. Вписанные углы « $O_B$ », « $O_D$ » равны углам « $B$ », « $D$ » вписанного четырёхугольника  $ABCD$ . Здесь целесообразно отметить, что данное свойство присуще и произвольному четырёхугольнику.

Читатель может убедиться в этом самостоятельно, рассмотрев подобие соответствующих треугольников базовому. Значит, имеет место следующая

**Теорема 9.** *Если четырёхугольник  $ABCD$  — вписанный, то четырёхугольник, образованный центрами описанных вокруг четырёх треугольников окружностей, будет равнобочной трапецией. При этом основания трапеции всегда перпендикулярны отрезку  $EF$ , соединяющему точки пересечения противоположных сторон.*

Верна и обратная теорема. Рассмотрим трапецию со сторонами  $p, q, r, s$  и высотой  $O_E K = h$ . Применяя известные формулы, получим

$$O_D K = \frac{q + s}{2} = \frac{R_A}{2 \cos \delta} (\sin(E - \alpha) + \sin(F - \beta)) = R_A \cos A; \quad (37)$$

$$h = r \cos \delta = \frac{R_A \sin A \cos \delta}{\cos \delta} = R_A \sin A. \quad (38)$$

В  $\triangle O_D K O_E$ :  $\operatorname{tg} O_E O_D K = \frac{h}{O_D K} = \operatorname{tg} A$ , откуда следует, что  $\angle O_E O_D K = A$ . Это означает, что 4 треугольника  $\triangle O_B O_{M_i} O_D$ ,  $\triangle O_E O_{M_i} O_F$ ,  $\triangle O_B Q O_D$ ,  $\triangle O_E Q O_F$  являются подобными базовому  $\triangle E F O_A$  (см. (А), 3.2). Из  $\triangle O_B O_{M_i} O_D$ :  $p = 2R_{M_i} \sin A$ , и с учетом формулы (32) получим

$$R_{M_i} = \frac{R_A}{2 \cos \delta}. \quad (39)$$

Из  $\triangle AEF$  следует, что  $EF = 2R_A \sin A$ . Это значит, что высота трапеции

$$h = R_A \sin A = \frac{EF}{2}. \quad (38a)$$

Средняя линия трапеции численно равна  $O_D K = R_A \cos A$ , тогда длина диагонали трапеции из треугольника  $O_D O_E K$  будет равна по теореме Пифагора с учетом (37), (38),

$$O_D O_E = O_B O_F = R_A. \quad (40)$$

Диагонали трапеции равны радиусу описанной окружности  $\triangle AEF$ . Площадь равнобочной трапеции

$$S_{Tp} = O_D K \cdot h = R_A \cos A \cdot R_A \sin A = \frac{R_A^2 \sin 2A}{2}. \quad (41)$$

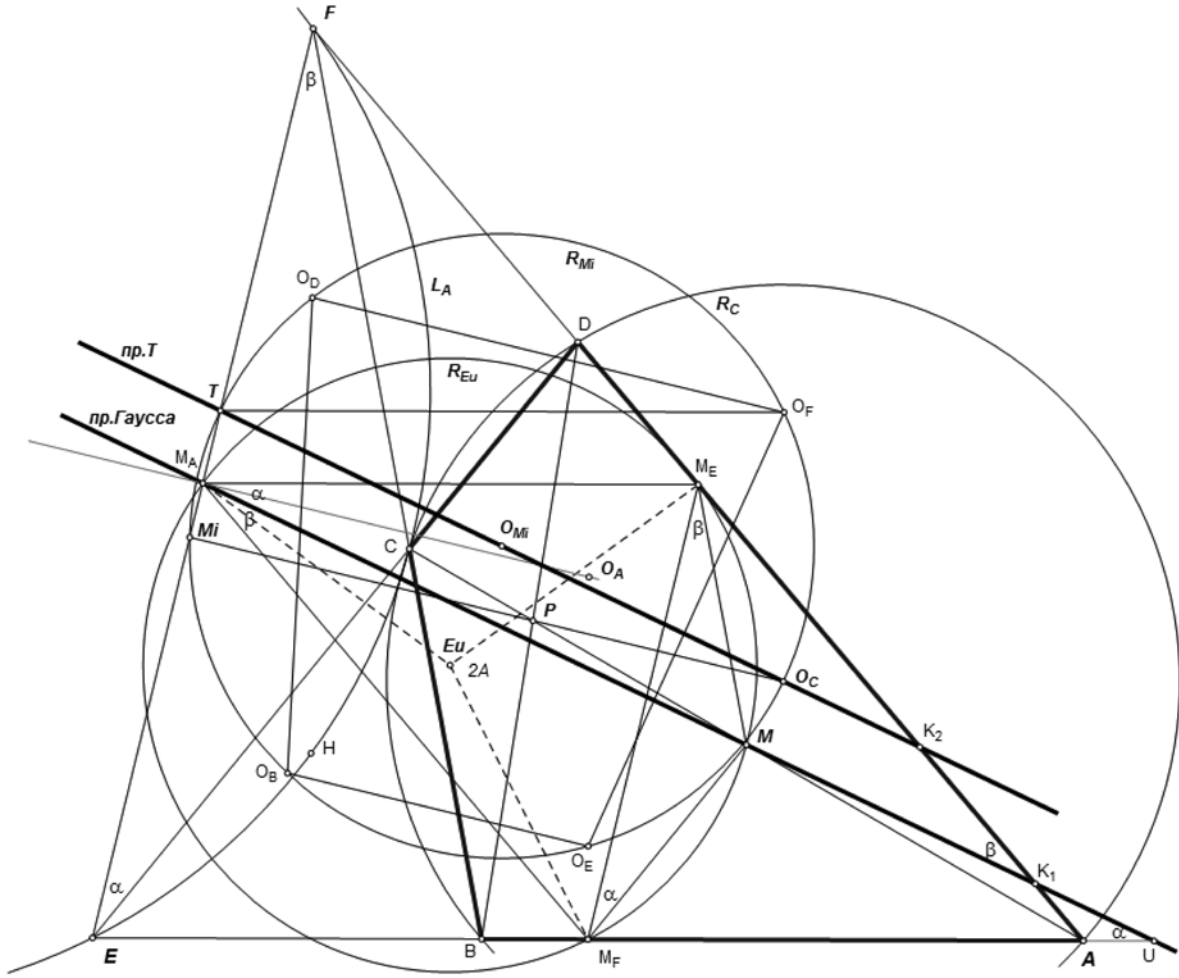


Рис. 6

**Следствие 3.** 1) Если в формуле (26)  $\delta = 0$ , то  $E + \beta = F + \alpha = 90^\circ$ ,  $FB$ ,  $ED$  — высоты и четырёхугольник Микеля — прямоугольник. При этом 4 центра описанных окружностей лежат на окружности Эйлера  $\triangle AEF$  и окружность Микеля совпадает с ней. Если угол  $A = 45^\circ$ , то  $h = O_D K$  (формулы (37), (38)), в этом случае четырёхугольник Микеля — квадрат.

2) Основания равнобокой трапеции являются геометрическим местом точек середин отрезков, проведенных из вершин  $E$ ,  $F$  к линии  $MiO_C$ .

Это следует из того, что основания трапеции и линия  $MiO_C$  перпендикулярны отрезку  $EF$ , точки  $L_1$ ,  $L_2$  делят отрезки  $FMi$  и  $EMi$  пополам и высота трапеции  $h = 1/2 EF$ . Здесь необходимо сделать уточнение, связанное с перпендикулярностью отрезков  $MiO_C$  и  $EF$ .

Известна следующая теорема:

Если четырёхугольник вписанный, то линия, соединяющая центр его описанной окружности с точкой пересечения диагоналей перпендикулярна линии, которая соединяет точки пересечения его противоположных сторон [9].

Из формулы площади трапеции следует, что она зависит только от параметров исходного треугольника  $AEF$ . Теперь вычислим площадь базового  $\triangle EFO_A$ . Имеем

$$S_{EFO_A} = \frac{EF \cdot M_A O_A}{2} = \frac{2R_A \sin A \cdot R_A \cos A}{2} = \frac{R_A^2 \sin 2A}{2}. \quad (42)$$



Сравнивая формулы (41) и (42), видим их тождественность. Итак, верна

**Теорема 10.** *Во вписанном четырёхугольнике  $ABCD$  площадь его равнобокой трапеции Микеля равна площади базового  $\triangle EFO_A$ .*

**Следствие 4.** *В заданном треугольнике  $AEF$  изменение конфигурации вписанного четырёхугольника ( $\alpha = \alpha_n$ ,  $\beta = \beta_n$ , но  $\alpha_n + \beta_n = A$ ) влечет за собой изменение параметров трапеции Микеля. Однако ее площадь остается неизменной.*

### 3.2.2. Построение прямой Гаусса

Это линия  $M_AU$  на рис. 6. Введем дополнительные построения и обозначения. Окружность Эйлера ( $E_u; R_{E_u}$ ),  $M_AM_EM_F$  — срединный треугольник, точки  $K_1$ ,  $U$  — пересечение линии Гаусса со сторонами  $AE$ ,  $AF$ . четырёхугольник  $M_AM_EM_F$  — параллелограмм и  $\angle M_EM_AM_F = \angle A$ . Отрезки  $M_FM$  и  $M_EM$  — средние линии  $\triangle AEC$  и  $\triangle AFC$  соответственно. Следовательно,  $\triangle EFC$  и  $\triangle M_EM_FM$  подобны. Из подобия треугольников следует, что

$$\angle M_EM_FM = \alpha; \quad \angle M_FM_EM = \beta; \quad \angle M_EM_AM = \alpha; \quad \angle M_FM_AM = \beta,$$

как вписанные углы, опирающиеся на те же самые дуги окружности Эйлера. Но в тоже время как накрест лежащие углы

$$\angle M_EM_AM = \angle M_AUE = \alpha; \quad (43) \quad \angle M_FM_AM = \angle M_AK_1F = \beta. \quad (44)$$

Следовательно, выполняется

**Теорема 11.** *Пусть в произвольном треугольнике из двух вершин проведены чевианы под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к стороне противоположной третьей вершине. Образовавшийся при этом четырёхугольник будет вписанным, если и только если углы наклона его прямой Гаусса к сторонам, составляющим 3-ю вершину, будут также равны  $\alpha$  и  $\beta$ .*

**Следствие 5.** *Во вписанном четырёхугольнике углы между одной из диагоналей и прямой Гаусса равны углам между другой диагональю и отрезком, соединяющим точки пересечения его противоположных сторон.*

Проведем дополнительные построения. Отрезок  $OF_T$  параллельно  $AE$ , линию  $T$  через точки  $O_c$  и  $T$ , тогда вписанный угол  $\angle OF_TO_c = \alpha$  (опирается на дугу  $OF_O_c = O_D O_{Mi}$ )  $\angle M_ATK_2 = 180 - (E + \alpha) = F + \beta$ . Но как внешний угол  $\triangle FTK_2$  он равен  $\angle M_ATK_2 = F + \angle TK_2F$ . После подстановки получаем

$$\angle TK_2F = \beta. \quad (45)$$

Это означает, что прямая  $T(O_cT)$  параллельна прямой Гаусса. Итак, верна

**Теорема 12.** *Прямая, проходящая через ортоцентр  $\triangle EFP$  и центр окружности Микеля, параллельна прямой Гаусса, если и только если четырёхугольник  $(ABCD)$  — вписанный.*

Следует отметить, что отрезок этой прямой от точки ее пересечения с линией, соединяющей точки пересечения противоположных сторон, до центра описанной окружности четырёхугольника — диаметр окружности Микеля. Так как  $\triangle MiO_cT$  — прямоугольный (см. Следствие 3, п. 2), центр его описанной окружности  $O_{Mi}$  — середина гипотенузы  $O_cT$ . Вышеизложенное позволяет сформулировать и решить две задачи:

1. Возможность быстрого построения центров описанных окружностей четырёх треугольников и окружности Микеля:

- пусть задан вписанный четырёхугольник  $ABCD$  (или в произвольном треугольнике строим окружность  $L_A$ , выбираем точку  $C$  на ней и проводим чевианы);
- строим его линию Гаусса;
- через центр описанной окружности четырёхугольника  $O_C$  строим прямую  $T$ , параллельную прямой Гаусса;
- через середину отрезка  $O_C T$  как на диаметре проводим окружность — искомую окружность Микеля;
- через середины сторон  $M_E, M_F$  проводим перпендикуляры к ним до пересечения с окружностью Микеля в точках  $O_E$  и  $O_F$ ;
- через  $O_E$  и  $O_F$  проводим перпендикуляры к  $EF$  до пересечения с окружностью Микеля в точках  $O_B$  и  $O_D$  или к серединам сторон  $BC, CD$  — перпендикуляры к ним до пересечения с окружностью Микеля;
- четырёхугольник  $O_B O_D O_F O_E$  есть искомая равнобокая трапеция (прямоугольник, квадрат). Следует отметить, что для каждого вписанного четырёхугольника существует только один четырёхугольник Микеля — равнобокая трапеция.

2. Построение вписанного четырёхугольника  $ABCD$  по заданному четырёхугольнику Микеля. При конкретной конфигурации четырёхугольника Микеля (равнобокой трапеции) такое построение неоднозначно. Это связано с тем, что существует бесконечное множество треугольников (назовем их “родственными”), имеющих равные  $R_A$  и угол « $A$ ». У родственных треугольников  $A_i E_i F_i$ :

$$S_{E_i O_i F_i} = \text{const} = S_{M_i} = R_A \sin A \cdot R_A \cos A$$

(см. формулы (41), (42). Перед началом построения необходимо отметить, что в заданном четырёхугольнике Микеля можно сразу определить —  $R_A, h$ , угол « $A$ » по вышеприведенным формулам.

Анализ показал, что можно построить геометрические места точек как родственного треугольника, так и искомого вписанного четырёхугольника. Родительские треугольники имеют следующие особенности — равные стороны  $EF$  (параллельные между собой) перпендикулярны основаниям трапеции и численно равны  $2h$ , стороны  $AE$  и  $AF$  должны пересекаться на окружности (вписанные углы « $A$ » равны), радиус их описанных окружностей —  $R_A$ . Ключевой точкой при построении естественно является точка Микеля, а окружность Микеля — ее геометрическое место точек.

Следует отметить, что сегменты окружности Микеля (боковые стороны трапеции) определяют геометрические места точек  $M_i$  для построения выпуклых вписанных четырёхугольников, тогда как сегменты окружности Микеля (основания трапеции) определяют вписанные самопересекающиеся четырёхугольники. При этом независимо от формы вписанного четырёхугольника соотношения площадей, радиусов, углов сохраняются.

Разумеется, и геометрические места других точек ( $A, B, C, D, E, F$ ) также будут определяться соответствующими сегментами. Такая полная симметричность объясняется подобием 10-ти треугольников (см. ранее), в которые входят все обозначенные точки. Итак, мы приходим к следующему способу построения (рис. 7).

Сначала строим базовый скелет будущей конструкции — заданную равнобокую трапецию ( $O_B O_D O_F O_E$ ) и описанную вокруг нее окружность Микеля ( $O_{M_i}; R_{M_i}$ ), затем 4 окружности с каждой стороны трапеции радиусами равными  $R_{M_i}$  и проходящими через ее вершины. Далее все очень просто.

На рис. 7 дан пример построения — точка Микеля  $M_{i1}$  ( $\triangle E_1 F_1 A_1$ ; четырёхугольник  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ), точка Микеля  $M_{i2}$  ( $\triangle E_2 F_2 A_2$ ; четырёхугольник  $A_2 B_2 C_2 D_2$ ).

Разумеется, точки  $Mi_1$ ,  $Mi_2$  и другие при построении вписанных родственных четырёхугольников должны лежать на соответствующих линиях  $EF$ . Подробности и обоснование построения будут даны ниже в разделе 5.

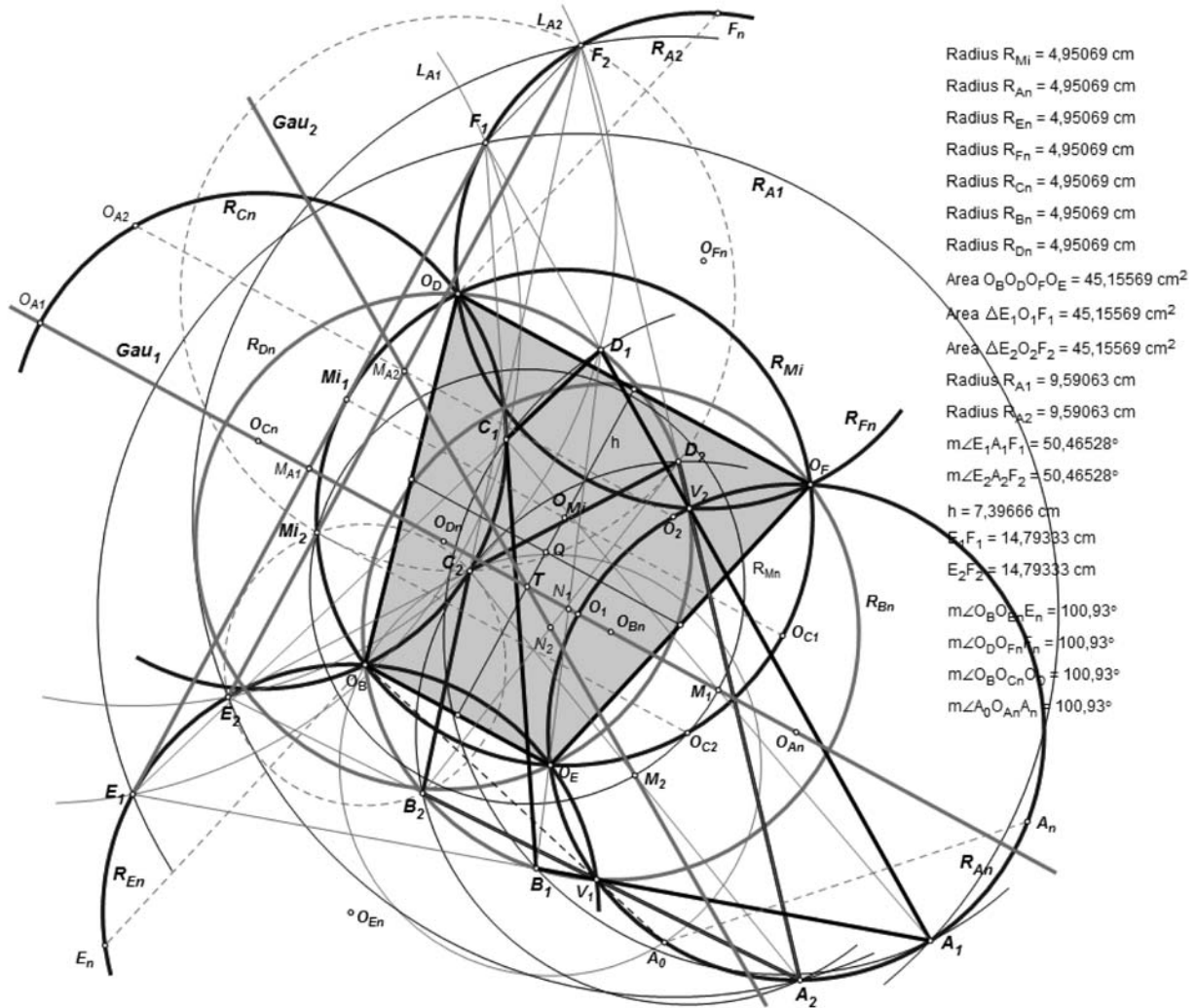


Рис. 7

#### 4. Площадь произвольного четырёхугольника

Сначала целесообразно напомнить формулу J.C. Salazar [10] площади бицентрического четырёхугольника (одновременно вписанного и описанного), а именно

$$S_{ABCD} = 2MN \cdot TQ, \quad (46)$$

где  $MN$  — отрезок, соединяющий середины диагоналей, точка  $T$  — пересечение линии Гаусса с окружностью  $L (M_A; EF/2)$ . Теперь рассмотрим произвольный четырёхугольник  $ABCD$  (рис. 8).

Определим его площадь с помощью теоремы Салазара [11]:

$$S_{ABCD} = 2S_{ENFM} = 4S_{FNM}. \quad (47)$$

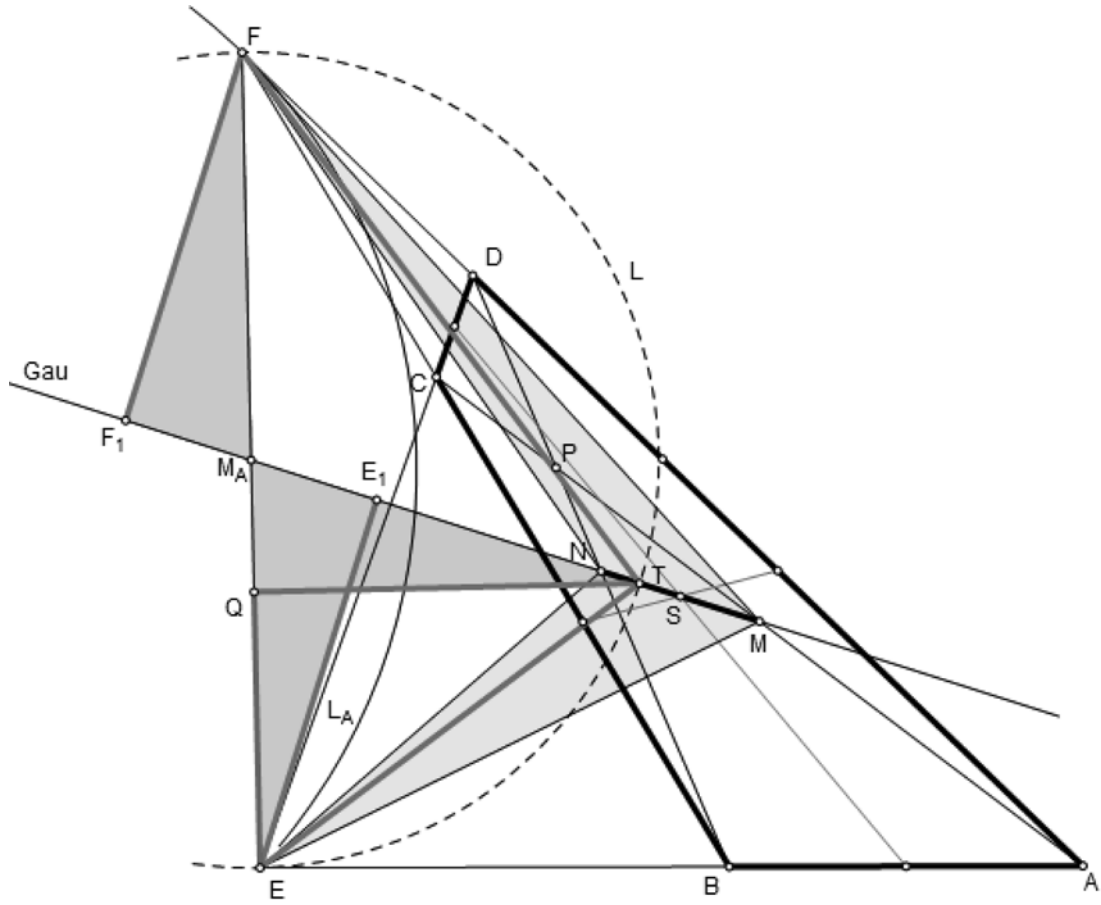


Рис. 8

Проведем высоты  $FF_1$ ,  $EE_1$  из вершин  $E$ ,  $F$  к прямой Гаусса и окружность  $L$  ( $M_A$ ;  $EF/2$ ). Отрезок  $TQ$  — высота  $\triangle EFT$ .

$$S_{FNM} = 1/2 MN \cdot FF_1. \quad (48)$$

$$\triangle FF_1M_A = \triangle EE_1M_A = \triangle TQM_A \Rightarrow FF_1 = EE_1 = TQ.$$

Следовательно,

$$S_{FNM} = 1/2 MN \cdot TQ. \quad (49)$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABCD} = 2MN \cdot TQ. \quad (50)$$

Формула Салазара для бицентрических четырёхугольников (46) тождественна формуле (50). Таким образом, формула Салазара — универсальна для всех типов четырёхугольников.

[illegible]

Пусть задан  $\triangle AEF$ . Фиксируем вершину  $A$ . Проведем из вершин  $E, F$  чевианы  $ED$  и  $FB$  под углами  $\alpha, \beta$  к стороне  $EF$  соответственно. Рассмотрим построение окружности Микеля для произвольного четырёхугольника  $ABCD$ . Введем обозначения:  $O_i, R_i$  — центры и радиусы описанных окружностей соответствующих треугольников.  $\triangle AEF$  ( $O_A, R_A$ );  $\triangle ECB$  ( $O_B, R_B$ );  $\triangle EDA$  ( $O_E, R_E$ );  $\triangle FCD$  ( $O_D, R_D$ );  $\triangle FBA$  ( $O_F, R_F$ ). Окружность Микеля — окружность, на которой лежат 4 центра описанных окружностей —  $O_E, O_B, O_D, O_F$  и точка Микеля —  $Mi$ .  $AMi$  — отрезок, соединяющий выбранную вершину и точку  $Mi$ .  $\angle FAMi = \varphi$ ;  $\angle EAMi = \theta$  при этом  $\varphi + \theta = A$ . Назовем четырёхугольник центров *четырёхугольником Микеля*. Так как  $\angle EAMi$  — вписанный угол  $\triangle EDA$ , тогда  $\angle EO_E Mi = 2\theta$ . В равнобедренном  $\triangle EO_E Mi \rightarrow \angle O_B O_E Mi = \theta$  Аналогично  $\angle O_D O_F Mi = \varphi$ . В  $\triangle O_B O_E O_D$

Найдем соотношение углов обоих четырёхугольников.  $R_E$  — описанная окружность вокруг  $\triangle EDA$ ,  $\angle AMiD = \angle AED = E - \alpha$  как вписанные углы.  $R_F$  — описанная окружность вокруг  $\triangle FBA$ ,  $\angle AMiB = \angle AFB = F - \beta$  как вписанные углы.  $\angle MiDF = E - \alpha + \varphi$  — внешний угол  $\triangle AMiD$  и одновременно вписанный угол окружности  $R_D$ .  $\angle MiO_D L_1 = \angle MiDF$  — половина центрального

$\angle MiO_DF$ . В то же время он является внешним углом  $\triangle MiO_FO_D$ . Следовательно, мы перешли к углам окружности Микеля:

$$\angle O_DMiO_F = (E - \alpha + \varphi) - \varphi = E - \alpha \quad (52)$$

— вписанный угол окружности Микеля. Проведя подобные вычисления для  $\triangle MiBE$ , получим

$$\angle O_BMiO_E = F - \beta. \quad (53)$$

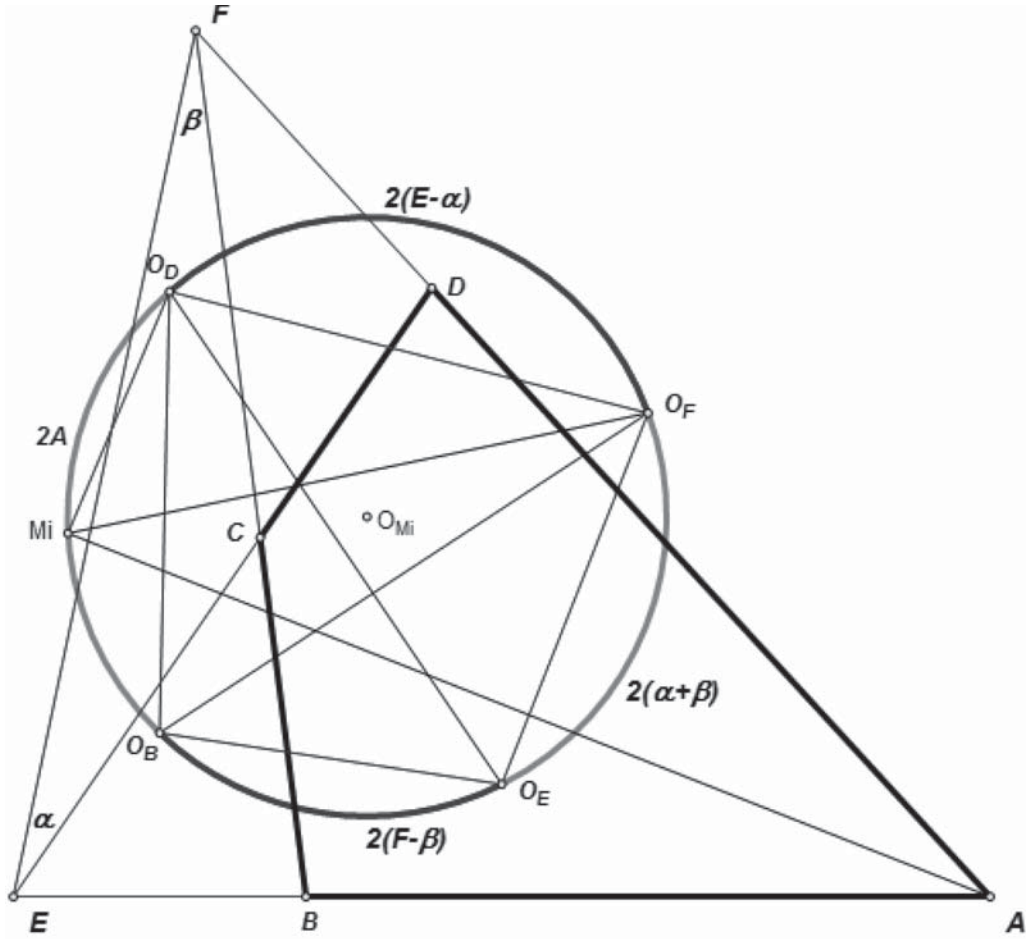


Рис. 10

Для наглядности на рис. 10 показаны величины дуг, которые стягиваются сторонами четырёхугольника Микеля. Рассмотрев соответствующие вписанные углы, мы легко находим

$$\angle O_EO_BO_D = (E - \alpha) + (\alpha + \beta) = E + \beta; \quad (54)$$

$$\angle O_BO_DO_F = (F - \beta) + (\alpha + \beta) = F + \alpha. \quad (55)$$

С другой стороны, углы  $B$  и  $D$  четырёхугольника  $ABCD$  равны

$$\angle FBA = E + \beta; \quad (56)$$

$$\angle EDA = F + \alpha \quad (57)$$

Сравнивая (54), (55) и (56), (57), убеждаемся в их тождественности. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 13.** Пусть построен четырёхугольник центров Микеля для произвольного четырёхугольника  $ABCD$ . Углы, прилежащие к его дальней противоположной стороне от выбранной вершины, равны противоположным углам четырёхугольника  $ABCD$ , не содержащим эту вершину.

**Следствие 6.** Если сумма прилежащих к стороне углов в четырёхугольнике Микеля равна  $180^\circ$ , тогда сумма противоположных углов четырёхугольника  $ABCD$  так же равна  $180^\circ$  и он будет вписанным. При этом четырёхугольник Микеля — равнобочная трапеция, основания которой перпендикулярны линии, соединяющей точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника  $ABCD$ .

Построим прямую Гаусса произвольного четырёхугольника  $ABCD$  и введем обозначения:  $\angle EUM_A = x$  — угол наклона прямой Гаусса к стороне  $AE$ ,  $\angle UM_AM_F = y$  — угол между прямой Гаусса и средней линией  $M_AM_F$ . При этом, так как

$$\angle M_EM_AM_F = A, \quad x + y = A. \quad (58)$$

Проведем прямую  $M_AJ$ , изогональную прямой Гаусса относительно  $\angle M_EM_AM_F$ . Это означает, что  $\angle JM_AM_E = y$ , тогда  $\angle JM_AU = x - y$ . Углы  $JM_AU$  и  $MiWM_A$  могут быть равны как накрест лежащие, только если прямые  $M_AJ, MiA$  параллельны. Это возможно при условии выполнения следующего равенства в  $\triangle WUA$ , а именно

$$x - y + \theta = x \Rightarrow y = \theta; \quad (59)$$

$$x = A - y = A - \theta = \varphi. \quad (60)$$

Значит, имеет место

**Теорема 14.** Пусть задан произвольный четырёхугольник  $ABCD$ , где  $AC$  и  $BD$  — его диагонали,  $Mi$  — точка Микеля. Тогда его прямая Гаусса наклонена к сторонам (образующим вершину  $A$ ), под углами, на которые отрезок  $AMi$  делит угол при этой вершине.

На рис. 9 проведем через вершину  $A$  линию  $AV$ , параллельную прямой Гаусса. Так как  $M_AM_F \parallel AF$ , то

$$\angle FAV = \angle M_F M_A U = \angle EAMi = \theta. \quad (61)$$

**Теорема 15.** Пусть задан произвольный четырёхугольник  $ABCD$ , где  $AC$  и  $BD$  — его диагонали,  $Mi$  — точка Микеля. Линия, параллельная прямой Гаусса и проходящая через вершину  $A$ , и линия  $AMi$  изогональны относительно угла при этой вершине.

С. Barbu, I. Patrascu [12] доказали подобный результат изогональности линии, параллельной прямой Гаусса, но только для вписанных четырёхугольников. Приведенная теорема предоставит дополнительные возможности при решении различных задач.

Рассмотрим задачу построения произвольного четырёхугольника по заданному четырёхугольнику Микеля. Понятно, что однозначного решения здесь не существует, так как каждому положению точки  $Mi$  на окружности Микеля соответствует только один порожденный ею четырёхугольник. Следовательно, существует все-таки семейство родственных треугольников  $A_iE_iF_i$ , у которых общий угол при выбранной вершине  $A$  (это следует из формулы (51)). Введем обозначения (рис. 11):  $O_{An}, O_{Bn}, O_{Cn}, O_{Dn}, O_{On}, R_{An}, R_{Bn}, R_{Cn}, R_{Dn}, R_{En}, R_{Fn}, R_{On}, R_{Mn}, R_{Nn}$  — центры и радиусы окружностей семейства треугольников  $AEF$  и четырёхугольников  $ABCD$ , имеющих заданный четырёхугольник Микеля. Показаны построения для 3-х точек  $Mi_1, Mi_2, Mi_3$ . Зная центр и радиус окружности Микеля  $R_{Mi}$ , найдем центры и радиусы остальных элементов. Центры окружностей —  $O_{An}, O_{Cn}, O_{En}, O_{Fn}$  — симметричны центру  $O_{Mi}$  относительно сторон четырёхугольника Микеля. При вычислениях для удобства будем руководствоваться рис. 10. Рассмотрим

$$\triangle O_E O_D O_F : O_E O_F = 2R_{Mi} \sin(\alpha + \beta); \quad (62)$$

$$\triangle A O_E O_F : O_E O_F = 2R_{An} \sin(\angle E A O_F) \quad (63)$$

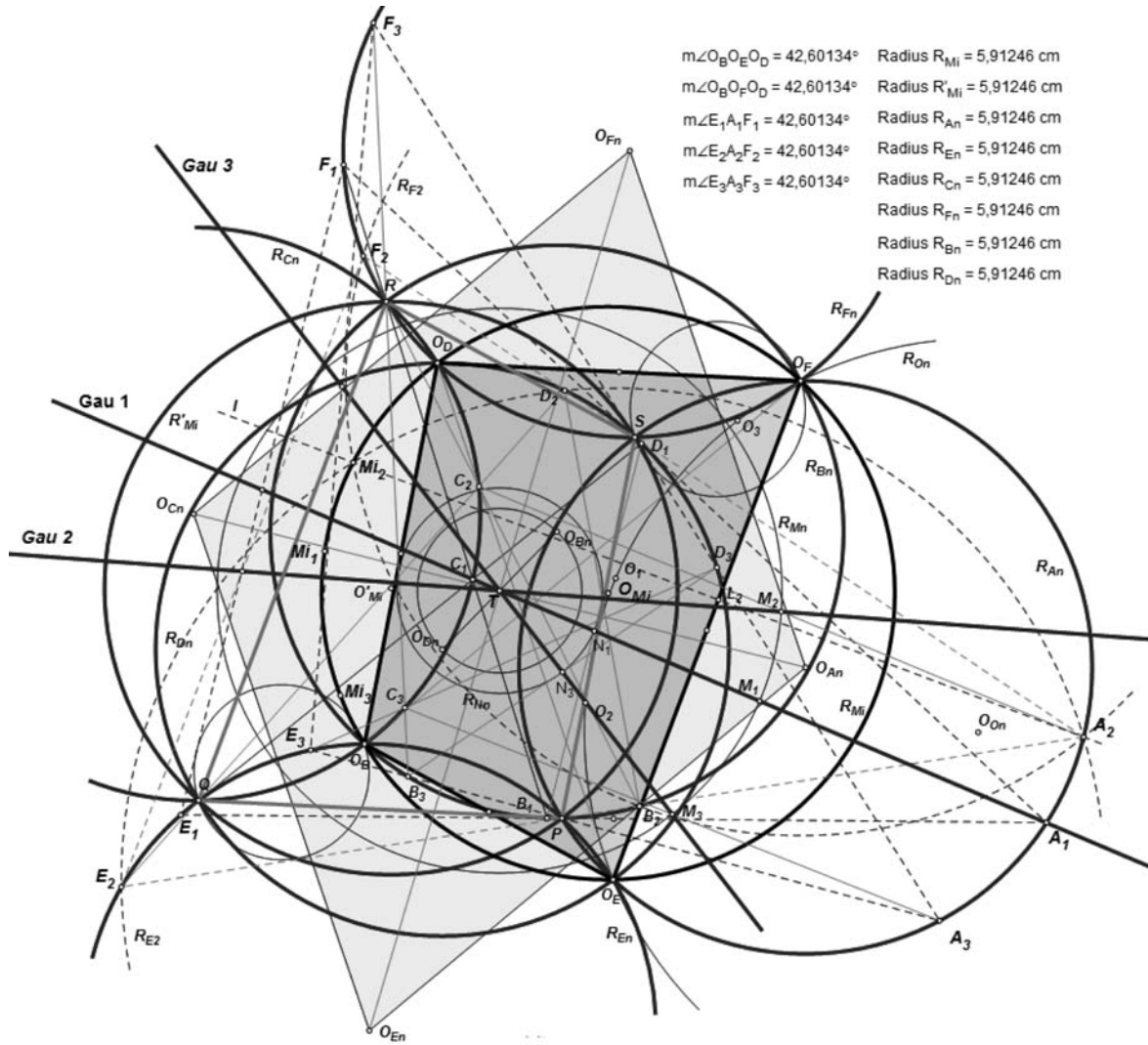


Рис. 11

но  $\angle O_E A O_F = \angle O_E M i O_F = \alpha + \beta$ , так как  $A M i$  — радикальная ось 2-х окружностей  $R_E, R_F$ . Тогда

$$R_{An} = R_{Mi}. \quad (64)$$

В  $\triangle O_D M i O_F$ :

$$O_D O_F = 2R_{Mi} \sin(\angle O_D M i O_F) = 2R_{Mi} \sin(E - \alpha); \quad (65)$$

В  $\triangle F O_D O_F$ :

$$O_D O_F = 2R_{Fn} \sin(\angle F O_D O_F), \quad (66)$$

но, так как  $F M i$  — радикальная ось 2-х окружностей  $R_D, R_F$ , получим

$$\angle O_D F O_F = \angle O_D M i O_F = E - \alpha.$$

Следовательно,

$$R_{Fn} = R_{Mi}. \quad (67)$$



Руководствуясь этой идеей, аналогично вычислим

$$R_{Cn} = R_{Mi}; \quad (68)$$

$$R_{En} = R_{Mi}; \quad (69)$$

$$R_{Bn} = R_{Mi}; \quad (70)$$

$$R_{Dn} = R_{Mi}. \quad (71)$$

Заинтересованный читатель может получить эти формулы самостоятельно с учетом того, что  $CM_i$ ,  $EM_i$ ,  $BM_i$ ,  $DM_i$  — радикальные оси 2-х соответствующих окружностей. Проанализируем построение родственных треугольников и соответственно искомым четырёхугольников, показанных на рис. 11. Построение проведено для 3-х точек —  $Mi_1$ ,  $Mi_2$ ,  $Mi_3$ .

1. Задаем четырёхугольник Микеля и окружность Микеля;
2. Проводим 4 окружности с каждой стороны четырёхугольника Микеля радиусами равными  $R_{Mi}$  (формулы (64), (67)–(69)) и проходящими через его вершины;
3. Через выбранную точку Микеля (пусть  $Mi_2$ ) проводим линию  $l$ , перпендикулярную стороне  $O_E O_F$ . Понятно, что эта линия — радикальная ось 2-х окружностей  $R_E, R_F$  искомого четырёхугольника. Точка пересечения  $A_2$  линии  $l$  с окружностью  $R_{An}$  — его вершина;
4. Из вершин  $O_E, O_F$  через точку  $A_2$  строим окружности  $R_{E2}, R_{F2}$ .

Пересечение этих окружностей с окружностями  $R_{En}, R_{Fn}$  дает вершины  $E_2, F_2$ . Пересечение с линиями  $A_2 E_2, A_2 F_2$  определяет точки  $B_2, D_2$ . Разумеется, пересечение линий  $E_2 D_2$  и  $F_2 B_2$  — точка  $C_2$ . Итак, четырёхугольник  $A_2 B_2 C_2 D_2$  — искомый. Следует отметить важную особенность построенных родственных четырёхугольников — их сходственные стороны пересекаются в одной точке. Например,  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  — в точке  $P$ ;  $B_1 C_1, B_2 C_2, B_3 C_3$  — в точке  $R$  и далее аналогично в точках  $Q, S$ . Четырёхугольник  $PQRS$  имеет равные и параллельные стороны по отношению к заданному четырёхугольнику Микеля. Назовем его *псевдо-четырёхугольником Микеля* и соответственно его описанную окружность — *псевдо-окружностью Микеля* ( $O'_{Mi}; R'_{Mi}$ ). Кроме того, 4 центра окружностей (см. пункт 2) образуют параллелограм.

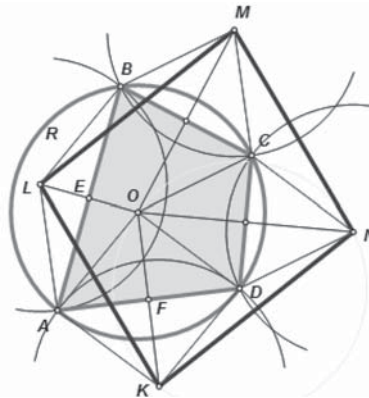


Рис. 12

Докажем следующую лемму. Пусть (на рис. 12)  $ABCD$  — произвольный четырёхугольник, вписанный в окружность. На каждой стороне проведены окружности радиусами равными описанной окружности и проходящими через его вершины. Центры этих окружностей всегда образуют четырёхугольник  $KLMN$ , который является параллелограмом.

Действительно,  $\angle A + \angle C = 180^\circ$ , так как  $ABCD$  — вписанный.

$$\angle FOE = 180^\circ - \angle A; \angle MOD = 180^\circ - \angle C.$$

В  $\triangle KOL$ :

$$KL = 2R \sin(KOL) = 2R \sin A. \quad (72)$$

В  $\triangle MON$ :

$$MN = 2R \sin C = 2R \sin A. \quad (73)$$

Отметим, что  $\triangle KAL = \triangle MCN$  — по трем сторонам с учетом (72), (73). Значит стороны  $MN = KL$ . Аналогично доказывается, что  $ML = KN$ . Следовательно,  $KLMN$  — параллелограмм. На основании леммы четырёхугольник центров — параллелограмм. Точка пересечения его диагоналей  $T$  является центром окружностей  $R_{Mn}, R_{Nn}$  геометрического места точек середин диагоналей  $AC, BD$  родственных четырёхугольников. В заключение отметим без доказательства, что точка  $T$  — точка пересечения всех прямых Гаусса родственных искомым четырёхугольников.

## Литература

1. Yiu P. *Euclidean Geometry*, 1998.
2. Josefsson M. // *Forum Geom.* - 10(2010)–14(2014).
3. Minculete N. // *Forum Geom.* - 9. - 2009.
4. Ehrmann J.P. *Some geometric constructions* // *Forum Geom.* - 6. - 2006. - p. 327–334.
5. Kimberling C. *Encyclopedia of Triangle Centers*,  
URL: <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
6. Кокстер Г.С.М. *Введение в геометрию*. - М.: 1966, глава 1.
7. Делоне Б., Житомирский О., *Задачник по геометрии*. - М.: 1950, задача 85.
8. Djukic D., Jankovic V., *The IMO Compendium*. - Springer, 2006.
9. Vitas K., *Art of Problem Solving*, 2006  
URL: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=110887>.
10. Salazar J.C. *Bicentric Quadrilateral 3, Art of Problem Solving*, 2005  
URL: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=38991>
11. Salazar J.C. *Bicentric Quadrilateral 3, Art of Problem Solving*, 2005  
URL: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=406453>
12. Barbu C., Patrascu I. // *Forum Geom.* - 12. - 2012. - p. 149-152.

Тахаев Станислав Магомедович,  
Санкт-Петербург.

E-mail: [stalislavt@mail.ru](mailto:stalislavt@mail.ru)

# Правильный треугольник помогает решить задачу

М. А. Тлеубергенова

При решении некоторых геометрических задач можно эффективно использовать правильный треугольник, определенным образом расположенный относительно данных фигур. В статье этот способ рассмотрен на конкретных задачах

**Задача 1.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $AB = AC$  и  $\angle BAC = 80^\circ$ . Точка  $O$  внутри треугольника выбрана так, что  $\angle OBC = 10^\circ$ ,  $\angle BCD = 30^\circ$ . Найдите величину угла  $AOB$

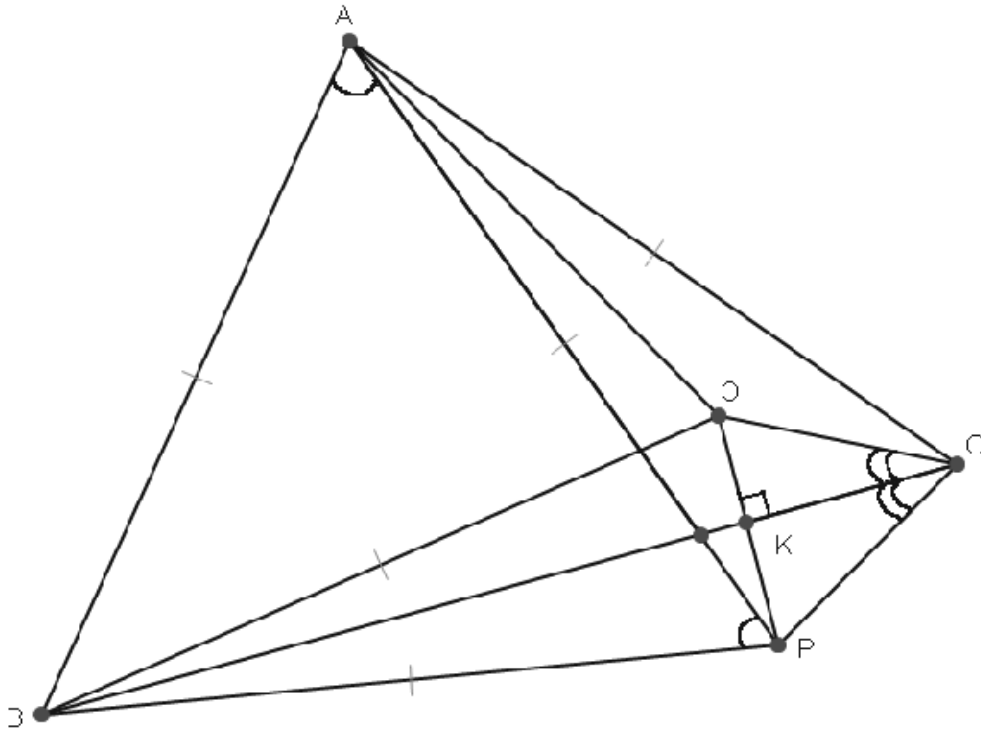


Рис. 1

**Решение.** Построим равносторонний треугольник  $ABP$  (рис. 1), тогда  $AP = AC$ ,

$$\begin{aligned}\angle ACP &= \angle CPA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - (80^\circ - 60^\circ)) = 80^\circ, \\ \angle BCP &= \angle ACP - \angle ACB = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ.\end{aligned}$$

Отразим точку  $P$  относительно  $BC$  в точку  $O$  и получим равносторонний треугольник  $CPO$ , причем  $AO$  — биссектриса угла  $CAO$ . Вычислим

$$\angle OPB = \angle OPA + \angle APB = (80^\circ - 60^\circ) + 60^\circ = 80^\circ = \angle BOP.$$

В  $\triangle OBK$ :  $\angle OBC = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$ , а  $\angle BCO = 30^\circ$ . Таким образом, мы построили данную в условии точку  $O$  путём дополнительно построенных равносторонних треугольников  $ABP$  и  $CPO$ . Из хода построения точки  $O$  видно, что  $AB = BP = BO$ ,  $\angle AOB = \angle BAO = \angle BAP + \angle PAO = 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 70^\circ$ .

Ответ:  $70^\circ$   $\square$

**Задача 2.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  с углом  $100^\circ$  при вершине  $C$ . Через вершины  $A$  и  $B$  проведены лучи  $AM$  и  $BM$  ( $M \in \triangle ABC$ ) такие, что  $\angle MAB = 30^\circ$ ,  $\angle ABM = 20^\circ$ . Вычислите величину угла  $ACM$ .

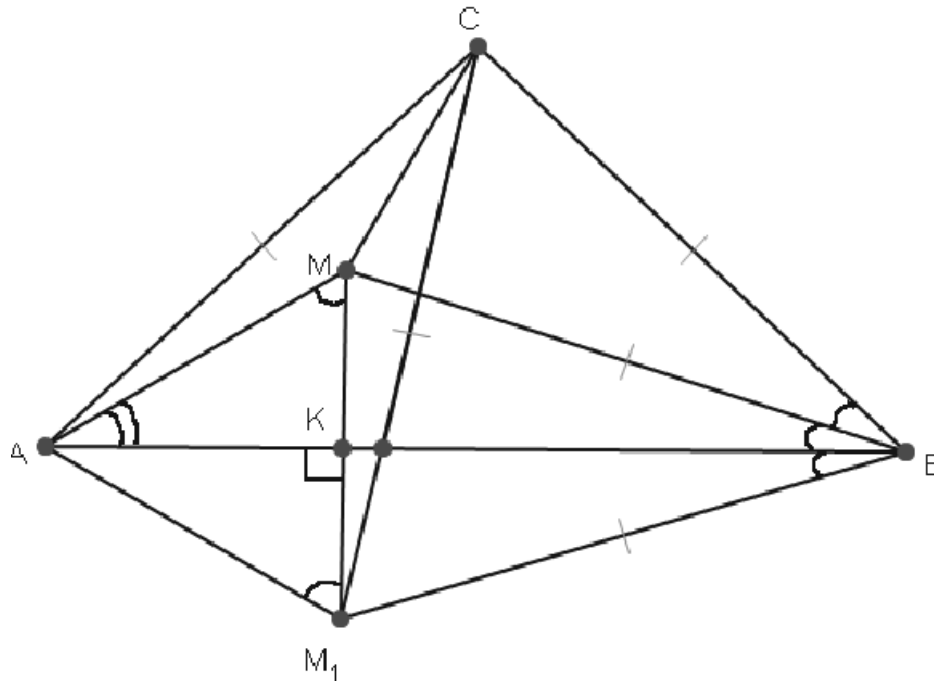


Рис. 2

**Решение.** Построим равносторонний треугольник  $CBM_1$  (рис. 2) и найдем

$$\angle CBA = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ, \quad \angle ABM_1 = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$$

Пусть точка  $M$  симметрична  $M_1$  относительно  $AB$ , тогда  $\angle MBA = 20^\circ$ ,  $\angle MM_1B = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ . В  $\triangle ACM_1$ :  $AC = CM_1$ ,  $\angle ACM_1 = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$ ,

$$\angle AM_1C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACM_1) = \frac{1}{2}2(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ,$$

$$\angle CM_1M = \angle AM_1B - \angle CM_1B = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ,$$

$$\angle AM_1M = \angle CM_1A - \angle CM_1M = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ.$$

Получилось, что  $\triangle AM_1M$  равносторонний, и в  $\triangle MAK$ :  $\angle MAK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , где  $K$  — точка пересечения  $AB$  с  $M_1M$ . Таким образом, мы построили данную в условии точку  $M$  с помощью вспомогательных равносторонних треугольников  $CBM_1$  и  $AM_1M$ . Из хода построения точки  $M$  ясно, что  $CM$  — биссектриса  $\triangle ACM_1$ , откуда  $\angle ACM = \frac{1}{2}\angle ACM_1 = \frac{1}{2}(100^\circ - 60^\circ) = 20^\circ$ .

Ответ:  $20^\circ$   $\square$

**Задача 3.** В треугольнике  $ABC$  угол  $BAC = 110^\circ$ ,  $AB = AC$ . Внутри треугольника взята точка  $M$  такая, что  $\angle MBC = 30^\circ$ , а  $\angle BCM = 25^\circ$ . Найдите угол  $AMC$ .

**Решение.** Опять удачным образом построим равносторонний треугольник  $ACL$  (рис. 3), тогда  $AB = AC = AL$ ,

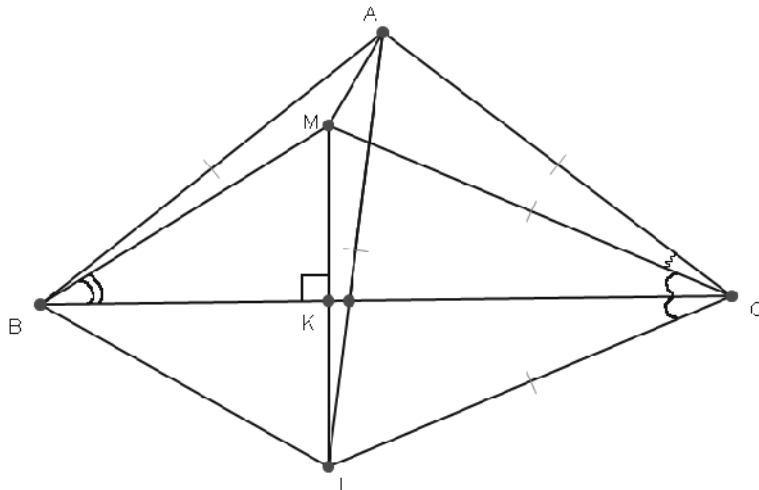


Рис. 3

$$\angle ABL = \angle BLA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAL) = \frac{1}{2}(180^\circ - (110^\circ - 60^\circ)) = 65^\circ.$$

Отразим точку  $L$  относительно  $BC$  в точку  $M$  и получим

$$\angle MCB = \angle BCL = \angle LCA - \angle ACB = 60^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 110^\circ) = 25^\circ.$$

$$\begin{aligned} \triangle BCL: \angle BLC &= \angle CLA + \angle ALB = 60^\circ + 65^\circ = 125^\circ, \\ \angle CBL &= \angle MBC = 180^\circ - 25^\circ - 125^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, мы построили данную точку  $M$  используя два равнобедренных треугольника  $ACL$  и  $BLM$ . Из хода построения точки  $M$  в  $\triangle ACM$  имеем  $AC = CM$ ,  $\angle ACM = \angle ACL - \angle MCL = 60^\circ - 2\angle MCB = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ . Тогда  $\angle AMC = \frac{1}{2}(180^\circ - 10^\circ) = 85^\circ$ .

Ответ:  $85^\circ$   $\square$

**Задача 4.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$   $\angle B = 20^\circ$ ,  $\angle A = \angle C = 80^\circ$ . На стороне  $BA$  отложили отрезок  $BD = AC$ . Найдите угол  $ACD$ .

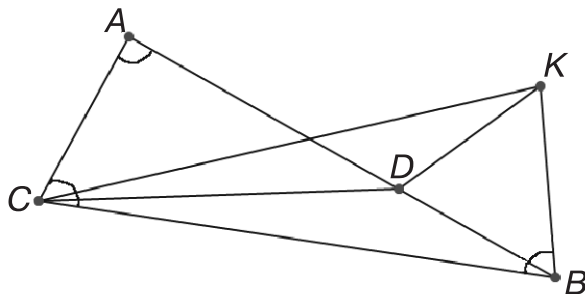


Рис. 4

**Решение.** 1-й способ. Построим равнобедренный треугольник  $BDK$  (рис. 4), тогда  $\angle KBC = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ = \angle ACB$ . Так как  $BK = BD = AC$ , то  $\triangle ABC = \triangle BCK$ , откуда следуют равенства  $CK = AB = CB$ ; отсюда ясно, что  $CD$  — биссектриса угла  $BCK$ , поэтому  $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BCK = \frac{1}{2}\angle ABC = 10^\circ$ . Теперь найдем  $\angle ACD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$ .

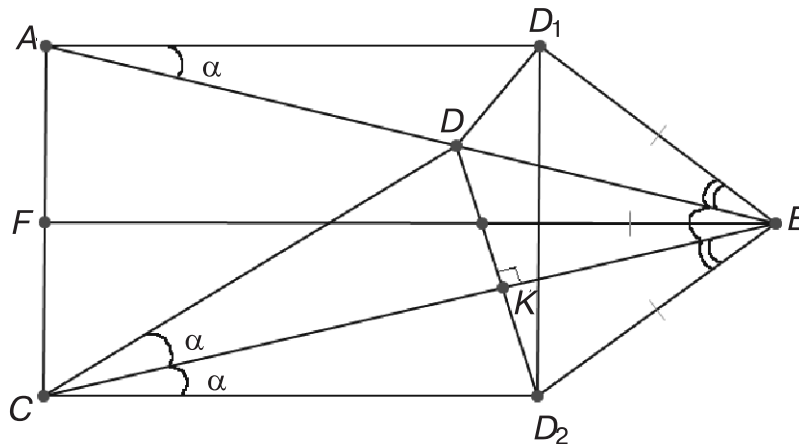
Ответ:  $70^\circ$   $\square$ 

Рис. 5

2-й способ. Повернем треугольник  $BCD$  вокруг точки  $B$  на  $-20^\circ$  (рис. 5), тогда он займет положение треугольника  $BAD_1$ , где  $AD_1 = CD$ ,  $\angle ABD_1 = 20^\circ$ .

Отразим точку  $D$  относительно  $BC$  в точку  $D_2$ , обозначим равные углы  $\angle BCD = \angle BAD_1 = \angle BCD_2$  и найдем  $\angle DBC = \angle CBD_2 = 20^\circ$ ; поэтому треугольник  $BD_1D_2$  — равносторонний. Тогда  $AC = BD = D_1B = D_1D_2$ ,  $AD_1 = CD = CD_2$ , т. е.  $ACD_2D_1$  — параллелограмм. А так как  $\angle D_1AC + \angle ACD_2 = 180^\circ$ , то  $2(\angle BAC + \alpha) = 2(80^\circ + \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ$  и  $\angle ACD_2 = 90^\circ$ . Отсюда  $\angle ACD = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ .

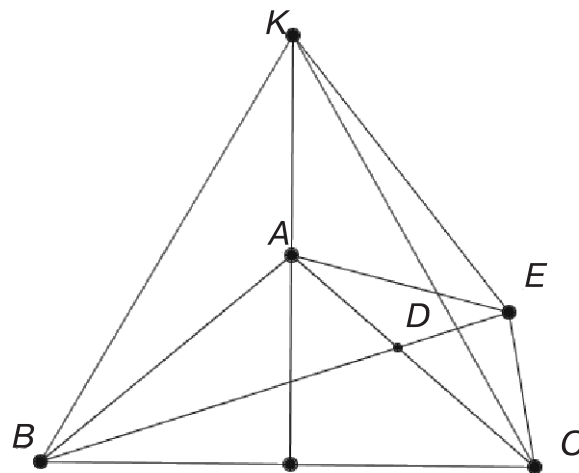
Ответ:  $70^\circ$   $\square$ 

Рис. 6

**Задача 5.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен углу  $C$ , и каждый из них равен  $40^\circ$ ,  $BD$  — биссектриса. Докажите, что  $BD + DA = BC$ .

**Решение.** Построим равносторонний треугольник  $BCK$  и отложим на  $BD$  отрезок  $BE = BK = BC$  (рис. 6). Тогда

$$\angle KBA = \angle ABD = \angle DBC = \angle ACK = \angle KCE = 20^\circ.$$

Так как  $\angle BRF = \angle AEB = 30^\circ$ , то в треугольнике  $\triangle ACE$ :

$$\angle AEC = \angle BEC + \angle AEB = 80^\circ + 30^\circ = 110^\circ, \quad \angle ACE = 40^\circ, \quad \angle CAE = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ) = 30^\circ.$$

В  $\triangle ADE$ :  $DA = DE$ , поэтому  $BD + AD = BD + DE = BC$ .  $\square$

**Задача 6.** В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $40^\circ$  на его биссектрисе отмечена точка  $D$  так, что треугольник  $BDC$  — равнобедренный ( $BC = BD$ ), угол  $DAC$  равен  $20^\circ$ . Найдите величину угла  $ABD$ .

**Решение.** Построим равносторонний треугольник  $ACM$ .  $\triangle ADC = \triangle MBC$ , так как  $\angle BCM = \angle BCD = \angle ACD = 20^\circ$ ,  $MC = AC$  и  $BC = DC$  (рис. 7).

Ясно, что  $BD \parallel AM$  и  $AD = MD$ , т.е.  $ADBM$  — равнобедренная трапеция.

$$\angle BMD = \angle BAD = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ, \quad \angle BAM = \angle ABD = \angle MAD - \angle BAD = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ.$$

Ответ:  $30^\circ$   $\square$

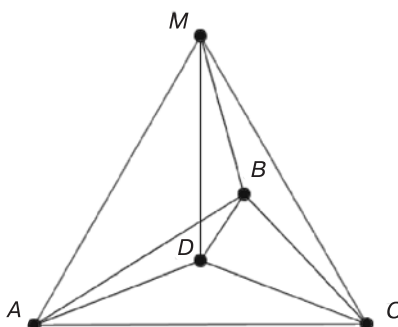


Рис. 7

Из рассмотренных задач видно, что когда заданы треугольники с конкретными числовыми значениями углов, возможно использование правильных треугольников для их решения.

### Литература

- [1] Понарин Я.П. Элементарная геометрия, Т. I, Планиметрия. - М.: МЦНМР, 2004
- [2] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, части I-II. - М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы, 1991.
- [3] Шарыгин И.Ф. Геометрия. Задачник 9–11 кл. - М.: Дрофа, 1997.

Тлеубергенова Мадина Альмухановна,  
старший преподаватель кафедры математики  
и методики преподавания математики  
Актюбинского регионального государственного  
университета им. К. Жубанова  
кандидат физико-математических наук.

E-mail: madina\_1970@mail.ru

## Применение линейной алгебры для приведения уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов

В статье предлагается методика приведения уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду методами линейной алгебры, значительно сокращающая вычисления и способствующая скорости решения большого числа задач.

При проведении практических занятий по уравнениям математической физики приходится сталкиваться с тем, что студенты плохо владеют техникой вычисления частных производных высшего порядка сложной функции. Поэтому для приведения конкретного уравнения к каноническому виду затрачивается довольно много времени. При этом часто допускаются ошибки, поиск которых и их исправление также не способствуют скорости решения задачи. В настоящей разработке показывается, как можно существенно сократить вычисления и сделать их более прозрачными, применяя аппарат теории матриц. Не претендуя на оригинальность излагаемого ниже материала, мы предлагаем лишь методику, вытекающую из общей теории приведения уравнений в частных производных к каноническому виду, изложенную во многих учебниках (см., например, [1]). Для того чтобы изложение этого материала было более понятным, мы вкратце напоминаем основные положения этой теории.

### §1. Замена переменных в случае произвольного числа независимых переменных

Рассмотрим линейное уравнение<sup>1</sup> в частных производных второго порядка:

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \nabla u) = 0 \Leftrightarrow \{(\nabla u) A(x) (\nabla u)^t\}^{[1]} + \nabla u b(x) + c_0(x)u + h(x) = 0, \quad (1)$$

где  $A = A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  — матрица размером  $n \times n$ ,  $x_1, \dots, x_n$  — независимые переменные,

$u = u(x)$  — неизвестная функция,  $\nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  — вектор-строка,  $\Phi(x, u, \nabla u) \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c_0(x)u + h(x)$ ,  $(\nabla u)^t = \{u_{x_1}, \dots, u_{x_n}\}$  — вектор-столбец, а символ  $[1]$  означает, что после перемножения векторов и матрицы в фигурных скобках (1) произведения  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$  надо заменить на вторые производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ . Будем предполагать, что коэффициенты  $a_{ij}(x) \in C(G)$ , где  $G$  — некоторая область в  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>1</sup>Если функция  $\Phi(x, u, \nabla u)$  линейна относительно  $u, \nabla u = \{u_{x_1}, \dots, u_{x_n}\}$ , то уравнение (1) называется *линейным*. В этом случае его обычно записывают в виде  $\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} + c_0(x)u + h(x) = 0$ . Именно такие уравнения рассматриваются в настоящей работе.





получаем, что после преобразования (2) (или  $x=x(y)$ ) уравнение (1) переходит в уравнение

$$\mathcal{L}_1 \tilde{u} \equiv \sum_{s,k=1}^n \tilde{a}_{sk}(y) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_s \partial y_k} + F(y, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0. \quad (5)$$

Можно считать, что  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), т. е. что матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

коэффициентов в уравнении (1) симметрична. Если старшие члены  $\mathcal{L}_0 u$  в уравнении (1) записать в виде «квадратичной формы»

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \{(\nabla u) A(x) (\nabla u)^t\}^{[1]}$$

(где [1] означает, что после перемножения векторов и матрицы в фигурных скобках произведения  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$  надо заменить на вторые производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ), то после преобразования  $x = x(y)$  эта квадратичная форма преобразуется к виду (см. формулу (3))<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_{s,k=1}^n \tilde{a}_{sk}(y) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_s \partial y_k} &= \left\{ \nabla \tilde{u} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) A(x) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^t (\nabla \tilde{u})^t \right\}^{[1]} \Big|_{x=x(y)} = \\ &= (\nabla \tilde{u}) \tilde{A}(y) (\nabla \tilde{u})^t, \end{aligned}$$

где снова надо заменить произведения  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k}$  на вторые производные  $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_s \partial y_k}$ . При этом через  $\tilde{A}(y)$  обозначена матрица

$$\tilde{A}(y) = \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) A(x) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^t \right]_{x=x(y)}. \quad (6)$$

## §2. Приведение к каноническому виду в случае двух независимых переменных

Запишем уравнение (1) в двумерном случае:

$$\mathcal{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

или

$$\left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right\}^{[1]} + \Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (7a)$$

где  $\Phi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \nabla u \cdot \{p(x, y), q(x, y)\} + f(x, y)u + h(x, y)$ . Здесь коэффициенты  $a = a(x, y)$ ,  $b = b(x, y)$ ,  $c = c(x, y)$ ,  $f = f(x, y)$ ,  $h = h(x, y)$ ,  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$  принадлежат классу  $C(G)$ . Будем считать, что  $a \neq 0$  ( $\forall (x, y) \in G$ ).

При приведении этого уравнения к канонической форме можно было бы воспользоваться формулами (3)–(5), полученными в предыдущем параграфе, но мы сделаем это заново. Сначала произведем

<sup>2</sup>Здесь и всюду в пособии через  $t$  обозначен знак транспонирования с тем, чтобы обычное обозначение штрихом не путать со знаком дифференцирования.

в (7) общую замену переменных  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ . Для функции  $\tilde{u}(\xi, \eta) \equiv u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  получим уравнение

$$\begin{aligned}
 & a[(\xi_x^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + 2(\xi_x \eta_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_x^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + \\
 & + (\xi_{xx}) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_{xx}) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta)] + \\
 & + 2b[(\xi_x \xi_y) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\xi_x \eta_y) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) + \\
 & + (\xi_y \eta_x) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_x \eta_y) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + \\
 & + (\xi_{xy}) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_{xy}) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta)] + \\
 & + c[(\xi_y^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + 2(\xi_y)(\eta_y) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta) + \\
 & + (\eta_y^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\xi_{yy}) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_{yy}) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta)] + \\
 & + p[(\xi_x) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_x) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta)] + \\
 & + q[(\xi_y) \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}(\xi, \eta) + (\eta_y) \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{u}(\xi, \eta)] + f \tilde{u} + g = 0
 \end{aligned}$$

или, в матричной форме:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1 \tilde{u} & \equiv (\xi_x \quad \xi_y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} (\xi_x \quad \xi_y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} + \\
 & + (\eta_x \quad \eta_y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \\
 & + (\mathcal{L}_0 \xi) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + (\mathcal{L}_0 \eta) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} + \tilde{f} \tilde{u} + \tilde{h} = 0
 \end{aligned} \tag{*}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 & \equiv a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tilde{u} = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \\
 \tilde{p} & = p(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \tilde{q} = q(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).
 \end{aligned}$$

При этом переменные  $x$  и  $y$  следует заменить на функции  $x=x(\xi, \eta)$ ,  $y=y(\xi, \eta)$ , вычисляемые из уравнений  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$ . Полезно заметить, что в случае линейной замены переменных выражения  $\mathcal{L}_0 \xi \equiv \mathcal{L}_0 \eta \equiv 0$ .

Преимущество формы (\*) заключается в том, что студенту не надо вычислять сложные частные производные при приведении к каноническому виду. Тем не менее, рекомендуем хотя бы один раз произвести все выкладки, связанные с заменой переменных, непосредственно.

Классификацию уравнения (7) определяют по собственным числам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , установив их знаки. Собственные числа находим из уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2 + ac = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a + c, \\ \lambda_1 \lambda_2 = ac - b^2 = -\Delta. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь число  $\Delta = b^2 - ac$  называется *дискриминантом* квадратичной формы  $(\nabla u A (\nabla u)^t)^{[1]}$ . Используя соотношение (8), приходим к следующей классификации уравнения (7):

- 1) уравнение (7) имеет *эллиптический тип*, если  $\Delta < 0$ ;
- 2) уравнение (7) имеет *гиперболический тип*, если  $\Delta > 0$ ;
- 3) уравнение (7) имеет *параболический тип*, если  $\Delta = 0$ .

Перейдем теперь к конкретной процедуре приведения уравнения (7) к каноническому виду. Заметим, что в этой процедуре функции  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  являются первыми интегралами уравнения

$$a(dy)^2 - 2b dx dy + c(dx)^2 = 0, \quad (9)$$

если его разрешить относительно  $\frac{dy}{dx}$ . Их называют *характеристиками* уравнения (7). После того, как будет установлен тип уравнения (7), надо найти его характеристики и перейти к процедуре приведения к каноническому виду, описанной выше.

Имеют место следующие утверждения (см. [2]).

1°. Если в области  $G$  уравнение (7) гиперболично (т.е.  $\Delta = b^2 - ac > 0$ ) и функции  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$  принадлежат классу  $C^2(G)$ , то существуют подобласть  $G_1 \subset G$  и преобразование  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y) \in C^2(G_1)$  такие, что уравнение (7) в новых переменных  $(\xi, \eta)$  приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + F_1 \left( \xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0.$$

При этом действительные функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  определяются как левые части интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

полученных из (9). Дополнительная замена переменных  $\rho = \xi + \eta$ ,  $\sigma = \xi - \eta$  переводит уравнение (7) в уравнение  $\hat{u}''_{\rho\rho} - \hat{u}''_{\sigma\sigma} + F_2 = 0$ .

2°. Если уравнение (7) параболично в области  $G$  (т.е.  $\Delta = b^2 - ac \equiv 0$ ) и функции  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y) \in C^2(G)$ , то существуют подобласть  $G_1 \subset G$  и преобразование  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y) \in C^2(G_1)$  такие, что уравнение (7) в новых переменных  $(\xi, \eta)$  приобретает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + F_1 \left( \xi, \eta, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}, \tilde{u} \right) = 0.$$

При этом действительная функция  $\xi(x, y)$  определяется как левая часть первого интеграла для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a},$$

полученного из (9). Функцию  $\eta(x, y)$  можно взять следующей:

$$\eta(x, y) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } \xi'_y|_{G_1} \neq 0, \\ y, & \text{если } \xi'_x|_{G_1} \neq 0. \end{cases}$$

3°. Если уравнение (7) эллиплично в  $G$  (т. е.  $\Delta = b^2 - ac < 0$ ) и функции  $a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in C^2(G)$ , то существуют подобласть  $G_1 \subset G$  и преобразование  $\rho = \varphi(x, y), \sigma = \psi(x, y) \in C^2(G_1)$  такие, что уравнение (7) в новых переменных  $(\rho, \sigma)$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + \tilde{F}_1 \left( \rho, \sigma, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \sigma} \right) = 0.$$

При этом действительные функции  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  являются соответственно действительной и мнимой частями характеристик  $\xi$  и  $\eta$ , которые определяются как левые части первых интегралов для комплексно сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{a} \quad (\Delta = b^2 - ac),$$

полученных из (9).

### §3. Примеры

Для упрощения проводимых ниже выкладок будем пользоваться тем, что уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nabla u \cdot \{p(x, y), q(x, y)\}u + f(x, y)u + h(x, y) = 0$$

после преобразования

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (10)$$

переходит в уравнение (\*), в котором переменные  $x$  и  $y$  следует заменить на  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ , найденные из уравнений (10).

**Пример 1.** Определить тип уравнения

$$\begin{aligned} y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{x^2}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y^2}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \right)^{[1]} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} \\ -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

и привести его к каноническому виду.

**Решение.** Здесь  $a = y^2, b = 0, c = x^2$ , значит,  $\Delta = b^2 - ac = -x^2y^2$ . Уравнение (11) определено в области  $D_0 = \{(x, y) : xy \neq 0\}$ , причем в этой области имеем  $\Delta < 0$ , поэтому уравнение (11) эллиплично в  $D_0$ .

Для приведения уравнения (11) к каноническому виду составляем характеристическое уравнение (9):

$$y^2 dy^2 + x^2 dx^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \frac{x}{y}.$$

Решая эти уравнения, находим два интеграла  $y^2 + ix^2 = c_1, y^2 - ix^2 = c_2$ . Применяя утверждение 3°, сделаем замену переменных

$$\xi \equiv \varphi(x, y) = y^2, \quad \eta \equiv \psi(x, y) = x^2.$$

Воспользуемся формой (\*); при этом учтем, что

$$\xi_x = 0, \xi_y = 2y, \eta_x = 2x, \eta_y = 0, \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0\xi &\equiv \left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\xi = \left(y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)y^2 = 2x^2, \\ \mathcal{L}_0\eta &= \left(y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)x^2 = 2y^2.\end{aligned}$$

Будем иметь

$$\begin{aligned}&(0 \ 2y) \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2(0 \ 2y) \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \\ &+ (2x \ 0) \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + 2x^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2y^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x} \\ -\frac{x^2}{y} \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

или

$$4x^2y^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 4x^2y^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + 2x^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + 2y^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - 2x^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} - 2y^2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = 0.$$

Сокращая здесь члены с первыми производными и деля обе части полученного равенства на  $4x^2y^2 > 0$ , получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} = 0.$$

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

**Решение.** Приведем сначала уравнение (12) к каноническому виду. Поскольку  $a = 4$ ,  $b = 4$ ,  $c = 3$ , то  $\Delta = b^2 - ac = 4 > 0$ , т. е. уравнение (12) имеет (всюду в  $\mathbb{R}^2$ ) гиперболический тип. Запишем характеристическое уравнение (9) для (12):

$$4dy^2 - 8dxdy + 3dx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4 \pm 2}{4}.$$

Решая его, найдем, что

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} y = \frac{3}{2}x + c_1, \\ y = \frac{1}{2}x + c_2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} y - \frac{3}{2}x = c_1, \\ y - \frac{1}{2}x = c_2. \end{array} \right]$$

Делаем в уравнении (12) замену переменных  $\xi = y - \frac{3}{2}x$ ,  $\eta = y - \frac{1}{2}x$ . Используя форму (\*), получим

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{3}{2} \ 1\right) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\left(-\frac{3}{2} \ 1\right) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} \ 1\right) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

или

$$-4\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} - 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left( 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \tilde{u} \right) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение по  $\xi$ , получим уравнение

$$2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \tilde{u} = 2c_1(\eta).$$

И, наконец, интегрируя это уравнение по  $\eta$ , получим общее решение исходного уравнения (2.30):

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta} \left[ c_2(\xi) + \int_0^\eta e^{\frac{s}{2}} c_1(s) ds \right],$$

в котором  $c_1(\eta)$  и  $c_2(\xi)$  – произвольные функции класса  $C^2$ , а переменные  $\xi$  и  $\eta$  следует заменить на  $\xi = y - \frac{3}{2}x, \eta = y - \frac{1}{2}x$  соответственно.

**Пример 3.** Привести к каноническому виду уравнение

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

**Решение.** Здесь  $\Delta = b^2 - ac = -y$ . Если  $\Delta=0$ , т.е. если  $y = 0$ , то получим уравнение  $u''_{yy} = 0$  параболического типа. Если  $\Delta = -y < 0$ , т.е. если  $y > 0$ , то уравнение (13) эллиптического типа. Если  $\Delta = -y > 0$ , т.е. если  $y < 0$ , то (13) гиперболического типа.

Рассмотрим случай  $y < 0$ , т.е.  $\Delta > 0$ . Характеристическое уравнение (9) в данном случае имеет вид

$$y dy^2 + dx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3}(-y) \sqrt{-y} \pm x = \text{const},$$

значит, характеристиками являются функции

$$\xi = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} + x, \quad \eta = \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} - x. \quad (14)$$

Используя форму (\*), будем иметь

$$\begin{aligned} & (1 \quad -\sqrt{-y}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-y} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2(1 \quad -\sqrt{-y}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{-y} \end{pmatrix} \times \\ & \times \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + (-1 \quad -\sqrt{-y}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{-y} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \\ & + \left( -\frac{1}{2\sqrt{-y}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$-4y \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2\sqrt{-y}} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} - (8y\sqrt{-y})^{-1} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Заменяя здесь  $y\sqrt{-y}$  на выражение  $-\frac{3}{4}(\xi + \eta)$ , найденное из формул (14), будем иметь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{6(\xi + \eta)} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Пусть теперь  $y > 0$ , т.е.  $\Delta < 0$ . Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \pm i \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \pm ix = \text{const},$$

а характеристики являются комплексно-сопряженными функциями

$$\xi = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + ix, \quad \eta = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - ix.$$

Согласно утверждению 3° делаем замену переменных:

$$\rho = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}, \quad \sigma = x.$$

Используя уравнение (\*) (где  $\xi = \rho$ ,  $\eta = \sigma$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{y} \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + 2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho \partial \sigma} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = 0 \end{aligned}$$

или

$$y \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + y \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{2y\sqrt{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = 0.$$

Заменяя здесь  $y\sqrt{y}$  на  $\frac{3}{2\rho}$ , получим окончательно

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{3\rho} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = 0.$$

Из приведенных примеров со всей очевидностью вытекает, что использование формы (\*) значительно облегчает процесс приведения к канонической форме уравнений в частных производных второго порядка, сводя все вычисления к простейшим операциям с матрицами и векторами. По аналогичной схеме можно рассмотреть и уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными, выписав для них соответствующую форму (\*).

### Литература

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977.
- [2] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Высшая математика. Методы Фурье и интегральных преобразований в уравнениях математической физики: учебное пособие. - М.: Издательство МЭИ, 2014.

Авторы: Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович,  
профессор кафедры ВМ МЭИ,  
доктор физико-математических наук.

E-mail: BobojanovA@mpei.ru

Сафонов Валерий Федорович,  
профессор кафедры ВМ МЭИ,  
доктор физико-математических наук.

E-mail: SafonovVF@mpei.ru



# Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение)

*В. В. Ивлев, Е. А. Кривошей*

Работа посвящается обобщению метода интегрируемых комбинаций для систем линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ), содержащих в матричной форме две и более матриц. Исследуются нормальные СЛДУ с переменными коэффициентами. Дается обобщение метода интегрируемых комбинаций для СЛДУ высших порядков. Рассматривается класс матриц, для которых применим данный метод. Статья является продолжением работы [1].

## 1. Введение

В работе [1] предложено обобщение метода интегрируемых комбинаций [ИК] для обычных нормальных систем линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) первого порядка.

Напомним идею построения полной системы первых интегралов для одноматричной модели СЛДУ. Рассмотрим модель нормальной СЛДУ первого порядка с одной матрицей:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + f_i(x), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

или в матричной форме

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{f}(x), \quad (1')$$

где

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  — собственный вектор  $A^T$  — транспонированной матрицы для  $A$ . Не повторяя

изложенное в [1], приводим скалярное произведение (1') на вектор  $\vec{\alpha}$  к виду

$$(\vec{\alpha}, \vec{y})' = \lambda (\vec{\alpha}, \vec{y}) + (\vec{\alpha}, \vec{f}), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — собственное значение для матрицы  $A^T$ . Пусть  $J = (\vec{\alpha}, \vec{y}) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$  и есть интегрируемая комбинация. Тогда имеем для (2)

$$J' = \lambda J + (\vec{\alpha}, \vec{f}) \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет общее решение

$$J = ce^{\lambda x} + e^{\lambda x} \int (\vec{\alpha}, \vec{f}) e^{-\lambda x} dx. \quad (4)$$

Для получения полной системы ИК из (4) рассматривается характеристическое уравнение для оператора  $A^T$

$$|A^T - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$







Если дано конечное (бесконечное) множество попарно коммутируемых нормальных операторов  $A, B, \dots, C$  в унитарном пространстве  $\mathbb{R}$ , то все эти операторы имеют полную систему общих собственных векторов.

Так и хочется сказать, что метод ИК ждал применения этой теоремы.

В заключение приведем общий класс СЛДУ, разрешимых в ИК:

$$\frac{d^m \vec{y}}{dx^m} = A \frac{d^{m-1} \vec{y}}{dx^{m-1}} + B \frac{d^{m-2} \vec{y}}{dx^{m-2}} + \dots + C \vec{y}, \quad (13)$$

где операторы  $A^T, B^T, \dots, C^T$  удовлетворяют определению 2 с общей системой собственных векторов.

Переходя к транспонированным операторам  $A^T, B^T, \dots, C^T$  с помощью скалярного умножения (13) на  $\vec{a}$ , приходим к основному уравнению

$$J^{(m)} = \lambda_A J^{(m-1)} + \lambda_B J^{(m-2)} + \dots + \lambda_C J, \quad (14)$$

где  $\lambda_A, \dots, \lambda_C$  — собственные значения соответствующих операторов. Здесь (14) — обыкновенное ЛДУ с постоянными коэффициентами.

### Литература

- [1] Ивлев В.В. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации // Математическое образование. - 2006. - № 1 (часть I). - 2007. - № 1 (часть II).
- [2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М: 2004.

*Ивлев Валерий Васильевич,  
профессор кафедры Общих математических  
и естественнонаучных дисциплин Московского  
финансово-юридического университета МФЮА,  
доктор технических наук.*

*E-mail: vvivlev@yandex.ru*

*Кривошей Елена Александровна,  
старший преподаватель кафедры Общих  
математических и естественнонаучных дисциплин  
Московского финансово-юридического университета МФЮА.*

*E-mail: ambient2003@list.ru*

# Алгоритмы для доказательства теорем о линейных интегро-дифференциальных уравнениях с аналитическими функциями

*В. Т. Мураталиева*

В данной статье выявлен класс линейных операторных уравнений, для которых задача установления существования решения алгоритмизуема. Предложены определения операторов «интегрального» и «дифференциального» типов. Полученный результат применяется к интегро-дифференциальным уравнениям третьего рода с аналитическими функциями. Для доказательства используется метод рядов.

## 1. Введение и обозначения

В работах [1]–[7] рассмотрены различные вопросы существования решений и спектральных свойств интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими функциями, при этом использованы результаты [8]. В данной статье мы изучаем этот вопрос в более общем виде. С этой целью выявлен класс линейных операторных уравнений, для которых задача установления существования решения алгоритмизуема. Предложены определения операторов «интегрального» и «дифференциального» типов, обобщающие соответствующие дифференциальные и интегральные операторы.

Обозначения:  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел;  $\mathbb{N}_0$  — множество, состоящее из нуля и натуральных чисел;  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел;  $\mathbb{R}$  — множество вещественных чисел;  $\mathbb{R}_+$  — множество неотрицательных вещественных чисел;  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел.

## 2. Алгоритмизация и использование компьютеров в математических исследованиях

В каждом разделе математики возникает вопрос, можно ли доказывать утверждения о ее объектах каким-либо стандартным (раньше еще применялся термин «регулярным») методом.

В настоящее время такой вопрос особенно актуален, потому что, в свою очередь, формализация такого метода дает возможность применять компьютеры, что повышает эффективность математических исследований.

Такие стандартные методы в литературе также называются «алгоритмы». Но здесь следует отметить, что этот термин понимается по-разному. В строгом смысле, применительно к математике:

**Определение 1.** *Алгоритм* подразумевает: использование букв, чисел из  $\mathbb{N}$ , операций сложения чисел и сравнения (для букв: *равно* – *не равно*, для чисел: *меньше* – *равно* – *больше*); использование операторов: ввода, присвоения, условного перехода, вывода и окончания работы.

Пара чисел из  $\mathbb{N}$  со знаком определяет рациональное число, а повторение сложения дает остальные арифметические операции. Поэтому в вышеприведенном определении можно не упоминать «рациональные числа» и «арифметические операции».

Если же «рациональные числа» и «арифметические операции» ввести в определение, то обозначим его как **Определение 1а**.

Иногда «алгоритм» определяют как в Определении 1а с заменой термина «рациональные числа» на «вещественные числа». Но сами вещественные числа и операции сравнения для них алгоритмически не определены, поэтому для формализации такого понятия нужно использовать более строгое понятие «алгоритм с оракулом», оракул и сообщает о результате сравнения.

Если еще добавить, что оракул может находить решения алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами (будем называть его «вещественным оракулом»), то получаем

**Определение 2.** *Вещественный алгоритм* подразумевает: использование букв, чисел из  $\mathbb{R}$ , арифметических операций над ними, решения алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами и сравнения (для букв: *равно* – *не равно*, для вещественных чисел: *меньше* – *равно* – *больше*); использование операторов: ввода, присвоения, условного перехода, вывода и окончания работы.

Такому определению соответствует большинство методов линейной алгебры.

Также, например в [8], неявно допускаются бесконечное количество раз «единообразно исполняемые действия».

Мы будем придерживаться Определения 2. При компьютерной реализации оно отличается от Определения 1а в основном невозможностью определить, равно ли малое число (разность двух близких чисел) нулю.

Возможны различные классификации использования компьютеров в математике:

1) Классификация по связи ответа, данного компьютером, с истинным.

При строгой (математической) постановке задачи на поиск объекта ответ, данный компьютером (результат работы программы), может

- заведомо совпадать с истинным;
- иметь гарантированную связь с истинным (в тех случаях, когда истинный ответ нельзя изобразить средствами компьютера);
- иметь нестрогую (статистическую) связь с истинным.

Первая возможность достигается при использовании точных методов (взаимно-однозначного соответствия между математическим объектом и физическим состоянием компьютера при его соответствующей интерпретации). Неформально их можно разделить на точные вычисления (с целыми числами и подобными им объектами) аналитические (символьные, алгебраические) преобразования и эвристически-логический вывод.

В настоящей работе рассматриваются аналитические преобразования.

2) Классификация по взаимодействию человека и компьютера.

- Человек приводит доказываемое утверждение к одному из алгоритмизируемых, после чего компьютер доказывает такое утверждение;
- Компьютер эквивалентно преобразует исходные данные и показывает их человеку так, что человек способен сделать такой вывод, который он не смог бы сделать по исходным данным.

Последний метод используется в настоящей работе для решения возникающих задач.

### 3. Операторные уравнения

Рассматриваются уравнения вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

$$Ax + \lambda B = f, \tag{2}$$

где  $A, B$  — линейные операторы,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Для второго уравнения нужно найти множество значений  $\lambda$ , при которых оно имеет решение не при всех возможных  $f$ .

Если эти операторы действуют в конечномерных пространствах (т.е. являются матрицами), то соответствующие задачи решаются в рамках Определения 2.

Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство  $X$  с базисом  $\{e_k: k \in \mathbb{N}\}$  и нормой

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k \right\| := \sup \{ |f_k| \xi_k : k \in \mathbb{N} \},$$

где  $\{\xi_k: k \in \mathbb{N}\}$  — заданные положительные числа; в качестве элементов  $X$  допускаются только такие, у которых данная норма ограничена. Будем рассматривать операторы  $A, B: X \rightarrow X$ , удовлетворяющие условию:  $Ae_k = \alpha_k e_{k+p}$ ,  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ; заданное число  $p \in \mathbb{Z}$  (если  $p < 0$ , то должно быть  $Ae_1 = Ae_2 = \dots = Ae_{-p} = 0$ ). Такие операторы можно назвать обобщенно-диагональными. Из таких операторов можно выделить, по аналогии с [9] и другими упомянутыми там работами, «интегральный тип»:  $|\alpha_k| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  и «дифференциальный» тип:  $|\alpha_k| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Будем предполагать, что для этих пределов известны алгоритмы — регуляторы сходимости.

Числа  $\{\xi_k: k \in \mathbb{N}\}$  будем считать «медленно меняющимися»: для любого  $\beta > 0$  можно найти такое  $q \in \mathbb{N}$ , что из  $|k - m| < q$  следует  $\xi_k < \beta \xi_m$ .

Тогда можно построить алгоритм для решения уравнения (1) для операторов дифференциального типа: находим такой номер  $K$ , что из  $k > K$  следует  $|\alpha_k| > 1$ , тогда  $x_k = f_k / \alpha_k$  ( $k > K$ ), а конечный набор уравнений для коэффициентов с меньшими номерами рассматриваем непосредственно.

С некоторыми усложнениями можно построить алгоритм, когда оператор  $A$  является суммой оператора дифференциального типа и нескольких операторов интегрального типа. Для того, чтобы сумма нескольких операторов дифференциального типа была (обобщенным) оператором дифференциального типа, достаточно, чтобы один из этих операторов имел скорость возрастания  $|\alpha_k| \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  «алгоритмически больше», чем другие операторы.

Для уравнения (2) можно построить алгоритм, который находит спектральные значения  $\lambda$  на любом ограниченном отрезке, если оператор  $A$  является суммой оператора дифференциального типа и нескольких операторов интегрального типа, а оператор  $B$  является суммой нескольких операторов интегрального типа.

#### 4. Приложения к интегро-дифференциальным уравнениям с аналитическими функциями

Справедливо следующее

**Утверждение.** В пространстве целых аналитических функций с базисом — степенями  $t$  — оператор  $Au(t) := t^n u^{(m)}(t)$  является оператором дифференциального типа, а оператор  $Bu(t) := \int_0^t u(s) ds$ , а также его итерации, с умножением на  $t^n$ , являются операторами интегрального типа.

Таким образом, можно построить алгоритмы для различных типов уравнений, рассмотренных в [1]–[8], и более общих уравнений.

#### Литература

- [1] Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных вольтерровских интегро-дифференциальных уравнений третьего рода // Вестник КРСУ. Серия естественные и технические науки 2016. - № 5. - С. 63–66.
- [2] Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных вольтерровских интегро-дифференциальных уравнений третьего рода второго порядка // Наука вчера, сегодня, завтра: сб. статей по матер. XXXIV междунар. научно-практ. конф. - № 5(27). Часть I. - Новосибирск: СибАК. - 2016. - С. 57–61.
- [3] Панков П.С., Мураталиева В.Т. Спектральные свойства линейных задач с аналитическими функциями // Доклады НАН КР. - 2016. - № 1. - С. 11–14.



- [4] Мураталиева В.Т. Спектрилик касиеттери болгон учунчу турундугу сызыктуу Вольтерралык интегро-дифференциалдык тедемелер системасы // Интернет-журнал ВАК КР. - 2016. - № 4. - 7 с.
- [5] Muratalieva V. Spectral properties of Volterra linear integro-differential equations of the third kind of the first and second order // Abstracts of the V International Scientific Conference «Asymptotical, Topological and Computer Methods in Mathematics», Bishkek-Bozteri, Sept. 12–16. - 2016. - P. 34.
- [6] Мураталиева В.Т. Табличный метод определения спектров линейных вольтерровских интегральных уравнений третьего рода с двумя переменными // Наука вчера, сегодня, завтра: сб. ст. по матер. XLIII междунар. научно-практ. конф. - № 2(36). — Новосибирск: СибАК. - 2017. - С. 32–38.
- [7] Мураталиева В.Т. Линейные вольтерровские интегро-дифференциальные уравнения в частных производных третьего рода с параметром // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. LI между-нар. научно-практ. конф. - № 2(49). - Новосибирск: СибАК. - 2017. - С. 57–62.
- [8] Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Алгебра последовательностей коэффициентов степенных рядов аналитических функций // Научные ведомости. Серия математика, физика. - 2010. - № 11(82). - Вып. 19. - С. 28–61.
- [9] Моржаков А.В. Исследование операторов и операторных уравнений, порожденных обобщенным дифференцированием. - Автореферат дисс. к.ф.-м.н. - Уфа. - 2008. - 15 с.

*Мураталиева Венера Тологоновна,  
доцент Жалал-Абадского гос. университета,  
г. Жалал-Абад, Кыргызстан,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: vmuratalieva70@mail.ru*

# Формула замены переменных в двойном интеграле как следствие формулы Грина

С. В. Шведенко

В интегральном исчислении функций нескольких переменных самой востребованной и одновременно самой трудной для обоснования является *формула замены переменных в кратном интеграле*. Предлагаемые ее доказательства (даже для двойных интегралов) либо недостаточно аргументированы, чтобы считаться доказательствами, либо настолько длинны и технически сложны (см., например, [1], гл. X, § 6), что не соответствуют реалиям аудиторного курса.

Приводимое в данной заметке доказательство *формулы замены переменных в двойном интеграле* при несомненном наличии недостатков имеет помимо простоты и краткости то преимущество, что выявляет связь этой формулы с другим фундаментальным фактом интегрального исчисления — *формулой Грина*<sup>1</sup>. От большинства других известных доказательств его отличает еще и то, что в нем основным «персонажем» оказывается не *модуль* якобиана функций, осуществляющих замену переменных, а его *знак*.

Для сокращения текста все встречающиеся в нем функции предполагаются непрерывными на соответствующих множествах вместе с их производными требуемых порядков.

## 1. Геометрический смысл знака якобиана отображения

Пусть  $\gamma_1 : \begin{cases} u = u_1(t) \\ v = v_1(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_1]$ , и  $\gamma_2 : \begin{cases} u = u_2(t) \\ v = v_2(t) \end{cases}, t \in [t_0, t_2]$ , — два пути<sup>2</sup> в плоскости переменных  $u, v$ , выходящие из одной ее точки в неколлинеарных направлениях. Считается, что пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  *соориентированы положительно* (*отрицательно*), если положительным (отрицательным) является *внешнее произведение*<sup>3</sup>  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$  векторов  $\mathbf{v}_1 = \{\dot{u}_1, \dot{v}_1\}$  и  $\mathbf{v}_2 = \{\dot{u}_2, \dot{v}_2\}$  — начальных скоростей (при  $t = t_0$ ) путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Последнее равносильно положительности (отрицательности) определителя  $\begin{vmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 & \dot{v}_2 \end{vmatrix}$ , а наглядно означает, что вектор  $\mathbf{v}_2$  лежит *слева* от оси вектора  $\mathbf{v}_1$ .

Если в окрестности начальной точки путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  задано отображение  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ , то возникает вопрос: какой будет — в зависимости от соориентации путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — соориентация их образов  $\hat{\gamma}_1 : \begin{cases} x = x(u_1(t), v_1(t)) \\ y = y(u_1(t), v_1(t)) \end{cases}, t \in [t_0, t_1]$ , и  $\hat{\gamma}_2 : \begin{cases} x = x(u_2(t), v_2(t)) \\ y = y(u_2(t), v_2(t)) \end{cases}, t \in [t_0, t_2]$ , при указанном отображении в плоскости  $x, y$ ? Ответ на этот вопрос напрямую вытекает из соотношений

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u \dot{u}_1 + x'_v \dot{v}_1 & y'_u \dot{u}_1 + y'_v \dot{v}_1 \\ x'_u \dot{u}_2 + x'_v \dot{v}_2 & y'_u \dot{u}_2 + y'_v \dot{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 & \dot{v}_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

<sup>1</sup>Ее роль в доказательстве аналогична той, которую играет *формула Ньютона-Лейбница* при выводе формулы замены переменной в интеграле по отрезку. Касательно *формулы Грина* автор пользуется случаем, во-первых, указать на ее довольно простое и компактное доказательство, данное в заметке [2], и, во-вторых, внести исправление на с. 68 журнала с этой заметкой: в третьем абзаце снизу в словосочетании «половины расстояния» вместо *половины* следует читать *трети*.

<sup>2</sup>*Путь* в наглядном представлении есть описание положения движущейся точки (в данном случае точки плоскости  $u, v$ ) как функции параметра  $t$  («времени»), пробегающего заданный промежуток.

<sup>3</sup>Т.е. третья компонента векторного произведения  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$  при добавлении векторам  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  нулевых третьих компонент.

если в начальной точке путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  якобиан  $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$  отображения  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  положителен, то пути  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$  соориентированы так же, как и их прообразы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а если якобиан  $\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$  отрицателен, то ориентации указанных пар путей оказываются противоположными.

Отмеченный факт имеет простое, но важное следствие.

**Предложение 1.** Пусть  $C$  — замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно гладкий контур (кривая)  $C$  в плоскости  $u, v$  и пусть функции  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ , якобиан  $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$  которых не обращается в нуль на контуре  $C$  (а следовательно, сохраняет знак), отображают взаимно однозначно этот контур на расположенный в плоскости  $x, y$  контур<sup>4</sup>  $\Gamma$ , а область, ограничиваемую контуром  $C$ , — на область, ограничиваемую контуром  $\Gamma$ . Тогда соответственно случаям а)  $J(u, v) > 0$  и б)  $J(u, v) < 0$  обходу контура  $C$  в положительном направлении (при котором ограничиваемая им область остается слева) отвечает обход контура  $\Gamma$  а) в положительном и б) в отрицательном (противоположном) направлении.

Для доказательства достаточно взять в качестве путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соответственно путь обхода контура  $C$  (от любой его точки) и какой-либо путь, идущий (от той же точки) в ограничиваемую этим контуром область, и сравнить соориентацию этих путей с соориентацией их образов — путей  $\hat{\gamma}_1$  и  $\hat{\gamma}_2$  (первый из них задает обход контура  $\Gamma$ , а второй идет в область, им ограничиваемую).

## 2. Формула замены переменных в двойном интеграле

**Предложение 2.** Пусть границами замкнутых и ограниченных множеств  $G$  (в плоскости  $u, v$ ) и  $D$  (в плоскости  $x, y$ ) служат замкнутые и не имеющие самопересечений кусочно гладкие контуры  $C$  (в плоскости  $u, v$ ) и  $\Gamma$  (в плоскости  $x, y$ )<sup>5</sup>. Пусть при этом функции  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  взаимно однозначно отображают множество  $G$  на множество  $D$ , а контур  $C$  на контур  $\Gamma$ , и имеют на множестве  $G$  не обращающийся в нуль (а следовательно, сохраняющий знак) якобиан  $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$ . Тогда для интеграла по множеству  $D$  справедлива формула замены переменных:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Доказательство. Формула Грина

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy,$$

примененная (справа налево) к функциям  $P(x, y) \equiv 0$  и  $Q(x, y)$  — первообразной по  $x$  для функции  $f(x, y)$ , приводит к равенствам

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D Q'_x(x, y) dx dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy.$$

<sup>4</sup>Также являющийся кусочно гладким, замкнутым и не имеющим самопересечений.

<sup>5</sup>Иными словами, множества  $G$  и  $D$  суть замыкания областей, ограничиваемых контурами  $C$  и  $\Gamma$ .

Для преобразования последнего интеграла в качестве пути обхода контура  $\Gamma$  (в плоскости  $x, y$ ) берется образ  $\hat{\gamma}$  при отображении  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  пути  $\gamma : \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, t \in [t_0, T]$ , обходящего контур  $C$  (в плоскости  $u, v$ ) в *положительном* направлении:  $\hat{\gamma} : \begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \end{cases}, t \in [t_0, T]$ ; как следует из предложения 1, соответственно случаям а)  $J > 0$  и б)  $J < 0$ , путь  $\hat{\gamma}$  будет обходить контур  $\Gamma$  а) в *положительном* и б) в *отрицательном* направлении. Продолжая предыдущие равенства, можно одновременно учесть оба этих случая, оперируя символом  $\operatorname{sgn} J$  (*знак якобиана*  $J$ )<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy &= \operatorname{sgn} J \cdot \int_{t_0}^T Q(\overbrace{x(u(t), v(t))}^{x(t)}, \overbrace{y(u(t), v(t))}^{y(t)}) (\overbrace{y'_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + y'_v(u(t), v(t)) \dot{v}(t)}^{\dot{y}(t)}) dt = \\ &= \operatorname{sgn} J \cdot \oint_C Q(x(u, v), y(u, v)) (y'_u(u, v) du + y'_v(u, v) dv) = \\ &= \operatorname{sgn} J \cdot \iint_G \left( (Q(x(u, v), y(u, v)) y'_v(u, v))'_u - (Q(x(u, v), y(u, v)) y'_u(u, v))'_v \right) dudv = \\ &= \operatorname{sgn} J \cdot \iint_G ((Q'_x x'_u + Q'_y y'_u) y'_v + Q y''_{vu} - (Q'_x x'_v + Q'_y y'_v) y'_u - Q y''_{uv}) dudv = \\ &= \operatorname{sgn} J \cdot \iint_G Q'_x(x(u, v), y(u, v)) (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dudv. \end{aligned}$$

Поскольку  $\operatorname{sgn} J \cdot (x'_u y'_v - x'_v y'_u) = |J(u, v)|$ , а  $Q'_x = f$ , окончательно

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| dudv.$$

### 3. Замечание по применению формулы замены переменных

Сформулированные в предложении 2 условия, оправдывающие замену переменных в двойном интеграле, в конкретных приложениях редко выполняются в полном объеме. Есть, однако, нехитрые приемы обойти эту трудность. Иллюстрацией может служить простейший пример перехода к полярным координатам в интеграле по кругу  $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .

Этот круг является образом прямоугольника  $G = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a\}$ <sup>7</sup> при отображении  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , не удовлетворяющем на прямоугольнике  $G$  условиям предложения 2, поскольку нарушены свойства *взаимной однозначности* отображения и *не обращения в нуль* его якобиана  $J(\varphi, r) = \begin{vmatrix} x'_\varphi & y'_\varphi \\ x'_r & y'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -r$ ; к тому же образ граничного контура прямоугольника  $G$  не совпадает с окружностью, ограничивающей круг  $D$ . Эти недостатки устраняются при замене прямоугольника  $G$  прямоугольником  $G_\varepsilon = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon, \varepsilon \leq r \leq a\}$ <sup>8</sup> с обозначением  $C_\varepsilon$  граничного контура прямоугольника  $G_\varepsilon$  и  $\Gamma_\varepsilon$  граничного контура образа  $D_\varepsilon$  прямоугольника  $G_\varepsilon$  (см. рисунок).

<sup>6</sup>С учетом того, что якобиан  $J(u, v)$  *сохраняет знак* на множестве  $G$ .

<sup>7</sup>В «плоскости» переменных  $\varphi$  (*полярного угла*) и  $r$  (*полярного радиуса*), выполняющих здесь роль  $u$  и  $v$ .

<sup>8</sup>Где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число.

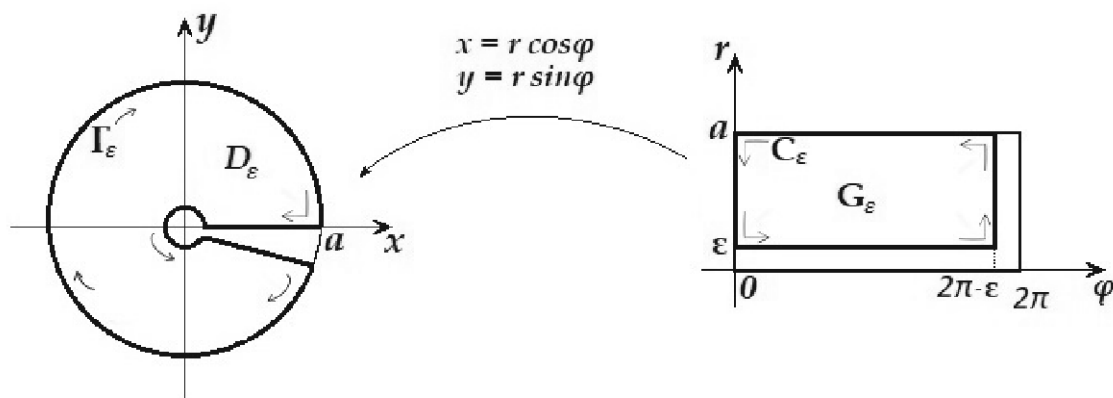


Рис. 1

Применение предложения 2 (с переменными  $\varphi$  и  $r$ , выступающими в качестве  $u$  и  $v$ ) дает для непрерывных функций в круге  $D$ :

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\varepsilon} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) |r| d\varphi dr = \\ &= \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi dr. \end{aligned}$$

### Литература

- [1] Немыцкий В. В., Слудская М. И., Черкасов А. Н. Курс математического анализа. Том 2. - М.: ГИТТЛ, 1957. - 500 с.
- [2] Шведенко С. В. К определению криволинейных интегралов и доказательству формулы Грина // Математическое образование. - 2013. - № 4 (68). - С. 58–69.

Шведенко Сергей Владимирович,  
доцент кафедры высшей математики  
Национального исследовательского ядерного  
университета (МИФИ), кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

# Теорема Гринберга и её применение

А. Ю. Эвнин

Теорема Гринберга [3], дающая необходимое условие того, чтобы граф был одновременно гамильтоновым и планарным, была доказана в 1968 г. Несмотря на её простоту и эффективность при решении различных задач, она практически не отражена в русскоязычной учебной литературе. В последнее время с её помощью были получены новые результаты, касающиеся гипогамильтоновых графов.

В статье используется терминология и обозначения из [1, 2].

## 1. Планарность и гамильтоновость

Сначала рассмотрим задачи, в основе решения которых лежит следующая идея: если плоский граф гамильтонов, то его грани лежат по одну из двух сторон относительно гамильтонова цикла. Если гамильтонов цикл зафиксирован, то рёбра, не входящие в этот цикл, будем называть *хордами*.

**Задача 1.** Докажите непланарность графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .

**Доказательство.** 1) Предположим, что у графа  $K_5$  есть плоская укладка. Рассмотрим гамильтонов цикл данного графа. Он делит плоскость на две связные части (пятиугольники). В каждом пятиугольнике можно провести не более двух непересекающихся (во внутренних точках) хорд, в то время всего имеется 5 хорд. Противоречие!

2) Предположим, что у графа  $K_{3,3}$  есть плоская укладка. Рассмотрим гамильтонов цикл данного графа. Он делит плоскость на две связные части (шестиугольники). Каждая хорда соединяет противоположные вершины шестиугольника. Поэтому в каждом шестиугольнике можно провести не более одной хорды, если мы хотим, чтобы хорды не пересекались во внутренних точках. В то же время всего имеется три хорды. Противоречие!  $\square$

**Задача 2.** Пусть  $G$  — плоский гамильтонов граф,  $n$  — наименьшее число цветов, в которые можно раскрасить его грани так, чтобы смежные грани (т. е. с общим ребром) были разного цвета. Докажите (не ссылаясь на теорему о четырёх красках), что  $n \leq 4$ .

**Доказательство.** Раскраску, при которой смежные грани разного цвета, называют *правильной*. Рассмотрим гамильтонов цикл данного графа. Он делит плоскость на две связные части ( $n$ -угольники). В свою очередь, хорды делят каждый из  $n$ -угольников на части (грани  $G$ ). Покажем, что двух цветов достаточно для правильной раскраски граней  $n$ -угольника. Будем проводить хорды  $n$ -угольника последовательно, одну за другой. Первоначально покрасим  $n$ -угольник цветом 1. После проведения очередной хорды будем менять цвета в одной из двух частей, на которые хорда делит  $n$ -угольник (цвет 1 на цвет 2, а цвет 2 на цвет 1). Несложно убедиться, что раскраска при этом остаётся правильной. Аналогично раскрасив грани второго  $n$ -угольника цветами 3 и 4, получим правильную раскраску в четыре цвета (или меньше, если хотя бы в одном из  $n$ -угольников нет хорд) граней графа  $G$ .  $\square$

## 2. Теорема Гринберга

**Теорема 1. (Э. Гринберг, 1968 г.)** Пусть  $G$  — плоский гамильтонов граф с  $n$  вершинами,  $C$  — гамильтонов цикл в этом графе,  $f_k$  — количество  $k$ -угольных граней внутри  $C$ , а  $g_k$  — количество  $k$ -угольных граней вне  $C$  (для каждого  $k$ ). Тогда

$$\sum_{k=3}^n (k-2)(f_k - g_k) = 0. \quad (1)$$

**Доказательство.** [3] Будем называть грани графа, лежащие внутри  $C$ , внутренними, а вне  $C$  — внешними. Установим сначала равенство

$$\sum_{k=3}^n (k-2)f_k = n-2. \quad (2)$$

Индукция по числу хорд. База индукции: хорд нет, граф представляет собой цикл. Тогда  $f_n = 1$ ,  $f_k = 0$  при  $k < n$ , и равенство (2) очевидно. Посмотрим, что происходит с величиной  $\sum_k k f_k - 2 \sum_k f_k$  при добавлении новой хорды. Сумма  $\sum_k k f_k$  представляет собой суммарный периметр всех внутренних граней. Проведение новой хорды увеличивает эту величину на 2. В свою очередь,  $\sum_k f_k$  — общее количество внутренних граней. Новая хорда делит одну из граней на две грани и увеличивает количество граней на 1, удвоенная сумма увеличивается на 2. Таким образом, величина  $\sum_k k f_k - 2 \sum_k f_k$  остаётся неизменной — равной  $n-2$ . Проведённое рассуждение применимо и к внешним граням. Поэтому

$$\sum_{k=3}^n (k-2)g_k = n-2. \quad (3)$$

Тождество Гринберга (1) получается вычитанием из равенства (2) равенства (3).  $\square$

## 3. Задачи на применение теоремы Гринберга

**Задача 3.** [3] Докажите, что граф с 46 вершинами с рис. 1 (обозначим его  $G_{46}$ ) не является гамильтоновым

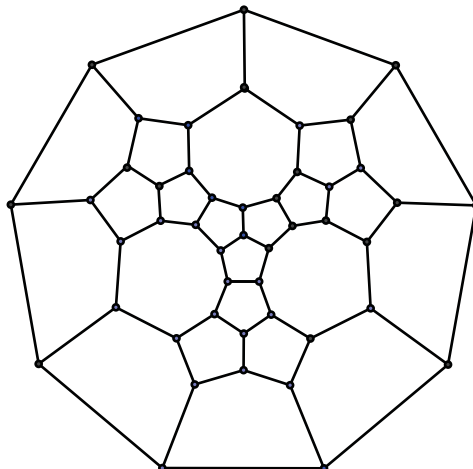


Рис. 1

**Доказательство.** В графе  $G_{46}$  есть 9-угольная грань, три 8-угольных грани, а остальные грани 5-угольные. В обозначениях из формулировки теоремы Гринберга  $f_5 + g_5 = 21$ ;  $f_8 + g_8 = 3$ ;  $f_9 + g_9 = 1$ .

В сумме  $\sum_{k=3}^n (k-2)(f_k - g_k)$  все слагаемые, кроме трёх (при  $k = 5, 8, 9$ ) равны нулю. Из ненулевых слагаемых два делятся на 3 (при  $k = 5$  и 8), а одно (при  $k = 9$ ) не делится на 3. Поэтому указанная сумма не делится на 3, в силу чего не равна нулю, что противоречит (1).  $\square$

**Задача 4.** [6] Докажите, что граф с 40 вершинами с рис. 2 (обозначим его  $G_{40}$ ) не является гамильтоновым.

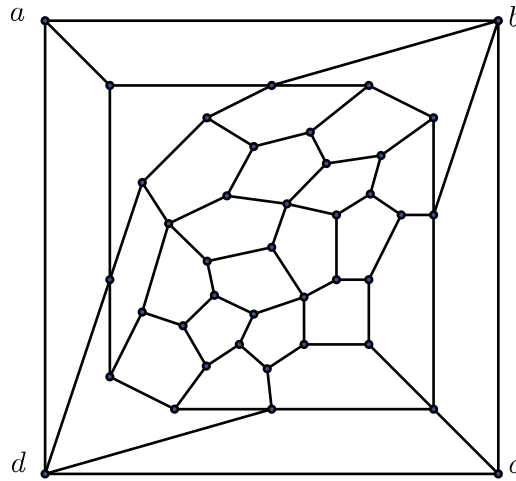


Рис. 2

**Доказательство.** В  $G_{40}$  пять 4-угольных граней и 22 5-угольных граней. Проведя в формуле Гринберга сравнение по модулю 3, получим, что  $2(f_4 - g_4) \equiv 0 \pmod{3}$ . Поскольку  $f_4 + g_4 = 5$ , получаем отсюда, что либо  $f_4 = 4$ ,  $g_4 = 1$ , либо  $f_4 = 1$ ,  $g_4 = 4$ . Пусть  $Q$  — 4-угольная грань, которая лежит по одну сторону от гамильтонова цикла, а остальные 4-угольные грани лежат по другую сторону.

Заметим, что ребро входит в гамильтонов цикл  $C$  тогда и только тогда, когда грани, в границу которых оно входит, лежат по разные стороны от  $C$ . Обозначим через  $T$  неограниченную грань на рис. 2. Если  $T = Q$ , то все стороны  $T$  входят в  $C$ , что невозможно. В противном случае только одна сторона  $T$  граничит с  $Q$  (не умаляя общности, можно считать, что это ребро  $ab$ ), а по трём другим сторонам  $T$  граничит с гранями, расположенными по ту же сторону от  $C$ , что и  $T$ . Значит, соответствующие три ребра ( $bc$ ,  $cd$ ,  $da$ ) не входят в  $C$ . Однако из трёх рёбер, инцидентных вершине  $c$ , два должны входить в гамильтонов цикл. Противоречие!  $\square$

**Замечание 1.** Оказывается [6], если исключить из графа  $G_{40}$  любую вершину, то получится гамильтонов граф. Поэтому граф  $G_{40}$  — гипогамильтонов. Этот граф имеет наименьшее число вершин среди известных плоских гипогамильтоновых графов. С другой стороны, пока лишь известно, что в любом таком графе не менее 18 вершин. Так что зазор между имеющимися оценкой и примером весьма велик!

**Задача 5.** Можно ли, выйдя из вершины  $u$  додекаэдра, посетить все вершины по одному разу, закончив маршрут в вершине  $v$  (рис. 3)?



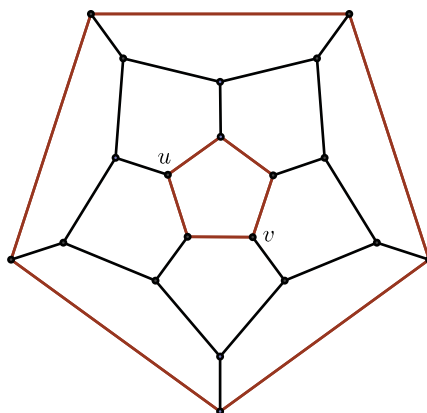


Рис. 3

**Ответ:** нельзя.

**Решение.** Добавим к графу ребро  $uv$ . Получим плоский граф  $G$ , в котором одна треугольная грань, одна четырёхугольная и 11 пятиугольных. Если в додекаэдре существует указанная гамильтонова цепь, то в  $G$  есть гамильтонов цикл  $C$ , содержащий ребро  $uv$ , причём треугольная и четырёхугольная грани, граничащие по ребру  $uv$ , лежат по разные стороны от  $C$ . Следовательно, либо  $f_3 = g_4 = 1$ ,  $f_4 = g_3 = 0$ , либо  $f_3 = g_4 = 0$ ,  $f_4 = g_3 = 1$ . В обоих случаях  $f_4 - g_4 = -(f_3 - g_3) = \pm 1$ . Поэтому  $(f_3 - g_3) + 2(f_4 - g_4) = f_4 - g_4 = \pm 1$ . Тогда левая часть уравнения Гринберга

$$(f_3 - g_3) + 2(f_4 - g_4) + 3(f_5 - g_5) = 0$$

не кратна 3, в то время как правая часть кратна 3. Противоречие!  $\square$

**Замечание 2.** В статьях [4, 5] можно найти примеры применения теоремы Гринберга к исследованию на гамильтоновость графов некоторых типов.

#### 4. Упражнения

Ниже предлагается ряд задач, которые заинтересованный читатель сможет решить самостоятельно.

1. С помощью теоремы Гринберга докажите непланарность графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .
2. Пусть  $G$  — плоский граф, внешняя грань которого ограничена 15 рёбрами, а остальные грани — четырёх-, шести- или восьмиугольные. Докажите, что в  $G$  нет гамильтонова цикла.
3. Докажите негамильтоновость графов, изображённых на рис. 4 и рис. 5.

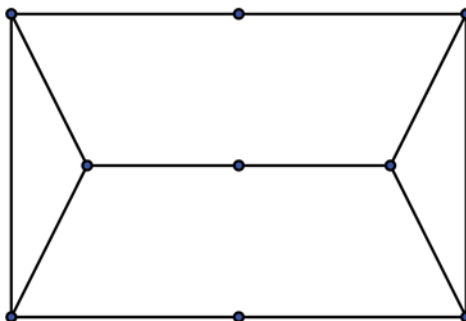


Рис. 4

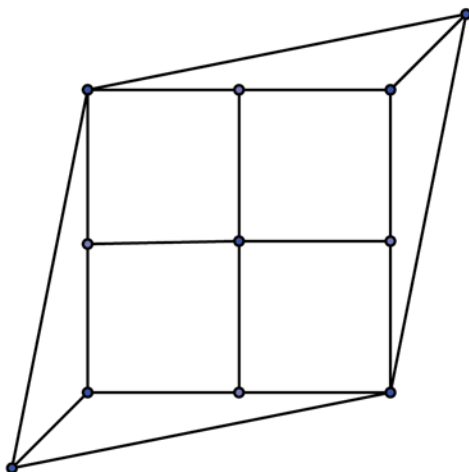


Рис. 5

4. Удалим из графа додекаэдра (рис. 3) произвольную вершину. Докажите, что полученный граф не будет гамильтоновым.

5. Докажите, что в графе, изображённом на рис. 6, не существует гамильтонова цикла, содержащего одновременно рёбра  $e$  и  $f$ .

**Указание.** Поставьте на каждом из этих рёбер по новой вершине.

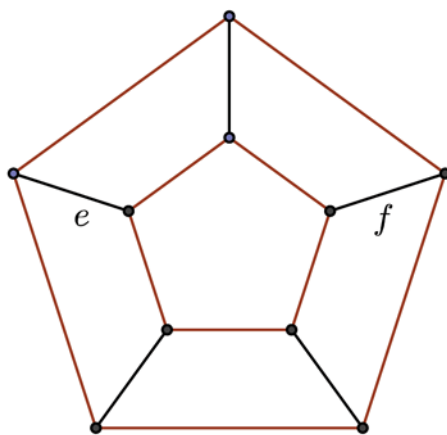


Рис. 6

6. Пусть  $C$  — произвольный гамильтонов цикл в графе с рис. 6. Докажите, что по одну сторону от  $C$  находится две пятиугольные грани и одна четырёхугольная, а по другую сторону 4 четырёхугольные.

7. Пусть  $C$  — произвольный гамильтонов цикл в графе с рис. 7. Как могут быть расположены пятиугольные грани относительно  $C$ ?

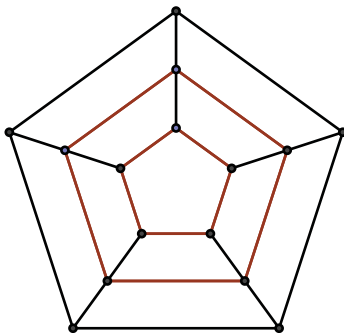


Рис. 7

### Литература

- [1] Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. и др. *Вся высшая математика: учебник*. - М.: ЛЕНАНД, 2017. - Т.7 - 208 с.
- [2] Эвнин А.Ю. *Задачник по дискретной математике*. Изд. 6-е, испр. и доп. - М.: ЛЕНАНД, 2016. - 272 с.
- [3] Гринберг Э.Я. *Плоские однородные графы степени три без гамильтоновых циклов* // Латв. матем. ежегодник. - 1968. - Т. 4. - С. 51-58.
- [4] Chia G.L. *Grinberg's Criterion Applied to Some Non-Planar Graphs* // Ars Combinatoria. - 2011. - V. 100. - P. 3-7.
- [5] Jiang H. *Non-Hamiltonian Holes in Grid Graphs* // arXiv:1204.5284. - 2012. - 10 p.
- [6] Jooyandex M. *Planar Hypohamiltonian Graphs on 40 Vertices* // Journal of Graph Theory. - 2017. V. 84(2). - P. 121-133.

Эвнин Александр Юрьевич,  
доцент кафедры прикладной математики  
и программирования Южно-Уральского  
государственного университета,  
кандидат педагогических наук.

E-mail: graph98@yandex.ru

## Информация

### **О деятельности ФМОП в 2017 г.**

#### *От редакции*

В 2017 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 и учебного комплекса № 2090 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, учредителем которого ФМОП является; в 2017 г. вышли номера 1(81), 2(82), 3(83), 4(84).
- Подготовка к выпуску электронного приложения к журналу “Математическое образование”, (первый выпуск запланирован в начале 2018 г.).
- Поддержка подготовки к изданию “О некоторых педагогах ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века” о жизни и деятельности ряда ярославских педагогов.
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ, февраль.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников САММАТ, г. Самара, апрель.
- Предоставление изданий Фонда для участников летних математических лагерей “Алый Парус” и “Берендеевы Поляны” Костромской области, июнь–август.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся старших классов нескольких школ г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Отдельные материалы имеются на [www.lomonosovclub.ru](http://www.lomonosovclub.ru)

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2018 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2018 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

<b>M. Zelikin. Genius. In the Memory of I. Shafarevich</b>	<b>2</b>
Reminiscences of the great russian mathematician Igor Shafarevich and his milieu.	
<b>E. Smolyanova, N. Malyshkina. Hyperbola and Biquadratic Equations</b>	<b>5</b>
Geometric basis of solving biquadratic equations is analyzed.	
<b>S. Takhaev. Constructing Quadrilaterals with Prescribed Properties</b>	<b>10</b>
Some types of quadrilaterals which can be constructed on the basis of a given triangle are analyzed.	
<b>M. Tleubergenova. Equilateral Triangle Helps to Solve a Problem</b>	<b>33</b>
Some problems, mainly concerning angles, can be effectively solved by introducing an appropriate equilateral triangle.	
<b>A. Bobojanov, V. Safonov. Application of Linear Algebra for Transforming 2-nd order PDEs to Canonical Forms</b>	<b>38</b>
A method of transforming 2-nd order PDEs to canonical forms based on certain results of linear algebra is suggested.	
<b>V. Ivlev, E. Krivoshey. Systems of Ordinary Linear Differential Equations. Integrable Combinations (continued)</b>	<b>47</b>
The method of integrable combinations for systems of ordinary linear differential equations is generalized for the case of 2 matrices systems.	
<b>V. Muratalieva. Algorithms for Proving Theorems on Linear Integro-Differential Equations with Analytic Functions</b>	<b>52</b>
A class of linear operator equations for which the problem of existence of solutions can be algorithmized is described.	
<b>S. Shvedenko. The Formula of Change of Variables in a Double Integral as a Consequence of the Green Formula</b>	<b>56</b>
A method of deriving the formula of change of variables in a double integral from the Green formula is suggested.	
<b>A. Evnin. The Grinberg Theorem and its Application</b>	<b>60</b>
On the Grinberg theorem and its application to problems of the graphs theory.	
<b>Current Information</b>	<b>66</b>

