

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год двадцать второй

№ 4 (88)

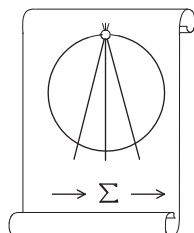
октябрь – декабрь 2018 г.

Москва

Периодическое издание в области математического образования



Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”
www.lomonosovclub.com



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Канель-Белов А.Я.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 4 (88), 2018 г.

© “Математическое образование”, составление, 2018 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2018 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 25.01.2019 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (88), октябрь – декабрь 2018 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

- И. С. Бекешева, О. С. Бобылева, У. А. Джафарова.* Алгебраические задачи как средство развития исследовательской компетенции 2
- В. Б. Дроздов.* Замечательные точки и неравенства 6
- Ю. А. Игнатов.* Графический метод в комбинации с методом замены переменной при решении уравнений 12

Студентам и преподавателям математических специальностей

- В. Ю. Бодряков, А. А. Быков.* История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения 18
- В. В. Ивлев, Е. М. Архипова.* Об одном приближении уравнений Пфаффа 30
- А. Ф. Ляхов, Е. И. Чнегов.* Алгоритмы и методы построения программы-дескриптора, осуществляющей распознавание графических изображений 38
- Н. А. Рашевский.* Графы как наглядные модели задач на условную вероятность 50

Информация

- От редакции.* О выходе книги И.П. Костенко 61
- От редакции.* О деятельности ФМОП в 2018 г. 62
- От редакции.* Содержание журнала “Математическое образование” за 2017–2018 гг. 63

Алгебраические задачи как средство развития исследовательской компетенции учащихся 7-х классов

И. С. Бекешева, О. С. Бобылева, У. А. Джафарова

В работе составлены и решены алгебраические задачи исследовательского характера по алгебре для учащихся 7-х классов. Использование подобных задач способствуют развитию исследовательской компетенции обучающихся.

На современном этапе развития педагогической и методической науки непосредственно проблемой учебного исследования обучающихся и формированием ее элементов в процессе обучения математике занимались Ю.М. Колягин, И.И. Баврин, Г.В. Токмазов и многие другие. Так, например, в научной литературе по методике преподавания математики проблема приобщения обучающихся к учебно-исследовательской деятельности [1] реализуется посредством решения специальных исследовательских задач или через дополнительную работу над задачей. В работах О.К. Огурцова и Н.М. Рогановского, посвященных привлечению обучающихся к учебно-исследовательской деятельности в процессе решения задач, подтверждается, что результатом является развитие исследовательских умений, а также закрепление и углубление, систематизация и обобщение полученных знаний.

Таким образом, можно сказать, что развитие исследовательской компетенции обучающихся эффективно осуществляется в процессе учебно-исследовательской деятельности посредством решения математических задач исследовательского характера.

Отметим, что методология решения алгебраических задач по Д.Г. Пойа [4] соответствует основным этапам учебно-исследовательской деятельности и тем ведущим исследовательским умениям, которыми овладевает обучающийся. Следовательно, алгебраические задачи являются одним из средств развития исследовательской компетенции обучающихся.

Далее рассмотрим примеры использования алгебраических задач для развития исследовательской компетенции учащихся 7-го класса. По теме «Линейные уравнения с одной переменной» сформулированы и решены три задачи, которые направлены на формирование отдельных компонентов исследовательской компетенции:

1. Исследовательская задача. К задачам данного типа можно отнести те, в которых по предлагаемому данным нужно отыскать все, что возможно. При решении такого рода задач важно акцентировать внимание обучающихся на полноте решения, на различных способах и методах нахождения неизвестных компонентов задачи, а также на последовательности действий и логике рассуждений, что позволяет формулировать проблемы и строить гипотезы.

2. Проблемная задача. К задачам данного типа относятся задачи, в которых предлагаются ошибочные рассуждения или нереальные конфигурации и требуется найти ошибку и исправить ее. При решении данного типа задач формируются определенные исследовательские умения и навыки, но не прослеживаются этапы учебно-исследовательской деятельности.

3. Частично-поисковая задача. К задачам данного типа относятся задачи, для решения которых используются нестандартные методы; готовый теоретический материал, предоставленный учителем [1]. Готовый теоретический материал может предоставляться в рамках урока или внеурочного занятия, либо его поиск осуществляют обучающиеся в рамках домашнего задания как подготовки к следующему уроку.

Перейдем к анализу конкретных задач каждого типа.

1. Исследовательская задача. Докажите, что существуют такие значения параметра b , что уравнение имеет один единственный корень

$$\frac{3b - x}{(b - 1)(x + 3)} + \frac{3b - 11}{b - 1} = \frac{2x + 7}{x + 3}.$$

Постановка цели исследования. Существуют ли такие значения параметра b , что данное уравнение имеет единственный корень?

Анализ условия задачи.

1. Так как знаменатели дробей не могут равняться нулю, то

$$\begin{cases} b \neq 1, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

2. Учитывая условие п. 1, части исходного уравнения можно умножить на выражение $(b - 1)(x + 3) \neq 0$, чтобы избавиться от дробей. Получим

$$3bx - 5 = (3b - 11)(x + 3) = (2x + 7)(b - 1).$$

3. После преобразования и приведения подобных слагаемых получаем

$$(4b - 9)x = 31 - 2b.$$

4. Проанализируем полученное выражение:

4.1. При $4b - 9 = 0$ ($b = 2,25$), уравнение принимает вид $0 \cdot x = 13$, т.е. не имеет корней.

4.2. При $4b - 9 \neq 0$ ($b \neq 2,25$), уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{31 - 2b}{4b - 9}.$$

5. Проведем анализ выражения из п. 4.2 на удовлетворение условиям п.1, т.е. проверим, нет ли таких значений b , при которых найденное в п. 4.2 значение x равно -3 :

$$\frac{31 - 2b}{4b - 9} = -3 \Rightarrow 31 - 2b = 27 - 12b \Rightarrow b = -0,4.$$

6. **Вывод:** при $b \neq 1$, $b \neq 2,25$, $b \neq -0,4$, уравнение имеет один единственный корень

$$x = \frac{31 - 2b}{4b - 9}.$$

2. Проблемная задача. По реке движутся плот и катер навстречу друг другу. Сейчас расстояние между ними 52 км. Скорость плота 4 км/ч, а скорость катера 9 км/ч. Насколько изменится расстояние между ними через час?

Анализ текста задачи: расстояние между плотом и катером изменится на то расстояние, которое пройдут катер и плот вместе, т.е. найден лишний элемент - расстояние между плотом и катером в данный момент.

Решение.

1. Для нахождения расстояния, которое пройдет плот его скорость нужно умножить на время, т.к. собственная скорость плота — это есть скорость течения реки и он может плыть только по течению, т.е. $4 \text{ км/ч} \cdot 1 \text{ ч} = 4 \text{ км}$.

2. Так как катер плывет навстречу плоту, то он плывет против течения, следовательно, его скорость на 4 км/ч меньше собственной, т. е. 5 км/ч. Аналогично плоту, за один час он пройдет расстояние 5 км.

3. Тогда вместе катер и плот за один час пройдут расстояние $4 + 5 = 9$ км/ч, что и является искомым расстоянием.

Ответ. 9 км/ч.

Примечание. Данная задача является *задачей с лишними данными*, поэтому обучающиеся должны определить какой элемент является лишним. Задание направлено на развитие исследовательского умения — понимание постановки задачи. Для решения задания обучающиеся должны ответить на следующие вопросы:

- возможно ли удовлетворить условию задачи;
- достаточно или недостаточно, чрезмерно, противоречиво условие задачи для определения неизвестного.

3. Частично-поисковая задача. Пусть дано линейное уравнение с одной переменной вида

$$\frac{5}{9}x - \frac{7}{4}x + \frac{17}{18}x = -\frac{1}{4}.$$

Решить уравнение правилом «одного ложного положения».

Указание на нестандартный метод. Как с помощью *правила одного ложного положения* решить данное уравнение?

Этапы решения задачи:

- проанализировать сущность правила одного ложного положения;
- решить данное уравнение с его помощью.

Поиск решения: В данном уравнении $c = -\frac{1}{4}$. Пусть $x_1 = 1$, тогда

$$c_1 = \frac{5}{9} - \frac{7}{4} + \frac{17}{18} = \frac{2 - 63 + 34}{36} = \frac{-7}{36},$$

следовательно,

$$x = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{\left(-\frac{7}{36}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{36}{7} = \frac{9}{7}.$$

Примечание. Правило одного ложного положения — метод решения линейных уравнений с одной переменной, которым пользовались в древних цивилизациях. Данный метод является нестандартным по отношению к теоретическому материалу темы. Суть метода одного ложного положения сводится к представлению вместо неизвестного x произвольного числа, отличного от истинного значения — x_1 , и получения ложного результата c_1 вместо c — истинный результат. Тогда неизвестное находят по формуле:

$$x = x_1 \cdot \frac{c}{c_1}.$$

Литература

- [1] Воровщиков С.Г. Учебно-познавательная компетентность школьников: опыт системного конструирования // Управление современной школой. Завуч. - 2007. - № 6. - с. 160.
- [2] Зимняя И.А. Ключевые компетенции как результативно-целевая основа компетентностного подхода в образовании. Авторская версия. - М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004.
- [3] Обухов А.С. Исследовательская деятельность как способ формирования мировоззрения // Народное образование. - 2008. - № 10. - с. 158-161.
- [4] Пойа Д.Г. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия изучение и преподавание. - М.: Наука, 1970. - с. 45

*Бекешева Ирина Сергеевна,
старший преподаватель кафедры математики
и методики преподавания математики института
естественных наук и математики ФГБОУ высшего образования
«Хакасский государственный университет
им. Н.Ф. Катанова», кандидат педагогических наук.*

E-mail: irrisskay@mail.ru

*Бобылева Оксана Владимировна,
доцент кафедры математики и методики
преподавания математики института естественных
наук и математики ФГБОУ высшего образования
«Хакасский государственный университет
им. Н.Ф. Катанова», кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: nimdar@bk.ru

*Джафарова Улькер Али — Эшреф Кызы,
студентка института естественных наук и математики
ФГБОУ высшего образования
«Хакасский государственный университет
им. Н.Ф. Катанова».*

E-mail: ulechka.2512@gmail.com

Замечательные точки и неравенства

В. Б. Дроздов

В статье упорядочены по величине длины шести отрезков, соединяющих четыре замечательные точки треугольника. Материал адресуется всем любителям математики.

1. Исходные формулы

Пусть G и H — точки пересечения медиан и высот треугольника ABC со сторонами a, b, c ; L и O — центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника соответственно, а r и R — их радиусы.

Четыре точки G, H, L, O определяют $C_4^2 = 6$ отрезков: OH, GH, OG, OL, LG, LH .

Шесть отрезков задают $C_6^2 = 15$ пар отрезков. Естественно попытаться сравнить по величине их длины. Эта задача не только трудная, но и трудоемкая — рассмотреть пятнадцать неравенств.

Сначала выразим длины упомянутых шести отрезков через a, b, c, r, R, p , где p — полупериметр треугольника. Приведем без вывода соответствующие формулы, доказательства которых нетрудно найти в Интернете, а также в математической литературе.

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2). \quad (1)$$

$$OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2. \quad (2)$$

$$GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (3)$$

$$GH^2 = 4R^2 + \frac{32}{9}Rr + \frac{8}{9}r^2 - \frac{8}{9}p^2. \quad (4)$$

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (5)$$

$$OG^2 = R^2 + \frac{8}{9}Rr + \frac{2}{9}r^2 - \frac{2}{9}p^2. \quad (6)$$

$$OL^2 = R^2 - \frac{abc}{a + b + c}. \quad (7)$$

$$OL^2 = R^2 - 2Rr. \quad (8)$$

$$LG^2 = \frac{3(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2)}{9} - \frac{2abc}{a + b + c}. \quad (9)$$

$$LG^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}. \quad (10)$$

$$LH^2 = 4R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + ac + bc) - \frac{4abc}{a + b + c}. \quad (11)$$

$$LH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2. \quad (12)$$

2. Доказательства лемм

Лемма 1. Во всяком треугольнике верно неравенство

$$R \geq 2r. \quad (13)$$

Доказательство. Из известных формул

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}.$$

Последнее равенство нужно возвести в квадрат, и сгруппировать сомножители так:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{a^2} \right) \cdot \left(\frac{(b+c-a)(b+a-c)}{b^2} \right) \cdot \left(\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{c^2} \right).$$

В итоге имеем:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{(b-c)^2}{a^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{(a-c)^2}{b^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{(a-b)^2}{c^2} \right),$$

откуда следует формула (13), причем равенство в ней будет только в случае равностороннего треугольника.

Лемма 2. Во всяком треугольнике имеет место равенство

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr. \quad (14)$$

Доказательство. Преобразуем разность квадратов $p^2 - r^2$:

$$p^2 - r^2 = p^2 - \frac{S^2}{p^2} = p^2 - \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \frac{p^3 - (p-a)(p-b)(p-c)}{p} =$$

$$p(a+b+c) - (ab+ac+bc) + \frac{abc}{p} = \frac{(a+b+c)^2}{2} - (ab+ac+bc) + 4 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + 4Rr,$$

откуда и следует равенство (14).

Лемма 3. В любом треугольнике верно равенство

$$ab+ac+bc = p^2 + r^2 + 4Rr. \quad (15)$$

Доказательство. Равенство (15) следует непосредственно из равенства (14) и известной формулы

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc).$$

Классическое неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим трех положительных чисел x, y, z имеет вид:

$$\frac{3xyz}{xy+xz+yz} \leq \frac{x+y+z}{3}. \quad (16)$$

Лемма 4. Во всяком треугольнике имеет место неравенство

$$p^2 \geq 14Rr - r^2. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть в неравенстве (16) $x = ab, y = ac, z = bc$. Применение формул (14) и (15) сразу дает неравенство (17). Равенство в нем будет только при $x = y = z$, то есть при $a = b = c$.

Лемма 5. В любом треугольнике справедливо неравенство

$$p^2 \leq \frac{27}{4}R^2. \quad (18)$$

Доказательство. Так как $p = \frac{a+b+c}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C)$ по теореме синусов, то достаточно показать, что

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку $A + B + C = \pi$, то остается доказать:

$$\sin A + \sin B + \sin (A + B) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Последнее неравенство проще всего установить с помощью производной, для чего рассмотрим функцию двух переменных A и B :

$$f(A, B) = \sin A + \sin B + \sin (A + B), \quad (19)$$

определенную на плоскости AOB в треугольнике: $0 < A < \pi$, $0 < B < \pi$, $A + B < \pi$ (см. рис. 1).

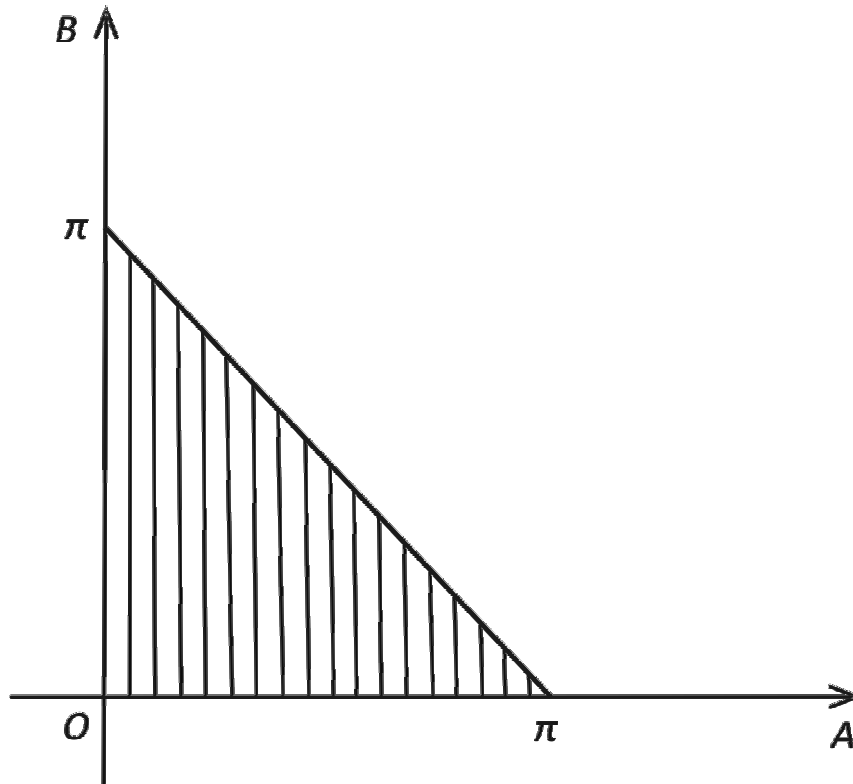


Рис. 1

Определить наибольшее (или наименьшее) значение функции двух переменных можно по аналогии с функцией одной переменной. В самом деле, мысленно зафиксируем произвольное допустимое значение переменной B . Эта операция правомерна именно в силу произвольности фиксированного значения B . Тогда функция (19) как бы превращается в функцию одной переменной A . Затем делаем то же самое, фиксируя A .

Приравняв обе производные к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos A + \cos (A + B) = 0, \\ \cos B + \cos (A + B) = 0, \end{cases}$$

откуда немедленно вытекает: $B = A$, а функция (19) превращается в функцию одной переменной:

$$f(A) = 2 \sin A + \sin 2A, \quad (20)$$

где $0 < A < \frac{\pi}{2}$. Дальнейшее исследование функции (20) тривиально и дает, что ее максимальное значение равно $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, что достигается при $A = \frac{\pi}{3}$. Но тогда $B = \frac{\pi}{3}$ и $C = \frac{\pi}{3}$.

Итак, неравенство (18) доказано, причем равенство в нем имеет место только для равностороннего треугольника.

Окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух его других сторон, называется *внеписанной*. Радиус внеписанной окружности, касающейся стороны $BC = a$ треугольника ABC , определяется по формуле

$$r_a = \frac{S}{p - a}. \quad (21)$$

Аналогично определяются и два других радиуса:

$$r_b = \frac{S}{p - b}, \quad (22)$$

$$r_c = \frac{S}{p - c}. \quad (23)$$

Лемма 6. В любом треугольнике справедливо равенство

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \quad (24)$$

Лемма 7. В каждом треугольнике верно равенство

$$p^2 = r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c. \quad (25)$$

Доказательства двух последних лемм весьма просты и предоставляются читателю.

Лемма 8. Во всяком треугольнике имеет место равенство

$$4R + r = r_a + r_b + r_c. \quad (26)$$

Доказательство. Удобно вычислить величину $x = r_a + r_b + r_c - r$. Имеем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{S}{p - a} + \frac{S}{p - b} + \frac{S}{p - c} - \frac{S}{p} = \\ &= S \left(\frac{p(p - b)(p - c) + p(p - a)(p - c) + p(p - a)(p - b) - (p - a)(p - b)(p - c)}{S^2} \right) = \\ &= \frac{c(p^2 - pc + p^2 - pa - pb + ab)}{S} = \frac{c(2p^2 - p(a + b + c) + ab)}{S} = \frac{abc}{S} = 4R. \end{aligned}$$

3. Математический эксперимент

Из формул (1), (3), (5) сразу следует, что

$$OG < GH < OH.$$

Осталось доказать или опровергнуть еще двенадцать неравенств. А это много! Поэтому пойдем на такой необычный шаг, как математический эксперимент.

Таблица 1.

ТРЕУГОЛЬНИК					
РАВНОБЕДРЕННЫЙ			РАЗНОСТОРОННИЙ		
остроугольный	прямоугольный	тупоугольный	остроугольный	прямоугольный	тупоугольный
101, 101, 40	1, 1, $\sqrt{2}$	101, 101, 198	13, 14, 15	3, 4, 5	25, 39, 56
$OH = \frac{2867}{66}$	$OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$OH = \frac{29003}{40}$	$OH = \frac{\sqrt{265}}{8}$	$OH = \frac{5}{2}$	$OH = \frac{\sqrt{16897}}{2}$
$OL = \frac{6161}{198}$	$GH = \frac{\sqrt{2}}{3}$	$GH = \frac{29003}{60}$	$GH = \frac{\sqrt{265}}{12}$	$GH = \frac{5}{3}$	$GH = \frac{\sqrt{16897}}{3}$
$GL = \frac{2867}{99}$	$LH = \sqrt{2} - 1$	$LH = \frac{9603}{20}$	$LH = \frac{\sqrt{17}}{4}$	$LH = \sqrt{2}$	$LH = 29\sqrt{2}$
$LG = \frac{183}{11}$	$OL = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$OL = \frac{9797}{40}$	$OL = \frac{\sqrt{65}}{8}$	$OL = \frac{\sqrt{5}}{2}$	$OL = \frac{\sqrt{2405}}{2}$
$OG = \frac{2867}{198}$	$OG = \frac{\sqrt{2}}{6}$	$OG = \frac{29003}{120}$	$OG = \frac{\sqrt{265}}{24}$	$OG = \frac{5}{6}$	$OG = \frac{\sqrt{16897}}{6}$
$LH = \frac{1220}{99}$	$LG = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$LG = \frac{97}{30}$	$LG = \frac{1}{3}$	$LG = \frac{1}{3}$	$LG = \frac{\sqrt{205}}{3}$

Таблица 1, где в четвертой строке даны длины a, b, c сторон треугольника, говорит сама за себя. Двукратно проведенные вычисления по формулам (1), (3), (5), (7), (9), (11), результаты которых совпали, говорят о следующем:

Может быть: как $GH > OL$, так и $GH < OL$;
 как $LH > OL$, так и $LH < OL$;
 как $OG > LG$, так и $OG < LG$;
 как $LG > LH$, так и $LG < LH$;
 как $OG > LH$, так и $OG < LH$.

Кроме того, выдвигаются гипотезы: в любом треугольнике выполняются неравенства:

$$OL > OG; \quad (27)$$

$$GH > LH; \quad (28)$$

$$OH > LH; \quad (29)$$

$$OL > LG; \quad (30)$$

$$OH > OL; \quad (31)$$

$$OH > LG; \quad (32)$$

$$GH > LG. \quad (33)$$

4. Доказательства гипотез

Из формул (5) и (7) следует:

$$OL^2 - OG^2 = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - 9abc}{9(a+b+c)}. \quad (34)$$

По теореме о средних величинах:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (35)$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2}. \quad (36)$$

Из формул (34), (35), (36) сразу вытекает неравенство (27). Из формул (4) и (12) имеем:

$$GH^2 - LH^2 = \frac{p^2 - 4Rr - 19r^2}{9}. \quad (37)$$

С учетом неравенства (17) равенство (37) преобразуется так:

$$GH^2 - LH^2 > \frac{10r(R-2r)}{9}. \quad (38)$$

Из формул (13) и (38) следует неравенство (28).

Неравенство (29) непосредственно вытекает из неравенства (28) и неравенства $OH > GH$.

Из формул (8) и (10) следует:

$$OL^2 - LG^2 = \frac{9R^2 - 2Rr - 5r^2 - p^2}{9},$$

что легко преобразуется к виду:

$$OL^2 - LG^2 = \frac{(R-2r)\left(\frac{9R}{4} + \frac{5r}{2}\right) + \left(\frac{27R^2}{4} - p^2\right)}{9}. \quad (39)$$

Из формул (13), (18), (39) легко вытекает неравенство (30).

Из равенств (2) и (8) сразу получим

$$OH^2 - OL^2 = 2((4R + r)(R + r) - p^2). \quad (40)$$

Преобразование правой части равенства (40) обычными способами зашло в тупик. И автор ждет читательских идей. Поэтому выбираем математически необычный путь — перейти к трем переменным r_a, r_b, r_c — радиусам вневписанных окружностей.

Формулы (24), (25), (26) трансформируют равенство (40) так:

$$OH^2 - OL^2 = \frac{r_a r_b (r_a - r_b)^2 + r_a r_c (r_a - r_c)^2 + r_b r_c (r_b - r_c)^2}{2(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)},$$

откуда видна справедливость неравенства (31).

Отметим, что равенство $OH = OL$ невозможно, ибо будет только при $r_a = r_b = r_c$, что в силу формул (21), (22), (23) означает равносторонний треугольник, в котором все четыре точки: O, H, L, G совпадают. Следовательно, $OH > OL$.

Неравенство (32) сразу вытекает из неравенств (30) и (31).

Далее, из формул (4) и (10) выводим:

$$GH^2 - LG^2 = (4R^2 + 5Rr + r^2 - p^2) + \frac{r(R - 2r)}{3},$$

что с учетом формул (2) и (8) преобразуется к виду:

$$GH^2 - LG^2 = \frac{OH^2 - OL^2}{2} + \frac{r(R - 2r)}{3}. \quad (41)$$

Неравенство (33) является следствием формул (13), (31), (41).

Видим, что все семь гипотез подтвердились. Для удобства сводим полученные результаты в итоговую таблицу 2.

Таблица 2.

	OH	OL	GH	LG	OG	LH
OH						
OL	$OH > OL$					
GH	$OH > GH$	$GH > OL$ $GH < OL$				
LG	$OH > LG$	$OL > LG$	$GH > LG$			
OG	$OH > OG$	$OL > OG$	$GH > OG$	$OG > LG$ $OG < LG$		
LH	$OH > LH$	$LH > OL$ $LH < OL$	$GH > LH$	$LG > LH$ $LG < LH$	$OG > LH$ $OG < LH$	

Замечание. Леммы 2 и 3 [соответственно формулы (14) и (15)] показывают, что формулы (2), (4), (6), (10), (12) выводятся соответственно из формул (1), (3), (5), (9), (11).

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Графический метод в комбинации с методом замены переменной при решении уравнений

Ю. А. Игнатов

В статье рассматривается метод решения уравнений и неравенств с помощью комбинации графического метода с методом замены переменной. Этот метод может применяться при решении уравнений комбинированного типа, например, тригонометрического, показательного, логарифмического в комбинации с рациональным.

При решении уравнений разных типов (тригонометрических, показательных, логарифмических и других) один из распространенных методов решения — метод замены переменной. С его помощью уравнение приводится к более простому виду, обычно квадратному. Решив получившееся уравнение, обратной заменой возвращаемся к исходной переменной и находим ее значения, являющиеся корнями исходного уравнения.

Этот метод хорошо разработан в методической литературе и широко используется в обычной школьной практике. Но метод работает эффективно только в том случае, если структура уравнения позволяет полностью избавиться от старой переменной в результате замены, и при этом получается уравнение более простого вида. Типы уравнений, для которых метод полезен, описаны в школьных учебниках. Но для уравнений комбинированного типа метод обычно не работает. Например, рассмотрим уравнение $2^x = 2x$. Если произвести замену $2^x = y$, с помощью которой избавляемся от показательного выражения в уравнении, то придем к уравнению $y = 2 \log_2 y$, которое не проще исходного.

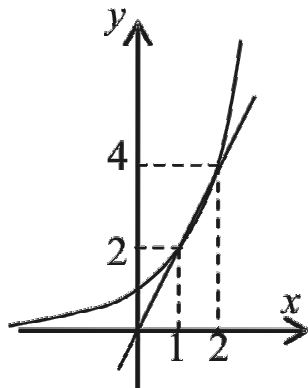
Когда непонятно, каким методом решать уравнение, можно применить метод подбора. Использование этого метода допустимо только в том случае, если сопровождается доказательством того, что найдены все корни. В этом случае метод подбора становится вполне законным и имеет право на использование.

При подборе корней уравнения обычно бывает полезен графический метод. Недостаток этого метода, во-первых, в том, что с его помощью корни находятся приближенно, и, во-вторых, остается вопрос, все ли корни найдены. Первое замечание снимается непосредственной проверкой: найденные значения переменной подставляем в исходное уравнение и тем самым выясняем, являются ли они точными. Второе замечание требует специального исследования, и вид графика подсказывает направление этого исследования.

Например, применим графический метод для решения рассмотренного выше уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $2^x = 2x$.

Решение. Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = 2x$. По рисунку определяем, что графики пересекаются в точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$. Подстановкой в уравнение убеждаемся, что эти значения переменной x действительно являются корнями исходного уравнения. То, что других корней нет, подсказывает вид графиков: первый является кривой, выпуклой вниз, а второй — прямой линией. Такие линии могут пересекаться не более чем в двух точках, поэтому больше корней нет.



Исследование функций на выпуклость обычно проводится с помощью второй производной. В обычной школьной программе этот аппарат не используется, но вид графиков стандартных функций хорошо известен, и их свойства, связанные с выпуклостью, можно использовать.

Применение описанного метода затруднено, если построить графики слишком сложно. В этом случае может помочь комбинация графического метода с методом замены переменной. Следующий пример иллюстрирует этот прием для простого случая.

Пример 2. Решить уравнение $2^{\cos x - 1} = \cos^2 \frac{x}{2}$.

Решение. Уравнение преобразуется к виду $2^{\cos x} = \cos x + 1$. Производим замену $\cos x = t$. Приходим к уравнению $2^t = t + 1$, которое решается аналогично уравнению из примера 1. Уравнение имеет два корня 0 и 1. Других корней нет, так как график левой части уравнения — экспонента, выпуклая вниз, а график правой части — прямая, и они могут иметь не более двух точек пересечения. Значит, обратной заменой приходим к уравнению $\cos x = 0$ или $\cos x = 1$, и решения исходного уравнения $2\pi n; \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

В более сложных случаях возможна следующая ситуация. Пусть в уравнении напрашивается замена $y = \varphi(x)$, но эта замена не позволяет удалить все вхождения переменной x . Тогда мы производим замену на y там, где возможно, оставив некоторые вхождения переменной x . Уравнение будет тогда содержать две переменные x и y , то есть иметь вид $F(x, y) = 0$. Нетрудно сообразить, что система $F(x, y) = 0, y = \varphi(x)$ равносильна исходному уравнению. Но ввиду важности этого утверждения дадим его точную формулировку и строгое доказательство.

Теорема. Множество решений уравнения $F(x, \varphi(x)) = 0$ совпадает с множеством значений переменной x в множестве решений системы

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Доказательство. Пусть x_0 — решение исходного уравнения. Это значит, что $F(x_0, \varphi(x_0)) = 0$ является верным равенством. Обозначим $\varphi(x_0)$ через y_0 . Тогда верными являются равенства $y_0 = \varphi(x_0)$ и $F(x_0, y_0) = 0$, то есть пара (x_0, y_0) является решением системы. Обратное утверждение доказывается в обратном порядке.

Если мы сумеем построить графики уравнений системы (1), то получим возможность применить графический метод для решения исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $(x - 2)^2 + (\cos \frac{\pi x}{2} - 2)^2 = 5$.

Решение. Производим замену $\cos \frac{\pi x}{2} = y$. Уравнение приводится к системе

$$\begin{cases} y = \cos \frac{\pi x}{2}, \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5. \end{cases}$$

Решаем ее графическим способом в системе координат Oxy .

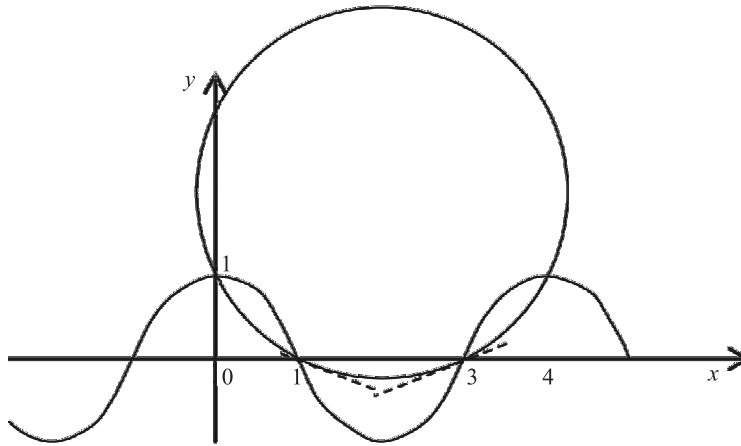


График первого уравнения — синусоида, второго — окружность с центром в точке $(2; 2)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Из графика видим, что эти фигуры пересекаются в четырех точках с абсциссами 0, 1, 3, 4. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все эти значения действительно являются корнями исходного уравнения. Проверим, что других корней нет. На отрезке $[0; 1]$ синусоида выпукла вверх, а окружность вниз, поэтому у них не более двух точек пересечения. Та же ситуация на отрезке $[3; 4]$. На отрезке $[1; 3]$ обе функции выпуклы вниз, и здесь требуются другие рассуждения. В точке $(1; 0)$ касательная к окружности имеет угловой коэффициент 0,5, окружность расположена выше этой касательной, а синусоида при $1 < x \leq 2$ ниже касательной. При $1 \leq x < 2$ такая же ситуация с касательной в точке $(3; 0)$. Эти касательные пересекаются в точке $(1,5; -0,5)$ и разделяют дуги окружности и синусоиды на отрезке $[1; 3]$. Значит, других точек пересечения у этих дуг нет. Остальная часть окружности выше синусоиды, так как для нее $y > 1$.

Таким образом, уравнение имеет решения 0, 1, 3, 4.

Рассмотренные примеры иллюстрируют способы оценки числа корней. Сформулируем основные правила, которыми можно при этом руководствоваться.

I. Если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает, то графики этих функций имеют не более одной точки пересечения. При этом монотонность одной из этих функций должна быть строгой, а другой может быть нестрогой (в частности, функция может быть постоянной).

II. Если функция $y = f(x)$ выпукла вверх, а функция $y = g(x)$ выпукла вниз, то графики этих функций имеют не более двух точек пересечения. При этом одна из этих функций может не иметь выпуклости, то есть быть линейной целиком или на отдельных участках.

Когда обе функции возрастают или обе убывают, описанные правила не работают. В этих случаях можно попробовать оценить разность этих функций. Но часто это не помогает, так как разность может оказаться комбинированной функцией, и исследование ее на монотонность или выпуклость не проще, чем решение исходного уравнения. В таких случаях можно попробовать отделить графики этих функций друг от друга третьей функцией, как показано в решении примера 3.

Описанный прием можно применить и при решении неравенств. Но здесь лучше не пытаться по графику сразу найти множество решений неравенства. Следует решить соответствующее уравнение, а затем применить метод интервалов.

Пример 4. Решить неравенство $2 \cos^2 x + 7 \cos x - 9 \leq \frac{18x}{\pi}$.

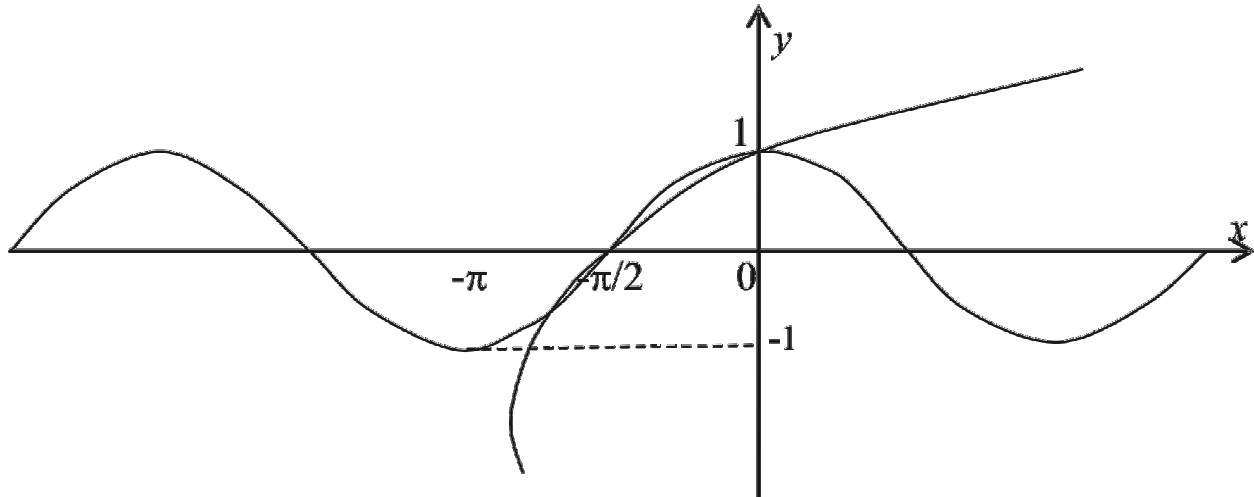
Решение. Заменим неравенство на уравнение и для его решения сделаем замену $y = \cos x$. Уравнение будет равносильно системе

$$\begin{cases} y = \cos x, \\ 2y^2 + 7y - 9 = \frac{18x}{\pi}. \end{cases}$$

Применим для решения графический метод. Второе уравнение приводим к виду

$$x = \pi \left(\frac{1}{9}y^2 + \frac{7}{18}y - \frac{1}{2} \right).$$

Его графиком является парабола, причем ось абсцисс и ось ординат поменялись ролями. Координаты вершины параболы $x = -\frac{85}{72}\pi$, $y = -\frac{7}{4}$. Для более точного построения найдем координаты трех точек: $y = 1$, $x = 0$; $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$; $y = -1$, $x = -\frac{7\pi}{9}$. Строим графики.



По графику видим, что две построенные фигуры, парабола и синусоида, имеют три пересечения. Но это, конечно, требует обоснования. Сначала найдем координаты точек пересечения. Две из них, $x = 0$, $y = 1$ и $x = -\frac{\pi}{2}$, $y = 0$, уже найдены, они соответствуют вспомогательным точкам, найденным при построении параболы. Для нахождения третьей точки график подсказывает попробовать значение $y = -1/2$. Для параболы получаем соответствующее значение $x = -\frac{2\pi}{3}$, точка с такими координатами лежит и на графике косинуса. Покажем теперь, что других точек пересечения нет. При $-1 \leq y \leq 0$ соответствующие участки графиков выпуклы в противоположные стороны, поэтому имеют не более двух точек пересечения. При $0 \leq y \leq 1$ выпуклость в одну сторону, поэтому для обоснования отсутствия других пересечений рассмотрим касательные к параболе в крайних точках промежутка. Учтем, что в уравнении параболы аргументом является y , а функцией x . Имеем $x' = \pi \left(\frac{2}{9}y + \frac{7}{18} \right)$. При $y = 0$ получаем $x' = \frac{7\pi}{18}$, и уравнение касательной в этой точке $x = \frac{7\pi}{18}y - \frac{\pi}{2}$. При $y = 1$ получаем $x' = \frac{11\pi}{18}$, и уравнение касательной в этой точке $x = \frac{11\pi}{18}(y - 1)$. Точка пересечения этих касательных имеет координаты $x = -\frac{5\pi}{18}$, $y = \frac{1}{2}$. На графике косинуса соответствующая точка при $y = \frac{1}{2}$ имеет абсциссу $x = -\frac{\pi}{3}$, то есть лежит левее точки пересечения касательных. Значит, эти касательные разделяют графики двух уравнений на соответствующем участке, и других точек пересечения нет.

Таким образом, найдены все решения уравнения, полученного из исходного неравенства: $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2}$, 0 . Теперь методом интервалов получаем решение неравенства: $[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}] \cup [0; +\infty)$.

Рассмотрим другие возможности применения метода. Часто при решении уравнений, содержащих выражение $\sqrt{1-x^2}$, применяется подстановка $x = \cos y$, позволяющая благодаря основному тригонометрическому тождеству избавиться от радикала. Можно использовать другие тождества, позволяющие упростить уравнение.

Пример 5. Решить уравнение $e^x = x + \sqrt{1+x^2}$.

Решение. Для подстановки используем *гиперболические функции*. Как известно, они определяются следующим образом: *гиперболический синус*

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

и гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Эти функции удовлетворяют тождеству

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

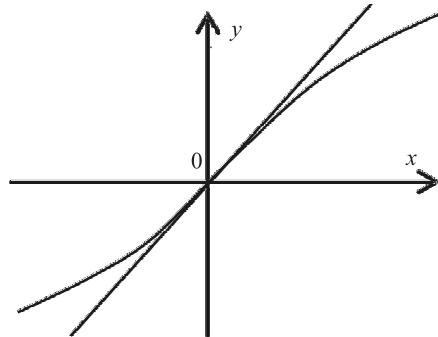
Сделаем подстановку $x = \operatorname{sh} y$. Уравнение приводится к системе

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} y, \\ e^x = \operatorname{sh} y + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}. \end{cases}$$

Правая часть второго уравнения преобразуется к виду

$$\operatorname{sh} y + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} = \operatorname{sh} y + \sqrt{\operatorname{ch}^2 y} = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = e^y.$$

Получаем уравнение $e^x = e^y$, откуда $x = y$. Тогда из первого уравнения получаем $y = \operatorname{sh} y$. Оно имеет решение $y = 0$. Других решений нет. Для обоснования этого используем графическое представление. Аргументом считаем переменную y , функцией x . Графики функций $x = y$ и $x = \operatorname{sh} y$ касаются в начале координат. Первый график — прямая, второй при $y \geq 0$ — кривая, выпуклая вниз. Следовательно, других точек пересечения при $y \geq 0$ нет. При $y < 0$ симметричная картина в силу нечетности функций. Следовательно, единственное решение исходного уравнения $x = 0$.



Приведенные примеры наглядно показывают возможности описанного метода. Метод вполне можно изучать со школьниками на факультативных и кружковых занятиях.

Уравнения для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $x^2 + \ln^2 x - \ln x^2 - 1 = 0$.
2. Решите уравнение $x^2 + \log_2^2 x - \log_2 x^4 - 1 = 0$.
3. Решите уравнение $\cos(x) + \sin(x) = 1$.
4. Решите уравнение $\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^3$.

Ответы к уравнениям

1. 1.
2. 1; 2.
3. $2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.
4. 1.

Литература

1. Игнатов Ю.А. Всероссийские студенческие турниры математических боёв. Тула, 2002 – 2015. В 2-х ч. Часть I / Игнатов Ю.А., Шулюпов В.А., Реброва И.Ю. и др. - Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2016. - 148 с.
2. Игнатов Ю.А. Комбинация метода подстановки с графическим методом при решении уравнений / В сб. Модернизация методического обеспечения и организационного сопровождения учебного процесса в контексте нового закона “Об образовании в Российской Федерации”: Материалы XI учебно-методической конференции ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л.Н. Толстого. - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2013. - С. 75-78.

*Игнатов Юрий Александрович, доцент
кафедры алгебры, математического анализа
и геометрии Тульского государственного
педагогического университета
им. Л.Н. Толстого, кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: ignatov-yurii@mail.ru

История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения

В. Ю. Бодряков, А. А. Быков

В работе рассматривается увлекательная история возникновения и изучения гиперболических функций, ставших ровесниками нового дифференциального и интегрального исчисления, развиваемых лучшими европейскими математическими умами XVII столетия. Поистине главным героем этой, подчас драматической, истории стала цепная линия (гиперболический косинус). Решение задачи об уравнении свободно подвешенной цепной линии (1691) триадой И. Бернулли – Г. Лейбниц – Х. Гюйгенс подвело черту под начальным этапом разработки основ современного математического анализа и ознаменовало его переход в зрелую фазу.

Приводятся примеры практического использования гиперболических функций, прежде всего, гиперболического косинуса. На основании принципа минимума потенциальной энергии тела в положении устойчивого равновесия дан современный вывод уравнения цепной линии как решение вариационной изопериметрической задачи (по Эйлеру). Построена (по Гюйгенсу) дискретная модель цепи как предельного (с увеличением дробления) случая ломаной из равноотстоящих точечных масс, связанных невесомыми гибкими нерастяжимыми нитями. Компьютерное моделирование показало, что с увеличением числа точечных масс (при фиксированной общей массе и длине цепи) ломаная быстро приближается к точной гладкой кривой. Проведен натурный эксперимент, показавший возможность точного, без каких-либо подгонок, сопоставления реально подвешенной цепи с модельным расчетом. Подчеркнут высокий педагогический потенциал свободно подвешенной цепи как удобного и доступного для разных уровней образования объекта для теоретического, модельного и натурального учебно-исследовательского изучения с использованием широкого спектра внутри- и межпредметных связей математики с физикой, механикой, ИКТ.

Статья публикуется с продолжением.

Введение

Первое появление гиперболических функций историки математики обнаружили (1707, 1722) в трудах английского математика, ученика и помощника И. Ньютона, Абрахама де Муавра (Abraham de Moivre, 1667–1754) [Абрахам де Муавр / <https://ru.wikipedia.org/wiki/>]. Дал современное определение и выполнил обстоятельное исследование этих функций Винченцо Риккати в 1757 году; он же предложил обозначения для них: sh для гиперболического синуса и ch для гиперболического косинуса (в западной нотации sinh и cosh). Риккати исходил из рассмотрения единичной гиперболы, используя аналогию с единичной окружностью для тригонометрических функций. Независимое открытие и дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Иоганном Ламбертом, который установил широкий параллелизм формул обычной и гиперболической тригонометрии (1770). Н.И. Лобачевский (1792–1856) впоследствии использовал этот параллелизм, доказывая непротиворечивость неевклидовой геометрии, в которой круговая тригонометрия заменяется на гиперболическую. Однако все это случилось много позже знаменитого, говоря современным языком, «баттла» трех ведущих математиков своего времени (Иоганн Бернулли, Готфрид Лейбниц и Кристофер Гюйгенс), решивших поставленную Якобом Бернулли в 1690 году задачу об определении формы цепной линии (гиперболический косинус). Вероятно, именно это состязание способствовало пробуждению осознанного интереса к гиперболическим функциям.

Гиперболические функции часто встречаются при вычислении различных интегралов. Некоторые интегралы от рациональных функций и от функций, содержащих радикалы, довольно просто вычисляются с помощью замен переменных с использованием гиперболических функций. Например, вида $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, и др. Линейная комбинация гиперболических функций вида $y = C_1 \operatorname{sh} ax + C_2 \operatorname{ch} ax$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' - a^2 y = 0$ так же, как линейная комбинация тригонометрических функций вида $y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $y'' + a^2 y = 0$.

Аналогично тому, как матрицы вида $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ описывают повороты двумерного евклидова пространства, матрицы $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$ описывают повороты в простейшем двумерном пространстве Минковского. В связи с этим гиперболические функции часто встречаются в теории относительности.

Как обсуждается далее, однородная веревка или цепь, свободно подвешенная за концы, приобретает форму графика функции $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, из-за чего гиперболический косинус называют цепной линией; как показывают расчеты, арка в виде перевёрнутой цепной линии наиболее эффективно распределяет нагрузку. Изучение фактической формы подвешенных проводов линий электропередачи (ЛЭП) в сопоставлении с теоретической цепной линией дает важную информацию о реальном механическом состоянии проводов. То же касается и тросовых (цепных) удерживающих (швартовых) систем в морском и речном судоходстве. Важным является вопрос об изменении формы цепной линии под действием дополнительных внешних нагрузок; например, говоря о линиях ЛЭП, — ветровых нагрузок.

Таким образом, не вызывает сомнений значимость гиперболических функций в истории математики, особенно в связи с рассмотрением цепной линии; не потеряли своей значимости они и в современных математических приложениях. Целью настоящей работы является представить краткий, но при этом достаточно полный, обзор истории развития гиперболических функций с позиций современных педагогических математических представлений.

Достаточно полное представление об истории возникновения, изучения и применения гиперболических функций дают работы [1–19]; работы [1–5, 20–36] отражают историю изучения и приложений цепной линии (гиперболического косинуса). В частности, работы [23, 27, 30, 32, 34–41] рассматривают педагогические приложения цепной линии. Так, изучение реальной подвешенной цепочки с использованием современных мобильных устройств и последующей цифровой обработкой первичных данных является отличной основой для увлекательных лабораторных работ по математике. Гиперболические функции, особенно цепная линия, и поныне привлекают неослабевающий интерес отечественных и зарубежных исследователей и педагогов.

История возникновения и изучения гиперболических функций

Однако за почти два столетия до начала осознанного изучения гиперболических функций Гиртом де Крёмером (Gheert de Krömer, 1512–1594) было обнаружено первое и одно из наиболее важных применений гиперболических функций. Его осуществил фламандский географ, более известный под латинским именем Герард (Джерард) Меркатор (Gerhardus Mercator)

[Меркатор Герард /<https://ru.wikipedia.org/wiki/>].

В 1569 г. он приступил к созданию карты, в которой кривая (локсодромия), которая всегда наклонена под одинаковыми углами к каждому меридиану, изображалась бы прямой линией. Это было значительным и крупным прорывом в навигации. И сегодня составление морских навигационных и аэронавигационных карт мира базируются на этом подходе. Проекция Меркатора отличается тем, что на картах не искажаются углы и формы. Меркатор опубликовал свою карту без пояснений, и это не позволило другим обнаружить, что его расчетные формулы вели непосредственно к гиперболическим функциям.

Гиперболические функции естественно появляются в работах Леонарда Эйлера (Leonhard Euler, 1707–1783). Комбинации экспонент $(e^x + e^{-x})/2$ и $(e^x - e^{-x})/2$ появились в I томе *Introductio in analysin infinitorum* (1748) [6]. Интерес Эйлера к этим выражениям выглядит естественным с точки зрения полученных им равенств

$$\begin{aligned}\cos x &= (e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x})/2; \\ \sqrt{-1} \sin x &= (e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x})/2,\end{aligned}$$

где мнимая единица $i = \sqrt{-1}$. Однако сам Эйлер не называл эти комбинации экспонент гиперболическими функциями и не использовал специальных обозначений для них.

Современник Эйлера, Винченцо Риккати (Vincenzo de Riccati, 1707–1775) унаследовал интересы отца в области дифференциальных уравнений, которые естественно возникали при решении геометрических задач. Это привело Риккати к изучению конических сечений в декартовых координатах и к заинтересованности в изучении свойств гиперболы. В результате Риккати ввёл гиперболические функции; в современной математике принято определять эти функции, выражая их через экспоненту, но он изучал их основные свойства, исходя лишь из геометрических свойств гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ или $2xy = 1$. Риккати использовал геометрические методы, хотя и был знаком с теми работами Эйлера, которые предшествовали выходу в свет книги Риккати [7].

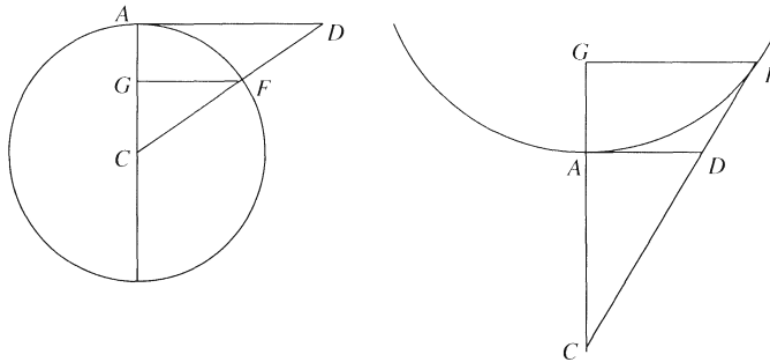


Рис. 1. Рисунки из работы Риккати [7]

Над теорией гиперболических функций Риккати работал вместе с Джироламо Саладини (Girolamo Saladini, 1735–1813). В работе [7] Риккати использовал гиперболу для определения функций, которые он называет как «sinus hyperbolico» и «cosinus hyperbolico», по аналогии с круговыми функциями «sinus circolare» и «cosinus circolare». Обозначив u — удвоенную площадь сектора ACF , поделенную на длину отрезка CA (и для окружности, и для гиперболы на рис. 1; см. также рис. 2), Риккати определил, что синус и косинус u есть длины сегментов GF и CG на рис. 1. Хотя Риккати явно не сравнивал единичную окружность и равнобочную гиперболу, он определил гиперболические синус и косинус, так же как Ламберт. Риккати вывел несколько тождеств для гиперболического синуса и косинуса и использовал их для нахождения корней некоторых уравнений, в основном, кубических.

Иоганн Ламберт (Johann Heinrich Lambert, 1728–1777) первым дал геометрическую интерпретацию гиперболических функций в статье *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques* [9], которая была представлена в Берлинской Академии Наук в 1761 г. Эта статья быстро стала популярной благодаря первому доказательству иррациональности числа π , основанном на доказанном Ламбертом утверждении, что числа z и $\operatorname{tg} z$ не могут быть одновременно рациональными. В завершающей части статьи сравнивает *transcendentes circulaires*, т.е. тригонометрические синус и косинус, и *quantités transcendentes logarithmiques* $[(e^v + e^{-v})/2]$ и $[(e^v - e^{-v})/2]$. В начале 73 раздела, автор заметил, что *quantités transcendentes logarithmiques* могут

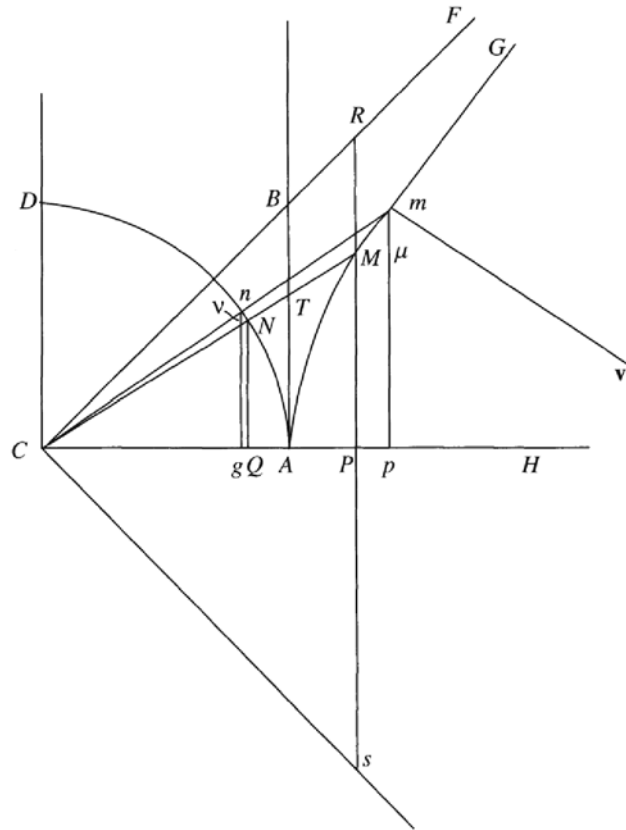


Рис. 3. Рисунок из работы Ламберта [9]

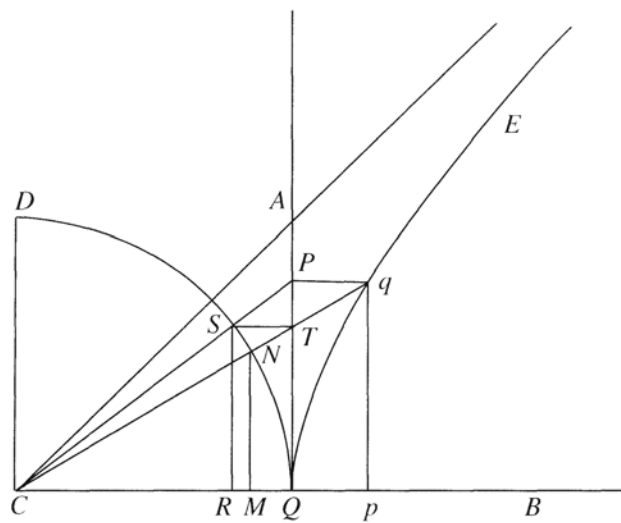


Рис. 4. Рисунок из работы Ламберта [9]

По аналогии с круговыми функциями Ламберт получил соотношения $d\xi : du = \eta$ и $d\eta : du = \xi$ и показал (раздел 77), что:

$$\eta = u + \frac{1}{2 \cdot 3} u^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} u^5 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} u^7 + \dots,$$

$$\xi = 1 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} u^4 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} u^6 + \dots,$$

где ξ — абсцисса точки на гиперболе, η — ордината точки, и u представляет собой удвоенную площадь гиперболического сегмента, определенного точкой. Но эти выражения есть разложения в ряд Тейлора-Маклорена функций $(e^u - e^{-u})/2$ и $(e^u + e^{-u})/2$, с которыми Ламберт начал исследование *quantités transcendantes logarithmique*.

В статью [9] Ламберт включил также обширный список сумм, разностей и производных, которые получил из определений $\operatorname{sh} v = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ и $\operatorname{ch} v = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$. Главной целью Ламберта была таблица значений гиперболических функций от «трансцендентального угла ω ». Угол ω обозначен на рис. 4 как угол PCQ и соотносится с углом qCQ , который обозначен как ϕ : $\sin \omega = \operatorname{tg} \phi = \tan \operatorname{hyp} \phi$. Это соотношение послужило для Ламберта основанием для перехода от круговых функций к гиперболическим (трансцендентальный угол ϕ известен как гиперболическая амплитуда ω и трансцендентная широта (по Гудерманну). Для значения ω от 1° до 90° через 1° таблица Ламберта включала в себя значения гиперболического сектора, гиперболических синуса и косинуса и их логарифмов. Заменяя круговые функции гиперболическими, Ламберт использовал эти функции к упрощению вычислений, требующих определения меры углов и длин боковых сторон некоторых треугольников.

Позже, в 1832 г., Кристофер Гудерманн (Christoph Gudermann (1798–1852)) опубликовал важные расширенные таблицы гиперболических функций [10]. Они основывались на решении Меркатора: $\lambda = \operatorname{gd} \frac{m}{a}$, и $\frac{m}{a} = \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2})$, где λ — широта, m — проекция точки на широту λ , и a — радиус Земли. Запись gd обозначает функцию Гудерманна или гудерманниан. Главные уравнения для гудерманниана следуют за найденными формулами Меркатора. Если, $x = \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})$, тогда $\theta = \operatorname{gdx}$. Гудерманниан показывает важные соотношения между круговыми и гиперболическими функциями: $\operatorname{tg} \operatorname{gd} x = \sinh x$, $\sec \operatorname{gd} x = \cosh x$ и $\sin \operatorname{gd} x = \tanh x$. Эти формулы показали Гудерманну путь для вычисления его таблиц. Термин «гудерманниан» употребим и сегодня, формулы и таблицы значений можно увидеть в математических и инженерных справочниках.

Добавим к сказанному, что подобно тому, как эллипс $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ может быть представлен уравнениями в параметрической форме, в которые входят тригонометрические функции ($x = a \sin t$, $y = b \cos t$), так и гипербола $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ в прямоугольной системе координат, центр которой совпадает с её центром, а ось абсцисс проходит через фокусы, может быть представлена уравнениями в параметрической форме, в которые входят гиперболические функции ($-\infty < t < \infty$):

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Таким образом, история гиперболических функций содержит немало увлекательных и подчас драматических страниц; эти функции применяют ныне в теории неевклидовых геометрий, теории дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, в математическом аппарате квантовой механики и др. Однако главным героем теории гиперболических функций, несомненно, является цепная линия, представляющая собой график гиперболического косинуса (см. следующий раздел). Специальный интерес к этому объекту, удобному для содержательного физического и математического (компьютерного) моделирования, не ослабевает и в наши дни, более того, переживает своеобразный бурный «ренессанс»: только за 2000-е годы изданы несколько десятков работ, посвященных цепной линии; укажем некоторые: [23–41]. Например, анализ формы реальной цепи позволяет измерить число e [39–41]. Кроме того, расчет по математической модели позволяет получить практически точное соответствие реальному объекту (цепной линии) без каких-либо упрощений.

Цепная линия

Какую форму принимает цепь, которая свободно подвешена между двумя точками? Великий Галилео Галилей (Galileo Galilei; 1564–1642) считал (1638), что формой такой цепи является парабола: «... Другой способ начертить искомую параболу на призме состоит в следующем. Вобьём в стену два гвоздя на одинаковой высоте над горизонтом и на таком расстоянии друг от друга, чтобы оно равнялось двойной ширине прямоугольника, на котором желательно построить параболу; между одним и другим гвоздём подвесим тонкую цепочку, которая свешивалась бы вниз и была такой длины, чтобы самая низкая точка её находилась от уровня гвоздя на расстоянии, равном длине призмы. Цепочка эта, свисая, расположится в виде параболы, так что, отметив её след на стене пунктиром, мы получим полную параболу, рассекаемую пополам перпендикуляром, проведённым через середину линии, соединяющей оба гвоздя» [11, 18]. Однако мэтр ошибался. Форма цепной линии отлична от квадратичной параболы, которая более пологая; правда, это различие становится заметным лишь при достаточном удалении от вершины (рис. 5).

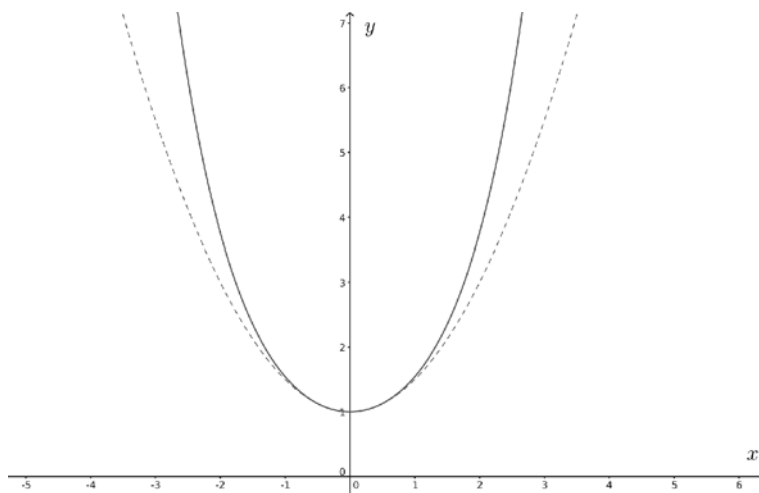


Рис. 5. Цепная линия $y = \operatorname{ch} x$ (сплошная линия) в сравнении с «половинной параболой» $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ (пунктир)

Сомнения в правоте великого Галилея не оставляли ведущих математиков своего времени почти до конца XVII века. Более полувека проблему цепной линии при ее всей кажущейся простоте и очевидности не удавалось решить, пока в мае 1690 года на страницах издаваемого (с 1682 по 1782) в Лейпциге на латыни издателем Отто Менке (Otto Mencke, 1644–1707) ежемесячного журнала *Acta Eruditorum* (Деяния ученых) Якобом Бернулли (Jakob Bernoulli, 1655–1705) не было опубликовано предложение найти решение задачи о форме цепной линии [1]. Якоб Бернулли был одним из самых видных математиков своего времени, однако до сих пор не известно достоверно, удалось ли ему самому установить истинную форму цепной линии, или мы должны благодарить его лишь за своевременную постановку проблемы [2]. Драматизма ситуации придавала очевидная состязательность математиков за приоритет своих результатов и нарастающая конкуренция старшего (Якоб) и младшего (Иоганн) братьев Бернулли, переросшая со временем в непримиримость. Как бы то ни было, спустя год, в июне 1691 года три независимых решения задачи о форме цепной линии с предисловием издателя [2] были опубликованы в *Acta Eruditorum* в порядке поступления рукописей в редакцию журнала [3–5]. Уместно также отметить, что, как пишет И. Бернулли в одном из своих писем [33], «... *Mr. Leibniz communicated through the Leipzig newspaper of 1690 that he had managed to find a solution, without publishing it, in order to give time to other analysts, and it was this that encouraged me and my brother to reapply us to the problem*» [«... 2-н Лейбниц, передал через газету в Лейпциге в

1690 г., что ему удалось найти решение, не публикуя его, чтобы дать время другим аналитикам, и именно это побудило меня и моего брата вновь обратиться к проблеме»].

Подробное рассмотрение истории решения задачи о форме цепной линии можно найти в диссертационной работе современного итальянского автора [33], мы же, с учетом ограниченного формата журнальной статьи ограничимся кратким содержательным анализом оригинальных работ [3–5].

Юный Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli, 1667–1748) в [3] предлагает (без доказательства) два подхода к определению уравнения цепной линии, похожие друг на друга. И. Бернулли ограничивается доказательством существования определенной кривой, которую он определяет через интеграл, точнее, через выражаемую им площадь под кривой. Однако, для проверки того, что эта кривая является именно цепной линией, он просто убеждается, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению Лейбница вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + 2ay}}, \quad a = \text{const.}$$

Второй подход аналогичен первому, в нем И. Бернулли оперирует с длинами дуг кривых.

Решение задачи о цепной линии Готфрида Вильгельма Лейбница (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646–1716), одного из основателей математического анализа в его современном понимании, представлено в работе [4]. Отметим невысокое качество иллюстраций из работы Лейбница, что значительно затрудняет следование рассуждениям автора. Сам Лейбниц не анализирует физические свойства цепной линии, а использует геометрические соображения из которых заключает, что уравнение цепной линии должно даваться полусуммой экспонент

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}c \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

где a есть расстояние от начала координат до вершины симметричной относительно вертикальной оси линии $y(x)$ с дополнительным требованием $c = 1$. Лейбниц приходит к выводу, что для цепной линии должно выполняться требование

$$a \frac{dy}{dx} = s = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

т. е. масштабированная производная в каждой точке искомой кривой $y(x)$ должна быть равна длине дуги кривой $s(x)$, отсчитанной от вершины. Это сразу приводит Лейбница к дифференциальному уравнению, которое именно в этой форме можно видеть в учебниках по механике:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Решением уравнения является гиперболический косинус $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ (цепная линия).

Впрочем, необходимо отметить, что при решении задачи Лейбниц все же фактически использовал известный из механики «принцип затвердевания». При «затвердевании» или, вернее, замене участков цепи над двумя фиксированными точками A и B двумя подходящими силами \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B , действующими вдоль касательных в точках A и B , профиль цепи остается неизменным. Этот принцип приводит к теореме Парди (Ignace-Gaston Pardies, 1636–1673): «Точка пересечения любых двух касательных к цепи лежит на вертикали, проходящей через центр тяжести части цепи между точками, в которых взяты касательные», чем и воспользовался Лейбниц.

К решению проблемы цепной линии, которое было дано маститым механиком, физиком, математиком, астрономом и изобретателем Христианом Гюйгенсом (Christiaan Huygens, 1629–1695), он шел всю свою жизнь. Вывод уравнения цепной линии стал последней крупной математической проблемой, решенной Гюйгенсом.

Много ранее, в решении задачи по статике подвесного моста (1646), опубликованном посмертно, Гюйгенс рассматривает невесомую веревку, нагруженную дискретными грузами. Его анализ начинается с двух принципов статики. Первый принцип основан на теореме, которая приписывается голландскому физика Симону Стевину (Simon Stevin, 1548–1620): если два равных груза закреплены в двух точках C и D подвешенного каната, то вертикальная прямая AB , проведенная через середину отрезка CD , проходит через точку B пересечения продолжения сегментов ED и FC (рис. 6). Как можно видеть, выше упомянутая теорема Парди является обобщением теоремы Стевина. Другой принцип гласит, что в положении устойчивого равновесия центр тяжести тела занимает наименьшее возможное положение; говоря современным языком, принцип минимума потенциальной энергии тела в положении устойчивого равновесия.

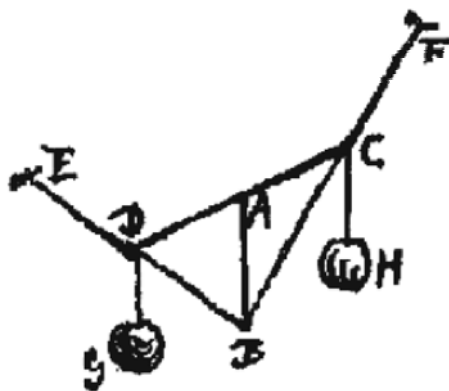


Рис. 6. Рисунок Гюйгенса (приведен по [33])



Рис. 7. Рисунок Гюйгенса (приведен по [33])

Подход к решению задачи о форме цепной линии, предложенный Гюйгенсом, основан на рассмотрении дискретного случая, когда непрерывная цепь заменяется ломаной с конечным числом прямых невесомых участков (рис. 7), на концах которых закреплены равные массы, а затем вычислить равновесный профиль полученного многоугольника в предельном переходе к бесконечному числу звеньев. Хотя Гюйгенсу не удалось дойти до конца и получить исчерпывающего решения задачи о цепной линии, и полученные результаты подробно не объясняются в его статье в *Acta Eruditorum*, из дополнительных источников, которые были опубликованы посмертно, мы заключаем, что Гюйгенс имел глубокие познания по этой кривой [26]. По-видимому, основания для включения Гюйгенса в число трех математиков, впервые решивших проблему цепной линии, достаточно вески.

Английский физик Роберт Гук (Robert Hooke, 1635–1703) открыл одно удивительное свойство цепной линии: в перевернутом виде она представляет собой самую устойчивую форму для отдельно

стоящих арок. Провисающая цепь находится в положении, в котором внутренние силы растягивают её вдоль линии кривой, т.е. касательны к цепи в каждой ее точке. В перевёрнутом виде все эти растягивающие силы превращаются в силы сжатия, делая цепную линию идеальной аркой, в которой все силы сжатия тоже действуют вдоль линии кривой. В арке, имеющей форму цепной линии, нет изгибающих сил: она поддерживает себя собственным весом, не нуждаясь, вообще говоря, ни в каких скобах или опорах. Такая арка будет очень устойчивой при минимальном количестве кирпичной кладки. Для того чтобы арка стояла прочно, кирпичи, в принципе, даже не нужно скреплять цементным раствором, поскольку они прижимают друг друга по всей её высоте. Гук был весьма доволен своим открытием, заявив, что «еще ни один зодчий не пытался сделать нечто подобное». Вскоре после этого архитекторы и инженеры начали использовать арки — цепные линии в работе. До наступления компьютерной эры самый быстрый способ создать их сводился к тому, чтобы повесить цепь нужной длины, начертить кривую, построить модель из жёсткого материала и поставить её в перевёрнутом положении [Цепная линия. Идеальная арка от природы // URL: <https://artelectronics.ru/blogs/tsepnaya-liniya-idealnaya-arka-ot-prirody>].



Рис. 8. St.Louis Missouri The Gateway Arch (арка «Врата на запад»)

На берегу реки Миссисипи в городе Сент-Луисе стоит импозантная арка (Gateway Arch) высотой в 630 футов, что соответствует 192 м, символизирующая поворотный пункт в американской истории и географии. Сент-Луис в свое время соединил относительно обжитые земли к востоку от Миссисипи с дикими бескрайними пространствами Запада (рис. 8). Эта арка была спроектирована одним из самых известных архитекторов США Эро Саариненом (Eero Saarinen, 1910–1961) в сотрудничестве с математиком и инженером Ганнскарлом Банделем (Hannskarl Bandel, 1925–1993). На арке, строительство которой было завершено в 1965 г., написана её формула (в футах): $y = -127,7' \operatorname{ch}(x/127,7') + 757,7'$.

Литература

1. Bernoulli Jakob. Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines eme tiantur: et alterius cujusdam problematis proposition // Acta Eruditorum. - Lipsia, May 1690. - p. 217-219.
2. Mencke O. Solutions of the problem proposed by J.B. // Acta Eruditorum. - Lipsia, June 1691. - p. 273.
3. Bernoulli Johannis. Solutio problematica funicularii // Acta Eruditorum. - June 1691. - V. 277. - P. 274-276.
4. Leibniz G.W. Solutio problematica catenarii // Acta Eruditorum. - June 1691. - V. 277. - P. 277-281.
5. Huygens Christiani. Dynaste Zulichemii, solutio problematis funicularii // Acta Eruditorum. - June 1691. - V. 277. - P. 281-282.
6. Euler Leonhard. Introductio in Analysin Infinitorum. - Lausannæ: Apud Marcum-Michaellem Bousquet & Socios, 1748. - V. 2. - 398 p.

7. Riccati Vincenzo. Opuscula physico-mathematica. Ad res. - Physicas & Mathematicas pertinentium. Boboniæ: Apud Lælium a Vulpe Inftituti Scientiarum Typographum. - V. 1., 1757. - 173 p.
8. Lambert Johann H. Observations trigonométriques // Mem. Acad. Sci. Berlin. - 1770. - Bd. 24. - S. 327-354.
9. Lambert J.H. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. - Histoire de l'Académie de Berlin 1761 (publ. 1768). - S. 265-322 // Vgl. Hierzu Alfred Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π . - Sitzungsab., d. math.-phys. Kl. d. bayer. Akad. d. Wiss., 1898. - Bd. 28. - P. 325-337.
10. Gudermann C. Theorie der Potenzial-oder cyclisch-hyperbolischen Funktionen. - Berlin: Gedruckt und verlegt bei G. Reimer, 1833. - 354 S.
11. Галилей Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению синьора Галилео Галилея Линчео, философа и первого математика светлейшего великого герцога Тосканского. С приложением о центрах тяжести различных тел. - М.-Л.: Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. - С. 273-274.
12. Штаерман И.Я. Гиперболические функции. - М.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935. - 55 с.
13. Yates R.C. Catenary. A Handbook on Curves and Their Properties. - Ann Arbor, MI: J.W. Edwards. - pp. 12-14, 1952.
14. Шерватов В.Г. Гиперболические функции. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. - 55 с.
15. Smith D.E. History of Mathematics, Vol. 2: Special Topics of Elementary Mathematics. - New York: Dover, 1958. - p. 327.
16. Янпольский А.Р. Гиперболические функции. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. - 194 с.
17. Lawrence J.D. A Catalog of Special Plane Curves. - New York: Dover, 1972. - pp. 195 and 199-200.
18. MacTutor History of Mathematics archive. URL: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>
19. Гиперболические функции. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
20. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. - М.: Наука, 1980. - 240 с.
URL: <http://www.twirpx.com/file/357235>.
21. Pappas T. The Catenary & the Parabolic Curves. The Joy of Mathematics. - San Carlos, CA: Wide World Publ. / Tetra, 1989. - p. 34.
22. Denzler J., Hinz A.M. Catenaria vera — the true catenary // Expositiones Mathematicae. - 1999. - V. 17. - P. 117-142.
23. Nedev S. The catenary — an ancient problem on the computer screen // European Journal of Physics. - 2000. - V. 21. - № 5. - P. 451-457.
24. Barnett J.H. Enter, stage center: the early drama of the hyperbolic functions // Mathematics Magazine. - February 2004. - V. 77. - № 1. - P. 15-30.
25. Mareno A., English L.Q. The stability of the catenary shapes for a hanging cable of unspecified length // European Journal of Physics. - 2008. - V. 30. - N. 1. - P. 97-108.
26. Bukowski J. Christiaan Huygens and the problem of the hanging chain // The College Mathematical Journal. - January 2008. - Vol. 39. - P. 2-11.
27. Sobich E.M. Kurva Catenary Dan Aproksimasi Parabola, Evaluasi Perbedaan Titik Koordinat Dan Panjang Busur [English: Catenary Curve and Parabolic Approximation, Evaluation of Coordinate Point Difference and Arc Length] // Journal Mat Stat. - 2009. - V. 9. - N. 2. - P. 100-107.
28. Jwa Y., Sohn G. A piecewise catenary curve model growing for 3D power line reconstruction // Photogrammetric Engineering & Remote Sensing. - 2012. - V. 78. № 12. - P. 1227-1240.
29. Wang C.Y., Wang C.M. Analytical Solutions for Catenary Domes // Journal of Engineering Mechanics. - 2015. - Vol. 141. - № 2. - P. 06014019.

30. Ben-Abu Y., Eshach H., Yizhaq H. Interweaving the Principle of Least Potential Energy in School and Introductory University Physics Courses // Symmetry. - 2017. - V. 9. - N. 3. - P. 45-1-12.
31. Carlson S.C. Catenary mathematics / *ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA*
URL: <https://www.britannica.com/science/catenary>
32. Федосеев В.М. Лабораторные работы по математике с развитием темы // Математика в Школе. - 2010. - № 6. - С. 62-69.
33. Nicol Imperi. The determination of the equation of the catenary by Huygens, Leibniz and Bernoulli / PhD in Mathematics. - Rome: University of Rome, 2015. - 55 p.
34. Старова О.А. Цепная линия // Математика. Всё для учителя. - 2015. - № 12. - С. 31-33.
35. Саранин В.А. К задаче о висячей цепочке // Учебная физика. - 2016. - № 3. - С. 30-33.
36. Очков В.Ф., Цуриков Г.Н., Чудова Ю.В. Осторожно: Цепная функция // Информатика в школе. - 2017. - № 4 (127). - С. 58-62.
37. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Система разноуровневых лабораторных работ по математике с применением ИКТ как инструмент фронтального формирования учебно-исследовательских и творческих умений обучающихся. С. 460-462 / В сб. материалов XXVIII Международной конференции "Современные информационные технологии в образовании", Москва-Троицк: Фонд "БАЙТИК", 27 июня 2017 г. - 602 с.
URL: http://ito.bytic.ru/uploads/files/conf_2017.pdf
38. Очков В.Ф. Цепная линия = физика + математика + информатика // Информатика в школе. - № 3. - 2018. - С. 56-63.
URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/catenary.pdf>
39. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике с применением ИКТ как инструмент формирования исследовательских умений студентов педагогического вуза. С. 175-181 / В сб. докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции "Состояние и перспективы развития ИТ-образования", посвященной 50-летию Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 16-18 ноября 2017 г.). - Чебоксары: Изд-во Чувашского гос. ун-та, 2018. - 520 с.
40. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В. Оптимизационная задача о провисании цепной линии. - С. 123-130 / В сб.: Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т. - Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2018. - 314 с.
41. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств ИКТ и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Информатизация образования». - 2018. - Т. 15. - № 4.

*Бодряков Владимир Юрьевич,
заведующий кафедрой высшей математики
и методики обучения математике,
Уральского государственного педагогического университета,
доктор физико-математических наук, доцент.*

E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

*Быков Антон Александрович,
преподаватель, Екатеринбургского
автомобильно-дорожного колледжа.*

E-mail: bykov_antony@mail.ru

Об одном приближении уравнений Пфаффа

В. В. Ивлев, Е. М. Архипова

Рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, предложенные Пфаффом и не являющиеся уравнениями «в полных дифференциалах».

Предлагается приближенный аналог уравнения Пфаффа, основанный на методе наименьших квадратов (МНК), но имеющий общий интеграл.

С этой целью строится однопараметрическое или двухпараметрическое семейство уравнений Пфаффа в полных дифференциалах и затем проводится оптимизация по этим параметрам. Приводится ряд частных случаев вычисления оптимальных значений параметров семейств уравнений Пфаффа.

1. Общие сведения

Уравнением Пфаффа в пространстве \mathbb{R}^n называется линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) в симметричной форме

$$P(x)dx_1 + Q(x)dx_2 + \dots + R(x)dx_n = 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, P, Q, R — дифференцируемые функции аргументов x_1, x_2, \dots, x_n .

Случай двух переменных. Уравнение Пфаффа на плоскости имеет вид

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2)$$

Критерием интегрируемости (2) является условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3)$$

При выполнении (3) общий интеграл для (2) имеет вид

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C \quad (4)$$

Если (2) не удовлетворяет (3) и не является уравнением в *полных интегралах*, то существует функция $\mu(x, y)$ (интегрирующий множитель), такая, что уравнение

$$\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$$

уже является уравнением в полных дифференциалах, т. е.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$$

где функция $\mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (5)$$

Общее решение (5) в настоящее время отсутствует.

В частности, если $\mu(x, y)$ зависит лишь от одной переменной, то известны решения

$$a) \mu(x, y) = \mu(x), \mu(x) = e^{\int \psi(x) dx},$$

$$\psi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q};$$

$$б) \mu(x, y) = \mu(y), \mu(y) = e^{\int \psi(y) dy},$$

$$\psi(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}.$$

Наконец, если заранее известно, что $\mu = \mu(\varphi(x, y))$, где $\varphi(x, y)$ — заданная функция от x и y , то

$$\mu(\varphi) = e^{\int \psi(\varphi) d\varphi},$$

$$\psi(\varphi) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} - P \frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Случай трех переменных. Уравнение Пфаффа есть ЛДУ вида

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (6)$$

При выполнении **первого** критерия

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (7)$$

уравнение (6) называют *уравнением в полных дифференциалах* с общим интегралом

$$U(x, y, z) = C = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz \quad (8)$$

При невыполнении критерия (7) условие полной интегрируемости имеет вид (второй критерий)

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

Подводя итоги сказанному подчеркнем:

1. Для данных классов уравнений Пфаффа существуют интегрирующие множители $\mu(x, y)$ и $\mu(x, y, z)$, решения для которых в общем случае *неизвестны*.
2. Всякое ЛДУ лишь *приблизенно* отражает реальный физический, экономический и какой-либо другой процесс. Коэффициенты ЛДУ также носят приближенный характер.

Отталкиваясь от этих двух обстоятельств, авторы поставили задачу: как найти *ближайший* аналог исходному уравнению Пфаффа, не являющемуся уравнением в полных дифференциалах, который (аналог) является вполне интегрируемым.

Идея исследования понятна.

Построить семейство уравнений Пфаффа с двумя или тремя переменными, так чтобы

- а) если исходное ЛДУ в полных дифференциалах, то, независимо от значений произвольных параметров, это семейство «вырождалось» в исходное ЛДУ.
- б) в противном случае, используя классические методы оптимизации (используется метод наименьших квадратов МНК), получить оптимальное интегрируемое приближение.

2. Аппроксимация уравнений Пфаффа двух переменных

Пусть дано уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (10)$$

не являющееся уравнением в полных дифференциалах, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Введем однопараметрическое семейство уравнений Пфаффа (с параметром λ) в полных дифференциалах в виде

$$P^*(x, y)dx + Q^*(x, y)dy = 0, \quad \text{где} \quad (11)$$

$$\begin{cases} P^*(x, y) = P(x, y) + (\lambda - 1) \int (P'_y - Q'_x) dy \\ Q^*(x, y) = Q(x, y) + \lambda \int (P'_y - Q'_x) dx \end{cases} \quad (12)$$

Величина (функция) $(P'_y - Q'_x) = J(x, y) \neq 0$ фиксирует «отклонение» от полного дифференциального уравнения (10).

Очевидно, что если

$$J(x, y) = 0,$$

то

$$P^*(x, y) = P(x, y), \quad Q^*(x, y) = Q(x, y) \quad \text{при любых значениях } \lambda.$$

Переходим к построению оптимального решения, т. е. определению $\lambda_{\text{опт}}$ методом МНК.

Интегральное квадратичное отклонение (расхождение) в области (D) решения (1) имеет вид

$$S = \iint_{(D)} \left\{ (P - P^*)^2 + (Q - Q^*)^2 \right\} dxdy \rightarrow \min$$

или подробнее

$$S = \iint_{(D)} \left\{ (\lambda - 1)^2 \left[\int J(x, y) dy \right]^2 + \lambda^2 \left[\int J(x, y) dx \right]^2 \right\} dxdy \rightarrow \min \quad (13)$$

Строим необходимое условие экстремума для (13)

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{d\lambda} = \iint_{(D)} \{ (\lambda - 1) \left[\int J(x, y) dy \right]^2 + \lambda \left[\int J(x, y) dx \right]^2 \} dxdy = 0 \quad (14)$$

Решая (14), немедленно находим

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{\iint_{(D)} \left[\int J(x, y) dy \right]^2 dxdy}{\iint_{(D)} \left[\int J(x, y) dy \right]^2 dxdy + \iint_{(D)} \left[\int J(x, y) dx \right]^2 dxdy}, \quad 0 \leq \lambda_{\text{опт}} \leq 1. \quad (15)$$

В (14) и (15), что неприятно, присутствует область интегрирования (D) и необходимость вычисления двойных интегралов, что никак не связано с решением каких-либо краевых (граничных задач). В связи с этим рассмотрим ряд доступных примеров с симметричной областью интегрирования, не требующих двойного интегрирования

Пусть, например, $D(x, y)$ — квадраты с центрами в начале координат или на прямой $y = x$.

Для удобства примем (D) — квадрат любого диаметра с центром в начале координат или на прямой $y = x$.

Задача 1. Пусть отклонение $J(x, y) = k \neq 0$.

Имеем из (15)

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{\iint_{(D)} y^2 dx dy}{\iint_{(D)} y^2 dx dy + \iint_{(D)} x^2 dx dy} \quad (*)$$

и в силу симметричности области (D) относительно переменных x и y , получим

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Оптимально интегрируемое уравнение Пфаффа для $(*)$ есть

$$P^* dx + Q^* dy = 0, \quad \text{где} \quad P^* = P - \frac{1}{2}yk, \quad Q^* = Q + \frac{1}{2}xk.$$

Общий интеграл $U(x, y)$ принимает вид

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P^*(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q^*(x_0, y) dy = C$$

Задача 2. Пусть дано отклонение $J(x, y) = xy$. Имеем

$$\begin{aligned} \int J(x, y) dx &= \frac{x^2 y}{2}, & \int J(x, y) dy &= \frac{xy^2}{2} \\ \left[\int J(x, y) dx \right]^2 &= \frac{x^4 y^2}{4}, & \left[\int J(x, y) dy \right]^2 &= \frac{x^2 y^4}{4} \end{aligned}$$

Далее, имея в виду (15) и в силу симметричности области (D)

$$\iint_{(D)} \frac{x^4 y^2}{4} dx dy = \iint_{(D)} \frac{x^2 y^4}{4} dx dy$$

Отсюда следует $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$.

Задача 3. Пусть дано отклонение $J(x, y) = x + y$. Следуя задаче 2, имеем

$$\begin{aligned} \int J(x, y) dx &= \frac{x^2}{2} + xy, & \int J(x, y) dy &= \frac{y^2}{2} + xy \\ \left[\int J(x, y) dx \right]^2 &= \left(\frac{x^2}{2} + xy \right)^2, & \left[\int J(x, y) dy \right]^2 &= \left(\frac{y^2}{2} + xy \right)^2 \end{aligned}$$

Далее, при равенстве пределов интегрирования по переменным x и y , очевидно, что двойные интегралы в знаменателе (15) равны и, следовательно, $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$.

В задачах 2, 3 функция $J(x, y)$ представляет симметричный многочлен двух переменных и $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$. Кстати, в задаче 1 формально $J = \text{const} = k$, где k так же симметричный многочлен. Покажем, что для симметричного многочлена двух переменных это свойство $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$ сохраняется.

Введем предварительно

Определение. Две функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ называются *коммукативными*, если имеет место

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(y, x).$$

Итак, пусть функция $f(x, y)$ — симметричный многочлен, тогда

- а) функции $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ — коммукативны, т. е. $f'_x(x, y) = f'_y(y, x)$ проще говоря, зная $f'_x(x, y)$ производную $f'_y(x, y)$ можно не вычислять, а в $f'_x(x, y)$ поменять местами буквы x и y ;
- б) функции $\int f(x, y)dx$ и $\int f(x, y)dy$ — коммукативны; с учетом сказанного имеет место

Теорема. Пусть отклонение $J(x, y)$ — симметричный многочлен, тогда оптимальное λ значение равно $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$.

В соответствии с определением функции $\int Jdy = \int Jdx$ — коммукативны; их квадраты, входящие в (15), так же коммукативные функции.

Перейдем к интегрированию этих функций по симметричной области (P) — произвольный квадрат с центром, лежащем на прямой $y = x$.

Рассмотрим повторные интегралы

$$\int_a^b dx \int_a^b \left[\int Jdx \right]^2 dy \text{ и } \int_a^b dx \int_a^b \left[\int Jdy \right]^2 dy, \quad (D) = \{x, y : a \leq x \leq b, \quad a \leq y \leq b\}.$$

В силу коммукативности подынтегральных функций можно вычислить лишь первый двойной интеграл, а для вычисления второго, в первом интеграле x заменить на y и так же заменить пределы. Но они — одинаковы. Отсюда следует равенство интегралов и $\lambda_{\text{опт}} = \frac{1}{2}$.

3. Аппроксимация уравнений Пфаффа трех переменных

Пусть дано уравнение Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (17)$$

не являющееся уравнением в полных дифференциалах, т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \neq \frac{\partial R}{\partial x}.$$

По аналогии с предыдущим построим семейство уравнений Пфаффа, но уже в полных дифференциалах так, чтобы если (17) само есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z) = C$, то искомое семейство уравнений вырождается в (17).

Рассмотрим уравнение

$$P^*dx + Q^*dy + R^*dz = 0 \quad (18)$$

$$\begin{cases} P^* = P + \lambda_1 \int (P'_y - Q'_x)dy + \lambda_2 \int (P'_z - R'_x)dz, \\ Q^* = Q + \lambda_3 \int (Q'_z - R'_y)dz + \lambda_4 \int (Q'_x - P'_y)dx, \\ R^* = R + \lambda_5 \int (R'_x - P'_z)dx + \lambda_6 \int (Q'_z - R'_y)dy. \end{cases} \quad (19)$$

Очевидно, что требуемое условие выполнено.

Далее, коэффициенты λ_i должны обеспечить выполнение следующих условий полного дифференциала (18), т. е.

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial Q^*}{\partial x}, \quad \frac{\partial P^*}{\partial z} = \frac{\partial R^*}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial z} = \frac{\partial R^*}{\partial x} \quad (20)$$

Прежде чем решать (19), отметим следующее обстоятельство. Авторам не встречалось утверждение: если два любых условия из (20) выполнены, то автоматически выполняется и третье. Своеобразная аксиома транзитивности.

Действительно, пусть, например, в (20) выполнены первые два условия (* опустим).

$$\begin{matrix} P'_y = Q'_x, \\ P'_z = R'_x, \end{matrix} \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \text{дифференцируем} \\ \text{первое равенство по } z \\ \text{второе равенство по } y \end{array} \right\rangle \rightarrow \begin{matrix} P''_{yz} = Q''_{xz} \\ P''_{zy} = R''_{xy} \end{matrix}$$

откуда

$$Q''_{xz} = R''_{xy} \quad \text{и далее} \quad Q'_z = R'_y$$

В соответствии с этим решение для (19) проведем в два этапа: сначала находим λ_i из первых двух уравнений (19), так, чтобы $(P^*)'_y = (Q^*)'_x$, а затем рассматриваем и третье уравнение из (19) так, чтобы $(Q^*)'_z = (R^*)'_y$.

Не утомляя читателя громоздкими выкладками, приведем заключительный результат. В случае трех переменных имеют место три отклонения

$$J_1 = P'_y - Q'_x, \quad J_2 = P'_z - R'_x, \quad J_3 = Q'_z - R'_y.$$

Тогда двухпараметрическое семейство уравнений Пфаффа второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} P^* = P + \lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz \\ Q^* = Q + \lambda_2 \int J_3 dx + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx \\ R^* = R + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy \end{cases} \quad (20)$$

Для нахождения оптимальных значений $\lambda_{1\text{опт}}$ и $\lambda_{2\text{опт}}$ построим среднеквадратическое расхождение лишь в одной произвольной точке (x, y, z)

$$S(\lambda_1, \lambda_2) = (P^* - P)^2 + (Q^* - Q)^2 + (R^* - R)^2 \rightarrow \min$$

Далее, условия $\min S(\lambda_1, \lambda_2)$ имеют вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} = [\lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz] J_1 dy + \\ \quad + [\lambda_2 \int J_3 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx] J_1 dx + \\ \quad + [(1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy] [\int J_2 dx - \int J_3 dy] = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} = [\lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz] J_2 dz + \\ \quad + [\lambda_2 \int J_3 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx] [\int J_3 dx + \int J_1 dx] + \\ \quad + [(1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy] \int J_2 dx = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Авторы, ввиду громоздкости выкладок, отказались от прямого вычисления оптимальных значений λ_1 и λ_2 из (21). Тем не менее, часть полезной информации из (21) можно извлечь. Ранее было показано, что если из трех отклонений J_1, J_2, J_3 два равны нулю, то и третье так же обращается в нуль и уравнение Пфаффа интегрируемо как уравнение в полных дифференциалах.

Пусть теперь лишь одно из трех отклонений обращается в нуль.

Итак, пусть $J_1(x, y, z) = 0$ в некоторой области определения. Тогда, что и все неопределённые интегралы $\int J_1 dx, \int J_1 dy$ так же равны нулю. С учетом этого необходимые условия экстремума (21) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} = [(1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy] + ((\int J_2 dx - \int J_3 dy) = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} = (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy + \lambda_2 [(\int J_2 dz)^2 + (\int J_3 dz)^2] = 0. \end{cases} \quad (22)$$

или

$$\begin{cases} (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy = 0; \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда из равенства $(1 + \lambda_1) \int J_2 dx - \lambda_1 \int J_3 dy = 0$ находим λ_1 .

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{\int J_2 dx}{\int J_3 dy - \int J_2 dx}, \quad \lambda_2 = 0 \quad (23)$$

Пусть теперь $J_2(x, y, z) = 0$. Условия экстремума принимают вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} = \lambda_1 [\int J_1 dx]^2 + \lambda_1 [\int J_3 dy]^2 + [\lambda_2 \int J_3 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx] \int J_1 dx = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} = [\lambda_2 \int J_3 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx] (\int J_3 dz + \int J_1 dx) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_2 \int J_3 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \int J_1 dx = 0 \\ \lambda_1 [(\int J_1 dy)^2 + (\int J_3 dy)^2] = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\int J_1 dx}{\int J_3 dz + \int J_1 dx}$$

Наконец, пусть $J_3 = 0$. Условия экстремума (19) принимают вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} = [\lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz] \int J_1 dy + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) [(\int J_1 dx)^2 + (\int J_2 dx)^2] = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} = [\lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz] \int J_2 dz + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) [(\int J_1 dx)^2 + (\int J_2 dx)^2] = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 \int J_1 dy + \lambda_2 \int J_2 dz = 0 \\ 1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда имеем

$$\lambda_2 = \frac{\int J_1 dy}{\int J_2 dz - \int J_1 dy}, \quad \lambda_1 = \frac{\int J_2 dz}{\int J_1 dy - \int J_2 dz}$$

Подчеркнем, что рассматривается лишь отдельная, хотя и произвольная точка и все интегралы, входящие в λ_1 и λ_2 — числа, т. е. функции точки. Здесь не исследуется интегральная квадратичная аппроксимация (МНК) по объёмной области (V), что существенно сложнее случая функции двух переменных.

Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Наука. 1958.

*Ивлев Валерий Васильевич,
профессор Московской
финансово-юридической академии МФЮА,
доктор технических наук.*

E-mail: vvivlev@yandex.ru

Архипова Елена Михайловна,
доцент Московской
финансово-юридической академии МФЮА,
кандидат педагогических наук.

E-mail: Arhipova.E@mfua.ru

От редакции

1 октября 2017 г. Валерию Васильевичу Ивлеву, постоянному автору нашего журнала, исполнилось 80 лет. Редакция поздравляет юбиляра, желает ему крепкого здоровья, благополучия и новых творческих успехов!

Список публикаций В.В. Ивлева в журнале “Математическое образование”.

1. № 4(23), октябрь – декабрь 2002 г. Неопределенности функций многих переменных.
2. № 3(26), июль – сентябрь 2003 г. Неопределенности функций многих переменных (Часть II).
3. № 1(28), январь – март 2004 г. (С А.И. Нижниковым.) Зависимость функций. Некоторые обобщения матриц Якоби и Вронского.
4. № 1(32), январь – март 2005 г. К проблеме экстремумов функций многих переменных.
5. № 1(36), январь – март 2006 г. (С Е.З. Гржибовской.) Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть I).
6. № 1(41), январь – март 2007 г. (С Е.З. Гржибовской.) Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть II).
7. № 4(64), октябрь – декабрь 2012 г. (С М.В. Барановой.) Об одном классе линейных дифференциальных уравнений.
8. № 1(69), январь – март 2014 г. Об одном приближении схемы гибели и размножения.
9. № 1(73), январь – март 2015 г. Об одном представлении выборочных распределений.
10. № 1(77), январь – март 2016 г. Об одном приближении схемы гибели и размножения (продолжение).
11. № 2(82), апрель – июнь 2017 г. (С А.Н. Булановой.) Аппроксимация эйлеровых уравнений.
12. № 1(85), январь – март 2018 г. (С Е.А. Кривошей.) Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение).

Алгоритмы и методы построения программы-дескриптора, осуществляющей распознавание графических изображений

А. Ф. Ляхов, Е. И. Чнегов

В работе описывается новый оригинальный дескриптор CPAFD (Color Periphery Area Fields Descriptor), позволяющий осуществлять категоризацию как статичных изображений, так и видеопотока.

Исходная задача имеет следующий вид. Требуется определить присутствие некоторого объекта на заданном изображении.

В исходном изображении, как правило, содержится большое количество информации, которая является избыточной для решения задачи классификации. Поэтому проводится предобработка изображения. Она сводится к следующим, последовательно выполняемым процедурам. Осуществляется переход к восьми чистым цветам и определяется сегментная структура изображения, то есть определяется количество областей однородности различного цвета, их средние периметр и площадь. В основе определения областей однородности и их границ лежит классический двух-проходной алгоритм поиска областей связности с последующим отбросом внутренних пикселей. В результате предобработки получается двадцатичетырехмерный вектор признаков изображения.

Категоризация изображений проводится с помощью метрического классификатора. При создании классификатора рассматривается множество изображений, содержащих искомый объект, и определяются их векторы признаков, то есть создается база прецедентов. Возможность классификации основывается на гипотезе компактности, в которой утверждается, что векторы изображений, содержащих подобные объекты, образуют некоторое компактное множество.

Вектор признаков классифицируемого объекта подается на вход классификатору, который определяет расстояние между ним и всеми прецедентами. Классифицирование осуществляется на основе алгоритма окна Парзена переменной ширины. Качество работы данного метода зависит от количества соседей, с которыми сравнивается объект. Для того, чтобы качество классификации было максимальным, требуется обучить классификатор, то есть найти оптимальное количество соседей, при котором количество ошибок будет минимально.

На основе близости исследуемого изображения к прецедентам принимается решение о наличии объекта на заданном изображении.

Теория и практика распознавания образов является одним из важнейших направлений современной прикладной математики и ИТ — технологий. В основе теории распознавания образов лежат методы классификации и идентификации объектов на основе математической статистики и теории вероятностей [1–5]. Среди задач, решаемых при распознавании образа, важное место занимают задачи об определении наличия объекта на изучаемом изображении [4, 5]. Задачи подобного типа являются задачами категоризации изображения.

Один из методов решения задачи категоризации основывается на введении понятия дескриптора изображения. Дескриптор — это объект, содержащий информацию о визуальных составляющих изображения, позволяющих осуществить распознавание объекта на изображении.

К полезной информации об изображении можно отнести цвет, форму, текстуру. Дескрипторы изображения принято разделять на два типа:

1. Содержащие общую информацию об изображении (**General information descriptors**),
2. Содержащие информацию о конкретных объектах на изображении (**Specific domain information descriptors**).

В работе приводится описание нового дескриптора второго типа CPAFD (Color Periphery Area Fields Descriptor), учитывающего не только цветовую гамму изображения, но и геометрическую структуру изображения по всем цветам, то есть его фрактальность. Проводится оценка эффективности работы дескриптора с известными из литературы [7].

Основные понятия и определения

Будем считать, что классифицируемые изображения образуют множество X . Множество X называется *множеством объектов*. Множество классов, к которым может быть отнесен объект из X , обозначим Y . Множество Y называется *множеством допустимых ответов*.

Предполагается, что существует целевая функция (target function) $y^t: X \rightarrow Y$, значения которой $y_i = y^t(x_i)$ известны на конечном множестве объектов $\langle x_1, \dots, x_l \rangle \subset X$. Пары «объект–ответ» (x_i, y_i) называются *прецедентами*. Совокупность пар $X^l = (x_i, y_i)_{i=1}^l$ называется *обучающей выборкой*.

Задача классификации по прецедентам состоит в следующем. Требуется по выборке X^l восстановить зависимость y^t , то есть построить решающую функцию (decision function) $a: X \rightarrow Y$, которая приближает целевую функцию $y^t(x)$ не только на объектах обучающей выборки, но и на всем множестве X .

Признак (feature) f объекта x есть результат измерения некоторой характеристики объекта. Формально признаком называется отображение $f: X \rightarrow D_f$, где D_f — множество допустимых значений признака.

Набор признаков образует вектор $F = (f_1, \dots, f_n)$ признаков, который называют *признаковым описанием объекта* $x \in X$.

Постановка задачи

Дано множество объектов X и множество допустимых ответов Y . Существует целевая функция (target function) $y^t: X \rightarrow Y$, значения которой $y_i = y^t(x_i)$ известны только на конечном множестве объектов $\langle x_1, \dots, x_l \rangle \subset X$.

Требуется построить решающую функцию $a: X \rightarrow Y$, которая аппроксимирует целевую функцию $y^t(x)$ на всем множестве X .

Процесс классификации принято разделять на три этапа: предобработку данных, сегментацию данных и их классификацию.

Предобработка изображения

В исходном изображении, как правило, содержится большое количество информации, которая является избыточной для решения задачи классификации. Основной задачей этапа предобработки является отсечение этой информации. Следует заметить, что за счет уменьшения объемов обрабатываемых данных уменьшается время классификации.

На этапе предобработки изображений количество избыточной информации уменьшается при переходе к чистым цветам. Заметим, что при этом сохраняются характеристики, учитывающие структурную неоднородность изображений.

Программа-фильтр, осуществляющая переход к чистым цветам, каждому пикселю входного изображения ставит в соответствие новый пиксель одного из восьми чистых цветов, в зависимости от яркости rgb-компонент входного изображения.

Фильтр работает по следующему принципу: если rgb-компонента имеет яркость больше 127, то ее значение становится 255; если меньше 127, то 0.

Результаты применения фильтра к изображению яхты показаны на рис. 1.



Рис. 1. Изображение яхты до и после фильтрации

На следующем этапе предобработки выполняются сбор информации об изображении:

- Сегментация изображения и определение областей связности для каждого цвета.
- Средняя площадь областей связности для каждого цвета.
- Средний периметр областей связности для каждого цвета.

Сегментация и выделение геометрической структуры. Под сегментацией изображения понимают задачу разбиения плоскости образа на ряд связных непересекающихся областей, каждая из которых обладает внутренней однородностью того или иного вида (например, цвет пикселей).

Определение. Пусть вся плоскость изображения обозначается как R . Тогда процедурой сегментации изображения называется процесс разбиения R на такую совокупность связных областей $\{R_i\}$, $i = \overline{1, n}$, для которых выполняются следующие условия:

- а) $R = R_i$;
- б) $R_i \cap R_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- в) $\text{Pred}(R_i) = \text{true}, i = \overline{1, n}$, где $\text{Pred}(R_i)$ — булевский предикат однородности области в некотором заданном смысле. В нашем случае $\text{Pred}(R_i)$ принимает истинное значение, когда область связности R_i окрашена в один из 8 чистых цветов.

Первое условие данного выражения утверждает, что области разбиения целиком покрывают кадр изображения. Второе условие описывает тот факт, что области разбиения попарно не пересекаются. Третье условие требует, чтобы каждая область разбиения была однородной областью изображения в заданном смысле (например, в смысле максимально допустимой разницы значений яркости составляющих ее пикселей).

В основе определения областей однородности и их границ лежит классический двухпроходной алгоритм поиска областей связности [6] с последующим отбрасыванием внутренних пикселей. Иллюстрация алгоритма и его описание приведены ниже.

Описание алгоритма, определяющего области связности

Возьмем некоторое изображение, прошедшее предобработку (рис. 2). На нем будут присутствовать только чистые цвета.

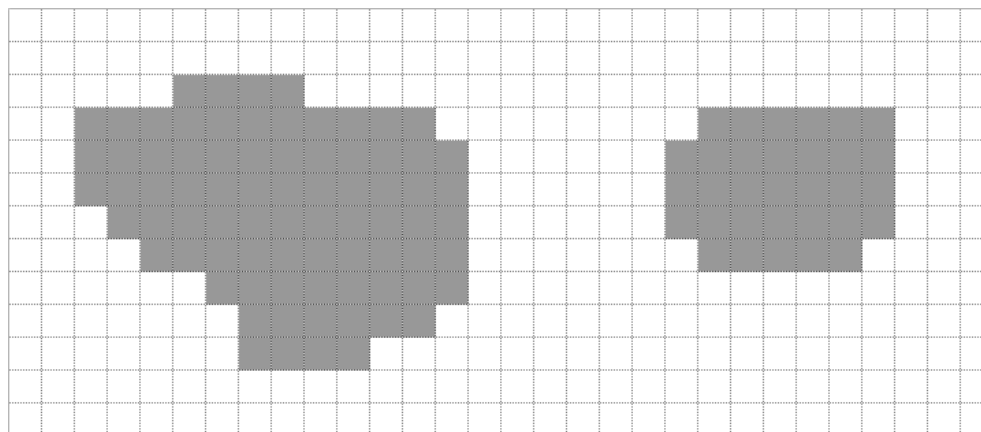


Рис. 2. Исходное изображение, прошедшее предобработку

Первый проход алгоритма.

Будем искать области связности зеленого цвета. Все остальные цвета будем считать цветом фона (в данном случае только белый). Начнем построчный обход изображения из левого верхнего угла слева направо. Если встречается пиксель зеленого цвета, то ему присваиваем индекс области, к которой он предположительно относится. Индексы начинаются с единицы. Если следующий пиксель также окрашен в зеленый, то ему присваивается тот же индекс. Продолжаем проход по строке до тех пор, пока не встретится пиксель фоновой цвета. Пиксели фоновой цвета пропускаем. Если после фоновой пикселя вновь встречается пиксель зеленого цвета, то присваиваемый ранее индекс увеличиваем на единицу. Этот проход продолжаем до конца строки. Далее переходим на новую строку. Повторяем вышеописанное до тех пор, пока не пройдем все изображение. В результате получим размеченное изображение (рис. 3).

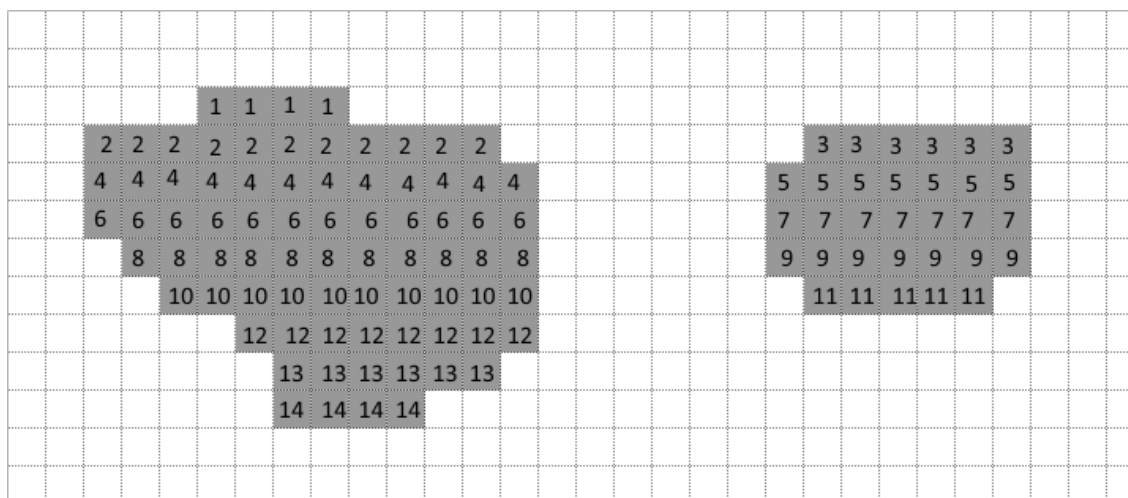


Рис. 3. Размеченное изображение

Второй проход.

Каждый пиксель изображения получил свою метку; для того, чтобы выделить область связности одного цвета, следует устранить коллизии — ситуации, при которых на одной области связности находятся различные индексы областей. Это означает, что следует снова пройти построчно все изображение и присвоить каждому пикселю индекс, минимальный среди соседей. Повторяем эту процедуру до тех пор, пока за полный проход изображения не произойдет присвоения новых индексов пикселям. Полученный результат показан на рис. 4.

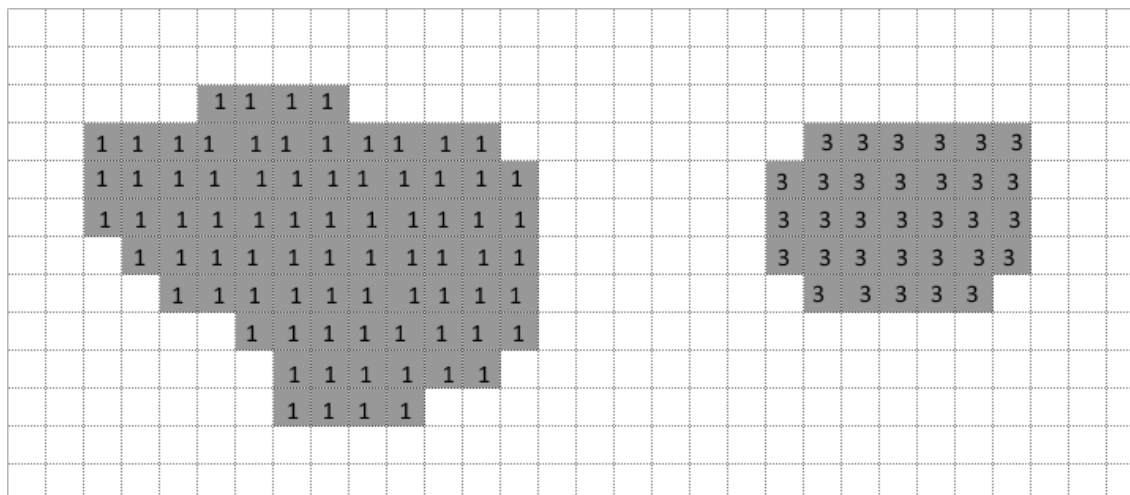


Рис. 4. Размеченное изображение, на котором устранены все коллизии

После устранения коллизий ищем границы областей связности. Для этого удаляем все внутренние пиксели зафиксированного цвета и перенумеровываем области таким образом, чтобы самый старший индекс обозначал не только последнюю найденную область связности, но и общее количество найденных областей. К внутренним пикселям относятся те пиксели, которые имеют соседей того же цвета по всем 4 направлениям (верх, низ, право, лево).

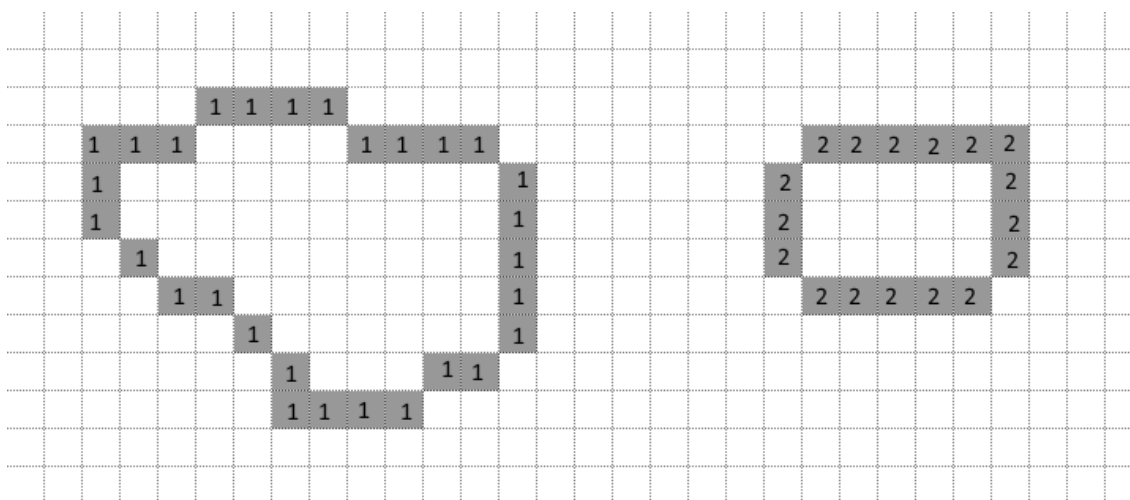


Рис. 5. Границы областей связности

В результате работы алгоритма получаем объекты (в терминах объектно-ориентированного программирования) границ областей связности для конкретного чистого цвета, в которых содержатся данные о границе: номер области связности, пиксели, образующие границу области. Используя эти значения, можно определить компоненты вектора признаков. Количество областей связности равно числу объектов границ; средний периметр равен количеству всех хранящихся в объектах пикселей, деленному на количество областей; средняя площадь находится подсчетом всех пикселей конкретного цвета на изображении и последующим делением на количество областей.

Используя описанный алгоритм для всех остальных цветов, получим соответствующие компоненты признакового описания изображения.

Построение классификатора изображений

Категоризация изображений осуществляется с помощью метрического классификатора, то есть алгоритма, осуществляющего классификацию поданного на вход программе объекта на основе его «близости» к прецедентам. Близость определяется следующей функцией расстояния:

$$p: X \times X \rightarrow [0; \infty].$$

В работе используется метрика «городских кварталов». Для этой метрики влияние отдельных больших разностей между компонентами признакового описания меньше, чем для метрик более высокого порядка.

$$p(u, x_i) = \sum_{j=1}^n |u^j - x_i^j|,$$

где $u = (u^1, \dots, u^n)$, $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ — признаковые описания объектов, u — классифицируемый объект, x_i — объект обучающей выборки.

Идея возможности классификации на основе расстояния между объектами основывается на гипотезе компактности, в которой утверждается, что схожие объекты лежат в одном классе [1].

Классифицируемый объект подается на вход классификатору, который определяет расстояние между ним и всеми прецедентами. Найденные расстояния сортируются по возрастанию.

На основе гипотезы компактности можно сделать вывод о том, что чем меньше найденное расстояние между объектом и i -м прецедентом, тем больше шансов, что объект принадлежит к классу y_i i -го прецедента. Чтобы формализовать это утверждение, вводят неотрицательную невозрастающую функцию веса $K: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$. В работе используется квадратичное ядро $K(r) = (1 - r^2)^2$, где $|r| < 1$. Для уменьшения вероятности ложной классификации будем учитывать расстояние и вес не только до ближайшего «соседа», а до k соседей. Классификатор приобретает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^k [y^i = y] * K(p(u, x^i) / p(u, x^{k+1}))$$

Классифицируемый объект будет отнесен к тому классу, на котором он имеет наибольший вес среди k ближайших соседей в окрестности радиуса $p(u, x^{k+1})$.

Классифицирование на основе данного алгоритма называется *методом окна Парзена переменной ширины*.

Качество работы данного метода зависит от количества k соседей, с которыми сравнивается объект u . Чтобы качество классификации было максимальным, требуется обучить классификатор, то есть найти оптимальное k , при котором количество ошибок будет минимально.

Обучение классификатора и отбор эталонных изображений

Метод обучения (learning algorithm) — это отображение: $(X \times Y)^l \rightarrow A$, которое ставит в соответствие произвольной выборке $X^l = (x_i, y_i)_{i=1}^l$ некоторый алгоритм $a \in A$. Говорят, что метод строит алгоритм a по выборке X^l [6].

Функция потерь (loss function) — это неотрицательная функция a , характеризующая величину ошибки алгоритма a на объекте x . Если $L(a, x) = 0$, то ответ $a(x)$ называется *корректным*.

Функционал качества алгоритма a на выборке X^l : $Q(a, x^l) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l L(a, x_i)$.

Пусть дана выборка $X^l = (x_i, y_i)_{i=1}^l$. Разобьём её N различными способами на две непересекающиеся подвыборки: обучающую X_n^l длины l и контрольную X_n^k длины $k = L - l$. Для каждого разбиения $n = 1, \dots, N$ построим алгоритм $a_n = \mu(X_n^l)$ и вычислим значение $Q(a_n, X_n^k)$. Среднее

арифметическое значений Q_n по всем разбиениям называется *оценкой скользящего контроля* (cross-validation, CV):

$$CV(\mu, X^L) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(\mu(X_n^L), X_n^k).$$

В работе реализована процедура поиска оптимального параметра k ближайших соседей, при котором кросс-валидация стремится к минимуму. Это значит, что ищется такое k , при котором количество ошибок при скользящем контроле минимально.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(a_k(X^L), X_n^M),$$

где $1 < k < L - 1$, a_k — классификатор с параметром k ближайших соседей, X^L — обучающая подвыборка, X_n^M — контрольная подвыборка.

Объекты обучающей выборки принято разделять на четыре класса: эталонные, неинформативные, периферийные и шумовые, см. рис. 6 на следующей странице.

Эталонные — это объекты, которые в пространстве признаков находятся близко друг к другу и далеко от разделяющей поверхности. Понятие удаленности объектов зависит от выбранной метрики и признаков, которые должны удовлетворять гипотезе компактности.

Неинформативные объекты имеют положительный отступ, но практически не добавляют новой информации о своем классе по сравнению с эталонными объектами.

Периферийные объекты находятся близко к разделяющей поверхности. Классификация периферийных объектов неустойчива в том смысле, что при малом изменении параметров классификатора или обучающей выборки их классификация может меняться. Отбрасывание периферийных объектов практически не влияет на качество классификации.

Шумовые объекты (выбросы) — это объекты, которые, несмотря на принадлежность к тому же классу, что и эталонные, классифицируются неверно. Например, при составлении каталога с изображениями яхт в него попали изображения с животными. В этом случае изображения с животными будут относиться к классу яхт, но иметь отличные от яхт векторы признаков описаний, что снизит качество классификации яхт.

Отбор эталонов основан на введении функции отступа (margin), характеризующей степень типичности объекта обучающей выборки для своего класса. Величина отступа для объекта $x_i \in X^l$ относительно классификатора вида $a(u)$ определяется как $M(x_i) = \Gamma_{y_i}(x_i)$, где

$$\Gamma_y(u) = \sum_{i=1}^k [y^i = y] \cdot K(p(u, x^i) / p(u, x^{k+1}))$$

— суммарный вес объекта u в классе $y \in Y$.

Тестирование системы классификации на основе CRAFTD

Для проведения тестирования качества классификации на основе дескриптора CRAFTD была разработана система Eyesimo. Исходные коды Eyesimo можно свободно скачать с GitHub.

Тестирование алгоритма сегментации

Тестирование система Eyesimo проводилось на изображениях небольшого размера, содержащих области разной степени сложности (рис. 7). Результаты одного из тестов показаны ниже.

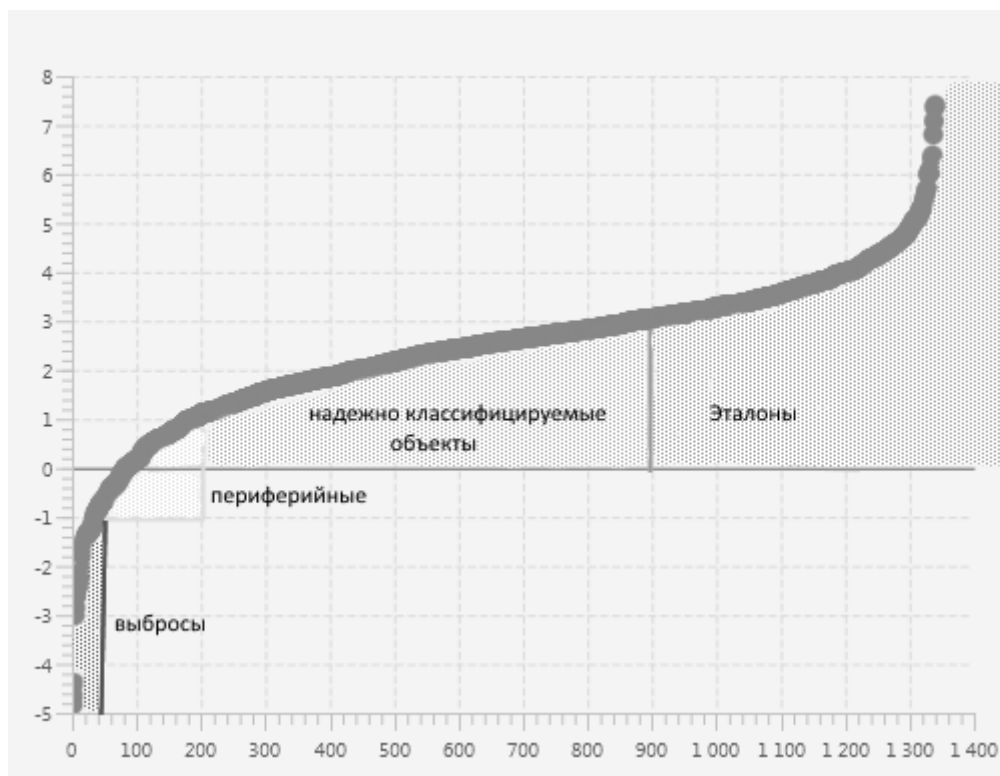


Рис. 6. Разделение типов объектов по их отступам

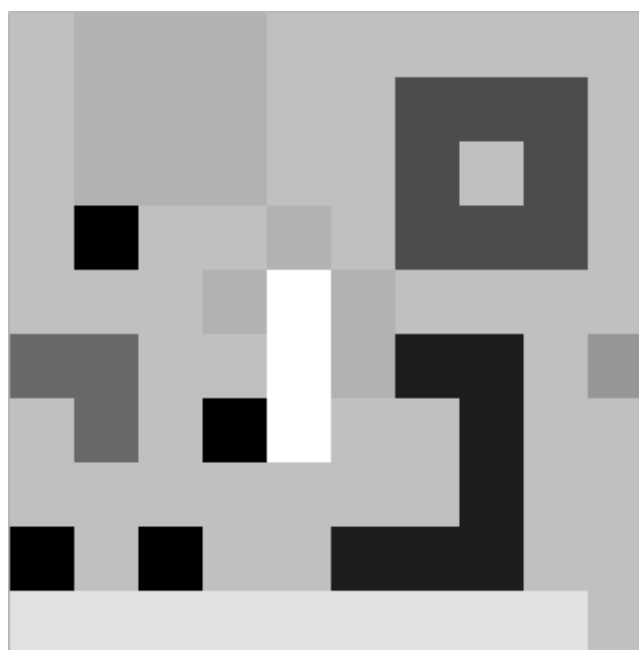


Рис. 7.

Векторы признаков описаний изображений, записанные в удобной для восприятия форме имеют вид:

Size: 10x10

	fields	midArea	midPeriphery
red	1	8	8
green	1	1	1
blue	1	7	7
magenta	1	3	3
yellow	1	9	9
cyan	4	3	3
black	4	1	1
white	1	3	3

Здесь Size WxH — ширина и высота изображения (в пикселях), filds — количество областей связности, второй — средняя площадь (в пикселях), третий — средний периметр (в пикселях).

Корректность результата можно проверить непосредственным подсчетом.

Ниже показан вектор признакового описания изображения яхты на рис. 1, записанный в удобной для восприятия форме. Он имеет вид:

Size : 326 x 215

	fields	midArea	midPeriphery
red	0	0	0
green	1	1	1
blue	482 6	6	15
magenta	7 1		1
yellow	0 0		0
cyan	843 2	0	5
black	377 1	0	8
white	283 6	1	16

Анализ качества классификации системы Eyesimo

Для проведения тестирования была создана база из 10 000 изображений, на которых присутствуют объекты 7 разных классов: автомобили, кошки, собаки, еда, люди, самолеты, яхты. На каждый класс приходится примерно равное количество изображений одинакового размера.

Методология тестирования:

- Качество классификации оценивается как процент успешности, который равен $(1 - CV) \cdot 100$ и округляется до целого числа. CV — кросс-валидация.
- Классификация ведется по двум классам: основному, в котором присутствуют только интересные нас объекты, и вспомогательному, в котором находятся любые объекты, кроме интересных.
- Количество объектов в каждом классе обучающей выборки примерно одинаково.
- Общее количество объектов обучающей выборки до отбора эталонов около 3000.
- Все изображения из обучающей выборки приводятся к размеру 300 пикселей по ширине и 200 по высоте. Требование стандартного размера необходимо для корректного сбора признаковых описаний и поиска метрик между объектами.
- Выбранный размер связан с размером исходных изображений — у всех он примерно равен 300×200 .

- Тестируется классификация 7 разных типов объектов: auto (автомобили), cats (кошки), dogs (собаки), food (еда), people (люди), planes (самолеты), yachts (яхты). Для каждого имеется ≈ 1500 изображений. В основном классе находится 1500 изображений с интересующим типом объектов; в дополнительном находится ≈ 250 изображений каждого из 6 оставшихся классов.
- Для того, чтобы избавиться от шумовых и пограничных объектов и при этом снизить риск появления эффекта переобучения системы, отбор происходит с отступом 0,5,
- Измерение кросс-валидации берется для обученного параметра k .

Результаты тестирования (рис 8) показывают, что средняя успешность классификации до отбора эталонов составляет 77%; после отбора эталонов с порогом в 0,5 успешность составляет 97%. Это значит, что в среднем 23% новых объектов, не входящих в обучающую выборку, будут классифицированы неверно. Если на вход классификатору подается типичный представитель собственного класса, то средняя ошибка классификации 3%.

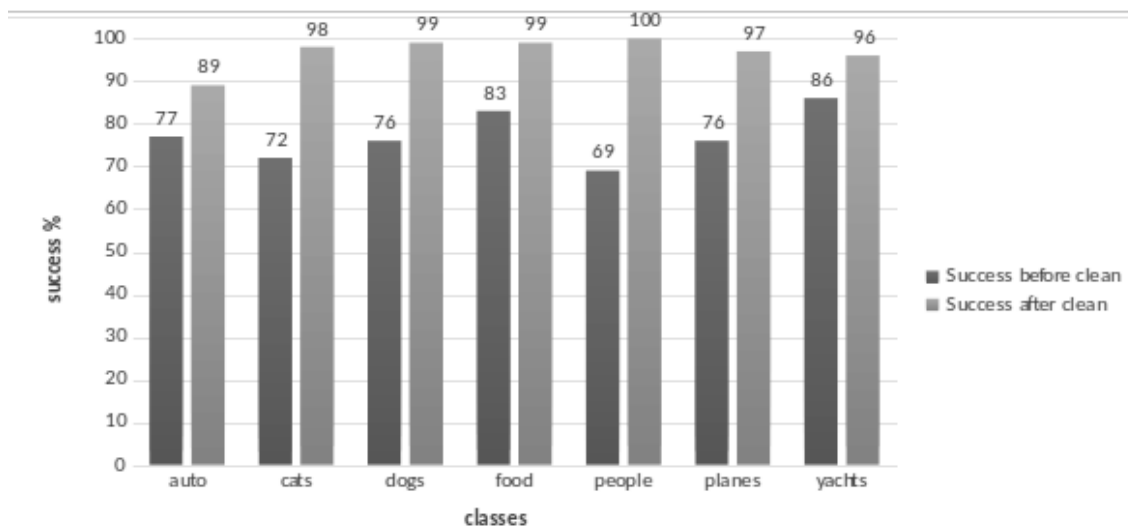


Рис. 8. График успешности классификации изображений до и после отбора эталонов

В работе [7] проводилась классификация 1300 изображений некоторой поверхности с дефектами по 14 классам с использованием стандартных дескрипторов методом ближайших соседей.

При сравнении результатов классификации, полученных с помощью Eyesimo, с результатами из работы [7] нужно учитывать, что в [7] не проводился отбор эталонов через функцию отступа. Следовательно, корректным будет сравнение результатов без учета отбора эталонов.

Результаты классификации по одному дескриптору: CPAFD демонстрирует относительно высокие показатели качества классификации (77%).

Если взять среднюю успешность классификации по всем дескрипторам (черные столбцы второго графика), то она $\approx 80\%$.

Распознавание объектов в видеопотоке

Дескриптор CPAFD может быть использован для анализа видеопотока в реальном времени.

Eyesimo поддерживает анализ видеопотока. Во вкладке «обработка видео» пользователь должен выбрать видеофайл для анализа и нажать кнопку «начать». После запуска выполняется инициализация плеера, начинается захват кадров видео и их анализ. Новый кадр захватывается после

окончания анализа предыдущего кадра. Результаты анализа записываются в соответствующем поле «лог обработки».

Показатель количества захватываемых и классифицируемых кадров в секунду зависит от стандартного размера изображения, к которому приводились изображения, из характеристик которых составлялась база характеристик конкретного класса объектов. Чем больше стандартный размер, тем больше времени требуется для обработки такого изображения алгоритмами предобработки и сегментации. Кроме того, скорость обработки зависит от мощности центрального процессора, поэтому показатель количества захватываемых и классифицируемых кадров в секунду будет различаться в каждой конфигурации Euesimo. Информация о количестве обрабатываемых кадрах в секунду отображается при запуске видео в поле FPS.

Пример анализа видео показан на рис. 9.

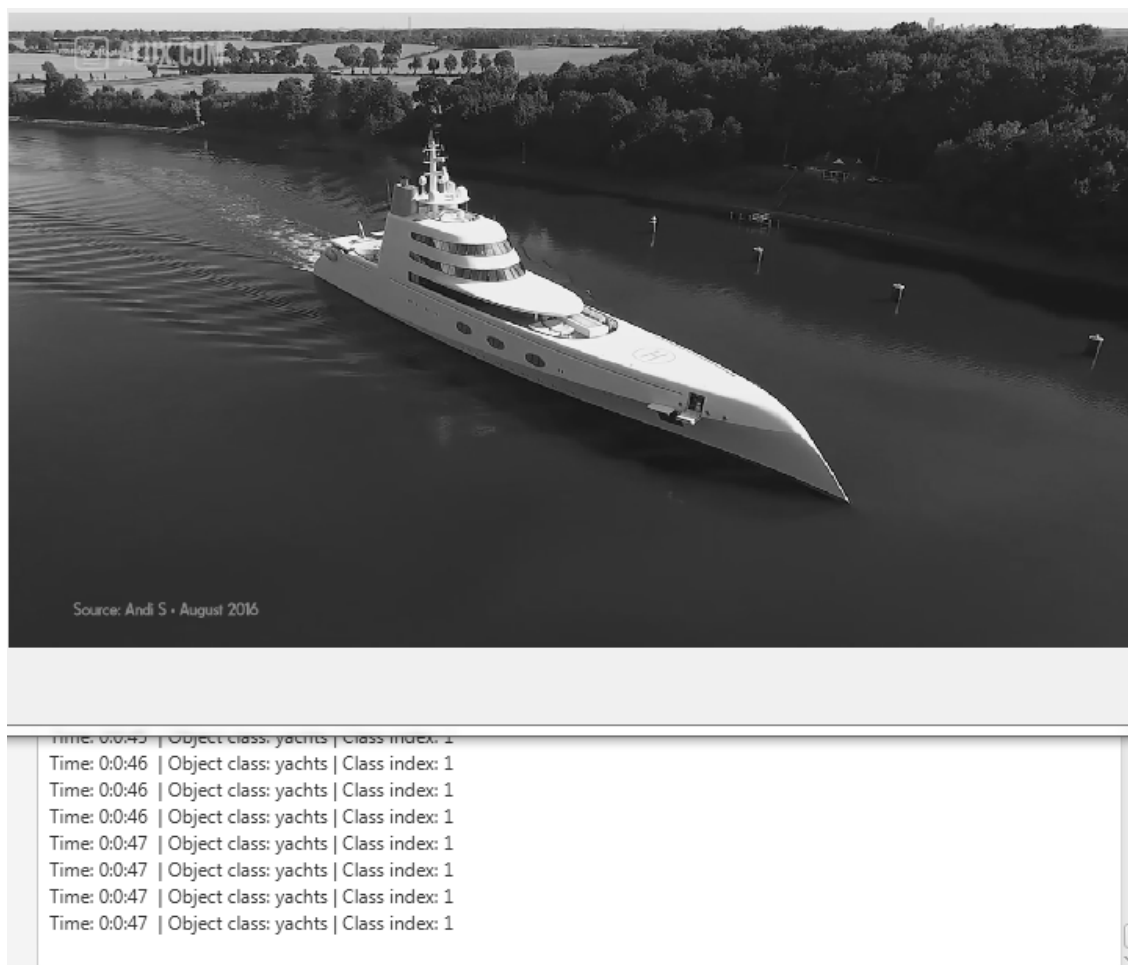


Рис. 9. Успешное обнаружение яхты

Заключение

Предложенный дескриптор CPAFD успешно прошел тестирование. С его помощью можно надежно классифицировать типичных представителей какого-либо класса. Качество классификации близко к результатам, которые показывают другие дескрипторы.

Заметим, что созданный дескриптор CPAFD первого типа обладает гибкой структурой. Это позволяет изменять количество цветов, уменьшать и увеличивать размерность признакового описания для анализируемых классов объектов.

Литература

1. Потапов А.А. Новейшие методы обработки изображений. - М. Физматлит, 2008. - с. 496.
2. Лепский А.Е., Бронвич А.Г. Математические методы распознавания образов. - Тагонрог: Изд. ТТИЮФУ, 2009. - с. 155.
3. Яне Б. Цифровая обработка изображений. - Изд. «Техносфера», 2007. - 584 с.
4. Ляхов А.Ф. Вероятностные методы оценки параметров изображения по существованию регулярных структур из пикселей // СП(б) КИО. - № 5. - 2009. - с. 17-26.
5. Каштанов Н.В., Ляхов А.Ф. Фрактальная размерность визуального образа математической матрицы // СП(б) КИО. - № 2. - 2013. - с. 59-66.
6. Воронцов, К.В. Математические методы обучения по прецедентам. - М.: МФТИ, 2006. - 144 с.
7. Deselaers T. Features for Image Retrieval: An Experimental Comparison // German Research Center for Artificial Intelligence (DFKI), Kaiserslautern, Germany. - November 29. - 2007.

*Ляхов Александр Фёдорович,
доцент кафедры теоретической,
компьютерной и экспериментальной механики
Института Информационных технологий,
математики и механики Нижегородского
государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
кандидат физико-математических наук.*

E-mail Lyakhov@mm.unn.ru

*Чнегов Егор Игоревич,
магистрант второго года обучения
кафедры теоретической, компьютерной
и экспериментальной механики
Института Информационных технологий,
математики и механики Нижегородского
государственного университета им. Н.И. Лобачевского.*

E-mail kizlarov@yandex.ru

Графы как наглядные модели задач на условную вероятность

Н. А. Рашевский

*Светлой памяти моего учителя
Николая Ивановича Шкиля посвящаю.*

В статье предлагается методика применения графов при изложении темы «Условные вероятности». Графы играют роль наглядности при решении задач на использование формулы полной вероятности и позволяют решать единым подходом стандартные задачи и задачи повышенной сложности. Последние характеризуются наличием циклов в графовой модели. При решении используется терминология цепей Маркова, что является пропедевтикой данной темы курса «Случайные процессы» или соответствующего раздела теории вероятностей.

В настоящей работе рассмотрены применения графов при решении задач по теории вероятностей, а именно — задач на условную вероятность. Простая в геометрической интерпретации [1] графовая модель задачи не только делает наглядным процесс решения, но и позволяет стандартными рассуждениями решать задачи повышенной трудности, в том числе и олимпиадные.

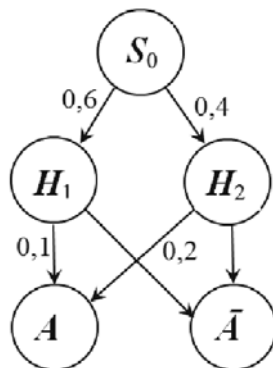
В следующей задаче использование графовой модели выглядит искусственным и нецелесообразным. Однако для последующего изложения полезным. На этой задаче, которая предполагает использование формулы полной вероятности, можно ввести основные необходимые понятия теории цепей Маркова и способы вычисления.

Задача 1. Электролампы в магазин поступают с двух заводов. Первый из них поставляет 60% продукции, которая содержит 5% бракованных ламп, а второй — 40%, среди которой 10% брака. Покупатель в магазине приобрел одну лампу. Какова вероятность, что лампа некачественная?

Решение. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,14.$$

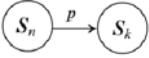


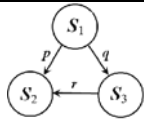
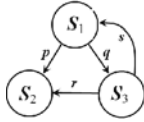
Здесь гипотезы H_k = «Лампа изготовлена k -м заводом», $k = 1, 2$; событие A = «покупатель приобрел бракованную лампу», и геометрическая иллюстрация к задаче, вообще говоря, не нужна.



Выполним все же иллюстрацию (граф) к задаче. А также сформулируем условие и решение задачи, пользуясь терминологией теории графов [1] и цепей Маркова [7]. Пусть «система» Покупатель находится в состоянии S_0 (собирается купить лампу) и может перейти в одно из двух состояний: H_1 (купить лампу первого завода) или H_2 (купить лампу второго завода). Из любого состояния H_k Покупатель перейдет в одно из состояний — A (купил бракованную лампу) или \bar{A} (купил качественную

лампу). Попадая в любое из этих состояний, Покупатель (по условию задачи, так как покупает одну лампу) остается в них и больше из них не выходит — задача решена. Необходимо найти вероятность $P(S_0 \rightarrow A)$ перехода в первое из этих состояний. Вероятности переходов согласно условию задачи указаны на рисунке. По формуле полной вероятности, которая дает способ вычисления вероятностей перехода из одного состояния в другое, получаем ответ на поставленный вопрос. Состояния A и \bar{A} будем называть **финальными** (поглощающими). Естественно, сумма $P(S_0 \rightarrow A) + P(S_0 \rightarrow \bar{A}) = 1$.

Таким образом, задачу моделирует взвешенный орграф, являясь ее наглядной моделью [5]. Вычисления, выполненные в процессе решения, занесем в следующую таблицу, добавив еще два возможных фрагмента модели, один из которых содержит цикл.

	Фрагмент модели	Вероятность перехода
1		$P(S_n \rightarrow S_k) = p$ — вероятность перехода из состояния S_n в состояние S_k ; $P(S_k) = p \cdot P(S_n)$
2		$P(S_m) = q$; состояние S_m — поглощающее, попадая в которое, система в нем остается. Петлю в дальнейшем изображать не будем. На предыдущем рисунке S_k — поглощающее состояние
3		$P(S_3) = p \cdot q$
4		$P(S_2) = p + q \cdot r$. Подробнее: $P(S_1 \rightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2) + P(S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2)$. В состояние S_2 система может попасть в один шаг ($S_1 \rightarrow S_2$) с вероятностью p , или в два шага ($S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$) с вероятностью $q \cdot r$
5		$P(S_2) = p + q \cdot r + q \cdot s \cdot p + q \cdot s \cdot q \cdot r + q \cdot s \cdot q \cdot s \cdot q \cdot r + \dots$ $P(S_2) = p + q \frac{r+sp}{1-rs}$. В состояние S_2 система может войти в один шаг ($S_1 \rightarrow S_2$), два ($S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$), четыре ($S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$) ... $2k$ шагов; три ($S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$), пять ($S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2$), ... $2k+1$ шагов.

Замечание к таблице. Из описанного в таблице способа вычисления вероятностей можно сделать следующий вывод. Вероятность $P(S_k)$ перехода системы S в состояние S_k зависит только от вероятностей соседних (смежных) состояний и вероятностей перехода из смежных состояний в S_k . Упомянутая вероятность не зависит от предыстории, т. е. от того, каким путем пришла системы в смежные с S_k состояния. Это свойство характерно для цепей Маркова. В дальнейшем изложении предполагаем выполнение этого свойства системы. Третья строка таблицы не противоречит этому предположению, поскольку в соответствии с первой строкой $P(S_3) = q \cdot P(S_2)$, т. е. вероятность перехода в S_3 явно зависит только от вероятности состояния S_2 и вероятности перехода из этого состояния. Каким путем система пришла в S_2 , не учитывается при вычислении $P(S_3)$, а только само значение $P(S_2)$: путь мог быть более сложный, как, например, в четвертой строке таблицы.

Таким образом, для решения задачи сначала построим ее графовую модель, перечислив всевозможные состояния системы (моделирующей задачу).

Модель задачи (граф) должен содержать начальное S_0 и конечное состояния (событие A). Далее необходимо указать возможные переходы между состояниями системы и вероятности этих переходов (в теории цепей Маркова — матрицу вероятностей переходов; начальное распределение в рассматриваемых задачах всегда $P(S_0) = 1$, $P(S_k) = 0$, $k \geq 1$). Определив, вероятность какого перехода необходимо найти, а это всегда будет переход $S_0 \rightarrow A$, вычисляем эту вероятность $P(S_0 \rightarrow A)$ с помощью правил, приведенных в таблице. Заметим, что построенная графовая модель должна иметь не одно поглощающее состояние — один из способов проверки модели на корректность.

Вычисление вероятности $P(S_0 \rightarrow A)$ можно произвести путем суммирования всевозможных путей из начального в конечное состояние, что может быть затруднительно при наличии одного или нескольких циклов. Поэтому целесообразно использовать формулу полной вероятности. Гипотезами в последнем случае будут все смежные с S_0 состояния. Рассмотрим оба способа вычисления на фрагменте модели в последней строке таблицы. Первый способ записан в таблице. Для применения второго способа введем две гипотезы (поскольку S_1 имеет два смежных состояния: S_2 и S_3): H_{k-1} = «система перешла из S_1 в S_k », $k=2, 3$. Тогда в соответствии с рисунком $P(H_1) = p$, $P(H_2) = q$. Событие A = «система вошла в состояние S_2 ». Условные вероятности находим из следующих соотношений:

$$P(A|H_1) = P(S_2 \rightarrow S_2) = 1, \text{ (состояние } S_2 \text{ поглощающее);}$$

$$\begin{aligned} P(A|H_2) &= P(S_3 \rightarrow S_2) + P(S_3 \rightarrow S_1)P(S_1 \rightarrow S_3)P(S_3 \rightarrow S_2) + P(S_3 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_2) = \\ &= r + s \cdot q \cdot P(A|H_2) + s \cdot p \cdot P(A|H_1). \end{aligned}$$

Более подробно: система попасть в S_2 из S_3 может или непосредственно с вероятностью $P(S_3 \rightarrow S_2) = r$, или возвращаясь в S_1 , а затем или путем $S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2$, или путем $S_1 \rightarrow S_2$. Вычисляя указанные вероятности, учитываем, что $P(S_3 \rightarrow S_2) = P(A|H_2)$, а попадая в S_2 из S_1 , система там остается, т. е. вместо $P(S_3 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_2)$ фактически есть $P(S_3 \rightarrow S_1) \times P(S_1 \rightarrow S_2)P(S_2 \rightarrow S_2)$.

Отсюда получаем $P(A|H_2) = \frac{r+sp}{1-sq}$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(S_2) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = p + q \cdot \frac{r+sp}{1-sq}.$$

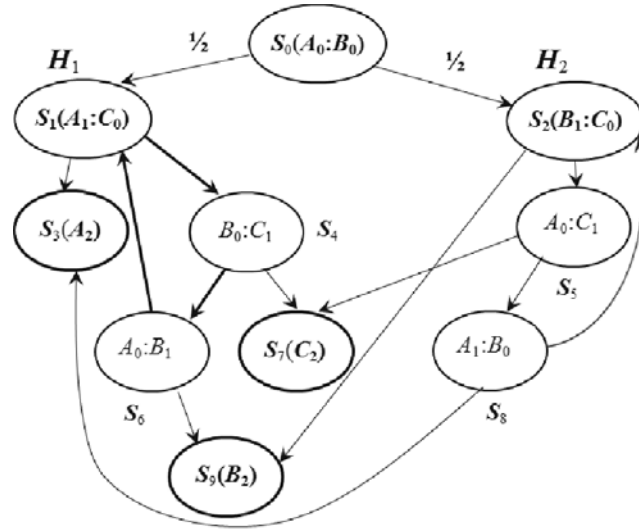
Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2. [6, задача 443]. Три шахматиста участвуют в круговом турнире по следующей схеме: сначала играют A и B , затем победитель играет с C , новый победитель играет с побежденным в предыдущем турнире и т. д. Турнир считается законченным, если кто-либо победит два раза подряд.

- а) Какова вероятность победы каждого из шахматистов, если все они одинаково искусны?
- б) Какова вероятность каждого участника победить, если первую партию выиграл A ?

Решение. Возможны следующие состояния системы S = «шахматисты A , B и C »: $S_n = \langle A_k : B_m \rangle$ (соревнуются A и B , имея соответственно по k и m побед; $k, m = 0, 1$). Всех возможных состояний системы 10. Если одно из чисел k или m примет значение 2, то шахматист становится победителем (выиграл дважды подряд). Если спортсмен проиграл, то его индекс становится равным нулю.

Рассмотрим граф задачи. Система находится в состоянии S_0 , где соревнуются A и B , пока не имея побед (с нулевыми индексами). С вероятностью 0,5 (оба шахматиста одинаково искусны) система может перейти в состояние S_1 , где будут соревноваться A , имеющий одну победу и C , пока не имеющий побед; $A_1 : C_0$) или в состояние S_2 , где будут соревноваться B , имеющий одну победу и C , пока не имеющий побед; $B_1 : C_0$). Из состояния S_1 возможен переход или в S_3 , где победителем становится A , выиграв у C , или в состояние S_4 , где C сыграет с B , проигравшем в своей последней игре. Победив в этой игре, шахматист C переведет систему в S_7 , где он становится победителем игры, шахматист B переведет систему в состояние S_6 , где он сыграет с A , проигравшем в своей последней игре и т. д.



В пункте а) необходимо вычислить вероятности $P(S_0 \rightarrow S_3) = P(A)$, $P(S_0 \rightarrow S_9) = P(B)$ и $P(S_0 \rightarrow S_7) = P(C)$.

Вычислим вероятность $P(A)$ перехода $S_0 \rightarrow S_3$. Остальные вычисления не отличаются принципиально. Указанный переход можно осуществить так (в скобках указаны вероятности переходов):

$$\begin{aligned}
 &S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3(0,5 \cdot 0,5); \quad S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3(0,5^5); \\
 &S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3(0,5^8); \\
 &S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3(0,5^{5+3k}, \\
 &k = 2, 3, \dots); \dots, S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_3(0,5^4); \\
 &S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_3(0,5^7); \\
 &S_0 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow \dots \\
 &\rightarrow S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_3(0,5^{4+3k}, k = 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

Обращаем внимание читателя на выделенный на рисунке один из циклов и соответствующий ему переход $S_1 - S_4 - S_6$.

Просуммировав записанные вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{5+3k}} + \dots + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{4+3k}} + \dots = \frac{5}{14}.$$

В пункте б) предполагается, что первую партию выиграл A (гипотеза H_1), т.е. система перешла в состояние S_1 . Необходимо вычислить вероятности переходов $P(S_1 \rightarrow S_3) = P(A|H_1)$, $P(S_1 \rightarrow S_9) = P(B|H_1)$ и $P(S_1 \rightarrow S_7) = P(C|H_1)$. Вычисления принципиально не отличаются от приведенных выше, однако все вычисления очень громоздки. Поэтому рассмотрим второй способ решения задачи.

Способ 2. Введем гипотезы H_k = «система перешла из S_0 в S_k », $k = 1, 2$. Условные вероятности вычислим с учетом всех возможных путей из S_1 в S_3 (для вероятности $P(A|H_1) = P(S_1 \rightarrow S_3)$). При этом будем различать вероятность перехода $P(S_1 \rightarrow S_3)$ вообще и вероятность $P_1(S_1 \rightarrow S_3)$ перехода за один шаг. Имеем равенство:

$$\begin{aligned}
 P(A|H_1) = P(S_1 \rightarrow S_3) &= P_1(S_1 \rightarrow S_3) + P(S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3) = P(S_1 \rightarrow S_3) + \\
 &+ P(S_1 \rightarrow S_4 \rightarrow S_6 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_3) = 0,5 + 0,5^3 \cdot P(A|H_1).
 \end{aligned}$$

Для перехода $S_2 \rightarrow S_3$ имеем:

$$\begin{aligned} P(A|H_2) &= P(S_2 \rightarrow S_3) = P(S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_3) + P(S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3) = \\ &= 0,5^3 + P(S_2 \rightarrow S_5 \rightarrow S_8 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_3) = 0,5^3 + 0,5^3 \cdot P(A|H_2). \end{aligned}$$

Таким образом, из системы уравнений

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}P(A|H_1), \quad P(A|H_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}P(A|H_2)$$

получим вероятности

$$P(A|H_1) = \frac{4}{7}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{7}.$$

По формуле полной вероятности находим:

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{7} + \frac{1}{7} \right) = \frac{5}{14}.$$

Аналогично для B и C . Из системы уравнений

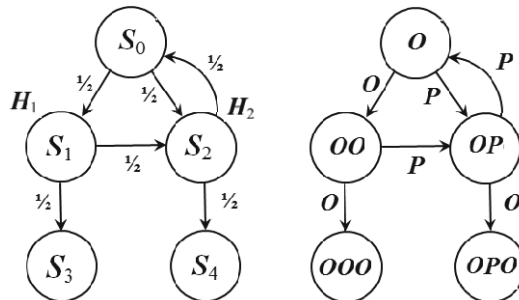
$$P(B|H_1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}P(B|H_1), \quad P(B|H_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}P(B|H_2)$$

найдем $P(B|H_1) = \frac{1}{7}$, $P(B|H_2) = \frac{4}{7}$, и получим $P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{5}{14}$. Наконец, для C имеем систему уравнений

$$P(C|H_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}P(C|H_1), \quad P(C|H_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}P(C|H_2),$$

далее $P(C|H_1) = P(C|H_2) = \frac{2}{7}$ и $P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) = \frac{4}{14}$.

Задача 3. [3, задача 27.10]. Два игрока A и B наблюдают за мальчиком, который без остановки подбрасывает монету. Результаты подбрасываний записываются последовательно с помощью букв: на k -м месте последовательности ставится буква O или буква P в зависимости от того, что выпадает при k -м подбрасывании «орел» или «решка» соответственно. Игрок A утверждает, что тройка OOO встретится в записи раньше, чем тройка OPO . Игрок B поспорил, что произойдет обратное. Кто из игроков имеет больше шансов выиграть в этом споре?



Решение. Все возможные состояния «системы» S = «последовательно подбрасываемая монета» следующие: S_0 (выпал первый «орел»), S_1 (выпал второй «орел»), S_2 (выпала «решка»), S_3 (выпал третий «орел», выиграл игрок A), S_4 (выпал «орел» после второй «решки», выиграл игрок B). S_3 и S_4 — поглощающие состояния.

Введем гипотезы $H_k = \text{«система перешла из } S_0 \text{ в } S_k\text{»}$, $k = 1, 2$. Событие $A = \text{«цепочка } OOO \text{ появится раньше цепочки } OPO\text{»}$. Условные вероятности $P(A|H_1) = P(S_1 \rightarrow S_3)$ и $P(A|H_2) = P(S_2 \rightarrow S_3)$ вычислим с учетом всех возможных путей из S_k в S_3 :

$$\begin{aligned} P(A|H_1) &= P(S_1 \rightarrow S_3) = P_1(S_1 \rightarrow S_3) + P(S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3) = 0,5 + 0,5 \cdot P(A|H_2); \\ P(A|H_2) &= P(S_2 \rightarrow S_3) = P(S_2 \rightarrow S_0) \cdot P(S_0 \rightarrow S_1) + P(S_2 \rightarrow S_0) \cdot P(S_0 \rightarrow S_2) = \\ &= 0,5 \cdot 0,5 \cdot P(A|H_1) + 0,5 \cdot 0,5 \cdot P(A|H_2). \end{aligned}$$

В записанных выше равенствах, например $P(S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3) = P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_3) = 0,5 \cdot P(A|H_2)$ вычислено в соответствии с таблицей. Таким образом, имеем систему уравнений

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(A|H_2), \quad P(A|H_2) = \frac{1}{4}P(A|H_1) + \frac{1}{4}P(A|H_2),$$

Откуда находим $P(A|H_1) = 0,6$ и $P(A|H_2) = 0,2$. По формуле полной вероятности

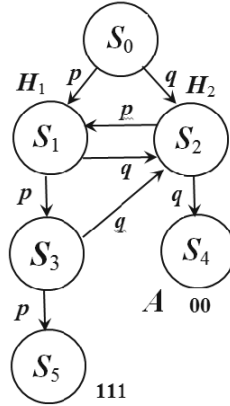
$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,2 = 0,4.$$

Больше шансов выиграть у игрока B .

Заметим, что в [3] вероятности выигрыша для игроков не вычисляются, а только дается оценка, какая из них больше.

Задача 4. [4, задача 2.77]. В схеме Бернулли p — вероятность исхода 1 а $q = 1 - p$ — вероятность исхода 0. Найти вероятность P_{00111} того, что цепочка 00 появится раньше цепочки 111.

Решение.



Все возможные состояния «системы» $S = \text{«последовательные испытания»}$ следующие: S_0 (начало испытаний), S_1 (исход 1), S_2 (исход 0), S_3 (появление 11), S_4 (появление 00, событие A произошло), S_5 (появление 111, событие A не произошло). S_4 и S_5 — поглощающие состояния.

Введем гипотезы $H_k = \text{«система перешла из } S_0 \text{ в } S_k\text{»}$, $k = 1, 2$. Событие $A = \text{«цепочка 00 появится раньше цепочки 111»}$.

Условные вероятности $P(A|H_1) = P(S_1 \rightarrow S_4)$ и $P(A|H_2) = P(S_2 \rightarrow S_4)$ находим с учетом всех возможных путей в S_4 :

$$\begin{aligned} P(A|H_1) &= P(S_1 \rightarrow S_4) = P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_4) + P(S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_2 \rightarrow S_4) = \\ &= q \cdot P(A|H_2) + P(S_1 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_4) = p \cdot P(A|H_2) + pq \cdot P(A|H_2); \\ P(A|H_2) &= P(S_2 \rightarrow S_4) = P_1(S_2 \rightarrow S_4) + P(S_2 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_4) = q + p \cdot P(A|H_1). \end{aligned}$$

Таким образом, для условных вероятностей имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} P(A|H_1) = qP(A|H_2) + pqP(A|H_2), \\ P(A|H_2) = q + pP(A|H_1). \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим:

$$P(A|H_1) = \frac{q}{1 - pq(1 + p)}, \quad P(A|H_2) = \frac{q^2(1 + p)}{1 - pq(1 + p)}.$$

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = p \cdot \frac{q^2(1 + p)}{1 - pq(1 + p)} + q \cdot \frac{q}{1 - pq(1 + p)} = \frac{pq^2(1 + p) + q^2}{1 - pq(1 + p)} = \frac{q(1 - p^3)}{q + p^3}.$$

В частности, при $p = q = 1/2$ имеем $P(A) = P_{00111} = 0,7$.

Следующая задача на полиномиальную схему Бернулли имеет более сложную модель.

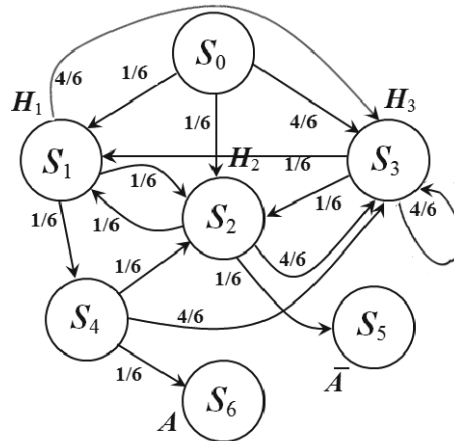
Задача 5. Бросают игральную кость, записывая последовательность количества выпавших очков. Например, 4, 2, 2, 6, 2, 3, 3, ... Какова вероятность того, что цепочка 1, 1, 1 появится в записанной последовательности раньше цепочки 6, 6?

Решение. Все возможные состояния «системы» $S = \text{«последовательные испытания»}$ следующие: S_0 (начало испытаний), S_1 (выпала 1), S_2 (выпала 6), S_3 (другое число очков), S_4 (появление 11), S_5 (появление 66, событие A не произошло), S_6 (появление 111, событие A произошло). Таким образом, событие $A = \text{«появление 111 раньше, чем 66»}$. S_5 и S_6 — поглощающие состояния. Введем гипотезы $H_k = \text{«система перешла из } S_0 \text{ в } S_k\text{»}$, $k = 1, 2, 3$. Вычисляем условные вероятности:

$$\begin{aligned} P(A|H_1) &= P(S_1 \rightarrow S_6) = P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_6) + P(S_1 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_6) + \\ &+ P(S_1 \rightarrow S_4) \cdot P(S_4 \rightarrow S_6) + P(S_1 \rightarrow S_4) \cdot P(S_4 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_6) + \\ &+ P(S_1 \rightarrow S_4) \cdot P(S_4 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_6) = (1/6) \cdot P(A|H_2) + (4/6) \cdot P(A|H_3) + \\ &+ (1/6) \cdot (1/6) + (1/6) \cdot (1/6) \cdot P(A|H_2) + (1/6) \cdot (4/6) \cdot P(A|H_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A|H_2) &= P(S_2 \rightarrow S_6) = P(S_2 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_6) + P(S_2 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_6) = \\ &= (1/6) \cdot P(A|H_1) + (4/6) \cdot P(A|H_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A|H_3) &= P(S_3 \rightarrow S_6) = P(S_3 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_6) + P(S_3 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_6) + \\ &+ P(S_3 \rightarrow S_3) \cdot P(S_3 \rightarrow S_6) = (1/6) \cdot P(A|H_1) + (1/6) \cdot P(A|H_2) + (4/6) \cdot P(A|H_3). \end{aligned}$$



Таким образом, для условных вероятностей имеем систему уравнений

$$\begin{cases} P(A|H_1) = \frac{1}{36} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) P(A|H_2) + \left(\frac{4}{6} + \frac{4}{36}\right) P(A|H_3), \\ P(A|H_2) = \frac{1}{6}P(A|H_1) + \frac{4}{6}P(A|H_3), \\ P(A|H_3) = \frac{1}{6}P(A|H_1) + \frac{1}{6}P(A|H_2) + \frac{4}{6}P(A|H_3). \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $P(A|H_1) = 0,16$, $P(A|H_2) = 0,12$; $P(A|H_3) = 0,14$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot 0,16 + \frac{1}{6} \cdot 0,12 + \frac{4}{6} \cdot 0,14 = 0,14.$$

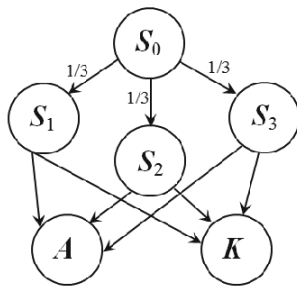
В приведенной задаче пересчитать все возможные переходы из S_0 в S_6 затруднительно. Поэтому использование формулы полной вероятности вполне уместно. Роль формул Байеса рассмотрим в следующей задаче. Последняя известна как парадокс Монти Холла (https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Монти_Холла).

Задача 6. Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас — не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2? Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Решение. Все возможные состояния «системы» S = «игрок, выбирающий дверь» следующие:

S_0 (начало испытаний), S_k (игрок выбрал k -ю дверь, $k = 1, 2, 3$), A (игрок выиграл автомобиль), K (игрок выиграл козу). Введем гипотезы H_k = «система перешла из S_0 в S_k », $k = 1, 2, 3$. Событие A = «игрок выиграл автомобиль». Вероятности переходов из S_k в A примем равными 0,5 — игрок принимает решение менять или не менять выбор с одинаковой вероятностью. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Вероятность выиграть автомобиль равна 0,5, и формула полной вероятности не дает ответа на вопрос задачи. Предположим, что событие A произошло, и рассмотрим наиболее вероятные пути попадания системы в состояние A . То есть, вычислим апостериорные вероятности.

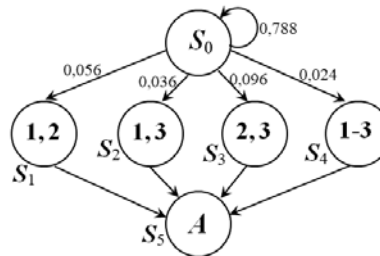
$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Только в одном случае, например в S_1 , игрок угадал правильно дверь, за которой был автомобиль и НЕ поменял решения, попав в состояние A . В двух же других случаях (где изначально дверь

НЕ была угадана) игроки меняли свои решения, чтобы попасть в A . Уже из рисунка видно, что соотношение игроков, попавших в состояние A и НЕ поменявших решения относится к числу игроков, поменявших решение как один к двум. Формулы Байеса подтверждают это соотношение: $P(H_1|A) : P(H_2 + H_3|A) = 1 : 2$.

Задача 7. [2; § 9, задача 8]. Техническое устройство выйдет из строя, если откажут любые два из трех независимо работающих элементов. Устройство вышло из строя. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны: 0,2; 0,4; 0,3.

Решение. Приведем стандартное решение. Устройство выходит из строя, если произойдет одно



из несовместных событий: гипотеза H_1 = «вышли из строя только 1-й и 2-й элементы», гипотеза H_2 = «... 1-й и 3-й ...», H_3 = «... 2-й и 3-й ...», H_4 = «вышли из строя все три элемента». Вероятности гипотез: $P(H_1) = 0,056$, $P(H_2) = 0,036$, $P(H_3) = 0,096$, $P(H_4) = 0,024$. С учетом того, что $P(A|H_k) = 1$, $k = 1, 2, 3, 4$, по формуле полной вероятности $P(A) = 0,056 + 0,036 + 0,096 + 0,024 = 0,288$. По формулам Байеса вычисляем необходимую величину: $P(H_1|A) = 0,056 : 0,288 \approx 0,264$, что совпадает с ответом в книге. Заметим, что при таком ответе, в условии задачи более корректно ставить вопрос о вероятности отказа **только** первого и второго элементов. В сформулированном же варианте правильным будет ответ $P(H_1 + H_4|A) = 0,08 : 0,288 \approx 0,377$.

Решение с использованием графовой модели выглядит так.

Система S = «Техническое устройство» может пребывать в состояниях: S_0 (рабочее состояние), S_1 (отказали только элементы 1 и 2), S_2 (отказали только элементы 1 и 3), S_3 (отказали только элементы 2 и 3), S_4 (отказали все элементы), S_5 (событие A = «устройство не работает» произошло).

Здесь S_5 — поглощающее состояние, попав в которое, система там остается (событие A произошло, задача решена). Система за один шаг или выполнит переход $S_0 \rightarrow S_5$, вероятность которого $P(S_0 \rightarrow S_5) = P(S_0 \rightarrow A) = P(A)$ найдем по формуле полной вероятности, или останется в исправном состоянии S_0 .

Вычисляем вероятность перехода:

$$P(A) = P(S_0 \rightarrow S_5) = P(S_0 \rightarrow S_1) \cdot P(S_1 \rightarrow S_5) + P(S_0 \rightarrow S_2) \cdot P(S_2 \rightarrow S_5) + P(S_0 \rightarrow S_3) \times \\ \times P(S_3 \rightarrow S_5) + P(S_0 \rightarrow S_4) \cdot P(S_4 \rightarrow S_5) = 0,056 \cdot 1 + 0,036 \cdot 1 + 0,096 \cdot 1 + 0,024 \cdot 1 = 0,288.$$

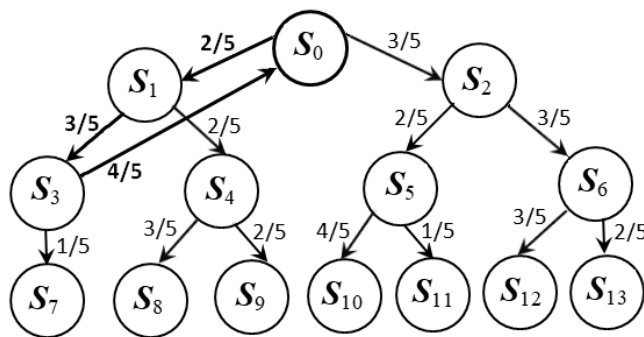
Вероятность того, что система пришла в состояние A через S_1 находим по классической схеме [7, стр. 51], фактически по формуле Байеса:

$$P(S_5|S_1) = \frac{0,056}{0,056 + 0,036 + 0,096 + 0,024} \approx 0,264.$$

Задача 8. [7, стр. 49]. Пусть имеются три урны, содержащие белые и черные шары, одинаковые по форме. Состав шаров в первой урне: 2 белых и 3 черных. Во второй — 2 белых и 2 черных; в третьей — 3 белых и 1 черный. Из первой урны случайно выбирается один шар и перекладывается

во вторую. После этого из второй урны также случайно один шар перекладывается в третью урну, и, наконец, из третьей урны какой-то из шаров перекладывается в первую. Какой состав шаров в первой урне после перекладываний наиболее вероятен, а также — что вероятнее: изменение состава шаров в урне или сохранение?

Решение. Система «Три урны с шарами» в условиях задачи может пребывать в таких состояниях: начальное $S_0(2:3; 2:2; 3:1)$, состояния $S_1(1:3; 3:2; 3:1)$, $S_2(2:2; 2:3; 3:1)$, $S_3(1:3; 2:2; 4:1)$, $S_4(1:3; 3:1; 3:2)$, $S_5(2:2; 1:3; 4:1)$, $S_6(2:2; 2:2; 3:2)$, $S_7(1:4; 2:2; 4:0)$, $S_8(2:3; 3:1; 2:2)$, $S_9(1:4; 3:1; 3:1)$, $S_{10}(3:2; 1:3; 3:1)$, $S_{11}(2:3; 1:3; 4:0)$, $S_{12}(3:2; 2:2; 2:2)$, $S_{13}(2:3; 2:2; 3:1)$. Возможные переходы между состояниями и вероятности переходов изображены на графе. Единственный цикл выделен на рисунке.



$$P(S_0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{125}; \quad P(S_7) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{125}; \quad P(S_8) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125}; \quad P(S_9) = \frac{8}{125};$$

$$P(S_{10}) = \frac{24}{125}; \quad P(S_{11}) = \frac{6}{125}; \quad P(S_{12}) = \frac{27}{125}; \quad P(S_{13}) = \frac{18}{125}.$$

Для ответа на вопросы задачи вычислим вероятности событий B_k = «После трех перекладываний первая урна содержит k белых шаров», $k = 1, 2, 3$.

$$P(B_1) = P(S_7) + P(S_9) = \frac{14}{125}; \quad P(B_2) = P(S_0) + P(S_8) + P(S_{11}) + P(S_{13}) = \frac{60}{125};$$

$$P(B_3) = P(S_{10}) + P(S_{12}) = \frac{51}{125}.$$

Таким образом, наиболее вероятное количество шаров в первой урне 2, но изменение состава шаров в первой урне более вероятно.

Граф рассмотренной задачи содержит цикл, но на сложность решения он не влияет, так как учитывается как путь длины 3.

Использование графовых моделей при изучении курса теории вероятностей в технических или экономических вузах является пропедевтикой для изучения ряда математических дисциплин: теория случайных процессов, теория массового обслуживания, дискретная математика, математическое программирование. В решенных задачах без использования графов можно обойтись — графы всего лишь являются наглядной моделью задачи. Применение наглядности является предметом изучения методики преподавания [5].

Литература

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1979.
2. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум: Учеб. пособие. - К.: Выща шк., 1989.

3. Зарубежные математические олимпиады. / Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др.; под ред. Сергеева И.Н. - М. : Наука., 1987.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
5. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика: Учебное пособие / Под ред. Е.И. Смирнова. - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007.
6. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад по математике. - М.: Наука, 1989.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей: Учеб. - 3-е изд., испр. - М.: Наука., 1987.

*Рашевский Николай Александрович,
доцент кафедры высшей математики
Криворожского национального университета,
кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: mora290466@gmail.com

Информация

О выходе книги И.П. Костенко

От редакции

Редакция информирует о выходе книги Игоря Петровича Костенко “Реформы” образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты). Монография. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2018. - 192 с.

Издание осуществлено при поддержке Фонда математического образования и просвещения.

Аннотация. На основании огромного фактического материала (малоизвестного, нередко неизвестного) дается аргументированный ответ на вопрос о причинах падения качества отечественного образования, начиная с 1956 г.

Проведено историко-методическое исследование четырех школьных “реформ”: 1918–1930, 1931–1937, 1970–1978, 1990–2018. Выделены и проанализированы идеи, направлявшие “реформы”, выявлены цели и методология “реформаторов”, конкретизированы персоналии, проявлены результаты “реформ” — их влияние на качество знаний учащихся.

Центральное место в исследовании занимает история подготовки и реализации “реформы” 1970–1978 гг. и оценка ее последствий в современном образовании. Доказано, что идеи, направлявшие “реформу”, противоречат законам дидактики и классическим принципам методики, что и предопределило обвальное падение качества знаний и последовавшую деградацию образования страны.

Сделаны актуальные выводы-уроки “реформ”: созидательной (1930-е гг.) и разрушительных (1920-е, 1970-е, 2000-е).

Книга адресована всем, кто ищет путей возрождения образования России.

Книгу можно приобрести в редакции журнала “Математическое образование” по адресу: Москва, ул. Авиамоторная 55, корп. 31, офис 525. Тел. +7 495 980 03 72. Цена 400 руб.

О деятельности ФМОП в 2018 г.

От редакции

В 2018 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 и учебного комплекса № 2090 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, учредителем которого ФМОП является; в 2018 г. вышли номера 1(85), 2(86), 3(87), 4(88).
- Выпуск электронного приложения к журналу “Математическое образование”, (первый выпуск вышел в марте, второй — в августе 2018 г.).
- Поддержка подготовки к изданию “О некоторых педагогах ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века” о жизни и деятельности ряда ярославских педагогов.
- Поддержка издания книги Костенко И.П. “Реформы” образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты).
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ, февраль.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников САММАТ, г. Самара, апрель.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря “Алый Парус” Костромской области, июнь–август.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

Содержание журнала “Математическое образование” за 2017–2018 гг.

От редакции

№ 1 (81), январь – март 2017 г.

От редакции. Ушел из жизни Игорь Ростиславович Шафаревич	2
Образовательные инициативы	
От редакции. XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике САММАТ	3
Учащимся и учителям средней школы	
В. И. Войтицкий. Суммирование и гиперсуммирование прогрессий	15
В. Б. Дроздов. Формула Фусса	27
Студентам и преподавателям математических специальностей	
Е. И. Знак. Операторы вида $Af(x) = f(ax + b) - \lambda f(x)$ и функциональные уравнения в задачах математических конкурсов	33
Л. Н. Ромакина, И. В. Федоров. Решение трехреберников типов $eee(I)$ и $eee(III)$ на гиперболической плоскости положительной кривизны	40
Из истории математики	
С. В. Жаров. Геометрические идеи Н.И. Лобачевского (к 225-летию со дня рождения)	48
Математика в контексте мировой культуры	
Коллоквиум. Пьер Картье о математике и искусстве	52
Памяти Р.З. Гушель	
От редакции. Ушла из жизни выдающийся историк образования Ревекка Залмановна Гушель	63

№ 2 (82), апрель – июнь 2017 г.

Актуальные вопросы математического образования	
Т. А. Алтушкина, И. П. Костенко. Опыт возрождения русской советской системы обучения	2
Образовательные инициативы	
А. Ю. Эвнин. Командные математические олимпиады в ЮУрГУ	7
Студентам и преподавателям математических специальностей	
В. И. Игошин. О точках и векторах в геометрии	27
А. Н. Буланова, В. В. Ивлев. Аппроксимация эйлеровых уравнений	44
О. Г. Лисин. Ряд Фарея и поиск простых чисел	49
С. М. Тахаев. О некоторых свойствах линии Жергонна в треугольнике	60
Замечательные даты в мире математики и математического образования	
Р. З. Гушель. Библиографические материалы к юбилейным датам 2017 г. II полугодие	74

№ 3 (83), июль – сентябрь 2017 г.

Учащимся и учителям средней школы

- В. К. Гаврилов.* Равенство Менелая, пучок прямых и многоугольник 2
- В. А. Делянов, Т. Н. Брянцева.* Дифференцирование функций на основе метода наглядных построений в средней школе 7

Студентам и преподавателям математических специальностей

- Н. Г. Павлова, А. О. Ремизов.* Гладкие функции, формальные ряды и теоремы Уитни (окончание) 13
- М. Е. Степанов.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника 28
- Д. А. Тарновский.* Вариант математического моделирования физиологических процессов 43
- С. В. Шведенко.* Альтернативное определение комплексного логарифма 48
- А. В. Ястребов.* Числовая мера разносторонности треугольника 51

Образовательные инициативы

- Е. И. Знак.* Всеармейские математические олимпиады: эволюция и проблемы 60

Из истории математики

- М. А. Прохорович, А. В. Савватеев.* Математик, которого не было 68

Информация

- От редакции.* О выходе книги Наташи Рожковской 76

№ 4 (84), октябрь – декабрь 2017 г.

Актуальные вопросы математического образования

- К. В. Козеренко.* Точки разрыва в математическом образовании 2

Учащимся и учителям средней школы

- В. Б. Дроздов.* Теорема Архимеда и задача ЕГЭ 8

Студентам и преподавателям математических специальностей

- В. И. Войтицкий.* Средние функциональные величины набора действительных чисел, их сравнение и свойства 12
- Oleg Zubelevich.* On Bounded and Unbounded Curves in Euclidian Space 20
- С. И. Калинин.* Неравенство Ки Фана могло быть открыто существенно раньше 25
- И. В. Сухан, Г. Г. Кравченко, О. В. Иванисова.* Аксиоматический метод в курсе математической логики в вузе: от Эвклида до Гёделя 28
- А. Ю. Эвнин, Э. Ю. Лернер, Ю. А. Игнатов, И. С. Григорьева.* Задачи по теории вероятностей на студенческих олимпиадах 45

№ 5 (85), январь – март 2018 г.

Памяти И. Р. Шафаревича

- М. И. Зеликин.* Гениальность. Памяти И. Р. Шафаревича 2

Учащимся и учителям средней школы

- Е. Г. Смольянова, Н. В. Малышкина.* Гипербола и биквадратные уравнения 5
- С. М. Тахаев.* Построение четырёхугольников с заданными свойствами 10
- М. А. Тлеубергенова.* Правильный треугольник помогает решить задачу 33

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов. Применение линейной алгебры для приведения уравнений в частных производных второго порядка к каноническому виду	38
В. В. Ивлев, Е. А. Кривошей. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение)	47
В. Т. Мураталиева. Алгоритмы для доказательства теорем о линейных интегро-дифференциальных уравнениях с аналитическими функциями	52
С. В. Шведенко. Формула замены переменных в двойном интеграле как следствие формулы Грина	56
А. Ю. Эвнин. Теорема Гринберга и её применение	60

Информация

О деятельности ФМОП в 2017 г.	66
-------------------------------	----

№ 2 (86), апрель – июнь 2018 г.

Учащимся и учителям средней школы

В. К. Гаврилов. Отрезок, делить на части или строить из частей?	2
В. Б. Дроздов. Треугольники Наполеона	8

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. О. Ремизов. Об изоморфизмах псевдоевклидовых пространств	15
С. Н. Сазонов. Метод вывода формулы Валлиса и формул разложения гиперболических функций в бесконечные произведения	40
К. Ю. Тархов. Практические аспекты преподавания дисциплины «Линейная алгебра» для химико-технологических специальностей	44
А. Ю. Эвнин. Тесты в духе GRE	50

Из истории математики

Л. Б. Медведева, С. В. Жаров. О геометрических исследованиях профессора З.А. Скопеца и его учеников	66
---	----

№ 3 (87), июль – сентябрь 2018 г.

Учащимся и учителям средней школы

А. Н. Афанасьев. Пять решений одной известной задачи	2
С. В. Дворянинов. Полезно решать дифференциальные уравнения	7

Студентам и преподавателям математических специальностей

А. Ж. Аширбаева. Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа	12
С. И. Калинин, Л. В. Панкратова. Неравенства Эрмита-Адамара: образовательно-исторический аспект	17
Е. Г. Смольянова, А. Г. Смольянов. Циклические свойства корней алгебраических уравнений второй степени	32
А. Ю. Эвнин. Тесты в духе GRE (окончание)	38

Из истории математики

Р. А. Мельников. Борис Михайлович Коялович. К 150-летию со дня рождения	53
---	----

№ 4 (88), октябрь – декабрь 2018 г.

Учащимся и учителям средней школы

И. С. Бекешева, О. С. Бобылева, У. А. Джафарова. Алгебраические задачи как средство развития исследовательской компетенции	2
В. Б. Дроздов. Замечательные точки и неравенства	6
Ю. А. Игнатов. Графический метод в комбинации с методом замены переменной при решении уравнений	12

Студентам и преподавателям математических специальностей

В. Ю. Бодряков, А. А. Быков. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения	18
В. В. Ивлев, Е. М. Архипова. Об одном приближении уравнений Пфаффа	30
А. Ф. Ляхов, Е. И. Чнегов. Алгоритмы и методы построения программы-дескриптора, осуществляющей распознавание графических изображений	38
Н. А. Рашевский. Графы как наглядные модели задач на условную вероятность	50

Информация

От редакции. О выходе книги И.П. Костенко	61
От редакции. О деятельности ФМОП в 2018 г.	62
От редакции. Содержание журнала “Математическое образование” за 2017–2018 гг.	63

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Отдельные материалы имеются на www.lomonosovclub.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2018 год (включая стоимость пересылки) – 100 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2018 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 90 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I. Bekesheva, O. Bobyleva, U. Jafarova. Algebraic Problems as a Tool for Development of the 7-th Year Students' Research Competence	2
Some research-type algebraic problems for the 7-th year students are discussed.	
V. Drozdov. Triangle's Remarkable Points and Inequalities	6
Consider the 4 centers of a triangle: the mass center, the orthocenter, the incenter, and the circumcenter. Consider the 6 line segments which join these centers. The inequalities between the lengths of these segments are established.	
Yu. Ignatov. Graphic Method Combined with Variable Replacement Method for Solving Equations	12
The equation solving method of combining graphs and variable replacement is considered.	
V. Bodryakiv, A. Bykov. The History of Hyperbolic Functions: Research and Some Applications	18
On the history of discovering and research the hyperbolic functions.	
V. Ivlev, E. Arhipova. On an Approximation of Pfaff's Equations	30
An approximation of the Pfaff's equations based on the least square method is suggested. The approximation is the full differentials equation.	
A. Lyahov, E.Chnegov. Algorithms and Methods of Constructing a Descriptor Program for Recognition of Graphic Images	38
A new original descriptor for recognition of static as well as of dynamic images is described.	
N. Rashevsky. Graphs as Visual Models for Conditional Probability Problems	50
A technique of using graphs for solving conditional probability problems is suggested.	
Current Information	61

