

ISSN 1992-6138

# **Математическое Образование**

**Журнал Фонда математического  
образования и просвещения**

**Год двадцать третий**

**№ 4 (92)**

**октябрь – декабрь 2019 г.**

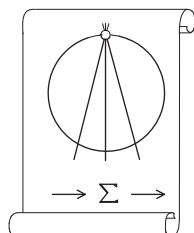
**Москва**



*Периодическое издание в области математического образования*



Участник проекта “Научно-просветительский клуб «Ломоносов»”



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

## Главный редактор

Имайкин В.М.

## Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 4 (92), 2019 г.

© “Математическое образование”, составление, 2019 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2019 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 20.01.2020 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (92), октябрь – декабрь 2019 г.

## Содержание

### Математическое моделирование

- Е. Ф. Мищенко, А. С. Мищенко, М. И. Зеликин.* Адекватность математических моделей в теории управления, физике и экологии 2

### Учащимся и учителям средней школы

- В. Ю. Бодряков, А. А. Быков.* Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как методический подход к введению понятия «площадь фигуры» в курсе геометрии. Часть 1 17
- К. П. Горшенин.* Анализ математической модели реальной ситуации как инструмент разработки разноуровневых задач 30

### Студентам и преподавателям математических специальностей

- В. В. Ивлев, А. Н. Буланова.* Аппроксимация эйлеровых уравнений. Продолжение 38
- Н. А. Рашевский.* Метод траекторий в комбинаторике и теории вероятностей 43
- Е. Г. Смольянова.* Преобразование ветвей гиперболы в её малый фрагмент 58

### Из истории математики

- А. Н. Ковалев.* О знании в XIII–XVI веках связи чисел Фибоначчи с золотым сечением 63

### Информация

- От редакции.* О деятельности ФМОП в 2019 г. 76

# Адекватность математических моделей в теории управления, физике и экологии

*Е. Ф. Мищенко, А. С. Мищенко, М. И. Зеликин*

Авторы обсуждают роль математики и использование математических моделей в различных областях человеческой деятельности: теории управления, физике, моделировании физических, технологических и природных процессов. Рассматриваются, в частности, работы Л. С. Понтрягина и его учеников в области динамических систем, теории управления, теории дифференциальных игр. Моделирование технологических и природных процессов рассматривается на примерах проекта поворота северных и сибирских рек на юг, прогнозирования изменения уровня Каспийского моря, проекта строительства Ленинградской дамбы.

Статья печатается с продолжением.

## Введение

Слово «модель» в русском языке ассоциируется с одеждой, то есть с чем-то чисто внешним, всего лишь украшающим реальную сущность человека. В данной работе обсуждается прямо противоположный аспект этого понятия.

Когда говорят о естественнонаучной математической модели, то имеется в виду умозрительная конструкция, призванная выразить сущность явления и причинные связи составляющих его процессов. При этом следует ясно осознавать, что буквально все природные явления взаимосвязаны. Поэтому учесть все связи — явно неосуществимая задача для скромных возможностей человеческого разума. Но к счастью, одни связи очень сильны, а другие исчезающе малы, и мы имеем возможность, отбросив второстепенное, выявить главные действующие причины и объяснить механизм их влияния на интересующий нас объект. Именно это и является основной парадигмой всех естественных наук, если, конечно, не считать их чисто описательных аспектов. Эта парадигма предопределяет ведущую роль математики в процессе построения и исследования моделей.

Попробуем это обосновать. Дело не только в нерушимой логике и строгости математических рассуждений (качество, отличающее математику от всех других естественных наук). Ведь естественно было бы спросить: а зачем, собственно, нужны строгие математические доказательства, которые математики приводят даже и в тех случаях, когда доказываемое утверждение и без того представляется очевидным?

Обычно считается, что доказательства нужны для того, чтобы быть уверенным в правильности соответствующего высказывания. Это, конечно, в определенном смысле верно, и даже можно привести многочисленные примеры математических утверждений, которые казались очевидными, но никак не поддавались доказательству до тех пор, пока не были найдены опровергающие их контрпримеры. Однако это лишь внешняя сторона довольно глубокой проблемы. Даже если говорить о чисто математических теоремах, то их строгое доказательство есть лишь процесс сведения к некоторому общепризнанному (на данный период развития математики) набору аксиом (нередко даже подразумеваемых неявно). Но в соответствии с теоремой Гёделя, для любой конкретной аксиоматики существуют утверждения, которые нельзя ни подтвердить, ни опровергнуть, оставаясь в рамках

этой аксиоматики. Поэтому никогда нельзя до конца проследить, в какой из бесконечного числа расширений существующей признанной аксиоматики доказана та или иная теорема, и значит, вопрос об уверенности в ее абсолютной справедливости становится проблематичным.

Любопытную точку зрения на эту проблему имел Аристотель. Он считал, что доказательства нужны для того, чтобы понять причины того или иного математического факта. Таким образом, по Аристотелю, даже чисто абстрактная математика, как таковая, есть в некотором высоком смысле построение моделей. Но только эти модели строятся не независимо друг от друга. Они организуются в некое органическое единство: сложнейшую систему взглядов, или, образно говоря, единое прекрасное архитектурное сооружение – Здание Математики. Именно причастность к этому единству и дает нам интуитивную уверенность в правильности математических утверждений. А поскольку математика является древнейшей и наиболее совершенной из дедуктивных наук, ее опыт в построении моделей по праву может служить образцом для подражания.

Разумеется, когда дело касается конкретной науки — физики, биологии, географии и т.п., — в качестве основы для построения моделей необходимы соответствующие конкретные знания и факты, необходима интуиция ученого, долго изучавшего данный объект исследования. Хорошие модели часто возникают в результате тесного научного контакта профессионала-математика со специалистами в других областях естествознания. В качестве примера можно привести альянс экономиста Дж. Кейнса и математика Ф. Рамсея, совместными усилиями сформулировавших и обосновавших так называемое «золотое правило накопления» в математической экономике, или, скажем, союз математика Дж. фон Неймана и экономиста О. Моргенштерна, создавших основу для применения теории игр к математической экономике.

Потрясающим примером служит содружество ученых, создававших квантовую механику. Это были по преимуществу физики, но среди них были и такие, как Зоммерфельд, имевший довольно значительный математический багаж, и такие, как Гейзенберг, обладавший уникальной физической интуицией. Часто сотрудничество является не прямым. Например, в создании теории относительности помимо физиков Лоренца и Эйнштейна существенную роль сыграли математики Пуанкаре и Минковский. А первая по-настоящему строгая математическая модель квантовой механики была построена математиком Джоном фон Нейманом. К сожалению, нередко сотрудничеству препятствуют личные амбиции и честолюбие ученых, мешающие по достоинству оценить вклад противоположной стороны.

Авторы этой статьи имели счастье учиться и работать под непосредственным руководством одного из гениальнейших математиков XX века, Льва Семеновича Понтрягина. Старший из нас, Евгений Фролович Мищенко, был участником группы математиков, в конце 50-х – начале 60-х годов создававших под руководством Л.С. Понтрягина принцип максимума Понтрягина. Михаил Ильич Зеликин был в это время студентом, чьим научным руководителем был Л.С. Понтрягин. Александр Сергеевич Мищенко сотрудничал с Л.С. Понтрягиным в 80-х годах. В 80-е годы мы были участниками того мощного экологического движения, которое поднялось в СССР в период борьбы против недоброй памяти грандиозных природоразрушительных проектов поворота северных и сибирских рек на юг. Весьма существенную роль в этой борьбе сыграли математики, которые сумели убедить руководство страны в математической несостоятельности моделей и прогнозов, на которых были основаны проекты поворота рек.

После того, как эти проекты были в конце концов отменены, Л.С. Понтрягин создал в Институте математики им. В.А. Стеклова лабораторию математических задач природоведения, ядро которой составили М.И. Зеликин и А.С. Мищенко. Одновременно была создана общественная организация — ассоциация ученых «Экология и мир», объединившая ряд ученых и, в том числе, виднейших членов Академии наук СССР, обеспокоенных экологическими проблемами. Заместителем председателя этой ассоциации стал А.С. Мищенко, М.И. Зеликин был членом бюро. В процессе активной деятельности этих организаций был изучен целый ряд крупных экологически опасных народнохозяйственных проектов и дана их научная экспертиза.

В этой статье мы хотели бы поделиться нашим опытом математического моделирования технологических и природных процессов и на основе этого опыта обсудить философско-эпистемологические аспекты проблемы моделирования.

## 1. Математические модели технологических процессов в работах Л.С. Понтрягина

Сначала нам хотелось бы описать замечательные достижения Л.С. Понтрягина в математическом моделировании инженерных и технологических процессов. Они относятся в основном к четырем областям: концепция грубых систем, теория релаксационных колебаний, принцип максимума Понтрягина, теория дифференциальных игр.

Исследования Понтрягина по *грубым системам* были выполнены в содружестве с физиком А.А. Андроновым. Они были стимулированы технической проблемой устойчивости колебаний вагонов поезда, которые при больших скоростях начинают раскачиваться, что в принципе может привести к крушению. При математическом моделировании мы никогда не знаем точно те функции, которые описывают изучаемую систему. Вопрос состоит в том, чтобы понять, в каком случае качественное наведение системы не меняется при малых изменениях характеризующих ее функций.

Система дифференциальных уравнений называется *структурно устойчивой*, если при любых малых изменениях векторного поля, определяющего эту систему, фазовый портрет остается топологически инвариантным. В работах Андронова и Понтрягина была проведена полная классификация двумерных структурно устойчивых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Было доказано, что структурно устойчивые системы обязаны иметь только грубые положения равновесия, грубые предельные циклы и сепаратрисы, находящиеся в общем положении.

После этой революционной работы различные математики долгое время пытались доказать, что эти же свойства характеризуют структурно устойчивые системы и в многомерном случае. Только через много лет выяснилось, что в многомерном случае ситуация существенно сложнее. В работах ученика Понтрягина, Дмитрия Викторовича Аносова, был выделен класс систем, типа геодезического потока на многообразиях отрицательной кривизны, который не обладает вышеперечисленными свойствами. А знаменитый пример Стивена Смейла, так называемая «подкова Смейла», снабдил математиков наглядной математической моделью гиперболических систем, которая обогатила интуицию математиков и послужила основой далеко идущих математических теорий, имеющих важное практическое значение. Это является демонстрацией того, что моделью может служить конкретный, точно решенный математический пример.

Теория *релаксационных колебаний* связана с изучением асимптотического поведения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных при стремлении этого малого параметра к нулю. Основой для построения этой теории послужили задачи радиотехники. При составлении дифференциальных уравнений, описывающих работу радиотехнического устройства, поневоле приходится пренебрегать некоторыми малыми параметрами типа паразитных емкостей, малой взаимной индукции и т.п. Будут ли полученные дифференциальные уравнения правильно описывать работу устройства? Относительно простая ситуация возникает, если малый параметр входит в правые части дифференциальных уравнений. Тогда имеет место теорема, утверждающая, что решение будет аналитической функцией от малого параметра, и можно выписать ряд Тейлора по малому параметру, описывающий асимптотику решения. Это было сделано еще Пуанкаре. Гораздо более трудным является случай сингулярного возмущения, когда старшие производные умножаются на малый параметр. В этом случае приходится сравнивать дифференциальные уравнения, действующие в различных пространствах.

Рассмотрим большее из этих двух пространств и подмногообразие в нем, которое получится, если положить малый параметр равным нулю. Нидерландский физик Ван дер Пооль обнаружил, что движение фазовой точки в этом подмногообразии, индуцированное динамикой в большем пространстве,

может оказаться разрывным, и нашел уравнение второго порядка, в котором имеется разрывный предельный цикл. Такая ситуация возникала в уравнениях лампового генератора. Лев Семенович Понтрягин совместно с Евгением Фроловичем Мищенко нашли асимптотику решения дифференциального уравнения по малому параметру в окрестности многомерного разрывного предельного цикла. Соответствующее разложение существенно отличалось от тейлоровского. Тем самым они не только доказали, что предельное поведение системы определяется разрывным предельным циклом, но и вычислили точность приближения допредельной системы к пределу. Впоследствии Е.Ф. Мищенко вместе со своим учеником Николаем Христовичем Розовым вычислили полный асимптотический ряд по малому параметру в окрестности разрывного предельного цикла.

Одним из самых известных достижений Понтрягина является *принцип максимума Понтрягина*. Поучительна история его создания. Для изучения технической проблемы и для построения адекватной математической модели Лев Семенович постоянно заслушивал на своем семинаре доклады инженеров и специалистов в области теории автоматического регулирования. На его семинаре выступали Фельдбаум, Розоноер, Лернер и многие, многие другие ученые.

Часто приходится сталкиваться с весьма странным взглядом представителей прикладных наук на вопросы применения математики. По их мнению, математика – это что-то вроде набора готовых рецептов: теорий, математических фактов, теорем... На математиков они смотрят как на своего рода библиотекарей, которые знают, где можно найти подходящий математический результат. На самом же деле создание серьезной математической модели – это всегда творческая задача, которая требует новых математических идей, новых теорем, а иногда и совершенно новых математических понятий, требующих изучения. Роль профессионала-математика в этом процессе неоценима. Более того, люди, не обладающие должной математической квалификацией, при попытках задать вопрос, который их интересует, не в состоянии сформулировать его в точной математической форме. Кроме того, формулировка точной математической задачи подразумевает одновременный подсознательный поиск математического аппарата, пригодного для решения этой задачи. Именно поэтому так плодотворен оказывается союз математиков и специалистов в других конкретных науках.

Осознание и обработка высказанных и подразумеваемых докладчиками концепций явились фундаментом, на котором Л.С. Понтрягин был построена математическая *теория оптимальных процессов*. И самым главным явилось прозрение того окончательного результата, который надо было доказать. Такого рода даром прозрения Лев Семенович Понтрягин обладал в высочайшей степени.

После того, как принцип максимума был доказан, он вызвал мощный резонанс в научных кругах. Ученые, работающие в самых различных областях знания, начали активно применять принцип максимума для отыскания режимов оптимального функционирования интересующих их объектов. При этом поневоле приходилось формулировать задачу в форме управляемой системы дифференциальных уравнений. Таким образом, принцип максимума Понтрягина стал как бы моделью для построения моделей в различных конкретных науках.

Не могла не возникнуть и противоположная реакция: волна критических замечаний, имевших целью принизить значение принципа максимума и предотвратить его переоценку в научных кругах. С одной стороны, некоторые математики говорили, что принцип максимума – это всего лишь модификация известных классических конструкций вариационного исчисления: правила множителей Лагранжа и условия оптимальности Вейерштрасса. При этом сознательно или полусознательно упускалось из вида, что эти классические конструкции применимы только тогда, когда управление меняется в открытом множестве (в топологическом значении этого слова). А сила принципа максимума в том и состоит, что он работает независимо от того, где меняется управление. С другой стороны, представители инженерных наук критиковали принцип максимума за концепцию мгновенного переключения, нереальную, по их мнению, с точки зрения практической реализации. Для того, чтобы справиться с этим возражением, пришлось доказать серию теорем об асимптотическом приближении решений системы, в которой переключение занимает малый отрезок времени (в других вариантах: осуществляется в случайные моменты времени в окрестности точек переключения или

же осуществляется с запаздыванием) к решениям системы с мгновенным переключением. Сейчас со времени создания принципа максимума прошло полвека, и за этот достаточно длительный период он с блеском продемонстрировал свое как теоретическое, так и прикладное значение.

Последние годы своей жизни Л.С. Понтрягин занимался теорией *дифференциальных игр*, к созданию которой он имел прямое отношение. Теория дифференциальных игр описывает математические модели конфликтных ситуаций. Одним из самых ярких достижений Л.С. Понтрягина в этой области является создание метода альтернированного интеграла Понтрягина — красивой абстрактной конструкции, использующей операцию геометрической разности Минковского. С помощью этой конструкции удалось явно описать области, для начальных точек которых один из конфликтующих объектов может догнать другого.

Основную теорему теории дифференциальных игр — теорему о седловой точке — доказал другой выдающийся специалист в области математического моделирования, Николай Николаевич Красовский. Для доказательства пришлось ввести далеко идущее обобщение понятия решения управляемых дифференциальных уравнений с произвольной разрывной правой частью. Впрочем, такого рода обобщенные решения вполне естественны с прикладной точки зрения, так как учитывают реальную дискретность управляющих воздействий.

## 2. Управления с накоплением переключений

В 1961 году на первом конгрессе IFAC в Москве, на том самом конгрессе, где Л.С. Понтрягин делал доклад о принципе максимума, выступил английский инженер и математик А.Т. Фуллер. Темой его доклада был простенький конкретный пример. Требовалось минимизировать среднеквадратичное отклонение точки от начала координат при условии, что эта точка движется без трения по прямой, подчиняясь закону Ньютона, под влиянием произвольно выбираемой силы, по модулю не превосходящей единицы. Фуллера интересовал вопрос, как следует выбирать критерий оптимальности, который надо минимизировать, для того, чтобы наиболее успешно стабилизировать управляемый объект.

Как известно, если бы в задаче, рассмотренной Фуллером, функционалом служило время прихода управляемой точки в начало координат, то управление содержало бы не более одной точки переключения. Надо было бы сначала максимально разогнаться по направлению к началу координат и далее начать с максимальной интенсивностью тормозить. Момент переключения с разгона на торможение надо было бы выбирать с тем расчетом, чтобы точка остановилась точно в начале координат. Однако выяснилось, что если критерием оптимальности выбрано среднеквадратичное отклонение, то такая стратегия уже не оптимальна. Начать торможение следует чуть позже. В результате точка проскочит мимо начала координат и остановится с другой его стороны. После этого надо повторить разгон и торможение и вновь проскочить мимо начала координат, но уже на меньшее расстояние. Этот процесс следует повторить бесконечное число раз, причем точки максимального отклонения от начала координат и времена между последовательными остановками должны образовывать сходящуюся геометрическую прогрессию. В результате управляемая точка попадает в начало координат за конечное время, с бесконечным числом переключения управления. И это единственное и точное решение задачи Фуллера. Подобное поведение управления получило название «chattering».

Поначалу математический мир отнесся к примеру Фуллера как к любопытной патологии, и его работа на долгое время была забыта. Но впоследствии, в работах Михаила Ильича Зеликина и его ученика Владимира Федоровича Борисова, было показано, что феномен Фуллера для нелинейных многомерных управляемых систем, соответствующих задачам управления механическими системами, является типичным. Были найдены точные условия, при которых все фазовое пространство расслаивалось на двумерные слои, и картина фазовых траекторий в каждом из этих слоев была эквивалентна фазовой картине в задаче Фуллера. Таким оказался синтез оптимальных траекторий во многих задачах робототехники, в задачах управления вращением твердого тела, в ряде задач космической навигации, в электротехнике и пр.



Разумеется, все эти модели, как и любая математическая модель, соответствовали некоторой идеализации, но именно в этой идеальной постановке было найдено точное решение задачи. Это решение давало определенную ориентировку, показывало, на что можно рассчитывать в реальной ситуации, делало возможным предварительные оценки.

После появления работ М.И. Зеликина по chattering-режимам в механических управляемых системах были высказаны критические возражения, подобные тем, которые высказывались по поводу принципа максимума Понтрягина: как практически реализовать бесконечное число переключений за конечное время при управлении реальным механическим объектом? Тогда М.И. Зеликин и Л.Ф. Зеликина доказали теорему об аппроксимации, смысл которой заключается в следующем. Если в задаче с оптимальным chattering-режимом совершить  $N$  переключений вместо бесконечного их числа, то отклонение функционала от его минимального значения оценивается величиной  $Ae^{-\alpha N}$ , где  $A$  и  $\alpha$  — положительные константы, зависящие только от данной конкретной задачи.

Эта теорема была применена М.И. Зеликиным и Л.Ф. Зеликиной к задаче нахождения точных констант в неравенствах, оценивающих производные произвольной функции через норму самой этой функции и норму ее производных более высокого порядка. Такого рода неравенства представляют собой мощный математический аппарат для доказательства ряда важных результатов, и знание точных констант в них (которые называются константами типа Колмогорова) насущно необходимо для математических целей. Оказалось, что в ряде случаев те функции, на которых достигаются точные константы, являются chattering-решениями некоторых конкретных экстремальных задач. Вышеупомянутая теорема дала возможность вычислять константы типа Колмогорова с произвольной степенью точности. При этом экспоненциальная оценка в рассматриваемом случае приводила к тому, что при одном переключении получается один верный знак после запятой, при двух переключениях — два верных знака и т.д.

Следует отметить, что теоремы о chattering-режимах не могли быть получены только при непосредственном применении принципа максимума Понтрягина. Для доказательств потребовалась нетривиальная математическая техника. Дело в том, что в точках накопления переключений система дифференциальных уравнений принципа максимума Понтрягина имеет разрыв довольно сложного типа; ее решения не имеют ни одного сколь угодно малого интервала непрерывности, примыкающего к точке накопления переключений. Поэтому пришлось применять процедуру разрешения особенности отображения Пуанкаре поверхности переключения на себя и доказывать существование гиперболических особых точек у системы, полученной после разрешения особенности.

На первый взгляд может показаться, что наличие бесконечного числа точек переключения не имеет никакого отношения к природным процессам и является лишь артефактом моделирования. Но ведь каждый неоднократно наблюдал падающие на пол предметы, которые отскакивают так, что по мере приближения остановки эти отскоки учащаются. Для единообразия стилистики статьи рассмотрим простенькую математическую модель.

Рассмотрим две параллельные стенки, движущиеся навстречу друг другу с постоянной скоростью, и упругий шарик, который прыгает между этими стенками, отражаясь от них. Предположим, что скорость шарика мгновенно меняет знак в момент соударения, оставаясь по абсолютной величине неизменной. Тогда этот шарик совершит бесконечное число отражений к тому моменту, когда он окажется зажатым между стенками. Эта ситуация знакома каждому, кто останавливал шарик для пинг-понга, пытаясь прижать его к столу ракеткой. Реальный шарик совершает конечное (хотя и очень большое) число отражений, поскольку сам удар длится ненулевое время. Чем короче время удара, тем большим будет число отражений. В теоретическом случае мгновенного удара число отражений становится бесконечным на конечном интервале времени.

Забавно, что почти та же ситуация была промоделирована Энрико Ферми, Джоном Паста и Станиславом Уламом в середине 50-х годов в Лос Аламосе на первой большой (по масштабам того времени) вычислительной машине MANIAC. Им хотелось использовать MANIAC в мирных целях в промежутках между вычислениями, связанными с созданием водородной бомбы. Кстати, тогда же,

в другой серии вычислений они экспериментально обнаружили, но не смогли объяснить солитоноподобное поведение цепочки нелинейных осцилляторов.

Ферми, Паста и Улам решили проверить идею Ферми, пытавшегося объяснить, откуда в космическом пространстве берутся частицы, обладающие огромной кинетической энергией. По мысли Ферми, накопление энергии могло происходить от большого числа столкновений частицы с различными галактиками. Столкновение с галактикой, движущейся приблизительно в том же направлении, что и частица, имеет гораздо меньшую вероятность, нежели столкновение с движущейся навстречу галактикой. Но при встречном столкновении энергия частицы после отражения должна возрасти. Достаточно большое число таких столкновений и может породить частицы огромной энергии. Галактики как бы играют космической частицей в пинг-понг. Ферми, Паста и Улам проделали серию вычислительных экспериментов, моделируя движение частицы между двумя периодически движущимися стенками при идеально упругом отражении от стенок. Надо признать, что в этих экспериментах нарастание энергии не наблюдалось. В этом контексте имеет смысл упомянуть недавние работы Пустыльниковца, в которых утверждается, что при релятивистском отражении энергия должна нарастать. Поэтому в принципе идея Ферми может быть спасена.

Вся эта история показывает, какое важное значение имеет теоретическая модель. Ее слабости или отсутствие делают ученого слепым и лишают его плодов своего труда даже при гениально задуманных и блестяще осуществленных экспериментах.

### 3. Математическое моделирование природных процессов

Расскажем немного о важном общественном движении против проекта поворота северных и сибирских рек на юг, которое поднялось в СССР во второй половине 80-х годов. Идея поворота рек начала набирать силу еще в 30-х годах. Мысль была примитивная. На юге страны много солнца, много свободной рабочей силы, но мало воды, на Севере слишком много воды и мало солнца. Коль скоро мы не в силах дать больше солнца Северу, дадим больше воды Югу. Повернем северные реки вспять!

Идея долгое время жила в латентном состоянии. В 1933 г. на специальной сессии АН «Социалистическая реконструкция и освоение Волго-Каспийского бассейна» Г.М. Кржижановский сформулировал принципы территориального перераспределения водных ресурсов Европейской части РСФСР. В конце 30-х гг. в соответствии с принятыми правительством решениями началось строительство водохранилищ на Верхней Волге. Война задержала эти работы. На 50-е годы приходится пик работ по реализации программы зарегулирования стока Волги. На майском (1960 г.) пленуме ЦК КПСС была принята программа широкого развития мелиорации земель, которая придала идее переброски силу закона. 24 июля 1970 г. было принято постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР под номером 612 «О перспективах развития мелиорации земель, регулирования и перераспределения стока рек в 1971 – 1985 гг.». В нем была объявлена первоочередная необходимость осуществления переброски 25 кубокилометров воды в год к 1985 году.

На основании этого постановления институт Союзгипроводхоз им. Алексеевского Министерства водного хозяйства (Минводхоза) СССР получил техническое задание от 21 сентября 1973 г. на разработку технико-экономического обоснования (ТЭО) переброски части стока северных и сибирских рек на юг. В 1976 г. Союзгипроводхоз назначают генеральным проектировщиком проектов переброски. Эти разработки были включены в «Основные направления развития народного хозяйства СССР на 1976 – 1980 гг.» и закреплены решениями XXV съезда КПСС. С 1978 г. название института Союзгипроводхоз было изменено на новое: «Головной проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт по переброске и распределению вод северных и сибирских рек – Союзгипроводхоз».

Нормативный срок окупаемости проектов считался равным 8,5 лет. Любой проект считался абсолютно нерентабельным, если срок его окупаемости превосходил 11 лет. Но сроки окупаемости проектов переброски, несмотря на все натяжки, связанные с гипотетически фантастическими урожаями на поливных землях, никак не могли втиснуться в столь жесткие рамки. Тогда был придуман

ловкий ход. Если уровень Каспийского моря сильно упадет (а это, по мнению перебросчиков, неминуемо должно было случиться из-за разбора воды на орошение), то погибнет все каспийское стадо осетровых, и страна лишится валютных доходов от экспорта осетрины и черной икры. Величина этих доходов и послужила той гирей, которая помогла, с грехом пополам, дотянуть срок окупаемости до вожделенных одиннадцати лет. Таким образом, все экономическое обоснование проекта висело на прогнозах падения уровня Каспийского моря. Каспийское море – это таинственнейший объект, о котором стоит сказать несколько слов особо.

Каспийское море является крупнейшим на Земле водоемом, не соединенным с Мировым океаном, и его уровень сильно меняется в зависимости от климатических условий. Геологические данные свидетельствуют о том, что в истории бывали периоды, когда море доходило до современного Волгограда. С другой стороны, довольно глубоко под водой имеются следы деятельности человека, которые показывают, что бывали периоды, когда море стояла чуть ли не на 12 метров ниже современного уровня. Исследование Каспийского моря, как и многое в России, было начато Петром Великим, который, в частности, основал в Баку первый водомерный пост для регулярных наблюдений за уровнем Каспийского моря. Кстати сказать, именно за работы по изучению Каспия Петр, первым из русских, был избран членом Французской Академии наук.

Наблюдения за уровнем Каспийского моря неоднократно прерывались и возобновлялись по историческим причинам. Относительно надежный, непрекращающийся ряд наблюдений начинается с 60-х годов XIX века. С этого времени море довольно долго колебалось в районе уровня –26 м Б. С., то есть на 26 м ниже уровня Мирового океана, который измеряется по водомерному посту в Балтийском море (отсюда и сокращение Б. С. – Балтийская Система). В результате катастрофически маловодного восьмилетия 1933–1940 гг. уровень моря резко понизился до –27.5 м Б. С. и постепенно продолжал понижаться, особенно в период строительства каскада Волжских гидроэлектростанций. В 1978 г. уровень достиг отметки –29 м Б. С. и после этого начал повышаться. Фаза подъема уровня продолжается по настоящее время.

Резкое падение уровня Каспийского моря в течение 1933–1941 гг. привело к значительным ущербам в народном хозяйстве прикаспийского региона из-за необходимости перестройки коммунального и портового хозяйства, а также сооружений береговой и морской нефтедобычи. Это вызвало активизацию попыток долговременного прогнозирования колебаний уровня Каспийского моря. Литература, посвященная изучению и прогнозированию уровня режима Каспийского моря, насчитывает сотни наименований и отличается крайним разнообразием подходов и точек зрения.

Каспийское море — достаточно крупный водосборный объект. Его уровенный режим интегрирует в своем поведении самые разнообразные факторы: влияние локальных факторов на уровень моря незначительно, но зато в его поведении находят отражение все сколько-нибудь существенные глобальные климатические, гидрологические и гидрогеологические изменения. К настоящему времени накоплен большой опыт в изучении Каспийского моря – это и солидный экспериментальный материал, и большое число теоретических исследований.

Важность проблемы Каспийского моря обусловлена тем, что с положением уровня моря теснейшим образом связана организация портового и берегового хозяйства, вопросы строительства, нефтедобычи и т.д. Непредсказуемые изменения уровня моря приводят к многомиллионным затратам. По мнению ихтиологов, падение уровня моря ниже отметки –28.5 м Б. С. должно было неблагоприятно сказаться на положении стада осетровых (которое, впрочем, сейчас находится в самом плачевном состоянии, но не из-за изменения уровня моря, а из-за крайне неудовлетворительной экологической ситуации). С другой стороны, повышение уровня моря выше отметки –27 м приводит к затоплению уже освоенных берегов. Тем самым, надежный долговременный прогноз уровня режима Каспийского моря имеет большое народно-хозяйственное значение. Именно поэтому вопросам прогнозирования уровня Каспийского моря уделяется в гидрологии столь большое внимание.

Попытаемся популярно, но кратко описать наиболее существенные и перспективные подходы к проблеме прогнозирования уровня режима Каспийского моря.

### 3.1. Связь с солнечной активностью

Подход, связанный с изучением и использованием солнечно-земных связей, основан на установлении корреляции между солнечной активностью и уровнем Каспийского моря или между солнечной активностью и усредненным стоком Волги. Для характеристики солнечной активности обычно используются числа Вольфа, которые определяются как среднегодовое число солнечных пятен (с учетом их группировки и занимаемой ими площади).

Как известно, в динамике изменения чисел Вольфа отчетливо прослеживается 11-летний цикл. Есть еще и вековой цикл, но для сопоставления с режимом Каспия нужны были бы постоянные многовековые наблюдения уровня, а их нет! Чаще всего используется скользящее усреднение за 11 лет, которое сглаживает одиннадцатилетнюю составляющую колебаний чисел Вольфа. Непосредственная корреляционная связь солнечной активности с уровнем режимом Каспийского моря, естественно, оказалась незначимой, поскольку Каспийское море, как уже было сказано, интегрирует в своем поведении слишком много разнообразных факторов. Связь между солнечной активностью со сглаженным и усредненным стоком рек – это несколько более разумная гипотеза, хотя и здесь было бы слишком оптимистичным надеяться найти прямую корреляционную зависимость.

Следует заметить, что поиски корреляции между солнечной активностью и гидрологическими процессами вызывает скептическое, если не сказать насмешливое, отношение со стороны современных климатологов. Самым серьезным возражением против факта прямого влияния солнечной активности на климат является относительно малая (по сравнению с глобальными атмосферными процессами) энергетика такого влияния, а также отсутствие знаний о физическом механизме, объясняющем это влияние. На это есть контрвозражения: во-первых, при изучении достаточно сложных процессов (например, таких, которые происходят в биологических системах) выясняется, что низкоэнергетические, но насыщенные информацией влияния оказываются зачастую более значимы, чем высокоэнергетические. А во-вторых, что более важно, солнечные пятна на солнце возникают не сами по себе, а в результате определенных физических процессов, энергетическая емкость которых может быть намного больше, чем изменение энергии излучения в области пятен. Наличие пятен только информирует нас о наличии таких высокоэнергетических процессов, вызывающих возникновение этих пятен.

Что же касается отсутствия прямого физического механизма, объясняющего влияние солнечной активности на климат, то это не удивительно. Дело тут в достаточно сложной динамике, описываемой дифференциальными уравнениями (а может быть, и каким-нибудь другим, более сложным математическим аппаратом), а для описания этой динамики часто достаточно трудно, а может быть, и невозможно, найти наглядное механическое объяснение. Однако слабая корреляционная связь между солнечной активностью и гидрологическими процессами не означает, что солнечная активность не влияет на эти процессы. Напротив, имеются серьезные основания считать, что эти два процесса связаны друг с другом.

В качестве подтверждения можно привести прогноз уровня режима Каспийского моря, данный М.С. Эйгенсоном в 1957 году. Этот прогноз, сделанный только по связям с числами Вольфа, в общих чертах подтвердился. А именно, он предсказывал, что 1980–2000 годы будут годами высокого стояния уровня Каспийского моря, а к концу указанного периода его уровень достигнет отметок 30-х годов. Так и случилось. Таким образом, следует признать, что прогноз, учитывающий только числа Вольфа, отражает какие-то реальные черты интересующего нас явления. Следует отметить, что Эйгенсон в своем прогнозе считал, что цикл солнечной активности равен 11 годам. Однако относительно недавно было установлено, что солнечная активность характеризуется не только числами Вольфа, но и направлением вектора магнитного поля. В связи с этим цикл солнечной активности следует считать равным не 11, а 22 годам, так как каждые 11 лет происходит изменение направления магнитного поля пятен на противоположное. Учет этого обстоятельства может существенно улучшить результаты прогнозирования по рассматриваемой методике.

В последнее время к тем же идеям обратился Андрей Сергеевич Монин. Он рассмотрел упрощен-

ное движение системы, состоящей из трех тел: Солнца, Юпитера и Сатурна, пренебрегая остальными планетами, имеющими существенно меньшую массу. Упрощение состояло в предположении, что все эти три тела вращаются не по эллипсам, а по круговым орбитам вокруг общего центра тяжести. Тогда, в частности, Солнце вращается вокруг точки, расположенной от его центра на расстоянии примерно полтора солнечных диаметра. Период вращения Юпитера близок к 11 годам. Приливной волной внутри Солнца объясняется 11-летний цикл изменения чисел Вольфа (возможно, здесь и отражается результат физического процесса с высокой энергетикой, о котором мы говорили ранее). Период повторения расположений всех трех тел составляет приблизительно 120 лет, чем объясняется вековой цикл изменения чисел Вольфа. Андрей Сергеевич искал (и безуспешно) среди известных климатических рядов те, которые имели бы указанные периоды.

### 3.2. Связь с климатическими характеристиками

Непосредственным логическим продолжением «солнечного подхода» являются попытки учета других геокосмических связей. Такой подход, в частности, пропагандировал и проводил в жизнь И.В. Максимов и его ученики. Этот подход связан с довольно широким спектром идей. Одна из основных идей предполагает, что колебания климата европейской части России тесно связаны с изменениями характеристик течения Гольфстрим. Естественно, возникает вопрос о причинах изменений характеристик океанских течений.

Среди причин планетарного характера прежде всего следует назвать долгопериодичную составляющую океанских приливов (период движения линии узлов лунной орбиты равен приблизительно 18.6 года), а также изменения центробежной силы под влиянием нутации оси вращения Земли (период изменения потенциала соответствующей силы деформации, являющейся результатом биения 14-месячной и годовой волны, составляет примерно 6–7 лет). Отметим, что в колебаниях скорости и температуры Гольфстрима отчетливо прослеживается 19-летняя периодическая составляющая. Все эти факторы сопоставлялись в школе И.В. Максимова с изменением стока рек. Однако до сих пор этот подход развивался только на качественном уровне. По-настоящему актуальной, но трудной с математической точки зрения задачей является задача вычисления колебаний формы Мирового океана под воздействием вышеупомянутых сил, а также вычисление соответствующих флуктуаций основных течений – Гольфстрима, Куроисио и др., существенно влияющих на климат планеты.

### 3.3. Связь с атмосферной циркуляцией

Влияние в изменениях деятельности Мирового океана на климат осуществляется через атмосферу. Имеется большое количество прогнозов, в основе которых лежит учет атмосферных процессов планетарного характера. Наиболее существенный вклад здесь принадлежит Б.Л. Дзердзеевскому, Г.Я. Вангенгейму, А.А. Бирсу и др., которые разрабатывали теорию типов атмосферной циркуляции северного полушария и связывали с ней изменения в стоке рек, а через них прогнозировали изменение уровня Каспийского моря. В частности, в работах этих ученых показано, что преобладание циркуляции восточного типа приводит к аридизации (т.е. к сухости климата), в то время как меридиональный или, тем более, западный тип циркуляции приводит к увеличению увлажненности территории.

Наиболее полное выражение этот подход нашел в работах Клавдии Ивановны Смирновой, которая в течение многих лет успешно разрабатывала в Гидрометцентре оперативные и долгосрочные прогнозы уровня Каспийского моря. Нам удалось ее найти. Она была уволена на пенсию, судя по всему, не без помощи сотрудников Минводхоза, которым нужны были совсем другие прогнозы. Когда мы расспрашивали ее о методике прогнозирования, она смущенно говорила, что серьезной наукой она не пользовалась. Ее метод был больше похож на интуитивное угадывание, основанное на знаниях и огромном опыте. Она рассказывала, что все время находилась в напряжении, так как от ее прогнозов зависели хозяйственные решения. В случае неудачи (в сталинское время) она вполне могла попасть, как говорится, в места не столь отдаленные.

Сделала она и сверхдолгосрочный прогноз на 19 лет вперед. В связи с 19-летним периодом коле-



бания линии узлов лунной орбиты использовалось скользящее сглаживание с периодом 19 лет, чтобы сгладить вызванные этим периодом колебания. Метод был связан с установлением множественной корреляции изменения притока в Каспийское море с индексом атмосферной циркуляции (по Бирсу, по Вангенгейму, по Белинскому и т.д.) и с барическими полями атмосферы. При оценке вкладов барических полей брались наиболее характерные (в смысле циклонообразующей деятельности) точки – такие, как азорский максимум, исландский минимум и т.д. Учитывая эти факторы, Смирнова построила календарный прогноз с упреждением на 19 лет.

Прогноз К.И. Смирновой, выполненный в начале 70-х годов, оправдался с большой точностью. В этом прогнозе был предсказан перелом в ходе уровня Каспийского моря с падения на подъем в 1977 г. Расхождение прогнозных и реальных уровней отличаются всего лишь на величины порядка 30 см. Высокая точность прогноза К.И. Смирновой доказывает перспективность подходов, связанных с учетом атмосферной циркуляции и барических полей атмосферы. Забавно, что работник Института водных проблем АН СССР В.Е. Привальский критиковал прогноз Смирновой за расхождение на эти 30 см, в то время, когда его собственный прогноз, данный на гораздо более короткий период времени, разошелся с реальным ходом уровня более чем на метр.

### 3.4. Связь с тектоническими изменениями

Скажем о подходах, связанных с возможным влиянием литосферы на ход уровня Каспийского моря.

Подземная составляющая стока в Каспийское море считается обычно постоянной и малосущественной, порядка 5 кубокилометров в год (для сравнения, средний сток Волги составляет 250 кубокилометров в год). Подземный сток, в отличие, например, от стока рек, непосредственно не измеряется. Существует два стандартных объяснения причин колебания уровня моря. Одно – общепринятое, климатическое: изменение стока рек, интенсивности испарения и осадков. Второе – тектоническое: изменение формы чаши Каспийского моря под влиянием тектонических подвижек. Второй подход не доказан экспериментально и имеет небольшое число сторонников.

Совершенно другая, красивая тектоническая идея была предложена Вениамином Петровичем Мясниковым. Дело в том, что в порах почвы и горных пород ложа Каспийского моря содержится огромное количество влаги, в несколько раз превышающее общий объем самого Каспийского моря. Имеются некоторые основания полагать, что в земной коре иногда распространяются волны сжатия-растяжения, имеющие очень большой период, порядка десятилетий. Если так, то волна сжатия, дойдя до Каспийского моря, будет как из губки выжимать поровую влагу из земли в море, что существенно увеличит приходную составляющую водного баланса. Волна растяжения, наоборот, приведет к высасыванию воды из моря и, соответственно, к понижению его уровня.

Если бы удалось научиться рассчитывать и предсказывать такие волны сжатия-растяжения, то это дало бы эффективный метод предсказания тенденций хода уровня. Ясно, что чистой теорией упругости здесь не обойтись, так как скорость распространения волн в земной коре очень высока. Значит, надо учесть влияние магмы, имеющей, по-видимому, большую вязкость, и попробовать найти нечто вроде сейшевых волн в магме, которые могли бы инициировать долгопериодические колебания коры.

### 3.5. Периодические составляющие

В предыдущих пунктах уже говорилось о периодических процессах, по-видимому, влияющих на ход уровня Каспийского моря: 11-летний и вековой циклы солнечной активности, 19-летний цикл движения узлов лунной орбиты и т.д. Имеется ряд работ, авторы которых пытаются выделить соответствующие периодические составляющие в изменении уровня Каспийского моря и в тех или иных элементах его водного баланса (А.В. Шнитников, Л.С. Берг, Б.А. Шлямин. и др.). При этом если Берг и Шнитников исходили из а priori заданных периодов, то Шлямин исследовал спектральное разложение хода уровня и сопоставил получившиеся частоты с теми или иными периодами внешних воздействий. После такого анализа был составлен прогноз, довольно неплохо согласующийся с

последующим реальным поведением уровня.

Кажется весьма правдоподобным, что ход уровня (а лучше бы рассматривать процесс приращения объемов, учитывающих изменения площади водной поверхности) и в самом деле представляет собой некую почти периодическую функцию. Однако интерпретацию ее основных частот надо провозгласить не *a posteriori*, а учитывать их в процессе моделирования, что сблизило бы подход Шлямина с подходами Берга, Шнитникова и др. При этом следовало бы предварительно оценить сравнительную мощность тех или иных воздействий.

### 3.6. Нелинейные эффекты

Когда М.И. Зеликин и Л.Ф. Зеликина строили и изучали помесечные графики колебания уровня Каспийского моря, они обратили внимание на то, что море часто стоит на некоторых избранных, или, как их стали называть, «любимых» уровнях. Было предположено, что отметки, соответствующие уровням моря, при которых площадь мелководий максимальна, должны быть устойчивыми состояниями, так как подъем уровня выше этих отметок вызовет резкое увеличение испаряющей площади, а следовательно, и объема испарившейся воды, а спад уровня, наоборот, – резкое сокращение объема испарения. Была выдвинута гипотеза, что уравнения, описывающие динамику уровня, должны быть нелинейными, и что нелинейность влечет за собой сложное асимптотическое поведение: случайное блуждание между любимыми уровнями.

Эта гипотеза получила свое частичное обоснование в работе Александра Сергеевича Мищенко. Им было доказано, что решение дифференциального стохастического уравнения, описывающего водный баланс Каспийского моря с кубической нелинейностью, имеет не более трех стационарных решений, два из которых устойчивы, а третье неустойчиво. Любое решение дифференциального уравнения стремится к одному из устойчивых решений. В последнее время мы выяснили, что если степень многочлена больше трех, то дифференциальное стохастическое уравнение может иметь сколь угодно много устойчивых стационарных решений.

В кругу вышеизложенных идей Вячеславом Иосифовичем Найденовым была выполнена работа, в которой показано, что учет тепловых процессов, происходящих в водоеме при испарении, приводит к появлению нелинейности в уравнении водного баланса. Подход, связанный с учетом нелинейных эффектов, представляется перспективным при построении методики прогнозирования уровня Каспийского моря. При этом для уточнения характера нелинейности процесса испарения на мелководье хорошо было бы учесть явление многократного отражения луча солнца от дна и поверхности, которое с качественной точки зрения объясняет быстрый прогрев воды на мелководье и соответствующее увеличение испарения. Однако количественные аспекты этого явления не изучены и требуют серьезной проработки.

### 3.7. Несостоятельность линейной модели

Для прогноза глобального изменения климата необходимо выяснить причины и динамику изменения климата в предшествующие климатические эпохи. По расположению террас на береговой линии палеоклиматологи и гидрологи реконструируют эпохи увлажнения палеоклимата. Такие работы, например, проводились для озера Виктория (Geits, Diesenorf), а также частично и для Каспийского моря. В связи с этим при прогнозировании уровня замкнутых водоемов (например, Каспийского моря) очень важными кажутся вопросы взаимодействия моря и берегов, которые приводят к изменению морфометрии.

Как уже говорилось, отметки, соответствующие уровню моря, при которых площадь мелководий максимальна, должны быть устойчивыми состояниями. С другой стороны, длительное стояние уровня на одних и тех же отметках приводит к террасированию берегов. Тем самым эти два процесса должны усиливать друг друга. Для прогноза глобального изменения уровня представляется важным разработать модель поведения уровня замкнутого водоема за длительный период времени, в которой помимо уравнения водного баланса, учитывающего морфометрию озера, учитывалась бы также и зависимость изменения морфометрии под влиянием изменения уровня режима.

К сожалению, начиная с середины 70-х годов в гидрологии наметился процесс унификации научных мнений. Все перечисленные выше идеи и подходы стали рассматриваться как антинаучные, а научными были объявлены лишь водобалансовые стохастические методы.

Первыми работами по прогнозированию уровня Каспийского моря, использующими стохастические методы, были работы Сергея Николаевича Крицкого и Михаила Федоровича Менкеля. В этих работах предполагалось, что динамика изменения уровня Каспийского моря описывается линейным разностным уравнением водного баланса. При этом считалось, что сток рек и видимое испарение (испарение минус осадки, приходящиеся на единицу площади водной поверхности) – основные элементы, определяющие динамику уровня Каспийского моря, – суть стационарные случайные процессы. На всем диапазоне рассматриваемых глубин постулировалась линейная зависимость площади зеркала от наполнения моря.

Впоследствии эта методика развивалась в работах сотрудников Института водных проблем АН СССР – Даниила Яковлевича Ратковича, Виктора Евсеевича Привальского и др. – и была внедрена в практику Союзгипроводхозом и Министерством водного хозяйства СССР, где этим занимался целый отдел в Союзгипроводхозе. Именно эта методика была положена в основу обоснования проектов переброски северных рек в Каспийское море, так как прогнозы изменения уровня Каспийского моря, построенные по этой методике, предсказывали неуклонное падение уровня Каспийского моря, которое уже к 1990 г. по прогнозу должно было упасть до отметки –30 м Б.С.

Суть водобалансового прогноза, разрабатываемого в научных учреждениях Минводхоза, сводилась к следующему. Уравнение водного баланса после усреднения коэффициентов превращалось в линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Очевидно, что решение такого уравнения стремится к постоянной, которая (не вполне удачно) называется уровнем тяготения. Свободный член этого уравнения соответствовал притоку в Каспийское море, в основном, из Волги. Если теперь из этого свободного члена вычитать постоянно растущие объемы воды, забираемой из Волги на орошение, то уровень тяготения будет убывать, и мы получим прогноз падения уровня Каспийского моря. Вот и вся недолга! Оставалось навести тень на плетень. В соответствии с традициями Минводхоза простенькая априорная идея была закамouflирована под сложную высоконаучную теорию. Для создания математического антуража была привлечена теория уравнений, коэффициентами которых служили стационарные случайные процессы, использовалась риторика теории Колмогорова экстраполяции стационарных случайных процессов, оценки дисперсии и т.д.

Следует повторить, что начиная с 1979 г. уровень Каспийского моря начал неуклонно повышаться, вопреки прогнозам его падения. Этот факт не очень смущал перебросчиков: они говорили, что это всего лишь случайная флуктуация, после которой вновь начнется фаза падения уровня.

Сразу же заметим, что использование теории уравнений со стационарными коэффициентами в этой методике содержало грубейшие математические ошибки. Одна из них: считалось, что математическое ожидание решения есть решение уравнения с усредненными коэффициентами. Так было бы, если бы математическое ожидание произведения было равно произведению математических ожиданий сомножителей. Для людей, далеких от математики, скажем, что это примерно то же самое, что сказать, будто синус произведения равен произведению синусов. В материалах комиссии Яншина М.И. Зеликин привел пример, когда решение уравнения с усредненными коэффициентами постоянно, в то время, как математическое ожидание настоящего решения неограниченно растет. Предположения о стационарности стока и испарения слишком грубы и не соответствуют реальным процессам, неоправданно использование упрощенной линейной модели явления. Следует добавить, что слой видимого испарения очень плохо поддается непосредственному измерению. Поэтому в данной методике он и не измеряется, а вычисляется как замыкающий член линейного уравнения водного баланса. В результате он играет роль подгоночного параметра, и уравнение водного баланса автоматически оказывается выполненным.

Л.Ф. Зеликина, М.И. Зеликин и его аспирант из Германии Йорг Шульце организовали большую серию вычислительных экспериментов. Дело в том, что на любое несоответствие реального

поведения моря с прогнозом у перебросчиков был стандартный ответ: «Произошло маловероятное событие». Тогда было сделано следующее: минводхозовская методика прогнозирования была применена к каждому второму году из всей известной истории колебаний уровня Каспийского моря. То есть вычислялся прогноз хода уровня моря, исходя из данных за предыдущие годы, а потом вычислялось, какую вероятность имело бы в полученном прогнозе действительно реализовавшееся в последующие годы событие. Результат получился потрясающим. Чуть ли не в половине случаев вероятность оказалась крайне малой: часто всего несколько сотых, а иногда и меньше одной десяти-тысячной! Получилось, что маловероятные события должны были происходить постоянно, а тогда какие же они «маловероятные»! Йорг Шульце привез из Германии карманную программируемую вычислительную машинку фирмы Sharp, величиной с плитку шоколада (большая редкость для того времени). Он запрограммировал минводхозовскую методику прогнозирования и поражал наших противников, мгновенно давая ответ на вопрос, каков будет прогноз для таких-то и таких-то лет. Надо сказать, что за разработку этой методики прогнозирования соответствующий отдел Союзгипроводхоза был выдвинут на Государственную премию. Результатом наших усилий было то, что премию им не дали.

При изучении всех вышеописанных подходов возникает ощущение, что в каждом из них имеется разумное зерно, и каждый ухватывает одну из характерных черт процесса. Но объединение всех подходов в единую теорию привело бы к очень сложной модели, которую вряд ли удалось бы удовлетворительно исследовать. К тому же не было бы уверенности, что учтены все существенные составляющие изучаемого явления. Создается впечатление, что Каспийское море сравнимо по своей сложности с живым организмом. Это не значит, что прогноз его поведения принципиально невозможен. Можно же делать иногда довольно уверенные предсказания, касающиеся реакции не только живого, а даже и разумного существа на те или иные ситуации. Надо только понимать уровень условности такого прогноза, но не в смысле теории вероятностей, как это часто пытаются делать. Ведь теория вероятностей описывает, в конце концов, лишь свойства симметрии, которой здесь нет. Условность надо понимать скорее в смысле осознания того несомненного факта, что мы заведомо не обладаем полным знанием причин, которые в принципе могут оказать решающее влияние на рассматриваемый процесс. Тем самым исход не предрешен фатально, как некий незыблемый закон природы.

С научными прогнозами естественных явлений надо быть очень осторожными. Даже такой великий физик и математик, как Христиан Гюйгенс, сел однажды в лужу со своим прогнозом. Он предсказал: «Научно доказано, что поверхность Юпитера может быть засеяна коноплей, столь необходимой для нужд голландского морского флота». Гюйгенс руководствовался астрологическими соображениями: ведь Юпитер считался покровителем моряков. Предсказание Гюйгенса можно рассматривать как чудачество, поскольку оно не принесло вреда ни Юпитеру, ни человечеству, ни даже голландскому морскому флоту. Совсем не так обстоит дело с прогнозами поведения Каспийского моря.

Люди давно знали, что уровень Каспийского моря подвержен сильным непредсказуемым колебаниям и старались приспособиться к его поведению. В средние века Шах решил проблему жестоко, но просто. Он приказал отрубать голову любому, кто построит свой дом в определенной им полосе опасности затопления вдоль побережья Каспийского моря. Видимо, он прекрасно понимал, что человеческая жадность – стремление захватить удобные пустующие земли – может привести к трагедии. А вот другой пример: стены Дербента начинаются в горах, спускаются к берегу Каспийского моря и прослеживаются довольно далеко под уровнем моря. Таким образом, когда уровень моря менялся (все равно, повышаясь или понижаясь), город оставался окруженным стеной, которая тянулась вплоть до берега моря.

Лишь в наш «просвещенный» век, едва море отступило, как тут же началось хозяйственное освоение его осушенных берегов. Были возведены жилые и производственные здания, дома отдыха и санатории, проложены дороги и другие коммуникации, построены нефтехранилища. Все это

строительство опиралось на «научно обоснованные» прогнозы дальнейшего понижения уровня моря. Последовавший затем подъем уровня привел к огромным материальным потерям. В интересах Минводхоза было отстаивать правильность прогнозов падения уровня Каспийского моря еще и потому, что признание этих прогнозов ошибочными означало официальное признание того факта, что именно они нанесли немалый материальный ущерб стране.

*Мищенко Евгений Фролович (1922–2010),  
академик РАН, Математический институт  
им. В.А. Стеклова РАН, лауреат  
Демидовской премии.*

*Мищенко Александр Сергеевич,  
профессор Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова, Математический институт  
им. В.А. Стеклова РАН, д.ф.-м.н.*

*E-mail:*

*Зеликин Михаил Ильич,  
член-корреспондент РАН,  
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,  
заместитель заведующего кафедрой  
Общих проблем управления  
механико-математического факультета  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова.*

*E-mail: mzelikin@mtu-net.ru*



**Улучшаемые пиксельные оценки мер плоских множеств как  
методический подход к введению понятия «площадь фигуры»  
в курсе геометрии. Часть 1**

*В. Ю. Бодряков, А. А. Быков*

В работе сформулирован подход к получению пиксельной оценки меры плоского множества (площади фигуры) с оценкой ее погрешности. Подход представляется авторами как современный альтернативный методический подход к введению понятия «Площадь фигуры» в систематическом курсе геометрии основной общей школы. Подход соотнобразуется с когнитивными паттернами современных «ИТ-ориентированных» обучающихся и удачно сочетает в себе глубокие теоретико-множественные основания и простые и наглядные геометрические образы.

Развитый подход может быть натурно реализован в форме лабораторных работ по математике как в «ручном» режиме (на обычной клетчатой бумаге), так и с помощью соответствующих компьютерных процедур (на экране монитора). Подход прост в объяснении и применении, и с успехом используется авторами при обучении современных ИТ-ориентированных студентов-математиков педагогического вуза и студентов колледжа в рамках согласованных курсов математики и информатики.

В первой части работы дан анализ подходов учебников по геометрии различных авторских коллективов к реализации темы «Площадь фигуры» и сопряженных с ней, разрабатываются и апробируются основы построения улучшаемых пиксельных оценок площадей плоских фигур. Показано, что статистическим методом может быть «экспериментально» наглядно подтверждена справедливость ключевой для дальнейшего изложения формулы площади квадрата  $S_{a \times a} = a^2$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ .

**Основные понятия и обозначения**

Пиксель — единичный (квадратный) экраннй элемент: 1 пкс — единичная длина стороны единичного пикселя; 1 пкс<sup>2</sup> — единичная площадь единичного пикселя.

Целочисленный многоугольник  $P$  — фигура, составленная из целого числа пикселей. Фигура  $P$  имеет ломаную границу  $L$  с целочисленной (в пкс) длиной и целочисленной (в пкс<sup>2</sup>) площадью  $S$ .

$a, b$  — стороны прямоугольника, прямоугольного треугольника или полуоси эллипса,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \geq 0$ ;

$a_1$  — сторона единичного квадрата — пикселя;  $a_1 = 1$  пкс;

$P_{\text{inn}}$  — внутренний вписанный целочисленный многоугольник, его целочисленная (в пкс<sup>2</sup>) площадь  $S_{\text{inn}}$  равна внутренней оценке меры  $\Phi$ ;

$P_{\text{out}}$  — внешний описанный целочисленный многоугольник, его целочисленная (в пкс<sup>2</sup>) площадь  $S_{\text{out}}$  равна внешней оценке меры  $\Phi$ ;

$R$  — радиус круга;

$S$  — площадь фигуры;

$S_{a \times a}$  — площадь квадрата со стороной  $a$ ;

$S_{1 \times 1}$  — площадь единичного квадрата — пикселя;  $S_{1 \times 1} = 1$  пкс<sup>2</sup>;

$\delta S$  — погрешность в площади фигуры  $S$ ;

$\Phi$  — точечная фигура на плоскости оцениваемой меры (площади).

## Введение. Анализ подходов разных учебников

Адекватные оценки мер плоских множеств (точечных множеств, заданных на координатной плоскости), т. е. определение площадей и длин кривых необходимы, в частности, для решения задач аналитического распознавания и классификации образов реальных объектов. В отличие от распознавания образов с помощью искусственных нейронных сетей, возможности которых ограничены полнотой обучающих выборок и существующей настройкой самой сети, для аналитического распознавания требуется построение математических моделей изображений распознаваемых объектов. Эти модели могут включать в себя «измерения» длин кривых и площадей фигур как геометрических признаков изображений распознаваемых объектов. На развитие математических методов распознавания образов направлены усилия разработчиков ИТ-технологий; не менее важной задачей является обучение этим методам студентов, обучающимся по направлениям предметной области «математика и информатика» (см., например, [1–4] и др.), а также школьников — будущих исследователей и инженеров цифровой России. Несомненно, что технологии, связанные с распознаванием образов и техническим зрением, принадлежат к числу цифровых технологий, которые должны осваиваться обучающимися при реализации национального Проекта «Кадры цифровой экономики», входящего в национальную Программу «Цифровая экономика Российской Федерации». Помимо Технологии двумя другими образовательными областями, усиленное изучение которых предписывается при подготовке кадров цифровой экономики, являются Математика и Информатика [<https://digital.gov.ru/uploaded/files/programma.pdf>].

Как показывает наш педагогический опыт обучения математике студентов педагогического университета и студентов колледжа различных направлений подготовки, тема измерения длин кривых и площадей плоских фигур является одной из наиболее трудных для обучающихся. Об этом же свидетельствует анализ педагогических практик наших студентов — будущих школьных учителей математики. Корень проблем лежит в слабой усвоенности фундаментальных геометрических представлений в период начала изучения систематического курса геометрии (с 7 кл.). Во многом эти затруднения определяются несоответствием когнитивных паттернов современных выраженно ИТ-ориентированных молодых людей, и паттернов, «заложенных» в наиболее используемые в школах РФ учебники по геометрии, например, коллектива авторов под руководством Атанасяна [5, 6]. В «геометрии по Атанасяну» не подразумевается использование каких-либо современных компьютерных систем динамической геометрии (DGS), таких как Cabri Géomètre, Математический конструктор, Живая математика, GeoGebra, Crocodile, Cinderella, GeoNext, Geometr's Sketchpad и др. Это можно объяснить тем, что содержательная и методологическая основа современных российских учебников была заложена еще в 1980-х годах и с тех пор фактически не менялась. Тогда как кардинально изменились когнитивные возможности и потребности сегодняшних учащихся, для которых, например, скрупулезный разбор текстового доказательства геометрического утверждения по учебнику — почти непосильная задача. Совершенно очевидна необходимость искать новые современные эффективные пути обучения геометрии нынешних школьников; эта проблема актуальна не только для отечественной, но и для зарубежной системы обучения геометрии [7, 8]. Необходимо также искать и апробировать новые подходы к обучению геометрии будущих учителей математики.

Использования систем DGS выглядит перспективно, однако рядом авторов высказываются опасения, что увлечение экспериментальным методом в геометрии может нанести вред формированию готовности учащихся основной школы к использованию дедуктивного метода для обоснования истинности геометрических утверждений, утрате потребности в его использовании, и утрате соответствующих умений. Интерес обучающихся к экспериментальному открытию геометрических фактов и убедительность наглядно-эмпирического их подтверждения, как показали исследования, оказались так высоки, что появились реальные опасения, что систематическое дедуктивное освоение геометрии будет «заброшено» в пользу экспериментального подхода к математическому образованию. Данная ситуация охарактеризована многими зарубежными исследователями как «экспериментально-

теоретический разрыв» в обучении геометрии. В 1990-х эта проблема вызвала бурную дискуссию среди западных ученых, занимавшихся проблемами использования DGS в обучении. Задача определения оптимального соотношения и поиск способов совмещения экспериментальных и теоретических методов в образовательном процессе изучения геометрии является и сегодня одной из наиболее насущных [7–13].

Возвращаясь к проблеме измерения длин и площадей, отметим, что «по Атанасян» [5] измерять длины отрезков предполагается посредством сравнения отрезка неизвестной длины с отрезком с длиной, принятой за единицу (масштабным отрезком). В качестве такового в Главе I авторы предлагают рассматривать металлический эталон метра из французского Международного бюро мер и весов. Меньшие расстояния предлагается измерять в производных единицах — сантиметрах или миллиметрах, большие — в километрах. «... Если масштабный отрезок не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на десять равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке ...» [5], и т. д. Фактически, предлагается определение длины методом последовательных приближений с оценкой по избытку и недостатку.

В Главе VI «Площадь» авторы [5] определяют площадь многоугольника как величину той части плоскости, которую занимает многоугольник, не разъясняя понятие «величины части плоскости». «Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется квадратным сантиметром и обозначается  $\text{см}^2$ . Аналогично определяется квадратный метр ( $\text{м}^2$ ) и квадратный миллиметр ( $\text{мм}^2$ ), и т. д.». Сами авторы отмечают, что определение площади многоугольника путем накладывания на него единичного *масштабного квадрата* крайне неудобно. Поэтому «... обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определенным формулам». Затем в необязательном параграфе со звездочкой (\*) авторы [5] вычисляют площадь произвольного квадрата со стороной  $a$ , фактически используя предельный переход, подобный использованному для определения длины произвольного отрезка. Применительно к площадям, школьникам глубоко понять такой подход еще более проблематично, чем применительно к длинам отрезков. Осознанное применение предельного перехода требует значительно более зрелого уровня интеллектуального развития учащихся [14]. И это отчетливо должны осознавать будущие педагоги-математики.

В Главе XII «Длина окружности и площадь круга» предлагается соответствующие величины определять путем предельного перехода (при  $n \rightarrow \infty$ ), соответственно, периметра и площади правильного вписанного и описанного  $n$ -угольника. Осуществление же предельного перехода подразумевает фактически вычисление предела вида  $n \sin \frac{1}{n}$ , сводящегося к первому замечательному пределу, и изучаемому в университетском курсе математического анализа [14].

Таким образом, подход [5, 6], практикуемый в течение последних нескольких десятков лет, явно не соответствует уровню интеллектуальной зрелости большинства школьников и мало, в лучшем случае, поверхностно, воспринимается ими. Практикоориентированные разделы геометрии, связанные с измерением величин, играют смыслообразующую роль; их неусвоенность может самым пагубным образом сказаться на результативности изучения всего последующего курса математики, естественнонаучных и информационных дисциплин [15, 16]. Добавим к сказанному, что современные авторы обращают внимание на важность формирования у обучающихся устойчивых навыков численного оценивания различных величин, определяемых при расчетах по тем или иным математическим моделям [17].

Авторы других используемых ныне учебников по геометрии (см., например, [18–23], и др.), включая те, что внесены в федеральный перечень на 2019–2020 уч.г., в целом придерживаются тех же подходов, что и Атанасян. Так, по-прежнему популярный учебник Погорелова [18] в §1 (7 кл.) в качестве длины отрезка предлагает использовать отсчет по линейке, не объясняя, как и почему она устроена, и что вообще понимается под длиной отрезка. Тема «Площади фигур» обсуждается в §14

(9 кл.), после §13 «Многоугольники». Добавим, что в §13 вводится понятие длины окружности как общего предела при  $n \rightarrow \infty$  периметров вписанных и описанных правильных  $n$ -угольников, хотя само понятие предела при этом не вводится. Отсутствие строгости в определении «предельных» понятий в [18] немедленно приводит к трудностям в изложении понятия «Площадь фигуры», которую автор определяет так:

«Для простых фигур площадь — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные фигуры имеют равные площади.
2. Если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.
3. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна единице».

Ранее автор определяет, что «Две фигуры называются равными, если они движением переводятся одна в другую». Понятие разбиения фигуры на части, являющиеся простыми фигурами, автором не конкретизируется, хотя оно является принципиальным для ясного понимания темы «Площадь». Плоскую геометрическую фигуру автор называет простой, если ее можно разбить на конечное число треугольников.

Ясно, что без введения на посильном для обучающихся уровне базовых «колмогоровских» понятий теории множеств при определении мер плоских множеств (длин ломаных или кривых, площадей фигур) обойтись, без критической потери качества изложения учебного материала, нельзя. В частности, не обойтись без понятий пересекающихся или непересекающихся множеств (линий, фигур), внутренних и граничных точек, разбиения множества на непересекающиеся подмножества, и др. [20, 24, 25].

Далее, уже при определении площади прямоугольника, автору [18] вновь приходится фактически прибегать к предельному переходу при  $n \rightarrow \infty$ , не называя его таковым. Некоторый прямоугольник автор разбивает точками дробления по высоте на  $n$  равных малых прямоугольников, с основаниями, параллельными основанию прямоугольника. Далее, предельным переходом доказывается, что площади прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты. Затем, сопоставляя данный прямоугольник с основанием  $a$  и высотой  $b$  с прямоугольником единичной высоты, имеющим то же основание  $a$ , и с прямоугольником высотой  $b$  и единичным основанием, из двух пропорций Погорелов выводит известную формулу площади  $S$  прямоугольника:

$$S = ab. \quad (1)$$

Заметим, что при своих построениях в качестве базовой простой фигуры автор [18] фактически использует прямоугольник, а не треугольник, как автором определено ранее и соответствует логике авторского подхода.

Смирнова и Смирнов, авторы одного из современных учебников геометрии [19], к измерению площадей плоских фигур переходят в Главе X «Площадь» после обстоятельного и достаточно увлекательного изложения почти всего учебного объема планиметрии (за исключением Главы XI «Координаты и векторы»). Для определения площади произвольной фигуры авторы используют, фактически, «палеточный подход» с уменьшаемой стороной квадрата палетки, не разъясняя, как именно можно разбить единичный квадрат на сто равновеликих квадратиков, и как на практике применять для измерений дальнейшее дробление стороны единичного квадрата, например, на сто равных частей. Какие-либо современные реалистичные методы и инструменты измерения площадей в [19] не указаны.

Глейзер, автор одного из современных оригинальных курсов геометрии [20], в Главе 1 «Основные понятия геометрии» (7 кл.) аксиоматически определяет расстояние между двумя точками, как неотрицательную величину; расстояние определяется следующими свойствами:

«1. Для любых двух точек  $A$  и  $B$  имеется некоторая неотрицательная величина, называемая расстоянием от  $A$  до  $B$ . Расстояние равно нулю в том и только в том случае, если точки  $A$  и  $B$

совпадают:  $AB \geq 0$ ;  $AB > 0$ , если  $A \neq B$ ,  $AB = 0$ , если  $A = B$ .

2. Расстояние от точки  $A$  равно расстоянию от точки  $B$  до точки  $A$ :

$$AB = BA.»$$

В отличие от других авторов, геометрические фигуры Глейзер определяет «по-колмогоровски» — в рамках теоретико-множественного подхода, как геометрическое место точек (ГМТ). В частности, *отрезок* определяется автором [20] как «Множество точек, состоящее из двух различных точек и всех точек, лежащих между ними ...». И, далее, по определению «*Длиной отрезка* называется расстояние между его концами». Длину отрезка следует по Глейзеру определять с помощью масштабной линейки. Глейзер не поясняет, как и почему устроена масштабная линейка, каким образом на практике масштабный единичный отрезок, скажем, в 1 см, делят на десять равных миллиметровых отрезков. Добавим, что теорема Фалеса, с помощью которой это гипотетически можно сделать на практике, изучается по Глейзеру годом позже — в 8-ом классе.

В Главе 2 «Площади многоугольников» автор [20] аксиоматически определяет следующие свойства площади фигуры:

- «1. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, принимается за единицу площади.
2. Если многоугольник является объединением нескольких многоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Равные многоугольники имеют равные площади».

В качестве практического инструмента измерения площадей фигур Глейзер указывает палетку, и кратко поясняет алгоритм измерения площади многоугольника с ее помощью. Автор [20] признает, впрочем, что «такой способ измерения площадей, во-первых, довольно трудоемкий, во-вторых, не очень точный и, в третьих, не позволяет измерять площади больших размеров, например, участков земли». Увы, последовательного и точного определения даже площади одной из простейших фигур, прямоугольника, Глейзер не дает, фактически постулируя формулу  $S = a \cdot b$ , да и то лишь для таких прямоугольников, на сторонах которых укладывается целое число единичных отрезков или производных от них единиц. Неудовлетворенность, которую оставляет «определение» площади по Глейзеру, что, несомненно, чувствуют и подростки, заставляет искать лучшие пути к ее определению.

Любопытен подход автора к определению площади круга в Главе 3 «Многоугольники и окружность» (9 кл.) [20]. Глейзер предлагает разбить (разрезать) данный круг «на возможно большее число равных секторов», а затем распрямить, насколько это возможно, две полуокружности, после чего вставить две получающиеся зубчатые фигуры острыми углами секторов навстречу друг другу. При этом, как уверяет автор, «Получим фигуру, близкую к прямоугольнику. При достаточно большом числе разбиений данного круга на секторы можно с небольшой погрешностью сказать, что высота этой фигуры равна радиусу данного круга, а длина основания — длине полуокружности». Исходя из «установленной» ранее формулы для площади прямоугольника, автор выводит, что площадь круга  $S = \pi R^2$ . Впрочем, автор признает, что «Приведенные рассуждения не являются доказательством формулы площади круга. Они лишь наглядно поясняют ее».

Таким образом, проведенный анализ указанных, и других, употребляемых в современной практике школьных учебников геометрии, в том числе, включенных в федеральный перечень рекомендуемых учебников, показал в целом близость подходов разных авторских коллективов к определению понятия «площадь фигуры». В основном, изучение темы «Площадь» отнесено к 9 классу, к концу периода изучения систематического курса планиметрии. Так или иначе, например, при определении длины окружности или площади круга, авторы вынужденно обращаются к предельному переходу, к чему не готовы школьники. В результате один из важнейших практикоориентированных разделов геометрии оказывается слабо усвоенным выпускниками школ. В результате, например, мало кто из новоиспеченных первокурсников-математиков педагогического университета в состоянии грамотно *доказать* формулу для вычисления площади прямоугольника.



Непосредственной целью нашей работы является развитие *пиксельного подхода* к измерению площадей плоских фигур при обучении геометрии современных школьников и студентов; подхода, в разумной мере сочетающего глубокие теоретические основания школьного курса геометрии, восходящие к классической евклидовой математике, дополненной теоретико-множественными представлениями, с современными экспериментальными способами их реализации в форме лабораторных работ по математике с применением цифровых информационных технологий (ИТ). Подход определим как *улучшаемое пиксельное ИТ-оценивание мер множеств (площадей фигур), заданных на числовой плоскости*.

### Улучшаемая пиксельная оценка меры (площади) плоской фигуры

Представим, что некоторая геометрическая фигура  $\Phi$  определена и представлена на двумерном экране монитора образом достаточных размеров. Содержательный интерес представляет, главным образом, анализ фигуры с криволинейной границей [26]. Экран представляет собой матрицу (сетку), набранную из пикселей — единичных квадратных экранных элементов. Пиксели либо имеют общие границы, либо вершины, либо не пересекаются. Простой моделью пиксельного экрана может служить листок школьной тетради в клетку. В духе теоретико-множественных представлений будем определять площадь фигуры по числу пикселей внутреннего вписанного  $P_{\text{inn}}$  (целиком покрываемого изучаемой фигурой) и внешнего описанного  $P_{\text{out}}$  (целиком покрывающего фигуру) целочисленных многоугольников.

*Граничным пикселем* целочисленной (в пикселях) фигуры  $P$  назовем пиксель, имеющий как границы или вершины, общие с другими пикселями фигуры, так и с пикселями, не принадлежащими  $P$ . *Максимальным целочисленным многоугольником*  $P_{\text{inn}}$ , вписанным в фигуру  $\Phi$ , назовем фигуру, составленную из целого числа пикселей с границей-ломаной, такую, что пополнение ее хотя бы еще одним граничным пикселем приведет к пересечению ломаной границей  $P_{\text{inn}}$  границы фигуры  $\Phi$ . Аналогично, *минимальным целочисленным многоугольником*  $P_{\text{out}}$ , описанным вокруг фигуры  $\Phi$ , назовем фигуру, составленную из целого числа пикселей с границей-ломаной, такую, что удаление из нее хотя бы одного граничного пикселя приведет к пересечению ломаной границей  $P_{\text{out}}$  границы фигуры  $\Phi$ .

В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена «тестовая» фигура  $\Phi$  с криволинейной границей в виде эллипса с полуосями  $a = 3,2$  см и  $b = 2,25$  см. Начальный размер пиксельной сетки  $a_1 = 1$  см. Максимальный внутренний вписанный целочисленный многоугольник дает внутреннюю оценку площади фигуры  $\Phi$ :  $S_{\text{inn}} = 12$  см<sup>2</sup> (рис. 1а). Минимальный внешний описанный целочисленный многоугольник дает внешнюю оценку площади  $\Phi$ :  $S_{\text{out}} = 36$  см<sup>2</sup>. Таким образом, для оценки меры заданного плоского множества  $\Phi$  имеем двойное неравенство

$$12 < S_{\text{ell}} < 36 \text{ см}^2, \quad (2)$$

или, принимая в качестве оценки среднее значение  $\langle S_{\text{ell}} \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{inn}} + S_{\text{out}})$  и «погрешность»  $\delta \langle S_{\text{ell}} \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{out}} - S_{\text{inn}})$ , запишем в «физической» нотации

$$\langle S_{\text{ell}} \rangle \pm \delta \langle S_{\text{ell}} \rangle = 24 \pm 12 \text{ см}^2. \quad (3)$$

Приведенная погрешность в оценке меры  $\Phi$  представляется неоправданно большой; относительная погрешность достигает  $100\% \cdot \delta \langle S_{\text{ell}} \rangle / \langle S_{\text{ell}} \rangle = 50\%$ . Однако, во-первых, укажем на грубость начальной пиксельной сетки, а, во-вторых, сопоставление с известной (все же!) площадью фигуры  $\Phi$ , дает

$$S_{\text{ell}} = \pi ab \approx 22,6195 \text{ см}^2, \quad (4)$$

так что фактическая относительная погрешность оценки составляет менее 6%. И, главное, погрешность пиксельной оценки меры плоского множества быстро уменьшается при уменьшении размера пикселя (таблица 1).

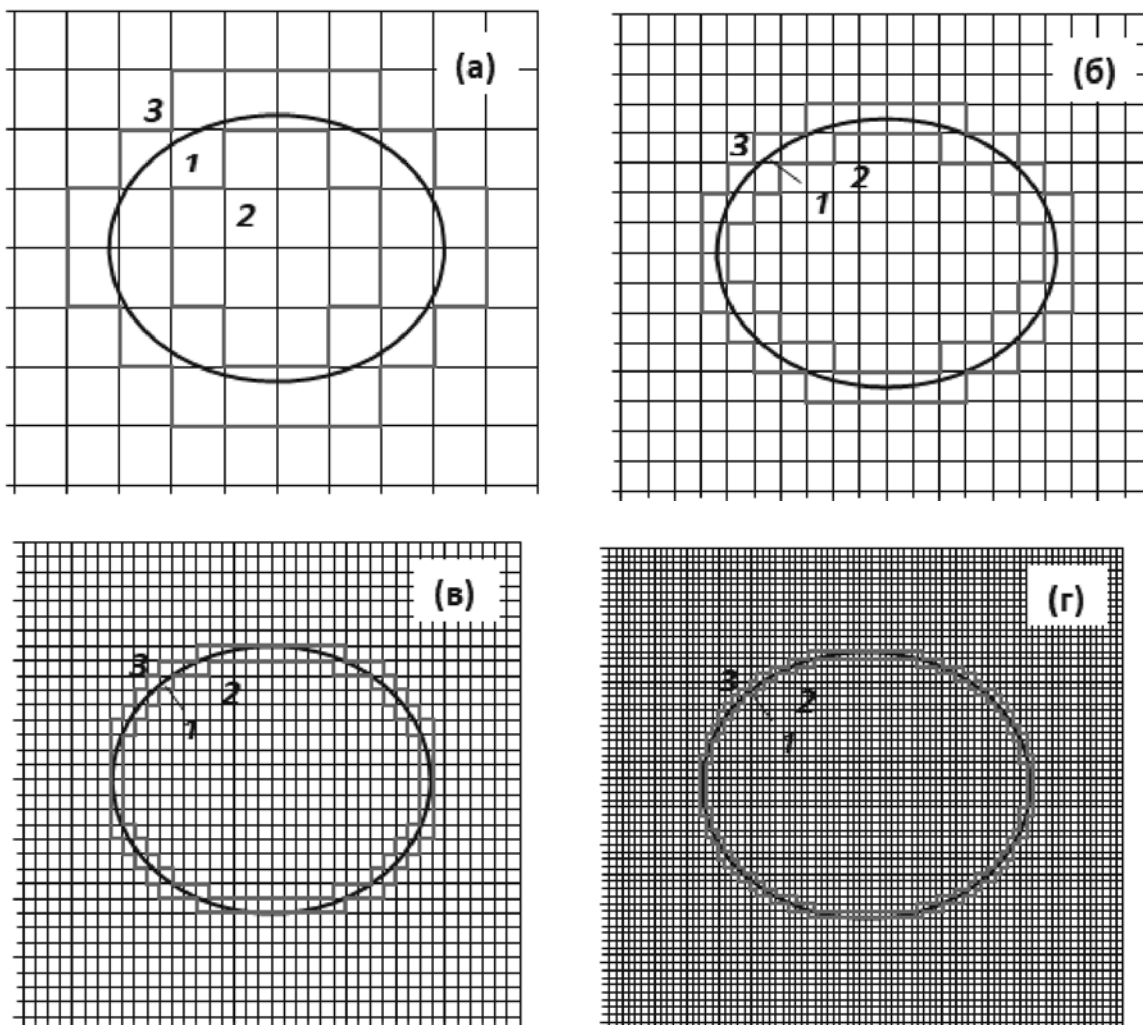


Рис. 1. Схема пиксельной оценки меры плоского множества  $\Phi$ , ограниченного эллипсом, при изменении размера 1 пикселя (в см): (а) 1; (б) 0,5; (в) 0,25; (г) 0,125. Кривая 1 — граница  $\Phi$  (эллипс); ломаная 2 — граница максимального вписанного многоугольника; ломаная 3 — граница минимального описанного многоугольника.

**Таблица 1.** Изменение оценки площади фигуры  $\Phi$  с границей — эллипсом с полуосями  $a = 3,2$  см и  $b = 2,25$  см ( $S_{\text{ell}} = \pi ab \approx 22,620$  см<sup>2</sup>) с дроблением пиксельной сетки; исходный размер пикселя  $a_1 = 1$  см.

$a_1$ , см	$S_{\text{inn}}$ , пкс <sup>2</sup>	$S_{\text{out}}$ , пкс <sup>2</sup>	$\langle S_{\text{ell}} \rangle$ , см <sup>2</sup>	$\delta \langle S_{\text{ell}} \rangle$ , см <sup>2</sup>	$(\langle S_{\text{ell}} \rangle / S_{\text{ell}} - 1)$ , %
1	12	36	24	12	6,103
0,5	68	112	22,5	5,5	−0,528
0,25	316	400	22,375	2,625	−1,081
0,125	1360	1532	22,594	1,344	−0,114
0,0625	5612	5960	22,602	0,680	−0,079
0,03125	22812	23508	22,617	0,340	−0,010
0,015625	91956	93348	22,620	0,170	0,003

Уменьшим размер пикселя вдвое, так что теперь  $1 \text{ пкс} = \frac{1}{2}$  см и  $1 \text{ пкс}^2 = \frac{1}{4}$  см<sup>2</sup> (рис. 1(б)). Иными словами, исходный пиксель дробится (квартуется) на четыре равных пикселя. Максимальный

внутренний целочисленный многоугольник дает внутреннюю оценку меры того же эллипса:  $S_{\text{inn}} = 68 \text{ пкс}^2 = 17 \text{ см}^2$ . Минимальный внешний целочисленный многоугольник дает внешнюю оценку меры  $S_{\text{out}} = 112 \text{ пкс}^2 = 28 \text{ см}^2$ . Таким образом, для оценки меры заданного плоского множества имеем двойное неравенство

$$17 \text{ см}^2 < S_{\text{ell}} < 28 \text{ см}^2. \quad (5)$$

или в физической нотации

$$\langle S_{\text{ell}} \rangle \pm \delta \langle S_{\text{ell}} \rangle = 22,5 \pm 5,5 \text{ см}^2. \quad (6)$$

Формально относительная погрешность составляет около 24%. Однако, сопоставление с известной площадью  $S_{\text{ell}}$  фигуры  $\Phi$  с эллиптической границей дает фактическую относительную погрешность оценки 0,5%, т. е. более, чем на порядок меньше, чем при исходном размере пикселя. При дальнейшем дроблении пиксельной сетки погрешность оценки площади тестовой фигуры  $\Phi$  продолжает быстро уменьшаться (таблица 1).

Как показала наша апробация, описанный подход легко осваивается обучающимися, и с энтузиазмом реализуется ими на практике. Изучаемая фигура  $\Phi$  может быть задана на клетчатой бумаге, на экране монитора или натурно. В последнем случае с помощью камеры или сотового телефона может быть получено изображение, и затем в виде цифрового файла размещено на экране монитора для цифровой обработки. В первом случае роль пикселей будут играть клетки тетрадной страницы. В прочих случаях — роль пикселей могут играть естественные пиксельные элементы экрана или специально разлинованные клетки. Даже «гуманитарно-ориентированные» подростки с удовольствием рисуют (возможно, от руки — на листе в клетку или на экране монитора — с помощью инструментов, например, графического редактора MS Paint) максимальный вписанный и минимальный описанный целочисленные многоугольники. Затем простой и легко проверяемый подсчет клеток позволяет получить величины внутренней ( $S_{\text{inn}}$ ), внешней ( $S_{\text{out}}$ ) и состоятельной усредненной мер заданного плоского множества  $\Phi$  в форме двойного неравенства  $S_{\text{inn}} \leq S \leq S_{\text{out}}$ , или, в физической нотации,  $S = \langle S \rangle \pm \delta \langle S \rangle$ , где  $\langle S \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{inn}} + S_{\text{out}})$  и  $\delta \langle S \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{out}} - S_{\text{inn}})$ .

Отметим также интерес, который проявляют в контексте предлагаемого подхода ИТ-ориентированные обучающиеся, имеющие способности к программированию. Естественной возникающей тут задача — автоматическое (программное) построение целочисленных многоугольников  $S_{\text{inn}}$  и  $S_{\text{out}}$ , и подсчет их пиксельных мер. То же — при квартовании (или ином дроблении) исходных клеток-пикселей. Необходимо также обеспечить графическую иллюстрацию этапов реализации подхода. Отметим также, что предлагаемый подход, помимо собственно геометрического содержания, несет в себе определенную эстетическую составляющую; это очень важно при мотивации к обучению математике «гуманитарно-ориентированных» подростков (см. в этой связи, например, [27, 28]).

### **Улучшаемая пиксельная оценка площади квадрата; формула $S_{a \times a} = a^2$ , $\forall a \in \mathbb{R}$ , $a \geq 0$ .**

Приняв в качестве базовой фигуры  $\Phi$  квадрат, т. е. прямоугольник у которого все стороны равны, покажем пиксельным методом, что его площадь, в самом деле, выражается известной формулой

$$S_{a \times a} = a^2 \quad (7)$$

для любого действительного значения стороны квадрата  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ . Разумеется, в том случае, когда величина  $a$  выражается целым числом пкс, т. е. вся фигура  $\Phi$  может быть без пробелов замощена пикселями единичной площади  $S_{1 \times 1}$ , формула (7) не требует обоснования — достаточно просто подсчитать число пикселей, покрывающих данный квадрат. В прочих случаях требуется достаточно убедительное и, вместе с тем, сильное для понимания всех обучающихся обоснование формулы (7). Причем, это обоснование должно быть построено без употребления понятий темы «Геометрическое подобие», т. к. тему «Подобие» предпочтительно изучать *позже* темы «Площадь».

Для обоснования формулы (7) площади квадрата с произвольной стороной  $a$ , применим статистический подход и развитый выше пиксельный метод оценки площади плоской фигуры. Статистический подход со случайной генерацией стороны квадрата позволит полностью исключить какую-либо тенденциозность в осуществлении эксперимента. Эксперимент организуем таким образом, чтобы он мог быть, в том числе натурно, воспроизведен при изучении математики или информатики в существующих условиях любой образовательной организации. Первичные свойства площади аксиоматически примем «по Погорелову», дополнив их понятием разбиения множества на непересекающиеся подмножества.

План имитационного эксперимента:

1. С помощью генератора случайных чисел, например, MS Excel, генерируется случайная сторона квадрата  $a \in \mathbb{R}$  в диапазоне, скажем, от 0 до 16 см, так, чтобы «генерируемые» случайные квадраты  $\Phi$  могли быть изображены на листе обычной школьной тетради в клетку (в этом случае размер клетки принимается за размер исходного пикселя). Изображения «генерируемых» случайных квадратов  $S_{a \times a}$  могут быть представлены и на экране монитора с построенной пиксельной сеткой или с использованием «естественных» пикселей экрана. Пусть левый нижний угол квадратов совпадает с началом системы координат.
2. В качестве внутренней меры  $S_{\text{inn}}$  очередного квадрата  $\Phi$  со случайной стороной  $a$  принимается величина  $[a]^2$ , где  $[a]$  — целая часть случайного числа  $a$ . Действительно, квадрат  $[a] \times [a]$  есть максимальный целочисленный квадрат, вписанный в данный случайный квадрат  $a \times a$ .
3. В качестве внешней меры  $S_{\text{out}}$  очередного квадрата со случайной стороной  $a$  принимается величина  $([a] + 1)^2$ . Квадрат  $([a] + 1) \times ([a] + 1)$  есть минимальный целочисленный квадрат, покрывающий квадрат  $a \times a$ .
4. За оценку меры (площади) случайного квадрата  $a \times a$  принимается величина  $S_{a \times a} = \langle S \rangle \pm \delta \langle S \rangle$ , где  $\langle S \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{inn}} + S_{\text{out}})$  и  $\delta \langle S \rangle = \frac{1}{2}(S_{\text{out}} - S_{\text{inn}})$ .
5. На график зависимости  $S_{a \times a}$  от  $a^2$  наносится точка с соответствующими координатами и, факкультативно, с планками погрешности.
6. При накоплении заданного числа  $N$  таких точек строится прямая линейной регрессии  $S_{a \times a} = k a^2$  с определением случайного углового коэффициента  $k$  методом наименьших квадратов.
7. При накоплении заданного числа  $n$  определений углового коэффициента  $k$ , являющегося случайной величиной (с.в.), строится частотная гистограмма статистического распределения с.в.  $k$  с определением ее числовых характеристик (выборочное среднее  $\langle k \rangle$ , исправленное среднеквадратичное отклонение (СКО)  $s$ , и др.).
8. Проверяется статистическая гипотеза о незначимом/значимом отличии выборочного среднего  $\langle k \rangle$  от единицы на выбранном уровне статистической значимости  $\alpha$ . Статистически незначимое отличие среднего значения  $\langle k \rangle$  от 1 будет свидетельствовать о справедливости формулы площади квадрата.
9. Расчеты по пп. 1°–8° могут быть повторены при квартовании пиксельной сетки, что повысит точность оценок и достоверность выводов.

**Комментарий:** выполнение пп. 7, 8 плана требует достаточных познаний в области математической статистики, однако доступно студентам-математикам педагогического вуза, изучившими стандартный курс «Теория вероятностей и математическая статистика» (например, [29]). Выполнение пп. 1–6, 9 плана доступно обучающимся основной общей школы.

Основные расчетные результаты отражены на рис. 2, 3.

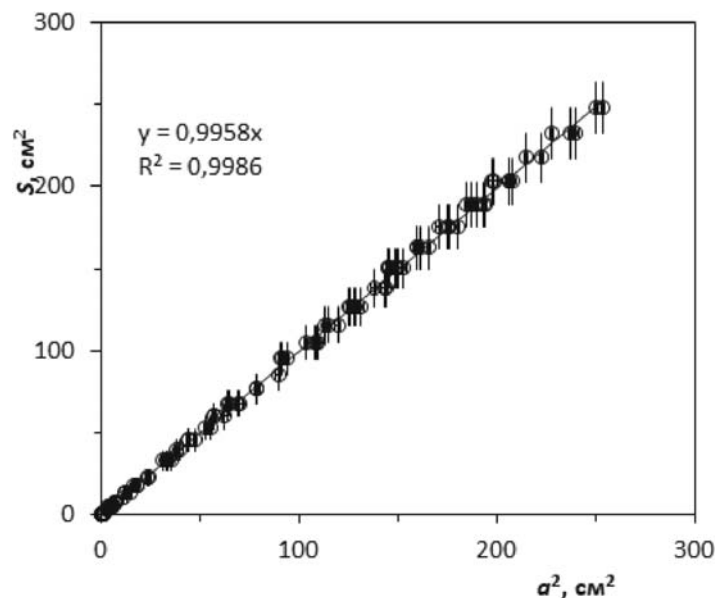


Рис. 2. Корреляционная зависимость  $S_{a \times a}$  от  $a^2$  в расчетном цикле Ц0.

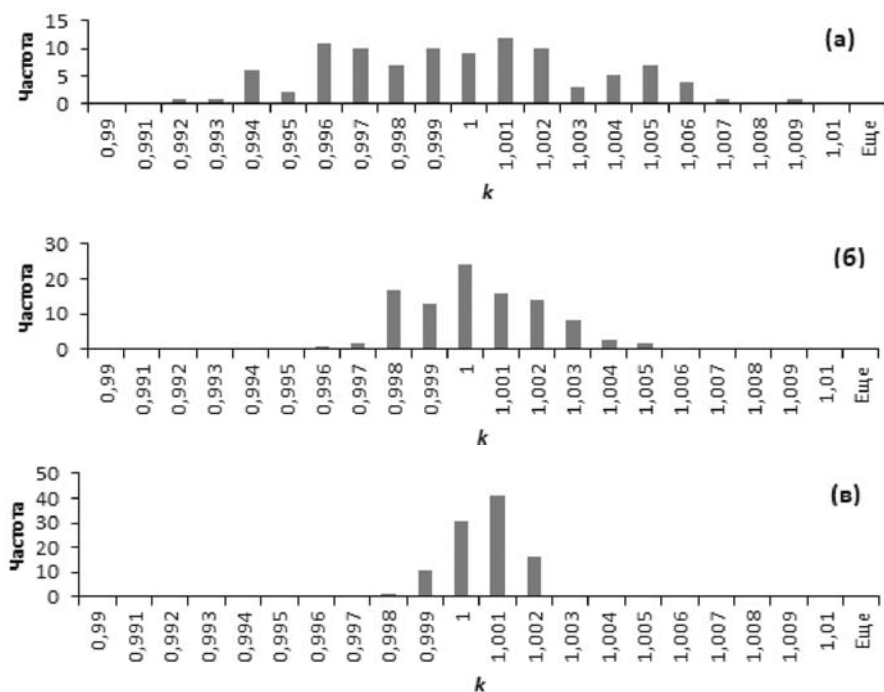


Рис. 3. Частотные распределения с.в.  $k$  в расчетном цикле Ц0 (а), Ц1 (б), Ц2 (в).

**Таблица 2.** Числовые характеристики с.в.  $k$  для различных размеров пикселя; выборочное среднее  $\langle k \rangle$ , исправленное среднеквадратичное отклонение (СКО)  $s$ , наблюдаемое значение  $t$ -критерия Стьюдента  $T_{\text{набл}}$ ; критическое двустороннее значение критерия  $t_{\text{крит}} = 3,39153$  для уровня значимости  $\alpha = 0,001$  и числа степеней свободы  $r = n - 1$ . Объем выборки  $n = 100$ .

Размер пикселя, см	$\langle k \rangle$	$s$	$ T_{\text{набл}} $	Прим.
0,5	0,99932	0,00356	1,90868	Цикл Ц0
0,25	0,99987	0,00186	0,68965	Ц1
0,125	1,00005	0,00084	0,61302	Ц2

Аналогичные расчеты были проведены после квартования в 1-ом расчетном цикле Ц1. Здесь сторона пикселя была равна 0,25 см, а единичный квадрат  $1 \times 1$  см<sup>2</sup> содержал 16 пикселей. Хорошо видно, что гистограмма распределения стала значительно уже; ее колоколообразный характер приобрел более выраженный характер. Статистическая погрешность по сравнению с предыдущим расчетным циклом существенно снизилась.

Расчеты после повторного квартования проведены во 2-ом расчетном цикле Ц2. Здесь сторона пикселя была равна 0,125 см, а единичный квадрат  $1 \times 1$  см<sup>2</sup> содержал 64 пикселя. Отметим, что пиксельная сетка в этом случае близка к миллиметровой. Хорошо видно, что гистограмма распределения стала еще уже; ее колоколообразный одномодовый характер очевиден (рис. 3в)). Фактическое отличие углового коэффициента  $k$  от 1 составляет около 0,005%. (таблица 2). Дальнейшее квартование не имеет смысла. Справедливость формулы (7) для площади квадрата с произвольной стороной установлена.

Во всех случаях проведена проверка статистической гипотезы о значимости отличия выборочного среднего  $\langle k \rangle$  от единицы на выбранном уровне статистической значимости  $\alpha$  (см., напр., [29]). Как известно, для того, чтобы при заданном уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу  $H_0: a = a_0$  о равенстве неизвестной генеральной средней  $a$  (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению  $a_0$  при конкурирующей гипотезе  $H_1: a \neq a_0$ , надо вычислить наблюдаемое значение  $t$ -критерия Стьюдента

$$T = (\bar{x} - a_0)\sqrt{n}/s,$$

и по таблице критических точек двустороннего распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы  $r = n - 1$ , найти критическую точку  $t_{\text{двуст.кр}}(\alpha; r)$ . Если  $|T_{\text{набл}}| < t_{\text{двуст.кр}}(\alpha; r)$  — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если  $|T_{\text{набл}}| > t_{\text{двуст.кр}}(\alpha; r)$  — нулевую гипотезу отвергают.

В нашем случае нулевая гипотеза  $H_0: k = 1$ , конкурирующая гипотеза  $H_1: k \neq 1$ . Как видно из таблицы 2, на уровне значимости  $\alpha = 0,001$  уже начиная с расчетного Цикла Ц0 следует принять гипотезу  $H_0$  и признать, что  $k = 1$ .

## Выводы

1. Разработан и обоснован с теоретико-множественных позиций удобный в практической реализации подход к получению улучшаемой пиксельной оценки меры плоского множества (площади фигуры).

2. В рамках развитого подхода статистически обоснована справедливость формулы площади квадрата с произвольной стороной. Это позволит (во второй части работы) последовательно установить формулы для вычисления площадей всех основных плоских фигур школьного курса геометрии.

3. Подход может служить хорошей основой для лабораторных работ по математике — при изучении в контексте когнитивно-деятельностного подхода геометрии, теории вероятностей, математической статистики, и др., и по информатике — при изучении алгоритмизации, программирования, компьютерной графики, теории распознавания образов, и др., в образовательных организациях любого уровня почти независимо от уровня исходной математической подготовленности обучающихся (школьников и студентов) и их когнитивных предпочтений (см. в этой связи [27, 28, 30–33]).

## Литература

1. Местецкий Л.М. Математические методы распознавания образов. — М.: МГУ, 2004. — 85 с.  
URL: <http://www.ccas.ru/frc/papers/mestetskii04course.pdf>
2. Форсайт Д.А., Понс Д. Компьютерное зрение. Современный подход (Computer Vision: A Modern Approach.) — М.: Вильямс, 2004. — 928 с.
3. Лепский А.Е., Броневиц А.Г. Математические методы распознавания образов. — Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2009. — 155 с.

URL: [http://window.edu.ru/resource/800/73800/files/lect\\_Lepskiy\\_Bronevich\\_pass.pdf](http://window.edu.ru/resource/800/73800/files/lect_Lepskiy_Bronevich_pass.pdf)

4. Фомин Я.А. Распознавание образов: теория и применения. — М.: ФАЗИС, 2012. — 429 с.
5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. — 20-е изд. — М.: Просвещение, 2010. — 384 с.
6. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. — 22-е изд. — М.: Просвещение, 2013. — 255 с.
7. Ширикова Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием Geogebra / Диссертация на соискание степени кандидата педагогических наук. — Архангельск: С(А)ФУ им. М.В. Ломоносова, — 2014. — 250 с.  
URL: <http://ягпу.рф/images/d/df/Shirikova2014.pdf>
8. Teaching and learning geometry 11–19. Report of a Royal Society / Joint mathematical council working group.  
URL: [http://royalsociety.org/uploadedFiles/Royal\\_Society\\_Content/policy/publications/2001/9992](http://royalsociety.org/uploadedFiles/Royal_Society_Content/policy/publications/2001/9992).
9. Mason J. Questions about geometry / in: Teaching and Learning Mathematics: A Reader, Holder and Stoughton, ed. by D. Pimm and E. Love. London, 1991. — P. 77–99.
10. Marrades R., Gutierrez A. Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment // Educational studies in mathematics. — Netherlands: Kluwer Ac. Publ., 2001. — V. 44. — P. 87–125.
11. Constantinos Ch., Mousoulides N., Pittalis M., Pitta-Panzani D. Proofs through exploration in dynamic geometry environments // International Journal of Science and Mathematics Education. / Nicosia (Cyprus): University of Cyprus, Dept. of Educational Sciences. - 2004. - P. 339–352.
12. Hanna G. Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics. — Netherlands: Kluwer Ac. Publ., 2001. — V. 44. — P. 5–23.
13. Leikin R., Grossman D. Teachers modify geometry problems: from proof to investigation / Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2012. — P. 515–531.
14. Адамович М.А., Бодряков В.Ю., Лемеш А.А., Фомина Н.Г. Проблема преемственности школьной и высшей математики при изучении темы «Предел последовательности» // Математика в школе. — 2009. — № 9. — С. 45–50.
15. Бодряков В.Ю., Фомина Н.Г. О качестве математической подготовки учащихся в комплексе «школа — вуз»: взгляд с позиций работника высшего педагогического образования // Математика в школе. — 2010. — № 2. — С. 56–62.
16. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Проблемы качества математической подготовки будущих учителей информатики в контексте фундаментализации современного образования // Педагогическое образование в России. — 2016. — № 7. — С. 125–130.
17. Рыжик В.И. Четвертая линия. Оценки в математике и в математическом образовании // Математика в школе. — 2018. — № 7. — С. 43–56.
18. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 кл. Учебник для общеобразоват. организаций. — М.: Просвещение, 2014. — 240 с.
19. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 7–9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Мнемозина, 2007. — 376 с.
20. Глейзер Г.Д. Геометрия: учеб. для 7 кл. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. — 149 с. / 8 кл., 2011. — 118 с. / 9 кл., 2012. — 152 с.
21. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик И.И. Геометрия. 9 кл.: учеб. для общеобразоват. организаций. — М.: Просвещение, 2014. — 180 с.
22. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Прасолов В.В. Геометрия 7, 8, 9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений (МГУ–школе). / Под ред. Садовниченко В.А. — М.: Просвещение, 2018. 7 кл. — 127 с. / 8 кл. — 175 с. / 9 кл. — 146 с.

23. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7–9 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.: Дрофа, 2018. — 464 с.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 544 с.
25. Бодряков В.Ю. Теория множеств: Практические аспекты использования // Математика. Все для учителя. — 2013. — № 9. — С. 2–10.
26. Бодряков В.Ю., Быков А.А. Улучшаемые пиксельные ИТ-оценки мер плоских множеств. С. 158–167 / Состояние и перспективы развития ИТ-образования: сборник докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции. — Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2019. — 468 с.
27. Имайкин В.М. О теме «Длина, площадь, объем» в старших классах гуманитарного профиля // Математическое образование. — 2014. — № 4(72). — С. 16–28.
28. Кузовкова А.А., Мамалыга Р.Ф., Бодряков В.Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. — 2018. — № 2. — С. 35–42.
29. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. — М.: Высшее образование, 2006. — 479 с.
30. Бодряков В.Ю., Фомина Н.Г. Геометрическая вероятность как эффективный менеджер межпредметных связей школьного курса математики // Математика в школе. — 2010. — № 8. — С. 42–51.
31. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Лабораторные работы по математике с применением ИКТ как инструмент формирования исследовательских умений студентов педагогического вуза. С. 175–181 / В сборнике докладов и научных статей Всероссийской научно-практической конференции «Состояние и перспективы развития ИТ-образования», посвященной 50-летию Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова (Чебоксары, 16–18 ноября 2017 г.). Чебоксары: Издательство Чувашского государственного университета, 2018. — 520 с.
32. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств информационно-коммуникационных технологий и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник РУДН. Серия: Информатизация образования. — 2018. — Т. 15. — № 4. С. 363–372.
33. Бодряков В.Ю. Когнитивно-деятельностный подход в обучении математике. С. 101–108 / Когнитивные исследования в образовании [Электронный ресурс]: сборник научных статей / Уральский государственный педагогический университет; под научной редакцией С.Л. Фоменко; общей редакцией Н. Е. Поповой. — Электронные данные — Екатеринбург: [б. и.], 2019. — 435 с. — 1 электронный оптический диск (CD-ROM).

*Бодряков Владимир Юрьевич,  
заведующий кафедрой высшей математики и  
методики обучения математике, ФГБОУ ВО  
«Уральский государственный педагогический  
университет», г. Екатеринбург,  
доктор физико-математических наук, доцент.*

*E-mail: Bodryakov\_VYu@e1.ru*

*Быков Антон Александрович,  
преподаватель математики, ГАПОУ СО  
«Екатеринбургский автодорожный колледж».*

*E-mail: bykov\_antony@mail.ru*



# Анализ математической модели реальной ситуации как инструмент разработки разноуровневых задач

*К. П. Горшенин*

В статье рассматривается ситуация движения пешехода по двум эскалаторам. Показана возможность постановки задач различного уровня сложности на основе анализа её математической модели.

## Введение

Говоря о математической модели, в средней школе обычно подразумевают математическую модель задачи. В большинстве случаев модель имеет вид уравнения или системы уравнений с числовыми коэффициентами, часто с ограниченной (по сравнению с естественной) областью определения. При этом возможности исследования отсутствуют, всё сводится лишь к решению уравнения или системы. Несколько улучшается положение при решении задачи в общем виде, когда результатом являются формулы для искомых величин. Но самые большие возможности для исследования предоставляет математическая модель ситуации, на которой основана каждая конкретная задача.

Мы рассмотрим анализ математической модели реальной ситуации с точки зрения его дидактического приложения, т. е. конструирования на его основе различных задач. Конечно, это обширная тема, и мы приведём пример только одной ситуации, выбор которой требует пояснения.

В своё время на одной из физических олимпиад, состоявшейся в октябре, учащимся 8 класса была предложена следующая задача: «В метро есть два эскалатора. Один из них работает на подъём, второй не работает. Чебурашка спустился по работающему эскалатору, а затем поднялся по неработающему, затратив на это движение время  $t$ . Затем он спустился по неработающему эскалатору, а поднялся по работающему, затратив на это движение время  $2t/3$ . Найти скорость движущегося эскалатора, если скорость Чебурашки относительно эскалатора при движении вниз равна  $v$  и вдвое больше его скорости при движении вверх».

Нестандартность (если угодно, сложность) задачи определяется следующими её особенностями.

1. Хорошо знакомая учащимся ситуация движения по течению и против него трансформирована в ситуацию движения по эскалатору по ходу и против.
2. В задаче рассматривается комбинация движений по двум эскалаторам.
3. Скорость и время в условии задаются буквенными выражениями.
4. Перевод условия на математический язык приводит к системе двух дробно-рациональных уравнений.

В результате преобразования системы уравнений задачи получается квадратное уравнение относительно искомой скорости  $u$ . Выражение для  $u$  имеет вид:

$$u = \frac{(11 - \sqrt{97})}{4} v.$$

Проблема в том, что понятие арифметического квадратного корня, формулы корней квадратного уравнения и дробно-рациональные уравнения в курсе алгебры 8 класса изучаются уже после октября текущего учебного года.

Безусловно, включение этой задачи в набор заданий олимпиады — ошибка составителей, оставшаяся, однако, в прошлом. Автору настоящей статьи известен пример, когда учитель физики разбирал эту задачу с учащимися 8 класса в начале учебного года в рамках подготовки к предстоящим олимпиадам, при этом наспех объясняя учащимся важные математические понятия лишь из-за сиюминутной необходимости решить конкретную задачу. Факт, достойный сожаления, но всё же его последствия можно исправить на уроках математики. Конечно, не стоит вовсе отказываться от решения этой задачи, потому что это означает отказаться и от рассмотрения определённой физической ситуации. Нужно лишь отложить задачу до освоения соответствующего материала на уроках алгебры.

Удивительно, что физики не обратили внимания на следующее обстоятельство: значения  $u$  и  $v$  не могут одновременно быть рациональными числами. Поэтому задав, например,  $v = 1$  м/с, получим  $u = (11 - \sqrt{97})/4$  м/с, что выглядит несколько странно для ответа в физической задаче (как и в любой задаче практического содержания). Впрочем, ещё более странно задавать, например,  $v = (11 + \sqrt{97})/10$  м/с, чтобы получить рациональное значение  $u = 0,6$  м/с. Таким образом, возникает вопрос: что нужно изменить в постановке задачи, чтобы отношение  $u$  и  $v$  выражалось рациональным числом? Ответ на этот вопрос вытекает из анализа математической модели рассматриваемой ситуации.

### Математическая модель ситуации

Основными идеализирующими предположениями для ситуации, изложенной в исходной задаче, являются равномерное движение пешехода (Чебурашки) и эскалатора и пренебрежимая малость времени перехода с одного эскалатора на другой.

Введём обозначения для величин, участвующих в описании ситуации. Пусть  $l$  — длина каждого эскалатора,  $u$  — скорость его движения,  $v_1$  — скорость движения пешехода относительно подвижной части эскалатора при спуске,  $v_2$  — аналогичная скорость при подъёме. I вариант движения — спуск по работающему эскалатору и подъём по неработающему, время в этом случае обозначим  $t_I$ . II вариант — спуск по неработающему эскалатору и подъём по работающему, время движения —  $t_{II}$ .

Скорости спуска и подъёма (т. е. скорость движения относительно неподвижной части эскалатора) пешехода по эскалатору, работающему на подъём, равны соответственно  $v_1 - u$  и  $v_2 + u$ . Заметим, что скорость спуска в I варианте меньше, чем во II варианте:  $v_1 - u < v_1$ , и скорость подъёма в I варианте меньше, чем во II варианте:  $v_2 < v_2 + u$ , поэтому  $t_I > t_{II}$ .

Суммируя время спуска и подъёма в каждом варианте, получим систему условий, связывающих величины  $l, u, v_1, v_2, t_I, t_{II}$ :

$$\begin{cases} \frac{l}{v_1 - u} + \frac{l}{v_2} = t_I, \\ \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2 + u} = t_{II}. \end{cases} \quad (1)$$

При этом  $v_1 > u > 0$ ,  $v_2 > 0$ . Первое неравенство обеспечивает возможность спуска по работающему эскалатору, второе — возможность подъёма по неработающему. Считая далее, что под пешеходом понимается всё-таки человек, а не мультипликационный персонаж, учтём естественные ограничения на собственную скорость пешехода, в том числе и фактор движения не по горизонтальной поверхности, а по лестнице эскалатора. Таким образом,

$$0 < u < v_1 \leq v_{\max}, \quad 0 < v_2 \leq v_{\max}. \quad (2)$$

Скорость эскалатора составляет  $0,4 - 1$  м/с, скорость эскалатора в метро —  $0,75$  м/с. В качестве  $v_{\max}$  вряд ли стоит принимать значение, превышающее  $2 - 2,5$  м/с (скорость бега трусцой на горизонтальной поверхности). Поскольку задача предлагается школьникам, в воспитательных целях следовало бы учесть и тот факт, что в реальном метрополитене бежать по эскалатору запрещено, и принять, например,  $v_{\max} = 1,5$  м/с (примерная скорость движения строевым шагом).

Система уравнений (1) и неравенства (2) вместе являются математической моделью ситуации, описанной в исходной задаче.

Из размерных величин  $l, u, v_1, v_2, t_I, t_{II}$  можно сконструировать четыре независимые безразмерные комбинации. Простейшими являются отношения однородных величин. Первая комбинация — отношение  $t_{II}/t_I$ . Ещё две комбинации — это отношения скоростей. Последние могут быть выбраны по-разному: есть три варианта выбора пары из набора  $u, v_1, v_2$ ; только два отношения являются независимыми. Для целей исследования ситуации выбор отношений скоростей не принципиален. Учитывая вопрос исходной задачи, выберем две пары из набора  $u, v_1, v_2$  таким образом, чтобы скорость эскалатора входила только в одну пару. В последнюю комбинацию войдет  $l$ , какая-либо из величин  $u, v_1, v_2$  (или их линейная комбинация) и какая-либо из величин  $t_I, t_{II}$  (или их линейная комбинация).

Введём безразмерные величины

$$\alpha = u/v_1, \quad \beta = v_2/v_1, \quad \gamma = t_{II}/t_I, \quad \delta = l/(v_1 t_I). \quad (3)$$

Перепишем систему (1) в терминах величин  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta \left( \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 1 \\ \delta \left( 1 + \frac{1}{\alpha+\beta} \right) = \gamma \end{cases}. \quad (4)$$

Из неравенств (2) следует:

$$0 < \alpha_{\min} \leq \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1/\alpha_{\min}. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_{\min} = u/v_{\max}$ . Если положить:  $u = 0,75$  м/с,  $v_{\max} = 1,5$  м/с, то  $\alpha_{\min} = 0,5$ .

Величины  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — параметры подобия рассматриваемой ситуации. Они связаны между собой двумя уравнениями (4), поэтому только два параметра могут быть независимыми<sup>1</sup>. В постановке каждой задачи эти два параметра появляются либо явно — в виде числовых или буквенных множителей в выражениях для каких-либо величин, либо неявно — если явным образом заданы величины, определяющие эти параметры (в исходной задаче явно заданы параметры  $\beta = 0,5$  и  $\gamma = 2/3$ ). Вопрос задачи всегда сводится к нахождению значения одного из оставшихся — зависимых — параметров (в исходной задаче нужно найти значение  $\alpha$ ) или их обоих, или выяснения каких-либо свойств зависимости этих параметров от независимых при задании последних в буквенном виде. Связь с величинами  $l, u, v_1, v_2, t_I, t_{II}$  осуществляется посредством равенств (3).

Все задачи, которые можно поставить для рассматриваемой ситуации, подразделяются на классы в соответствии с выбранными независимыми параметрами подобия. В разных классах для решения может использоваться различный математический аппарат. Так, при известных  $\alpha$  и  $\beta$  для  $\gamma$  и  $\delta$  имеем систему линейных уравнений, при известных  $\gamma$  и  $\delta$  — систему дробно-рациональных уравнений относительно  $\alpha$  и  $\beta$ .

В классах задач с двумя известными величинами из трёх —  $\alpha, \beta, \gamma$  — оставшаяся находится из уравнения, следующего из (4):

$$\gamma \left( \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 1 + \frac{1}{\alpha+\beta}. \quad (6)$$

На области определения (5) оно равносильно уравнению

$$(\beta - \gamma)(\alpha^2 - \alpha) + (\alpha + \gamma - 1)(\beta^2 + \beta) = 0. \quad (7)$$

<sup>1</sup>Выше, говоря о наборе независимых безразмерных комбинаций размерных величин, мы под независимостью понимали невозможность выразить одну из них через остальные. Здесь и далее понятия независимых и зависимых параметров употребляются в том же смысле, в каком мы говорим о независимой и зависимой переменных при задании функции.

Если рассматривать (7) как уравнение относительно  $\alpha$ , то, очевидно, оно может быть или квадратным, если  $\beta \neq \gamma$ , или линейным, если  $\beta = \gamma$ , тогда:

$$\alpha = 1 - \gamma. \quad (8)$$

### Выводы из анализа математической модели

Анализ математической модели позволил выяснить, что постановка задачи, аналогичная исходной, не обязательно приводит к решению квадратного уравнения. Ниже мы покажем, что можно получать и квадратные уравнения с рациональными корнями. Это означает, что в таком случае нет необходимости использовать арифметические квадратные корни и формулы корней квадратного уравнения. Вопрос только в подборе соответствующих значений  $\beta$  и  $\gamma$ .

Укажем на ещё одно обстоятельство, свидетельствующее о не слишком удачном выборе значений  $\beta$  и  $\gamma$  в исходной задаче. Уравнение для  $\alpha$  получается подстановкой в (7) значений  $\beta = 0,5$  и  $\gamma = 2/3$ ; приведенное к целым коэффициентам, оно имеет вид:

$$2\alpha^2 - 11\alpha + 3 = 0. \quad (9)$$

Приближённое значение положительного корня этого уравнения:  $\alpha \approx 0,29$ . Найденное значение  $\alpha$  заметно меньше значения  $\alpha_{\min} = 0,5$ ; значит, пешеход всё-таки бежит по эскалатору. Если же пешеход спускается по эскалатору спокойным шагом, например, со скоростью 1 м/с, то скорость эскалатора получается приближённо равной 0,3 м/с — существенно заниженной по сравнению с реальными характеристиками.

Даже если физические величины задаются буквенными выражениями, как в условии исходной задачи, не следует пренебрегать рассуждениями об их возможных числовых значениях. Так, рассуждая о значениях скоростей, учащиеся смогут соотнести свой жизненный опыт, формулируемый, как правило, в категориях сравнения — «быстрее-медленнее», — с конкретными, пусть и примерными, значениями скоростей пешехода и эскалатора.

Возможность применять различный математический аппарат выявляет несомненное достоинство рассматриваемой ситуации: учащимся можно предлагать различные задачи на основе этой ситуации и постепенно — по мере освоения программы по математике, — и одновременно, как задачи разного уровня сложности. Далее мы рассмотрим примеры таких задач.

### Задача 1

Обратимся к исходной задаче, сосредоточившись на получении рациональных значений  $\alpha$ . Ясно, что это возможно, если  $\alpha$  определяется из (8). Например, положив  $\beta = \gamma = 0,5$ , получаем  $\alpha = 0,5$ . Составив систему условий

$$\begin{cases} \frac{l}{v-u} + \frac{l}{0,5v} = t, \\ \frac{l}{v} + \frac{l}{0,5v+u} = 0,5t, \end{cases} \quad (10)$$

учащиеся получают из неё уравнение для искомой величины, которое теперь будет линейным:  $2u - v = 0$ . В целом задача остаётся на том же уровне сложности, что и исходная, поскольку уравнения (10) — это по-прежнему дробно-рациональные уравнения относительно  $u$ . Однако теперь  $u$  принимает рациональное значение, если значение  $v$  рационально.

Разумеется, можно получить и квадратное уравнение относительно  $\alpha$  с рациональными корнями. Для этого целесообразно вначале выбрать некоторые рациональные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющие (5), и с помощью (6) найти значение  $\gamma$ , затем условие исходной задачи скорректировать с учетом этих значений  $\beta$  и  $\gamma$ . Например, задав  $\alpha = 0,5$  и  $\beta = 1$ , получим  $\gamma = 5/9$ . Подставив  $\beta$  и  $\gamma$  в (7), получим уравнение, которое приводится к виду

$$2\alpha^2 + 7\alpha - 4 = 0. \quad (11)$$

Для решения этого уравнения не нужны формулы корней. Если умножить обе его части на 2, квадратный трёхчлен в левой части легко преобразуется в произведение:  $(2\alpha)^2 + 7 \cdot 2\alpha - 8 = (2\alpha)^2 + 8 \cdot 2\alpha - 2\alpha - 8 = (2\alpha + 8)(2\alpha - 1)$ . Приравняв его нулю, найдём корни уравнения:  $-4$  и  $0,5$ , первый из которых не принадлежит области определения, задаваемой неравенствами (5) для  $\alpha$ .

Задачи, приводящие к уравнениям (9) или (11) или линейному уравнению (8) — это задачи одного класса, близкие по уровню сложности. Варьируя значения  $\beta$  и  $\gamma$ , учитель может кому-то из учащихся немного облегчить решение, а кому-то дать возможность решить квадратное уравнение более изящным способом, чем непосредственное применение формул корней.

## Задача 2

Выше уже сказано, что основу математической модели тех задач, в которых известны значения  $\alpha$  и  $\beta$ , составляет система линейных уравнений. Отметим, что решение систем линейных уравнений доступно учащимся 8 класса в начале учебного года. Можно предложить задачу, приводящую к системе не двух, а трёх уравнений.

Итак, «... пешеход спустился по работающему эскалатору и поднялся по неработающему, затем спустился по неработающему эскалатору и поднялся по работающему. На всё движение он затратил время  $t$ . Скорость движущегося эскалатора равна  $u$ , скорость пешехода относительно эскалатора при движении вниз равна  $1,4u$  и в 3,5 раза больше его скорости при движении вверх. Найдите длину эскалатора».

Для этой задачи система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{l}{1,4u - u} + \frac{l}{0,4u} = t_I, \\ \frac{l}{1,4u} + \frac{l}{0,4u + u} = t_{II}, \\ t_I + t_{II} = t. \end{cases} \quad (12)$$

Из неё несложно получить уравнение для  $l$ . Окончательно:  $l = 7ut/45$ . Если  $u = 0,75$  м/с и  $t = 2$  мин, то  $l = 14$  м.

Отметим, что в данном случае учащимся даже не обязательно решать систему (12), а можно сообразить, что пешеход движется вниз-вверх либо со скоростью  $0,4u$ , либо со скоростью  $1,4u$ , поэтому  $t_I : t_{II} = 7 : 2$  и  $t_I = 7t/9$ ,  $t_{II} = 2t/9$ . Подставив, например,  $t_I$  в первое уравнение системы (12), найдём  $l$ . Как видно, и в задачах этого класса можно выбирать значения параметров таким образом, чтобы дать учащимся возможность как применить стандартные приёмы решения систем линейных уравнений, так и проявить смекалку.

Поясним выбор значений  $\alpha = 1/1,4 = 5/7$  и  $\beta = 1/3,5 = 2/7$  для предложенной задачи.

Отправным пунктом является возможность быстрого определения отношения  $t_I : t_{II}$ . Проще всего реализовать её в случае, когда скорости движения пешехода относительно неподвижной части эскалатора вниз и вверх одинаковы, что означает  $v_1 - u = v_2$  в I варианте движения и  $v_1 = v_2 + u$  во II варианте, т. е.

$$\alpha + \beta = 1 \quad (13)$$

Из уравнений (4) при этом следует:  $\gamma = \beta, \delta = \beta/2$  и

$$l = \frac{\beta ut}{2(1 - \beta^2)}.$$

Условие (13) в сочетании с ограничениями для  $\alpha$  (5) даёт:  $\beta \leq 1 - \alpha_{\min} = 0,5$ .

Если значения  $\alpha$  и  $\beta$  выражаются обыкновенными несократимыми дробями, то, в силу равенства (13),  $\alpha = p/(p + q)$  и  $\beta = q/(p + q)$ , при этом  $p \geq q$  ( $p$  и  $q$  — взаимно простые натуральные числа). В условие задачи входят значения, обратные  $\alpha$  и  $\beta$ . Если задавать их целыми числами или десятичными дробями, то  $p$  и  $q$  следует брать либо равными 1, либо не имеющими простых делителей, кроме 2 или 5. Для предложенной задачи выбраны:  $p = 5, q = 2$ .

### Задача 3

Рассмотрим теперь задачу, в которой все данные имеют числовой вид: «... Пешеход спустился по работающему эскалатору, а затем поднялся по неработающему, затратив на это движение 1 мин 45 с. Затем он спустился по неработающему эскалатору, а поднялся по работающему, затратив на это движение время 48 с. Скорость пешехода относительно эскалатора при движении вниз равна 1,25 м/с. Найти скорость движущегося эскалатора и скорость пешехода относительно эскалатора при движении вверх, если длина эскалатора составляет 35 м».

Обозначим неизвестные скорости эскалатора и пешехода соответственно  $u$  и  $v$ . Система уравнений задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{35}{1,25 - u} + \frac{35}{v} = 105, \\ \frac{35}{1,25} + \frac{35}{u + v} = 48. \end{cases}$$

Исключая из неё  $v$ , получим уравнение для  $u$ :  $48u^2 - 112u + 57 = 0$ . Корни этого уравнения:  $3/4$  и  $19/12$ , второй из которых не удовлетворяет требованию  $u < 1,25$ . Таким образом,  $u = 0,75$  м/с,  $v = 1$  м/с. Если исключать переменную  $u$ , получим уравнение для  $v$ :  $6v^2 - 7v + 1 = 0$ . Наличие корня 1 здесь просто очевидно (сумма коэффициентов равна 0), второй легко вычисляется с помощью обобщённой теоремы Виета.

Изложенная задача относится к классу, в котором независимыми параметрами являются  $\gamma$  и  $\delta$ , а уравнения (4) — это уравнения относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Исключение из системы (4) одной из этих неизвестных всегда приводит к квадратному уравнению относительно оставшейся. Поясним, как были выбраны числовые данные задачи.

Поставим цель получить в результате решения значение скорости эскалатора 0,75 м/с. Значения скоростей пешехода относительно эскалатора (как задаваемая, так и вычисляемая), а также длина эскалатора должны быть правдоподобными. Правдоподобным будем считать значение скорости не более чем с двумя знаками после десятичной запятой, в пределах от 0,75 м/с до 1,5 м/с. Правдоподобным значением  $l$  будем считать целое число (в метрах)<sup>2</sup>.

Учтём, что  $l = ut_I\delta/\alpha$ . Из первого уравнения (4) следует:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{(1 - \alpha)\beta}{\alpha(1 - \alpha + \beta)}.$$

Для простоты будем считать, что  $\alpha$  и  $\beta$  выражаются обыкновенными несократимыми дробями с одинаковыми знаменателями:  $\alpha = p/q$  и  $\beta = r/q$ . Тогда:

$$l = 0,75t_I \frac{r(q - p)}{p(q - p + r)}.$$

Здесь  $t_I$  должно выражаться в секундах, тогда  $l$  выражается в метрах. Следующий шаг: считаем, что  $p : r = 3 : 4$ . Положив  $p = 3, r = 4$  и  $q = 5$ , получим:  $l = t_I/3$ .

Таким образом,  $\alpha = 3/5$  и  $\beta = 4/5$ , что соответствует скоростям движения пешехода вниз и вверх относительно эскалатора соответственно 1,25 м/с и 1 м/с. Подставив в (4) указанные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , получим:  $\gamma = 16/35$ ,  $\delta = 4/15$ . Чтобы получить целочисленное значение  $l$ , положим  $t_I = 3 \cdot 35 = 105$  с и  $t_{II} = 3 \cdot 16 = 48$  с, тогда  $l = 35$  м.

Можно предложить и другой набор числовых данных задачи. Пусть  $q = 4$ , тогда  $\alpha = 3/4$ ,  $\beta = 1$ ,  $l = t_I/5$  и  $\gamma = 11/35$ ,  $\delta = 1/5$ . Скорость пешехода относительно эскалатора при движении вниз равна 1 м/с, время I варианта движения — 2 мин 20 с, время II варианта — 44 с, длина эскалатора — 28 м.

<sup>2</sup>Значение вида  $9\frac{9}{11}$  м выглядит странно для реальной ситуации; значение вида 18,75 м создаёт иллюзию возможности оценить длину эскалатора с точностью до сантиметра. Учащиеся, однако, должны понимать, что реальный эскалатор не может иметь произвольную длину (в том числе целочисленную) в силу типовых размеров его конструктивных элементов.

### Задача 4

В классе задач с известными значениями  $\alpha$  и  $\beta$  одной из самых простых является задача о нахождении, например,  $t_{II}$  по известному  $t_I$ , сводящаяся к определению значения  $\gamma$  из уравнения (6). Но даже в этом случае можно выявить интересные свойства математической модели, если задавать её параметры не в числовом, а в буквенном виде.

Рассмотрим такую задачу: «... Пешеход спустился по работающему эскалатору, а затем поднялся по неработающему, затратив на это движение время  $t$ . Скорость движущегося эскалатора равна  $u$ , скорость пешехода относительно эскалатора при движении вниз равна  $2u$ , при движении вверх —  $ku$  ( $k$  — положительное число, меньшее единицы). Докажите, что пешеходу с избытком хватит времени  $t/2$ , но не хватит времени  $kt/2$  на спуск по неработающему эскалатору и подъём по работающему».

Пусть  $\tau$  — время спуска по неработающему эскалатору и подъёма по работающему. Тогда система уравнений задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{l}{2u-u} + \frac{l}{ku} = t, \\ \frac{l}{2u} + \frac{l}{ku+u} = \tau, \end{cases}$$

откуда

$$\tau = \frac{k(k+3)}{2(k+1)^2} t.$$

По условию, нужно доказать, что

$$kt/2 < \tau < t/2. \quad (14)$$

Из двойного неравенства  $0 < k < 1$  следует:  $k(k+1) < 2$ . Прибавим к обеим частям последнего неравенства выражение  $k+1$ , затем разделим каждую на  $(k+1)^2$ . Получим:

$$1 < \frac{(k+3)}{(k+1)^2}. \quad (15)$$

Прибавим к обеим частям неравенства  $k < 1$  выражение  $k^2 + 2k$  и затем разделим обе части на  $(k+1)^2$ . Получим:

$$\frac{k(k+3)}{(k+1)^2} < 1. \quad (16)$$

Умножив обе части (15) на  $kt/2$  и обе части (16) на  $t/2$ , придём к двойному неравенству (14).

Учащимся старшей школы доступен и другой способ доказательства (14), основанный на исследовании поведения функций  $f(x) = (x+3)/(x+1)^2$  и  $g(x) = xf(x)$  на промежутке  $(0; 1)$ .

Изложенная задача, говоря языком школьного курса математики, относится к задачам с параметром и уже в силу этого обладает повышенным уровнем сложности. Покажем, как возникла идея такой задачи.

Можно заметить, что для тех решений системы условий (7), (5), которые удовлетворяют условию  $\beta \neq \gamma$ , выполнено неравенство

$$(\beta - \gamma)(\alpha + \gamma - 1) > 0.$$

Рассмотрим случай, когда выражения в обеих скобках отрицательны, что означает:

$$\beta < \gamma < 1 - \alpha. \quad (17)$$

Условием совместности (необходимым условием) для этого двойного неравенства является:

$$\alpha + \beta < 1. \quad (18)$$

Легко проверить, что значения  $\alpha, \beta$ , и  $\gamma$ , соответствующие исходной задаче, удовлетворяют (17). Можно доказать, что (18) является и достаточным условием для (17), т.е. из (18) следует (17),

если  $\gamma$  определяется из (6). Теперь положим  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = k/2$ ,  $\gamma = \tau/t$ , где  $t$  считается известной величиной. Тогда неравенство (18) принимает вид  $k < 1$ , а (17) — вид неравенства (14). Отсюда и вытекает возможность постановки задачи, сформулированной выше.

### Заключение

Приведённые примеры не исчерпывают полный перечень задач, вытекающих из ситуации, на которой основана исходная задача. Тем не менее, уже они показывают, что анализ математической модели реальной ситуации может помочь учителю разнообразить предлагаемые учащимся задания с точки зрения используемых математических знаний, в том числе и с целью реализации различных технологий уровневой дифференциации в обучении математике.

Обратим внимание и на следующее обстоятельство. Примерить на себя роль разработчика задач — это может быть интересно и учителю, и учащимся. Совпадение интересов — повод для выполнения проектно-исследовательской работы в данном направлении. Такая работа, с одной стороны, не требует выхода за рамки программы по математике, а с другой стороны, обладает вполне понятной практической значимостью (что немаловажно для работы, представляемой на конкурс). Более того, в работе может быть представлен и конечный продукт в виде задачника по некоторой теме, например — «Задачи на движение по эскалаторам». Что же касается непосредственно этой темы, следует отметить разнообразие ситуаций, определяемых сочетанием режимов движения эскалаторов и пешехода (или пешеходов). Отсюда следует и достаточно большое количество возможных задач. Например, для ситуации, рассмотренной в настоящей статье, только выбор пары из шести величин  $l, u, v_1, v_2, t_I, t_{II}$  возможен пятнадцатью способами.

Наконец, отметим: как изложенные выше задачи, так подходы и приёмы, использованные при их конструировании, могут быть использованы на дополнительных (факультативных или кружковых) занятиях по математическому моделированию. Дело в том, что важным этапом моделирования является интерпретация результатов в терминах соответствующей предметной области. А возможность сформулировать задачу на основе реальной ситуации как раз и означает, что задача опирается на свойства математической модели этой ситуации, допускающие ясную интерпретацию (в нашем случае — в терминах кинематики). Таким образом, конструирование задач, прежде всего исследовательского характера, можно рассматривать как технологию математического моделирования, направляющую изучение математической модели по пути поиска её хорошо интерпретируемых свойств.

Горшенин Константин Петрович, г. Москва,  
кандидат физико-математических наук.

E-mail: kpgorshenin@gmail.com



## Аппроксимация эйлеровых уравнений. Продолжение

*В. В. Ивлев, А. Н. Буланова*

В работах [1,2] впервые вводится понятие обобщенного уравнения Эйлера. Даются критерии прямого интегрирования уравнений, а также элементы обобщённого уравнения Эйлера — производящая и характеристическая функция. Далее рассматривается обобщенное уравнение Эйлера, неинтегрируемое прямым образом. Вводится класс вполне интегрируемых уравнений с произвольными параметром. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) определяется наилучшее приближение для исходного уравнения. В данной работе, которая является продолжением работ [1,2], получено альтернативное выражение характеристической функции для класса вполне интегрируемых уравнений, проводится сравнительный анализ подходов.

### Введение. Обзор работ [1,2]

В [1,2] предложено обобщенное уравнение Эйлера

$$p(x)y^{(n)} + a_1p'(x)y^{(n-1)} + \dots + a_np^{(n)}(x)y = q(x). \quad (1)$$

$p(x)$  — производящая функция для (1). Уравнение (1) интегрируется прямым образом, если

$$1 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n = 0. \quad (2)$$

В результате интегрирования (1) имеем:

$$p(x)y^{(n-1)} + \bar{a}_1p'(x)y^{(n-2)} + \dots + \bar{a}_{n-1}p^{(n-1)}(x)y = \int q(x)dx, \quad (3)$$

где:

$$\bar{a}_1 = a_1 - 1, \quad \bar{a}_2 = a_2 - \bar{a}_1, \quad \bar{a}_3 = a_3 - \bar{a}_2, \quad \dots, \quad \bar{a}_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-2} = a_n. \quad (4)$$

Пусть, далее, имеет место:

$$1 - \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + (-1)^n \bar{a}_{n-1} = 0. \quad (5)$$

Или, что то же,

$$n - (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \dots + (-1)^n a_n = 0. \quad (5')$$

Тогда имеет место повторное интегрирование:

$$p(x)y^{(n-2)} + \bar{\bar{a}}_1p'(x)y^{(n-3)} + \dots + \bar{\bar{a}}_{n-2}p^{(n-2)}(x)y = \iint q(x)dx. \quad (6)$$

Рекурсивность процедуры очевидна.

Вводится специальная функция  $\varphi(x)$  вида  $\varphi(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n$  — характеристическая функция для (1). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(1) = \varphi(x) \Big|_{x=1} &= 0 \text{ — однократное интегрирование (1);} \\ \varphi(1) = \varphi'(1) &= 0 \text{ — двукратное интегрирование (1); и т. д.} \end{aligned}$$

В частности, если уравнение (1) интегрируется  $n$  раз, т. е. выполнено  $\varphi(1) = \varphi'(1) = \dots = \varphi^{(n-1)}(1) = 0$ , то левая часть (1) тривиальным образом переходит в формулу Лейбница  $(p(x)y)^{(n)} = q(x)$ , а коэффициенты  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  — это коэффициенты бинома Ньютона  $a_i = C_n^i$ .

В работе [2] рассматривается обобщенное уравнение Эйлера, неинтегрируемое прямым образом, т. е. даже  $\varphi(1) \neq 0$ .

С целью аппроксимации таких уравнений вводится класс *вполне интегрируемых уравнений*.

**Определение:** Уравнений Эйлера называется *вполне интегрируемым*, если оно прямым интегрированием сводится к уравнению первого порядка.

Рассмотрим класс (семейство) уравнений с коэффициентами  $\{\bar{a}_i\}$ , таких, что

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \varphi'(1) = 0, \\ \dots \\ \varphi^{(n-2)}(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

но  $\varphi^{(n-1)}(1) \neq 0$ . Решая систему (7) получаем семейство вполне интегрируемых уравнений с параметром  $\bar{a}_1$ .

Множество кортежей коэффициентов уравнений Эйлера в функции от  $\bar{a}_1$  для порядков 2–6 даны в таблице 1.

Таблица 1.

$n$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
2	$\bar{a}_1 - 1$				
3	$2\bar{a}_1 - 3$	$\bar{a}_1 - 2$			
4	$3\bar{a}_1 - 6$	$3\bar{a}_1 - 8$	$\bar{a}_1 - 3$		
5	$4\bar{a}_1 - 10$	$6\bar{a}_1 - 20$	$4\bar{a}_1 - 15$	$\bar{a}_1 - 4$	
6	$5\bar{a}_1 - 15$	$10\bar{a}_1 - 40$	$10\bar{a}_1 - 45$	$5\bar{a}_1 - 24$	$\bar{a}_1 - 5$

Переходим к аппроксимации неинтегрируемого уравнения (1) с кортежем коэффициентов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Пусть  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2(\bar{a}_1), \dots, \bar{a}_n(\bar{a}_1))$  — коэффициенты вполне интегрируемых уравнений с параметром  $\bar{a}_1$ . Рассмотрим расхождение (МНК) вида:

$$Q(\bar{a}_1) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Необходимо, чтобы

$$\frac{dQ(\bar{a}_1)}{d\bar{a}_1} = -2 \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_i) \frac{d\bar{a}_i}{d\bar{a}_1} = 0 \quad (8)$$

В (8) все  $\bar{a}_i = f(\bar{a}_1)$ ,  $i = 2, \dots, n$ . Не утомляя читателя, приведем решения для уравнений при  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  (таблица 2), где приведены  $\bar{a}_{1\text{опт}}$ .

Таблица 2.

$n$	$\bar{a}_{1\text{опт}}$
2	$(a_1 + a_2 + 1)/2$
3	$(a_1 + 2a_2 + a_3 + 8)/6$
4	$(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 + 45)/20$
5	$(a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5 + 224)/70$
6	$(a_1 + 5a_2 + 10a_3 + 10a_4 + 5a_5 + a_6 + 1050)/252$

Общий итог: Ближайший аналог неинтегрируемого уравнения с точностью до МНК сводится к уравнению 1-го порядка вида:

$$p(x)y' + (\bar{a}_1 - n + 1)p'(x)y = \iint \dots \int q(x)dx^{n-1}. \quad (9)$$

В уравнении (9) в правой части опущена сумма  $\sum_{i=0}^{n-2} c_i x^i$ .

### Алгебраический подход к построению $\varphi(x)$

До сих пор авторы не использовали алгебраическое свойство многочленов одной переменной, позволяющее построить множество вполне интегрируемых уравнений с несколько иной точки зрения, основанной на прямом построении характеристической функции  $\varphi(x)$ .

Известно, что всякий многочлен  $n$ -ого порядка одной переменной имеет  $n$  действительных или комплексно-сопряженных корней.

Рассмотрим характеристическую функцию  $\varphi(x)$  уравнения (1) в общем виде:

$$\varphi(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n$$

Пусть уравнение (1) интегрируется прямым образом, т. е.

$$\varphi(1) = 1 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n = 0$$

Но тогда  $x = 1$ , есть корень многочлена  $\varphi(x)$  и  $\varphi(x)$  представимо в виде  $\varphi(x) = (x-1)\varphi_1(x)$ , где  $\varphi_1(x)$  многочлен порядка  $(n-1)$ .

Если (1) интегрируется повторно, то  $\varphi(x)$  принимает вид  $\varphi(x) = (x-1)^2 \varphi_2(x)$ , где  $\varphi_2(x)$  многочлен порядка  $(n-2)$ , и так далее.

Обратимся к множеству вполне интегрируемых уравнений, где

$$\begin{cases} \varphi(1) = 0, \\ \varphi'(1) = 0, \\ \dots \\ \varphi^{(n-2)}(1) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $\varphi(x) = (x-1)^{n-1} \varphi_{n-1}(x)$ , где  $\varphi_{n-1}(x) = x - \lambda$  — двучлен первой степени от  $x$ . Но  $\varphi(0) = (-1)^n \bar{a}_n$ . Тогда  $\varphi(0) = (-1)^n (-\lambda) = (-1)^n a_n$ , т. е.  $\lambda = \bar{a}_n$ .

Итак, имеем для множества вполне интегрируемых уравнений характеристическую функцию вида (удивительно просто):

$$\varphi(x) = (x-1)^{n-1} (x - \bar{a}_n) \quad (10)$$

где  $\bar{a}_n$  произвольный параметр, не равный единице ( $\bar{a}_n \neq 1$ ).

Любопытно, что, в отличие от предыдущего класса [2] вполне интегрируемых уравнений, произвольным параметром является не первый член  $\bar{a}_1$ , а последний  $\bar{a}_n$ .

Раскрывая (10), можно получить все коэффициенты  $\bar{a}_i = f(\bar{a}_n)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  или использовать формулу Тейлора в точке разложения  $x=0$  с обратной нумерацией коэффициентов  $\bar{a}_i$ .

$$\begin{cases} \bar{a}_n = \frac{\varphi(0)}{0!} (-1)^n, \\ \bar{a}_{n-1} = \frac{\varphi'(0)}{1!} (-1)^{n-1}, \\ \dots \\ \bar{a}_1 = \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} (-1)^1. \end{cases} \quad (11)$$

или

$$\bar{a}_{n-k} = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (-1)^k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Удаётся решить (11) в явной форме ( $k = 1, \dots, n-1$ ):

$$\bar{a}_{n-k} = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} (-1)^{n-k} = \left( C_{n-1}^k (x - \bar{a}_n)^{n-1-k} + C_{n-1}^{k-1} (x - \bar{a}_n)^{n-k} \right) (-1)^{n-k}.$$

В точке  $x=1$  получим:

$$\bar{a}_{n-k} = C_{n-1}^k \bar{a}_n + C_{n-1}^{k-1}. \quad (12)$$

Для  $n$  от 2 до 6 коэффициенты  $\bar{a}_i$  приведены в таблице 3.

Таблица 3.

$n$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$
2	$\bar{a}_2 + 1$	$\bar{a}_2$				
3	$\bar{a}_3 + 2$	$2\bar{a}_3 + 1$	$\bar{a}_3$			
4	$\bar{a}_4 + 3$	$3\bar{a}_4 + 3$	$3\bar{a}_4 + 1$	$\bar{a}_4$		
5	$\bar{a}_5 + 4$	$4\bar{a}_5 + 6$	$6\bar{a}_5 + 4$	$4\bar{a}_5 + 1$	$\bar{a}_5$	
6	$\bar{a}_6 + 5$	$5\bar{a}_6 + 10$	$10\bar{a}_6 + 10$	$10\bar{a}_6 + 5$	$5\bar{a}_6 + 1$	$\bar{a}_6$

Проведем аппроксимацию функции по МНК для системы (10), (11). Запишем расхождение

$$Q(\bar{a}_{n-1}) = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Необходимо, чтобы

$$\frac{dQ(\bar{a}_n)}{d\bar{a}_n} = -2 \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_i) \frac{d\bar{a}_i}{d\bar{a}_n} = 0. \quad (13)$$

Решая (13) находим  $\bar{a}_{\text{нопт}}$ .

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\bar{a}_n)}{d\bar{a}_n} &= -2 \left( (-\bar{a}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-k} - \left( C_{n-k}^k a_n + C_{n-k}^{k-1} \right) C_{n-k}^k \right) = 0, \\ \bar{a}_{\text{нопт}} &= \frac{a_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-k}^k \left( a_{n-k} + C_{n-1}^{k-1} \right)}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (C_{n-1}^k)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В таблице 4 приведены значения  $\bar{a}_{\text{нопт}}$  для  $n$  от 2 до 6.

Таблица 4.

$n$	$\bar{a}_{\text{нопт}}$
2	$(a_1 + a_2 - 1)/2$
3	$(a_1 + 2a_2 + a_3 - 4)/6$
4	$(a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4 - 15)/20$
5	$(a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + a_5 - 56)/70$
6	$(a_1 + 5a_2 + 10a_3 + 10a_4 + 5a_5 + a_6 - 210)/252$

### Анализ двух множеств интегрируемых уравнений

Рассмотрим преимущества и недостатки двух множеств интегрируемых уравнений, а также их эквивалентность. Множество с параметром  $\bar{a}_1$ , полученное ранее в [2], обозначим через  $M_1$ . Множество данной работы с параметром  $\bar{a}_n$  — через  $M_2$ .

Очевидным преимуществом  $M_2$  является простое построение аналитической формы характеристической функции  $\varphi(x) = (x-1)^{n-1}(x-\bar{a}_n)$ , а отсюда и получение конечных формул для  $\{\bar{a}_i\}$  и  $\bar{a}_{\text{нопт}}$ . Подчеркнем, что в случае  $M_1$  общее выражение для  $\varphi(x)$ ,  $\{\bar{a}_i\}$  и  $\bar{a}_{\text{нопт}}$  получается с большими трудностями и эти задачи решаются прямым перебором при малых  $n$  (таблица 1, таблица 2).

Сравнение таблицы 1 и таблицы 3 показывает линейную зависимость коэффициентов  $\{\bar{a}_i\}$  от параметров  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_n$ . Далее, свободные члены в таблице 3 меньше, чем эти же члены таблицы 1. Это же относится к таблицам 2 и 4. В этом смысле, при ручных вычислениях, предпочтительнее использовать формулы для  $M_2$  и таблицы 3 и 4.

Наконец, покажем эквивалентность множеств  $M_1$  и  $M_2$  и идентичность оптимальных интегрируемых уравнений, соответствующих  $M_1$  и  $M_2$ . К сожалению, общих формул типа (10), (12) и (14) для множества  $M_1$  не удастся получить, поэтому поступим следующим образом.

Из формулы (12)  $\bar{a}_{n-k} = C_{n-1}^k \bar{a}_n + C_{n-1}^{k-1}$  следует, что при  $k = n - 1$  имеем:

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_n + (n + 1). \quad (15)$$

Напрашивается мысль: если множества  $M_1$  и  $M_2$  эквивалентны, то значения  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_n$  из (15) переводят таблицу 1 в таблицу 3 и наоборот, если  $\bar{a}_n$  заменить на  $\bar{a}_1$ . Прямая проверка этих утверждений дает положительный результат.

Рассмотрим далее таблицы 2 и 4. В соответствии с формулой (13)  $\bar{a}_{1opt}$  и  $\bar{a}_{nopt}$  должны также ей удовлетворять, т. е.

$$\bar{a}_{1opt} = \bar{a}_{nopt} + (n + 1) \quad (16)$$

Прямая проверка также подтверждает справедливость (16).

Итак, результаты анализа моделей множеств  $M_1$  и  $M_2$  приведены в следующих выводах.

1. Множества  $M_1$  и  $M_2$  эквивалентны.
2. Целесообразнее использовать модель  $M_2$ , имеющую аналитическое выражение для  $\varphi(x)$ ,  $\bar{a}_n$  и  $\bar{a}_{nopt}$  и меньшие значения свободных членов в таблицах 3, 4.
3. Интегрируемый аналог исходного неинтегрируемого уравнения Эйлера (1) имеет вид, коэффициенты которого по МНК определяются по таблице 3 формулой  $\bar{a}_{n-k} = C_{n-1}^k \bar{a}_{nopt} + C_{n-1}^{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ , а параметр  $\bar{a}_{nopt}$  — по таблице 4.
4. Прямым интегрированием аналог (1) сводится к уравнению первого порядка

$$p(x)y' + \bar{a}_{nopt}p'(x)y = \int \int \dots \int q(x)dx^{n-1}.$$

## Литература

1. Ивлев В.В., Баранова М.В. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений // Математическое образование. - № 4 (64). - 2012.
2. Буланова А.Н., Ивлев В.В. Аппроксимация эйлеровых уравнений // Математическое образование. - № 2 (82). - 2017.

*Ивлев Валерий Васильевич,  
профессор кафедры Общих математических  
и естественнонаучных дисциплин Московского  
финансово-юридического университета МФЮА,  
доктор технических наук.*

*E-mail: vvivlev@yandex.ru*

*Буланова Алина Николаевна,  
доцент кафедры Общих математических  
и естественнонаучных дисциплин Московского  
финансово-юридического университета МФЮА,  
кандидат экономических наук.*

*E-mail: alina0405@mail.ru*

# Метод траекторий в комбинаторике и теории вероятностей

Н. А. Рашевский

Для решения комбинаторной или вероятностной задачи часто целесообразно использование ее геометрической интерпретации, сводящей задачу к подсчету числа путей (траекторий), обладающих определенными свойствами. В этом состоит метод траекторий. В статье описано применение метода траекторий для решения комбинаторных и вероятностных задач. Приведена геометрическая интерпретация основных комбинаторных структур.

## Геометрическая интерпретация комбинаторных структур

Термин «метод траекторий» ввел Б. В. Гнеденко в 1951–1954 гг. Названный метод академик Гнеденко со своими учениками успешно применил для решения ряда важных задач математической статистики. Основой метода траекторий можно считать простую идею геометрической интерпретации биномиальных коэффициентов  $C_n^k$ .

Рассмотрим на плоскости систему координат  $Oxy$ , и подсчитаем число кратчайших путей, проходящих по отрезкам клеток координатной сетки и соединяющих начало координат  $O(0; 0)$  с точкой  $A(k; n - k)$ ;  $n$  и  $k$  — целые числа. Очевидно, что длина любого кратчайшего пути равна  $n$ , так как ломаная  $OA$ , являющаяся этим кратчайшим путем, содержит  $k$  горизонтальных звеньев и  $n - k$  вертикальных (рис. 1).

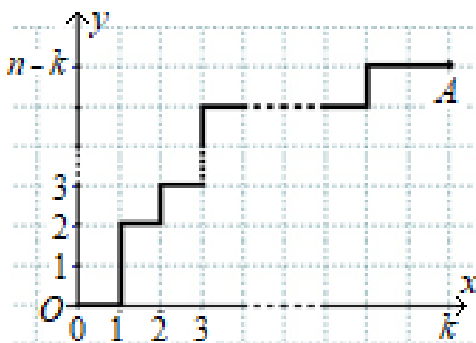


Рис. 1.

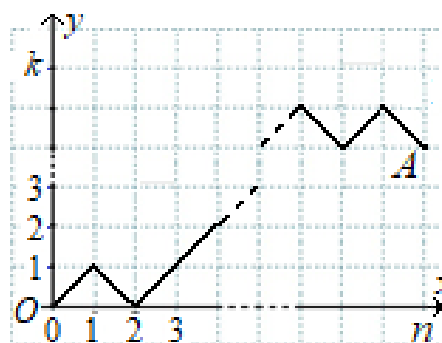


Рис. 2.

Для построения каждого из путей необходимо выбрать положения  $k$  горизонтальных отрезков из  $n$  возможных положений (или  $n - k$  вертикальных), а сделать это можно  $C_n^k$  способами ( $C_n^{n-k}$  способами при выборе вертикалей). Таким образом, имеем геометрическую интерпретацию биномиальных коэффициентов и комбинаторное тождество  $C_n^k = C_n^{n-k}$ . **Комбинации** или сочетания **без повторений**, как известно, являются неупорядоченными  $k$ -элементными подмножествами  $n$ -элементного множества  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ . Число сочетаний равно  $C_n^k$ . Таким образом, каждой комбинации взаимно однозначно соответствует кратчайшая ломаная, соединяющая начало координат с данной точкой  $A$ . Ломаную  $OA$  будем называть *траекторией*. Траекторию, интерпретирующую биномиальные коэффициенты, можно также изобразить, как показано на рис. 2. Этой траектории «разрешено» проходить ниже оси абсцисс. Именно так чаще рисуют траектории при решении задач теории вероятностей. Здесь ломаная  $OA$  состоит из  $n$  звеньев,  $k$  из которых идут вверх, и проходит из точки  $O$  в точку  $A(n; 2k - n)$ , соединяя звеньями узлы клеток целочисленной решетки. И в том, и в другом случае каждой ломаной можно поставить в соответствие последовательность вида 1100101...10, состоящую из  $n - k$  нулей и  $k$  единиц, где единица соответствует вертикальной составляющей ломаной

на рис. 1 (идущей вверх на рис. 2), а ноль — горизонтальной (идущей вниз). Поставим в соответствие комбинации последовательность длины  $n$  из нулей и единиц по следующему правилу: элемент  $a_s$  входит в комбинацию, если на  $s$ -м месте в последовательности стоит единица. С помощью таких последовательностей между траекториями и комбинациями без повторений устанавливается биекция. Траектория на рис. 1 соответствует множеству  $\{a_2, a_3, a_5, \dots, a_{n-2}\}$ , поскольку обеим ставится в соответствие последовательность 011010...100. Траектории на рис. 2 —  $k$ -элементная комбинация без повторений  $\{a_1, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}\}$ , так как обе можно задать последовательностью 1011...010.

Исторически «метод траекторий» появился, или вернее сказать, заявил о себе после статьи Б.В. Гнеденко и В.С. Королюка [6] по разработке методов контроля качества продукции [см. также 4, стр. 69]. Переформулировкой рассматриваемой в [6] задачи есть приведенная ниже задача 4 об очереди в кассу [5, стр. 37]. Методом траекторий (МТ) принято называть сведение комбинаторной или вероятностной задачи к геометрическим рассуждениям, к подсчету числа ломаных, соединяющих определенные точки плоскости (или пространства). До появления термина «метод траекторий» геометрические рассуждения использовались, например, при изучении случайных блужданий при наличии отражающей и поглощающей границ в [10, стр. 13–18]. МТ в прошлом веке вошел в учебники и пособия по теории вероятностей и дискретной математике [5; 9; 11], и в нынешнем веке интерес к нему не исчерпался [8].

Приведем геометрическую интерпретацию других комбинаторных структур. Напомним основные структуры, используя так называемую унифицированную схему комбинаторных структур [2, стр. 16], которая в несколько упрощенном виде изображается следующей таблицей (в оригинале без перестановок с повторениями).

	Без повторений	С повторениями
Упорядоченные	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ , $P_n = n!$	$A_n^k = n^k$ , $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$
Неупорядоченные	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_n^k = C_{n+k-1}^k$

Впервые такая таблица появилась, по-видимому, в [12]. Затем в [2] переработана и приведена (со ссылкой на [12]) как **унифицированная схема комбинаторных структур**. Позже подобные таблицы или их графовые реализации появлялись у разных авторов (в том числе и у автора настоящей статьи, например, в [15]) с разными названиями и с целью использования в преподавании комбинаторных тем школьного и вузовского курсов математики. Об этом речь пойдет ниже, а сейчас дадим геометрическую интерпретацию комбинациям с повторениями.

Если на рис. 1 заменить числа  $0, 1, 2, \dots, k$  на оси  $Ox$  соответственно буквами  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ , и траекторию на рис. 3 интерпретировать как количество вхождений элемента  $a_s$ , равное длине звена, расположенного над точкой  $a_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, k+1$ , то получим геометрическую интерпретацию **комбинаций с повторениями**. Так, траектория рис.3 указывает на вхождение в комбинацию элементов  $a_2, a_2, a_3, a_4, \dots, a_4, \dots, a_{k-1}$ . На рис. 4 изображена комбинация  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}$ .

Число всех комбинаций с повторениями равно  $\bar{C}_{k+1}^{n-k}$  (из  $k+1$  элемента выбираем  $n-k$ , допуская повторения). Очевидное взаимно-однозначное соответствие между траекториями рисунков 1 и 3 позволяет записать равенство  $\bar{C}_{k+1}^{n-k} = C_n^{n-k}$ , где правая часть записана в соответствии с рисунком 1. Если заменить на осях абсцисс рисунков 2 и 3 индексы  $k+1$  на  $n$ , и на осях ординат  $n-k$  на  $k$ , то получим привычную запись  $\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$ . Таким образом, комбинации с повторениями и без повторения имеют одну и ту же геометрическую интерпретацию, отличаясь наименованиями шкалы по оси абсцисс. На рисунке 4 изображена траектория комбинации с повторениями, но над каждым элементом расположено не более одного отрезка ломаной. Число таких траекторий равно  $C_{k+1}^{n-k}$  (число способов выбора из  $k+1$  места  $n-k$  для расположения вертикальных отрезков).

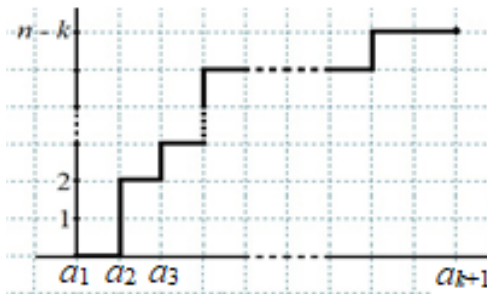


Рис. 3.

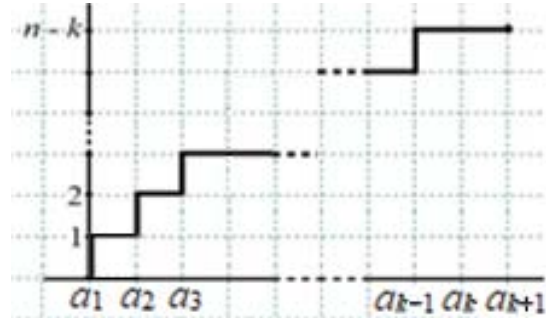


Рис. 4.

Траектория на рисунке 3 иллюстрирует также количество целых неотрицательных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n - k$ . Действительно, взяв значение  $x_i$  равное длине отрезка над  $a_i$ , получим одно из решений уравнения. Количество же решений будет равно количеству всевозможных траекторий.

Рассмотрим в системе координат  $Oxyz$  прямоугольный параллелепипед со сторонами  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  (рис. 5). Подсчитаем количество кратчайших ломаных, проходящих по ребрам координатной кубической решетки, и соединяющей начало координат  $O(0; 0; 0)$  с точкой  $A(n_1; n_2; n_3)$ . Каждая из таких ломанных состоит из  $n_1 + n_2 + n_3 = n$  звеньев, из которых  $n_1$  параллельны оси  $Ox$ ,  $n_2$  параллельны  $Oy$ , и  $n_3$  параллельны  $Oz$ . Для построения любой ломанной необходимо выбрать положения  $n_1$  звеньев, параллельных  $Ox$  (для этого есть  $C_n^{n_1}$  способов),  $n_2$  — параллельных  $Oy$  ( $C_{n-n_1}^{n_2}$  способами), и оставшиеся  $n_3$  места заполнят звенья, параллельные  $Oz$  ( $C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_{n_3}^{n_3} = 1$ ) способом. Число звеньев ломаной  $T$  в соответствии с правилом произведения равно  $C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} = P_n(n_1, n_2, n_3)$ . Таким образом, геометрической интерпретацией **перестановок с повторениями** можно считать кратчайшие ломаные, что соединят вершины  $O(0; 0; 0)$  и  $A(n_1; n_2; n_3)$  прямоугольного параллелепипеда. Эти ломаные также назовем *траекториями*. О проекции  $T'$  траектории  $T$  на плоскость  $Oxy$  речь будет идти ниже.

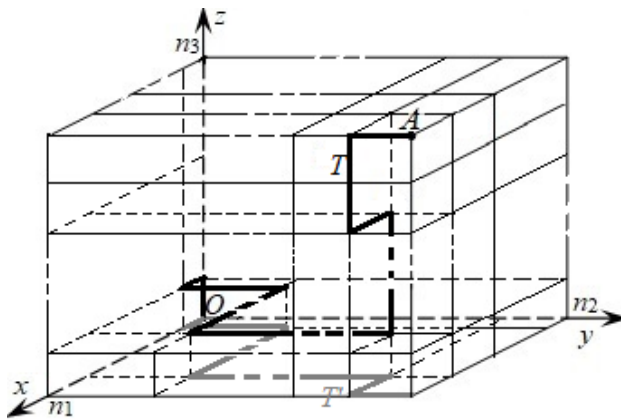


Рис. 5.

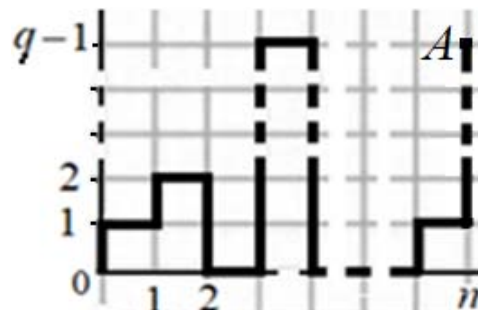


Рис. 6.

Большим достоинством МТ является чрезвычайная наглядность. Однако в случае возрастания размерности наглядность теряется. Аналогичную геометрическую иллюстрацию в  $k$ -мерном пространстве имеют и перестановки с повторениями, количество которых есть  $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , но уже без какой-либо наглядности.

Рассмотренные до сих пор плоские траектории были кратчайшими путями из начала координат к данной точке, и по целочисленной решетке могли проходить только вверх и вправо. Если отказаться от этого условия, и «разрешить» траектории идти также вниз, но влево по оси  $Ox$  или ниже оси



все же запрещается, то получим геометрическую иллюстрацию **выборок с повторениями**, число которых равно  $\bar{A}_q^n$ , или выборки без повторений. Действительно, каждой ломаной, соединяющей точки  $O(0;0)$  и  $A(n; q-1)$  и имеющей вид столбиковой диаграммы (рис. 6), поставим в соответствие  $n$ -значное число в системе счисления с основанием  $q$  так, чтобы высота  $s$ -го столбика равнялась цифре на  $s$ -й позиции. Поскольку таких чисел (включительно с числами, начинающимися с нуля и самым нулем  $000 \dots 00$ ) по правилу произведения есть  $q \cdot q \cdot q \cdots q \cdot q = q^n$ , или  $\bar{A}_q^n$ , то нарисованную диаграмму можно считать геометрической интерпретацией выборки с повторением, где из  $q$  элементов множества выбираются с возвращением  $n$  элементов. Диаграмме на рис. 6 соответствует число  $(120 \dots (q-1)0 \dots 01)_q$ . **Выборки без повторений** получаются, если потребовать, чтобы все столбики имели разную высоту, что выполнимо только при  $n \leq q$ . Их число составляет  $A_q^n$ . При  $n = q$  получаем траектории для **перестановок**, количество которых равно  $P_n = n!$ . Конечно, последние траектории несравненно беднее на предмет получения комбинаторных тождеств, чем траектории комбинаций или биномиальных коэффициентов, и введение их, вообще говоря, является искусственным. Однако, кроме наглядности вполне реально и применение этих траекторий при решении задач. На возможность геометрической интерпретации перестановок с повторениями в  $n$ -мерном пространстве и использования ее для доказательства тождеств указано в [3, стр. 139]. Подсчитать количество траекторий перестановок с повторениями можно и такими рассуждениями. Рассмотрим проекцию  $T'$  пространственной траектории  $T$  на плоскость  $Oxy$  (рис. 5). Согласно геометрической интерпретации биномиальных коэффициентов, на плоскости  $Oxy$  существует  $C_{n_1+n_2}^{n_1}$  траекторий. Посчитаем количество пространственных траекторий, которые проецируются на  $T'$ . Траектория  $T'$  состоит из  $n_1 + n_2$  звеньев, и в любой из  $n_1 + n_2 + 1$  концевых точек любого ее звена траектория  $T$  может отклониться вверх от  $T'$  на 1, 2,  $\dots$ ,  $n_3$  шагов. То есть, для построения ломаной  $T$  надо выбрать  $n_3$  точек (с повторениями) из  $n_1 + n_2 + 1$  концевых точек звеньев ломаной  $T'$  для размещения  $n_3$  вертикальных составляющих траектории  $T$ . Это можно сделать  $\bar{C}_{n_1+n_2+1}^{n_3} = C_{n_1+n_2+n_3}^{n_3} = C_n^{n_3}$  способами. По правилу произведения количество пространственных траекторий равно  $C_{n_1+n_2}^{n_1} \cdot C_n^{n_3} = P_n(n_1, n_2, n_3)$ .

### Метод траекторий в доказательстве комбинаторных тождеств

МТ является эффективным методом доказательства комбинаторных тождеств [3; 8; 13]. С этой целью подсчитывают двумя способами количество траекторий, соединяющих данные две точки. Результат, полученный непосредственным подсчетом, приравнивают к результату, полученному применением правил суммы и произведения для подсчета траекторий, проходящих через определенные промежуточные точки. Как известно (рис.1), существует  $C_n^k$  кратчайших путей (траекторий), соединяющих точки  $O(0;0)$  и  $A(k; n-k)$ . Нетрудно сосчитать количество траекторий, соединяющих целочисленные точки  $(a;b)$  и  $(c;d)$ . Оно составляет  $C_{d+c-a-b}^{d-b}$ . Действительно, кратчайшая ломаная состоит из  $(c-a)$  горизонтальных и  $(d-b)$  вертикальных отрезков. Поэтому для ее построения необходимо указать положения  $(d-b)$  вертикальных отрезков из общего количества  $(c-a) + (d-b)$  мест (длина траектории), откуда и получается требуемый результат. Если подсчитывать траектории, изображенные на рисунке 2, то таких имеется в количестве  $C_{c-a}^{\frac{c+d-b-a}{2}}$ . Действительно, предположив, что в этой траектории  $x$  звеньев идет вверх, и  $y$  звеньев вниз, для вычисления  $x$  и  $y$  надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = c - a, \\ y - x = d - b. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, находим  $x = \frac{c-a+d-b}{2}$ , откуда и следует записанное количество траекторий: из  $c-a$  возможных мест надо указать  $x$  звеньев, идущих вверх. Такими траекториями можно соединить не любые две точки плоскости, для которых выполнены равенства  $a < c$  и  $b \leq d$ . Необходимо, чтобы длина траектории выражалась четным числом, что будет ниже сформулировано в теореме 1. Такие траектории при доказательстве тождеств не будут использоваться. Заметим, что условие  $b \leq d$  не обязательно, если при выводе формулы взять модуль разности  $d-b$ .

Докажем некоторые комбинаторные тождества. Рассмотрим два из них:

$$C_{2n}^n = C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n \quad \text{и} \quad C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2. \quad (1)$$

В соответствии с геометрической интерпретацией биномиальных коэффициентов, существует  $C_{2n}^n$  кратчайших путей (рис. 7), соединяющих точки  $O(0;0)$  и  $A(n;n)$ . Аналогично,  $C_{2n-1}^{n-1}$  кратчайших путей соединяют точку  $O$  с точкой  $B_1(n-1;n)$ , а  $C_{2n-1}^n$  путей — точку  $O$  с точкой  $B_2(n;n-1)$ . Поскольку каждый путь, заходящий в  $A(n;n)$  проходит либо через точку  $B_1$ , либо через точку  $B_2$ , то получаем по правилу суммы тождество  $C_{2n}^n = C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n$ , которое чаще записывают как  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ . Последнее получается из таких же рассуждений с рис. 1. Поскольку комбинации с повторениями имеют такую же геометрическую интерпретацию, то для них доказанное тождество запишется в виде  $\bar{C}_{n+1}^n = \bar{C}_{n+1}^{n-1} + \bar{C}_n^n$ .

Второе из тождеств (1) доказывается следующим образом (рис. 7). Каждая из  $C_{2n}^n$  траекторий из точки  $O$  в точку  $A(n;n)$  пройдет через одну из «диагональных» точек  $A_1(n;0)$ ,  $A_2(n-1;1), \dots, A_{n+1}(0;n)$ . Траекторий из точки  $O$  в точку  $A_s(n-s+1;s-1)$  существует  $C_n^{s-1}$ , и столько же траекторий соединяют точку  $A_s$  с точкой  $A(n;n)$ ,  $s = 1, 2, \dots, n+1$ . По правилу произведения имеем  $C_n^{s-1} \cdot C_n^{s-1}$  траекторий, проходящих через точку  $A_s$ . Применив правило суммы, получаем доказываемое тождество.

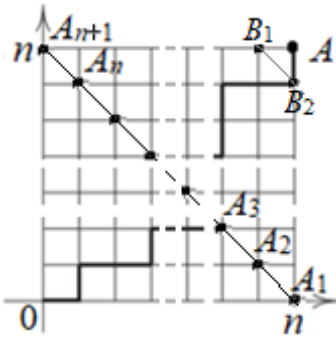


Рис. 7.

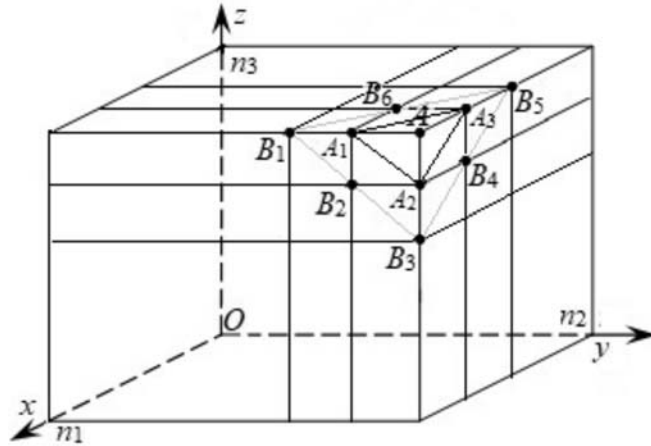


Рис. 8.

Заметим также, что все траектории из точки  $O$  в точки  $A_s$  имеют длину  $n$ . Нетрудно подсчитать количество всех таких траекторий, записывая последовательность длины  $n$ , состоящую из нулей и единиц. Число последовательностей равно  $2^n$ , откуда получаем тождество  $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ . Обобщением последнего тождества является следующее тождество:  $\sum_{n_1+n_2+n_3=m} P_m(n_1, n_2, n_3) = 3^m$ . Однако получение его подсчетом количества пространственных траекторий длины  $m$ , с использованием геометрической интерпретации перестановок с повторениями (рис. 5), не столь наглядно.

Используя геометрическую интерпретацию перестановок с повторениями, докажем тождество

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, n_3) + P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, n_3) + P_{n-1}(n_1, n_2, n_3 - 1).$$

Действительно,  $P_n(n_1, n_2, n_3)$  кратчайших путей соединяют начало координат  $O(0;0;0)$  с точкой  $A(n_1; n_2; n_3)$  (рис. 8). Из них  $P_{n-1}(n_1, n_2 - 1, n_3)$  пройдет через точку  $A_1(n_1; n_2 - 1; n_3)$ ,  $P_{n-1}(n_1, n_2, n_3 - 1)$  — через точку  $A_2(n_1; n_2; n_3 - 1)$ , и  $P_{n-1}(n_1 - 1, n_2, n_3)$  путей пройдет через точку  $A_3(n_1 - 1; n_2; n_3)$ . Откуда по правилу суммы получаем записанное тождество.

Из того же рисунка видно, что каждая траектория  $OA$  пройдет через одну из точек  $B_1(n_1; n_2 - 2; n_3)$ ,  $B_2(n_1; n_2 - 1; n_3 - 1)$ ,  $B_3(n_1; n_2; n_3 - 2)$ ,  $B_4(n_1 - 1; n_2; n_3 - 1)$ ,  $B_5(n_1 - 2; n_2; n_3)$ ,  $B_6(n_1 - 1; n_2 - 1; n_3)$ . Траекторий  $OB_1$  всего  $P_{n-2}(n_1; n_2 - 2; n_3)$ , а  $B_1A$  — одна. Траекторий  $OB_2$  всего  $P_{n-2}(n_1; n_2 - 1; n_3 - 1)$ , а  $B_2A$  — две:  $B_2A_1A$  и  $B_2A_2A$ . Продолжая рассматривать все пути, проходящие через указанные шесть точек, по правилам произведения и суммы получим тождество:

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = P_{n-2}(n_1 - 2, n_2, n_3) + P_{n-2}(n_1, n_2 - 2, n_3) + P_{n-2}(n_1, n_2, n_3 - 2) + \\ + 2P_{n-2}(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3) + 2P_{n-2}(n_1 - 1, n_2, n_3 - 1) + 2P_{n-2}(n_1, n_2 - 1, n_3 - 1).$$

Следующее тождество получается подсчетом траекторий, пересекающих фиксированную вертикаль.

Рассмотрим все траектории, соединяющие точку  $O(0; 0)$  и точку  $A(n - m + k + 1; m)$ . Их число равно  $C_{n+k+1}^m$ . Каждая из них пересекает прямую, проходящую перпендикулярно оси абсцисс между точками  $(k; 0)$  и  $(k+1; 0)$ , в единственной точке (рис. 9). Подсчитаем число траекторий, содержащих отрезок  $A_k A_{k+1}$ . Каждая такая траектория состоит из двух частей —  $OA_k$  и  $A_k A_{k+1}$ . Число кратчайших ломаных, соединяющих точки  $O(0; 0)$  и  $A_k(k; r)$  равно  $C_{k+r}^r$ , а соединяющих  $A_{k+1}(k+1; r)$  с точкой  $A(n - m + k + 1; m)$ , — соответственно  $C_{n-r}^{m-r}$ . По правилу произведения число всех траекторий, содержащих указанный отрезок, составляет  $C_{k+r}^r \cdot C_{n-r}^{m-r}$ . Суммируя по всевозможным значениям  $r$  от 0 до  $m$ , получаем тождество

$$C_k^0 \cdot C_n^m + C_{k+1}^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + C_{k+2}^2 \cdot C_{n-2}^{m-2} + \dots + C_{k+m}^m \cdot C_{n-m}^0 = C_{n+k+1}^m.$$

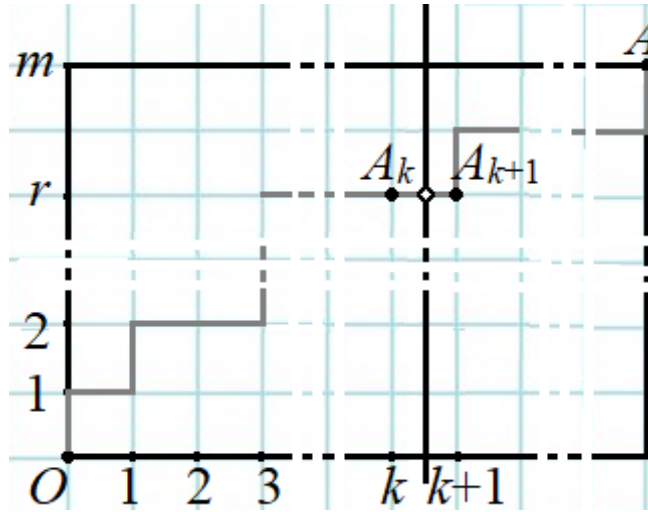


Рис. 9.

Если  $k = 0$ , то получаем тождество в виде

$$C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2} + \dots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m,$$

а положив  $k = 1$  — тождество

$$C_n^m + 2C_{n-1}^{m-1} + 3C_{n-2}^{m-2} + \dots + (m+1)C_{n-m}^0 = C_{n+2}^m$$

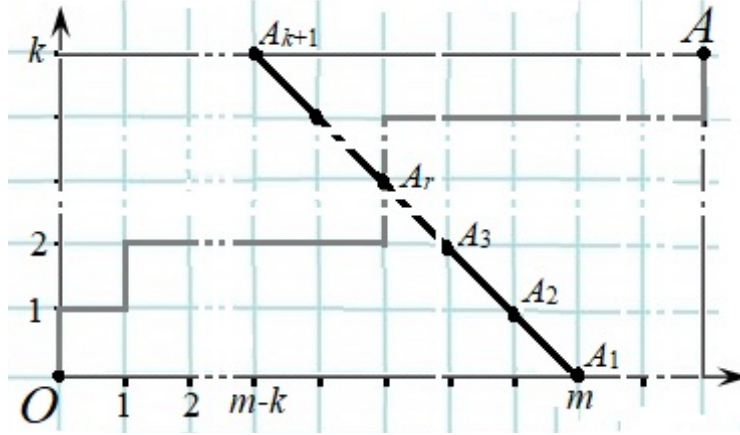


Рис. 10.

Рассуждая аналогично, и используя рисунок 10, получим следующее комбинаторное тождество:

$$C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + C_n^2 \cdot C_m^{k-2} + \dots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{n+m}^k.$$

Действительно, каждая кратчайшая ломанная из  $O(0; 0)$  в  $A(n+m-k; k)$ , а их всего  $C_{n+m}^k$ , пересечет прямую, содержащую точки  $A_1(m; 0)$ ,  $A_2(m-1; 1)$ ,  $A_3(m-2; 2)$ ,  $\dots$ ,  $A_{r+1}(m-r; r)$ ,  $\dots$ ,  $0 \leq r \leq k$ , только в одной из указанных точек. Поскольку число траекторий  $OA_1$  равно  $C_m^0$ , а траекторий  $A_1A - C_n^k$ , то по правилу произведения  $C_m^0 \cdot C_n^k$  траекторий проходит через точку  $A_1$ . Аналогично находим, что через точку  $A_2$  пройдет  $C_m^1 \cdot C_n^{k-1}$  траекторий,  $\dots$ , через точку  $A_{r+1}$  проходит  $C_m^r \cdot C_n^{k-r}$  траекторий. Суммируя по  $r$ , получаем требуемое тождество. Если  $k = m = n$ , то получим второе из тождеств (1).

Как уже было сказано выше, траектории выборок с повторениями не столь богаты на комбинаторные тождества, как траектории комбинаций. Здесь можно получить только тривиальный результат. В соответствии с геометрической иллюстрацией выборок с повторениями, существует  $\overline{A}_q^k$  траекторий, проходящих от начала координат до точки  $(k; q-1)$  (рис. 11).

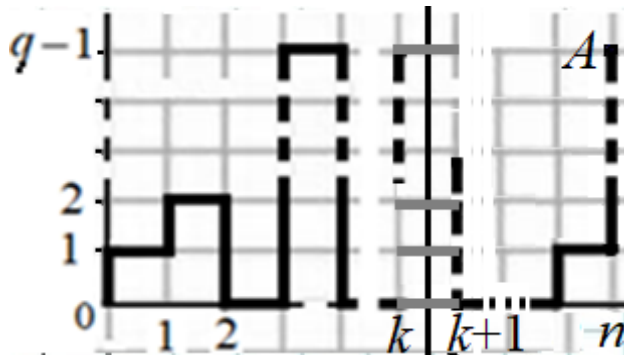


Рис. 11

Траекторий, соединяющих точку  $(k+1; 0)$  с точкой  $A(n; q-1)$  существует  $\overline{A}_q^{n-(k+1)}$ . Соединить траекторию, лежащую левее прямой  $x = k + 0,5$  с некоторой траекторией, построенной правее указанной прямой, можно одним из  $q$  отрезков, параллельных отрезку  $[k; k+1]$ . Имеем по правилу произведения всего  $\overline{A}_q^k \cdot q \cdot \overline{A}_q^{n-k-1} = q^n = \overline{A}_q^n$  траекторий. То есть, столько же, сколько существует траекторий, соединяющих начало координат с точкой  $A(n; q-1)$ . Из двух отдельных траекторий составлена одна, и получен тривиальный результат  $\overline{A}_q^n = \overline{A}_q^k \cdot \overline{A}_q^1 \cdot \overline{A}_q^{n-k-1}$ . Другие, нетривиальные, автору не известны.

Как указывалось раньше, чаще под траекториями понимают линии, изображенные на рисунке 2. Приведем определение траектории из [7, стр. 68], а также некоторые доказанные там общие утверждения, использующиеся при решении задач.

*Траекторией* из начала координат в точку  $(x, y)$  будем называть ломаную, соединяющую точки  $O, (1, s_1), (2, s_2), \dots, (k, s_k), \dots, (x, s_x)$ , где  $s_i - s_{i-1} = \varepsilon_i = \pm 1$ ;  $s_x = y$ .

Пусть  $N_{x,y}$  — число всех траекторий, соединяющих точку  $(0; 0)$  с точкой  $(x, y)$ . Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.**  $N_{x,y} = \frac{x!}{(\frac{x+y}{2})!(\frac{x-y}{2})!}$ , если число  $x \pm y$  — четное, и  $N_{x,y} = 0$ , если  $x \pm y$  нечетное.

**Теорема 2** (принцип зеркального отображения). Пусть  $A(a; b)$  и  $C(c; d)$  — точки с целочисленными координатами, причем  $c > a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $d > 0$ , а  $A'(a; -b)$  — точка, симметричная  $A$  относительно оси  $Ox$ . Тогда число тех траекторий из  $A$  в  $C$ , которые пересекают ось  $Ox$  или имеют с ней общую точку, равно числу траекторий из  $A'$  в  $C$ .

**Замечание.** Утверждение теоремы верно и для числа траекторий из точки  $A(a; b)$  в точку  $C'(c; -d)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Тогда число траекторий из  $(0; 0)$  в  $(x, y)$ , не имеющих вершин на оси  $Ox$  (кроме точки  $O$ ), равно  $\frac{y}{x} N_{x,y}$ .

Для формулировки результатов подсчета траекторий, соединяющих точки  $(0; 0)$  и  $(2n; 0)$  введем следующее обозначение  $L_{2n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

**Теорема 4.** Среди  $C_{2n}^n$  траекторий, соединяющих точку  $(0; 0)$  с точкой  $(2n; 0)$ , существует

а) ровно  $L_{2n-2}$  траекторий, лежащих выше оси  $Ox$  и не имеющих общих точек с  $Ox$ , кроме точек  $O$  и  $(2n; 0)$ ;

б) ровно  $L_{2n}$  траекторий, не имеющих вершин ниже оси  $Ox$ .

Траектории, упоминаемые в пункте б) теоремы 4 называют также *путями Дика*, а их количество — *числами Каталана* [11].

В доказательстве комбинаторных тождеств, конечно же, больше возможностей имеет метод производящих функций. А теоретико-множественные рассуждения работы [13] при доказательстве тождеств являются «более комбинаторными», чем «траекторные рассуждения». Однако траекторный метод выигрывает в наглядности. Какому методу отдать предпочтение, во многом зависит от методических соображений.

## Использование унифицированной схемы комбинаторных структур при решении задач

Рассмотрим несколько задач на применение унифицированной схемы. Некоторые из них дальше будут решены методом траекторий. Для использования приведенной выше схемы при решении комбинаторной задачи необходимо установить:

- упорядоченное или неупорядоченное множество моделирует задачу;
- допускает ли множество-модель повторения элементов;
- из какого множества осуществляется выборка (находим  $n$ );
- сколько элементов выбирается (находим  $k$ ).

После получения ответов на поставленные вопросы находим в таблице необходимую формулу. Рассмотрим несколько примеров.

**Задача 1.** [3, № 38]. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов равно 32)?

**Решение.** Поставим в соответствие каждому жителю страны последовательность вида 111001...101, где 1 — наличие зуба, а 0 — его отсутствие на  $k$ -м месте ( $k = 1, 2, \dots, 32$ ). Получаем модель задачи — упорядоченное (замена местами 0 и 1 приводит к другому набору зубов)

32-элементное множество с повторениями, образованное выбором  $k = 32$  элементов из  $n = 2$  (0 и 1). По таблице находим необходимую формулу  $\bar{A}_{32}^{32} = 2^{32}$ .

Можно также использовать неупорядоченные множества вида  $\{1, 2, 10, 28, 32\}$ , где число указывает на наличие зуба на данном месте (номер зуба). Поскольку таких множеств может быть  $C_{32}^0$  (0-зубых),  $C_{32}^1$  (однозубых),  $C_{32}^2$  (двухзубых), ...,  $C_{32}^{32}$  (32-зубых), то имеем всего жителей  $C_{32}^0 + C_{32}^1 + \dots + C_{32}^{32} = 2^{32}$ . Последнее равенство доказано выше методом траекторий (рис. 5).

Таким образом, одна и та же задача может быть решена с использованием и упорядоченной структуры, и неупорядоченной. Сложность решения комбинаторной задачи не только и не столько в выяснении вопросов упорядоченности множества-модели задачи и допускает ли модель повторение элементов, сколько в построении модели задачи. Однако даже правильно построенная модель не гарантирует решения задачи с помощью унифицированной схемы.

**Задача 2.** [3, № 285]. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

1. С любой остановки на любую другую можно проехать без пересадки.
2. Для любой пары маршрутов найдется, и притом единственная остановка, на которой можно пересест с одного из этих маршрутов на другой.
3. На каждом маршруте ровно  $n$  остановок.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

**Обсуждение задачи.** Для ответа на вопрос задачи необходимо выяснить, сколько  $n$ -элементных подмножеств содержит  $k$ -элементное множество  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$  всех остановок (причем  $k$  неизвестно) таких, что любые два подмножества имеют ровно один общий элемент, и каждые два элемента принадлежат одному из подмножеств. Задача решена в [3, стр. 292] без использования унифицированной схемы. В [2, стр. 30] указано, что «не для любой задачи существующие комбинаторные схемы обеспечивают унифицированное решение, оставляя тем самым неосуществимым лейбницевский замысел создания некой всеобъемлющей комбинаторной схемы...». Сформулированная задача вышла за рамки задач, решаемых с помощью приведенной схемы. Следует заметить, что набор задач, решаемый с ее помощью, вполне достаточный для школьного курса математики, и поэтому многие авторы успешно использовали разные вариации унифицированной схемы в преподавании.

**Задача 3.** [1, стр. 466, № 240]. Две команды  $A$  и  $B$  играют серию матчей по баскетболу до тех пор, пока одна из них не одержит четырех побед (ничьих в баскетболе нет). Сколько различных серий таких матчей может быть?

**Решение.** Если каждой серии игр поставить в соответствие последовательность вида  $ABBAABA$ , в которой на  $i$ -ом месте записан победитель  $i$ -го матча, то для подсчета серий, в которых побеждает команда  $A$ , достаточно указать три номера из семи, куда следует записать букву  $B$ , разместив на оставшихся местах  $A$ . Поскольку такое множество неупорядоченно и не содержит повторений, то с учетом того, что из  $n = 7$  мест выбираем  $k = 3$ , имеем  $C_7^3 = 35$  серий. В других 35 сериях победит команда  $B$ . Таким образом, всего возможно 70 серий матчей. Ответ получен, но необходимо следующее разъяснение. При решении были посчитаны невозможные серии  $AAAAABBB$  или  $BBABBA$  длины 7 (после четырех побед одной из команд игра прекращается), но каждой из них соответствует единственная «укороченная» серия, которая не учтена приведенным способом рассуждений. Приведенные невозможные серии компенсируются более короткими:  $AAAA$  и  $BBABBB$ , хотя и не равновероятными им, но для подсчета количества серий это не существенно. Можно также рассмотреть всевозможные (равновероятные) серии длины 8, где каждая из команд выигрывает ровно 4 раза. Таких серий всего  $C_8^4 = 70$ , и ни одна из них не будет реализована, но каждой из них отвечает реальная «укороченная» серия, где одна из команд побеждает, выиграв первой 4 раза. Например, невозможной серии  $AAAAABBBB$  отвечает единственная реальная серия  $AAAA$ . Такой прием был неоднократно использован в [14, № № 65, 71] при решении задач теории вероятностей для получения равновероятных исходов испытаний. Здесь, при подсчете количества серий, их равновероятность не является существенной. Но также оказывается полезной.

Полезной здесь является также следующая верификация результата. Чтобы проверить правильность решения комбинаторной задачи, можно полученную окончательную формулу применить к задаче меньшей размерности, легко решаемой простым перебором. В задаче 1 можно взять наибольшее число зубов 3, и перечислить все  $2^3 = 8$  вариантов. В задаче 2 ответ  $n(n-1) + 1$  маршрутов также желательно проанализировать при  $n = 2$  и  $n = 3$ .

### Метод траекторий в комбинаторных задачах

Рассмотрим несколько задач, где применение геометрических рассуждений позволяет решить задачу. Хотя и не всегда наиболее простым путем, но всегда наглядными рассуждениями. В задаче об очереди в кассу именно МТ дает наиболее простой и наглядный способ решения.

**Решение задачи 1.** (Один из примеров, где бедные на комбинаторные тождества траектории оказываются полезными в задачах). Поставив в соответствие каждому жителю траекторию, соединяющую точку  $(0; 0)$  с точкой  $(32; 1)$ , идущую вправо, вверх или вниз, но не ниже оси абсцисс, получим взаимно однозначное соответствие между числом жителей и числом траекторий.

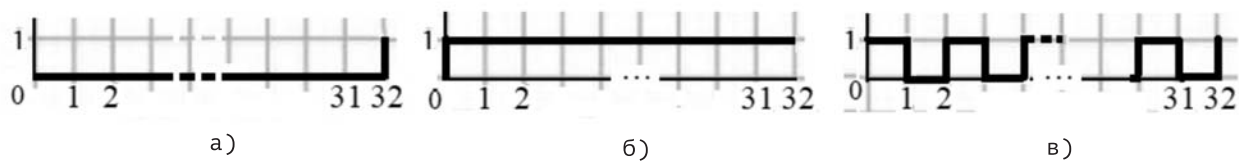


Рис. 12

На рис. 12 изображены траектории, отвечающие а) 0-зубому, б) 32-зубому и в) жителю с набором зубов «через один». Число таких траекторий равно  $A_2^{32} = 2^{32}$ .

**Решение задачи 3.** Каждой серии можно поставить в соответствие траекторию, идущую из начала координат вверх при выигрыше команды  $A$  и вправо, если побеждает команда  $B$ . Очевидно, что длина любой из траекторий не может быть больше 7. Любая из них не достигнет точки  $A(4; 4)$ , так как игра прекратится, если одна из команд выиграет 4 матча, то есть отрезок ломанной достигнет или прямой  $x = 4$ , или прямой  $y = 4$ . Каждую из таких траекторий можно единственным способом продолжить в точку  $A$  вертикальной  $(B_i A)$  или горизонтальной  $(A_i A)$  составляющей (рис. 13а).

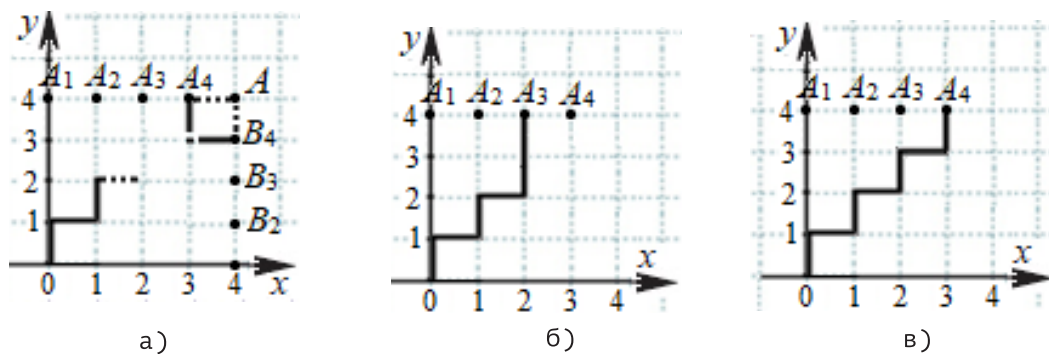


Рис. 13

Поэтому серий игр столько же, сколько траекторий, соединяющих начало координат с точкой  $A(4; 4)$ , то есть  $C_8^4 = 70$ .

Можно использовать траектории рисунков б) и в), считая победы команды  $A$ . Подсчитаем число траекторий, вошедших в каждую из точек  $A_1 - A_4$ . В точку  $A_1$  входит одна траектория,  $C_4^0 = 1$ . В точку  $A_2$  входят  $C_5^1$  траекторий, из которых надо вычесть уже посчитанную траекторию, приходящую из  $A_1$ . От траекторий, вошедших в точку  $A_3$ , отбрасываем те, что пришли через точку  $A_2$ . Наконец,



из числа траекторий, вошедших в точку  $A_4$ , отбрасываем те, что пришли через  $A_3$ , так как они соответствуют счету 4:2 и окончанию игры (рис. 2). Имеем:  $1 + (C_5^1 - C_4^0) + (C_6^2 - C_5^1) + (C_7^3 - C_6^2) = C_7^3 = 35$ . Или, как в предыдущем рассуждении: из каждой точки  $A_1$ – $A_3$  траектория приходит в  $A_4$  единственным путем, поэтому считаем только те, что входят в  $A_4$ , а таких ровно  $C_7^3 = 35$ .

**Задача 4** (об очереди в кассу) [3, стр. 80; 14, № 81; формулируется с учетом изменений валюты]. У кассы кинотеатра стоит очередь из  $m + k$  человек, причем  $m$  человек имеют только сторублевки, а  $k$  — только купюры достоинством 50 рублей. Билет в кино стоит 50 рублей, и в начале продажи касса пуста. Каждый покупатель приобретает по одному билету. Сколькими способами могут располагаться в очереди люди со сторублевками и купюрами по 50 рублей так, что очередь пройдет без задержки, то есть никому не придется ждать сдачи?

**Решение.** Каждому расположению покупателей в очереди поставим в соответствие ломанную, соединяющую точки  $(p; S_p)$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots, m + k$ . Здесь  $S_p = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_p$ ,  $s_i = 1$ , если  $i$ -й покупатель имеет купюры в 50 руб., и  $s_i = -1$ , если  $i$ -й покупатель имеет сторублевки. Очевидно, что  $S_n$  — разница между количеством пятидесяти- и сторублевок, поданных в кассу первыми  $n$  покупателями. Любая из траекторий соединит точки  $O(0;0)$  и  $A(m+k; k-m)$ . Число всех траекторий составляет  $C_{m+k}^k$ .

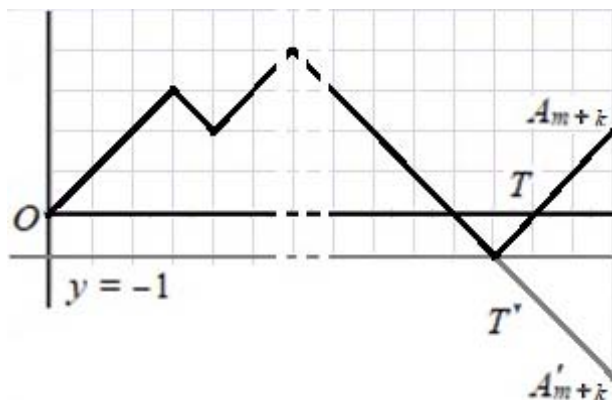


Рис. 14

Для подсчета числа благоприятствующих траекторий (где ни один покупатель не будет ожидать сдачи), заметим, что любая не благоприятствующая траектория пересечет прямую  $y = -1$  (рис. 14). В точке пересечения траектории с осью  $Ox$  разность  $S_n$  между пятидесяти- и сторублевками равна нулю, то есть в кассе имеются только сторублевые купюры. И если следующий покупатель даст в кассу 100 рублей, то ему придется ожидать сдачу (а траектория пойдет вниз, попав на прямую  $y = -1$ ), пока не появится покупатель с 50 рублями (звено траектории пойдет вверх). Таким образом, все не благоприятствующие траектории или пересекут указанную прямую, или будут иметь с ней одну общую точку. Для подсчета таких траекторий, каждой из них (траектория  $T$ ) поставим в соответствие траекторию ( $T'$ ), которая до первого пересечения с прямой  $y = -1$  совпадает с данной траекторией, а после является образом оставшейся части  $T$  при симметрии относительно данной прямой. В соответствии с принципом зеркального отражения, или Теоремой 2, траекторий и их отражений одинаковое количество. А количество отраженных траекторий равно  $C_{m+k}^{k+1}$ . Вычитая это число из общего числа траекторий, получим число благоприятствующих траекторий:  $C_{m+k}^k - C_{m+k}^{k+1} = \frac{k+1-m}{k+1} \cdot C_{m+k}^k$ .

Можно использовать и траектории рисунка 1. Поставим каждому размещению покупателей траекторию, соединяющую точки  $O(0;0)$  и  $A(k; m)$  следующим образом. Откладываем  $i$ -е звено траектории вправо (вверх) по клеткам координатной сетки, если стоящий на  $i$ -ом месте в очереди покупатель имеет купюры достоинством 50 рублей (100 рублей). Число всех траекторий равно  $C_{m+k}^k$ . В точках



прямой  $l$  ( $y = x$ ) траектория указывает на то, что в кассе нет купюр в 50 руб. для сдачи, и если следующий покупатель имеет сторублевку, то звено траектории  $T$  пойдет вверх от прямой  $l$ , пересекая прямую  $l_1$  ( $y = x - 1$ ). Подсчитаем число таких траекторий (рис. 15). Поставим каждой такой траектории  $T$  ломаную  $T'$ , которая совпадает с  $T$  после точки ее пересечения с прямой  $l_1$ . До точки пересечения часть этой точки является ее отражением относительно указанной прямой. Поскольку траектория  $T'$  соединяет точки  $(-1; 1)$  и  $A(k; m)$ , то число таких траекторий равно  $C_{m+k}^{k+1}$ . Получаем приведенный выше ответ, вычитая последнее число из общего числа траекторий.

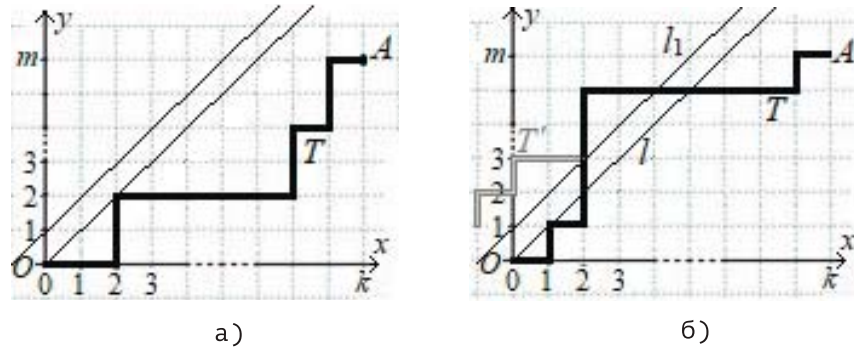


Рис. 15

Несмотря на очевидную искусственность в постановке рассмотренной задачи, она является переформулировкой реальной ситуации, возникающей при контроле качества продукции [4; 5].

**Задача 5.** [9, № 1.2.29]. Найти число кратчайших путей из точки  $A$  в точку  $B$  на шахматной доске, изображенной на рисунке 16а).

**Решение.** Под путями здесь также понимают ломаные, проходящие по границам клеток доски. Предположим, что доска прямоугольная — без среза угла отрезком  $CD$ . Кратчайший путь на такой доске состоит из  $m + n$  звеньев,  $n$  из которых идут горизонтально. Число всех путей составляет  $C_{m+n}^n$ . От указанного количества путей необходимо вычесть пути, пересекающие отрезок  $CD$ . Чтобы подсчитать количество пересекающих  $CD$  траекторий, каждой из них поставим в соответствие ломаную, которая совпадает с пересекающей траекторией до первой точки пересечения с  $CD$ , а после является зеркальным отражением оставшейся части траектории относительно прямой, содержащей отрезок  $CD$ . На рисунке 16 б) траектории  $ADB$  соответствует ломаная  $ADB'$ . Такая ломаная состоит из  $m + n$  звеньев (как и ее прообраз),  $d$  из которых — горизонтальные. Поэтому число таких ломаных составляет  $C_{m+n}^d$  (из  $m + n$  мест необходимо указать  $d$  для размещения горизонтальных отрезков). Окончательно получаем  $C_{m+n}^n - C_{m+n}^d$  возможных путей.

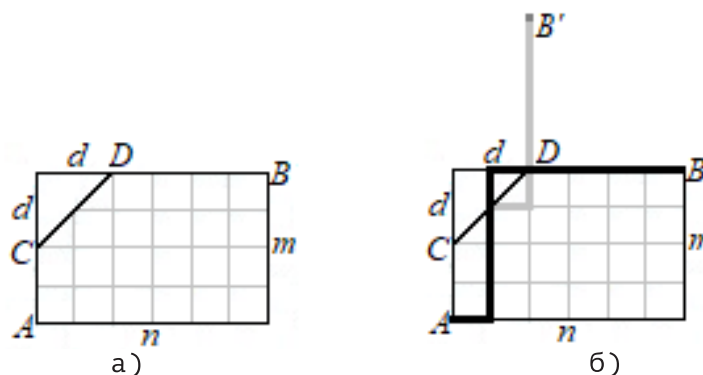


Рис. 16

**Задача 6.** [3, № 244]. Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры?

**Решение.** Каждому шестизначному числу, составленному с использованием цифр  $a$ ,  $b$  и  $c$  ставим в соответствие траекторию в системе координат  $Oabc$  следующим образом.

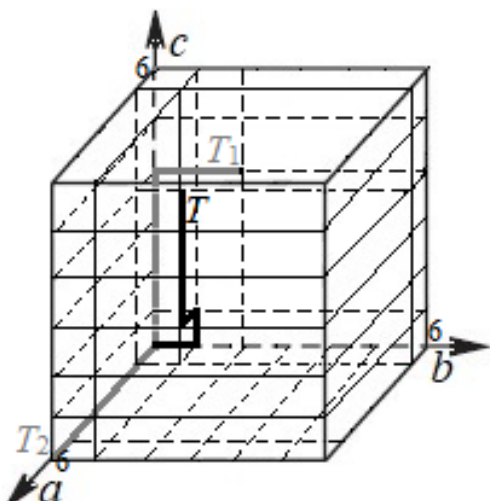


Рис. 17

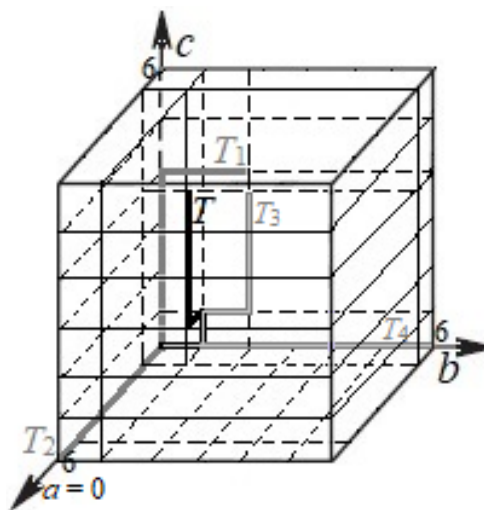


Рис. 18

Пусть ни одна из цифр не равна нулю (рис. 17). Каждая траектория имеет длину 6. Траектория идет параллельно той оси, какая цифра встречается в записи числа. Например, траекториям  $T$ ,  $T_1$  и  $T_2$  соответствуют числа  $bcaaaa$ ,  $ccscbb$  и  $aaaaaa$ . Из них только  $T$  удовлетворяет условию задачи. Для подсчета количества траекторий, удовлетворяющих условию, из общего их количества ( $3^6$ ) надо отнять те, которые лежат на каждой из координатных плоскостей ( $3 \cdot 2^6$ ), как траектория  $T_1$ . При этом 3 траектории (среди них  $T_2$ ), принадлежащие сразу двум координатным плоскостям, были вычтены дважды, поэтому прибавим их к результату вычислений. Имеем общее количество траекторий  $3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3$ . В приведенных рассуждениях без упоминания использована формула включений и исключений. Здесь мы имеем ее геометрическую иллюстрацию. Если одна из цифр равна нулю, например  $a$  (рис. 18) то подсчитать надо только те траектории, первое звено которых не идет по оси  $a$ . Подсчитаем количество траекторий, первое звено которых идет по оси  $b$ . Таковых есть всего  $3^5$ . От их числа надо отнять число тех, которые лежат на каждой из координатных плоскостей  $Oab$  и  $Ocb$  ( $2 \cdot 2^5$ ), например, траектории  $T_3$  и  $T_4$ . При этом общая для двух плоскостей траектория  $T_4$  (проходящая по оси  $Ob$ ), была вычтена дважды, поэтому прибавим 1 к результату вычислений. Имеем общее количество траекторий  $3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1$ . Столько же есть траекторий, первое звено которых идет по оси  $Oc$ . Таким образом, всего чисел, содержащих нуль,  $2 \cdot (3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1)$ . Поскольку из 9 возможных цифр (без нуля) три можно выбрать  $C_9^3$  способами, а если одна из цифр — нуль, то остальные две —  $C_9^2$  способами, окончательно получаем:

$$C_9^3(3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3) + C_9^2 \cdot 2 \cdot (3^5 - 2 \cdot 2^5 + 1) = 58\,320 \text{ способов.}$$

**Задача 7.** а) Задача Банаха [14, № 71\*; 9, № II.1.39]. Некий человек одновременно купил две коробки спичек и положил их в карман. После этого каждый раз, когда ему нужно было зажечь спичку, он доставал наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время, вытащив одну из коробок, человек обнаружил, что она пуста. Какова вероятность того, что во второй коробке в этот момент находилось еще  $k$  спичек, если число спичек в неначатой коробке равно  $n$ ?

б) Воспользовавшись результатом задачи а), найдите чему равна сумма

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n.$$

**Решение.** а) Каждому выниманию спички из первой коробки ставим в соответствие горизонтальный отрезок ломаной, выходящей из начала координат, а выниманию из второй коробки — вертикальный.

Тогда каждой серии вынимания спичек будет соответствовать траектория, пересекающая верхнюю или правую стороны квадрата с вершиной в начале координат и сторонами длины  $n$  на осях. Траектория пройдет через одну из точек:  $A_1(0; n), A_2(1; n), \dots, A_{n-1}(0; n - k), \dots, A_{2n}(0; n)$  (рис. 19). Траектория  $OA_{n-k}$  соответствует ситуации, когда из второй коробки вынута последняя  $n$ -я спичка, а в первой коробке находится ровно  $k$  спичек (вынута  $n - k$ ).

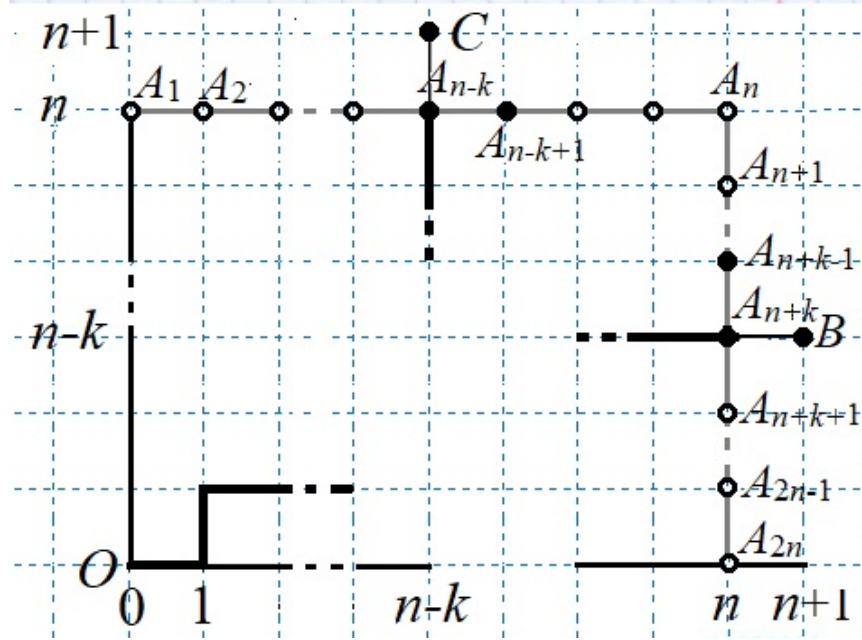


Рис. 19

На следующем шаге можно попасть или в точку  $A_{n-k+1}$ , вынув  $(k+1)$ -ю спичку из первой коробки, или в точку  $C(n-k; n+1)$ , взяв вторую коробку, которая оказалась пустой (вероятность этого события надо найти). Аналогично траектория  $OA_{n+k}$  соответствует ситуации, когда последняя спичка вынута из первой коробки, а во второй находится  $k$  спичек. Следующий шаг приведет или в точку  $A_{n+k-1}$  (из первой коробки взята  $k+1$ -я спичка, или в точку  $B(n; n-k)$ , где вторая коробка оказалась пустой, а в первой находится  $k$  спичек. Количество траекторий, соединяющих точку  $O$  с каждой из точек  $A_{n-k}(n-k; n)$  и  $A_{n+k}(n-k; n)$  составляет  $C_{2n-k}^n$ . Поскольку каждая из коробок берется с равной вероятностью, то каждому звену траектории соответствует вероятность 0,5. Поэтому вероятность зайти в точку  $A_{n-k}$  или в точку  $A_{n+k}$  для траектории составляет  $0,5^{2^{n-k}}$ . Введем гипотезы  $H_1$  = «Траектория вошла в точку  $A_{n-k}$ » и  $H_2$  = «Траектория вошла в точку  $A_{n+k}$ ». Событие  $A$  = «Одна из коробок пустая, а во второй находится  $k$  спичек» наступит, если следующим звеном траектории будет  $A_{n-k}C$  или  $A_{n+k}B$  (каждая с вероятностью 0,5). С учетом вероятностей  $P(H_i) = C_{2n-k}^n \cdot \frac{1}{2^{2n-k}}$ ,  $P(A|H_i) = \frac{1}{2}$ , по формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i)P(A|H_i) = C_{2n-k}^n \cdot \frac{1}{2^{2n-k}} \cdot \frac{1}{2} + C_{2n-k}^n \cdot \frac{1}{2^{2n-k}} \cdot \frac{1}{2} = C_{2n-k}^n \cdot \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

б) Поскольку любая траектория пройдет через одну из точек верхней или правой стороны квадрата (человек, открыв пустую коробку, обнаружит во второй коробке 0, 1, 2, ..., или  $n$  спичек), то сумма всех вероятностей равна 1. Суммируя по  $k$ , получаем:

$$\sum_{k=0}^n \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} + \frac{C_{2n-1}^n}{2^{2n-1}} + \dots + \frac{C_{2n-k}^n}{2^{2n-k}} + \dots + \frac{C_n^n}{2^n} = 1.$$

Умножив последнее равенство на  $2^{2n}$ , получим тождество

$$C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 4C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n = 2^{2n}.$$

Наглядность метода траекторий позволяет выделить именно этот метод при изучении комбинаторных разделов математики. Как показывает опыт преподавания, наглядность на первых порах изучения комбинаторики наиболее способствует формированию комбинаторного мышления. Хотя, последний термин в методике преподавания математики не является четко определенным, как впрочем, и термин «математическое мышление».

### Литература

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / 6-е издание. - М.: Просвещение, 1998.
2. Баранов В.И., Стечкин Б.С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. - М.: Наука, 1989.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969.
4. Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Изд. 6-е, переработанное и дополненное. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
6. Гнеденко Б.В., Королюк В.С. О максимальном расхождении двух эмпирических распределений // Доклады АН СССР. - 1951. - Т.80. - № 4. - С.525–528.
7. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. - М.: Наука., 1977.
8. Ерусалимский Я.М. 2- и 3-пути на графе-решетке и комбинаторные тождества // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. - 2017. - № 1. - С. 25–30.
9. Дороговцев А.Я. и др. Теория вероятностей. Сборник задач / Под общей редакцией А.В. Скорохода. - Киев: Выща школа, 1980.
10. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. - М.: ГИИЛ, 1947.
11. Чашкин А.В. Лекции по дискретной математике: Учебное пособие. - М.: МГУ Мехмат, 2007.
12. Ширяев А.Н. Вероятность. - М.: Наука, 1980.
13. Эвнин А.Ю. Две заметки по комбинаторике // Математическое образование. - 2000. - № 3(14). - С. 27–34.
14. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. - М.: ГТТИ, 1954. (Выпуск 5 серии “Библиотека математического кружка”).
15. Рашевский Н.А. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21117479>

*Рашевский Николай Александрович,  
доцент кафедры высшей математики  
Криворожского национального университета,  
кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: mora290466@gmail.com*

# Преобразование ветвей гиперболы в её малый фрагмент

*Е. Г. Смольянова*

В статье предложен способ преобразования, при помощи дробно-линейной функции, ветви гиперболы в сколь угодно малую часть ветви, как той же самой, так и другой.

Преобразование — важнейший инструмент исследования разного рода математических проблем, а умение применять преобразования — несомненный элемент математической культуры. Преобразования могут подвергаться объекты любой природы, в том числе и абстрактные. Обычно преобразование применяют к множеству. Например, к числовому множеству или к множеству точек плоскости (пространства). Тогда его понимают как отображение одного множества в другое (или самого в себя), т.е. такое соответствие  $F : A \rightarrow B$ , при котором каждому элементу  $a \in A$  относят по определённому правилу (закону) единственный элемент  $b \in B$ . При этом элемент  $b$  называют образом элемента  $a$ , а множество  $B$  — образом множества  $A$  при отображении  $F$ . Соответствующие обозначения:

$$b = F(a); \quad B = F(A).$$

В случае числовых множеств — говорят о функции, преобразующей её область задания в множество значений. Например, функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$  отображает интервал  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  в интервал  $(-\infty; +\infty)$ . Классические примеры геометрических преобразований — параллельный перенос, поворот, всевозможные симметрии, сжатия (растяжения) относительно оси и т.д. Однако преобразовывать (например, трансформировать) можно и сами преобразования, получая при этом новые преобразования. К примеру, можно обсуждать трансформацию параллельного переноса — гомотетией, осевой симметрии — движением и т.п. Так что преобразование можно рассматривать не только как инструмент исследования, но также и как объект исследования. Последовательное применение преобразований  $F_1$  и  $F_2$  называют композицией преобразований:  $F = F_1(F_2)$ . Так, скользящая осевая симметрия плоскости определяется в геометрии как результат последовательного применения преобразований осевой симметрии и параллельного переноса (в направлении вектора, параллельного оси симметрии)

Простейшим преобразованием множества является тождественное отображение:

$$I(a) = a \text{ при любом } a \in A.$$

«Бесполезное», на первый взгляд, преобразование  $I$  необходимо, например, для описания вырожденного результата каких-либо последовательных преобразований. Кроме того, с помощью  $I$  определяется обратное отображение. Сформулируем определение. Пусть  $F : A \rightarrow B$  удовлетворяет условию:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow F(a_1) \neq F(a_2).$$

Тогда отображение

$$F^{-1} : B \rightarrow A$$

такое, что

$$F^{-1}(b) = a \iff F(a) = b,$$

называется обратным к  $F$ . Из определения следует, что  $F^{-1}(F) = F(F^{-1}) = I$ .

Например, обратной к функции  $f : (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty; +\infty)$  с правилом соответствия  $f(x) = \operatorname{tg} x$  является функция  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ , преобразующая числовую прямую в интервал  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Дадим ещё одно важное для нашего будущего исследования определение. Преобразование точек множества, повторное применение которого даёт тождественное преобразование, называется инволюционным или инволюцией (от лат. involutio — свёртывание). Иначе говоря, чтобы восстановить

объект инволюционного преобразования по его образу, достаточно применить к этому образу то же самое преобразование. Применяются такие преобразования, например, в криптографии при построении особых криптоалгоритмов, в задачах геометрического моделирования, в том числе для сжатия графической информации и восстановлении (реконструкции) графических объектов.

Получимся строить преобразования с определёнными свойствами для решения какой-нибудь конкретной задачи. Выберем в качестве объекта преобразования график  $\Gamma$  элементарной функции (например, гиперболу) и поставим задачу найти инволюционное отображение, которое преобразует всё множество  $\Gamma$  в его собственную часть (фрагмент). Конкретизируем постановку задачи: инволюционно преобразовать ветвь гиперболы в малый фрагмент  $\Phi$  этой же гиперболы (рис. 1). Тогда тем же преобразованием, применённым к  $\Phi$ , можно будет восстановить всю ветвь целиком. Как понимать слова «малый фрагмент», уточним по ходу дела. Вообще, предполагается, что  $\Phi$ , как образ  $\Gamma$ , может быть настолько мал, что фактически исчезнет из поля зрения.

Итак, пусть  $\Gamma_f$  — гипербола с уравнением  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx - a}, \quad \left(x \neq \frac{a}{c}, c \neq 0\right).$$

Преобразуем выражение  $f(x)$  к виду

$$f(x) = \frac{ux + v}{x - u}, \quad (x \neq u)$$

заменой  $u = \frac{a}{c}; v = \frac{b}{c}$ . В том же классе дробно-рациональных функций подберём другую функцию  $\varphi(x)$  такую, что

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) \quad (1)$$

при всех допустимых значениях  $x$ . Пусть

$$\varphi(x) = \frac{\alpha \cdot x + \beta}{x - \alpha}, \quad (x \neq \alpha).$$

Обозначим гиперболу с уравнением  $y = \varphi(x)$  через  $\Gamma_\varphi$ . Найдём соответствующее условие связи числовых коэффициентов функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ :

$$\frac{\alpha f(x) + \beta}{f(x) - \alpha} = \frac{u\varphi(x) + v}{\varphi(x) - u} \iff \frac{\alpha \cdot \frac{ux+v}{x-u} + \beta}{\frac{ux+v}{x-u} - \alpha} = \frac{u \cdot \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} + v}{\frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} - u},$$

откуда

$$2u\alpha + \beta + v = 0, \quad (2)$$

если  $u \neq \alpha$ . Условие несократимости дроби  $\varphi(x)$ :

$$\beta + \alpha^2 \neq 0. \quad (3)$$

Итак, выбор большой: функций  $\varphi(x)$  со свойством (1) бесконечно много. Необходимо только следить за выполнением условия (2). Например, если  $(a, b, c) = (1, 2, 4) (\Rightarrow (u, v) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}))$ , то (2) примет вид:

$$\alpha + 2\beta + 1 = 0.$$

Можно предложить  $(\alpha, \beta) = (-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ . Соответствующие функции

$$f(x) = \frac{x+2}{4x-1}, \quad \varphi(x) = \frac{-3x-1}{5x+3}$$

обладают свойством (1).

Несложно проверить, что  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — инволюции (каждая — в своей области определения), т. е.

$$f(f(x)) = x; \quad \varphi(\varphi(x)) = x.$$

(Графики таких функций симметричны относительно прямой  $y = x$ ). Но тогда отображение

$$(x, f(x)) \xrightarrow{F} (\varphi(x), \varphi(f(x)))$$

также является инволюционным. Действительно

$$(\varphi(x), \varphi(f(x))) \xrightarrow{F} (\varphi(\varphi(x)), \varphi(\varphi(f(x)))) = (x, f(x)).$$

А поскольку верно (1), то образ точки  $(x, f(x))$  принадлежит  $\Gamma_f$  и поэтому  $F(\Gamma_f) \subset \Gamma_f$ . Центр  $S$  симметрии  $\Gamma_f$  имеет координаты  $(u, u)$ . Следовательно, по знаку функции  $\psi(x) = \varphi(x) - u$  можно определить, какой из ветвей принадлежит образ точки  $(x, f(x))$  при отображении  $F$ . А именно, если  $\psi(x) > 0$  то правой, если  $\psi(x) < 0$  то, соответственно, левой. ( $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  — одна и та же функция в случае  $u = 0$ ). Поскольку

$$\psi(x) = \frac{(\alpha - u)x + (\beta + u\alpha)}{x - \alpha},$$

то из условия  $u \neq \alpha$  следует, что числитель дроби — переменная величина (последнее нужно для целей нашего исследования). Введём обозначения для нулей числителя и знаменателя дроби  $\psi(x)$ :

$$x_A = \frac{u\alpha + \beta}{\alpha - u}, \quad x_B = \alpha.$$

Заметим, что условие (2) влечёт:

$$x_A = \frac{-(u\alpha + v)}{\alpha - u} = \frac{u\alpha + v}{u - \alpha} = f(\alpha) = f(x_B).$$

Следовательно,  $x_B = f(x_A)$ . Вывод: точки  $A(x_A, f(x_A))$  и  $B(x_B, f(x_B))$  симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов и, значит, дуга  $AB$  гиперболы  $\Gamma_f$  содержит вершину соответствующей её ветви.

Интерес для нас будет представлять только случай:  $x_A \neq x_B$ . Тогда на открытом интервале с концами  $x_A$  и  $x_B$  непрерывная функция  $\psi(x)$  сохраняет знак. Обозначим этот интервал через  $T$ . Важный момент: предварительно следует убедиться, что  $x = u$  не является ни концом, ни внутренней точкой интервала  $T$ . (Потому что в этой точке нарушается непрерывность функции  $f(x)$  и, следовательно, либо  $A$  и  $B$  не могут быть соединены дугой гиперболы, поскольку принадлежат разным её ветвям, либо мы не найдём на гиперболе одну из этих точек). Назовём это требование *и-условием*. Оно, очевидно, равносильно такому:

$$(x_A - u)(x_B - u) > 0.$$

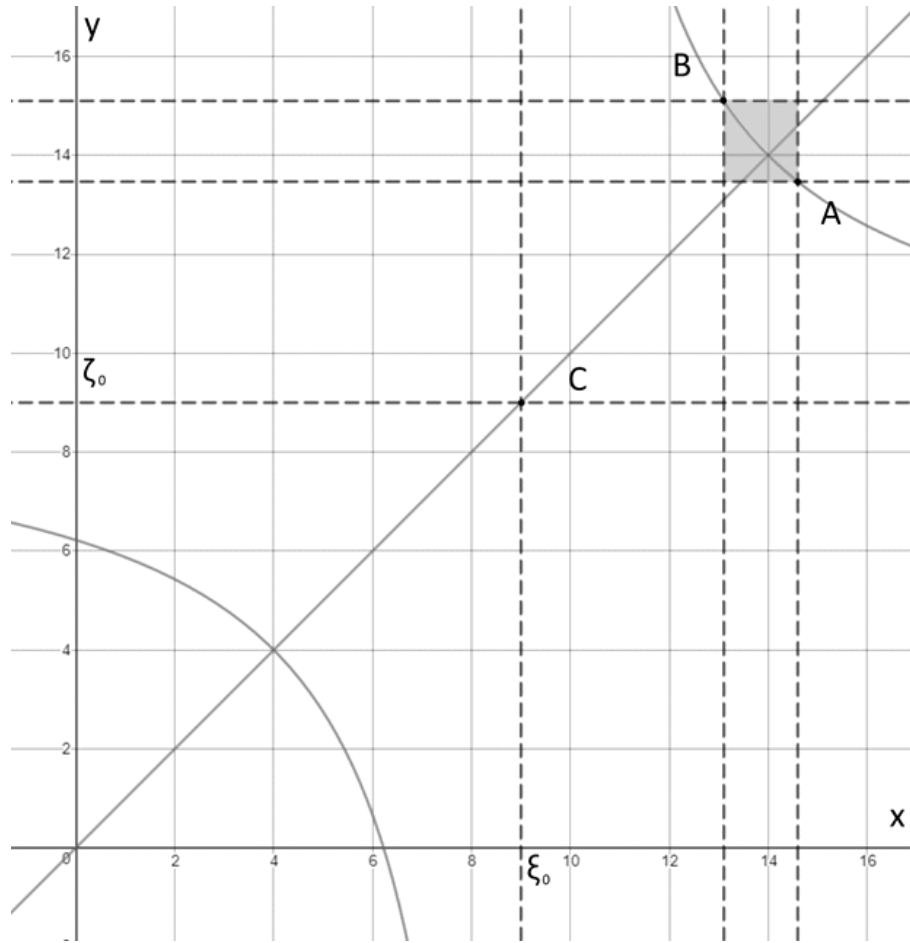


Рис. 1

Продолжим исследование. Применяя преобразование  $F$  ко всем точкам дуги  $\check{A}B$ , мы заполним образами этих точек целиком левую или правую ветви гиперболы  $\Gamma_f$  (в зависимости от знака  $\psi(x)$  на интервале  $T$ ). Поскольку отображение  $F$  непрерывное, то при приближении переменной точки  $M(x, f(x))$  дуги  $\check{A}B$  к любому из концов этой дуги, образ её будет приближаться к недостижимым точкам соответствующей ветви гиперболы  $\Gamma_f$ . Так, если

$$M(x, f(x)) \rightarrow (x_A, f(x_A)), \quad \text{то} \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(x_A) = u = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

и, значит,  $F(M)$  будет приближаться к недостижимой точке одной из ветвей  $\Gamma_f$ . Аналогично, если

$$M(x, f(x)) \rightarrow (x_B, f(x_B)), \quad \text{то} \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(x_B) = \infty.$$

В результате предельным образом точки  $M(x, f(x))$  будем иметь вторую недостижимую точку той же ветви. При этом отображение  $F^{-1} = F$  преобразует соответствующую ветвь гиперболы  $\Gamma_f$  в дугу  $\check{A}B$ . Введём обозначение:

$$d = |x_A - x_B| = |f(\alpha) - \alpha|$$

и пусть  $K$  — квадрат со стороной  $d$  и диагональю  $AB$  (рис. 1). По размеру этого квадрата мы далее и будем оценивать «мелкость» образа. Если окажется, что  $d \ll 1$ , то ветвь гиперболы  $\Gamma_f$  будет преобразована в микроскопически малый фрагмент этой же гиперболы. Причём её восстановление из этого малого фрагмента не потребует поиска нового преобразования: эту роль на себя «возьмёт» то же преобразование  $F$ . Поставленная задача будет решена.



**Замечание.** Пусть точка  $Q(x_0, x_0)$  — вершина одной из ветвей гиперболы  $\Gamma_f$ . В таком случае  $x_0$  — корень уравнения

$$f(x) = x. \quad (4)$$

Но поскольку тогда

$$\varphi(x_0) = \varphi(f(x_0)) = f(\varphi(x_0)),$$

то либо  $\varphi(x_0)$  — второй корень уравнения (4), либо  $\varphi(x_0) = x_0$ . Но последнее невозможно, иначе какая-то ветвь гиперболы  $\Gamma_f$  и какая-то ветвь гиперболы  $\Gamma_\varphi$  имеют общую вершину. Следовательно, образом  $Q$  при отображении  $F$  всегда является вершина другой ветви.

Делаем вывод: за знаком функции  $\psi(x)$  следить не обязательно, если выбор преобразуемой ветви (левой или правой) в постановке задачи не уточнялся. А именно: если окажется в процессе исследования, что  $AB$  — дуга правой ветви гиперболы  $\Gamma_f$ , то преобразование  $F$  применялось к левой её ветви, и наоборот.

**Пример.** Пусть преобразование будет применяться к ветви гиперболы  $\Gamma_f$  с уравнением  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{x+2}{4x-1}$ . Тогда

$$(a, b.c) = (1, 2, 4) \left( \Rightarrow (u, v) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \right).$$

Предполагается иметь  $\varepsilon = 10^{-3}$  (соответственно площадь квадрата  $K$  не превысит  $10^{-6}$ ) Коэффициент  $\alpha$  должен удовлетворять условию:

$$|f(\alpha) - \alpha| = \left| \frac{(\alpha - 1)(2\alpha + 1)}{4\alpha - 1} \right| \leq \varepsilon.$$

Предлагаем  $\alpha = 0,9999$ . Тогда из (2):

$$\beta = -(2u\alpha + v) = -0,99995.$$

Проверяем (3):

$$\beta + \alpha^2 = -0,99995 + 0,9999^2 \neq 0.$$

Поскольку  $x_A = f(x_B) = f(\alpha) = \frac{29999}{29996}$ , то  $u$ -условие выполняется: точка  $x = \frac{1}{4}$  не принадлежит отрезку  $[\frac{9999}{10000}; \frac{29999}{29996}]$ . Площадь соответствующего квадрата  $K$  равна  $d^2 \approx 4 \cdot 10^{-8}$ .

Итак, поставленная задача преобразования ветви гиперболы  $\Gamma_f$  в её малый фрагмент будет решена вышеописанным способом с помощью функции

$$\varphi(x) = \frac{0,9999x - 0,99995}{x - 0,9999}.$$

Уточним, какая именно ветвь «подверглась» преобразованию. Воспользуемся сделанным выше замечанием. Поскольку в нашем примере  $AB$  — дуга правой ветви гиперболы  $\Gamma_f$ , то она есть образ левой ветви этой гиперболы. И, значит, нам удалось отобразить целиком всю левую ветвь практически в точку (с учётом длины  $AB$ ) её правой ветви.

Аналогично можно преобразовать и другую ветвь той же гиперболы. Но теперь, разумеется, надо будет требовать, чтобы у функции  $\psi(x)$  на конечном интервале её знакопостоянства был соответствующий знак.

Смольянова Елена Григорьевна,  
старший преподаватель кафедры математического анализа  
факультета математики и информационных технологий  
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский  
государственный университет им. Н.П. Огарёва».

E-mail: janovaeg@mail.ru

## О знании в XIII–XVI веках связи чисел Фибоначчи с золотым сечением

А. Н. Ковалев

Высказана гипотеза, что Леонардо Пизанский (Фибоначчи) знал о приближении отношения его чисел к «делению в крайнем и среднем отношении» и приведены различные доводы в ее поддержку. Показано, что равнобедренный треугольник с углом в  $36^\circ$  при вершине использовался, как минимум, с XIII века при проектировании готических храмов, в качестве дополнительного к равнобедренному при триангуляции. Использование Божественной пропорции (золотого сечения) художниками и архитекторами, начиная с XIII века, могло привести к вычислению подходящих дробей для числа Фидия, и, как следствие, к обнаружению его связи с числами Фибоначчи. Связь между гипотетически используемыми художниками того времени дробными приближениями для числа Фидия —  $5/8$  и  $89/144$  — могла привести к открытию в XVII веке формулы Кассини (1680), частный случай которой обнаружен на полях книги «Начал» Евклида 1509 года издания.

История математики отдает первенство в обнаружении связи между числами Фибоначчи ( $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ ) и Фидия (деление в крайнем и среднем отношении, Божественная пропорция, золотое сечение,  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots$ ) Кеплеру, согласно его письму 1608 года. Между тем есть основания считать, что она могла быть известна намного раньше. Первым эту гипотезу высказал, видимо, R. Herz-Fischler в короткой заметке в 1986 году [1], развив ее в книге 1987 года [2]. В настоящее время некоторые исследователи допускают возможность знания еще в древней Греции как последовательности чисел Фибоначчи, так и факта стремления отношения соседних членов этой последовательности к числу Фидия [3].

Рассмотрим возможность обнаружения Леонардо Пизанским ( $\sim 1170 - \sim 1250$ ) приближения отношения соседних чисел последовательности, введенной им в европейскую математику, к числу Фидия. Леонардо Пизанский описывает в своих трудах деление в крайнем и среднем отношении не только применительно к геометрии, но и в случае алгебраических задач. В XV главе «Книга абака» (1202, 1228 гг.) рассматривается система двух алгебраических уравнений, соответствующих делению числа 10 в золотом сечении [4]:

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \sqrt{5}. \end{cases} \quad (1)$$

Ее решение:  $x = 10\varphi$ ;  $y = 10\varphi^2$ . Скорее всего, эту систему уравнений Леонардо придумал, исходя из знания формул:  $\varphi + \varphi^2 = 1$  и  $\varphi + 1/\varphi = \sqrt{5}$ . Отметим, что здесь деление в крайнем и среднем отношении не связано с геометрией.

В этой книге Леонардо описывает метод приближенного вычисления квадратного корня по итерационной процедуре, который для  $\varphi$  приводит к появлению дробей с числами из открытой им последовательности. Вопрос только в том, рассматривал ли он эти приближения?.. Подобный интерес мог быть чем-нибудь инициирован. Таким заказчиком-инициатором могли выступить гильдии художников и скульпторов, которые были архитекторами храмов. Есть основание предполагать, что при проектировании витражей-роз (южной и северной, 1221–1230 гг.) кафедрального собора в Шартре использовалось золотое сечение [23]. Большой размер и характер исполнения витражей предполагает применение не веревочного метода деления в золотом сечении, а использования дробного приближения для  $\varphi$ .

Для приближенного вычисления квадратного корня наиболее известен был метод Герона, греческого математика I века, который для  $\sqrt{5}$  сводился к итерационной формуле:

$$y_{n+1} = 0,5 \left( y_n + \frac{5}{y_n} \right). \quad (2)$$

Он дает в качестве первых двух приближений для  $\sqrt{5}$ :  $9/4$  и  $161/72$ , что приводит к приближениям  $\varphi$ :  $\varphi_1 - 5/8$ , и  $\varphi_2 - 89/144$ <sup>1</sup>. В общем случае формула Герона дает для  $\sqrt{5}$  на  $n$ -ом шаге —  $L_m / F_m$ , а для  $\varphi$ :  $\varphi_n = F_{m-1} / F_m$ , где  $L_m$  — числа Люка (1, 3, 4, 7, 11, ...) и  $m = 3 \cdot 2^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Кроме формулы Герона существовал еще метод Теона Смирнского (первая половина II века), который для вычисления квадратного корня предлагал более медленно сходящийся итерационный алгоритм. Пусть  $\sqrt{N}$  примерно равен  $y_0/x_0$ , тогда по Теону:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = y_{n-1} + Nx_{n-1}. \end{cases} \quad (3)$$

Этот метод на  $n$ -ом шаге дает для  $\varphi$  приближение  $F_{n+2}/F_{n+3}$  — последовательное отношение чисел Фибоначчи.

Метод вычисления приближенных дробных значений для квадратных корней, описанный Леонардо Пизанским в XIV главе «Книги абака», дает такой же результат, что и формула Герона [4, с. 490–491]. При использовании его метода для нахождения приближений к  $\sqrt{5}$  и  $\varphi$ , сразу выявляется, что  $161/72 = 9/4 - 1/72$  и  $89/144 = 5/8 - 1/144$ . И эта закономерность продолжается при рассмотрении следующих приближений.

К тому же, в рамках развивающейся архитектуры готики, могла возникнуть потребность в вычислении приближенных значений для синуса и тангенса  $18^\circ$ , знание которых было необходимо для быстрого построения соответствующих равнобедренных треугольников. В XIII веке уже существует «французский» метод проектирования храмов — триангуляция. Основным элементом в нем является равносторонний треугольник, но равнобедренный треугольник с углом в  $36^\circ$  при вершине мог быть дополнительным. Допустимость этого предположения проиллюстрирована на рисунке 1, где приведены фрагменты результата соответствующего анализа капеллы Сен-Шапель (1242–1248). При ее строительстве, как известно, использовалась триангуляция равносторонним треугольником [5, с. 239].

Линии, которые не получали ранее поддержку в рамках рассмотрения триангуляции равносторонним треугольником, объясняются дополнительным равнобедренным треугольником. Обратим внимание, что на левом рисунке основания двух различных треугольников совпадают — этот прием будет использован Леонардо да Винчи при построении «Витрувианского человека»<sup>2</sup> (1492) и определяет положение его пупка (центра окружности) [7]. Во всех приведенных случаях в равнобедренный треугольник хорошо вписываются элементы орнаментального украшения капеллы (трилистник, окружность, «глаз»), которые являются символами Бога. Возможно, эти элементы должны были умозрительно подчеркнуть присутствие такого треугольника. При этом стоит отметить разнообразие взаимного положения двух треугольников. Если равносторонний треугольник является каркасным, по которому выстраивается общий замысел храма, то равнобедренный может иметь с ним общее основание, как на варианте слева (рис. 1), определяя высоту крыши, а может демонстрировать другие геометрические решения архитекторов, как на двух остальных приведенных примерах.

<sup>1</sup>В статье целочисленное приближение для квадратного корня считается нулевым, а первым считается первое дробное приближение.

<sup>2</sup>Леонардо факт применения дополнительного треугольника в архитектуре при триангуляции мог узнать, как секрет, от гильдии каменщиков, от Браманте или самостоятельно обнаружить при изучении Миланского собора.

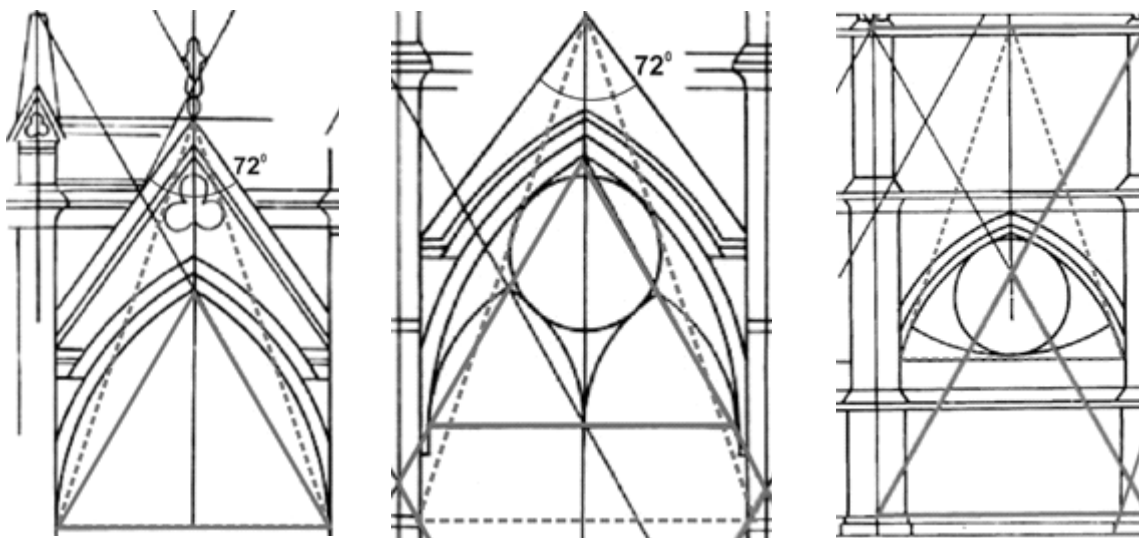


Рис. 1. Капелла Сен-Шапель, триангуляция равносторонним (по Виолле-ле-Дюку) и равнобедренным с углом в  $36^\circ$  (пунктир) треугольниками

Так, на крайнем правом рисунке вершина равностороннего треугольника совпадает с пересечением биссектрис равнобедренного. Капелла была возведена через четверть века после выхода книг Леонардо Фибоначчи — «Practica Geometriae» (1220 г.) и дополненной «Liber abaci» (1228 г.). Но храмы в готическом стиле стали строить во Франции с середины XII века, и Леонардо еще при жизни мог получить заказ на соответствующий расчет.

У равнобедренного треугольника с углом в  $36^\circ$  при вершине основание в  $\varphi$  раз меньше боковой стороны, и при использовании его в архитектуре, необходимо было предварительно приближенно вычислить квадратный корень из 5 и число  $\varphi$  или тангенс  $18^\circ$ . Для быстрого приближенного построения равнобедренного треугольника в архитектуре, со времен египетских пирамид, задавалось отношение катетов соответствующего прямоугольного треугольника, где меньший катет равен половине основания. В случае вычисления  $\tan 18^\circ$  по приближениям для  $\varphi$ , на втором шаге получается дробь  $89/\sqrt{75023} \approx 89/274$ , которая отличается от истинного значения тангенса на 0,031%. Существовал второй путь: непосредственное использование таблицы хорд из «Альмагеста» Птолемея, хотя он неудобен для нужд архитектуры из-за получающихся больших знаменателей. Так для  $\sin 18^\circ$  по ней получается  $26699/86400$  [6, с. 22]. Если, в поисках удачного сокращения, прибавить к этому числу  $1/86400$ , то получим те же  $89/288$ . При нахождении подходящих дробей для  $26699/86400$  ( $\sin 18^\circ$ ) по алгоритму Евклида числа Фибоначчи получаются в знаменателе:  $1/3$ ,  $4/13$ ,  $17/55$ ,  $72/233$ . Т.е. при реализации этого пути также могли обнаружить обсуждаемую связь между числами. Если для синуса  $18^\circ$  взять приближение  $4/13$ , то для тангенса получается  $\frac{4}{\sqrt{13^2 - 4^2}} \approx \frac{4 \cdot 3}{37}$  — вторая подходящая дробь, с погрешностью 0,18%. В качестве первого приближения для отношений  $12/37$  и  $89/274$  могли брать  $1/3$  — первую подходящую дробь для  $\tan 18^\circ$ , с отличием 2,6%.

Есть еще один довод, возможно, более сильный, в поддержку нашей гипотезы. Леонардо Фибоначчи в книге «Practica Geometriae» (около 1220 г.) рассматривает правильные пяти- и десятиугольники, подробно описывая возникающие в них отношения отрезков, связанные с делением в крайнем и среднем отношении, давая толчок к развитию этой темы европейскими математиками. Первым эстафету подхватил Дж. Кампано из Новары (~ 1210/1220 – 1296), чья основная сфера математических интересов (если судить по его примечаниям к переводу «Начал» Евклида) — теория звёздчатого пятиугольника. В книге «Practica Geometriae» Леонардо Фибоначчи анализирует и проблему об определении числа  $\pi$ . Он приводит два известных ему приближения —  $22/7$  ( $\pi_1$ ) и  $377/120$  ( $\pi_2$ ), и добавляет еще одно —  $864/275$  ( $\pi_3$ ), которое считается собственной находкой Фибоначчи [8, с. 81], [9, с. 266]. Не до конца проясненная история появления последнего и может дать

дополнительный довод в пользу нашей гипотезы. Кымпан считает, что приближение  $\pi_2$  Леонардо взял у индийских математиков [8, с. 81], хотя оно приведено в IV книге «Альмагеста» Птолемея, и Пизанский упоминает Птолемея и его «Альмагест» в своей «Книге абака» [4, с. 180]. Еще один довод считать, что Леонардо взял это приближение у Птолемея, связан с предлагаемым им приближением для  $\pi$ . Дело в том, что  $\pi_2 > \pi$ , хотя у Птолемея оно определяется, как равное  $720 \cdot \sin(\pi/720)$ , т. е. является нижней границей для  $\pi$ . Леонардо и считает его нижней границей, иначе бы не предложил свое приближение, поскольку  $\pi_3 > \pi_2$  и имеет больший знаменатель. Но Птолемей посчитал  $\sin(\pi/720)$  с ошибкой в сторону завышения, и  $377/120$  оказалось больше  $\pi$ . Принято считать, что Пизанский получил свое приближение из рассмотрения вписанного и описанного 96-угольников, для которых нашел:

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1440}{458\frac{1}{5}}. \quad (4)$$

Взяв выражение для среднего гармонического из этих двух границ, он приближает его дробью  $864/275$  ( $((4/9 + 1/5)/2 = 29/90 \approx 1/3, 1440/(458 + 1/3) = 864/275)$  [9, с. 266]. Можно предположить, что Пизанский использовал среднее гармоническое в последнем шаге, поскольку знал, что  $P(2n) = H(p(n); P(n))$ , где  $P(n)$ ,  $p(n)$  — периметры описанного и вписанного  $n$ -угольников, соответственно, а  $H$  — среднее гармоническое. В книге «Practica Geometriae» не расписана подробно последовательность получения (4), но сами эти неравенства порождают ряд вопросов. Во-первых, почему Фибоначчи возвращается к 96-угольнику, рассмотренному Архимедом, после 720-угольника Птолемея? И во-вторых, со времен Архимеда процедура нахождения  $\pi$  через рассмотрение вписанных и описанных многоугольников сводилась к формуле-схеме:

$$C(n) < A(n) < n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \pi < n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) < B(n) < D(n). \quad (5)$$

$A(n)$  и  $B(n)$  находятся в процессе приближенного вычисления соответствующих синусов и тангенсов, во время которых *учитывается влияние сделанных приближений на уменьшение/увеличение получаемых значений*.  $C(n)$  и  $D(n)$  находятся по необходимости, как соответствующие дробные приближения для  $A(n)$  и  $B(n)$  с небольшим знаменателем, которыми удобно пользоваться на практике. Результат, полученный Архимедом, который, видимо, знал алгоритм Евклида для получения подходящих дробей, когда известно с какой стороны дробь приближает исходное число, и использовал его для нахождения  $C(n)$  и  $D(n)$  [11], а для  $\sqrt{3}$  получил девятую и двенадцатую подходящие дроби [10, с. 224], приближающиеся к  $\sqrt{3}$  с разных сторон, полностью удовлетворяет этой схеме. Причем, как пишут авторы статьи [12], точность исходного приближения к  $\sqrt{3}$  снизу (двенадцатая подходящая дробь) превосходит в 50 раз точность оценки сверху (девятая подходящая дробь), поскольку Архимед, скорее всего, заметил, что погрешность для верхней оценки растет существенно медленнее, чем для нижней.

Но  $\frac{1440}{458\frac{4}{9}} > 96 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{96}\right)$ . Если ввести обозначения:  $A^+(n)$  и  $A^-(n)$  для приближений к  $n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , где  $A^+(n) > n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$  и  $A^-(n) < n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ , и аналогичные для  $B(n)$ , то на каждом шаге надо считать  $A^+(n)$ ,  $A^-(n)$ ,  $B^+(n)$  и  $B^-(n)$  для корректного подсчета  $A^-(2n)$ ,  $B^+(2n)$ , поскольку, например,  $B^+(2n) = H(A^+(n), B^+(n))$ . Поэтому, скорее всего, дробь  $\frac{1440}{458\frac{4}{9}}$  — это  $A^+(96)$ , которая находилась для последующего определения  $B^+(198)$ , значение которого Леонардо и берет для своего приближения  $\pi$ .<sup>3</sup> Но тогда он, скорее всего, должен был понимать, что  $B(198)$  является худшим приближением, чем  $A(720)$ , и, поскольку у  $\pi_3$  больший знаменатель, чем у  $\pi_2$ , остается вопрос, зачем он его все-таки предлагает.

В [3] рассматривается предположение, что Леонардо Пизанский скрыл истинное основание, от которого он отталкивался при описании своей знаменитой последовательности, заменив его задачей

<sup>3</sup>Метод Герона и Фибоначчи дает для квадратных корней приближение с избытком. Возможно, Леонардо и не искал  $A^-(n)$ , сосредоточившись на рассмотрении ограничений сверху.

о кроликах, поскольку первое было связано с чужим секретом (пчеловодство) и мусульманскими источниками. Не поступил ли он и в случае своего приближения для числа  $\pi$  подобным образом? Поставить этот вопрос подталкивает следующий факт: все три приведенные им приближения удовлетворяют одной формуле:

$$\pi \approx \frac{6}{5} \cdot \frac{F_{n+2}}{F_n}! \quad (6)$$

Это позволяет рассмотреть альтернативный путь появления приближения  $\pi_3$ . Леонардо мог обратить внимание, что приближение Птолемея содержит число 377 — 14-е число из его последовательности и последнее из выписанных им в красной рамке на соответствующей странице «Книги Абака». Поскольку  $120 = \frac{5}{6} \cdot 144$ , то он сразу получил, что  $\pi_2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{377}{144} = \frac{6}{5} \cdot \frac{F_{14}}{F_{12}}$ . Потом он находит, что и приближение Архимеда можно записать аналогичным образом через его числа:  $\pi_1 = \frac{22}{7} = \frac{6}{5} \cdot \frac{55}{21} = \frac{6}{5} \cdot \frac{F_{10}}{F_8}$ . Но поскольку он ошибочно считал приближение  $\pi_2$ , как и Птолемей, — *нижней границей* для  $\pi$ , а Архимеда — верхней, то и предложил «среднее» между ними, удовлетворяющее формуле (6) —  $\pi_3 = \frac{6}{5} \cdot \frac{F_{12}}{F_{10}} = \frac{864}{275}$ . Возникающая дробь состоит из больших чисел, чем в варианте Птолемея, и Фибоначчи, скорее всего, не предложил бы ее, не считая, что она может быть лучшим приближением, чем у Птолемея. Хотя не исключено, что он сначала посчитал  $B^+(198)$ , нашел свое приближение  $\pi_3$  и только потом мог обнаружить, что все три известные ему приближения удовлетворяют формуле (6). В этом случае оправданность появления приближения  $\pi_3$  в книге, несмотря на понимание, что оно хуже  $\pi_2$ , обусловлена именно знанием общей формулы для всех трех приближений.

Внутри формулы (6) из найденных приближений возникает последовательность из трех чисел, равных отношению двух чисел Фибоначчи:  $\frac{F_{10}}{F_8} = 2,6190$ ;  $\frac{F_{12}}{F_{10}} = 2,6(18)$ ;  $\frac{F_{14}}{F_{12}} = 2,6180(5)$ . Фибоначчи знал формулу  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , где  $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618\dots$ , геометрически связанную с применением гномона к равнобедренному треугольнику с углом  $36^\circ$  при вершине (рекурсивное встраивание равнобедренного треугольника в больший, подобный исходному), которую он мог получить и алгебраически из  $\varphi^2 + \varphi = 1$ . Эти три приближения для  $\pi$  могли дать толчок Леонардо для приближенного вычисления  $\varphi$ , что приводило его к двум первым приближениям —  $5/8$  и  $89/144$  и почти с неизбежностью натолкнуло бы математика на обнаружение связи  $\varphi$  со своими числами. Эти рассуждения позволяют предположить, что Фибоначчи мог знать о стремлении отношения его чисел к  $\Phi$  с увеличением номера. Но предельный вариант формулы (6) при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\pi = \pi_0 = 6/5 \cdot \Phi^2 \approx 3,1416408\dots \quad (7)$$

дает для  $\pi$  число, меньшее  $\pi_2$ , что Фибоначчи счел бы неверным. Возможно, именно поэтому он и не приводит его в своей книге по геометрии. А публиковать в книге по геометрии утверждение, не относящуюся к ее тематике (о стремлении отношения двух соседних чисел Фибоначчи), Леонардо мог счесть неуместным. По крайней мере, это объясняет и предложенное им приближение для  $\pi$ , и отсутствие в книге по геометрии предельной формулы (7). Математики могли узнать об ошибке Птолемея после появления таблиц синусов Региомонтана (1436–1476), который приближения для квадратных корней находил именно по формуле Герона. До 1463 года им были составлены таблицы с шагом в  $1'$ , которые ходили в списках и впервые были напечатаны в 1490 году в приложении к книге «Tabulae directionum». Более точные таблицы Региомонтана, созданные в 1468 году, впервые были напечатаны только в 1541 году, через 65 лет после его смерти [13, с. 58, 82–83]. При нахождении  $\sin(18^\circ)$  и  $\sin(54^\circ)$  он, видимо, использовал приближения для  $\varphi$  и  $\Phi$ , равные  $\frac{F_{23}}{F_{24}}$  и  $\frac{F_{25}}{F_{24}}$ , но знал ли он, что имеет дело с отношением чисел Фибоначчи?... Он, скорее всего, понял бы это, вычислив два предшествующих приближения для  $\varphi$ :  $5/8$  и  $89/144$ . Но не пропустил ли их Региомонтан в привычке оптимизировать расчеты?

Геометрически формулу (7) можно интерпретировать различным образом. Например: площадь круга с радиусом  $5 - \sqrt{5}$  равна 6; периметр окружности, с диаметром равным 5, равен периметру прямоугольного стола с отношением сторон  $1:\Phi$ , меньшая сторона которого равна 3;  $1/12$  часть длины

окружности равна  $1/5$  суммы ее диаметра и стороны вписанного правильного 10-угольника. Подобных вариаций может быть достаточно много, в том числе и связанные с правильным звездчатым пятиугольником.

Интересно отметить, что в точность формулы (7) верили еще во второй половине XX века некоторые исследователи темы Грааля [14, с. 426–428]<sup>4</sup>. При этом отмечается ее связь с преданием о трех столах Грааля (круглом, квадратном и прямоугольном, с отношением сторон 2:1)<sup>5</sup>, равных *по периметру*. Это предание, если оно возникло в Средневековье, могло повлиять на изменение формулировки задачи о квадратуре круга (переход от равных площадей к равным периметрам). И в истории числа  $\pi$  отмечается, что даже такой сильный математик, как Дж. Кампано из Новары, основной математический интерес которого был связан с звездчатым пятиугольником, искал квадратуру круга через равенство периметров [8]. Отметим, что в одной из приведенных выше геометрической интерпретаций формулы (7) возникает деление периметра окружности на 12 равных частей, что вызывает ассоциацию с зодиаком и круглым столом короля Артура, за которым усаживалось 12 рыцарей<sup>6</sup>. Чисто хронологически появление интереса к чаше Грааля в Европе и книг Фибоначчи совпадает, что могло способствовать соединению их тем в рамках некоего духовного поиска.

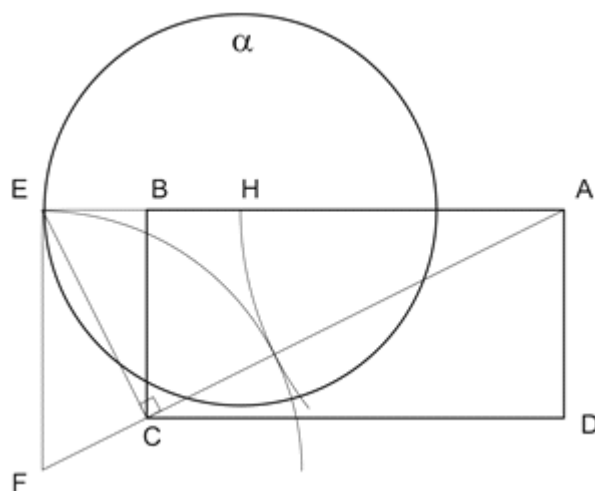


Рис. 2.

Построение окружности диаметра  $d$  *равного по периметру* прямоугольнику со сторонами  $b$  и  $2b$ , при  $\pi$ , определенной по (7), приводит к формуле:  $d = 5\varphi^2 b$ . На рис. 2 приведен один из наиболее простых вариантов возможных построений, в котором применено стандартное деление отрезка  $EA$ , равного  $5/2 \cdot b$ , в золотом сечении.  $AD = b$ ,  $EH = 5\varphi^2 b/2$ ,  $H$  — центр окружности  $\alpha$ . Длина окружности  $\alpha$  «равна» периметру прямоугольника  $ABCD$ , с отношением сторон 2:1. Равенство периметров в Предании и добавление прямоугольного стола с соотношением сторон 2:1 могло быть обусловлено не только рассаживанием 12 апостолов (рыцарей) и отсылкой к Божественной пропорции, но и относительной легкостью этого построения, при котором сокращается множитель «6» в случае верности формулы (7). Если вокруг прямоугольного и круглого столов разместить 12 человек, на каждого из которых приходится 1 условная единица (у.е.) длины, то  $b = 2$  и  $d = 10\varphi^2$  у.е., и мы получаем

<sup>4</sup>Мартин Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» упоминает американца Фрэнка А. Лонка, который в середине XX века в своих брошюрах, выпускаемых Фортеанским обществом Т. Тэйера, где публиковались в основном архитекторы, отстаивал абсолютную верность формулы (7).

<sup>5</sup>«... и три составляло два к одному» — фраза из предания, которая интерпретируется как: третий (прямоугольный) стол имеет отношение сторон два к одному. При этом прямоугольный стол сделал Христос для Тайной Вечери, квадратный — Иосиф Аримафейский, а круглый — стол рыцарей короля Артура. Литературным источником Предания является роман «Мерлин» Робера де Борона, написанный, скорее всего, после 1204 года.

<sup>6</sup>На средневековых гравюрах и рисунках стол имел центральный вырез, в котором изображался сидящий Артур или — Явление Грааля.

выражение для периметра (P):  $P = 10\varphi^2\pi = 12$  у.е. Интересно отметить, что диаметр круга в этом случае равен одному из неизвестных в системе (1), предложенной Фибоначчи.

За то, что поиск квадратуры круга, по крайней мере в эпоху Возрождения, мог приобрести религиозный оттенок, говорят решения задачи о квадратуре круга, предлагаемые в XV–XVI вв. различными известными людьми. Еще Николай Кузанский (1401–1464) — немецкий философ-кардинал, свою уверенность в возможности определения квадратуры круга подкреплял философско-богословскими соображениями, а в самом решении этой задачи видел переход от рассудка (в рамках построений которого решение невозможно) к умному видению (*visio intellectualis*), подобного божественному, в рамках которого снимается различие противоположностей [15, с. 281]. В своем трактате «Квадратура круга» (1450) Кузанский при спрямлении окружности использует прием, в основе которого лежит идея предельного перехода, ставшая ключевой в математическом анализе Нового времени [15, с. 283]. В трактате «О математическом совершенстве» (1458) он дает последний вариант нахождения квадратуры круга, с верой в верность которого он отошел в иной мир. Философское обоснование своих математических построений в этом трактате кардинал поместил в отдельный трактат, который назвал «Берилл». В рамках развиваемых здесь параллелей, интересно отметить, что, согласно роману средне-германского поэта Албрехта «Младший Титурель», написанного около 1260–1275 гг., из берилла была сделана Чаша Грааля. В «Берилле» кардинал-философ сопоставляет умное зрение в геометрии с умным зрением в богословии: «Таким путем становится яснее и евангельское учение, ставящее целью творения лицезрение Бога богов на Сионе и величие Его славы — явление Отца, в котором полнота всего. И наш спаситель, через которого Бог и веки сотворил, то есть само Слово Божие, обещает, что явится в этот день и что тогда [видящие Бога] будут жить жизнью вечной. Это явление можно представить так, как если бы кто-то единым взором увидел интеллект Евклида, причем видение это было бы восприятием всего того искусства, которое развертывает Евклид в своих «Началах»» [15, с. 288]. Параллель между умом гения, где в свернутом виде присутствует «всё его искусство» и божественным Умом, где в свернутом виде находится, как искусство, вся история человечества, возможно, будет подхвачена Микеланджело в его росписи «Сотворение Адама», в композиции которой будет использована Божественная пропорция [7].

Уже ближе к концу XVI века филолог и историк Дж. Скалигер (1540–1609) утверждал, что Архимед был неправ, и предложил построение, где  $\pi$  получалось равное  $\sqrt{10}$  («*Cyclometrica elementa duo*», 1594). И хотя математики не раз говорили Скалигеру об ошибке его вычислений (в том числе и Виет, посчитавший в 1579 году число  $\pi$  с точностью до 9 знаков и выпустивший свою «Апологию Архимеда против Скалигера»), но отец современной хронологии продолжал настаивать на своем. И более того, уверял, что *периметр вписанного 12-угольника больше длины окружности*<sup>7</sup> [16]. Последнее утверждение Дж. Скалигера, даже не поддержанное попыткой сопутствующего расчета, противоречащее найденному им же значению числа  $\pi$ , могло быть связано с религиозными исканиями. Почему он говорит именно о 12-угольнике? Не от числа ли апостолов Христа, знаков зодиака и рыцарей Круглого стола?... Да и что могло толкать человека, далекого от математики, но близкого к проблемам истории, ее преданиям, сына известного гуманиста Сезара Скалигера (1484–1558), чей дом часто посещал Нострадамус, не просто искать квадратуру круга в конце XVI века, но отстаивать свое мнение, полностью противоречащее и современной ему науке, и авторитетному решению Архимеда?! За полвека до него, в 1542 году, французский математик, филолог и теолог-мистик, Шарль де Бовель (1479–1566) предлагал свое построение, дававшее для  $\pi$  то же «точное» —  $\sqrt{10}$  [17, с. 40–41]. При этом Бовель в своем построении делает ряд ничем не обусловленных шагов, таких как выбор положения центра второй окружности, отстоящей от первой на  $\frac{1}{4}$  часть его радиуса, никак

<sup>7</sup> Довольно странное утверждение, если добавить, что периметр вписанного двенадцати-угольника в то время можно было легко посчитать, пользуясь таблицами синусов Региомонтана, и увидеть, что он меньше длины окружности при  $\pi = \sqrt{10}$ . Более того, из него сразу следует, что кратчайшее расстояние между точками не есть отрезок прямой, их соединяющей. Если Лурье не ошибся, и оно верно, то Скалигер сознательно не хочет проверять доступными ему методами верность своих утверждений. Что, как не религиозное чувство, заставляет его поступать так?



их не объясняя, с единственной целью – построить квадрат, сторона которого равна  $\sqrt{5/2} \cdot r$ . Но последнее легче всего было сделать, используя прямоугольник с соотношением сторон 2:1, который, между тем, в его построении отсутствует. И если упорство Скалигера, не имевшего математического образования, еще можно понять в рамках традиционных исторических представлений, то от профессора Парижского университета, которого филолог Михайлова Е.Н. назвала «одним из титанов Возрождения» [18], несколько неожиданно такое заявление. Вряд ли он не знал, что приближение Архимеда дает верхнюю границу.

Переоткрыть формулу (7), игрой случая получившую привязку к поискам вокруг Чаши Грааля, благодаря преданию о трех столах Грааля, мог кто-то из герметических обществ конца XV – начала XVI вв., с хорошим математическим образованием. Разница левой и правой частей формулы (7) равна  $4,8 \cdot 10^{-5}$ , т. е. оно верно с точностью до 0,0015%. Но для доказательства факта приближенности этой формулы необходимо было рассмотреть вписанный и описанный правильные многоугольники с не менее чем  $768 (3 \cdot 2^8)$  сторонами. Достаточно сложная задача, особенно для не математиков, каковыми и были в основном искатели священных знаний. Отчасти поэтому они могли верить в точность найденной формулы, в решение задачи о квадратуре круга, тем более, что в правой ее части присутствовало иррациональное число.

Могло ли на рубеже XV – начала XVI вв. произойти независимое открытие связи Божественной пропорции с числами Фибоначчи? Да, если золотое сечение стало тогда применяться в живописи, поскольку художники пользовались бы его приближениями дробными числами. При этом надо отметить, что дроби  $3/5$  и  $5/8$  могли использоваться художниками и без осознания их связи с золотым сечением и числами Фибоначчи, как гармоничные смещения от центра на  $1/10$  и  $1/8$ . При этом отличие  $5/8$  от Божественной пропорции составляет всего 1,1%. Это относится к анализу на применение золотого сечения в картинах художников, особенно когда использование этой пропорции еще не было общепринятым: только в случае, если концептуально значимая линия ближе к  $89/144$ , чем к  $5/8$  (или к  $3/5$ ), можно уверенно говорить об ее применении.

Первым, по времени появления, примером, говорящим о такой возможности, является полотно «Рождение Венеры» Боттичелли с размерами  $172,5 \times 278,5$  см. Здесь отличие отношения ее высоты к ширине от  $13/21$  находится в пределах погрешности измерений. Но концептуально значимая линия горизонта в картине близка к  $3/5$  ее современной высоты. Для более-менее полноценного вывода необходим дополнительный анализ изменения размеров полотна со временем. Предположительное появление в картине, посвященной Венере, Божественной пропорции могло быть обусловлено причиной и космологического порядка – известной из системы Птолемея астрономической связью планеты Венеры с пятиконечной звездой – планета вычерчивает в геоцентрической системе координат за 8 лет траекторию с симметрией пятого порядка, похожую на правильную пятиконечную звезду. Более того, со времен вавилонской астрономии считалось, что 5 обращений Венеры по аномалии соответствуют 8 солнечным годам<sup>8</sup>. Это приводило к равенству отношений двух ее периодов движения в системе Гипарха – по эпициклу и деференту<sup>9</sup> –  $8/13$ . Птолемей немного уточнил его, но отличие не превысило 0,08%<sup>10</sup>. Боттичелли, как посетитель флорентийской платонической Академии, мог знать, как минимум, перенятый греками вавилонский вариант – 5 аномалий за 8 лет. Отношение сторон полотна больше  $\varphi (13/21)$ , как и  $5/8$ , что может говорить об отталкивании художника от варианта  $5/8$  и одновременно позволяет поставить вопрос о возможном знании им приближения к  $\varphi$  через отношение чисел Фибоначчи. Т.е. связанность планеты Венеры с пятиконечной звездой, имеющей в качестве своего представителя в мире чисел –  $\varphi$ , и, одновременно, с отношениями  $5/8$  и  $8/13$  могло подтолкнуть открыть существование связи между числами Фидия и Фиббоначчи. И

<sup>8</sup> Есть основания считать, что это было известно еще во времена мегалитической астрономии, 3 тысячи лет до н.э., и могло способствовать переходу на 365-дневный календарь, поскольку время между пятью нижними соединениями с точностью до дня равно  $2920 \text{ дней} = 365 \text{ дней} \times 8 \text{ лет}$ .

<sup>9</sup> Эти периоды равны сидерическому периоду Венеры и солнечному (тропическому) земному году, соответственно.

<sup>10</sup> Современное значение отношения сидерических периодов обращений Венеры и Земли отличается от  $8/13$  на 0,03%.

художник своим выбором для отношения сторон картины дроби  $13/21$  дает нам довод в поддержку этого утверждения.

В 1498 году математик и францисканец Лука Пачоли (1447–1517) написал Послание герцогу Милана Лодовика Сфорца «О божественной пропорции», с иллюстрациями Леонардо да Винчи. В нем привычное для европейского математика деление [отрезка] в крайнем и среднем отношении было названо «Божественной пропорцией», чем подчеркивалось религиозное отношение ее автора к ней. «Особую ценность, выделенность отношения «божественной пропорции» среди прочих отношений брат ЛУКА обосновывает доводами метафизического и теологического характера. Единственность и неизменность данной пропорции сравнивается с единственностью и неизменностью Бога, три её члена — с тремя ипостасями Святой Троицы, иррациональность отношения — с непостижимостью и невыразимостью Бога» [19, с. 36]. Пачоли полагал, что Божественная пропорция символизирует Троицу, где Бог Отец — целый отрезок — 1; Сын — большая часть —  $\varphi$ ; Святой Дух — меньшая ( $\varphi^2$ ) [20].

Послание «О божественной пропорции» становится единственным письменным источником XV–XVI вв. на эту тему, и хотя оно повторится в книге Пачоли «Божественная пропорция» 1509 года, но в вошедших в нее трактатах об архитектуре и пропорциях человеческого тела о Божественной пропорции не будет сказано ни слова. Более того, до нас не дошло ни одного древнего письменного источника о применении золотого сечения в архитектуре и скульптуре, что дало Щетникову право предположить, что оно и не использовалось в них, а было выделено только в геометрии и в космологии, в связи с утверждением во времена Пифагора в устройстве Вселенной особой роли додекаэдра. Щетников пошел дальше и утверждает, что отсутствие соответствующих письменных источников XV–XVII вв. говорит, скорее всего, о неиспользовании золотого сечения в качестве эстетического начала ни в архитектуре, ни в скульптуре и ни в живописи и в эпоху Возрождения, вплоть до Кеплера, включительно [19, с. 39]. Но нельзя исключать и вариант, что отсутствие письменных свидетельств использования числа Фидия в архитектуре является следствием сокрытия цеховых и личных (скульптора, архитектора, мастера, «каменщика») профессиональных секретов, как это было характерно братствам каменщиков Позднего Средневековья и Возрождения. Когда в 1486 г. немецкий мастер Матхаус Роцирер начал публикацию книги "О камне", раскрывая в ней секреты строительства храмов, всеильная ложа каменщиков наложила запрет на продолжение книги. «Более того, из сохранившихся документов известно, что за нежелание подчиняться уставу строитель собора мастер Вольфганг Роцирер, дядя Матхауса Роцирера, а с ним и резчик Микаэл Лой в 1514 г. были приговорены к смертной казни» [5, с. 238]. Еще одно затруднение в ее обнаружении связано с тем, что Леонардо да Винчи использовал в своих произведениях (Витрувианский человек, Тайная вечеря, Спаситель Мира), скорее, не саму Божественную пропорцию, а связанные с ней углы — 36, 72 и 108 градусов [7].

Есть одно произведение начала XVI века, на котором проблема выбора между  $5/8$  и  $89/144$  решается в пользу последнего, однозначно говоря об использовании Божественной пропорции в живописи Возрождения. Речь идет о фреске «Сотворении Адама» (1511 г.) Микеланджело (1475–1564) из росписи Сикстинской капеллы. Ее фрагмент приведен ниже с соответствующими сечениями. Видно, что  $5/8$  пересекает палец Адама, а линия  $5/8 - 1/144$  ( $89/144$ ) — проходит в небольшом зазоре между пальцами Адама и Бога. Скорее всего, Микеланджело во время работы над потолком капеллы (1508–1512) прочитал только что вышедшую книгу Пачоли «Божественная пропорция» (1509) и быстро нашел способ применить ее идеи на практике. На фреске пространство «Адама» в Ф раз меньше пространства Бога, что ставит его в один ряд, в рамках контекста книги «Божественная пропорция», с Сыном Бога.

Использование Божественной пропорции в живописи должно было подтолкнуть к нахождению подходящих дробей для нее на рубеже XV–XVI вв. и, как следствие, к более широкому распространению знания о ее связи с числами Фибоначчи. Таким образом, есть основания предположить, что в начале XVI века могли быть известны как факт стремления отношения соседних чисел Фибоначчи

к Божественной пропорции, так и формула (7).

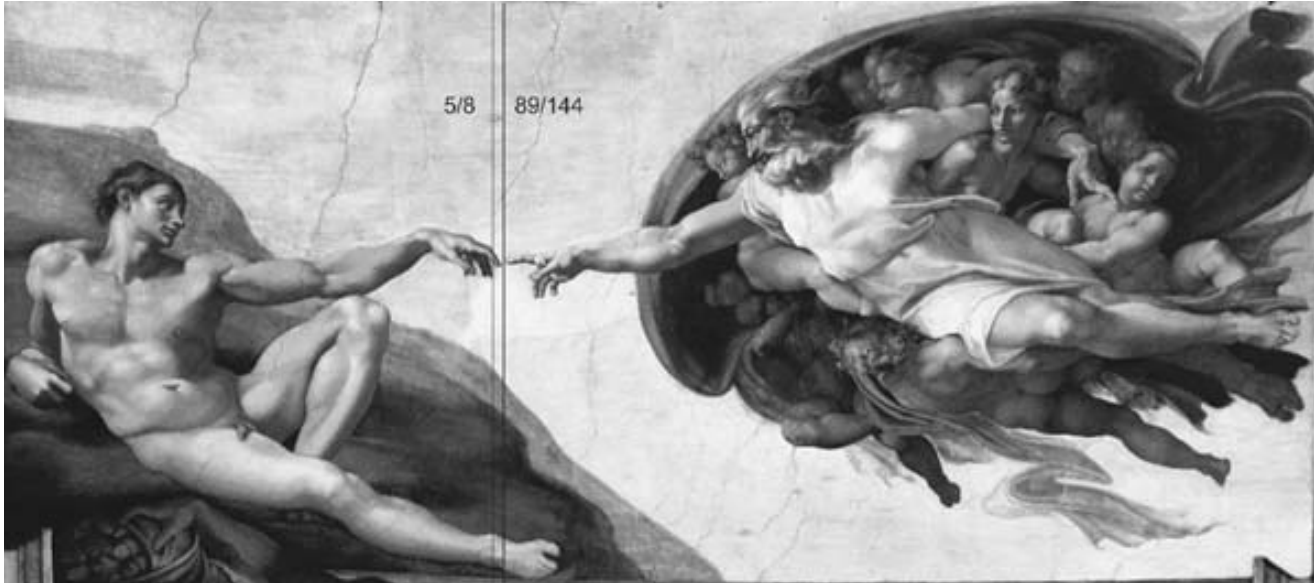


Рис. 3. Микеланджело, Сотворение Адама, около 1511 г., Сикстинская капелла

Существует еще один довод в поддержку гипотезы о знании в XVI веке связи чисел Фибоначчи и Фидия — заметка на полях второй книги «Начал» Евклида, изданной в 1509 году, которая принадлежала Пачоли (!), в месте 11-го предложения, напротив рассуждений о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, однозначно говорящая о знании ее автора выражения [1]:

$$144^2 - 89 \cdot 233 = -1, \quad (8a)$$

которое является частным случаем формулы Кассини:

$$F_n^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \quad (8)$$

впервые опубликованной в 1680 году. Заметка на полях книги является очень редким свидетельством, говорящим не только о возможном знании ее автора факта связи между числами Фибоначчи и Божественной пропорцией, но и что некоторые математические находки в XVI веке могли не обнародоваться. Автор заметки [1] утверждает, что ее существование говорит о возможности знания в XVI веке связи чисел Фибоначчи с Божественной пропорцией<sup>11</sup>. После издания Евклида 1509 года до времени открытия этой формулы Кассини было много других переизданий «Начал» на различных языках (1537, 1543, 1558 и т. д.) и в том числе французский перевод Андре Таке (1612–1660), которым мог пользоваться Кассини. Поэтому маловероятно, что автором записи на полях книги 1509 года является кто-нибудь из XVII века. Первый путь ее обнаружения опирается на свойство удобных для использования в живописи и первых двух приближений для  $\varphi$ , получающихся по методам Герона или Фибоначчи, для Божественной пропорции:

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{144} = \frac{89}{144}. \quad (9)$$

Умножим его на 144:  $5 \cdot 18 - 1 = 89$ ; заменив в этом равенстве 18 на  $5 + 13$ , а 89 на  $5^2 + 8^2$ , получим:  $8^2 = 5 \cdot 13 - 1$ . Это равенство позволяет сформулировать гипотезу о выражении квадрата

<sup>11</sup>Причина так считать, обусловлена не только местом ее записи. Из тождеств  $\Phi^2 = \Phi + 1$  и Кассини можно легко получить выражение для скорости стремления отношения чисел Фибоначчи к  $\Phi$  при увеличении  $n$ :  $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n} - \Phi\right) = (-\varphi)^n / F_n$ .

числа Фибоначчи через произведение соседних чисел, проверка которой для других чисел Фибоначчи приводит к уравнению (8). При этом попутно, из рассмотренных частных случаев, можно было догадаться о верности формул:

$$F_{2n} = F_n (F_{n-1} + F_{n+1}) \quad \text{и} \quad F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2. \quad (10)$$

Отметим, что выражение (8a) получается непосредственно при аналогичном рассмотрении третьего приближения для  $\varphi$ , найденного по методам Герона или Фибоначчи:  $89/144 - 1/46368 = 28657/46368 = F_{23}/F_{24}$ . Кстати, этим приближением пользовался Региомонтан при составлении своей таблицы синусов, и запись на полях книги Евклида является косвенным доводом в пользу предположения, что он мог самостоятельно обнаружить связь чисел Фибоначчи и Фидия и открыть формулу Кассини. По крайней мере, у него была причина для вычисления больших чисел Фибоначчи. После смерти в 1504 году Вальтера — помощника Региомонтана, наследовавшего все его рукописи и «тщательно оберегавшего их от посторонних глаз в течении всей своей жизни» [13, с. 55] — рукописи великого ученого попали к различным, порой далеким от науки, хозяевам, и после перепродажи какая-то часть их могла оказаться у Пачоли. Но возможно, что число 144 в заметке на полях выбрано как просто большое, для проверки уже сформулированной ранее гипотезы.

К формуле (8) можно было прийти и немного иным путем. Проверив, что уравнение (9) выполняется для других чисел Фибоначчи:  $1 - 1/3 = 2/3$ ,  $2/3 - 1/21 = 13/21$  и т. д., можно записать его в общем виде:

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{4n}} = \frac{F_{4n-1}}{F_{4n}}. \quad (11)$$

Перепишем его, умножив на  $F_{4n}$ :

$$\frac{F_{2n-1}F_{4n}}{F_{2n}} - 1 = F_{4n-1}.$$

Используя формулы (10), получим:

$$(F_{2n-1})^2 + F_{2n-1}F_{2n+1} - 1 = F_{2n}^2 + F_{2n-1}^2$$

или

$$F_{2n}^2 = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1, \quad (12)$$

тождественную формуле Кассини при четных индексах, к которым принадлежит и формула на полях книги Евклида. Но этот вывод предполагает предварительное получение зависимостей (10), что подразумевает существование уже развитого интереса к закономерностям последовательности чисел Фибоначчи, о существовании которого в XVI веке ничего не известно.

Доказать верность тождества Кассини в XVI веке легче всего было геометрическим путем, обратив внимание, что оно содержит два квадратичных слагаемых. Для доказательства построим привычный для геометров XV–XVI веков рисунок (см. рис. 4). Квадрат ABCD со стороной  $F_n$  совмещаем с прямоугольником DEFG со сторонами  $F_{n-1}$  и  $F_{n+1}$ . Из рисунка сразу получаем:  $F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (F_{n-1})^2 - F_nF_{n-2}$ . Эту процедуру можно продолжить пока не дойдем до квадрата со стороной, равной  $F_2$ . Если начальный квадрат имеет сторону, равную числу Фибоначчи с четным номером, то мы, совершив четное число шагов, получим  $F_{2n+1}F_{2n-1} - (F_{2n})^2 = F_3F_1 - (F_2)^2 = 1$ , если — нечетный номер, то получим нечетное число шагов и минус 1.

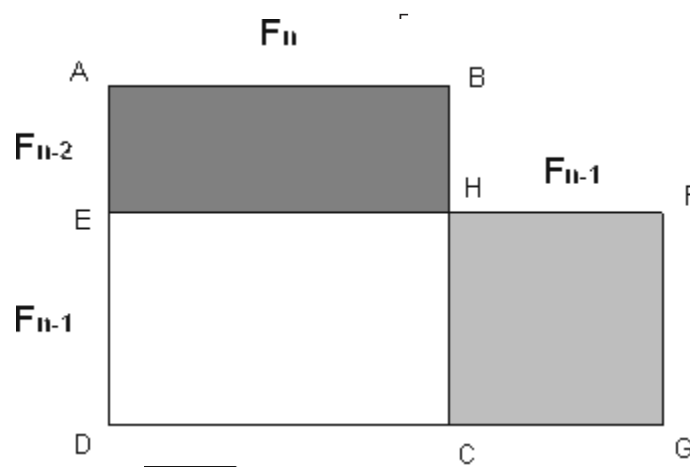


Рис. 4. К доказательству формулы Кассини

Есть основания считать, что Леонардо Пизанский и Пачоли, Боттичелли и Микеланджело могли знать о приближении отношения чисел Фибоначчи к Божественной пропорции, но по каким-то причинам не сохранилось ни одного письменного документа об этом. Это позволяет высказать предположение, что часть находок, связанных с Божественной пропорцией, могла не разглашаться. Не могло ли это быть обусловлено привязкой Божественной пропорции к легендам и тайнам Грааля? Философские кружки, ориентирующиеся на эзотерическую сторону науки, в том числе и математики, могли иметь повышенный интерес к герметической стороне проявления Божественной пропорции. Связывание математических находок, имеющих отношение к Божественной пропорции и числам Фибоначчи, с поисками вокруг чаши Грааля могло увести в скрытую часть работы духа и эту математическую сторону интеллектуальной жизни Возрождения. Такая линия поведения была характерна для Платоновской академии в Кареджи близ Флоренции (1462–1521), особенно после введения папой Сикстом IV (1471–1484) в 1471 году, в первый год своего служения Господу в статусе понтифика, цензуры на литературу религиозного содержания, и розенкрейцерам, интересовавшихся математикой, о которых Фрэнсис Йейтс пишет: «...мы возвращаемся к рассмотрению розенкрейцерского мировоззрения в его целостности. Главным способом воздействия на мировое устройство считалась магия, выступавшая в нижнем мире в обличье математики и механики, в небесном мире – как “небесная математика”» [21]. В [7] показано, что приведенная выше фреска Микеланджело «Сотворение Адама» отражала гностическое, противоречащее каноническому, представление о Боге и сотворении человека, основанное на трактате «Поймандр» Гермеса Трисмегиста, перевод которого, выполненный Марсилио Фичино (1433–1499) в 1461 году, мог ходить в списках. В работе [22] рассматривается применение Божественной пропорции в тайных поисках XVI века, связанных с еретическим представлением о существовании у Христа брата-близнеца, апеллирующих к космографии и астрологии. Представление о брате-близнеце Христа противоречило одному из двух основных догматов: о непорочном зачатии Девы Марии или о Святой Троице, и его приходилось скрывать. Все это могло способствовать сокрытию и чисто математических находок, связанных с Божественной пропорцией. Но нельзя исключать и того, что отсутствие письменных свидетельств соответствующих более ранних открытий объясняется причинами более частного порядка и уничтожением со временем писем и рукописей.

## Литература

1. Herz-Fischler R. The Fibonacci Quarterly, Letter to the editor. - V. 24, - № 4. - 1986. - p. 382.  
URL: <http://www.fq.math.ca/Scanned/34-4/letter2.pdf>
2. Herz-Fischler R. A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio / Golden Number Studies J. Waterloo, Ontario. - Wilfred Laurier University Press, 1987.

3. Scott T.C., Marketos P. On the origin of the Fibonacci Sequence. - MacTutor History of Mathematics, Scotland, 2014.  
URL: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Publications/fibonacci.pdf>
4. Sigler L.E. Fibonacci's Liber Abaci, Leonardo Pisano Book of Calculations. - Springer, New York, 2002. - 644 p.
5. Волошинов А.В. Математика и искусство. - М.: Просвещение, 2000. - 399 с.
6. Клавдий Птолемей, Альмагест или математическое сочинение в тринадцати книгах / перевод И.Н. Веселовского. - М.: Наука, 1998.
7. Ковалев А.Н. Божественная пропорция в поисках эпохи Возрождения, Ч. II // Культура культуры. - 2019. - № 4.  
URL: <http://cult-cult.ru/divine-proportion-in-search-of-the-renaissance1/>
8. Кымпан Ф. История числа  $\pi$ . - М.: Наука, 1971. - 216 с.
9. История математики в трех томах / под редакцией Юшкевича А.П., Т. 1. - М.: Наука, 1970.
10. О квадратуре круга. С приложением теории вопроса / Под ред. и с прим. акад. С.Н. Бернштейна. - М.-Л.: ГТТИ, 1934.
11. Зверкина Г.А. Алгоритм Евклида как вычислительное средство античной математики // Историко-математические исследования, вторая серия. - Вып. 5(40). - М.: Янус-К, 2000. - с. 232–243.
12. Зверкина Г.А., Суфиярова И.И. О методах приближения длины окружности периметрами правильных многоугольников // Историко-математические исследования, вторая серия. - Вып. 2(37). - М.: Янус-К, 1997. - с. 237–261.
13. Белый Ю.А. Иоганн Мюллер (Региомонтан). 1436–1476. - М.: Наука, 1985. - 128 с.
14. Гарднер Л. Чаша Грааля и потомки Иисуса Христа. - М.: 2001. - 496 с.
15. Зайцев Е.А. Квадратура круга и инфинитезимальные методы Николая Кузанского // Историко-математические исследования, вторая серия. - Вып. 12(47). - М.: Янус-К, 2007. - с. 275–289.
16. Лурье С.Я. Архимед. - М.-Л.: Из-во АН СССР, 1945.
17. Жуков А.В. Вездесущее число  $\pi$ . - М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. Михайлова Е.Н. Забытые имена европейской лингвистики: Шарль де Бовель (1479–1566). — В: Язык в социокультурном пространстве и времени // Материалы Всероссийской конференции (г. Астрахань, 13–14 октября 2011 г.), 2011.
19. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции», Приложение к репринтному изданию 1509 г. // Математическое образование. - 2007. - выпуск 1(41).
20. Пачоли Лука. О божественной пропорции. Репринт изд. 1509. С приложением перевода А.И. Щетникова. - М.: Фонд «Русский авангард», 2007.
21. Йейтс Ф., Розенкрейцерское Просвещение. / Перевод А.Кавтаскина под ред. Т.Баскаковой. - М.: Алетея, Энигма, 1999. - 496 с.  
URL: <http://psylib.org.ua/books/yates01/index.htm>
22. Ковалев А.Н. Божественная пропорция в поисках эпохи Возрождения, Ч. I // Культура культуры. - 2019. - № 3.  
URL: <http://cult-cult.ru/divine-proportion-in-search-of-the-renaissance/>
23. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. - 2019. - ISBN 978-5-4485-3753-0.  
URL: [http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book\\_1.html](http://kovalevandrey.ihostfull.com/Books/Book_1.html)

Ковалев Андрей Николаевич,  
Санкт-Петербург.

E-mail: [ser.levsha@yandex.ru](mailto:ser.levsha@yandex.ru)

## Информация

### **О деятельности ФМОП в 2019 г.**

#### *От редакции*

В 2019 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГОУ СОШ № 179 и учебного комплекса № 2090 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, учредителем которого ФМОП является; в 2019 г. вышли номера 1(89), 2(90), 3(91), 4(92).
- Выпуск приложения к журналу “Математическое образование”, (третий выпуск в печатном варианте вышел в июне 2019, четвертый готовится к печати).
- Поддержка подготовки к изданию “О некоторых педагогах ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века” о жизни и деятельности ряда ярославских педагогов.
- Приобретение книг для награждения участников педагогической Олимпиады ФПО МГУ.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников САММАТ, г. Самара, май.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря “Алый Парус” Костромской области, июнь–август.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев, октябрь.
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского научно-методического семинара “Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом”, декабрь.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2019 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2019 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.



## Contents

<b>E. Mish'enko, A. Mish'enko, M. Zelikin. On the Adequacy of Mathematical Models in Control Theory, Physics and Ecology</b>	<b>2</b>
The authors discuss the role of mathematics and the use of mathematical models in various fields of human activity: control theory, physics, modeling of physical, technological and natural processes.	
<b>V. Bodryakov, A. Bykov. Improved Pixel Estimates of Measures of Plane Sets as a Methodological Approach to Introducing the Concept of "Area of a Figure" in Geometry Course. Part 1</b>	<b>17</b>
The paper suggests an approach to obtaining a pixel estimate for a measure of a plane set (area of a figure) with its error estimate. The approach is presented by the authors as a modern alternative methodical approach to the introduction of the concept of "Area of a figure" in a systematic course of geometry for a basic common school. The approach is consistent with the cognitive patterns of modern "IT-oriented" students and successfully combines deep set-theoretical foundations and clearly visible geometric images.	
<b>K. Gorshenin. Analysis of the Mathematical Model of a Real Situation as a Tool for Developing Multilevel Tasks</b>	<b>30</b>
On the basis of a real situation some different mathematical models are constructed and multilevel tasks for school students are developed.	
<b>V. Ivlev, A. Bulanova. Approximation of Euler Equations, Continued</b>	<b>38</b>
An alternative expression of the characteristic functions for a class of completely integrable equations is obtained, a comparative analysis of approaches is done.	
<b>N. Rashevsky. The Trajectory Method in Combinatorics and Probability Theory</b>	<b>43</b>
To solve a combinatorial or probabilistic problem, it is often advisable to use its geometric interpretation, reducing the problem to counting the number of paths (trajectories), with certain properties. This is the trajectory method.	
<b>E. Smolyanova. Transformation of the Branches of a Hyperbola into its Small Fragment</b>	<b>58</b>
The article proposes a method for converting, using a linear-fractional function, the branch of a hyperbola into an arbitrarily small part of the branch, either the same or the other.	
<b>A. Kovalyov. On the Knowledge in the XIII - XVI Centuries of the Relationship of Fibonacci Numbers with the Golden Ratio</b>	<b>63</b>
It is suggested that the use of Divine Proportion (Golden Ratio) by artists and architects, starting from the 13th century, could lead to the calculation of suitable fractions for the Phidia number, and, as a consequence, to the discovery of its connection with Fibonacci numbers.	
<b>Current Information</b>	<b>76</b>

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 &gt;