

Математическое Образование

**Журнал Фонда математического
образования и просвещения**

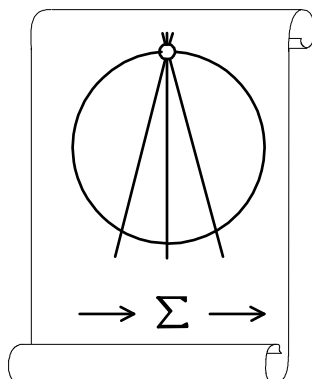
Год двадцать пятый

№ 1 (97)

январь – март 2021 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 1 (97), 2021 г.

© “Математическое образование”, составление, 2021 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 22.04.2021 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

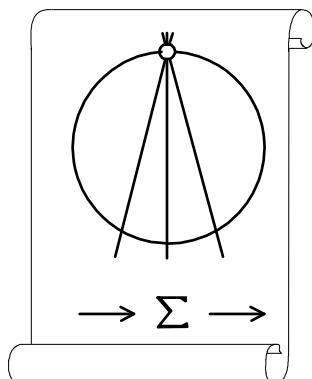
Год двадцать пятый

№ 1 (97)

январь – март 2021 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 1 (97), 2021 г.

© “Математическое образование”, составление, 2021 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 22.04.2021 г.

Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.

Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (97), январь – март 2021 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

<i>В. К. Гаврилов.</i> От равенства Пифагора к равенству Птолемея	2
<i>И. А. Гордеева, С. Б. Наумова.</i> Развивающие задания при изучении модуля “Искусственный интеллект. Система Пролог” в школьном курсе информатики и ИКТ	5
<i>В. Б. Дроздов.</i> Интересное свойство треугольника	13
<i>К. В. Козеренко.</i> Поворот и параллельный перенос	17

Студентам и преподавателям математических специальностей

<i>Е. К. Знак.</i> Оператор $Af = f \circ \varphi - f$ в заданиях математических конкурсов	23
<i>В. Г. Ильичев.</i> “Матрешки” и устойчивость в моделях экологии	31
<i>Коллектив НИУ “МЭИ”.</i> Математика и новые информационные технологии	38
<i>В. А. Попов.</i> О закономерностях появления первых цифр простых чисел	51

Из истории математического образования

<i>С. В. Жаров.</i> Ученый-методист Жаров Виктор Александрович (23.09.1920-30.12.1986)	58
--	----

От равенства Пифагора к равенству Птолемея

В. К. Гаврилов

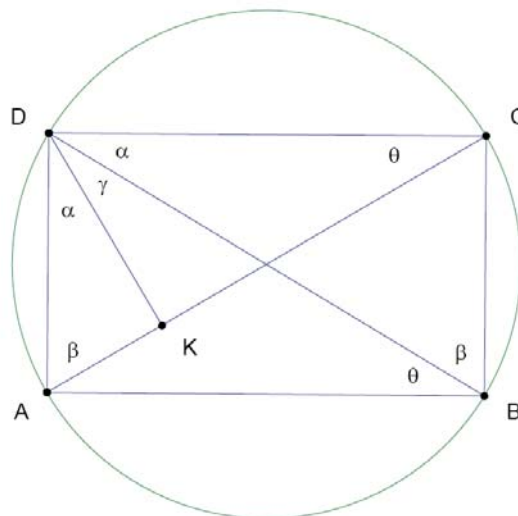
Для четырёхугольника, вписанного в окружность, отмечена связь равенства Птолемея с равенством Пифагора, получено равенство для отношения диагоналей четырёхугольника и определена длина диагоналей.

“Practice makes perfect”.
(John Bull).

С точки зрения преемственности в науке определённый интерес имеет вопрос о предыстории появления теоремы Птолемея. Согласно теореме Птолемея для вписанного в окружность четырёхугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон. В [1, с. 62] приведены три варианта доказательства равенства Птолемея. Первый вариант ориентирован на студентов-математиков — указано на возможность рассмотрения теоремы Птолемея в качестве следствия теоремы Симсона. Второй и третий варианты ориентированы на школьников — для второго варианта обоснование доказательства не указано; доказательство по третьему варианту основано на теореме косинусов. Наиболее простым вариантом доказательства является второй вариант с выполнением дополнительного построения. Этот вариант, также без обоснования доказательства, рассмотрен и в работах [2, с. 34], [3].

По мнению автора, второй вариант доказательства теоремы Птолемея основан на теореме Пифагора.

Действительно, докажем теорему Птолемея для частного случая вписанного в окружность прямоугольника (рис. 1).



$$\begin{aligned}DK \perp AC; &\rightarrow \angle ADK = \angle BDC = \alpha; \rightarrow \triangle AKD \sim \triangle BCD; \\ \angle ADB = \angle KDC = \alpha + \gamma; &\rightarrow \triangle DKC \sim \triangle DAB.\end{aligned}$$

Рис. 1.

Поскольку диагонали прямоугольника и его стороны образуют прямоугольные треугольники, используем известное [4, с. 146] доказательство теоремы Пифагора. Опускаем из вершины угла D высоту DK на диагональ AC и получаем ряд подобных прямоугольных треугольников. Для доказательства равенства Птолемея рассмотрим подобие треугольников, не имеющих общих сторон. Такими треугольниками являются пары треугольников: AKD , BCD и DKC , DAC для которых соответственно имеем:

$$\frac{AK}{AD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow AK = \frac{BC}{BD} \cdot AD;$$

$$\frac{KC}{CD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow KC = \frac{AB}{BD} \cdot CD;$$

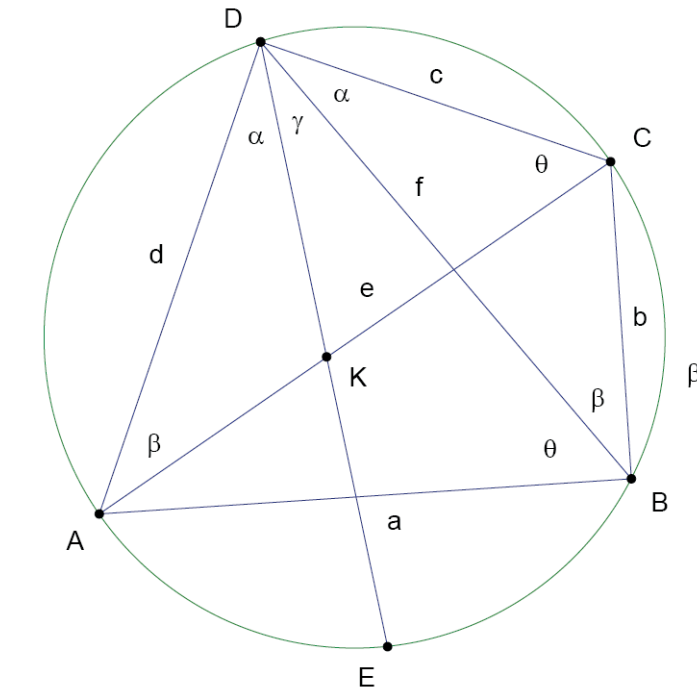
$$AK + KC = AC;$$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Теорема Птолемея для прямоугольника доказана.

Таким образом, для доказательства равенства Птолемея выявилась необходимость построения двух пар подобных треугольников, не имеющих общих сторон. Такое построение для произвольного четырёхугольника возможно, если изменить условия построения отрезка DK .

Для произвольного четырёхугольника (рис. 2), вписанного в окружность (в обозначениях рис. 1), построение отрезка DK выполняют по условию: $\angle ADE = \angle BDC$ [2, с. 34, рис. 32], (построение равных углов по равенству дуг окружности, — см. [4, с. 49]), что обеспечивает подобие рассмотренных в доказательстве выше треугольников, а, следовательно, — и получение равенства Птолемея в общем случае.



$$\begin{aligned} \widehat{AE} = \widehat{BC}; & \rightarrow \angle ADE = \angle BDC = \alpha; \rightarrow \triangle AKD \sim \triangle BCD; \\ \angle ADB = \angle EDC = \alpha + \gamma; & \rightarrow \triangle DKC \sim \triangle DAB; \end{aligned}$$

Рис. 2.

В обозначениях рис. 2 [1, с. 62, рис. 54] равенство Птолемея имеет вид:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d. \quad (1)$$

Отношение длин диагоналей четырёхугольника, вписанного в окружность, найдём следующим образом. Площадь S четырёхугольника равна сумме площадей каждой пары треугольников, имеющих общим основанием одну из диагоналей. С учётом связи площади треугольника, вписанного в окружность радиуса R , с длинами сторон треугольника (следствие теоремы синусов, [1, с. 25]) имеем:

$$S = (a \cdot b + c \cdot d) \cdot \frac{e}{4 \cdot R} = (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \frac{f}{4 \cdot R}.$$

$$\frac{e}{f} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{(a \cdot b + c \cdot d)}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) для определения длин диагоналей получим:

$$e^2 = (a \cdot c + b \cdot d) \cdot \frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{(a \cdot b + c \cdot d)}; \quad (3)$$

$$f^2 = (a \cdot c + b \cdot d) \cdot \frac{(a \cdot b + c \cdot d)}{(a \cdot d + b \cdot c)}. \quad (4)$$

Равенства (1), (2), (3), (4) эквивалентны равенствам, приведённым в [1, с. 62].

Следуя [3], отметим, что для прямоугольника (рис. 1): $BD = AC$, $CD = AB$, $AD = BC$ и равенство Птолемея переходит в равенство Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Таким образом, весьма вероятно, что Птолемей (ок. 100 – ок. 178 г.н.э) начинал работу над своей теоремой с равенства Пифагора (ок. 570 – ок. 500 г. до н.э.) [5], а далее появились и другие варианты доказательства теоремы [3].

Литература

1. Понарин Я.П. Элементарная геометрия. Т. 1. - М.: МЦНМО, 2004.
2. Анищенко С.А. Лекции по геометрии. Ч. 1. - Красноярск: Издательство КГПУ, 1998.
3. URL: <https://nashaucheba.ru/v7370/реферат-Теорема Птолемея-файл n1.doc>, 05.06.2012.
4. Киселев А.П. Геометрия / Под ред. Н.А. Глаголева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. БЭС Математика / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. - М.: “Большая Российская энциклопедия”, 1998.
6. Гаврилов В.К. От равенства Пифагора к равенству Птолемея // Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы VII Всероссийской научно-методической конференции с международным участием, Красноярск/ - 2018 г. - с. 87-89.

Гаврилов Владимир Константинович,
кандидат физ.-мат. наук,
г. Красноярск.

E-mail: gavrilov1009@mail.ru

Развивающие задания при изучении модуля “Искусственный интеллект. Система Пролог” в школьном курсе информатики и ИКТ

И. А. Гордеева, С. Б. Наумова

В статье рассмотрены и систематизированы развивающие задания в рамках модуля “Искусственный интеллект. Система Пролог”. Выполнение предлагаемых заданий дает богатый материал учителю в реализации задачи курса “Информатика и ИКТ”, направленной на развитие у учащихся информационной культуры.

В настоящее время выпускникам школы недостаточно приобретения готовых знаний и умений, каждому современному ученику необходимо хорошо развитое самостоятельное критическое мышление, дающее ему возможность ориентироваться в жизненных ситуациях и находить оптимальное решение. В связи с этим школа должна способствовать развитию такого мышления, а также универсальных учебных действий, направленных на самостоятельное решение школьниками учебных и жизненных задач. В двадцать первом веке, веке информации и информационных технологий, огромное значение приобретает способность хорошо ориентироваться во всех видах обширной информации, способность решать многочисленные задачи производственного и гражданского характера.

Обучающийся, ежедневно посещающий учебное заведение и выполняющий все задания учителя в классе и дома, оказываясь в реальной ситуации, не может справиться с новыми требованиями, выдвигаемыми жизнью, потому что он является исполнителем, снабженным суммой знаний. Развитие умений самосовершенствоваться, ответственно принимать решения, заниматься творческой деятельностью — должно стать основной задачей современной школы. Эта задача вполне может быть решена в рамках школы. Обеспечение условий для развития ребенка как субъекта собственной деятельности, субъекта развития (а не только объекта педагогических воздействий учителя) — цель развивающего обучения по Д.Б. Эльконину, В.В. Давыдову, В.В. Репкину [2], [3].

Так как и теория развивающего обучения, и технология его реализации далеки от завершения, особенно для основной и старшей школы, проблема разработки системы заданий, нацеленных на развитие различных функций мышления и соответствующих системе развивающего обучения, актуальна в наше время для всех предметов, но особенно остро она стоит в области информатики.

Развивающее обучение понимается как учебный процесс, в котором, наряду с передачей конкретных знаний, уделяется должное внимание процессу интеллектуального развития человека, формированию его знаний в виде хорошо организованной системы, отработке когнитивных структур и операций в рамках этой системы [4].

Своеобразие цели развивающего обучения определяет особенности его содержания, тип учебной активности, на которую он опирается, методы и формы организации учебного процесса, характер взаимоотношений между его участниками, иной тип педагогической деятельности [7].

В технологии развивающего обучения у ребенка формируется опыт быть самостоятельным субъектом, взаимодействующим с современным обществом. Указанное взаимодействие подразумевает организацию всех этапов деятельности: целеполагание, планирование и организацию, реализацию целей, контроль и анализ результатов деятельности. Каждый из этапов вносит свой специфический вклад в развитие личности.

Выполнение предлагаемых нами развивающих заданий в рамках модуля “Искусственный интеллект. Система Пролог” дает богатый материал учителю в реализации задачи курса “Информатика и информационные технологии”, направленной на развитие у учащихся информационной культуры: привитие элементов логического мышления, выражающегося в умении рассуждать, доказывать, обосновывать предлагаемые решения, дает учащимся опыт в технике и технологии конструирования логического мышления.

Задания на опережение изучения материала. Эвристические беседы

В системе развивающего обучения основным методом работы на уроке является беседа учителя с обучаемыми, направляющая их на наблюдения явлений, на обсуждение предложений, вопросов, ответов товарищей.

Слово “беседа” означает “обмен мнениями”. Разумеется, много сообщает учитель, но дети не только отвечают на его вопросы, но и сами ставят вопросы, высказывают предположения, обосновывают свои суждения, отстаивают их, спорят. Поэтому беседа должна служить методом, вызывающим творческую активность ученика, предоставлять ему простор для высказывания, выражения своей индивидуальности, своего опыта. В этих условиях беседа как метод работы становится средством воздействия на все стороны психической деятельности школьника.

Именно беседа позволяет нам сформулировать цели изучения того или иного материала. Ученики принимают эти цели и хотят их реализовать. Включая в урок беседу, можно предположить, что она станет побуждающим мотивом для учащихся к изучению данной темы. Кроме того, фронтальная беседа учащихся является важным инструментом измерения учениками своих собственных возможностей, своих познаний. При подготовке ученики изучают дополнительную литературу, узнают интересные факты, с удовольствием рассказывают о них и слушают друг друга. Здесь ученику открываются результаты труда товарищей.

Именно с беседы по заранее заданному, примерному плану мы предлагаем начать изучение темы “Искусственный интеллект. Система Пролог”.

Примерный план для эвристических бесед:

1. Искусственный интеллект.
 - 1.1. Понятие искусственного интеллекта.
 - 1.2. История развития искусственного интеллекта.
 - 1.3. История развития искусственного интеллекта в России.
 - 1.4. Направления развития искусственного интеллекта:
 - 1.4.1. Восприятие и распознавание образа;
 - 1.4.2. Математика и автоматическое доказательство теорем;
 - 1.4.3. Игры;
 - 1.4.4. Решение задач;
 - 1.4.5. Понимание естественного языка;
 - 1.4.6. Выявление и представление знаний экспертов в ЭС.
2. Экспертные системы — наиболее распространенные интеллектуальные системы.
 - 2.1. Понятие экспертной системы.
 - 2.2. Характеристики экспертных систем.
 - 2.3. Структура экспертной системы.

Задания на включение исходного понятия в систему связей с другими понятиями

Такого рода задания способствуют развитию понятийного мышления учащихся. Кроме связей между понятиями внутри информатики, учащиеся приобретают опыт установления связей между различными областями знаний, их совместного применения.

Примером такого задания при изучении содержательной линии “Искусственный интеллект. Система Пролог” может служить следующее: в процессе изучения учебного материала данной содержательной линии составить терминологический словарь по базовым понятиям этой линии. Построить структурно-логическую схему учебного материала.

Задания на формирование способности к словесно-образному переводу

В ходе изучения темы “Искусственный интеллект. Система Пролог” учащиеся должны научиться создавать базы знаний на языке Пролог.

Декларативный язык программирования Пролог не относится к *процедурным* языкам. Сила его в принципиально отличном от традиционных языков программирования описании способа решения задач. Пролог-система моделирует человеческую логику, опираясь на математический аппарат формальной логики (через алгоритмы, которые называются механизмом вывода Пролога). Логическое программирование базируется на убеждении, что не человека следует обучать мышлению в терминах операций компьютеров, а компьютер должен выполнять инструкции, свойственные человеку.

Программа на Прологе представляет собой не *алгоритм решения задачи*, а *модель предметной области на языке логики* — это *факты*, описывающие объекты предметной области и задающие модель отношений между этими объектами, а также *правила*, дающие возможность генерирования новых свойств и отношений из уже определенных. Таким образом, Пролог имеет декларативный характер и является описательным языком.

Программирование на Прологе включает в себя следующие этапы:

- 1) объявление фактов об объектах и отношений между ними;
- 2) определение правил взаимосвязи объектов и отношений между ними;
- 3) формулировка вопроса об объектах и отношениях между ними.

Факты — это *предикаты с аргументами-константами*, обозначающие отношения между объектами или свойства объектов, именованные этими константами. Факты в программе считаются всегда и безусловно истинными, и таким образом, служат основой доказательства, происходящего при выполнении программы.

Правила — это хорновские фразы с заголовком и одной или несколькими подцелями-предикатами. Правила позволяют определить новые отношения между объектами на основе уже объявленных с помощью фактов [1], [5].

Вопрос — отправная точка логического вывода, происходящего при выполнении программы. На любой вопрос компьютер пытается дать ответ “ДА” или “НЕТ” в зависимости от того, согласуется или нет утверждение, стоящее в вопросе, с фактами и правилами базы знаний [1], [6].

Для овладения основными понятиями языка Пролог — фактами, правилами и вопросами — целесообразно использовать задания на формирование способности к словесно-образному переводу. Сюда входят задания, позволяющие осуществить перевод с одного языка кодирования и переработки информации на другой. Мы предлагаем ряд заданий на перевод тех или иных фактов, правил и вопросов с быденного языка на язык Пролог и наоборот.

Задание 1. “Переведите” факты с естественного языка на язык Пролог.

- 1) Макс — отец Дмитрия;
- 2) Макс — отец Ираклия;
- 3) Дмитрий — отец Ильи;
- 4) Павел — отец Максима;
- 5) Павел — отец Григория.

Задание 2. Запишите правило “А является сыном для В, если В является отцом для А” на языке Пролог.

Образец выполнения задания: Son (A,B):-Ot(B,A).

Задание 3. Запишите на языке Пролог правило: “X является дедушкой для Y, если X является отцом для Z и Z является отцом для Y”.

Образец выполнения задания: Ded(X,Y):-Ot(X,Z), Ot(Z,Y).

Задание 4. “Переведите” вопросы с естественного языка на язык Пролог.

Является ли Лев отцом Андрею?

Является ли Дмитрий сыном Андрея?

Кто является детьми Петра?

Кто является отцом Петра?

Образец выполнения задания. Является ли Лев отцом Андрею? От (Лев, Андрей).

Задание 5. Записать с использованием естественного языка следующие предикаты, записанные на Прологе: `tel(Иванов, 317713)`, `like(Сергей, джаз)`, `krut(x):-like(x, рэп)`, `wear(x,блейзер)`, `eat(X,Y):-eda(Y)`, `like(X,Y)`, `tel(Иванов, X)`.

Задание 6. Запишите на языке Пролог правила, являющиеся решением следующих заданий:

- 1) найти сумму, разность и произведение двух чисел;
- 2) выразите объем куба, а также площадь его боковой поверхности через длину ребра куба;
- 3) выразите объем и площадь боковой поверхности цилиндра через его радиус основания и высоту;
- 4) Известны стороны параллелограмма и угол между ними, найдите диагонали параллелограмма и его площадь.

Задания на ручную имитацию вывода Пролог-системой

Пролог-система моделирует человеческую логику через алгоритмы, которые получили название *механизма вывода* Пролога.

Имеющиеся в базе знаний факты и правила используются для поиска ответа на вопрос (доказательство цели). При доказательстве цели Пролог ищет факты и *головы правил*, сопоставимые с целью.

Основная операция, выполняемая в языке Пролог — это унификация, сопоставление. *Операция сопоставления* с константами в фактах и правилах служит для присваивания значений переменным, так как Пролог не предусматривает использования оператора присваивания; у него в распоряжении имеется более общий мощный механизм задания значений переменных.

Предикаты сопоставимы, если выполняются 3 условия:

- 1) имена предикатов совпадают посимвольно;
- 2) предикаты имеют равное количество аргументов;
- 3) аргументы, находящиеся в одинаковых позициях сопоставимы.

Аргументы сопоставимы, если:

- 1) имена конкретных объектов совпадают посимвольно;
- 2) переменная сопоставима с именем конкретного объекта;
- 3) переменная сопоставима с другой переменной.

При доказательстве цели Пролог просматривает предложения в том порядке, в котором они вводились в базу знаний (“сверху вниз”).

В начале исполнения программы переменные являются “свободными”, до тех пор, пока им не присвоены какие-либо значения, тогда они становятся “связанными”, конкретизированными. После получения ответа на искомый вопрос, переменная снова становится “свободной”, управление передается строке, содержащей точку возврата (точка отката) и система ищет альтернативное решение. Переменные служат частью процесса сопоставления.

При этом:

1. Цель считается доказанной, если предикат цели сопоставим с фактом.
2. Если цель сопоставима с головой правила, то цель считается доказанной, если все цели тела данного правила доказаны.

При поиске решения Пролог-система использует так называемую стратегию “сверху вниз”. Это означает, что поиск сопоставимых фактов и правил в базе знаний осуществляется последовательно, сверху вниз до тех пор, пока целевое утверждение не будет достигнуто или не будет доказано, что оно противоречит имеющейся базе данных.

Опишем процедуру *смещения влево* для повторного согласования целевого утверждения и *возвращения вправо*, которая носит название *механизма возврата*.

При согласовании цели с головой правила доказательство конъюнкции целевых утверждений происходит слева направо. В случае, если найдено целевое утверждение, согласовать которое невозможно, то осуществляется возврат влево до тех пор, пока не будет обнаружено новое целевое утверждение, которое механизм вывода Пролога может вновь согласовать или не будут апробированы все возможные предыдущие целевые утверждения.

Если слева цели отсутствуют, то согласовать конъюнкцию целевых утверждений невозможно, однако, если предыдущее целевое утверждение возможно согласовать вновь, то система снова начинает искать доказательства целей в том же направлении, слева направо, начиная, со следующего справа целевого утверждения.

Задания на ручную имитацию вывода Пролог-системой способствуют развитию логического мышления, в частности, развитию навыков обоснования логического вывода в практических задачах, а также способствуют формированию у учащихся умений и навыков применения аналитико-синтетического метода для решения поставленной задачи, заставляет учащихся задуматься о рациональности полученного решения и о возможном поиске другого, более рационального решения.

Примерами таких заданий могут служить задания следующего вида:

Задание: Написать и выполнить программу на Прологе, вычисляющую x^n с помощью одного только умножения. Здесь n — натуральное число.

Способ решения очевиден: необходимо умножить x само на себя $n - 1$ раз.

Примеры заданий для ручного исполнения Пролог-программ.

Задача 1. Составить программу вычисления наибольшего общего делителя двух чисел.

Задача 2. Составить базу знаний для вычисления факториала числа.

Задача 3. Составить программу, выводящую n -е число Фибоначчи.

Задача 4. Проверить, принадлежит ли элемент X списку.

Задача 5. Определить номер элемента в списке.

Задача 6. Объединить два списка в один.

Задача 7. Определить количество элементов или длину списка.

Задача 8. Найти максимальный элемент в списке.

Задача 9. Добавить элемент в список и удалить некоторый элемент из списка.

Задача 10. Обратить список.

Задача 11. Определить элемент по его номеру.

Задания на составление проектов

Выдвинутые американским философом и педагогом Джоном Дьюи идеи гуманистического направления в философии и образовании привели к созданию метода проектов, одного из активных методов развивающего обучения. Обучение базируется на учете личных интересов обучающихся, через их целесообразную деятельность в процессе овладения знаниями. Первостепенная задача школы — заинтересовать учащихся в приобретаемых знаниях, которые могут и должны пригодиться им в жизни. Для максимально глубокого усвоения знаний учащимися необходимо вести обучение с привлечением проблемных ситуаций, заимствованных из реальной жизни, являющихся знакомыми и значимыми для ребенка. Решение этих проблем требует применения имеющихся знаний, а также новых знаний, которые ещё предстоит приобрести.

Роль учителя состоит в консультационной помощи по источникам информации и указании нужного направления для самостоятельного поиска. В итоге учащиеся должны самостоятельно и в совместных усилиях решить проблему, применив необходимые знания подчас из разных областей, получить реальный и ощутимый результат.

Основные требования к использованию метода проектов:

1. Наличие значимой в исследовательском, творческом плане проблемы.
2. Практическая, теоретическая, познавательная значимость предполагаемых результатов.

3. Самостоятельная (индивидуальная, парная, групповая) деятельность учащихся.
4. Структурирование содержательной части проекта (с указанием поэтапных результатов).

Метод проектов как один из видов развивающих заданий на уроках информатики:

1. Обеспечивает активизацию познавательного процесса благодаря мотивации деятельности, поэтапной организации выполнения заданий, анализа хода практических работ, их диагностики и метода исправления недостатков, а также экспертной оценки проделанной работы.

2. Способствует установлению интегрирующих связей информатики с другими образовательными областями, что обеспечивает формирование целостной картины знаний.

3. Позволяет осуществить возможность multifunctional подготовки обучающихся к жизни и труду в новых социально-экономических условиях.

4. Обеспечивает формирование ключевых социально значимых компетенций личности.

Метод проектов как один из видов развивающих заданий очень широко используется в изучении темы “Искусственный интеллект. Система Пролог” при составлении учащимися баз знаний.

При составлении баз знаний учащиеся устанавливают логические взаимосвязи в предметных областях: физике, гуманитарных науках, лингвистике и других. Работа с базами знаний позволяет учащимся учиться сопоставлять структуру цели и структуру деятельности по достижению этой цели.

Учащимся, например, могут быть предложены следующие темы для составления баз знаний:

1. “Треугольник”.
2. “Железная дорога”.
3. “Моя родословная”.
4. “Достопримечательности Владимирской области”.
5. “Переводчик”.
6. “Моя телефонная книга”.
7. “Даты и события русской истории”.

Примеры реализации проектов на языке Пролог

База знаний “Треугольник”

База знаний “Треугольник” дает ответ на вопрос: является ли фигура с заданными тремя сторонами треугольником?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проверить выполнение неравенства треугольника для всех сторон. Заменяем три условия проверкой одного неравенства: длина максимальной стороны меньше суммы двух других сторон.

Вопросы, формулируемые к базе знаний:

- * нахождение максимальной стороны;
- * нахождение суммы сторон треугольника;
- * можно построить треугольник или нет;
- * определение вида треугольника (прямоугольный, тупоугольный, остроугольный).

База знаний “Железная дорога”

База знаний содержит следующие факты:

train (<номер поезда>, <тип>) — поезд;

comp (<номер поезда>, <наличие>) — купе;

departure (<номер поезда>, <со станции>, <время>) — отправление;

stop (<номер поезда>, <список остановок>) — остановки;

arrive(<номер поезда>, <список часов и минут, соответствующий остановкам>) — прибытие;

stand (<номер поезда>, <список минут стоянки>) — стоянка.

Пример: База знаний о поезде 52:

train (52, “скорый”);

comp (52, “есть”);
departure (52, “Москва”, 9,45);
stop (52, [“Тула”, “Орел”, “Курск”, “Симферополь”]);
arrive(52,[11,30,15,20,17,50,5,40]);
stand (52, [10,15,15,10]).

Вопросы, формулируемые к базе знаний:

- * Какие поезда останавливаются в городе X?
- * Во сколько прибывает поезд с заданным номером в данный город?
- * Сколько минут стоит данный поезд в данном городе?
- * Какие поезда останавливаются в данном городе ночью?
- * Во сколько отправляется данный поезд из данного города?
- * Каким поездом можно доехать из одного города в другой?
- * Каков пункт назначения поезда с данным номером?

База знаний “Достопримечательности Владимирской области”

Примеры фактов:

raion_goroda ([“Фрунзенский”, “Ленинский”, “Октябрьский”]);
raion_oblasti ([“Александровский”, “Вязниковский”, “Гусь-Хрустальный”, “Киржачский”, “Селивановский”, “Юрьев-Польский”, “Гороховецкий”, “Ковровский”, “Кольчугинский”, “Меленковский”, “Суздогодский”, “Камешковский”, “Муромский”, “Собинский”, “Петушинский”]);
people([67600, 56000, 73400, 47300, 23000, 40100, 27800, 159900, 46200, 43600, 45600, 39100, 142400, 25100, 73900]);
pl_of_int (“Владимир”, [“Золотые Ворота”, “Успенский собор”, “Никитская церковь”, “Княгинин монастырь”]);
pl_of_int (“Суздаль”, [“Покровский монастырь”, “Архиерейские палаты”, “Антипьевская церковь”, “Собор Рождества Богородицы”, “Преображенский собор”]);

Примеры вопросов к базе знаний:

- * В каком городе есть данная достопримечательность?
- * Какие достопримечательности находятся в данном городе?
- * Какова численность населения в данном районе Владимирской области?
- * В каком районе области численность населения равна заданному числу?
- * Сколько районов в городе Владимир?
- * Есть ли данный район в городе Владимир?
- * Есть ли данный район во Владимирской области?
- * Есть ли в данном городе данная достопримечательность?

Литература

1. Братко И. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. – М.: Мир, 1990. – 560 с.
2. Выготский Л.С. Педагогическая психология. – М.: Педагогика, 1992. – 480 с.
3. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
4. Краевский В.В. Общие основы педагогики. – М.: Академия, 2006. – 256 с.
5. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Информатика: учебное пособие для студентов высших педагогических учебных заведений. – М.: Издательский центр “Академия”, 2008. – 336 с.
6. Могилев А.В., Пак Н.И., Хеннер Е.К. Практикум по информатике. – М.: Издательский центр “Академия”, 2005. – 608 с.
7. Селиверстова Е.Н. От школы знания к школе созидания: монография. – Владимир: ВГПУ, 2008. – 208 с.

Гордеева Ирина Александровна,
доцент кафедры Математического образования
и информационных технологий ВлГУ (ПИ),
кандидат физико-математических наук.

E-mail: igordeeva@list.ru

Наумова Светлана Борисовна,
доцент кафедры Математического образования
и информационных технологий ВлГУ (ПИ),
кандидат физико-математических наук, доцент.

E-mail: svetl.naumova2012@yandex.ru

Интересное свойство треугольника

В. Б. Дроздов

Автор случайно увидел особенность геометрического чертежа и стал выяснять, случайна ли она... О связи двух свойств треугольника: “инцентр равноудален от ортоцентра и центра описанной окружности” и “углы треугольника образуют арифметическую прогрессию”.

1. Реальность или мираж?

Рассмотрим треугольник ABC с углами 30° , 60° , 90° , составляющими арифметическую прогрессию, см. рис. 1.

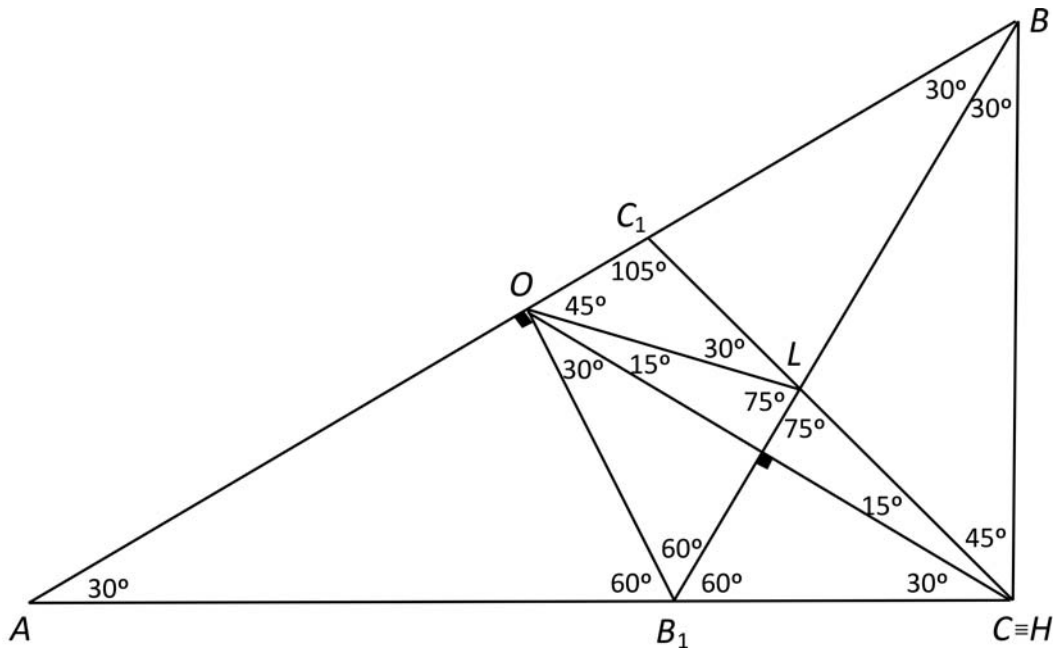


Рис. 1.

Создается визуальное впечатление, что инцентр этого треугольника L равноудален от его ортоцентра $C \equiv H$ и центра описанной окружности O . Реальность это или мираж? Реальность, ибо как легко видно $\angle LOH = \angle LHO = 15^\circ$, то есть $OL = HL$.

В связи с этим возникают два вопроса:

Первый. Верно ли, что если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то инцентр треугольника равноудален от его ортоцентра и центра описанной окружности?

Второй. Верно ли, что если инцентр треугольника равноудален от его ортоцентра и центра описанной окружности, то углы треугольника образуют арифметическую прогрессию?

2. Условие равенства отрезков OL и HL

По известной из углубленного школьного курса математики формуле Эйлера

$$OL^2 = R^2 - 2Rr, \quad (1)$$

где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника. По несколько менее известной формуле

$$HL^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2, \quad (2)$$

где p — полупериметр треугольника. Из формул (1) и (2) сразу получаем:

$$p = (R + r)\sqrt{3}. \quad (3)$$

3. Прямая теорема

Рассмотрим треугольник ABC , в котором углы образуют арифметическую прогрессию с разностью φ : $0 < \varphi < 60^\circ$, см. рис. 2.

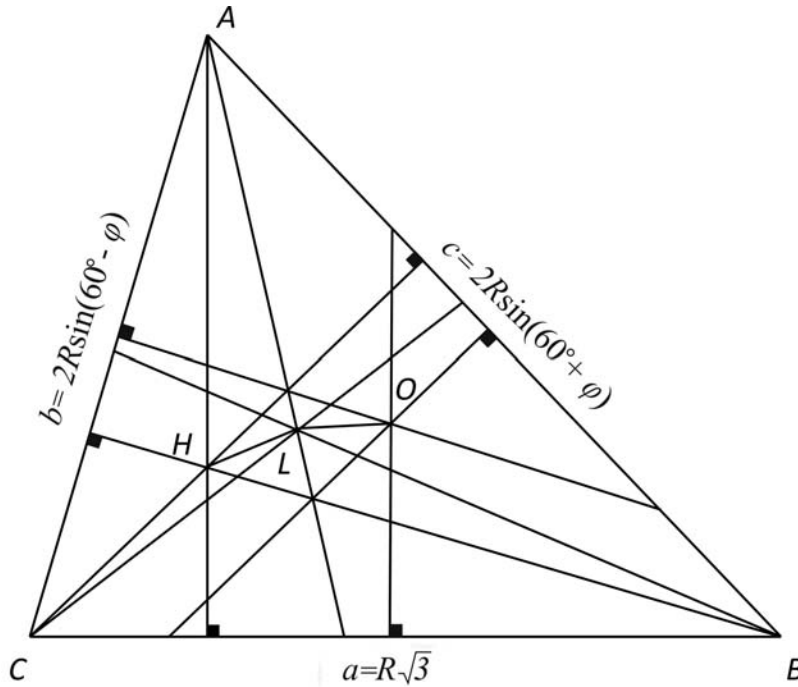


Рис. 2.

Очевидно, что средний по величине угол $A = 60^\circ$, меньший угол $B = 60^\circ - \varphi$, больший угол $C = 60^\circ + \varphi$.

Совершенно ясно, что справедливо и обратное: если средний угол треугольника равен 60° , то его углы составляют арифметическую прогрессию.

Треугольник может быть и остроугольным, и прямоугольным, и тупоугольным, однако величина тупого угла должна быть меньше 120° (в противном случае треугольник не существует).

По теореме синусов имеем:

$$\begin{cases} a = R\sqrt{3}, \\ b = 2r \sin(60^\circ - \varphi), \\ c = 2r \sin(60^\circ + \varphi). \end{cases} \quad (4)$$

Из формул (4) легко находим, что

$$p = R\sqrt{3} \left(\cos \varphi = \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

Из формулы $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ получим, что

$$r = R \left(\cos \varphi = \frac{1}{2} \right). \quad (6)$$

Исключая из формул (5) и (6) $\cos \varphi$, приходим к формуле (3).

Итак, доказана **прямая теорема**: Если углы треугольника образуют арифметическую прогрессию, то его инцентр равноудален от ортоцентра и центра описанной окружности.

Значит, ответ на первый вопрос положительный.

4. Обратная теорема

Пусть в треугольнике ABC выполнено равенство $OL = HL$, что равносильно формуле (3). Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} p = (R + r)\sqrt{3}, \\ a = 2r \sin A, \\ \sin A \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}. \end{cases} \quad (7)$$

Исключая из системы (7) $R, r, \sin A$, приходим к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$:

$$(4p - 3a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} - \frac{4}{\sqrt{3}} p \operatorname{tg} \frac{A}{2} + a = 0 \quad (8)$$

Дискриминант уравнения (8)

$$D = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} p - 2\sqrt{3}a \right)^2,$$

а корни таковы: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $A = 60^\circ$; $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4p - 3a}$.

Рассмотрим второй корень. Удобнее перейти к котангенсам:

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{4p}{a\sqrt{3}} - \sqrt{3} \quad (9)$$

Пусть $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = x$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = y$, $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = z$. Известно, и быстро выводится, что $xyz = x + y + z$, откуда

$$x = \frac{y + z}{yz - 1}. \quad (10)$$

Далее неизбежны достаточно громоздкие, но лишённые сложности и искусственности алгебраические преобразования. Имеем из формулы (9):

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2p}{a} - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{b + c}{a} \sqrt{3} \right). \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\frac{b + c}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{\frac{2y}{1 + y^2} + \frac{2z}{1 + z^2}}{\frac{2x}{1 + x^2}}. \quad (12)$$

Из формул (11) и (12) следует:

$$\frac{\sqrt{3}x^2 + x}{x^2 + 1} = 2 \left(\frac{y}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2} \right). \quad (13)$$

Исключаем из формул (10) и (13):

$$\frac{\sqrt{3}(y+z)^2 + (y+z)(yz-1)}{(1+y^2)(1+z^2)} = 2\left(\frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}\right). \quad (14)$$

Уравнение (14) быстро упрощается:

$$\begin{aligned} (y+z)(\sqrt{3}(y+z) - yz - 3) &= 0, \\ (y - \sqrt{3})(z - \sqrt{3}) &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, или $y = \sqrt{3}$, тогда $\angle B = 60^\circ$, или $z = \sqrt{3}$, тогда $\angle C = 60^\circ$.

Итак, доказана **обратная теорема**: *Если инцентр треугольника равноудален от его ортоцентра и центра описанной окружности, то углы треугольника образуют арифметическую прогрессию.*

Значит, ответ на второй вопрос также положительный.

Итог

Таким образом, выше установлено, что если в треугольнике выполняется одно из четырех условий:

1. $OL = HL$,
2. $p = \sqrt{3}(R + z)$,
3. Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию,
4. Средний по величине угол треугольника равен 60° ,

то выполняются и три остальные.

*Дроздов Виктор Борисович
г. Рязань.*

Поворот и параллельный перенос

К. В. Козеренко

В статье нестандартным образом введены понятия поворота и параллельного переноса плоскости. Подход оказывается методически оправданным, поскольку понятие становится не формализацией наглядного представления, а ядром когнитивного блока, в котором вырабатываются как наглядное представление, так и способы деятельности “вокруг” данного понятия.

Давайте начнём с определения.

Определение: *Поворотом плоскости вокруг точки O* называется композиция осевых симметрий, оси которых пересекаются в этой точке, т.е.

$$R_O = S_{(l_2)} \circ S_{(l_1)},$$

где $\{O\} = l_1 \cap l_2$.

С этим определением у меня связана одна очень примечательная и курьёзная история. В 2009 году я выступал на школе-семинаре учителей математики и там очень пропагандировал это определение. Дело в том, что обычно вместо определения говорят что-то вроде того, что при повороте каждая точка плоскости поворачивается (?) на один и тот же угол в одном и том же направлении. Сильно отличается от того, с чего я начал. И вроде бы понятно, поскольку очень наглядно. Только это не определение, хотя бы потому, что фраза “в одном и том же направлении” сама нуждается в определении.

Реакция коллег меня обескуражила. Они начали смеяться. Потом я понял в чём дело: моё определение им показалось излишне формализованным, абсурдом, так сказать, логики. Как сказал мне один из участников семинара: “ваш поворот не поворачивает”. В этом замечании отразился, на мой взгляд, один очень опасный методический принцип, который неявно (!) формирует средняя школа: определения зачастую заменяются объяснениями “на пальцах”. Да, пусть нестрого, зато “понятно”, зато наглядно. Что же получается? Одни понятия входят в здание математики через “главный вход”, предъявляя “билет-определение”, другие через “заднее крыльцо” нелегально. Более того, не только даже чёткого разделения на строго-нестрого не существует, но и о его необходимости нет речи. Когда школьники становятся студентами и их заваливают формальными определениями, они по привычке требуют объяснений “на пальцах”, но привычный когнитивный навык не срабатывает, масса “нелегальных понятий” превышает критическую и наступает катастрофа. Я даже могу сказать, когда это происходит. Например, из определения кольца нельзя понять, что такое кольцо. Кроме определения нужны ещё теоремы, нужны примеры и самое главное — мотивировки. Если бы студент был к этому готов, то проблем бы не было.

В нашем случае поворот действительно не “поворачивает”. Да от определения это и не требуется. Не “царское” это дело, для этого есть солдаты-теоремы.

Теорема 1. Пусть $X \neq O$, $X'' = R_O(X)$. Тогда $\angle X''OX = 2\alpha$, где α — угол между прямыми l_1 и l_2 (т.е. все точки плоскости “поворачиваются” на один и тот же угол 2α).

Доказательство. Если $\alpha = 90^\circ$, то, очевидно, что $R_O = Z_O$. Поэтому будем считать, что $\alpha < 90^\circ$. Положим $l'_2 = S_{l_1}(l_2)$. На каждой прямой l_1 и l'_2 выберем луч с начальной точкой O . Существует четыре способа выбора, однако мы не будем различать выборы, если оба луча одного являются дополнительными лучами другого (т.е. образуют вертикальные углы). Таким образом, остаётся рассмотреть два случая: случай острого угла и случай тупого угла.

1. Случай острого угла.

Пусть X принадлежит одному из острых вертикальных углов, образованных выбранными лучами l_1 и l'_2 . Положим $X' = S_{l_1}(X)$. Тогда

$$\angle XOX'' = 2\angle 1 + 2\angle 2 = 2(\angle 1 + \angle 2) = 2(\angle(l_1, OX') + \angle(OX', l_2)) = 2\alpha,$$

где $\angle 1$ — угол между лучами OX и l_1 , а $\angle 2$ — угол между лучами OX' и l_2 (на прямой l_2 выбор луча очевидным образом согласован с выбором луча на l'_2).

2. Случай тупого угла разбирается аналогично.

Ч.т.д.

Вот поворот и повернул. Теперь убедимся, что все точки “поворачиваются в одном и том же направлении”.

Теорема 2. Пусть R_1 и R_2 — два поворота плоскости вокруг одной и той же точки O . Если $R_1(A) = R_2(A)$ для некоторой точки A , то $R_1 = R_2$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. пусть существует такая точка X (будем считать, что $OX = OA$), что $X_1 = R_1(X) \neq R_2(X) = X_2$.

1. Имеем $X_1A' = X_2A' (= XA)$. Следовательно, точка X диаметрально противоположна точке A' .

2. Пусть $Y \neq X$. Тогда $R_1(Y) \neq R_2(Y)$ (иначе Y диаметрально противоположна точке A'). Следовательно, $R_1 = R_2$ по теореме о трёх точках.

Ч.т.д.

Обратите внимание на то, что в теореме 2 отсутствует слово “направление”, хотя по существу эта теорема о том, что любая точка “повернётся в том же направлении”, что и точка A .

Таким образом, определение играет роль *логического ядра*, а теоремы 1 и 2 — роль *расширения* этого ядра, при помощи которого и формируется в частности наглядный образ поворота. Итак, определение-ядро и его расширения, которые вместе образуют *когнитивный блок* — первичны, наглядный образ — вторичен. Именно так, а не наоборот! Очень важно это понять и к этому привыкнуть, поскольку по этому принципу вводятся все математические понятия.

В заключение разговора о повороте “фирменное блюдо” этого пункта. Но сначала

Следствие. Пусть m_1 — произвольная прямая, проходящая через точку O . Пусть A — произвольная точка прямой m_1 . Положим $A' = R_O(A)$. Пусть M — середина отрезка AA' . Прямую OM обозначим через m_2 . Тогда $R_O = S_{m_2} \circ S_{m_1}$.

Иными словами, первую ось композиции можно выбрать произвольно.

Доказательство. Имеем $(S_{m_2} \circ S_{m_1})(A) = S_{m_2}(A) = A'$. В силу теоремы 2 повороты R_O и $S_{m_2} \circ S_{m_1}$ совпадают. Ч.т.д.

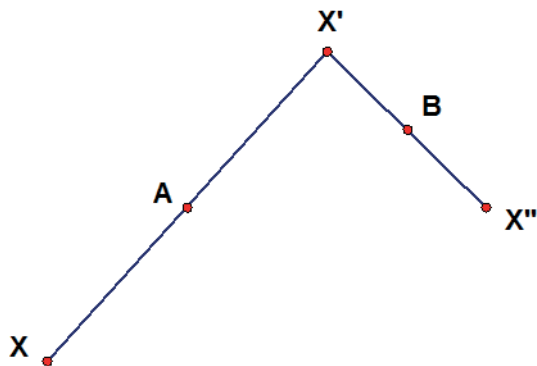
Легко понять, что произвольно можно выбрать и вторую ось композиции.

Наконец, как следствие из следствия:

Задача. Найдите композицию одного поворота плоскости вокруг точки O_1 на угол α_1 и другого поворота вокруг точки O_2 на угол α_2 .

Наглядно параллельный перенос, подобно повороту, представляют как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Теперь мы понимаем, что наглядный образ не является определением. Поэтому мы дадим строгое определение параллельного переноса, отвечающее тому же наглядному представлению.

Определение. Параллельным переносом на евклидовой плоскости называется композиция двух центральных симметрий (см. рис. 1).

Рис. 1. $T = Z_B \circ Z_A$.

Замечание. И в этом определении мы использовали композицию движений. Непосредственно из определения вытекают очевидные свойства параллельного переноса, которые фактически являются расширением этого определения:

1. *Параллельный перенос есть движение.*
2. *При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую или в себя, рис. 2 (это следует из того, что этим свойством обладает центральная симметрия).*

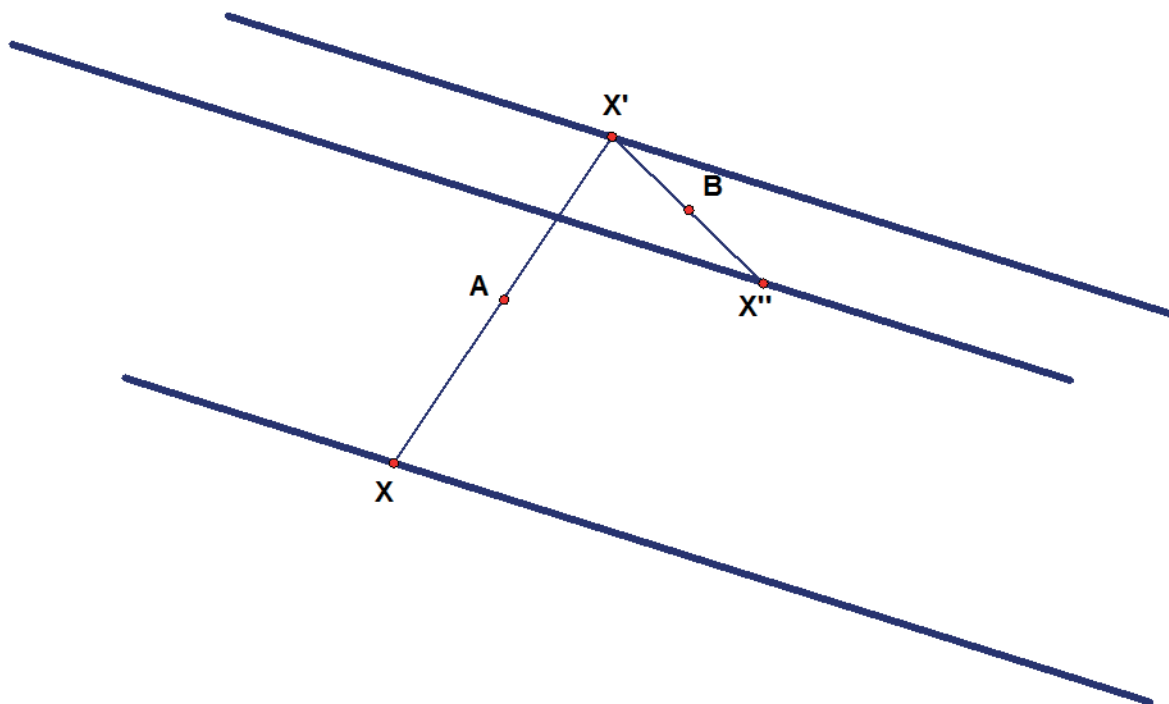


Рис. 2.

3. *При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние (рис. 3).*

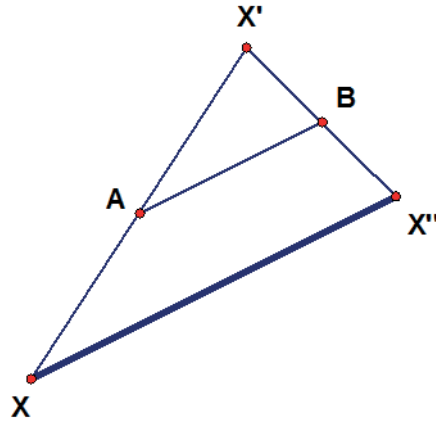


Рис. 3.

В самом деле, произвольная точка плоскости смещается на расстояние $2AB$ по прямой параллельной AB .

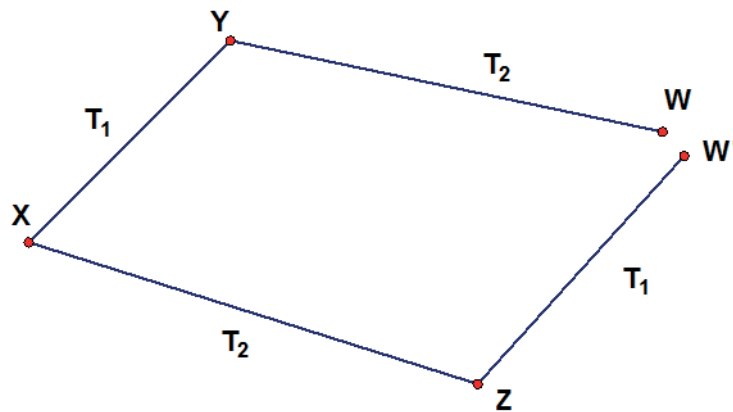
Наконец параллельный перенос стал “параллельно переносить”. Заметим ещё раз, что это типичный для математики подход: сначала дается формальное определение, в котором отражена суть нового понятия, а затем с помощью теорем формируется наглядный образ.

4. Каковы бы ни были две точки P и Q , существует один и только один параллельный перенос, при котором точка P переходит в точку Q .

Существование такого параллельного переноса почти очевидно. Обозначим через M середину отрезка PQ . Положим $T = Z_P \circ Z_M$. Тогда имеем $T(P) = Q$.

То, что такой параллельный перенос только один непосредственно вытекает из свойств 2) и 3). Действительно, произвольная точка X переходит в такую точку Y , что четырехугольник $XPQY$ является параллелограммом, т.е. точка Y получается в результате продолжения медианы треугольника XPQ , проведенной из вершины P , на ее длину. Таким образом, точка Y является четвертой вершиной параллелограмма. Заметим, что такое построение точки Y проходит и в том случае, когда точка X лежит на прямой PQ .

5. Композиция двух параллельных переносов коммутативна (рис. 4):

Рис. 4. $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$.

Утверждение следует из того, что для произвольной точки X у параллелограммов $YXZW$ и $ZXYW'$, где $Y = T_1(X)$, $Z = T_2(X)$, $W' = T_1(Z)$, $W = T_2(Y)$ совпадают четвертые вершины W и

W' . После этого свойства естественно выглядит свойство

6. Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос.

Для доказательства этого свойства нам понадобится очевидная

Лемма. Для произвольной точки A' существует одна и только одна точка B' , такая, что $Z'_B \circ Z'_A = Z_B \circ Z_A$. Иными словами, первую точку в композиции центральных симметрий можно выбрать произвольно (рис. 5).

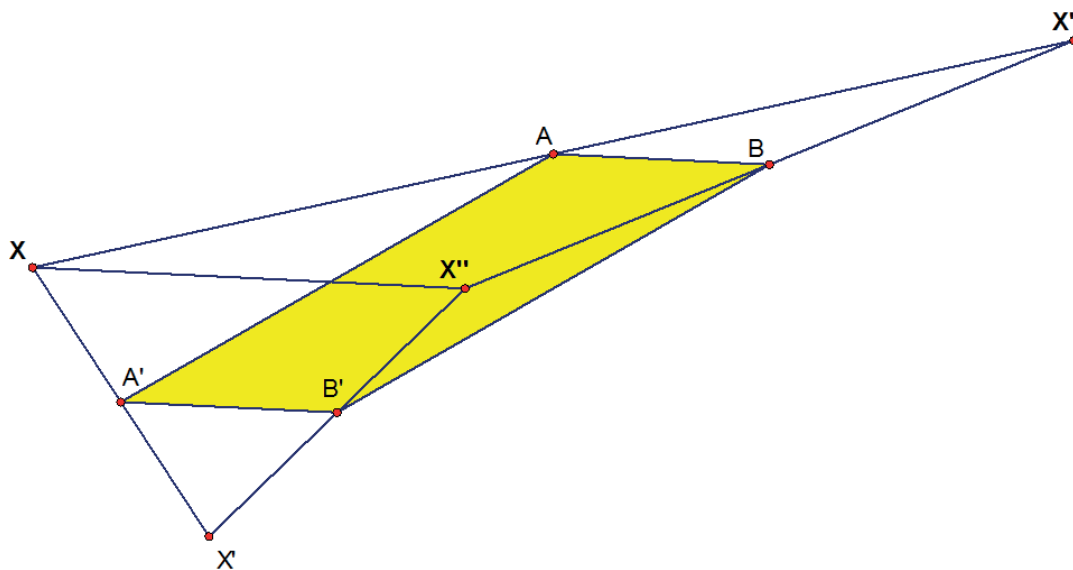


Рис. 5.

Естественно, произвольно можно выбрать и вторую точку B' .

Доказательство нашего утверждения теперь очевидно. Действительно, пусть $T_1 = Z_B \circ Z_A$, а $T_2 = Z_D \circ Z_C$. Поскольку первую точку можно выбрать произвольно, для параллельного переноса T_2 вместо точки C возьмем точку B . Тогда имеем $T_2 \circ T_1 = Z'_D \circ Z_B \circ Z_B \circ Z_A = Z'_D \circ Z_A$. Что и требовалось доказать.

7. Композиция осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос (рис. 6).

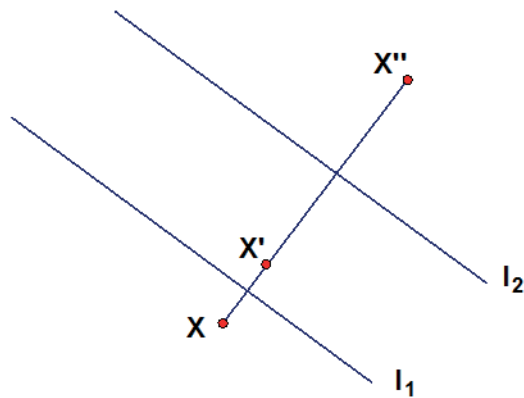


Рис. 6.

Действительно, пусть оси l_1 и l_2 — параллельны, и пусть m — произвольная перпендикулярная им прямая. Тогда $S_{l_2} \circ S_{l_1} = S_{l_2} \circ S_m \circ S_m \circ S_{l_1} = Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$, где $O_1 = l_1 \cap m$, $O_2 = l_2 \cap m$. Утверждение доказано.

Заметим, что утверждение свойства 7 можно было бы считать определением параллельного переноса, что кажется даже более разумным, поскольку “прыгать” через прямые в данном случае более естественно, чем “прыгать” через точки.

8. Множество параллельных переносов изоморфно множеству векторов.

В самом деле, каждому параллельному переносу T можно сопоставить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где A — произвольная точка, а $B = T(A)$. Очевидно, что соответствие $\vec{a} \rightarrow T_{\vec{a}}$ обратимо. Заметим, что $\vec{a} + \vec{b} \rightarrow T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}$, т.е. сумме векторов соответствует композиция параллельных переносов.

Рассмотрим теперь на плоскости декартовы координаты x, y .

9. Параллельный перенос произвольную точку $(x; y)$ переводит в точку $(x + a; y + b)$, где a и b одни и те же для всех точек.

Доказательство. Пусть начало координат O параллельный перенос переведет в точку P с координатами $(a; b)$. Рассмотрим произвольную точку Q с координатами $(x; y)$. Обозначим через M середину отрезка PQ . Координаты точки M равны $\left(\frac{a+x}{2}, \frac{b+y}{2}\right)$. Положим $Q' = T(Q)$. Точка M , очевидно, является серединой и отрезка OQ' , поэтому $\left(\frac{a+x}{2} = \frac{x'}{2}; \frac{b+y}{2} = \frac{y'}{2}\right)$, где x', y' — координаты точки Q' . Окончательно, имеем $x' = x + a; y' = y + b$.

В заключение отметим, что параллельный перенос является очень важным геометрическим понятием. С его помощью мы можем, например, сказать, что такое направление (как научный термин, а не как наглядный образ), а свойства 5, 6 параллельного переноса и изоморфизм 8 означают, что евклидова плоскость с отмеченной точкой является *векторным пространством*.

Козеренко Константин Владимирович,
лицей “Вторая школа”, г. Москва,
методист, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: ckozerenko@mail.ru

Оператор $Af = f \circ \varphi - f$ в заданиях математических конкурсов

Е. К. Знак

В статье предложена определённая операторная точка зрения на некоторые типичные для олимпиадных задач сюжеты и конструкции. Показывается, что привычные классические олимпиадные задачи (например, такие, как вычисление бесконечных произведений

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + (3/7)^{2^k}\right) \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}},$$

нахождение суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1},$$

или решение функционального уравнения

$$2f(x/2) = 3f(x) - 10x^2$$

в классе ограниченных в окрестности нуля функций) являются частными проявлениями рассматриваемой общей концепции.

Многие классические олимпиадные сюжеты произрастают из общего корня, описываемого следующей теоремой.

Теорема 1. Если функции $\varphi : D \rightarrow D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$) связаны тождеством $f(\varphi(x)) - f(x) \equiv \lambda + g(x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\varphi_n(x)) - \lambda n) \equiv c(x),$$

где φ_n — итерация функции φ порядка n , то

$$g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g(\varphi_n(x)) \equiv c(x) - f(x).$$

Доказательство сводится к суммированию тождеств $f(\varphi_{(n+1)}(x)) - f(\varphi_n(x)) \equiv \lambda + g(\varphi_n(x))$ и предельному переходу при $n \rightarrow \infty$ с учётом данных условий.

Пример 1. При $\varphi(x) = x + 1$ (и, следовательно, $\varphi_n(x) = x + n$), $\lambda = 0$, $f(x + 1) - f(x) \equiv g(x)$ и $f(x) \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$, получаем тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} g(x + j) \equiv b - f(x).$$

Пример 1.1. В частности, см. Пример 1, при $f(x) = -\frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{(x^2 + x)}$ получаем тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2 + (2x + 1)j + x^2 + x} \equiv \frac{1}{x}$$

и, в частном случае, равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1/4} = 2.$$

Пример 1.2. В частности, см. Пример 1, при $f(x) = -\frac{1}{\Gamma(x)}$ и $g(x) = -\frac{x-1}{\Gamma(x+1)}$ получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x+k-1}{\Gamma(x+k+1)} \equiv \frac{1}{\Gamma(x)}$$

и, в частном случае, равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m+k}{(m+k+1)!} = \frac{1}{m!}.$$

Пример 1.3. В частности, см. Пример 1, при $f(x) = \ln \frac{p(x)}{\prod_{i=0}^l (x-i)}$, где $p(x)$ — многочлен степени $l+1$ и $g(x) = \ln \frac{(x-l)p(x+1)}{(x+1)p(x)}$, получаем тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \ln \frac{(x+j-l)p(x+j+1)}{(x+j+1)p(x+j)} \equiv \ln \frac{\prod_{i=0}^l (x-i)}{p(x)}$$

и, в частных случаях, равенства

$$\prod_{k=l+1}^{\infty} \frac{(k-l)p(k+1)}{(k+1)p(k)} = \frac{(l+1)!}{p(l+1)}$$

и

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}.$$

.

Пример 2. При $\varphi(x) = ax$ (и, следовательно, $\varphi_n(x) = a^n x$), $f(ax) - f(x) \equiv \lambda + g(x)$ и $f(a^n x) - \lambda n \rightarrow c(x)$ при $n \rightarrow \infty$, получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(a^n x) \equiv c(x) - f(x).$$

Пример 2.1. В частности, см. Пример 2, при $f(x) = -\ln(\sin x)$, $a = 1/2$ и $g(x) = \ln(\cos x/2)$, $\lambda = \ln 2$ имеем $(-\ln(\sin x/2^n) - n \ln 2) \rightarrow -\ln x$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\cos x/2^n) = \ln \frac{\sin x}{x}$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x/2^n \equiv \frac{\sin x}{x}.$$

А после дифференцирования предпоследнего тождества получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} \equiv \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

Пример 2.2. В частности, см. Пример 2, при $f(x) = -\ln(\sin x)$, $a = 1/3$ и $g(x) = \ln(1/3 + (2/3)\cos 2x/3)$, $\lambda = \ln 3$ имеем $(-\ln(\sin x/3^n) - n \ln 3) \rightarrow -\ln x$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1/3 + (2/3)\cos 2x/3^n) = \ln \frac{\sin x}{x}$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1/3 + (2/3)\cos 2x/3^n) \equiv \frac{\sin x}{x}.$$

А после дифференцирования предпоследнего тождества получаем

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x/3^n}{3^n(1 + 2\cos 2x/3^n)} \equiv \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x.$$

Пример 2.3. В частности, см. Пример 2, при $f(x) = -[x]$, $a = 1/2$ и $g(x) = [x/2 + 1/2]$, имеем $[x/2^n] \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для неотрицательных значений x . Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} [x/2^n + 1/2] = [x] \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\rho(x/2^n + 1/2) - 1/2) = \rho(x),$$

где $x \geq 0$ и $\rho(t) \equiv t - [t]$ — дробная часть действительного числа t .

Пример 3. При $\varphi(x) = x^s$ (и, следовательно, $\varphi_n(x) = x^{s^n}$), $f(x^s) - f(x) = \lambda + g(x)$ и $f(x^{s^n}) - \lambda n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получаем тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(x^{s^n}) \equiv c(x) - f(x).$$

Пример 3.1. В частности, см. Пример 3, при $s = 2$, $f(x) = \ln(1 - x)$, $g(x) = \ln(1 + x)$ и $\lambda = 0$ имеем $\ln(1 - x^{2^n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (разумеется, при $|x| < 1$). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^{2^n}) = -\ln(1 - x)$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2^n}) \equiv \frac{1}{1 - x}.$$

А после дифференцирования предпоследнего тождества и замены $t = 1/x > 1$, получаем тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1 + t^{2^n}} \equiv \frac{1}{t - 1}.$$

Пример 3.2. В частности, см. Пример 3, при $s = 3$, $f(x) = \ln(1 - x)$, $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$ и $\lambda = 0$ имеем $\ln(1 - x^{3^n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (разумеется, при $|x| < 1$). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + x^{3^n} + x^{2 \cdot 3^n}) = -\ln(1 - x)$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{3^n} + x^{2 \cdot 3^n}) \equiv \frac{1}{1 - x}.$$

А после дифференцирования предпоследнего тождества и замены $t = 1/x > 1$ получаем тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \frac{t^{3^n} + 2}{1 + t^{3^n} + t^{2 \cdot 3^n}} \equiv \frac{1}{t-1}.$$

Пример 3.3. В частности, см. Пример 3, при целом $s \geq 3$, $f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = \sum_{j=0}^{s-1} x^j$ и $\lambda = 0$ имеем $\ln(1-x^{s^n}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (разумеется, при $|x| < 1$). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \sum_{j=0}^{s-1} x^{j \cdot s^n} \right) = -\ln(1-x)$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{s-1} x^{j \cdot s^n} \right) \equiv \frac{1}{1-x}.$$

А после дифференцирования предпоследнего тождества и замены $t = 1/x > 1$ получаем тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n R(t^{s^n}) \equiv \frac{1}{t-1},$$

где

$$R(z) \equiv \frac{s-1 + \sum_{k=1}^{s-2} (s-1-k)z^k}{1 + \sum_{k=1}^{s-1} z^k}.$$

Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2. Если функции $\varphi : D \rightarrow D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$) связаны для некоторого натурального m тождеством $f(\varphi_m(x)) - f(x) \equiv \lambda + g(x)$ и существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n}^{n+m-1} f(\varphi_j(x)) - \lambda n \right) \equiv c(x),$$

где $\varphi_k(x)$ — итерация функции $\varphi(x)$ порядка k , то

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(\varphi_n(x)) \equiv c(x) - \sum_{j=0}^{m-1} f(\varphi_j(x))$$

(полагаем, для удобства записей, что $\varphi_0(x) \equiv x$).

Доказательство в этом случае также сводится к суммированию тождеств $f(\varphi_{n+m}(x)) - f(\varphi_n(x)) = \lambda + g(\varphi_n(x))$ и предельному переходу при $n \rightarrow \infty$ с учётом данных условий.

Пример 4. При $\varphi(x) = x + 1$ (и, следовательно, $\varphi_k(x) \equiv x + k$), $\lambda = 0$, $f(x+m) - f(x) \equiv g(x)$ и $f(x) \rightarrow b$, при $x \rightarrow +\infty$ получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) \equiv bm - \sum_{n=0}^{\infty} f(x+j).$$

Пример 4.1. В частности, см. Пример 4, при $f(x) = -1/x$ и $g(x) = m/(x^2 + mx)$ получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)(n+x+m)} \equiv \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{x+j} \quad (*)$$

и, в частных случаях, равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + km} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2 - 4n^2} = \frac{1}{2l+1} \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1}$$

(последнее верно для любого целого l). Отметим ещё, что если в полученном тождестве (*) положить $x = mt > 0$ и, умножив на m , перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, то получится предельное равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{(n+mt)(n+mt+m)} = \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right),$$

которое является наглядным примером невозможности в некоторых случаях предельного перехода под знаком суммы.

Пример 4.2. В частности, см. Пример 4, при $f(x) = -1/\Gamma(x)$ и

$$g(x) = \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (x+i) - 1}{\Gamma(x+m)}$$

получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (x+n+i) - 1}{\Gamma(x+m+n)} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(x+j)}$$

и, в частном случае, равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^m (N+k+i) - 1}{(N+m+k)!} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(N+j)!}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} &= 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3 + 6k^2 + 11k + 5}{(k+3)!} = \frac{5}{2}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 5k + 5}{(k+3)!} &= \frac{3}{2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{(k+3)!} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

и, как следствие из трёх последних равенств,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3 + 13k^2}{(k+3)!} = 2.$$

Пример 4.3. В частности, см. Пример 4, при $f(x) = \ln \frac{x+a}{x+b}$ и $g(x) = \ln \frac{(x+m+a)(x+b)}{(x+m+b)(x+a)}$ получаем, положив под конец $x = 0$, тождества

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{m(b-a)}{(n+m+b)(n+a)} \right) = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{b-a}{j+a} \right)$$

и

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{m^2}{(n+a)^2} \right) = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{m}{j+a} \right).$$

С операторной точки зрения всюду выше речь идёт, в основном, о некоторых случаях обратимости оператора $-A = I - S$, где $Sf = f \circ \varphi$, и о возможности представления обратного оператора в форме

$$I + \sum_{j=0}^{\infty} S^j.$$

Другими словами, речь идёт о некоторых достаточных условиях разрешимости функционального уравнения $f(\varphi(x)) - f(x) = g(x)$, где φ и g фиксированы, в некотором заданном классе функций.

В Примерах 1 и 4 можно рассматривать линейное пространство кусочно-непрерывных на $(-\infty; +\infty)$ функций, непрерывных в окрестности $+\infty$, и имеющих в $+\infty$ конечное предельное значение.

Обратный оператор можно строить, например, на подпространстве таких функций f , что функция $x^2 f(x)$ ограничена в окрестности $+\infty$.

В Примере 2 можно рассматривать (для случая $|a| < 1$) линейное пространство функций, кусочно-непрерывных на содержащем ноль промежутке, непрерывных в окрестности нуля и обнуляющихся в нуле. Обратный оператор можно строить, например, на подпространстве функций дифференцируемых в нуле.

В Примере 3 можно рассматривать (для случая $s > 1$) линейное пространство функций, непрерывных на интервале $(-1; 1)$ и обнуляющихся в нуле. Обратный оператор можно строить, например, также на подпространстве функций дифференцируемых в нуле.

Примеры 1 и 4, рассмотренные выше, допускают обобщение в ином направлении.

Теорема 3. Если отображение $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{K}$ кольца целых чисел в топологическое кольцо \mathbf{K} таково, что $f(k) \rightarrow \mathbf{0}$ при $k \rightarrow \infty$, сумма элементов кольца c_1, \dots, c_n ($n \geq 2$) равна нулю этого кольца, среди целых чисел m_1, \dots, m_n имеется пара неравных, M есть наибольшее из этих чисел m_1, \dots, m_n , а \mathbf{J} есть множество номеров тех чисел из m_1, \dots, m_n , что отличны от наибольшего M , то тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n c_j f(k + m_j) \right) = \sum_{j \in \mathbf{J}} \left(c_j \sum_{k=0}^{M-m_j-1} f(k + m_j) \right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное $N \geq M + 2 - m$, где m — наименьшее из m_1, \dots, m_n . Сумма

$$\sum_{k=0}^N \left(\sum_{j=1}^n c_j f(k + m_j) \right)$$

разбивается на три слагаемых:

$$\sum_{j=1}^n \left(c_j \sum_{k=0}^{M-m_j} f(k + m_j) \right), \sum_{j=1}^n \left(c_j \sum_{k=M-m_j+1}^{N+m-m_j-1} f(k + m_j) \right) \text{ и } \sum_{j=1}^n \left(c_j \sum_{k=N+m-m_j}^N f(k + m_j) \right).$$

При этом первая сумма равна

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} \left(c_j \sum_{k=0}^{M-m_j-1} f(k + m_j) \right) + \sum_{j=1}^n c_j f(k + m_j)$$

и, следовательно, равна правой части доказываемого равенства; вторая сумма равна

$$\sum_{j=1}^n \left(c_j \sum_{i=M+1}^{N+m-1} f(i) \right) = \left(\sum_{i=M+1}^{N+m-1} f(i) \right) \sum_{j=1}^n c_i = 0$$

и, наконец, третья сумма равна

$$\sum_{j=1}^n \left(c_j \sum_{k=m}^{m_j} f(N+i) \right)$$

и, следовательно, стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Из доказанной теоремы следует, например, что сумма ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+m_1)(k+m_2) \cdot \dots \cdot (k+m_n)}$$

является **рациональным числом** для любых **попарно различных** натуральных чисел m_1, \dots, m_n , ($n \geq 2$). То, что требование попарной различности натуральных чисел m_1, \dots, m_n снять нельзя, показывает равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Добавление: некоторые тождества с целой частью

Использованное в Примере 2.3 тождество $[x] - [x/2] \equiv [x/2 + 1/2]$ (или, что фактически то же самое, $[2x] - [x] \equiv [x + 1/2]$) является частным случаем тождества

$$[nx] - [x] \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left[x + \frac{j}{n} \right]. \quad (**)$$

Рассмотрим некоторые следствия, из этого тождества вытекающие, но предварительно само тождество обоснуем. Всюду ниже дробную часть произвольного действительного y будем обозначать через $\rho(y)$: $\rho(y) \equiv y - [y]$.

Для обоснования положим $x \in \mathbb{R}$, $[n\rho(x)] = k$ и отметим, что $0 \leq k \leq n-1$. Так как $k \leq n\rho(x) < k+1$ и, следовательно, $k + n[x] \leq nx \leq k + n[x] + 1$, то $[nx] = k + n[x]$.

С другой стороны,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[x + \frac{j}{n} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left([x] + \left[\rho(x) + \frac{j}{n} \right] \right) = \sum_{j=0}^{n-k-1} ([x] + 0) + \sum_{j=n-k}^{n-1} ([x] + 1) =$$

$$(n-k)[x] + k([x] + 1) = [nx].$$

Предельный переход в равенстве

$$\frac{[nx]}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[x + \frac{j}{n} \right]$$

приводит к тождествам

$$\int_0^1 [x+t] dt \equiv x \quad \text{и} \quad \int_0^1 \rho(x+t) dt \equiv \frac{1}{2}.$$

Если в этих тождествах положить $t = x_1$ и $x = x_2 + \dots + x_n$, ($N \geq 2$), а затем проинтегрировать по $(N-1)$ -мерному единичному кубу, то получим равенства

$$\int_{I^N} [x_1 + \dots + x_N] dx_1 \dots dx_N = \frac{N-1}{2} \quad \text{и} \quad \int_{I^N} \rho(x_1 + \dots + x_N) dx_1 \dots dx_N = \frac{1}{2},$$

где $I = [0; 1]$ и интегралы вычисляются по N -мерному единичному кубу I^N .

Красивый дискретный аналог этих интегральных равенств получится, если в основном тождестве (**), переписанном в виде

$$[nx] \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left[x + \frac{j}{n} \right],$$

положить $j = j(1)$, $x = \frac{1}{n}(j(2) + \dots + j(N))$ и просуммировать по всем независимо меняющимся индексам $j(2), \dots, j(N)$, свободно пробегающим от 0 до $n - 1$:

$$\frac{1}{2}(N-1)(n-1)n^{N-1} = \sum_{j(1), \dots, j(N)=0}^{n-1} \frac{j(1) + \dots + j(N)}{n}.$$

Если же в тождестве (**) положить $x = t/n^k$ и просуммировать по всем натуральным k , то получим тождество

$$[t] \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{t}{n^k} + \frac{j}{n} \right] \right)$$

для неотрицательных значений переменной, которое обобщает тождество из Примера 2.3.

Наконец, комбинируя равенство

$$mf(m+1) - \sum_{j=1}^{m+1} f(j) = \int_1^{m+1} f'(x)[x]dx$$

с полученными тождествами

$$[y] \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{y}{n} + \frac{j}{n} \right], \quad \text{и} \quad [y] \equiv \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{y}{n^k} + \frac{j}{n} \right] \right),$$

получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = - \sum_{j=1}^{n-1} \int_1^{\infty} f'(y) \left[\frac{y}{n} + \frac{j}{n} \right] dy$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} f'(y) \left[\frac{y}{n^k} + \frac{j}{n} \right] dy \right).$$

Эти равенства имеют место, например, при условии ограниченности на $[1; +\infty)$ непрерывной функции $y^2 f(y)$.

*Знак Евгений Иосифович,
доцент кафедры математических и естественнонаучных
дисциплин Михайловской Военной Артиллерийской
Академии, Санкт-Петербург.*

E-mail: evgematem@mail.ru

“Матрешки“ и устойчивость в моделях экологии

В. Г. Ильичев

В статье изучается устойчивость положений равновесия для ряда дискретных динамических систем — математических моделей некоторых экологических явлений (изолированная популяция, миграция, конкуренция). Метод исследования основан на построении так называемой “матрешки” — семейства вложенных “отрезков” в фазовом пространстве, которые определяются при помощи специально подобранного отношения порядка.

*Самые неожиданные сюрпризы
таят первая и последняя матрешки:
первая — содержанием,
последняя — его отсутствием.*
(Рефат Шакир-Алиев)

Динамика системы взаимодействующих объектов характеризуется набором своих *равновесий*. Равновесия бывают самыми разнообразными — изолированные состояния, циклы, пространственно-временные структуры и др. Так, целое семейство простейших равновесий (= точек покоя) можно найти на бугристом поле — это точки минимумов или максимумов его поверхности.



Рис. 1. Неустойчивое равновесие (интернет: 1983_6611_камни)

Здесь важно выделить два вида равновесий — *устойчивые* и *неустойчивые*. Так, минимумы (= низины) рельефа являются устойчивыми точками покоя: если немного отклонить положение мяча, то он (колебательным образом) возвратится в исходное положение. При наличии трения возникают затухающие колебания. А вот максимумы (= вершины) оказываются неустойчивыми точками покоя (см. рис. 1). Достаточно “малейшего дуновения ветерка”, чтобы мяч навсегда покинул это состояние.

Всякая траектория мяча (= динамической системы) стремится к одному из своих устойчивых равновесий. Поэтому естественно считать их *притягивающими*, а неустойчивые равновесия — *отталкивающими*. Если бросить мяч на такое дикое поле, то рано или поздно он окажется в одной из точек минимума. И в более общей ситуации в природе могут реализоваться только устойчивые равновесия.

Обоснование (глобальной) устойчивости тех или иных равновесий — трудная математическая задача. Здесь одним из эффективных методов является теория *монотонных операторов*, имеющая ясное геометрическое истолкование. В качестве иллюстрации приведем соответствующее исследование для ряда моделей экологии.

Устойчивость в модели изолированной популяции

Обозначим через x_t численность популяции в момент времени t . Предполагаем, что существует функциональная зависимость

$$x_{t+1} = f(x_t). \quad (1)$$

При заданном начальном значении x_0 рекурсия (1) порождает свою траекторию $\{x_t\}$. Обсудим возможный вид данной функции воспроизводства. Разумеется, $f(0) = 0$. Ниже предполагаем, что f является гладкой (= бесконечное число раз дифференцируемой) функцией. Тогда согласно лемме Адамара [1] выполняется соотношение $f(x) = x\varphi(x)$ для некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$. Далее, считаем $f(x)$ строго вогнутой функцией (= выпуклой вверх), поэтому $\varphi(x)$ убывает (докажите это!).

При таких ограничениях график f может оказаться и “горбатым”. Это имеет место для известной модели [2] Риккера $x_{t+1} = A \cdot x_t \cdot \exp(-x_t)$. Несмотря на довольно простой вид, она обладает сложным поведением [3]. Здесь неожиданно обнаружены циклы любых периодов, и даже апериодические траектории при подходящем выборе параметра R .

Ниже дополнительно полагаем, что функция воспроизводства является монотонно возрастающей. Монотонность и вогнутость соответствуют простейшему варианту нелинейной модели динамики численности популяции. Очевидно, если \bar{x} — равновесие в модели (1), то оно удовлетворяет уравнению $\bar{x} = f(\bar{x})$. Для положительных \bar{x} это эквивалентно соотношению $\varphi(\bar{x}) = 1$. Пусть всюду ниже $\varphi(0) > 1$ и $\varphi(\infty) < 1$, тогда положительное равновесие, очевидно, существует и единственно.

Ниже будем использовать привычную терминологию: *фазовое пространство* — это область, где располагаются модельные траектории; *векторное поле* — это набор стрелок в фазовом пространстве с началом в каждой его точке x и концом в точке $f(x)$.

Будем называть \bar{x} *глобально устойчивым*, если при любом положительном начальном значении x_0 соответствующая траектория (1) притягивается к данному равновесию. Справедливо

Утверждение 1. *Равновесие \bar{x} в модели (1) глобально устойчиво.*

В самом деле, построим вокруг данного равновесия следующее семейство вложенных отрезков (“матрешку”):

$$I_\varepsilon = \{x : W_\varepsilon \leq x \leq S_\varepsilon\},$$

где $W_\varepsilon = \varepsilon \bar{x}$ и $S_\varepsilon = \bar{x}/\varepsilon$ (это самые “слабая” и “сильная” точки отрезка соответственно). При вариации ε в промежутке $(0, 1]$ эти отрезки целиком заполняют положительную полуось. Разумеется, при $\varepsilon = 1$ соответствующий отрезок вырождается в точку равновесия.

Посмотрим на судьбу каждого отрезка под действием отображения, порожденного моделью (1). Ниже весьма полезной оказывается

Лемма 1. *При $\varepsilon > 0$ для всякой вогнутой функции f и всех $x > 0$ выполняются неравенства:*

$$f(\varepsilon x) > \varepsilon f(x) \quad \text{и} \quad f(x/\varepsilon) < f(x)/\varepsilon. \quad (2)$$

Обоснование леммы 1. Согласно вогнутости f имеет место неравенство $f(0(1 - \varepsilon) + \varepsilon x) > (1 - \varepsilon)f(0) + \varepsilon f(x)$. Отсюда сразу следует левое неравенство (2). А правое неравенство (2) получается из левого после замены $x \mapsto \varepsilon x$. Лемма 1 доказана.

Ниже ключевое значение имеют образы концевых точек.

Сначала действуем отображением f на самую слабую точку. Согласно Лемме 1 для вогнутой f устанавливаем: $f(\varepsilon x) > \varepsilon f(x) = \varepsilon x$. Таким образом, самая “слабая” точка “идет вперед”.

Аналогично, под действием f самая сильная точка “идет назад”.

Поэтому образы данных точек одновременно оказываются строго внутри невырожденного отрезка I_ε . В силу монотонности f , и весь образ данного отрезка будет строго вложен в себя.

Последнее. С помощью “процедуры проталкивания предельной точки” установим глобальную устойчивость. Это достигается следующим образом.

Так, для каждой точки x фазовой прямой можно построить свой минимально возможный отрезок I_ε , в котором она находится. Очевидно, данная точка совпадает с одним из концов I_ε . Значит, существует однозначное соответствие $x \mapsto \varepsilon$. Поэтому с каждой траекторией $\{x_t\}$ тесно связана своя числовая последовательность $\{\varepsilon_t\}$. Из предыдущего следует, что $\{\varepsilon_t\}$ монотонно возрастает и, разумеется, ограничена сверху единицей. Поэтому у нее существует единственная предельная точка δ .

Если $\delta = 1$, то предельная точка траектории совпадает с \bar{x} и тогда все доказано. Покажем, что другой вариант ($\delta < 1$) невозможен. Действительно, рассмотрим предельный отрезок I_δ , один из концов которого совпадает с предельной точкой $\{x_t\}$, например, W_δ . С одной стороны, непрерывная функция f сохраняет сходимость, поэтому этот конец будет переходить в себя. А с другой стороны, согласно предыдущему он должен идти вперед. Противоречие. Утверждение 1 доказано.

Конусы и отношение порядка

Представляется весьма заманчивым и в многомерных моделях использовать отношение порядка для установления устойчивости. Здесь способ сравнения векторов опирается на понятие *выпуклого конуса* (K).

Напомним, его основное свойство: пусть $x \in K$ и $x \neq 0$. Тогда при $\alpha > 0$ имеет место $\alpha x \in K$, а при $\alpha < 0$ получаем $\alpha x \notin K$.

Покажем также, что из $x \in K$ и $y \in K$ следует $x + y \in K$. В самом деле, из выпуклости конуса вытекает $(x + y)/2 \in K$. И после умножения этого соотношения на 2 получаем требуемое.

Удобно считать конус замкнутым. А именно, пусть все элементы некоторой сходящейся последовательности лежат в K , тогда и все ее предельные точки лежат в K .

В нелинейном анализе *порядок* (\prec) задается следующим образом [4]. Полагаем, что $x \prec y$, если $y - x \in K$. Разумеется, не каждые два вектора можно так сравнить. Но и такого частичного порядка (= полупорядка) часто достаточно для решения многих задач.

Задача 1. Докажите привычные “хорошие” свойства¹ такого порядка:

1. из $x \prec y$ и $y \prec z$ следует $x \prec z$;
2. из $x \prec y$ и $y \prec x$ вытекает $x = y$;
3. при $\lambda > 0$ из $x \prec y$ получаем $\lambda x \prec \lambda y$.

Таким образом, задавая тот или иной вид конуса, можно получать свое отношение порядка. Ниже будут приведены два таких конуса, часто используемые в моделях миграции и конкуренции.

Отметим, что нетрудно построить *полный порядок* для точек единичного квадрата, который удовлетворяет свойствам 1 и 2. Действительно, Г. Кантор придумал (см. [5]) чрезвычайно остроумную конструкцию взаимно-однозначного соответствия всех точек квадрата и его стороны — отрезка $[0; 1]$. Обозначим отображение Кантора через $(x, y) \mapsto \text{cntr}(x, y)$. Тогда положим $A \prec B$, если и только

¹Общеизвестно, “Анархия — мать порядка”. Теперь мы знаем и другого родителя: “Конус — отец порядка”.

если $\text{cntr}(A) < \text{cntr}(B)$. Очевидно, каждые две точки квадрата сравнимы и выполняются свойства 1 и 2. Можно ли придумать полный порядок, чтобы имели место все три свойства?

Пусть $A \prec B$, тогда множество всех промежуточных векторов называется *конусным отрезком*. Обозначим его через $\langle A, B \rangle$.

Задача 2. Какой конус задает обычный числовой порядок на вещественной прямой?

Задача 3. Пусть K — первый квадрант плоскости, тогда какую область представляет собой конусный отрезок при заданных векторах A и B ?

Задача 4. Решите предыдущую задачу, если K — четвертый квадрант плоскости.

Устойчивость в модели миграции

Будем считать, что территория обитания популяции состоит из двух районов. Соответственно, ее численность в момент времени t составляет x_t, y_t . Полагаем, что без учета миграции динамика указанных переменных задается уравнениями роста:

$$x_{t+1} = f(x_t) \text{ и } y_{t+1} = g(y_t). \quad (3)$$

Относительно правых частей (3) примем прежние ограничения (монотонность, вогнутость и др.).

Далее, происходит процесс миграции. Так, считаем, что доля популяции (α) переходит из 1-го района во 2-ой, а доля популяции (β) переходит из 2-го района в 1-ый. Окончательно, получаем модель

$$x_{t+1} = (1 - \alpha)f(x_t) + \beta g(y_t), \quad y_{t+1} = \alpha f(x_t) + (1 - \beta)g(y_t). \quad (4)$$

Разумеется, выполняются ограничения $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$. Пусть в модели (4) существует равновесие $R = (\bar{x}, \bar{y})$, тогда его координаты удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{x} = (1 - \alpha)f(\bar{x}) + \beta g(\bar{y}), \text{ и } \bar{y} = \alpha f(\bar{x}) + (1 - \beta)g(\bar{y}). \quad (5)$$

Разумеется, здесь всегда имеется нулевое равновесие. Возможно существование и положительного равновесия. Справедливо

Утверждение 2. Положительное равновесие в модели (4) глобально устойчиво.

Действительно, определим естественное отношение порядка (\prec) через конус, соответствующий первому квадранту плоскости. Модель (4) порождает отображение плоскости в себя $P : (x_t, y_t) \mapsto (x_{t+1}, y_{t+1})$.

Имеет место простой результат о монотонности P , а именно

Лемма 2. Пусть $A \prec B$, тогда и $P(A) \prec P(B)$.

Задача 5. Докажите эту лемму.

Далее, построим вокруг R “матрешку” — семейство вложенных конусных отрезков $\langle W(\varepsilon), S(\varepsilon) \rangle$, где $0 < \varepsilon \leq 1$. Здесь полагаем

$$W(\varepsilon) = (\varepsilon\bar{x}, \varepsilon\bar{y}) \text{ и } S(\varepsilon) = (\bar{x}/\varepsilon, \bar{y}/\varepsilon).$$

Очевидно, $W(\varepsilon) \prec R \prec S(\varepsilon)$ для всех ε . При $\varepsilon \rightarrow 1$ конусный отрезок превращается в точку равновесия, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ заполняет весь первый квадрант.

Лемма 3. Под действием P “слабая” точка идет вперед, а “сильная” точка идет назад.

Действительно, рассмотрим для примера судьбу “слабой” точки. Так, оценим координаты образа данной точки с учетом вогнутости функций роста (см Лемму 1) и соотношений (5):

$$\bar{x} = (1 - \alpha)f(\varepsilon\bar{x}) + \beta g(\varepsilon\bar{y}) > \varepsilon\bar{x}, \quad \bar{y} = \alpha f(\varepsilon\bar{x}) + (1 - \beta)g(\varepsilon\bar{y}) > \varepsilon\bar{y}.$$

Аналогично определяем судьбу и “сильной” точки. Лемма 3 доказана.

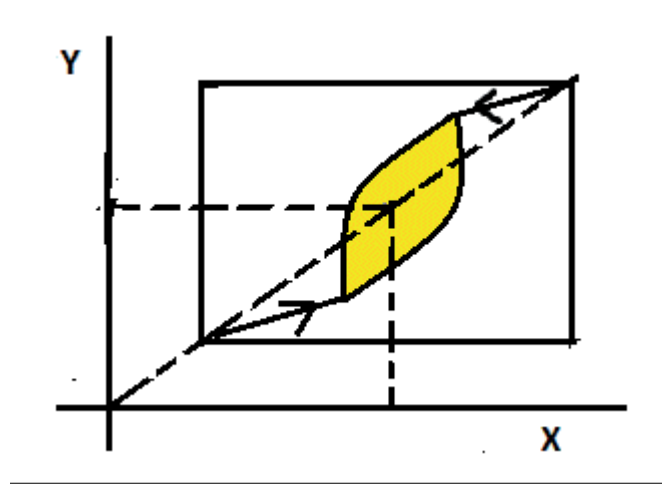


Рис. 2. Образ (затенен) конусного отрезка при отображении

Очевидно, весь образ большого конусного отрезка оказывается внутри малого (см. рис. 2). Теперь применяя прежнюю “процедуру проталкивания предельной точки”, устанавливаем глобальную устойчивость данного равновесия. Утверждение 2 доказано.

Отсюда, в частности, следует: в системе (5) может быть только одно положительное равновесие.

Устойчивость в модели двух конкурентов

Дискретная модель конкуренции задается системой:

$$x_{t+1} = F(x_t, y_t), \quad y_{t+1} = G(x_t, y_t) \quad (6)$$

с гладкими функциями F и G ; x_t, y_t — численности конкурентов. Здесь естественно принять следующие допущения:

1. $F(0, y) = 0$ и $G(x, 0) = 0$ для всех неотрицательных x, y ;
2. $F(x, y)$ возрастает по “своей” переменной x и убывает по “чужой” переменной y . А $G(x, y)$ возрастает по “своей” переменной y и убывает по “чужой” переменной x .

Определим здесь свое естественно отношение порядка (\prec). Возьмем в качестве конуса четвертый квадрант плоскости — это все точки. Формально, обозначим $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$. Тогда $A \prec B$ выполняется лишь при $x_1 < x_2$ и $y_1 > y_2$. “С точки зрения x -популяции” ситуация A представляется менее выгодной, чем B . Действительно, в первом случае мало “своих”, но много “чужих”.

Дальнейшее изложение опирается на некоторую конкретизацию функций F и G . Так, в духе идей вогнутости и леммы Адамара будем дополнительно считать, что имеют место представления:

$$F(x, y) = x\varphi(x + ay) \quad \text{и} \quad G(x, y) = y\gamma(bx + y), \quad (7)$$

где положительные параметры a, b характеризуют негативное влияние конкурента; φ, γ являются убывающими функциями. Например, при выборе функции $\varphi(x + ay) = 1/2 + 1/(1 + x + ay)$ сохраняется свойство монотонного роста $F(x, y)$ по переменной x .

Если в (6), (7) имеется положительное равновесие $R = (\bar{x}, \bar{y})$, то выполняются соотношения

$$\varphi(\bar{x} + a\bar{y}) = 1 \quad \text{и} \quad \gamma(b\bar{x} + \bar{y}) = 1. \quad (8)$$

Другим (более слабым) вариантом стабильности является *локальная устойчивость*. А именно, если существует открытая область (D) вокруг R , такая, что любая траектория с началом в D притягивается к R . Справедливо

Утверждение 3. Пусть существует положительное равновесие, тогда при условии $ab < 1$ оно локально устойчиво.

Действительно, зададим сдвиг-отображение, порожденное (6): $Q : (x_t, y_t) \mapsto (x_{t+1}, y_{t+1})$.

Здесь имеет место монотонность, а именно

Лемма 4. Пусть $A \prec B$, тогда $Q(A) \prec Q(B)$.

Задача 6. Докажите эту лемму.

Теперь построим следующую “матрешку”. Так, положим

$$W_\varepsilon = (\bar{x} - \varepsilon p, \bar{y} + \varepsilon q) \text{ и } S_\varepsilon = (\bar{x} + \varepsilon p, \bar{y} + \varepsilon q),$$

где $p = \sqrt{a}$, $q = \sqrt{b}$. Разумеется, $pq < 1$.

Через $R_\varepsilon = \langle W_\varepsilon, S_\varepsilon \rangle$ обозначим соответствующий конусный отрезок. Очевидно, R_0 совпадает с точкой равновесия. При небольших $\varepsilon > 0$ обе построенные точки лежат в первом квадранте. Поэтому и R_ε находится там же.

Лемма 5. Под действием Q точка W_ε идет вперед, а S_ε идет назад.

В самом деле, рассмотрим, например, слабую точку и оценим координаты ее образа. С учетом убывания функций φ и γ , условия $pq - 1 < 0$ и равенств (8) устанавливаем:

$$\varphi[\bar{x} - \varepsilon p + p^2(\bar{y} + \varepsilon q)] = \varphi[\bar{x} + p^2\bar{y} + \varepsilon p(pq - 1)] > 1$$

и

$$\gamma[q^2(\bar{x} - \varepsilon p) + \bar{y} + \varepsilon q] = \gamma[q^2\bar{x} + \bar{y} + \varepsilon q(pq - 1)] < 1.$$

Следовательно, переменная x возрастает, а переменная y убывает. Поэтому слабая точка идет вперед.

Аналогично устанавливается и противоположная судьба сильной точки. Она идет назад. Лемма 5 доказана.

Далее, из монотонности Q следует, что образ R_ε вложен в себя (см. рис. 3). Таким образом, в результате последовательного (и бесконечного) действия Q получаем вложенную систему прямоугольников.

Наконец, используя “процедуру проталкивания предельной точки”, устанавливаем локальную устойчивость. Утверждение 3 доказано.

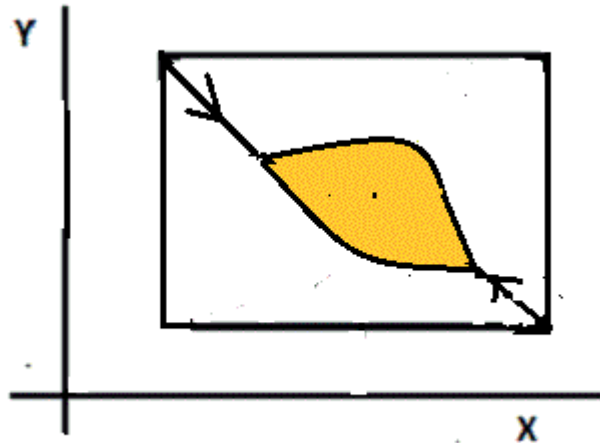


Рис. 3. Образ (затенен) конусного отрезка при отображении Q .

На самом деле здесь имеет место глобальная устойчивость. Основная идея обоснования: продолжить построение в первом квадранте конусных отрезков при всех $\varepsilon > 0$. Здесь “неприятной” точкой

является начало координат, поскольку при старте из $(0, 0)$ траектория в ней и остается. Поэтому ее притяжения к (\bar{x}, \bar{y}) не происходит. Если в конусный отрезок попадает “плохая” точка $(0, 0)$, то отбросим ее малую окрестность — треугольник

$$T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \delta\},$$

где δ мало и фиксировано. Самое главное, на границе такой области векторное поле направлено вовнутрь. Отсюда легко вытекает глобальная устойчивость положительного равновесия.

В заключение отметим, что математической основой эффективности “матрешки” является *правильный выбор отношения порядка*. Т.е. такой, чтобы отображение, порожденное моделью, оказывалось монотонным (= сохранение порядка). Это существенно упрощает исследование тех или иных модельных свойств. В более сложных ситуациях приходится прибегать к дополнительным ухищрениям. Например, в модели трех конкурентов трудно (а скорее всего, и невозможно) придумать такой правильный порядок. В работе [6] для широкого класса моделей конкуренции предложено изучать их динамику в обратном времени. Оказывается, в обратном времени “вражда” превращается в “дружбу”. В такой системе сразу строится правильный порядок с помощью конуса — положительного ортанта в трехмерном пространстве. Теперь малый конусный отрезок переходит в большой. Поэтому в новой модели равновесие отталкивает, и значит, в прежней модели оно притягивает.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1984.
2. Ricker W.E. Stock and recruitment // J. Fish. Res. Board of Canada. - 1954. - Vol. 11. - № 5.
3. Якобсон М.В. О свойствах однопараметрического семейства динамических систем // УМН. - 1976. - 31. - № 2(188).
4. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М.: Наука, 1975.
5. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. - М.: Наука, 1968.
6. Ильичев В.Г. Устойчивость, адаптация и управление в моделях экологии. - М.: Физматлит, 2009.

*Ильичев Виталий Григорьевич,
Главный научный сотрудник Южного
Научного Центра, Ростов-на-Дону,
доктор техн. наук, кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: vitaly369@yandex.ru

Математика и новые информационные технологии

Коллектив НИУ “МЭИ”

В статье приведены примеры использования численных методов пакетов Mathcad и Python для инновационного решения некоторых математических задач. Предложены новые схемы построения окружностей Мальфатти и рисования графиков. Дано новое определение окружности через оператор остатка от деления. Вводится понятие “феномен княжны Марьи”. Обсуждаются проблемы STEM-образования с отечественной локализацией в виде инженерных расчетов на компьютере.

Статья печатается с продолжением.

— Ну, сударыня, — начал старик, пригнувшись близко к дочери <...>, треугольники эти подобны; изволишь видеть, угол $abc...$

<...>

— Ну, как же не дура! — крикнул князь, оттолкнув тетрадь...
Лев Толстой “Война и мир”

Давайте для конкретизации ситуации, описанной в эпиграфе, решим на компьютере такую геометрическую задачу. Даны координаты вершин треугольника $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$. Найти радиус (r) и координаты центра окружности $(x_r - y_r)$, вписанной в этот треугольник.

В Интернете можно найти множество сайтов с набором формул, лемм и теорем, а также с описанием конкретных способов решения подобных математических задач, но не на компьютере, а на бумаге с использованием карандаша, линейки, циркуля, транспортира и калькулятора [1-5]. Но для многих изучение этого справочного материала заканчивается ситуацией, сжато отображенной в эпиграфе, назовем эту ситуацию “математико-педагогическим эффектом княжны Марьи”. Только душой эту княжну будет обзывать не старый князь Болконский, мучивший родную дочь алгеброй и геометрией, а вы сами наградите себя этим нелестным званием, понимая, что этот материал вам не осилить. На этом, увы, часто заканчиваются попытки самостоятельного решения даже относительно несложных математических задач для большинства школьников и студентов. Хотя потребность и желание освоить математику, царицу наук, есть. Без этого при любом образовании остается некое чувство неполноценности, незавершенности процесса учебы. Хотя есть люди (артистическая богема, например) которые даже бравировать своим полным математическим невежеством и плохой учебой в школе. Но речь не о них.

Небольшое отступление. Совсем недавно, полтора века назад, путешествие по свету могли позволить себе только очень богатые и физически здоровые люди. Но с появлением современных транспортных средств такое удовольствие стало доступно очень многим, а не только избранным. Сел в самолет, автомобиль, на поезд или теплоход — и за короткое время с комфортом добрался практически до любого уголка Земли. Если, конечно, нет карантинных и визовых ограничений. “Бабуленька” из романа Фёдора Достоевского “Игрок” была “лишена ног” и перемещалась по своему московскому дому в кресле, носимом дюжими лакеями. Но она села в поезд, приехала в немецкий город Висбаден (в романе это вымышленный город Рулетенбург) и свалилась как снег на голову своим родственникам, которые жили там в долг, играли на рулетке, ждали смерти “бабуленьки” и получения от

неё наследства. Когда же её спросили, как это она сделала, то “бабуленька” ответила так: “Села да поехала. В вагоне покойно, толчков нет”. До эры железных дорог такое путешествие было бы невозможно.

Что-то подобное можно сказать и о математике [6]. Раньше в её дебри могли забираться только избранные люди — люди с особыми способностями, с особым “математическим слухом”, и имеющие соответствующее образование. Но в настоящее время круг таких людей существенно расширяется за счет появления компьютерных математических программ, которые облегчают путешествие в мир математики. В этот круг людей можно было бы включить и княжну Марью из эпиграфа, если бы в её время были компьютеры.

Треугольник и две окружности

На рисунке 1 показан треугольник с вписанной окружностью, разделенный на шесть прямоугольных треугольничков. То, что касательная к окружности и радиус, проведенный в точку касания, образуют прямой угол, знают все — даже, наверное, и княжна Марья из романа Толстого. Второе и последнее, что нужно знать для решения задачи — и это всем известную теорему Пифагора о катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника. Эту теорему нужно уметь применять не только к прямоугольным треугольникам, но и к отрезкам прямых линий на плоскости (рис. 2) для вычисления их длин по декартовым координатам концов отрезков. И всё! Изучение остальных математических выкладок, лемм и теорем можно отложить на потом, если в том появится желание и/или потребность. Решив задачу, чувствуешь “глубокое удовлетворение”, а не то, что ты невежда в математике. А это чего-то стоит.

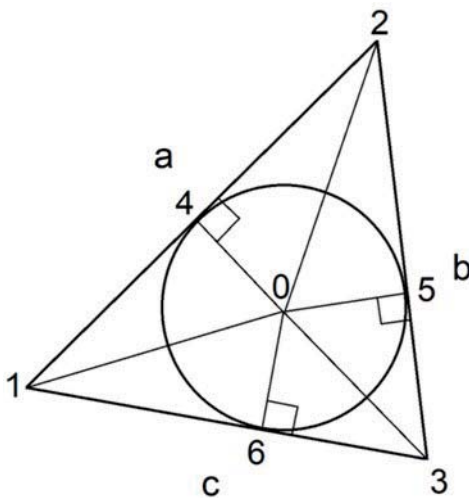


Рис. 1. Схема задачи об окружности, вписанной в треугольник

На рисунке 2 показано начало решение задачи в среде пакета Mathcad¹: ввод координат вершин треугольника $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$ и вычисление длин его сторон a, b и c .

Примечание. Задача решается с использованием единиц измерения. “Чистым” математикам это покажется необычным и излишним. Но этот прием позволяет через контроль размерностей избежать некоторых возможных опечаток при вводе формул. В общем и целом, это является современным трендом при решении задач на компьютере, когда оперируют не просто числами, а *физическими*

¹Многие возразят, что для решения математических задач на компьютере более подходят пакеты Maple и Mathematica. Но для наших несложных задач годится и инженерный суперкалькулятор Mathcad, протоколы решения задач на котором не требуют особых пояснений.

величинами. Единицы измерения это, помимо прочего, и хорошие комментарии: если какая-то переменная вводится или выводится с метрами, то это длина, а если с метрами квадратными, то это площадь, если говорить о нашей задаче.

$$\begin{aligned}
 x_1 &:= 0 \text{ m} & y_1 &:= 0 \text{ m} \\
 x_2 &:= 5 \text{ m} & y_2 &:= 7 \text{ m} \\
 x_3 &:= 8 \text{ m} & y_3 &:= 2 \text{ m} \\
 a &:= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 8.602 \text{ m} \\
 b &:= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = 5.831 \text{ m} \\
 c &:= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} = 8.246 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Ввод координат вершин треугольника и вычисление длин его сторон

Решение сводится к поиску корней системы трех уравнений с тремя неизвестными — см. рис. 3. Длины 1-2, 2-3 и 1-3 каждой стороны нашего треугольника (см. рис. 1) равны сумме длин катетов 1-4 и 2-4, 2-5 и 3-5, 1-6 и 3-6 смежных прямоугольных треугольников со вторыми катетами, длины которых равны радиусу искомой вписанной окружности. В докомпьютерную эру о таком методе решения нельзя было даже и подумать: простенькая, казалось бы, задача об окружности в треугольнике перерастает в существенно более сложную задачу — задачу ручного решения системы уравнений. А численные методы тогда только зарождались и довольно редко использовались в практических расчетах — основной упор делался на аналитику.

На рисунке 3 показано *численное* решение системы уравнений с помощью блока “Решить” пакета Mathcad. Для решения достаточно задать начальные значения искомых неизвестных, записать систему уравнений и вызвать встроенную в Mathcad функцию **Find**, которая вернет значения своих аргументов (неизвестных системы), превращающих уравнения в тождества с некоторой погрешностью, достаточной для практического, а не теоретического решения нашей задачи. Иногда, правда, функция **Find** возвращает не ответ, а сообщение об ошибке с призывом изменить начальные приближения и/или точность вычислений. Но это не беда.

Заодно можно решить ещё одну задачу — найти радиус R и координаты $x_R - y_R$ окружности, которая описывает наш треугольник. Для этого опять же достаточно составить систему из трех уравнений, основанных на уравнении окружности в декартовых координатах. Новая система получится не такой сложной, как первая, и ее можно будет решить аналитически (см. рис. 4). Попытки же аналитического решения системы уравнений, показанной на рис. 3, заканчивались либо неудачей, либо генерацией слишком громоздкого ответа, с которым работать крайне неудобно.

Решить

Начальные приближения: $r := 1 \text{ m}$ $x_r := 5 \text{ m}$ $y_r := 10 \text{ m}$

Ограничения:

$$a = \sqrt{(x_1 - x_r)^2 + (y_1 - y_r)^2} - r^2 + \sqrt{(x_2 - x_r)^2 + (y_2 - y_r)^2} - r^2$$

$$b = \sqrt{(x_2 - x_r)^2 + (y_2 - y_r)^2} - r^2 + \sqrt{(x_3 - x_r)^2 + (y_3 - y_r)^2} - r^2$$

$$c = \sqrt{(x_1 - x_r)^2 + (y_1 - y_r)^2} - r^2 + \sqrt{(x_3 - x_r)^2 + (y_3 - y_r)^2} - r^2$$

Решатель:

$$\begin{bmatrix} r \\ x_r \\ y_r \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(r, x_r, y_r) = \begin{bmatrix} 2.028 \\ 4.852 \\ 3.304 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Рис. 3. Численное решение задачи об окружности, вписанной в треугольник

$$\begin{bmatrix} R^2 = (x_1 - x_R)^2 + (y_1 - y_R)^2 \\ R^2 = (x_2 - x_R)^2 + (y_2 - y_R)^2 \\ R^2 = (x_3 - x_R)^2 + (y_3 - y_R)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solve}, \begin{bmatrix} R \\ x_R \\ y_R \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{10693 \cdot m^2}}{23} & \frac{82 \cdot m}{23} & \frac{63 \cdot m}{23} \\ \frac{\sqrt{10693 \cdot m^2}}{23} & \frac{82 \cdot m}{23} & \frac{63 \cdot m}{23} \end{bmatrix}$$

$$R := \frac{\sqrt{10693 \cdot m^2}}{23} = 4.496 \text{ m} \quad x_R := \frac{82 \cdot m}{23} = 3.565 \text{ m} \quad y_R := \frac{63 \cdot m}{23} = 2.739 \text{ m}$$

Рис. 4. Аналитическое решение задачи об окружности, описанной вокруг треугольника

Решение на рисунке 4 аналитическим (символьным) можно назвать с оговоркой. Здесь мы оперировали не самими символами (переменными), а числовыми значениями, какие хранятся в переменных. Но так как использовался аппарат компьютерных аналитических преобразований (оператор **solve**), а не численная математика (функция **Find**), то ответ был выдан не приближенный в виде десятичной дроби, а абсолютно точный в виде выражений с простыми, а не десятичными дробями и квадратными корнями (в радикалах). Кроме того, выданы два корня, а не один из двух. Второй корень (нижняя строка выданной оператором **solve** матрицы) был скопирован для хранения в соответствующих переменных, что позволило построить окружность, описанную вокруг треугольника. Первый же корень — это второй корень с измененным знаком радиуса.

Любое решение, особенно численное, требует проверки. Для этого необходимо и достаточно убедиться, что левые и правые части уравнений становятся равными друг другу при найденных значениях неизвестных. Вернее, почти равны друг другу. Численные методы решения задач имеют и другое название — *приближенные* методы. Такая проверка была сделана, но не показана здесь. Здесь же показан график — заданный треугольник с двумя найденными окружностями — вписанной и описанной (рис. 5). В этом случае будет проверяться не только правильность решения системы, но и правильность её составления: любые случайные или намеренные изменения в системах уравнений, показанных на рис. 3 и 4, заметно исказят рисунок 5.

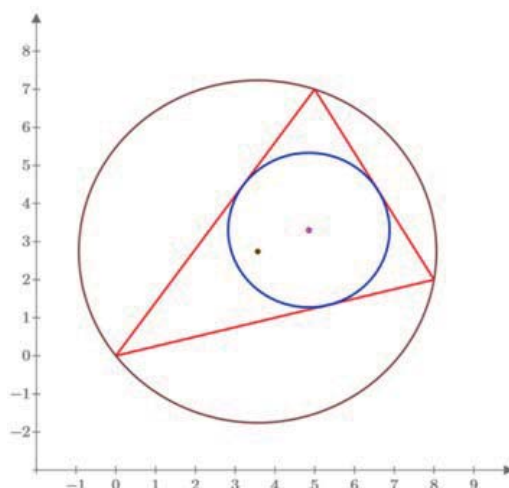


Рис. 5. Треугольник с вписанной и описанной окружностями

После того, как мы построили вписанные и описанные окружности с помощью современных компьютерных средств, можно вернуться к изучению материала, накопленного за несколько веков решения этой задачи. Можно узнать, например, что радиус вписанной в треугольник окружности r равен площади треугольника S , поделенного на его полупериметр p (см. рис. 6, где сравниваются результаты нахождения этого радиуса через численное решение системы трех уравнений и по формуле с площадью и полупериметром). Предварительное нахождение значения r по готовой формуле позволяет уменьшить число уравнений до двух. Но тут можно вспомнить KISS-принцип работы на компьютере (Keep It Simple, Stupid — делай это проще, “дурачок”). Он предписывает решать задачи простейшим способом и прибегать к сложным алгоритмам только в крайних случаях. Если, например, наша система из трех уравнений не решается, решается неверно или слишком долго, то следует уменьшить её до двух уравнений, определив значение переменной r через аналитическую формулу. Но тут будут возникать вопросы о том, как получена эта формула, понимает ли работающий с ней её суть и т.д. С тремя уравнениями таких вопросов не возникает — делай это проще, дурачок! По-переменное или совместное использование символьной и численной математики при решении задач на компьютере — это веление времени [7].

$$p := \frac{a+b+c}{2} = 11.34 \text{ m} \quad S := \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = 23 \text{ m}^2$$

$$r = 2.028 \text{ m} \quad \frac{S}{p} = 2.028 \text{ m}$$

Рис. 6. Вычисление радиуса окружности, вписанной в треугольник, по известной формуле

В справочниках и учебниках — бумажных и интернетовских — можно найти формулу Эйлера, определяющую расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей (рис. 7). Эти центры на рис. 5 отмечены точками. Вычисления на рис. 7 — это опять же дополнительная проверка правильности составления и решения наших уравнений. Если возникнет потребность или желание, то можно посмотреть, как эта формула выводилась великим Эйлером. Или попытаться вывести её самостоятельно.

$$d := \sqrt{(x_r - x_R)^2 + (y_r - y_R)^2} = 1.406 \text{ m}$$

$$\sqrt{R^2 - 2 \cdot R \cdot r} = 1.406 \text{ m}$$

Рис. 7. Вычисление по формуле Эйлера расстояния между центрами вписанной в треугольник окружности и окружности, описанной вокруг треугольника

Задачу об окружности, вписанной в треугольник, несложно решить и без компьютера. Для этого достаточно на листе бумаги нарисовать сам треугольник и две из трех его биссектрис, пересечение которых и будет центром искомой окружности. Далее с помощью циркуля несложно нарисовать и саму окружность. Но можно прочертить и все три биссектрисы, если учесть тот факт, что они пересекаются в одной точке, которую называют *инцентром*. А вот задачу о вписывании в треугольник трех окружностей — *окружностей Мальфатти*, графически решить будет довольно затруднительно, принимая во внимание описанный нами эффект княжны Марьи и тот факт, что мы давно уже разучились чертить с помощью циркуля и линейки, переложив эту работу на плечи компьютера.

Численное и аналитическое решение уравнений можно точно так же провести и в экосистеме² Python, обладающей обширным набором библиотек, в котором, как и в цитате из фильма «Свадьба» по рассказу А.П. Чехова «В Греции все есть!». Нужно только порыться в Yandex или Google, а если нужное не найдется, то переформулировать запрос. Найденные средства необходимо либо установить, либо воспользоваться специальными дистрибутивами для проведения научно-технических расчетов, к которым относятся Anaconda, функционирующая в Windows, Linux и OS X, и WinPython, который работает только под управлением Windows, но зато его не нужно устанавливать в системе и работать с ним с переносимого жесткого диска или даже быстрой флешки.

Начнем с численного решения задачи, сформулированной на рис. 2 и 3:

```
import numpy as np # импортируем численный Python
from scipy.optimize import root # функция для решения уравнений
def fun(x, *args):
    r, xr, yr = x
    x1, y1, x2, y2, x3, y3 = args
    a = np.sqrt((x1-x2)**2 + (y1-y2)**2)
    b = np.sqrt((x3-x2)**2 + (y3-y2)**2)
    c = np.sqrt((x3-x1)**2 + (y3-y1)**2)
    a = np.sqrt((x1-xr)**2 + (y1-yr)**2 - r**2) + \
        np.sqrt((x2-xr)**2 + (y2-yr)**2 - r**2) - a
    b = np.sqrt((x2-xr)**2 + (y2-yr)**2 - r**2) + \
        np.sqrt((x3-xr)**2 + (y3-yr)**2 - r**2) - b
    c = np.sqrt((x1-xr)**2 + (y1-yr)**2 - r**2) + \
        np.sqrt((x3-xr)**2 + (y3-yr)**2 - r**2) - c
    return a, b, c
# ищем решение системы уравнений
a, b, c = root(fun, (1., 2, 3), args=(0,0, 5, 7, 8,2))['x']
```

Для решения задачи пришлось найти функцию `root()` в библиотеке `scipy.optimize` и прочитать документацию. Дальше все оказалось просто, достаточно написать функцию, описывающую систему

²Про Mathcad принято говорить, что это пакет, а про Python – что это... экосистема. Всем хороша полная версия Mathcad, одно нехорошо – это платный продукт. Python же передается пользователям «бесплатно, то есть даром». Хотя есть и дармовая укороченная, но довольно мощная версия Mathcad – Mathcad Express.

уравнений. Этой функции передается массив неизвестных значений, а также, если необходимо, то и дополнительные параметры, в нашем случае это $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$. Функция возвращает массив невязок для уравнений системы. Самой функции `root()` передаются функция, описывающая систему уравнений, массив начальных значений неизвестных, а в именованном параметре `args` дополнительные параметры для системы уравнений. Естественно, что мы получили то же, численное решение, что и Mathcad.

В настоящее время для проведения научно-технических расчетов в экосистеме Python широко используется Jupyter Notebook (JN), где очень легко можно строить интерактивные расчетные приложения, для чего необходимо всего четыре строки исходного текста:

```
from ipywidgets import interact
@interact(x1=1., y1=2., x2=5, y2=7, x3=8, y3=2)
def proc(x1, y1, x2, y2, x3, y3):
    return root(fun, (1., 2, 3), args=(x1,y1, x2, y2, x3,y3))['x']
```

Нам понадобилось импортировать функцию `interact` из библиотеки элементов пользовательского интерфейса JN, написать функцию, в которой параметрами выступают переменные, которые мы бы хотели вынести в пользовательский интерфейс. Функция выводит решение системы. Связь между пользовательским интерфейсом и функцией осуществляет декоратор `@interact` — “синтаксический сахарок”, облегчающий построение пользовательского интерфейса. На рис.8 приводится приложение для решения системы уравнений.

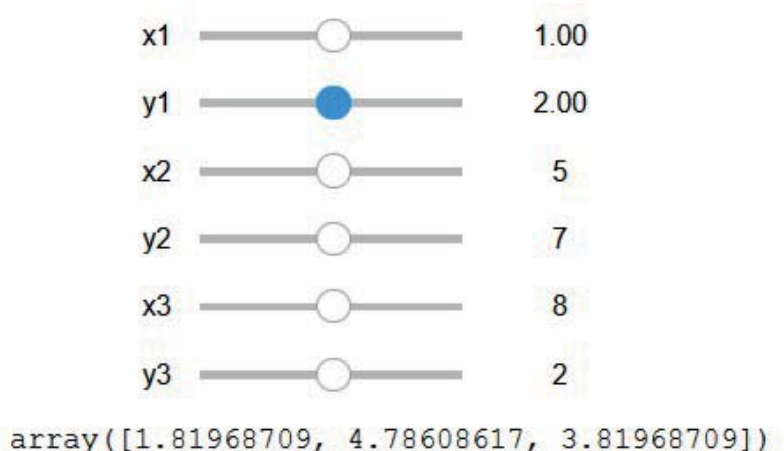


Рис. 8. Приложение для решения системы уравнений

Интерактивные приложения JN работают в любом современном браузере. Если потратить немного больше времени, то можно использовать другие элементы пользовательского интерфейса, вставлять в него изображения, анимацию, адаптировать его к меняющемуся размеру окна браузера, а при желании встраивать интерактивные веб-приложения в электронные учебники...

Для аналитического решения системы алгебраических уравнений на рис. 4 воспользуемся библиотекой SymPy. Опять-таки решение задачи не представляет особых трудностей за исключением необходимости чтения документации по библиотеке и освоения приемов работы с нею:

```
# импортируем средства символьных вычислений
from sympy import symbols, solve, Eq
R, x1, y1, x2, y2, x3, y3, xR, yR = symbols('R x1 y1 x2 y2 x3 y3 xR yR')
# система уравнений
eq1 = Eq((x1-xR)**2 + (y1-yR)**2, R**2)
eq2 = Eq((x2-xR)**2 + (y2-yR)**2, R**2)
```



```
eq3 = Eq((x3-xR)**2 + (y3-yR)**2, R**2)
# Решение системы уравнений
sol= solve([eq1, eq2, eq3], [R, xR, yR])
```

Как обычно в Python, решение задачи начинается с импорта необходимых средств, далее мы создаем символьные переменные. В отличие от численного решения делать это нужно обязательно. Для системы трех уравнений eq1, eq2, eq3 необходимо задавать левые и правые части. На рис. 9 приводится система алгебраических уравнений, отображенная в JN.

$$\begin{aligned}(x_1 - xR)^2 + (y_1 - yR)^2 &= R^2, \\(x_2 - xR)^2 + (y_2 - yR)^2 &= R^2, \\(x_3 - xR)^2 + (y_3 - yR)^2 &= R^2\end{aligned}$$

Рис. 9. Система из трех уравнений в JN

Мы получили аналитически два решения системы уравнений (рис.10):

$$\begin{aligned}\left[\left(R = -\frac{\sqrt{(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2)(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+y_2^2-2y_2y_3+y_3^2)}}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)}, \right. \right. \\ xR = \frac{x_1^2y_2-x_1^2y_3-x_2^2y_1+x_2^2y_3+x_3^2y_1-x_3^2y_2+y_1^2y_2-y_1^2y_3-y_1y_2^2+y_1y_3^2+y_2^2y_3-y_2y_3^2}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)}, \\ yR = -\frac{x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2-x_1y_2^2+x_1y_3^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2+x_2y_1^2-x_2y_3^2-x_3y_1^2+x_3y_2^2}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)} \Bigg), \\ \left(R = \frac{\sqrt{(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2)(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+y_1^2-2y_1y_3+y_3^2)(x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+y_2^2-2y_2y_3+y_3^2)}}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)}, \right. \\ xR = \frac{x_1^2y_2-x_1^2y_3-x_2^2y_1+x_2^2y_3+x_3^2y_1-x_3^2y_2+y_1^2y_2-y_1^2y_3-y_1y_2^2+y_1y_3^2+y_2^2y_3-y_2y_3^2}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)}, \\ yR = -\frac{x_1^2x_2-x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2-x_1y_2^2+x_1y_3^2+x_2^2x_3-x_2x_3^2+x_2y_1^2-x_2y_3^2-x_3y_1^2+x_3y_2^2}{2(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)} \Bigg) \end{aligned}$$

Рис. 10. Аналитические решения системы уравнений

Одно из решений нам не подходит из-за того, что R должен быть больше нуля. Это приводит к необходимости отбросить первое решение. Численные значения R , xR и yR легко найти с помощью подстановки численных значений координат вершин треугольника:

```
R = sol[1][0]
# подстановка
R.subs([(x1,0), (y1,0), (x2, 1), (y2,0), (x3, 0), (y3,1)])
```

Для этого треугольника мы получим следующие значения неизвестных: $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $xR = \frac{1}{2}$, $yR = \frac{1}{2}$.

В SymPy имеются средства для работы с размерными величинами, находящиеся в `sympy.physics.units`, но работать с ними не так удобно как в Mathcad.

2. Окружности Мальфатти

Окружности Мальфатти — это такие три окружности внутри заданного треугольника, каждая из которых касается двух других и двух сторон треугольника. Эти окружности названы в честь итальянского математика Джанфранческо Мальфатти (Gian Francesco Malfatti, 1731 — 1807).

Но об этом математике и его окружностях два первых автора-преподавателя и их студенты-соавторы узнали только после того, как они “численно” вписали в треугольник три окружности, усложняя задачу об одной окружности (рис. 1 и 5). После этого был проведен мониторинг задачи в Интернете, приведший к окружностям Мальфатти. Но оказалось, что авторский метод намного проще всех, ранее предложенных в течение нескольких “бескомпьютерных” веков. Тут сказался эффект, которому можно дать название еще одного классического литературного произведения — пьесы “Горе от ума” Грибоедова. Если б авторы знали старые проверенные методы построения окружностей Мальфатти, то скорее всего они стали бы реализовывать эти методы на компьютере. А так они придумали новый метод, не имеющий ручных аналогов. Голь (люди без компьютера) на выдумки хитра! Тут можно и вспомнить легенду о клумбовом яйце — о грубом способе решения задачи установки яйца на острый конец с надломом скорлупы.

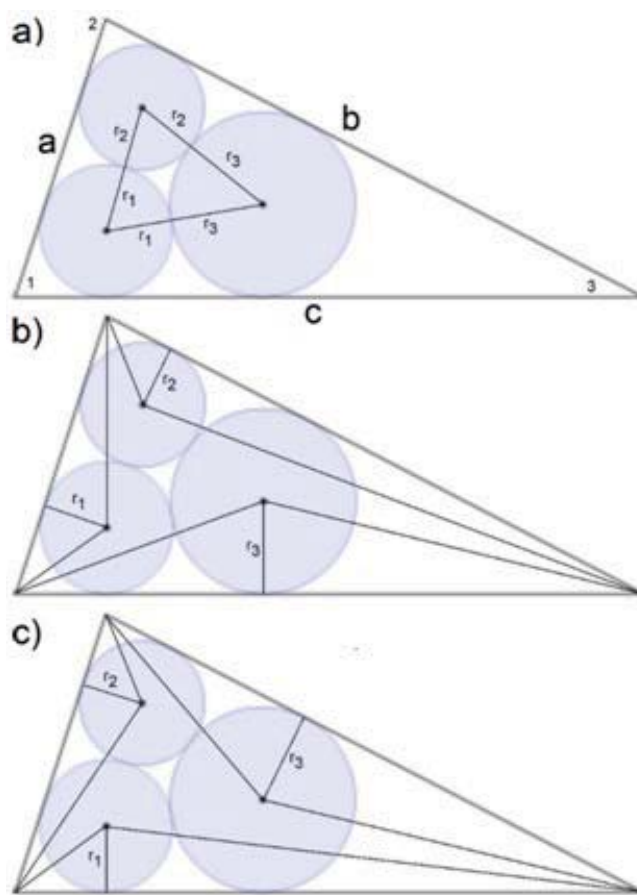


Рис. 11. Три схемы задачи об окружностях Мальфатти

Работа по вписыванию окружностей в треугольник выполнялась в рамках занятий по дисциплине «Инженерные расчеты» по новой образовательной технологии STEM, когда на одном уроке охватываются разные научно-технические дисциплины и направления [8]: S — Science, T — Technology, E — Engineering и M — Mathematics. И всё это делается с опорой на современные информационные технологии. Иногда сюда добавляют букву A — Art, искусство: STEAM, а не STEM. Проблема

гуманитаризации технического образования — это важный аспект в работе втуза, который непосредственно затронут в этой статье. Поэтому-то в ней и упоминаются Толстой, Достоевский и Грибоедов. Если вспомнить энергетику (авторы статьи, напоминаем, из Московского энергетического института), то следует отметить, что слово steam по-английски это и водяной пар, который в начале XIX века произвел в мире первую промышленную (теплотехническую) революцию (Industry 1): появились паровые машины, пароходы, паровозы... Технология обучения STEM/STEAM может способствовать развитию четвертой (цифровой) промышленной революции наших дней (Industry 4).

В Интернете, повторяем, можно найти множество описаний методов построения окружностей Мальфатти, в которых очень скоро запутается не только пресловутая княжна Марья, но и человек, более-менее знакомый с математикой. Проблема тут в том, что все эти методы (метод Штейнера, например) нацелены на ручное решение задачи на бумаге с линейкой, циркулем и т.д. Авторская же методика, основанная на переложении рутинной работы на компьютер, позволяет довольно просто встроить в заданный треугольник три окружности Мальфатти.

На рисунке 11 показана схема задачи, сводящая её к решению системы девяти уравнений с девятью неизвестными $r_1, x_{r1}, y_{r1}, r_2, x_{r2}, y_{r2}, r_3, x_{r3}, y_{r3}$ (см. рис. 12).

$$\begin{aligned}
 r_1 + r_2 &= \sqrt{(x_{r1} - x_{r2})^2 + (y_{r1} - y_{r2})^2} \\
 r_2 + r_3 &= \sqrt{(x_{r2} - x_{r3})^2 + (y_{r2} - y_{r3})^2} \\
 r_1 + r_3 &= \sqrt{(x_{r1} - x_{r3})^2 + (y_{r1} - y_{r3})^2} \\
 a &= \sqrt{((x_1 - x_{r1})^2 + (y_1 - y_{r1})^2) - r_1^2} + \sqrt{((x_2 - x_{r1})^2 + (y_2 - y_{r1})^2) - r_1^2} \\
 b &= \sqrt{((x_2 - x_{r2})^2 + (y_2 - y_{r2})^2) - r_2^2} + \sqrt{((x_3 - x_{r2})^2 + (y_3 - y_{r2})^2) - r_2^2} \\
 c &= \sqrt{((x_3 - x_{r3})^2 + (y_3 - y_{r3})^2) - r_3^2} + \sqrt{((x_1 - x_{r3})^2 + (y_1 - y_{r3})^2) - r_3^2} \\
 a &= \sqrt{((x_1 - x_{r2})^2 + (y_1 - y_{r2})^2) - r_2^2} + \sqrt{((x_2 - x_{r2})^2 + (y_2 - y_{r2})^2) - r_2^2} \\
 b &= \sqrt{((x_2 - x_{r3})^2 + (y_2 - y_{r3})^2) - r_3^2} + \sqrt{((x_3 - x_{r3})^2 + (y_3 - y_{r3})^2) - r_3^2} \\
 c &= \sqrt{((x_3 - x_{r1})^2 + (y_3 - y_{r1})^2) - r_1^2} + \sqrt{((x_1 - x_{r1})^2 + (y_1 - y_{r1})^2) - r_1^2}
 \end{aligned}$$

Рис. 12. Система девяти уравнений с девятью неизвестными, к которой сводится задача об окружностях Мальфатти

Первые три уравнения на рис. 12 получены при анализе исходного треугольника на рис. 11а, внутри которого прорисован еще один треугольник, вершины которого — это центры окружностей Мальфатти³. Четвертое, пятое и шестое уравнения вытекают из анализа рис. 11б, а седьмое, восьмое и девятое — из анализа рис. 11с. Здесь зафиксирован уже отмеченный нами факт, что длина

³Этот треугольник называется треугольником Мальфатти. В него можно вписать три новые окружности Маль-

каждой стороны исходного треугольника равна сумме длин катетов двух смежных прямоугольных треугольников со вторыми катетами, длины которых равны радиусу соответствующей искомой вписанной окружности — одной из трех.

На рисунке 13 показан графический результат решения задачи об окружностях Мальфатти для треугольника, параметры которого заданы на рис. 2.

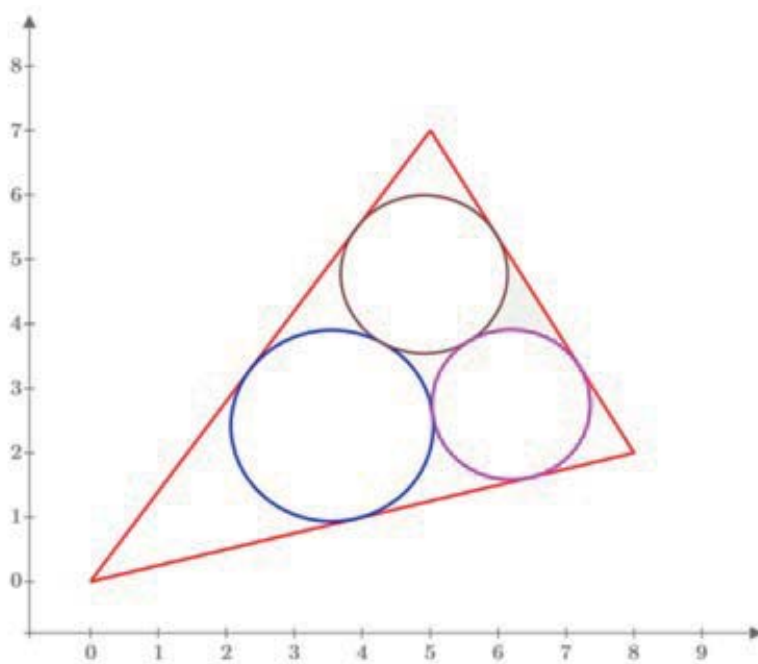


Рис. 13. Графическое отображение решения задачи Мальфатти

Примечание. Следует разделять задачу о построении окружностей Мальфатти (см. рис. 11 и 13) с задачей Мальфатти, которая подразумевает нахождение трех вписанных в треугольник непересекающихся окружностей с максимальной суммарной площадью. Эта задача рассматривалась на сайте статьи

<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Malfatti-circles/td-p/687281>

Она решается с помощью жадного алгоритма: в треугольник вписывается первая большая окружность (см. рис. 5), а затем в свободные уголки вписываются две окружности поменьше так, чтобы их радиусы получились максимально большими. Сайт статьи возник так: на форуме пользователей Mathcad была опубликована задача об окружностях Мальфатти с просьбой к каждому пользователю оставить некоторые замечания по её решению. В результате проделанной работы появились весьма интересные отклики, даже с использованием анимации. К слову, работа на специализированных форумах — это ещё один современный способ решения задач [9].

Изучающему математику интересно будет узнать, какие методы заложены в численное решение наших систем уравнений. Об этих методах можно почитать в руководстве пользователя пакета Mathcad, в среде которого есть возможность реализовать один интересный способ изучения этих методов, основанный на анимации. Давайте рассмотрим его на примере задачи об окружности, вписанной в треугольник [10].

На рис. 14 показана траектория движения центра окружности с начальным радиусом, равным 1 m от точки начального предположения ($x = 10$ m, $y = 10$ m) до “цели” — до решения ($x = 5.432$ m,

фатти с новым маленьким треугольником Мальфатти и т.д. Получится некий фрактал с бесконечным числом уменьшающихся окружностей и треугольников. Это будет некий фрактал Мальфатти с бесконечным числом окружностей и треугольников.

$y = 3.886$ m). Мы специально задали пакету Mathcad довольно трудное задание — поместили точку начального предположения не в треугольник, а вне его, чтобы посмотреть, как пакет “будет идти к цели”: “Много ты, компьютер, о себе воображаешь — посмотрим, проглотит ли ты вот это!”. А нужно было бы, конечно, задать значения первого предположения вблизи решения — где-то в центре исходного треугольника. Но “Цель ничто — движение всё!”.

Достаточно интересно просмотореть движение окружности в анимации, инструменты создания которой есть в среде Mathcad 15. На рис. 14 показаны шесть кадров этой анимации (номера итерации i равны 0, 21, 187, 482, 484 и 848 — решение задачи): окружность с радиусом 1 m находится в точке $x = 10$ m, $y = 10$ m. Затем (первые 21 кадра анимации) окружность срывается с места и ударяется о ближайшую сторону треугольника, подскакивает и ударяется о треугольник снова и снова, словно пытаясь пробить в нем дыру. Затем окружность уменьшается и как бы за счет этого пробивается внутрь треугольника, в котором продолжает биться, находя в нем в конце концов нужное место.

Такое «живое» поведение окружности при «численном» ее вписывании в треугольник, отображенном на рис. 14, видно только при хорошем пространственном воображении. Но можно рисунки с кадрами анимации вырезать из журнала, сшить их в блокнот, быстро перелистывать его, перегнув и зажав пальцами страницы и отпуская их. Такие книжки-игрушки с незамысловатыми сюжетами были очень популярны до изобретения кино и телевидения. Так примерно и поступает пакет Mathcad 15 при создании анимации, «сшивая в блокнот» отдельные кадры, а затем показывая их со скоростью, достаточной для анимирования. Анимация движения окружности в треугольнике (рис. 11) опубликована на сайте статьи по адресу

<https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Malfatti-circles/td-p/687281>

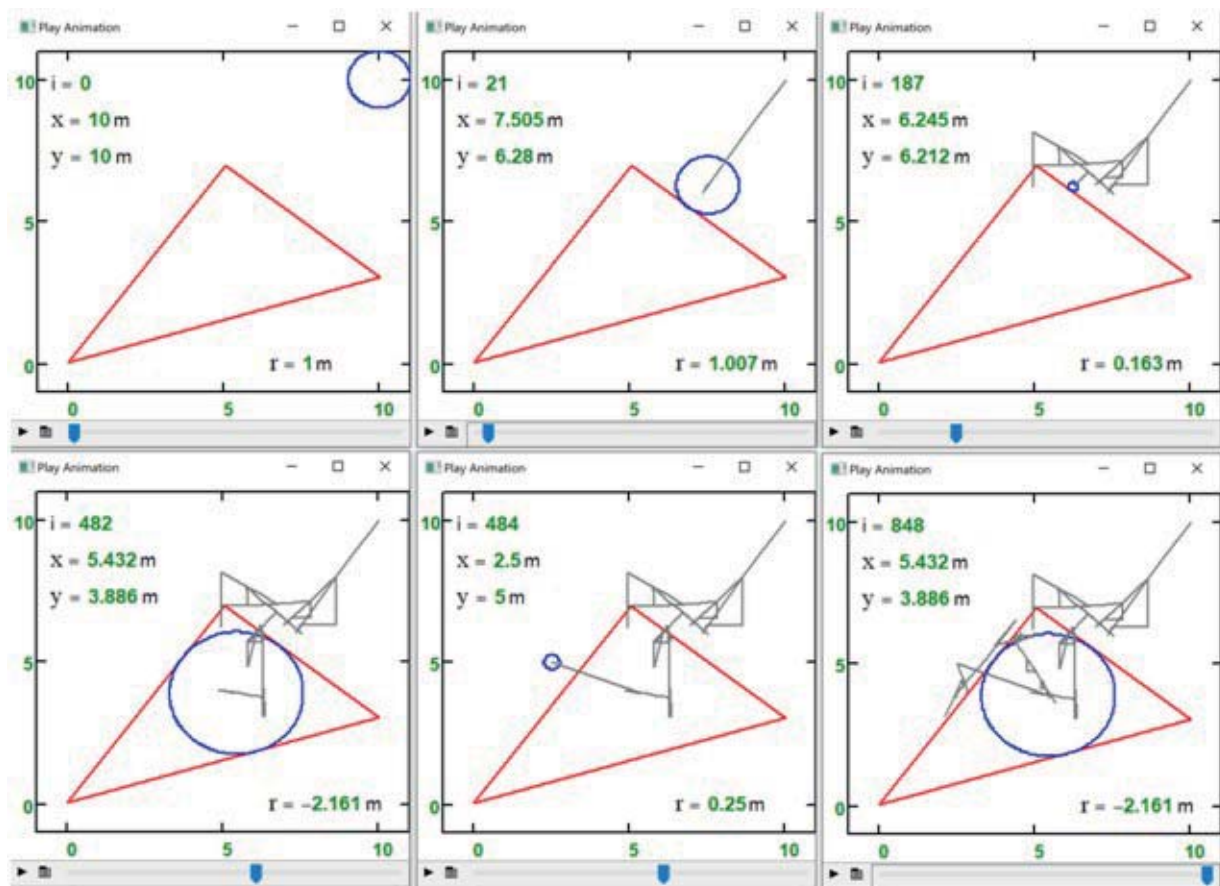


Рис. 14. Трассировка численного решения задачи об окружности, вписанной в треугольник

Литература

1. Бельский В.З., Заславский А.А. Решение обобщенной задачи Мальфатти с помощью комплексной (гиперболической) тригонометрии // Математическое просвещение. - сер. 3. - 1998. - выпуск 2. - с. 141–154.
2. Ефремов Д.Д. Новая геометрия треугольника / Изд. 2. Серия: Физико-математическое наследие (репринтное воспроизведение издания). - Москва: Ленанд, 2015. - 352 с.
3. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.П. Новые встречи с геометрией. - М.: Наука, 1978. - Т. 14 (Библиотека математического кружка).
4. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника. - М.: МЦНМО, 2002.
5. Бельский В.З., Заславский А.А. О задаче Мальфатти // Квант. - № 4. - 1994.
6. Очков В.Ф., Нори М. Путешествие в мир науки и искусства на стопроходящей машине Чебышёва // Информатика в школе. - № 8. - 2018 г. - С. 53-61. URL: <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Tcheb.pdf>
7. Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. - Том 4. - № 2. - 2017. - С. 5-26. URL: <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Hybrid.pdf>
8. Valery Ochkov. 2⁵ Problems for STEM Education. - Chapman and Hall/CRC, 2020. - 374 p. URL: <https://www.routledge.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>
9. Очков В.Ф., Герк С. Активность на форумах — важная часть учебы и последующей инженерной деятельности студента // Открытое образование, № 5. - 2014. - С. 93-101. URL: <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Ochkov-Gurke-OE-5-2014.pdf>
10. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Путешествие окружности в треугольнике, а треугольника в ложбине или Сам себе компьютерный режиссер // Открытое образование. - № 2. - 2015. - С. 24-32. URL: <http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/TrianglInCircle.pdf>

Очков Валерий	Тихонов Антон
Леонова Дарья	Шубина Мария
Кулишов Александр	Зайцев Марк
Островский Михаил	Лымарев Дмитрий

О закономерностях появления первых цифр простых чисел

В. А. Попов

В работе для $k = 1, 2, \dots, 9$ и больших натуральных чисел n исследуется задача о величине вероятности, что простое число, не превосходящее $k \cdot 10^n$, начинается на десятичную цифру m .

Вопреки следующему высказыванию, приписываемому Леонарду Эйлеру: “Математики уже давно тщетно пытаются найти закономерности в последовательности простых чисел, но у меня есть основания полагать, что это тайна, в которую человеческий разум никогда не сможет проникнуть” [1, с. 135], интенсивные исследования по проблематике простых чисел продолжаются.

Объяснений этому — множество. Например, выявление все больших простых чисел ведет к разработке новых алгоритмов для расчетов и компьютерных вычислений. Наличие большого списка простых чисел зачастую позволяет опровергать гипотезы, не являющиеся истинными.

В одном из распространенных методов генерации псевдослучайных чисел (линейный конгруэнтный метод) создаваемая этим методом случайная последовательность ведёт себя вполне непредсказуемо именно тогда, когда в нем значение одного из применяемых параметров является большим простым числом [2].

В век цифровых технологий во многих аспектах жизни требуется защита информации. Для этого в современных криптографических алгоритмах применяются ключи, т.е. некая секретная информация, используемая при шифровании (дешифровании) сообщений, постановке и проверке цифровой подписи, вычислении кодов аутентичности. Эти ключи вырабатываются на основе использования многозначных случайных простых чисел.

В работе рассматривается задача о закономерностях появления конкретной первой цифры в записях простых чисел из рассматриваемого достаточно длинного отрезка натурального ряда чисел.

Она возникла в связи с работой [3], в которой, в рамках рассмотрения цикла учебных задач при овладении компьютерными технологиями, были вычислены относительные частоты появления конкретных первых цифр у простых чисел, меньших чем 10^7 :

Таблица 1. Статистика первых цифр простых чисел, меньших 10^7

1-я цифра простого числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
процентная доля на $[1; 10^7]$	12.04	11.59	11.33	11.15	10.98	10.87	10.77	10.69	10.58

Эти доли, в отличие от аналогичных, например, для натуральных степеней числа 2 и чисел Фибоначчи [3, таблицы 1 и 2], оказались сильно отличающимися от значений закона Бенфорда (для десятичной системы счисления) [4]. По этому закону вероятность того, что первая цифра числа $x \geq 1$ равна m ($m \in \{1, 2, \dots, 9\}$), составляет $\lg(m+1) - \lg m = \lg(1 + 1/m)$ (в процентах, с точностью до 0,1 эти значения представлены ниже):

Таблица 2. Статистика первых цифр, соответствующая закону Бенфорда

1-я цифра числа $x \geq 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
процентная доля	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

Размышления над причинами указанных отличий привели к выявлению ряда закономерностей частоты появления у простых чисел определенной первой цифры, которые были представлены в

докладе на Национальной (Всероссийской) научной конференции “Математическое моделирование и информационные технологии (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар)” [5].

Пусть n — произвольное натуральное число, а $m, k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Обозначим через $p_n^{(m)}(k)$ вероятность события: “Простое число, меньшее чем $k \cdot 10^{n+1}$, начинается на цифру m ”. Далее будем применять также известное обозначение (К. Гаусса) $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих x .

Рассмотрим сначала случай $k = 1$.

Заметим, что число не однозначных простых чисел, начинающихся на цифру m и меньших 10^{n+1} , равно

$$S_n^{(m)}(1) = \sum_{i=1}^n (\pi((m+1) \cdot 10^i) - \pi(m \cdot 10^i)), \quad (1)$$

а соответствующая вероятность $p_n^{(m)}(1) = (a_m + S_n^{(m)}(1))/\pi(10^{n+1})$ где $a_m = 1$ при $m = 2, 3, 5, 7$ и $a_m = 0$ в остальных случаях.

Очевидно, что ненулевыми значениями параметра a_m при оценке искомых вероятностей для больших n можно пренебречь, поэтому слагаемое $a_m/\pi(10^{n+1})$ в последующих выкладках будет пропущено.

Для оценки поведения величин $S_n^{(m)}(1)/\pi(10^{n+1})$ при $n \rightarrow \infty$ применим:

- асимптотику, доказанную Ж. Адамаром и Ш. Валле-Пуссенном в 1896 г. [6, с. 179]:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}; \quad (2)$$

- оценочные неравенства:

$$\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1,25506 \cdot \frac{n}{\ln n} \quad \text{при } n \geq 17, \quad (3)$$

[7, с. 69], [8, с. 127].

В силу (2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, для которого

$$n > n_0 \Rightarrow \pi(n) < (1 + \varepsilon) \frac{n}{\ln n}. \quad (4)$$

Учитывая замечание выше относительно a_m , при больших n для $n > n_0$, в силу (1), (3) и (4) имеем:

$$\begin{aligned} p_n^{(m)}(1) &= \frac{1}{\pi(10^{n+1})} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} (\pi((m+1) \cdot 10^i) - \pi(m \cdot 10^i)) + \\ &\quad \frac{1}{\pi(10^{n+1})} \cdot \sum_{i=n_0+1}^n (\pi((m+1) \cdot 10^i) - \pi(m \cdot 10^i)) < \\ &< \frac{(n+1) \ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{1,25506(m+1) \cdot 10^i}{\ln(m+1) + i \cdot \ln 10} - \frac{m \cdot 10^i}{\ln m + i \cdot \ln 10} \right) + \\ &+ \frac{(n+1) \ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=n_0+1}^n \left(\frac{(1+\varepsilon)(m+1) \cdot 10^i}{\ln(m+1) + i \cdot \ln 10} - \frac{m \cdot 10^i}{\ln m + i \cdot \ln 10} \right) < \\ &< A_n^{(m)}(\varepsilon) + (1+\varepsilon) B_n^{(m)}, \end{aligned}$$

где $A_n^{(m)}(\varepsilon)$ — величина первого слагаемого предыдущей суммы, а

$$B_n^{(m)} = \frac{(n+1) \ln 10}{10^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{10^i}{\ln(m+1) + i \cdot \ln 10}.$$

Ясно, что для любых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $m \in \{1, 2, \dots, 9\}$ имеем $A_n^{(m)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Последовательности вида $B_n^{(m)}$ рассматривались нами в работе [9]. Вычисления в Excel для различных m с ростом n до 250 показали, что эти величины все меньше отличаются друг от друга (см. [9, таблица 7]) и от числа $1/9$.

На основе указанных фактов была сформулирована следующая

Теорема 1. Для каждого фиксированного $m \in \{1, 2, \dots, 9\}$ последовательности вероятностей $p_n^{(m)}(1)$ событий “Простое число, меньшее чем 10^{n+1} , начинается на цифру m ” при $n \rightarrow \infty$ сходятся к числу $1/9$.

Доказательство. Заметим, что $B_n^{(1)} \geq B_n^{(2)} \geq \dots \geq B_n^{(9)}$. С другой стороны, методом математической индукции для всех натуральных чисел n стандартно доказывается оценка

$$B_n^{(1)} < \frac{n+2}{9n}. \quad (6)$$

Тогда для произвольного ε при $n > n_0$ из (5) и (6) получаем

$$p_n^{(m)}(1) < A_n^{(m)}(\varepsilon) + (1 + \varepsilon) \frac{n+2}{9n}.$$

Отсюда и из свойства $A_n^{(m)}(\varepsilon) \rightarrow 0$ выводим неравенства:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n^{(m)}(1) \leq \frac{1 + \varepsilon}{9}.$$

Так как они обоснованы для любого $\varepsilon > 0$, то для каждого m получаем следующую оценку верхнего предела:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_n^{(m)}(1) \leq \frac{1}{9}. \quad (7)$$

Покажем, что на самом деле при любом фиксированном $m \in \{1, 2, \dots, 9\}$ последовательность чисел $p_n^{(m)}(1)$ сходится к $1/9$.

Действительно, если предположить противное, то для некоторой ненулевой цифры m_0 и некоторого числа $\delta > 0$ найдется последовательность номеров k_n , для которых

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} p_{k_n}^{(m_0)}(1) = \frac{1}{9} - \delta.$$

Тогда, начиная с некоторого номера n_1 , для всех n будут выполняться неравенства:

$$p_{k_n}^{(m_0)}(1) = \frac{1}{9} - \delta/2.$$

Так как все числа вида $p_{k_n}^{(m)}(1) \in [0; 1]$, то можно выделить (последовательно, за не более, чем 8 шагов) подпоследовательность номеров, обозначим ее (j_{k_n}) , для которой при каждом фиксированном $m \neq m_0$ подпоследовательности чисел $p_{j_{k_n}}^{(m)}(1)$ будут тоже сходящимися.

В силу условия (7) их пределы не превышают числа $1/9$. Поэтому найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что для всех $m \neq m_0$ выполняется неравенство

$$p_{j_{k_{n_2}}}^{(m)}(1) < \frac{1}{9} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right).$$

Однако тогда возникает следующее противоречие:

$$1 = \sum_{m=1}^9 p_{j_{k_{n_2}}}^{(m)}(1) < \left(\frac{1}{9} - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{8}{9} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) < 1.$$

Таким образом, сделанное выше предположение ложно, поэтому для каждой цифры m выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^{(m)}(1) = 1/9$.

Используя свойства (2) и (3), показанным выше методом для каждого из значений $k = 2, 3, \dots, 9$ можно пытаться выявить аналогичные верхние оценки для $p_n^{(m)}(k)$ и их предельные величины соответственно для промежутков натурального ряда от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ (эти величины приведены далее в таблице 3). Применим другой метод поиска этих предельных значений.

Истинна следующая теорема, позволяющая оценивать значения $p_n^{(m)}(k+1)$ с помощью уже известных величин $p_n^{(m)}(k)$:

Теорема 2. Пусть n — произвольное достаточно большое натуральное число, а $m, k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Если известны значения $p_n^{(m)}(k)$ — вероятности событий “Простое число, меньшее чем $k \cdot 10^{n+1}$, начинается на цифру m ”, то для простых чисел, меньших чем $(k+1) \cdot 10^{n+1}$, соответствующие аналогичные вероятности оцениваются следующим образом:

$$\begin{cases} p_n^{(m)}(k+1) \sim \frac{k}{k+1} p_n^{(m)}(k) & \text{при } m \neq k; \\ p_n^{(k)}(k+1) \sim \frac{k}{k+1} (1 + k \cdot p_n^{(k)}(k)). \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что простых чисел, начинающихся на цифру m , на промежутке от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ всего по $p_n^{(m)}(k) \cdot \pi(k \cdot 10^{n+1})$, а на промежутке от $k \cdot 10^{n+1}$ до $(k+1) \cdot 10^{n+1}$ все простые числа начинаются на цифру k и их там $\pi((k+1) \cdot 10^{n+1}) - \pi(k \cdot 10^{n+1})$.

1. Следовательно, для искоемых вероятностей при $m \neq k$ имеем:

$$p_n^{(m)}(k+1) = \frac{p_n^{(m)}(k) \cdot \pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})}.$$

Отсюда, в силу (3) и (4) для любого ε найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon)$, для которого при $n > n_1$ истинны неравенства:

$$\frac{k}{(k+1)(1+\varepsilon)} M_n < \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} < \frac{k(1+\varepsilon)}{k+1} M_n,$$

где $M_n = \frac{\ln((k+1) \cdot 10^{n+1})}{\ln(k \cdot 10^{n+1})}$.

Так как при $n \rightarrow \infty$ последовательность чисел M_n сходится к 1, то эти оценки означают, что начиная с некоторого номера $n_0 > n_1$ имеем

$$\frac{k(1-\varepsilon)}{(k+1)(1+\varepsilon)} < \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} < \frac{k(1+\varepsilon)^2}{k+1}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^{(m)}(k+1)}{p_n^{(m)}(k)} = \frac{k}{k+1}, \quad \text{т.е. } p_n^{(m)}(k+1) \sim \frac{k}{k+1} p_n^{(m)}(k).$$

2. Для $m = k$ имеем:

$$\begin{aligned} p_n^{(k)}(k+1) &= \frac{p_n^{(k)}(k) \cdot \pi(k \cdot 10^{n+1}) + \pi((k+1) \cdot 10^{n+1}) - \pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})} = \\ &= (p_n^{(k)}(k) - 1) \frac{\pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})} + 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} = \frac{\pi(k \cdot 10^{n+1})}{\pi((k+1) \cdot 10^{n+1})}.$$

Тогда, как и в первом случае для любого $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого номера n_0 будут выполняться неравенства:

$$\frac{k(1 - \varepsilon)}{(k+1)(1 + \varepsilon)} < \frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} < \frac{k(1 + \varepsilon)^2}{k+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - p_n^{(k)}(k+1)}{1 - p_n^{(k)}(k)} = \frac{k}{k+1}, \text{ а тогда } p_n^{(k)}(k+1) \sim \frac{1}{k+1}(1 + k \cdot p_n^{(k)}(k)).$$

Теорема 2 обоснована.

Факты существования предельных значений для $p_n^{(m)}(1)$ из Теоремы 1 и свойства (8) позволяют вывести существование (и вычисление) предельных значений для $p_n^{(m)}(k)$ при фиксированных m и $k = 2, 3, \dots, 9$:

Следствие. *Имеет место следующая таблица приближенных ответов для исследуемых вероятностей $p_n^{(m)}(k)$ на промежутках от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ при очень больших n (т.е. из предельных величин для значений $k = 2, 3, \dots, 9$ на промежутках от 1 до $k \cdot 10^{n+1}$ при $n \rightarrow \infty$):*

Таблица 3. Сводная таблица предельных значений для первых цифр простых чисел

1-я цифра m простого числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Оценка $p_n^{(m)}(1)$ на промежутке $[1; 1 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2. Оценка $p_n^{(m)}(2)$ на промежутке $[1; 2 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3. Оценка $p_n^{(m)}(3)$ на промежутке $[1; 3 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{10}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
4. Оценка $p_n^{(m)}(4)$ на промежутке $[1; 4 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5. Оценка $p_n^{(m)}(5)$ на промежутке $[1; 5 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$
6. Оценка $p_n^{(m)}(6)$ на промежутке $[1; 6 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$
7. Оценка $p_n^{(m)}(7)$ на промежутке $[1; 7 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{10}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{63}$
8. Оценка $p_n^{(m)}(8)$ на промежутке $[1; 8 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{72}$
9. Оценка $p_n^{(m)}(9)$ на промежутке $[1; 9 \cdot 10^{n+1}]$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{1}{81}$

В заключение отметим, что выше (в случае десятичной системы) были установлены некоторые закономерности последовательности чисел, образованной из первых цифр простых чисел, рассматриваемых в порядке возрастания:

$$2, 3, 5, 7, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 1, \dots \quad (9)$$

(здесь написаны ее члены, соответствующие первым простым числам до числа 101 включительно).

Они существенно отличаются от закономерности Бенфорда, являются новыми в теории натуральных чисел и могут иметь важное значение, например, в криптологии, так как по Теореме 1 при выборе многозначного простого числа (который не должен быть отгадан “противной стороной”) в качестве основы шифра-ключа из промежутка $[1; 10n]$ при больших n , для первых цифр нет особых предпочтений, они равновероятны, что не выполняется в случае других промежутков (см. следствие к Теореме 2).

Видимо, аналогичные закономерности необходимо выявить для последовательностей вторых (соответственно, третьих и т.д.) цифр последовательности все простых чисел.

Имеет смысл ввести для изучения число $\tau = 0,23571111223344455667778891\dots$, десятичные цифры которого образованы из членов последовательности (9).

По Теореме 1 для очень больших n среди первых $\pi(10^{n+1})$ десятичных цифр числа τ ненулевые цифры встречаются примерно поровну, а ввиду данных таблицы 3 это число иррационально.

Далее, в силу (2) элементарно доказывается, что для любого фиксированного k при $n \rightarrow \infty$ величины

$$\pi((k+1) \cdot 10^{n+1}) - \pi(k \cdot 10^{n+1}) \rightarrow \infty.$$

Это означает (см. первый абзац доказательства Теоремы 2), что в записи числа τ для любой цифры $k \neq 0$ встречаются фрагменты любой длины, состоящие из одинаковых цифр k .

Было бы интересно найти другие свойства этого числа τ .

Литература

1. Энрике Грасиан. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности: Мир математики: в 40 т. Т. 3. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
2. Гончарук В.С., Атаманов Ю.С., Гордеев С.Н. Методы генерации случайных чисел // Молодой ученый. – 2017. – № 8. – С. 20-23.
URL: <https://moluch.ru/archive/142/40025/>
3. Попов В.А., Канева Е.А. Исследовательские задания на занятиях по овладению компьютерными технологиями // Математическое моделирование и информационные технологии: сборник статей Международной научной конференции 10-11 ноября 2017 г., г. Сыктывкар / отв. ред. А.В. Ермоленко. – Сыктывкар: СГУ им. Питирима Сорокина. – 2017. – С. 109–113.
4. Кувакина Л.В., Долгополова А.Ф. Закон Бенфорда: Сущность и применение // Современные наукоемкие технологии. – № 6. – 2013. – С. 74–76.
URL: <https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=31987>
5. Попов В.А. О статистике первых цифр простых чисел // Математическое моделирование и информационные технологии: Национальная (Всероссийская) научная конференция (7–9 ноября 2019 г., г. Сыктывкар): сборник материалов в [Электронный ресурс]: текстовое научное электронное издание на компакт-диске / отв. ред. А.В. Ермоленко; Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования “Сыктыв. гос. ун-т им. Питирима Сорокина”. – Электрон. текстовые дан. (1,6 Мб). – Сыктывкар: Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2019. – 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – С. 35-36.
6. Цагер Д. (Zagier Don). Первые 50 миллионов простых чисел // УМН. – 39. – 6(240). – 1984. – 175–190.
7. Rosser J. Barkley S.L. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. – 1962. – Vol. 6. – P. 64-94.
8. Рибенбойм П. (Ribenoim P.) Рекорды простых чисел (новая глава в книге рекордов Гиннеса) // УМН. – 42. – 5(257). – 1987. – 119–176.
9. Попов В.А., Канева Е.А. “Длинная” арифметика в исследованиях статистики первых цифр степеней двойки, чисел Фибоначчи и простых чисел // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – 2(31). – с. 58-63.

Попов Вячеслав Александрович,
доцент кафедры физико-математического
образования СГУ им. Питирима Сорокина,
г. Сыктывкар, канд. физ.-матем. наук, доцент.

E-mail: kgpi-pva@yandex.ru

**Ученый-методист Жаров Виктор Александрович
(23.09.1920 – 30.12.1986)**

С. В. Жаров

Краткая биография советского ученого-методиста в области математического образования В.А. Жарова с указанием основных печатных работ.

Доцент Жаров Виктор Александрович в 1942 году с отличием закончил физико-математический факультет по специальности “Математика” Ярославского государственного педагогического института имени К.Д. Ушинского (ныне университет).



Рис. 1. В.А. Жаров

С 1942 по 1948 год работал секретарем Ярославского обкома ВЛКСМ. С 1949 по 1953 год занимал должность заведующего учебной частью мужской средней школы № 33. Здесь и проявился его педагогический талант. С 1953 по 1954 год был назначен заведующим городским отделом народного

образования города Ярославля. С декабря 1954 года — аспирант кафедры методики преподавания математики ЯГПУ имени К.Д. Ушинского под руководством известного ученого профессора Скопеца З.А., с 1955 года — ассистент, а уже с 1957 года — старший преподаватель этой кафедры. С 1962 по 1965 год В.А. Жаров был избран деканом физико-математического факультета.

Большой педагогический опыт преподавания математики в школе позволили в достаточно короткие сроки написать и представить кандидатскую диссертацию.

В 60-е годы в ЯГПИ (ныне университет) начал работать профессор, доктор физико-математических наук З.А. Скопец. До 1964 года он возглавлял кафедру методики математики. Отметим, что эти годы являются весьма плодотворными для научной и научно-методической творческой деятельности З.А. Скопеца. В этот период стали активно внедряться новые прогрессивные геометрические идеи в процесс преподавания курса элементарной математики в педагогическом вузе и в средней школе. Под руководством З.А. Скопеца Виктор Александрович Жаров защищает удивительную диссертацию, которая была опубликована в виде учебного пособия “Основные принципы построения задачника по геометрии” (1961 год), см. рис. 3. В дальнейшем идеи этого труда легли в основу многих учебно-методических пособий, выпущенных в издательстве “Просвещение” и на кафедре методики преподавания математики, которую В.А. Жаров возглавлял с 1965 по 1970 год.

В 1970 году Жаров В.А. был назначен проректором по учебной работе, в этой должности он проработал до 1985 года. Надо отметить тот факт, что именно в этот период Ярославский государственный педагогический институт был награжден орденом Трудового Красного Знамени за заслуги в учебной и научной работе. На каждом факультете успешно работали не по одной научной школе под руководством профессоров.



Рис. 2. Доцент В.А. Жаров и профессор З.А. Скопец.

В сотрудничестве с профессором З.А. Скопцом доцентом В.А. Жаровым была создана глубокая и содержательная монография “Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)”, рис. 4. Эта книга стала настольным руководством учителя математики, как великолепный учебник-справочник, содержащий огромный фактический материал, в значительной мере представленный в виде задач. Впервые в элементарной геометрии у нас в стране тщательно исследовались задачи абсолютной геометрии, которые оказались столь современными и охватывающими столь большой круг вопросов,

что вызывали отклик в практической работе учителей математики всей страны. К великому сожалению, вторая часть — стереометрия — сохранилась в рукописном виде этих же двух авторов с кратким пояснением решения.

Другой известной книгой, выпущенной издательством “Просвещение”, была “Вопросы и задачи по геометрии”, рис. 5, которая пользовалась популярностью среди учителей средней школы всей России. Основная идея состояла в том, чтобы через задачи, от простого к сложному, донести основные геометрические понятия и показать красоту, доступность и понятность излагаемого материала. Это касалось как планиметрии, так и стереометрии. Учителя, продолжающие долгий путь на ниве преподавания математики, несомненно имеют в своем активе это пособие.

Необходимо особо отметить лекции и практические занятия В.А. Жарова. Абсолютная грамотность, четкость и аккуратность в письме как в тетради, так и на доске, несмотря на то, черновик это или нет. Кроме того всегда соблюдались четкие рисунки и решения, даже если они выполнялись в черновом варианте. Данная черта была общей у него и профессора Захара Александровича Скопеца. Почерки у них были всегда очень разборчивыми и аккуратными. Если предстояло кому-то красиво подписать поздравление, то Виктор Александрович очень искусно это делал.

Личные воспоминания автора этой заметки всегда связаны с методами решения школьных задач, их геометрической красотой и подходом к ученикам. Очень жаль, что тяжелая болезнь слишком рано унесла жизнь Виктора Александровича Жарова.

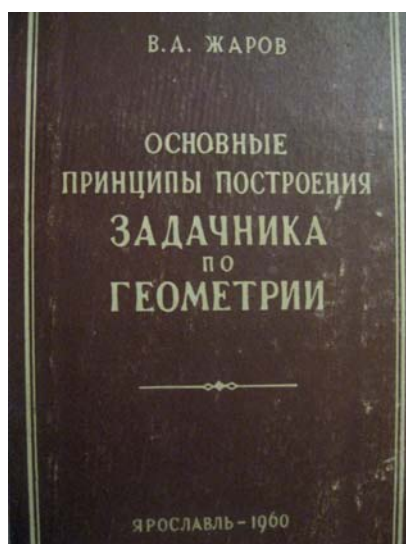


Рис. 3



Рис. 4



Рис. 5

*Жаров Сергей Викторович,
доцент Ярославского государственного
педагогического университета имени
К.Д. Ушинского, кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: szharv@rambler.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2021 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2021 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

I. Kostenko. Yuli V. Pokorny as a Thinker and Teacher	2
On the occasion of the 80th birthday of the remarkable Voronezh mathematician Yuli Vitalievich Pokorny (1940–2010). The article reveals an important aspect of the work of Yu.V. Pokorny in the field of mathematics pedagogy.	
From the editor. Nikolai Kh. Rozov	9
A short obituary of Nikolai Khristovich Rozov, the famous Russian mathematician and teacher.	
K. Gorshenin. From Simple to Complex in the Tank Filling Problem	11
A problem is considered that leads to equations that contain an integer part of a variable or linear combination of integer and fractional parts of a variable. For such equations, the conditions of existence and a number of solutions are investigated.	
S. Dvoryaninov. Two Math Notes	24
Two notes on various issues of mathematics education.	
P. Karavaev, N. Mastinen. Intersection Point of Median, Bisector, and Height of a Triangle as a Basis of Didactic Material for Repeating Planimetry Themes	31
The article presents didactic material for organizing the repetition of planimetry topics. The material is a list of geometric problems created using the same geometric object — the intersection points of the median, bisector, and height of a triangle.	
N. Ilyushechkin. Hermite Interpolation Polynomial for Holomorphic Functions in a Simply Connected Domain	35
Simple formulas are found for the coefficients of the Hermite interpolation polynomial if the function being approximated is holomorphic in a simply connected domain.	
S. Levashkin. Kolmogorov and Modern Informatics	42
Andrey Kolmogorov has introduced such fundamental concepts as Kolmogorov's algorithm, Kolmogorov machine, Kolmogorov complexity, which ultimately have led him to rethink mathematical science and the foundations of new mathematics of computers.	
S. Shvedenko. Natural Logarithm as a Starting Point for Defining Elementary Functions	55
A method for accurately defining and deriving the properties of basic elementary functions of calculus is proposed, in which the initial is a special definition of natural logarithm.	
B. Druzhinin. How to Solve a Third Degree Equation	61
The article briefly outlines a method for solving third-degree equations in combination with a methodological technique that encourages students to find a solution. The solution is accompanied by excursions into the corresponding section of the history of mathematics.	
Current Information	67

