

Математическое Образование

**Журнал Фонда математического
образования и просвещения**

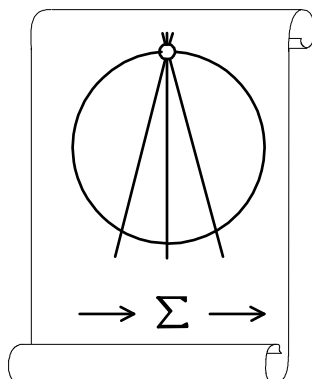
Год двадцать пятый

№ 3 (99)

июль-сентябрь 2021 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 3 (99), 2021 г.

© “Математическое образование”, составление, 2021 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 15.10.2021 г.

Стиль верстки разработан С. Кулешовым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 6,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (99), июль – сентябрь 2021 г.

Содержание

Памяти Николая Николаевича Константинова

От редакции. Ушел из жизни Николай Николаевич Константинов 2

Ю. А. Неретин. О Константиновской системе и Беломорских стройотрядах 3

Учащимся и учителям средней школы

С. В. Дворянинов. Ободряем ученика 14

Л. Штейнгарц. Антиматические квадраты и их обобщения 21

Студентам и преподавателям математических специальностей

П. В. Бибигов. О полной производной и полиномиальных неравенствах 36

Г. А. Клековкин. Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra 48

В. Н. Новиков. О неравенствах в тетраэдре 58

И. Б. Писаренко, М. И. Зайдель. От линейной системы через геометрию
к определителю 70

А. А. Рубан. Какая функция больше — показательная или степенная? 86

Б. Ж. Сагиндыков. Метод аффинных преобразований для решения диофантовых
уравнений применительно к многочленам второй степени 89

Из истории математического образования

Т. И. Кузнецова. Любимый учитель. Сивашинскому Израилу Хаимовичу – 112 лет 95

Память

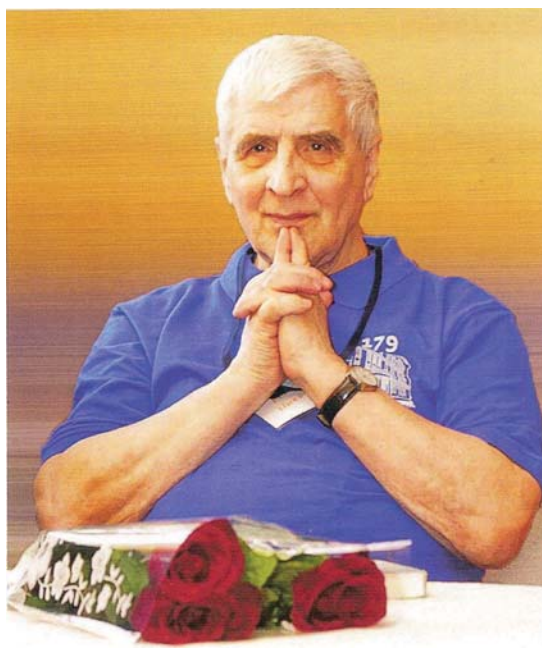
От редакции. Владимир Георгиевич Попов (03.10.1946 – 26.09.2021) 103

Памяти Николая Николаевича Константинова

Ушел из жизни Николай Николаевич Константинов

От редакции

3 июля этого года после тяжелой продолжительной болезни скончался Николай Николаевич Константинов (родился 2 января 1932 г.), бессменный член редколлегии нашего журнала.



Николай Николаевич Константинов (портрет из приложения к журналу "Математическое образование", выпущенного в честь 85-летия НН.)

Сколько-нибудь полное описание жизни и деятельности Н.Н. Константинова не входит в задачу (в некотором смысле, необъятную) данного краткого некролога. Один из главных организаторов системы математических классов в Москве, которая вошла в историю образования под вполне заслуженным названием "Константиновская система", организатор многопредметного Турнира им. Ломоносова, а также математической олимпиады высочайшего международного уровня "Турнир городов", летнего математического лагеря в Эстонии, многолетний научный руководитель ГБОУ Школа № 179 г. Москвы — вот несколько его ипостасей.

Много материалов о его жизни и деятельности собрано на сайте

konstnn.ru/viewall.php

Специальный выпуск нашего журнала — № 40, 2007 г. — посвящен его 75-летию. "Константиновские сборники", которые в последние годы были изданы в 179-й школе, находятся на сайте нашего журнала по адресу

matob.ru/supplement.html

Ниже предлагаем читателям статью Ю.А. Неретина, в которой рассказано о Константиновской системе и строительных отрядах на Беломорской биостанции.

О Константиновской системе и Беломорских стройотрядах

Ю. А. Неретин

В статье рассказывается о «Константиновской системе» — необычной общественной образовательной структуре, созданной Николаем Николаевичем Константиновым (1932–2021) и работавшей в математическом образовании 60–80 гг. XX в., а также о беломорских математических стройотрядах 1969–1987 гг., представлявших из себя своего рода ответвление этой системы.

3 июля 2021 г. на 90-м году жизни от ковида скончался Николай Николаевич Константинов, сыгравший видную роль в истории Беломорской биологической станции МГУ¹.

Я довольно много сотрудничал с ним с 1973–74 гг. по 1980 г., и отчасти вплоть до 1991–93 гг., и хотел бы рассказать об этом выдающемся человеке и его деятельности в той степени, в которой я мог ее наблюдать (с некоторыми экстраполяциями, основанными на его рассказах и рассказах других людей, сотрудничавших с ним). Начну с событий, которые я не наблюдал и наблюдать не мог.

На Беломорскую биостанцию (ББС) Константинов («Конст», «НикНик») приехал в стройотряд в июле 1967 г. С ним были два его бывших ученика по математическому классу, в тот момент уже закончившие первый курс мехмата МГУ. Он рассказывал какую-то запутанную историю о том, как это получилось [2], вероятно его приезд был связан с проблемами со здоровьем у одного из этих учеников.

Еще в Москве мы пообщались с Перцовым, организовывали погрузку вагона². Он произвел на меня очень хорошее впечатление. Я был, конечно, старше многих стройотрядовцев³. Тогда Бурковский⁴ был руководителем стройотряда, и отряд почти целиком состоял из девочек — учениц вечернего отделения биофака. Вот мы немножко и разбавили их.

¹Эта статья первоначально была написана для сайта Беломорской биологической станции МГУ им. Н.А.Перцова (ББС МГУ), сайт <http://wsbs-msu.ru/>, лента за 07.07.2021.

ББС — морская биостанция, расположена на северной границе Карелии на Полярном круге на мысу Киндо. На картах начиная с 60х годов отмечается как «поселок Приморский». Ближайшая ж.д. станция — Пояконда, 15 км по прямой. Связь биостанции с миром — по морю малыми судами и моторками (в начале 50х еще и гребными лодками), зимой — по зимнику (лошадью в 50х, потом также на тракторе или грузовике, сейчас — буранами).

Основана в 1938 г. проф. Л.А. Зенкевичем (был вкопан заявочный столб). В следующем году там уже проходила практику группа студентов и работала водолазная станция (с оборудованием, выданным ЭПРОНОм). В Войну биостанция оказалась в прифронтовой полосе, там находился авиационный наблюдательный пост.

Летом 1951 г. новым директором стал Николай Андреевич Перцов (1924–1987), только что окончивший биофак МГУ. Фронтвик, участник боев под Москвой. Туберкулезник. В момент его приезда станция представляла из себя избу местного жителя (он же сторож) и несколько дощатых построек сарайного типа в тяжелом состоянии. К середине 70х Перцов превратил ее в знаменитую научно-учебную базу (которая, в частности, принимала ежегодно на практику сотни студентов), см. [1], [2]. В определенном смысле [3], биостанция начала представлять из себя и культурный феномен.

Поселок Приморский строил сам себя (при сильном недостатке финансирования) и работал как небольшая автономная строительная организация. Перцов совмещал в себе роль директора научно-образовательной организации с фактической должностью хозяйственника и руководителя строительных работ. С самого начала он подключал к работам студентов (местность там красивая, а Перцов, будучи ярким деятелем, умел привлекать к себе людей). Вскоре это превратилось в стройотряды, которые сначала состояли из студентов-биологов (по-видимому, больше биологинь), а потом, вслед за Константиновым, там появились математики и физики.

²Каждую весну из Москвы в Пояконду отправлялся вагон с разнообразными грузами.

³Константинову было 35 лет.

⁴И.В. Бурковский, гидробиолог, 1942 г. рождения, в 1966 г. окончил биофак МГУ.

Константинов был человеком рукастым. Он рассказывал много историй о своих поездках по стране, был он в частности в стройотряде на Сахалине, который занимался лесоповалом. Я, например, помню, как он нам объяснял, как надо валить тонкие 15-сантиметровые сосны тремя ударами (лесорубского) топора.

Приехавшие на ББС математики пришлось ко двору и как работники, и как люди, способные понимать, как организовывать работы. Константинов рассказывал [2], что один из этих студентов посмотрел, как стройотрядовцы перегружают кирпич (тогда строили Аквариалку — трехэтажный кирпичный лабораторный корпус), передавая его по цепочке из рук в руки, и объяснил, что лучше перемещать кирпич по цепочке, *кидая* его в руки соседа. Конечно, это была известная технология, но на биостанции ее то ли не знали, то ли боялись применять — она требовала определенной организации и жесткого исполнения определенных мер техники безопасности. Сам Константинов вскоре оказался руководителем разгрузочно-погрузочных работ в Пояконде.

На следующий, 1968 г. в опубликованных [2] списках стройотрядов видно несколько математиков. Константинов там не значится, но некоторые рассказчики утверждали, что он приезжал. В 1969 г. Перцову были нужны рабочие руки для строительства линии электропередач Пояконда–ББС. Для тяжелых работ в лесу и на болоте желательны были люди мужеска пола, а их на биофаке не хватало. Тогда и приехала первая большая группа юных математиков (многие из них впоследствии стали известными людьми). С этого пошли математические стройотряды 1969–1987 гг. на ББС, немало там построившие и многое делавшие для жизнеобеспечения биостанции [1], [2].

Здесь надо прерваться и напомнить, что в другой своей ипостаси Константинов был, быть может, самым ярким деятелем нашего школьного математического образования за последние сто лет. Попытаюсь рассказать о нем без восклицательных знаков и эпитетов.

Он был⁵ одним из организаторов первых математических школ (начало 60х) и уже в 60х годах создал так называвшуюся «Константиновскую систему» — общественную структуру в Москве, которая контролировала несколько математических школ (в разное время № № 444, 7, 57, 91 и 179, столь же знаменитые 2-ая школа и Колмогоровский интернат в эту систему не входили), сеть математических кружков, математические олимпиады, летние математические лагеря для школьников и студентов (список этот заведомо не полон). Как известно, бывает немало такого, что существует на бумаге, не существуя в жизни. Константиновская система существовала только в жизни, на бумаге же ее не было.

Люди, начинающие учить сильно продвинутых школьников математике, сталкиваются с неочевидной дилеммой, чему учить — «углубленной элементарной математике» или «высшей математике», которой учат в институтах/университетах. Первый путь ведет к развитию не очень естественных приемов решения задач и искусственному раздуванию их сложности (думаю, что многие биологи не лишены такого школьного опыта или наблюдали его у своих детей). Зачем идти вторым путем, не очень ясно (особенно, если школьники настроены поступать в вузы, в которых это все равно будут проходить на более высоком уровне). Варианты этой проблемы должны возникать и при обучении продвинутых школьников другим наукам.

Константинов нашел нетривиальное решение для математики в виде «бега на месте». В школах «Системы» был введен дополнительный предмет «матанализ». На нем решались интересные элементарные задачи, а также (это занимало основное время) проходила за три года тогдашняя программа матанализа мехмата МГУ ... за один месяц первого семестра (и проходила, скорее, не полностью). Школьникам предлагались «листочки», отпечатанные на папиросной бумаге (на пишущей машинке под копирку), с длинными сериями задач, которые ученик должен был решить сам. Решение принималось у каждого по отдельности в письменном виде, и его надо было объяснить в ходе пренаиподробнеешего разговора с потоком неожиданных вопросов со стороны принимающего.

⁵См. о нем [4].

Что касается классной доски, то она использовалась разве что для написания объявлений. Учитель публично не объяснял ничего (sic!). Все делалось мягко, уровень педагогического насилия был почти нулевой (если человек «увязал», ему старались помочь боковыми вопросами)... В итоге за 2-3 года почти ничего не проходило, но... учащийся приобретал навыки самостоятельного мышления, точных логических рассуждений и интеллектуальной инициативы... На это и делалась ставка. Были определенные минусы — у школьника могло возникать впечатление, что теорию пределов он чуть ли не придумал сам (то есть он столь же велик, как такие классики как Евдокс, Больцано или Коши). Конечно, это было иллюзорным — в действительности его вели малыми шагами по тщательно проложенным и ухоженным тропинкам. Были и иные минусы, но плюсы сильно перевешивали.

На эту же цель — учить думать, а не накачивать информацией — были настроены и кружки для школьников (это легко сказать, но не столь уж просто сделать, нужны были подходящие задачи, нужна была технология проведения занятий, нужны были люди, готовые играть в такие игры, была нужна обеспечивающая приход школьников реклама...).

Математические олимпиады времен «Системы» следовали традициям математических олимпиад (они появились еще до Войны) и были мало похожи на большинство современных олимпиад, так что одно из этих слов — старое или современное — следовало бы брать в кавычки. Разумеется, это было соревнование, но реальных «пряников» на олимпиадах почти не раздавалось (это была установка Министерства). Олимпиады по математике (как и по прочим предметам) были просветительским мероприятием — показать молодежи, как красивы науки и выявить способных людей, которые могут заинтересоваться ими (быть может, этот дух остался в ШБО — Школьной биологической олимпиаде биофака МГУ, которая, впрочем, и не дает никаких пряников).

Кстати, в олимпиадах, курировавшихся лично Константиновым или «Системой», была жесткая установка — задача бывает либо решенной, либо не решенной. Всё прочее — от лукавого. Никаких «подводных камней» и учета недочетов. Задача «в общем решена» — почти то же, что решена. «В общем не решена» — почти то же, что не решена (ошибки в работах, конечно, тщательно выявлялись и указывались, но реально разница между «почти решена» и «вполне решена» могла иметь значение лишь в единичных экзотических случаях). Для тех, кто в последние десятилетия подвергался оцениванию или сам оценивал, это повод задуматься о разных системах оценивания письменных работ и влиянии этого оценивания на обучаемого и обучение. Кстати, проверка было делом непростым — в решениях требовалось развернутое логическое обоснование, к чему школьники, разумеется, были не приучены, а задачей проверяющего было доброжелательно разобраться в этой написанной некаллиграфическим почерком абракадабре...

Читатель может спросить — а кто же этим занимался? А занималась большая веселая тусовка, состоявшая, в основном, из студентов и аспирантов⁶. В основном из тех, кто раньше учился в «Системе». На школьном уроке одновременно присутствовали несколько преподавателей, и все они одновременно беседовали со школьниками, переходя от одного к другому. Мертвящей тишины в классе — ой! — не было. Разумеется, удельные трудовые затраты были очень велики, но участникам эта живая игра была интересна, да и они сами чему-то обучались. А когда (в норме — не если, а когда) становилось скучно, или когда людей одолевали другие проблемы — они просто уходили из игры, это считалось само собой разумеющимся. Тем временем подрастали новые молодые люди, исходившие из того, что с другими надо делать то, что делали раньше с тобой. Как ни странно это может выглядеть издали, непосредственная работа держалась на непрофессионалах и непрофессионализме. Предполагалось, что они все делают сами и сами решают, что делать.

Во время, которое я наблюдал, школьные учителя были вне «Системы» и находились с ней в симбиозе. С ними не могли не контактировать, но у них были свои предметы, у «Системы» — только матан. Среди учителей были выдающиеся люди (как В.М. Сапожников или В.В. Бронфман), но не все учителя были удачны, а случаи размывания граней тоже постепенно появлялись. Я должен

⁶А в ведении кружков было обычным участие старшеклассников.

подчеркнуть, что «Система» ни до какой степени не отменяла и не ослабляла традиционные формы обучения.

«Система» не вела никакой «подготовки к вступительным экзаменам». Точка зрения была примерно такая: «Мы учим Природе Вещей, а к этой хренотени отношения не имеем» (кстати, в рамках «Системы» такая «подготовка» была технологически невозможна, даже если бы этого очень захотели).

У биологов есть свои образцы, и есть возможность подумать над сравнением образовательных технологий. Кстати, биологический класс Галины Анатольевны Соколовой в 57 школе был организован в 1973 г. по инициативе Константинова.

Стоит напомнить, что обсуждаемые годы были временем расцвета советской математики и временем, когда математическое сообщество предпринимало всевозможные усилия для развития математического образования в самых разных направлениях. Среди этих действий были успешные (как школы-интернаты в Москве, Ленинграде, Новосибирске и Киеве, основанные в начале 60х), но успехи были далеко не всеобщими — тщательно продуманные проекты, казалось бы обреченные на успех, могли приводить к результатам, весьма далеким от желаемых (см., например, [5], [6]. Для Константинова было как раз характерно умение находить технологические «ходы»⁷, находившиеся за пределом круга казавшихся само собой разумеющихся добропорядочных действий. При этом «Система» во многом оказывалась и «школой», и развлечением для работавшей в ней молодежи.

Константинов (все время или не все время — не знаю) вел какой-нибудь маткласс, а что касается «Системы», то он, по-видимому, предпочитал косвенное воздействие. Он был вездесущ; приходя в место, где все работают, сам садился работать, а также охотно вел оживленные разговоры на произвольные темы (не лишённые, однако, делового содержания). У него были и рычаги влияния, и авторитет, но собиранием власти, как таковой, он, по-моему, не занимался⁸... На заднем плане оставались усилия по контактам с внешним миром — каким-то образом все приводилось в состояние «пахать подано».

Его можно было бы назвать «энтузиастом», но сложившемуся у нас образу «энтузиаста» он в одном важном отношении не соответствовал. НикНик хорошо понимал, где грани возможного, и понимал, что область того, что следует желать в такой условно массовой структуре, значительно уже области возможного...

У участников тусовок обычна склонность превращать тусовку в высшую ценность, такая составляющая присутствовала, и вызывала соответствующую реакцию извне. Но сам Николай Николаевич был настроен именно на обучение школьников математике, был он человеком абсолютно демократическим, и его дух тогда отражался на образовательной деятельности тусовки. В школьные кружки могли приходить любые люди, с ними охотно занимались, лишь бы им была интересна математика. В матшколы был прием по собеседованию, которое проходило в 4-5 этапов, но человека, которого никто никогда не видел, могли взять сразу, лишь бы он хорошо решал задачи (все прочее от лукавого; к сожалению в более поздние времена, о которых у меня не пойдет речь, многое изменилось). Открытой была и работающая тусовка, лишь бы человек был пригоден, и ему было бы интересно работать.

В какой-то момент (кажется, это был 1977 г.) деятели с Мехмата решили отстранить Константи-

⁷ Свои взгляды на преподавание в матклассах он излагал в своей статье [7] 1966 г. о 7 школе (подписано в печать 24.01.1966). Их статьи ясно, что технология обкатывалась в школе уже по крайней мере третий год, а до того испытывалась в кружках. Присоединение 57 школы к «Системе» — 1968 г., 91 школы — 1969 г., 179 школы — 1970 или 71 г. Дату потери 7 школы я не нашел.

⁸ Он любил цитировать следующую сентенцию из «Дао Дэ Цзин»: «Лучший правитель тот, о котором народ знает лишь то, что он существует. Несколько хуже те правители, которые требуют от народа их любить и возвышать. Еще хуже те правители, которых народ боится, и хуже всех те, которых народ презирает.» По-моему, он предпочитал, чтобы все шло само собой. Как писали авторы [3], он «вовсе не стремился к контролирующей власти или собственной монументальности».

нова от руководства Московской математической олимпиадой. По причине неформальности связей в тусовке это было менее очевидной задачей, чем могло показаться затеявшим это лицам. А НикНик, приговаривая, что «нельзя всюду навести порядок, как нельзя все заасфальтировать», организовал два новых мероприятия, Турнир Ломоносова (кстати, по многим разным предметам) и Турнир городов. Они существуют и поныне в виде олимпиад высшего уровня, и, кажется, во многом сохраняют старый олимпиадный дух (впрочем, Конст продолжал ими заниматься).

Вообще он был очень гибок, без конца изобретал новые формы работы — не все имело продолжение, но многое получалось; при возникновении проблем переносил деятельность с одного места на другое (благо, что работающая тусовка ни к каким местам привязана не была). Немало он занимался и устройством контактов участников тусовки с людьми из иных (нематематических) миров.

Осенью 1991 г. по инициативе Николая Николаевича был организован Независимый университет, он же на начальной фазе его существования обеспечил для оппозиционной мехматской профессуры положение «Пахать подано». Но обучение студентов было уже не его сферой деятельности, и этого с самого начала не предполагалось.

С.И.Комаров: ... позвонил Николай Николаевичу. Он, как всегда, без лишней предисловий пригласил меня на следующий день встретиться... в Моссовете. Удивляюсь. Прихожу. После всех формальностей с пропусками усаживаемся в большом кабинете за столом под сукном. Появляется незнакомый мне человек, как оказалось, будущий префект Центрального округа г. Москвы А.И. Музыкантский. Смотрим какие-то документы, а Константинов говорит: «Вот, это Стас Комаров, он будет отслеживать все бумаги». Это были документы Учредительного Комитета Московского математического университета (позже он стал Независимым Московским университетом — НМУ). В списке членов Учредительного Комитета на первом месте я увидел фамилию Константинова с пометкой «председатель», а где-то в середине списка — свою фамилию с пометкой «заместитель председателя». Вот так я на следующие пять лет стал менеджером НМУ.

Примерно тогда же, по естественной и понятной причине — приходу 90-ых, — прекратила свое существование «Константиновская система». Ее технологические наработки в дальнейшем использовались (и используются), вопрос об этом наследии многогранен и не очевиден.

Так или иначе, Конст продолжил свою разнообразную деятельность, проявляя положенную ему по штату изобретательность. Я мало видел его после 1992-93 гг., и не берусь рассказывать об этом периоде его работы.

Вернемся к Константинову и ББС. Очевидно, что ему очень понравилось место⁹, ему понравился Директор Перцов, и, главное, он счел (и был в этом глубоко прав), что тамошние работы, тамошние прогулки и тамошнее общение полезны для общего развития математически ориентированных молодых людей. И вот с 1969 г. начали появляться стройотряды, в которых основную часть составляли «математики» — ученики и выпускники физико-математических школ, а также студенты и аспиранты математических специальностей (эта социальная группа преобладала в мужской половине отрядов, руководство тоже чаще состояло из ее представителей). Обычным временем заезда таких отрядов были июль, август, Новый год (короткий промежуток между зачетной и экзаменационной сессией) и зимние студенческие каникулы (были еще «физтехи», которые представляли свою спящую компанию, они ездили, кажется, в марте-апреле). В опубликованных списках стройотрядов (в них могут быть лакуны) Константинов упоминается в июле 1967 г., июле 1969 г., июле 1972 г., июле 1973 г., июле-августе 1977 г., зимой 1979 г., июне-июле 1979 г. Вроде бы это не очень много

⁹ Там очень красивые и разнообразные окрестности.

(да и появлялся он не на полные сроки), но надо иметь в виду, что на биостанцию приезжали люди, связанные между собой «в другой жизни». И связанные между собой не только знакомствами, но и совместной работой в «Системе». Фактически, и сами эти стройотряды стали своего рода частью «Системы».

Люди приезжали за разным — тусоваться, отдыхать, за природой, за романтикой... (напомню, работали беззарплатно, обеспечивались харчи и оплачивались железнодорожные билеты; выдавалась рабочая одежда). Летом был восьмичасовой рабочий день (без дураков), за исключением пиломатериала, где считалось, что 8 часов должны работать основные станки. Дальше надо было переработать обрезки на дрова, оприходовать согласно нормам складирования всю образовавшуюся продукцию, убрать помещение, подготовить станки. Что занимало никак не меньше еще двух часов... Работы были разные, были хорошие (например, плотницкие или пиломатериальные — на пиломатериалу люди рвались, несмотря на ненормированный рабочий день), а были, скажем, небезынтересные земляные работы — целинную зеленоватую глину, пропитанную камнями любых размеров, не брал никакой ручной инструмент, кроме кайла. Было много разного «труда, освобожденного от разума». Кстати, Конст в свой первый приезд начал с разделения щебня на фракции разного размера на устройстве с характерным названием «грохот». Была тьма внезапно возникавших работ в связи с естественными или искусственными кризисами (например, промерзание водопроводного ручья или наезд санэпидемстанции) или в связи с очередной поломкой, которые иногда шли бесконечной чередой (помнится, на собрании в Москве, где в частности обсуждались предстоявшие работы на озере Бульдозере¹⁰, Перцов сказал, что было бы хорошо купить вертолет, на что сидевший сзади Конст заметил: «Представляете, вертолет застрял в облаках»). Вообще о тамошних работах см. много романтических и не очень романтических воспоминаний в [2].

Люди были разные, работали по-разному, но, в общем, работали. В стройотряд могли попасть далеко не все желающие, а для школьников поездка на ББС была чем-то вроде высокой награды от учителей, положительный отбор в отряд был. Ну и главное, что для части тусовки строительство ББС стало таким же общим делом (*Res publica*) как, скажем, ведение классов или организация олимпиад (спектр участников был несколько иным, но в «Системе» однородность и не предполагалась). Злые языки, конечно, вспомнят присутствовавшую в стройотряде идею, что биостанция нужна для того, чтобы ее строить. Но и сам ее директор был не чужд таких настроений.

Стоит заметить, что работа стройотряда требовала больших затрат времени и сил директора, Николая Андреевича Перцова. Он, владея на профессиональном уровне несколькими строительными специальностями, должен был много что объяснять все новым и новым людям, хоть и настроенным на добросовестность, но ничего не умеющим. С КПД стройотряда были проблемы, но постройки он за собой оставлял, а как показали итоги десятилетия, когда все было в состоянии свободного развала (90-ые), биостанция строилась хорошо¹¹. Со смертью Перцова и концом «Системы» существование

¹⁰ Котлован под водоем, названный так в 1978 г. в честь застрявшего там бульдозера.

¹¹ Скажем несколько слов о дальнейшем (для математиков, строивших биостанцию в 60-80х годах, если им этот текст попадется на глаза). Хотя на биостанции очень многое было завязано на личность Перцова, следующие несколько лет благодаря нескольким дельным сотрудникам там, видимо, продолжалась прежняя жизнь. В частности, от этого времени остались новые постройки (хотя Перцов бы их не одобрил).

А потом пришли 90е. За долги было отключено электричество, дальше группа местных жителей зимой спилила столбы ЛЭП и «собрала урожай» — провода — для сдачи их на лом из цветного металла (классический для 90х мелкий бизнес). Менее «ценная» телефонная линия уцелела (впрочем, спиливание столбов при еще работающем телефоне могло бы быть пресечено). Технический персонал биостанции, получая финансирование от Московского университета, начал действовать и осваивать средства и возможности биостанции в своих интересах.

Биостанция была превращена в Перцовым в место, нужное для биофака и многих биологов, что сильно способствовало ее выживанию. Иногда на станцию заезжали представители старого стройотряда, которые проводили там «неотложные аварийно-восстановительные работы». Основную роль играл А.В. Андрианов (физик с физфака МГУ), имевший местную кличку «мозг», который, в частности, ежегодно приводил в порядок слегка питавший станцию электричеством дизель. Что касается станционной инфраструктуры, то она в условиях развала, воровства и бардака оказалось очень живучей и дотянула до 2005 г.

стройотрядов в прежнем виде стало невозможным.

Так или иначе, в начале 70-х в стройотряде на ББС вскоре все пошло своим чередом (что соответствовало нравам тусовки), а Константинов затеял новый проект. В 1974 г., договорившись с начальством какого-то колхоза в Эстонии¹², он устроил там летний математический лагерь¹³. Мероприятие («Констлагерь») было в несколько ином стиле — там была математическая программа и туда созывались школьники и студенты из самых разных городов страны. Там тоже велись определенные работы, как для обеспечения жизни лагеря, так и для того, чтобы у личного состава было поменьше свободного времени. Помню, например, сцену, когда 17 человек на строительстве объекта «Чайхана» в процессе бурных обсуждений и трудовых подвигов совместными усилиями прибили за рабочий день одну доску. Лишь с некоторым запаздыванием из нескольких реплик я понял, что Конст развлекался, управляя этим процессом, и считал, что в данных условиях эта версия «бега на месте» полезна, а нормально понимаемая работа могла бы стать (и становилась) источником сложностей.

Лагерь просуществовал до 1989 г., на следующее лето Эстония Конста непустила.

НН учился на физфаке МГУ. Защитил диссертацию по математике *Некоторые задачи теоретико-многожественной геометрии плоских кривых*, МГУ, 1963. База MathSciNet показывает у него 2 математических работы с одним цитированием (что современные научные джентльмены, по-видимому, должны считать предосудительным).

Еще у него была (невидимая никакими скопсами) пионерская работа по прикладной математике, см. [10] – [13]. В 1968 г., работая в лаборатории А.С. Кронрода в ИТЭФ, он со товарищи сделал фильм «Кошечка» [10]. Это был первый опыт по компьютерной мультипликации в СССР и один из первых в мире. Причем «Кошечка» надолго осталась единственной такой работой, в которой движение вычислялось с помощью дифференциальных уравнений (более простой для мультипликации путь — интерполяция, художник рисует несколько положений объекта, а машина вычисляет промежуточные состояния). Дифференциальные уравнения должны были выдавать движения, которые визуальнo похожи на настоящие, задача описывать реальное движение животного не ставилась. Коты и кошки наотрез отказывались позировать для решения научной задачи, поэтому (как рассказывал НН) одному из участников проекта — В.В. Минахину — пришлось много ползать на четвереньках, размышляя над описанием движений тех или иных участков конечностей. Кстати, работа делалась на ламповых ЭВМ (БЭСМ-4), каковые были несколько менее удобны, чем современные компы.

К сожалению, «Кошечка» не повлекла практических приложений, а исследования в этом направ-

Быстрому ренессансу способствовало обстоятельство, отчасти, случайное. В 2002 г. на деньги, выбитые одним известным биологом, была куплена новая посуда, капитаном на ней стал живший в Пояконде на пенсии Л.Д. Папунашвили, которого тогда представляли как «бывшего капитана дальнего плавания» (в реальности капитан первого ранга, командир атомной подлодки и прочая). «Давыдыч» быстро привел в порядок станционные суда и, видимо, никого не трогал и его никто не трогал. В 2005 г. очередному заведующему базой хватило разума на него «наехать». Спустя короткое время Давыдыч стал заведующим базой (хозяйственная должность), и быстро вслед за этим директором (научная должность) стал А.Б. Цетлин. С этими двумя назначениями несколько затянувшиеся в рамках одной отдельно взятой биостанции «святые девятые» были выключены как поворотом тумблера.

¹²Кстати (см. [8]) в том же 1974 г. Конст основал известную и работающую поныне школьную биологическую базу в Ковде (поморское село в Мурманской области). Н.А. Горяшко (см. [8]): *Летом 1974 г. группа биологов-девятнадцатиклассников во главе с Н.Н. Константиновым выехала на Белое море, чтобы подыскать подходящее место для постоянной практики биокласса. «Сама я [цитируется Г.А. Соколова] в тот год поехать не смогла, а поехал Николай Николаевич Константинов. Они сначала приехали в Пояконду, там купили лодку. Потом они на лодке плыли вдоль берега Белого моря, и нашли эту деревню, здесь нашли этот дом. Заплатили хозяевам 10 рублей, хозяева были этим глубоко потрясены. Раньше у них просто сбивали замок, заходили и жили. Я приехала на следующий год, мы опять заплатили 10 рублей, и у нас был дом, и была лодка... В 76 г. мы этот дом купили.*

¹³См. рассказ посетившей лагерь учительницы литературы в [9]. *«В летнем математическом лагере по вечерам у костра проводились беседы обо всем на свете, от индийской философии до проблем генетики... «Никаких слов о том, «что такое хорошо», Константинов и его помощники не произносят.»*

лении не продолжались. Не привлекли тогда подобные задачи и биологов. Но широко известная в узких кругах «Кошечка», по-видимому, имела косвенное воздействие, способствовав появлению у нескольких талантливых молодых математиков интереса к математическим вопросам биологии.

Значение Константинова для советской/российской математики последних 55 лет невозможно ни оценить, ни описать — без него окружающий математиков мир просто был бы совсем иным. За тридцатилетие 1960-1990 гг., о котором я писал, деятельность Константинова и «Системы» коснулась многих десятков тысяч человек (и совсем не только будущих профессиональных математиков)... Очень трудно оценить значение дальнейших «кругов на воде» и значение его побочных инициатив, которые, бывало, претворялись в жизнь (как создание биологических классов).

Был он человеком абсолютного благородства, и был он человеком удивительно мудрым. В своей работе ему было суждено избежать больших трагических ошибок, столь обычных на пути крупных общественных деятелей, имевших самые лучшие намерения. И, наконец, встреча лично с ним была поворотной точкой в судьбе многих талантливых молодых людей...

Иллюстрации



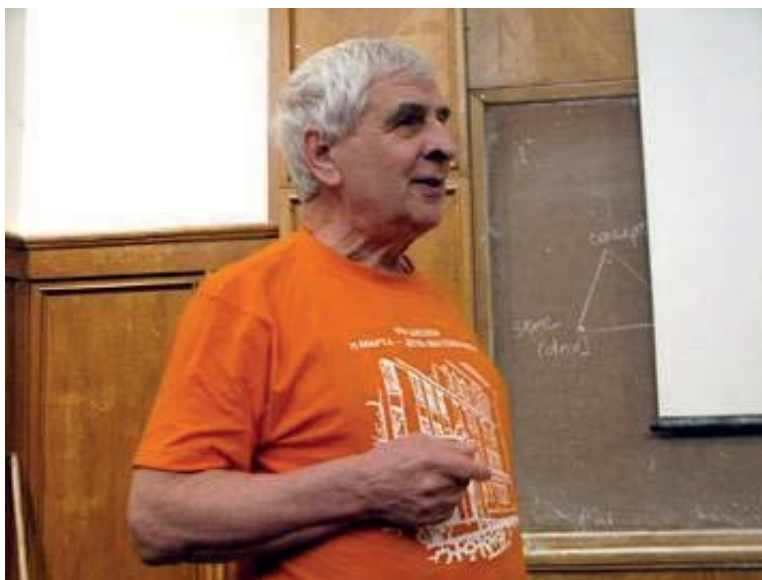
Поселок Приморский (ББС МГУ), 1979 г. Установка «журнального столика» из гнейса около здания «Огарки». Затеявший это мероприятие (такие мероприятия назывались «маразмами» или «мехматскими маразмами») Константинов — слева. Вдали — здание пилорамы (с торца напоминает сарай). Остальные объекты на втором плане сейчас не существуют. Слева — штабеля бревен, спиленных и вывезенных из леса зимой рабочими. Стройотряд вскорости увезет бревна по рельсам на пилораму, где превратит их в брусья, плахи,

доски разного сечения, бруски, рейки, опилки (которые будут собраны в специальном бункере), дрова (они отправятся сохнуть в сарай, который на фотографии справа), а также стружки (которые пойдут в отход). Журнальный столик долго стоял на ножках (коротких толстых чурках), в настоящее время не существует. Стоит отметить, что на снимке все в порядке с техникой безопасности — в присутствии Конста не могло быть иначе. Камень полностью опирается на катки; силы, прилагаемые к столику участниками транспортировки, направлены по горизонтали в сторону фотографа (с небольшой составляющей вверх, идущей от хиловатой ваги). Кисти рук (кстати, единица масштаба) находятся сверху, их не прищемит. Соскользнуть назад или вбок на людей этот столик весом в несколько сот килограмм в запечатленный момент не может. Соскальзывание вперед возможно. Если это случится, то придется ломачами и вагами снова водружать столик на катки, но сейчас непосредственной опасности такое соскальзывание ни для кого не несет.



ББС МГУ. Стройотряд. Июль, 1979 г. Фото С.Л. Мехедова. Конст — под нависшей березой без листьев. Видна степень многолюдности типового летнего стройотряда. Укажем людей, впоследствии ставших известными профессионалами. Крайний слева — С.Ю. Оревкин (математик), сидящий крайний справа — Д.С. Богданов (программист и гитарист), рядом с Констом справа — М.М. Капранов (математик), лежит справа А.М. Левин (математик), сидит над его головой Н.Х. Агаханов (деятель школьных математических олимпиад), стоит четвертый слева — А.Л. Городенцев (математик), стоит выше девушки в тельняшке Ан. Резников (математик). За спиной М.М. Капранова справа — А.А. Васильев (физик), много ездивший работать на биостанцию в смутные годы, слева от Конста — В.В. Прасолов (автор книг по математике), третий стоящий слева от девушки в тельняшке — П.М. Ахметьев (математик), сидит слева А.П. Романов. Сидит под М.М. Капрановым — П.Я. Грозман (математик), лежит слева В.Н. Шандер (математик). Человек в клетчатой рубашке (около девушки в тельняшке) — Ю.П. Лысов (один из важнейших соратников Конста, впоследствии молекулярный биолог). Слева от девушки в тельняшке — В.О. Бугаенко (деятель школьного образования, много сотрудничал с Констом). Над ногами лежащего Левина — В.В. Серганова (математик). Второй слева — М.З. Шапиро

(математик). В списке стройотряда [2] присутствуют также В.А. Васильев (математик), А.Ю. Вайнтроб (математик), С.А. Кулешов (математик), Е.И. Полетаева (математик), но я что-то не могу найти их на фото. Фотограф — молекулярный биолог. Я, скорее всего, в этот момент тоже фотографировал (но менее удачно). Состав отряда не вполне типичен, обычно там было больше представителей (представительниц) биологического мира.



Конст у доски. По виду, это одна из поточных аудиторий в корпусах МГУ, построенных в 1953 г. Он часто читал публичные лекции для школьников и с легкостью работал в шумящих аудиториях, раз за разом включая шум или буйство и изящно выключая их, как только это становилось необходимым. Когда-то по окончании Московской олимпиады он выступал в переполненных аудиториях 01 или 02 в Шайбе (самых больших аудиториях тогдашнего МГУ). Степень мотивированности собравшихся была большой, но не полной — аудитория не была безобидной — и зрелище применяемой НН техники контроля было забавным и поучительным.

Литература

1. Перцова Н.М. На берегу Великой Салмы. История Беломорской биостанции МГУ с 1951 г. - М.: Водолей, 2014.
2. Каликинская Е.И. Страна ББС. - М.: КМК, 2008.
3. Николай Николаевич Константинов и Беломорская биостанция. / Сайт ББС МГУ, лента за 07.07.2021. URL: <http://wsbs-msu.ru/news/view.php?ID=1158>
4. Математическое образование. - № 40. - 2007 (номер журнала, посвященный 75-летию Н.Н. Константинова).
5. Неретин Ю.А. Колмогоровская реформа математического образования. Препринт. URL: <https://arxiv.org/abs/1911.06108>
6. Рохлин В.А. Лекция о преподавании математики нематематикам, 1980 // Матем. просв. - сер. 3. - № 8. - 2004. - с. 21-36.
7. Константинов Н.Н. В математических классах 7 школы. / В сборнике "Математическая школа. Лекции и задачи. VII." ред. Дынкина Е.Б. и др. - М.: Издательство Московского Университета, 1966. - с. 77-86.¹⁴ URL: https://www.mathedu.ru/text/matshkola_lektsii_i_zadachi_v7_1966/p0/
8. Горяшко А. Босская биостанция // Биология (1 сентября). - 2005. - № 1.

¹⁴Интересно сравнить нетривиальность подхода Константинова со статьями других, весьма уважаемых, авторов этого сборника и других сборников этой серии.

9. Кленицкая И.Я. Математические классы Николая Константинова глазами словестника¹⁵. // Новостная лента Владикавказского математического журнала за 12.03.2004.
URL: <https://www.univie.ac.at/EMIS/journals/VMJ/news/12.03.2004/4.html>¹⁶
10. Кошечка. Мультфильм. Автор сценария Константинов Н.Н., режиссер Минахин В.В., художник-мультипликатор Пономаренко В.Ю., художник Скуридин А., оператор Журкин В.Б. - Москва, 1968.
URL: <https://www.youtube.com/watch?v=JWiWYqvP0BU>
11. Константинов Н.Н., Минахин В.В., Пономаренко В.Ю. Программа, моделирующая механизм и рисующая мультфильм о нем // Проблемы кибернетики. - 1974. - вып. 28. - с. 193-209.
12. Левкович-Маслюк Л.И. Прибытие «Кошечки» // Компьютерра. - 2006. - № 7.
URL: <https://old.computerra.ru/2006/627/254339>
13. Левкович-Маслюк Л.И. Николай Константинов: Знает ли кошка, что она не настоящая? // Компьютерра. - 2006. - № 7. URL: <https://old.computerra.ru/2006/627/254341>

*Неретин Юрий Александрович,
University of Vienna, Department of Mathematics;
внс Института теоретической и экспериментальной физики
им. А.И. Алиханова, Москва;
Механико-математический факультет
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва;
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
доктор физ.-мат. наук.*

E-mail: yurii.neretin@univie.ac.at

¹⁵Так на сайте.

¹⁶На сайте math-net.ru статья отсутствует.

Ободряем ученика

С. В. Дворянинов

В первой части статьи обсуждаются задачи с параметром из недавнего сборника для подготовки к ЕГЭ. Задачи соответствуют программе основной школы. Во второй рассмотрены геометрические задачи, решаемые методом координат.

1. Задачи с параметром

Поддержать ученика, настроить его на успех, вселить уверенность в собственных силах, воспитать настойчивость в достижении цели – все это есть важная составная часть взаимодействия учителя и ученика. Часть задач для подготовки к ЕГЭ в недавнем сборнике [1] дают учителю возможность достичь названных целей. Ниже показано, что в значительной мере эти задачи доступны выпускникам основной школы и могут быть использованы уже в 9 классе. Изложенные далее решения отличаются от приведенных в [1].

Использование свойств монотонности и нечетности функции

Задача. ([1], с. 115, вар. 31.) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

Для решения задачи следует связать это уравнение с функцией $s = f(t) = t^3 + t$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций, кубической и линейной, и поэтому является возрастающей на всей числовой прямой. Данное уравнение представимо в виде

$$f(4x^2) = f(3x + a)$$

Возрастающая функция каждое свое значение принимает один единственный раз, при единственном значении аргумента. Следовательно, последнее уравнение равносильно следующему:

$$4x^2 = 3x + a.$$

Теперь исходная задача звучит так: найти все значения a , при каждом из которых это *квадратное* уравнение не имеет корней. А это уже задача из 8 класса. Находим дискриминант, решаем неравенство $D(a) = 9 + 16a < 0$ и получаем

Ответ. $\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$

Заметим, что решение этой задачи в [1] на с. 189 является искусственным и на другие подобные задачи не переносится.

Рассказав нашим ученикам об этом приеме, следует для самостоятельного решения предложить задачу из варианта 32, с. 118:

Задача. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

Здесь ученик может увидеть новую вспомогательную функцию $s = F(t) = t^3 + 3t$ и записать уравнение в виде

$$F(3x^2) + F(a - 2x) = 0.$$

Далее следует использовать другое свойство функции F , а именно ее нечетность, и поэтому последнее уравнение равносильно такому:

$$F(3x^2) - F(2x - a) = 0, \quad \text{или} \quad F(3x^2) = F(2x - a).$$

Вновь приходим к квадратному уравнению $3x^2 = 2x - a$. Решаем неравенство $D(a) = 1 - 3a < 0$ и получаем

$$\text{Ответ. } \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Квадратные уравнения и квадратичная парабола

Задача. ([1], вар.1, с.13). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трех корней.

Это уравнение может “напугать” неподготовленного ученика четвертой степенью неизвестного. А на деле эта задача соответствует программе 8 класса! Действительно, будем считать это уравнение *квадратным относительно параметра a* . Вот оно, записанное стандартным образом:

$$a^2 + 2(x - 3a) - x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 10x + 5 = 0. \quad (1)$$

Для квадратного уравнения есть формула его корней. Задачу облегчает четность второго коэффициента, и тогда дискриминант получается равным

$$D = D(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4.$$

И здесь надо сказать ученикам, что составители заданий для ЕГЭ всегда дают реальный шанс решить задачу! Это своего рода гуманизм, на который ученик всегда вправе рассчитывать. Дискриминант стоит под знаком арифметического корня. А вдруг повезло? Вдруг дискриминант есть точный квадрат? Проверим, возможно ли равенство

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 + px + q)^2. \quad (2)$$

при подходящих значениях коэффициентов p и q . Совершенно очевидно, что $4 = q^2$, и $q = 2$ или $q = -2$. Приравняв из обеих частей равенства (2) коэффициенты при x^3 и получим $-2 = 2p$, то есть $p = -1$.

Итак, следует испытать два варианта:

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 - x + 2)^2$$

или

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x^2 - x - 2)^2.$$

Простая проверка показывает, что верно первое, и тогда

$$a = -x + 3 \pm (x^2 - x - 2).$$

Осталось на координатной плоскости $(x; a)$ нарисовать две квадратичные параболы $a = x^2 - 2x + 1$ и $a = -x^2 + 5$ (рис.1).

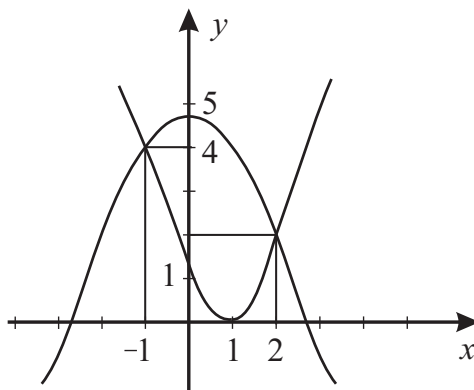


Рис.1.

Две эти параболы — это график уравнения из решаемой нами задачи. Посмотрев, какие горизонтальные прямые (параллельные оси абсцисс) пересекают график не менее трех раз, получаем

Ответ. $0 \leq a \leq 5$

Заметим, что решение этой задачи в [1] на с. 189 является искусственным и на другие подобные задачи не переносится.

Не забываем про замену

Задача. ([1], вар. 6, с. 29). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

Совершенно очевидно, что для сокращения записи следует сделать замену $x^2 + x + 1 = t$ и получить уравнение

$$(t + 2a^2)^2 = 8a^2t. \quad (3)$$

Осознаем, какая теперь задача должны быть решена для уравнения (3).

Ясно, что для нахождения x мы должны согласно замене иметь некоторое значение t . Но при каждом t для x у нас есть квадратное уравнение.

Следовательно, число t должно быть тем значением квадратичной функции, которое эта функция принимает один единственный раз. Из графика квадратичной функции видим, что $t = \frac{3}{4}$.

Итак, решаемая задача равносильно тому, что уравнение (3) имеет корень $t = \frac{3}{4}$. Подставляя это значение в (3), получаем

Ответ. $\pm \frac{\sqrt{6}}{4}$

Заметим, что в [1] в ответе имеется опечатка.

Задачу решает уравнение окружности

Задача. ([1], вар. 19, с. 77). Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения

$$x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$$

принимает наибольшее значение.

Для решения задачи дважды выделяем точный квадрат

$$(x - 3)^2 - 9 + 12 + (a - 2)^2 - 4 = 0$$

и получаем уравнение

$$(x - 3)^2 + (a - 2)^2 - 4 = 0,$$

которое на плоскости $(x; a)$ задает окружность (рис.2).

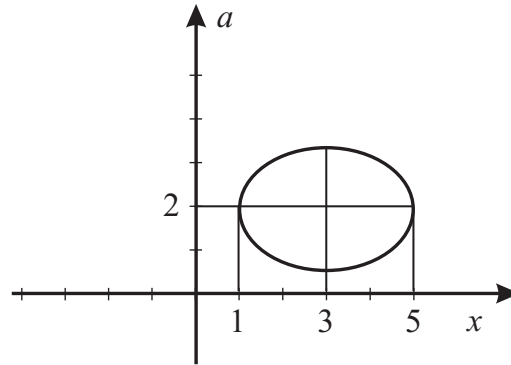


Рис.2.

Созерцая рисунок, получаем

Ответ. 2.

Очевидно, что эта задача доступна девятикласснику.

Задача. ([1], вар. 24, с. 93). Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2x^2 + y^2, \\ -x + y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

До сих пор речь шла про уравнения. Сейчас у нас система из двух уравнений. Естественно, как мы учим в седьмом классе, применить метод исключения (или метод подстановки) с целью получения одного уравнения. Ясно, что в уравнении можно оставить любую пару неизвестных из x , y и z . Однако только оставление x , y позволит сохранить параметр a в первой степени.

Умножим первое уравнение на 3, вычтем второе и выделим два точных квадрата:

$$\left(\sqrt{6}x - \frac{10}{2\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{100}{24} + \left(\sqrt{3}y + \frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{49}{12} - a = 0,$$

или

$$\left(\sqrt{6}x - \frac{10}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{3}y + \frac{7}{2\sqrt{3}}\right)^2 = a + \frac{33}{4}. \quad (4)$$

Если $a + \frac{33}{4} < 0$, то нет ни одной пары чисел, удовлетворяющих уравнению (4).

Если $a + \frac{33}{4} > 0$, то таких пар бесконечно много, ибо при этом уравнение (4) задает на плоскости $(x; a)$ эллипс. Можно также сделать замену $\sqrt{6}x - \frac{5}{\sqrt{6}} = u$, $\sqrt{3}y + \frac{7}{2\sqrt{3}} = v$ и получить хорошо знакомое ученикам по учебнику геометрии 9 класса уравнение окружности $u^2 + v^2 = a + \frac{33}{4}$.

Наконец, только при $a = -\frac{33}{4}$ имеем уравнение $u^2 + v^2 = 0$, имеющее единственное решение $(u; v) = (0; 0)$.

Ответ. $-\frac{33}{4}$.

Заключение. Сравнительно короткие и несложные решения задач с параметром должны помочь нашим ученикам справиться с реальными заданиями ЕГЭ.

2. Задачи ЕГЭ: обратим внимание на метод координат

В недавнем сборнике [1] имеется немало задач, решаемых методами координат. Эти задачи соответствуют программе курса планиметрии основной школы. Они вполне доступны учащимся основной школы. В каждой из задач следует использовать уравнения прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Ученикам следует напомнить условие параллельности двух прямых $k_1 = k_2$ и условие их перпендикулярности ($k_1 \cdot k_2 = -1$). Предлагаемые решения отличны от имеющихся в [1].

Задача. ([1], вар. 16, с. 67) На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 60 и 80.

Решение. а) Поместим треугольник ABC в систему координат (рис. 3).

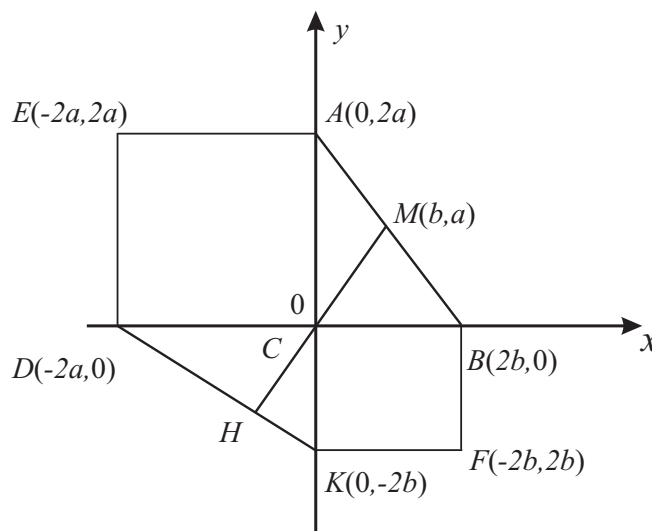


Рис. 3.

Пусть координаты точек A и B равны соответственно $(0; 2a)$ и $(2b; 0)$. Через параметры a и b легко выразить координаты точек $D(-2a; 0)$, $E(-2a; -2a)$, $F(2b; -2b)$, $K(0; -2b)$.

1. Записываем уравнение прямой CM : $y = \frac{a}{b}x$.

2. Записываем уравнение прямой DK : $y = \frac{-2b}{-2a}(x + 2a)$.

3. Произведение угловых коэффициентов этих прямых равно (-1) , следовательно, эти прямые взаимно перпендикулярны, ч.т.д.

б) Отрезок HC — высота прямоугольного треугольника площади $\frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2400$, проведенная к гипотенузе. Длина гипотенузы равна 100.

Следовательно, $\frac{1}{2} \cdot CH \cdot 100 = 2400$, отсюда $CH = 48$. Далее находим $HM = HC + CM = 48 + 50 = 98$.

Ответ. 98

Как видим, решение задачи методом координат коротко, алгоритмично и, главное, естественно.

Задача. ([1], вар. 6, с. 29) Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

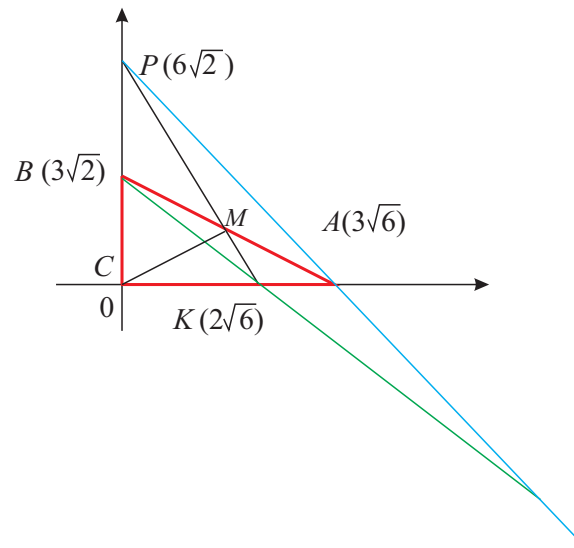


Рис. 4.

Решение. а) Поместим треугольник ABC в систему координат (рис. 4). Пусть координаты точек A и B равны соответственно $(a; 0)$ и $(b; 0)$. Тогда $K\left(\frac{2}{3}a; 0\right)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ и уравнение прямой CM $y = \frac{b}{a}x$. Далее находим уравнение MK :

$$y = \frac{-a}{b} \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точки K , поэтому $0 = \frac{-a}{b} \left(\frac{2}{3}a - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}$ и $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\angle BAC = 30^\circ$, ч.т.д.

б) Теперь координаты точек имеют конкретные числовые значения: $A(3\sqrt{6}; 0)$, $B(0; 3\sqrt{2})$, $K(2\sqrt{6}; 0)$.

Зная уравнение прямой MK $y = \frac{-3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \left(x - \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2}$, находим ординату точки P :

$$y = \frac{-3\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Отсюда} \quad y = 6\sqrt{2} \quad \text{и} \quad p(0; 6\sqrt{2}).$$

Уравнение прямой PA $y = \frac{-6\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}(x - 3\sqrt{6})$, или $y = \frac{-2\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{2}$.

Уравнение прямой BK $y = \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}(x - 2\sqrt{6})$, или $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}x - 3\sqrt{2}$.

Находим точку пересечения этих двух прямых $Q(6\sqrt{6}; -6\sqrt{2})$. Далее находим расстояние KQ и получаем

Ответ. $2\sqrt{42}$.

Задача. ([1], вар.1, с. 13). Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M . Биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .

а) Докажите, что $2\angle BMN = \angle ACB$.

б) Найдите BM , если $AB = AC = 5$, $BC = 6$.

Решение б). Поместим треугольник в систему координат XOY так, чтобы вершины треугольника имели следующие координаты: $A(0; 4)$, $B(-3; 0)$, $C(3; 0)$, рис. 5.

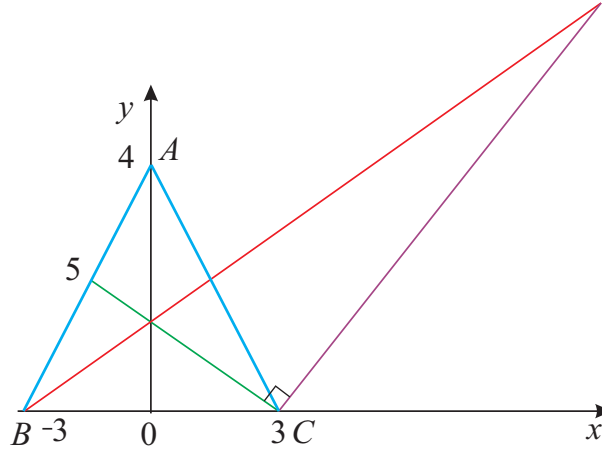


Рис. 5.

Здесь уже учтено, что высота AO треугольника равна 4. Биссектриса BM делит высоту в отношении $5 : 3$, считая от вершины A , откуда находим ординату y точки P : $y = \frac{3}{3+5} \cdot 4 = \frac{3}{2}$ и $P(0; \frac{3}{2})$.

Уравнение прямой BP (или BM) таково: $y = \frac{1}{2}(x + 3)$.

Уравнение прямой CP таково: $y = -\frac{1}{2}(x + 3)$, уравнение перпендикулярной прямой CM таково: $y = 2(x - 3)$. Координаты точку M находим из системы

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x + 3), \\ y = 2(x - 3). \end{cases}$$

Отсюда $M(5; 4)$ и $MB^2 = (5 + 3)^2 + (4 - 0)^2 = 80$.

Ответ. $MB = 4\sqrt{5}$.

Литература

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. / И.В. Ященко и др. - М.: Издательство “Экзамен”, МЦНМО, 2020. (Серия “ЕГЭ. 50 вариантов. Тесты от разработчиков”).

Дворянинов Сергей Владимирович,
г. Москва.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Антимагические квадраты и их обобщения

Л. Штейнгарц

Введены понятия антимагических квадратов по сложению и умножению, а также антимагических прямоугольников. Приведены некоторые общие и частные способы их построения, изучены разнообразные свойства, сформулирован ряд гипотез.

Статья печатается с продолжением.

*Мои мысли выводят вселенную из равновесия...
Я подумал одно, исполняется тут же другое...
Жаль, что маг — это жизнь, а не хобби, или просто профессия.
Антимаг — это вовсе отсутствие точки покоя...*

К. Арбенин, 2002

Для удобства чтения первой части статьи предлагаем просмотреть **путеводитель по разделам**:

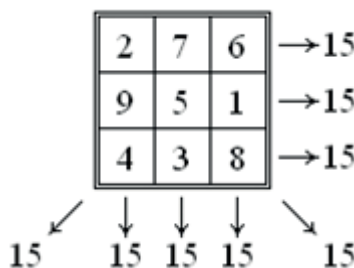
1. Основные определения и первые примеры
2. Доказательство существования антимагических квадратов
3. Антимагические прямоугольники
4. Антимагические квадраты по умножению
5. Антимагические квадраты со степенями
6. Антимагические квадраты с корнями

Раздел 1. Основные определения и первые примеры

Читатели, конечно, знакомы с таким понятием, как магический квадрат. Но все же напомним его определение.

Определение 1.1 *Магическим квадратом n -го порядка*, где n — натуральное число, называется квадратная таблица, содержащая n строк и n столбцов, в которую вписаны натуральные числа от 1 до n^2 так, чтобы все суммы чисел по строкам, столбцам и обоим большим диагоналям были равны между собой.

На данном рисунке изображен магический квадрат, для которого постоянная сумма по всем направлениям равна 15.



Упражнение 1. Проверьте, что следующий квадрат четвертого порядка также является магическим.

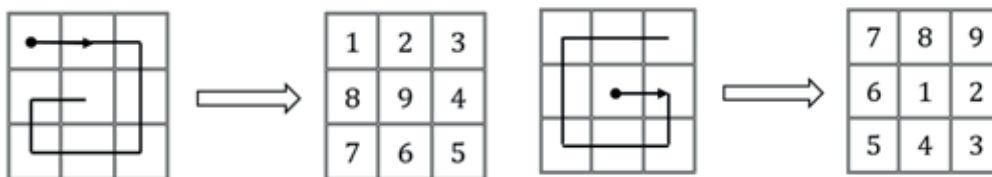
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Аналогично магическому квадрату определяется антимагический квадрат.

Определение 1.2 Антимагическим квадратом n -го порядка называется таблица размером $n \times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n^2 таким образом, что суммы чисел по всем вертикалям, горизонталям и по главным диагоналям были попарно различны.

Может показаться, что построить антимагический квадрат довольно просто. Ведь для этого, казалось бы, достаточно хаотично разбросать числа в таблице. Подобным образом думали почти все ученики, которым мы предлагали составить такой квадрат. Но, как показывают многочисленные испытания, полученный квадрат почти наверняка оказывается не антимагическим. Очень часто хотя бы какие-то две суммы оказываются одинаковыми.

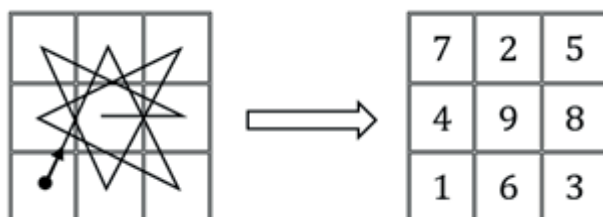
При этом обнаружили “красивые” антимагические квадраты с довольно любопытными закономерностями. Например эти антимагические квадраты построены по спиральной схеме:



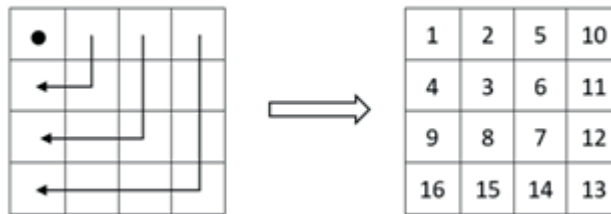
По этой же спиральной схеме можно построить антимагический квадрат пятого порядка:

1	2	3	4	5
16	17	18	19	6
15	24	25	20	7
14	23	22	21	8
13	12	11	10	9

Этот “красивый” антимагический квадрат третьего порядка, построен при помощи шахматного коня:



А вот квадрат четвертого порядка, построенный по схеме “углов”:



Упражнение 2. Проверьте, что приведенные выше квадраты действительно антимагические.

К сожалению, вышеприведенные схемы не позволяют строить антимагические квадраты произвольных порядков. Например, спиральный метод, при помощи которого построен антимагический квадрат пятого порядка, не подходит для квадратов n -го порядка при $n = 4, 6, 7$ (на это указал Игорь Акулич [1]). А по схеме “углов” не получается построить, например, антимагический квадрат пятого порядка. Но во втором разделе данной статьи все же будет указан общий метод, позволяющий строить антимагические квадраты произвольных порядков.

В нашей статье мы часто будем рассматривать антимагические квадраты, заполненные не обязательно натуральными числами.

Определение 1.3 *Обобщенным антимагическим квадратом n -го порядка* назовем таблицу размером $n \times n$, заполненную произвольными числами таким образом, чтобы суммы чисел по всем вертикалям, горизонталям и по главным диагоналям были попарно различны.

В дальнейшем мы не будем оговаривать, является рассматриваемый квадрат обычным или обобщенным. Это будет вполне понятно из контекста.

Упражнение 3. Докажите, что любой квадрат второго порядка, в котором все числа различны, а сумма меньшего и большего из этих чисел отлична от суммы двух других, будет антимагическим.

Определение 1.4 Будем говорить, что числа конечной последовательности $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ в следующей таблице *расположены в телефонном порядке*:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9



Упражнение 4. Дайте строгое определение телефонного порядка расположения чисел в квадрате размером $n \times n$.

Если в условии некоторой задачи, теоремы или гипотезы не будет специально оговорено, то числа заданной конечной последовательности будут в дальнейшем располагаться в таблице именно в телефонном порядке.

Раздел 2. Доказательство существования антимагических квадратов

В работах Игоря Акулича [1] и Юлиана Ваннэ [2] доказано, что для любого натурального числа $n \geq 3$ существует антимагический квадрат n -го порядка. И. Акулич строит алгоритм построения отдельно для четных значений n и отдельно для нечетных. А в своей работе Ю. Ваннэ показывает,

как из антимagicского квадрата некоторого порядка можно построить антимagicский квадрат большего порядка.

Предлагаем читателям еще одно (насколько нам известно, новое) доказательство существования антимagicских квадратов произвольных порядков. Мы покажем, как можно построить антимagicский квадрат на основе **магического квадрата**.

Вначале, для наглядности, продемонстрируем идею доказательства на примере. Возьмем магический квадрат, например, третьего порядка:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Построим при помощи этого магического квадрата антимagicский квадрат пятого порядка по следующей схеме (серым цветом закрашены клетки магического квадрата):

22	10	11	12	25
16				19
17				20
18				21
23	13	14	15	24

Упражнение 1. а) Проверьте, что данный квадрат является антимagicским.

б) Сформулируйте словами алгоритм построения этого числового квадрата.

Для доказательства того, что по данной схеме всегда будет получаться антимagicский квадрат, введем некоторые обозначения. Пусть имеется произвольный магический квадрат n -го порядка. Обозначим: $A = n^2$, $B = A + n$, $C = B + n$, $D = C + n$, $E = D + n$.

Построим теперь квадрат порядка $n + 2$ по следующей схеме (магический квадрат мы снова выделили серым цветом).

$E + 1$	$A + 1$	$A + 2$...	$A + n$	$E + 4$
$C + 1$					$D + 1$
$C + 2$					$D + 2$
...					...
$C + n$					$D + n$
$E + 2$	$B + 1$	$B + 2$...	$B + n$	$E + 3$

Теорема 2а. При любом натуральном $n \geq 3$ построенный по приведенной схеме числовой квадрат будет антимagicским.

Доказательство. Введем, для удобства, следующие обозначения (см. рисунок ниже):

$E + 1$	$A + 1$	$A + 2$	\dots	$A + n$	$E + 4$	$S_{\text{верх.}}$	
$C + 1$					$D + 1$	\bar{S}_1	
$C + 2$					$D + 2$	\bar{S}_2	
\dots					\dots	\dots	
$C + n$					$D + n$	\bar{S}_n	
$E + 2$	$B + 1$	$B + 2$	\dots	$B + n$	$E + 3$	$S_{\text{нижн.}}$	
$S(\nearrow)$	$S_{\text{лев.}}$	S_1	S_1	\dots	S_n	$S_{\text{прав.}}$	$S(\searrow)$

S_1, S_2, \dots, S_n — суммы чисел в соответствующих столбцах;

$\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ — суммы чисел в соответствующих строках;

$S_{\text{лев.}}$ — сумма чисел в левом столбце;

$S_{\text{прав.}}$ — сумма чисел в правом столбце;

$S_{\text{верх.}}$ — сумма чисел в верхней строке;

$S_{\text{нижн.}}$ — сумма чисел в нижней строке;

$S(\searrow)$ — сумма чисел по диагонали от верхней левой клетки;

$S(\swarrow)$ — сумма чисел по диагонали от нижней левой клетки.

Теорема, как нетрудно понять, будет доказана, если окажутся истинными все следующие неравенства:

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < \bar{S}_1 < \bar{S}_2 < \dots < \bar{S}_n < S(\searrow) < S(\swarrow) < S_{\text{верх.}} < S_{\text{нижн.}} < S_{\text{лев.}} < S_{\text{прав.}}$$

Для этого докажем несколько лемм.

Лемма 1. Следующие неравенства являются истинными:

$$S_1 < S_2 < \dots < S_n < \bar{S}_1 < \bar{S}_2 < \dots < \bar{S}_n < S(\searrow) < S(\swarrow).$$

Доказательство. очевидным образом, следует из построения таблицы.

Лемма 2. Имеет место неравенство

$$S(\swarrow) < S_{\text{верх.}}$$

Доказательство. Найдем вначале постоянную сумму ($const$) в каждой строке и столбце магического квадрата n -го порядка. Сумма всех чисел в таком квадрате (по формуле суммы арифметической прогрессии) равна $(n^2 + 1)n^2/2$. Поэтому $const = \frac{n^2+1}{2}n^2 : n = \frac{(n^2+1)n}{2}$. Теперь убедимся, что

$$S(\swarrow) < S_{\text{верх.}}$$

Действительно,

$$S(\swarrow) = (E+2) + const + (E+4) = 2E + 6 + \frac{(n^2+1)n}{2}.$$

Снова воспользуемся формулой суммы арифметической прогрессии для нахождения суммы $S_{\text{верх.}} = 2E + 5 + (A+1) + (A+2) + \dots + (A+n)$. Получим:

$$S_{\text{верх.}} = 2E + 5 + \frac{(A+1) + (A+n)}{2} \cdot n = 2E + 5 + \frac{(n^2+1) + (n^2+n)}{2} \cdot n = 2E + 5 + \frac{(2n^2+n+1)n}{2}.$$

Убедимся, что $2E + 6 + \frac{(n^2+1)n}{2} < 2E + 5 + \frac{(2n^2+n+1)n}{2}$. Действительно, последнее неравенство равносильно следующим:

$$1 + \frac{(n^2+1)n}{2} < \frac{(2n^2+n+1)n}{2}; \quad 2 + n^3 + n < 2n^3 + n^2 + n; \quad 2 < n^3 + n^2.$$

А последнее, конечно, выполняется при любом натуральном $n > 1$.

Лемма 3. *Истинно неравенство: $S_{\text{верх.}} < S_{\text{нижн.}}$*

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Имеет место следующее неравенство: $S_{\text{нижн.}} < S_{\text{лев.}}$*

Доказательство. Рассмотрим обе суммы

$$S_{\text{нижн.}} = 2E + 5 + \frac{(B+1) + (B+n)}{2} \cdot n = 2E + 5 + \frac{(n^2 + n + 1) + (n^2 + 2n)}{2} \cdot n = 2E + 5 + \frac{(2n^2 + 3n + 1)n}{2},$$

$$S_{\text{лев.}} = 2E + 3 + \frac{(C+1) + (C+n)}{2} \cdot n = 2E + 3 + \frac{(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 3n)}{2} \cdot n = 2E + 3 + \frac{(2n^2 + 5n + 1)n}{2}.$$

Осталось убедиться в том, что

$$2E + 5 + \frac{(2n^2 + 3n + 1)n}{2} < 2E + 3 + \frac{(2n^2 + 5n + 1)n}{2}$$

Это, как нетрудно проверить, равносильно такому неравенству: $4 + (2n^2 + 3n + 1)n < (2n^2 + 5n + 1)n$. А оно, в свою очередь, равносильно (при любом натуральном $n > 1$) очевидному неравенству $4 < 2n^2$.

Лемма 5. *Истинно неравенство: $S_{\text{лев.}} < S_{\text{прав.}}$*

Доказательство очевидно.

Таким образом, доказано, что образованный числовой квадрат наверняка будет антимагическим.

А так как давно известно, что для любого $n \geq 3$ существуют магические квадраты n -го порядка, то существуют и антимагические квадраты для любого $n \geq 5$.

Но антимагические квадраты третьего и четвертого порядка были показаны ранее. Поэтому окончательно доказано, что для любого натурального $n \geq 3$ существует антимагический квадрат n -го порядка.

Теорема 2b. *Из любых n^2 различных действительных чисел можно составить антимагический квадрат n -го порядка.*

Доказательство. Расположим все n^2 чисел в порядке возрастания: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n^2}$.

Затем каждому действительному числу поставим в соответствие его порядковый номер:

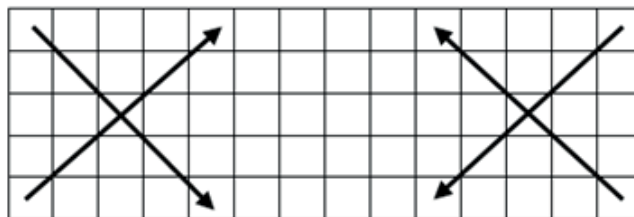
$$a_1 \mapsto 1, a_2 \mapsto 2, a_3 \mapsto 3, \dots, a_{n^2} \mapsto n^2.$$

Из натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n^2$ как мы уже знаем, можно составить антимагический квадрат. При помощи полученного квадрата построим новый, в котором каждое натуральное число заменим соответствующим ему действительным числом. При этом меньшей сумме в одном квадрате будет соответствовать меньшая сумма в другом. А следовательно, и новый квадрат будет антимагическим.

Раздел 3. Антимагические прямоугольники

Иногда вместо антимагических квадратов интересно рассматривать антимагические прямоугольники.

Определение 3.1 *Антимагическим прямоугольником назовем таблицу размером $m \times n$, заполненную произвольными числами таким образом, что суммы чисел по всем вертикалям, горизонталям и по четырём главным диагоналям были попарно различны (ниже на рисунке эти диагонали показаны стрелками).*



Упражнение 1. Дайте строгое определение главным диагоналям в числовом прямоугольнике.

Упражнение 2. Проверьте, что данный прямоугольник, заполненный последовательными простыми числами, является антимагическим:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29

Упражнение 3. Убедитесь, что данный прямоугольник является антимагическим:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

Упражнение 4. Проверьте, что данный прямоугольник является антимагическим:

2^1	2^2	2^3	2^4
2^5	2^6	2^7	2^8
2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

Упражнение 5. Докажите, что данный прямоугольник является антимагическим:

$\sin 30^\circ$	$\sin 45^\circ$	$\sin 60^\circ$
$\operatorname{tg} 30^\circ$	$\operatorname{tg} 45^\circ$	$\operatorname{tg} 60^\circ$

Упражнение 6. Докажите, что если числа $1, 2, \dots, 2n$ расположить в виде таблицы $n \times 2$ в телефонном порядке, то полученный прямоугольник при любом $n \geq 3$ антимагическим не будет.

Упражнение 7. Докажите, что если таблицу $m \times n$ (где $m > n > 1$) заполнить в телефонном порядке последовательными натуральными числами, то полученный прямоугольник антимагическим не будет.

Упражнение 8. Докажите, что любой антимагический прямоугольник порядка $m \times n$ (где $m > n > 1$) содержит в себе хотя бы два антимагических квадрата порядка n .

Упражнение 9. Приведите пример антимагического прямоугольника порядка $m \times n$ (где $m > n > 1$), который содержит в себе три антимагических квадрата порядка n .

Упражнение 10. Докажите, что как бы ни переставить числа в этой таблице, не удастся получить антимагический прямоугольник:

1	2	3
4	5	6

Упражнение 11. Докажите, что если прямоугольник слева заполнен положительными числами и он является антимагическим, то и квадрат справа будет антимагическим:

a	b	c
x	y	z

a	b	c
x	y	z
0	0	0

Упражнение 12. Верно ли, что если в антимагическом квадрате убрать одну строку, то полученный прямоугольник также будет антимагическим?

В дальнейшем мы будем еще не раз иметь дело с антимагическими прямоугольниками.

Раздел 4. Антимагические квадраты по умножению

На наш взгляд, интересно также изучать антимагические квадраты (и прямоугольники) не только по сложению, но и по умножению.

Определение 4.1 Антимагическим квадратом по умножению n -го порядка назовем таблицу размером $n \times n$, заполненную произвольными числами таким образом, что произведения чисел по всем вертикалям, горизонталям и по главным диагоналям были попарно различны.

Аналогично определяется антимагический прямоугольник по умножению.

Теорема 4а. Квадрат произвольного порядка (начиная, конечно, со второго), в котором все числа являются различными простыми числами, будет антимагическим по умножению.

Доказательство следует из однозначности разложения натуральных чисел на простые множители.

Упражнение 1. Проверьте, что данные квадраты, в которых последовательные натуральные числа расположены в телефонном порядке, являются антимагическими по умножению:

1	2
3	4

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Гипотеза А (раздел 4). Для любого натурального $n \geq 2$ последовательные числа $1, 2, 3, 4, 5, \dots, n^2$, расположенные в телефонном порядке в таблице $n \times n$, образуют антимагический квадрат n -го порядка по умножению.

Упражнение 2. Переставьте числа в этом квадрате так, чтобы он перестал быть антимагическим по умножению.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Упражнение 3. а) Проверьте, что все данные семь квадратов, в которых расположены последовательные натуральные числа, являются антимагическими по умножению.

б) Покажите, что в каждом из этих квадратов числа можно переставить так, что они перестанут быть антимагическими по умножению.

2	3	4
5	6	7
8	9	10

3	4	5
6	7	8
9	10	11

4	5	6
7	8	9
10	11	12

5	6	7
8	9	10
11	12	11

6	7	8
9	10	11
12	11	12

7	8	9
10	11	12
11	12	13

8	9	10
11	12	13
12	13	14

Упражнение 4. Докажите, что как бы ни переставить числа в этом квадрате, он всегда будет оставаться антимагическим по умножению:

9	10	11
12	13	14
13	14	15

Упражнение 5. Покажите, что из чисел последовательности $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ можно образовать квадрат третьего порядка, который не является антимагическим по умножению.

Упражнение 6. Докажите, что как бы ни переставить числа в этом квадрате, заполненном последовательными натуральными числами, он всегда будет оставаться антимагическим по умножению:

11	12	13
14	15	16
17	18	19

Гипотеза В (раздел 4). Существует такое натуральное число n , начиная с которого каждый из квадратов данного вида (см. на рисунке ниже)

- а) будет антимагическим по умножению;
- б) будет также оставаться антимагическим по умножению после любой перестановки чисел в нем.

n	$n + 1$	$n + 2$
$n + 3$	$n + 4$	$n + 5$
$n + 6$	$n + 7$	$n + 8$

Раздел 5. Антимагические квадраты со степенями

Степени чисел очень часто порождают антимагические квадраты.

Упражнение 1. Проверьте, что данные квадраты являются антимагическими:

1^2	2^2	3^2
4^2	5^2	6^2
7^2	8^2	9^2

2^2	3^2	4^2
5^2	6^2	7^2
8^2	9^2	10^2

Теорема 5а. При любом натуральном $k > 1$ следующий квадрат будет антимагическим:

k^1	k^2	k^3
k^4	k^5	k^6
k^7	k^8	k^9

Доказательство. Предположим, к примеру, что сумма чисел в левом столбце совпадает с суммой чисел в средней строке: $k^1 + k^4 + k^7 = k^4 + k^5 + k^6$. То есть $k^1 + k^7 = k^5 + k^6$. Разделим данное равенство на k . Получим, что $1 + k^6 = k^4 + k^5$. Поэтому $1 = k^4 + k^5 - k^6$, что невозможно, так как в этом равенстве правая часть делится на k (где $k > 1$), а левая — нет.

Аналогично доказывается невозможность совпадения остальных сумм.

Упражнение 2. Сформулируйте теорему, аналогичную предыдущей теореме, для квадрата n -го порядка и докажите её.

Упражнение 3. Докажите, что при любых натуральных n и k (где $k > 1$) следующий квадрат будет антимагическим:

k^n	k^{n+1}	k^{n+2}
k^{n+3}	k^{n+4}	k^{n+5}
k^{n+6}	k^{n+7}	k^{n+8}

Теорема 5b. (про число π). Для любого натурального числа $n \geq 2$ квадрат n -го порядка, составленный из различных степеней числа π , будет антимагическим.

Доказательство. Проведем необходимые рассуждения для квадрата третьего порядка. Для произвольного квадрата доказательство совершенно аналогичное.

π^1	π^2	π^3
π^4	π^5	π^6
π^7	π^8	π^9

Предположим, например, что в этом квадрате совпадают суммы чисел на диагоналях: $\pi^1 + \pi^5 + \pi^9 = \pi^3 + \pi^5 + \pi^7$. Тогда $\pi^1 + \pi^9 = \pi^3 + \pi^7$. Значит, $\pi^9 - \pi^7 - \pi^3 + \pi = 0$. Следовательно, число π оказалось корнем такого уравнения с целыми коэффициентами: $x^9 - x^7 - x^3 + x = 0$. Но это невозможно, так как известно, что число π — трансцендентное. Напомним, что *трансцендентное число* — это число, которое не может быть корнем многочлена (не равного тождественно нулю) с целочисленными коэффициентами.

Точно так же объясняется невозможность совпадения остальных сумм.

Теорема 5с. При любом натуральном n следующий квадрат будет антимагическим:

n^2	$(n+1)^2$	$(n+2)^2$
$(n+3)^2$	$(n+4)^2$	$(n+5)^2$
$(n+6)^2$	$(n+7)^2$	$(n+8)^2$

Доказательство. Предположим, к примеру, что сумма чисел в правом столбце совпадает с суммой чисел в средней строке. Тогда $(n+2)^2 + (n+8)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2$. Отсюда получим, что

$$n^2 + 4n + 4 + n^2 + 16n + 64 = n^2 + 6n + 9 + n^2 + 8n + 16.$$

То есть, $20n + 68 = 14n + 25$ что неверно при натуральном n . Аналогично проверяется невозможность совпадения остальных сумм (проверьте!).

Упражнение 4. Убедитесь, что следующие квадраты являются антимагическими:

1^3	2^3	3^3
4^3	5^3	6^3
7^3	8^3	9^3

1^4	2^4	3^4
4^4	5^4	6^4
7^4	8^4	9^4

1^5	2^5	3^5
4^5	5^5	6^5
7^5	8^5	9^5

Гипотеза А (раздел 5). При любых натуральных n и k (где $k \geq 2$) следующий квадрат будет антимагическим:

n^k	$(n+1)^k$	$(n+2)^k$
$(n+3)^k$	$(n+4)^k$	$(n+5)^k$
$(n+6)^k$	$(n+7)^k$	$(n+8)^k$

Упражнение 5. Проверьте, что следующие квадраты являются антимагическими:

1^1	2^2	3^3
4^4	5^5	6^6
7^7	8^8	9^9

2^2	3^3	4^4
5^5	6^6	7^7
8^8	9^9	10^{10}

Гипотеза В (раздел 5). Для любого натурального n следующий квадрат будет антимагическим:

n^n	$(n+1)^{n+1}$	$(n+2)^{n+2}$
$(n+3)^{n+3}$	$(n+4)^{n+4}$	$(n+5)^{n+5}$
$(n+6)^{n+6}$	$(n+7)^{n+7}$	$(n+8)^{n+8}$

Упражнение 6. Проверьте, что следующие квадраты являются антимагическими:

1^2	2^3	3^4
4^5	5^6	6^7
7^8	8^9	9^{10}

2^3	3^4	4^5
5^6	6^7	7^8
8^9	9^{10}	10^{11}

Гипотеза С (раздел 5). Для любого натурального n следующий квадрат будет антимагическим:

n^{n+1}	$(n+1)^{n+2}$	$(n+2)^{n+3}$
$(n+3)^{n+4}$	$(n+4)^{n+5}$	$(n+5)^{n+6}$
$(n+6)^{n+7}$	$(n+7)^{n+8}$	$(n+8)^{n+9}$

Раздел 6. Антимагические квадраты с корнями

Упражнение 1. Проверьте при помощи калькулятора, что данные квадраты — антимагические:

$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
$\sqrt{8}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$

$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$
$\sqrt{9}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{11}$

Упражнение 2. Докажите без помощи калькулятора, что квадраты из предыдущего упражнения антимагические.

Теорема 6а. При любом натуральном значении n данный квадрат будет антимагическим:

\sqrt{n}	$\sqrt{n+1}$	$\sqrt{n+2}$
$\sqrt{n+3}$	$\sqrt{n+4}$	$\sqrt{n+5}$
$\sqrt{n+6}$	$\sqrt{n+7}$	$\sqrt{n+8}$

Доказательство. Для удобства введем такие обозначения (см. рисунок ниже):

S_1, S_2, S_3 — суммы чисел в соответствующих столбцах;

$\overline{S_1}, \overline{S_2}, \overline{S_3}$ — суммы чисел в соответствующих строках;
 $D(\nwarrow)$ — сумма чисел по диагонали от верхней левой клетки;
 $D(\nearrow)$ — сумма чисел по диагонали от нижней левой клетки.

\sqrt{n}	$\sqrt{n+1}$	$\sqrt{n+2}$	\bar{S}_1	
$\sqrt{n+3}$	$\sqrt{n+4}$	$\sqrt{n+5}$	\bar{S}_2	
$\sqrt{n+6}$	$\sqrt{n+7}$	$\sqrt{n+8}$	\bar{S}_3	
$D(\nearrow)$	S_1	S_2	S_3	$D(\searrow)$

Докажем, что при любом натуральном значении n выполняются следующие неравенства:

$$\overline{S_1} < S_1 < D(\nwarrow) < S_2 < D(\nearrow) < \overline{S_2} < S_3 < \overline{S_3}$$

Ясно, что из этого будет следовать утверждение теоремы.

То, что $\overline{S_1} < S_1$ и $S_1 < D(\nwarrow)$, очевидно. Докажем, что $D(\nearrow) < S_2$.

То есть, что $\sqrt{n} + \sqrt{n+8} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+7}$. Возведя обе части данного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство, так как обе части неравенства положительны:

$$n + 2\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+8} + n + 8 < n + 1 + 2\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+7} + n + 7.$$

Осталось проверить, что $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+8} < \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+7}$. Или же, что $n(n+8) < (n+1)(n+7)$. А это неравенство, как легко понять, истинно при любом значении n .

Упражнение 3. Завершите доказательство теоремы самостоятельно.

Упражнение 4. Проверьте, что данные квадраты — антимагические:

$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$
$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{6}$
$\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{9}$

$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{3}$
$\sqrt[4]{4}$	$\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{6}$
$\sqrt[4]{7}$	$\sqrt[4]{8}$	$\sqrt[4]{9}$

Гипотеза А (раздел 6). При любом натуральном значении k (где $k \geq 2$) данный квадрат будет антимагическим:

$\sqrt[k]{1}$	$\sqrt[k]{2}$	$\sqrt[k]{3}$
$\sqrt[k]{4}$	$\sqrt[k]{5}$	$\sqrt[k]{6}$
$\sqrt[k]{7}$	$\sqrt[k]{8}$	$\sqrt[k]{9}$

Гипотеза В (раздел 6). При любых натуральных значениях n и k (где $k \geq 2$) данный квадрат будет антимагическим:

$\sqrt[k]{n}$	$\sqrt[k]{n+1}$	$\sqrt[k]{n+2}$
$\sqrt[k]{n+3}$	$\sqrt[k]{n+4}$	$\sqrt[k]{n+5}$
$\sqrt[k]{n+6}$	$\sqrt[k]{n+7}$	$\sqrt[k]{n+8}$

Упражнение 5. Проверьте, что данный квадрат — антимагический:

$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[4]{4}$
$\sqrt[5]{5}$	$\sqrt[6]{6}$	$\sqrt[7]{7}$
$\sqrt[8]{8}$	$\sqrt[9]{9}$	$\sqrt[10]{10}$

Гипотеза С (раздел 6). Для любого натурального числа $n \geq 2$ данный квадрат будет антимагическим:

$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[n+1]{n+1}$	$\sqrt[n+2]{n+2}$
$\sqrt[n+3]{n+3}$	$\sqrt[n+4]{n+4}$	$\sqrt[n+5]{n+5}$
$\sqrt[n+6]{n+6}$	$\sqrt[n+7]{n+7}$	$\sqrt[n+8]{n+8}$

Литература

1. Акулич И. Антимагические квадраты // Фокус. - 1994. - № 2.
2. Ваннэ Ю. Антимагические квадраты // Репетитор. - 1999. - № 3.

Лейб Штейнгарц,
доктор педагогики,
Иерусалим, Израиль.

E-mail: leybleyb@yahoo.com

О полной производной и полиномиальных неравенствах

П. В. Бибиков

Предложен метод доказательства полиномиальных неравенств нескольких переменных (при неотрицательных значениях переменных), основанный на применении полной производной многочлена — производной по некоторому выделенному направлению. Этим методом, в частности, удастся доказать многие классические полиномиальные неравенства.

1. Введение

Одной из основных идей решения многих олимпиадных задач является рассмотрение некоторых специальных частных случаев, из которых следует общее доказательство. Можно вспомнить, например, усреднение в комбинаторике (где рассмотрение ситуации «в среднем» позволяет многое сказать о существовании тех или иных конкретных конфигураций), принцип крайнего (суть которого как раз в том, чтобы рассмотреть некоторое предельное положение), движения точек в геометрии (где идеи линейности помогают доказывать общие утверждения, сводя их к нескольким простым вырожденным случаям), метод Штурма (когда мы сдвигаем переменные с сохранением их суммы или произведения, тем самым сводя задачу к случаю одинаковых переменных) или идеи выпуклости (соображения о том, что максимальное значение выпуклой на отрезке функции достигается на одном из его концов).

В данной статье мы рассмотрим еще один метод из этой серии, позволяющий достаточно универсально доказывать многие полиномиальные неравенства. Данный метод мы называем *методом полной производной*, и в некотором роде он является далеким обобщением известного *pqr*-метода доказательства неравенств.

2. Полная производная

Договоримся, что в данной статье мы будем рассматривать лишь неравенства, справедливые при неотрицательных значениях переменных.

Прежде всего определим понятие полной производной многочлена многих переменных и опишем сам метод ее применения при доказательстве неравенств.

Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Наша цель — доказать неравенство

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad \text{при } x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Чтобы понять, в чем заключается метод полной производной, рассмотрим сначала простой случай одной переменной: $n = 1$ и $P(x_1) \geq 0$. Один из способов доказать это неравенство — проверить, что многочлен $P(x_1)$ неубывает при $x_1 \geq 0$ и убедиться в справедливости неравенства $P(0) \geq 0$. Проверить, что многочлен P неубывает, можно, если рассмотреть его производную $P'(x_1)$ и доказать, что она неотрицательна: $P'(x_1) \geq 0$ при $x_1 \geq 0$. Поскольку степень многочлена P' на 1 меньше степени многочлена P , неравенство $P'(x_1) \geq 0$ можно попробовать доказать тем же способом: вычислить его производную (т.е. $P''(x_1)$) и проверить, что она неотрицательна. В конце концов мы придем к

многочлену маленькой степени (например, квадратному), для которого доказать необходимое неравенство уже легко. Последовательно поднимаясь затем к многочленам более высокой степени, мы в конце концов докажем и исходное неравенство $P(x_1) \geq 0$.

Попробуем обобщить это соображение на случай многих переменных. Прежде всего нам нужно грамотно обобщить понятие производной. Можно предположить, что аналогом производной для случая многочлена многих переменных является частная производная, но тогда нам нужно будет посчитать не одну частную производную, а сразу n , что существенно повышает сложность задачи. Поэтому мы поступим по-другому.

Зафиксируем произвольную точку $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и рассмотрим сдвиг этой точки на одну и ту же величину t :

$$x_1 = x_1^0 + t, \quad x_2 = x_2^0 + t, \quad \dots \quad x_n = x_n^0 + t.$$

Таким образом, многочлен P превращается в многочлен от одной переменной t .

Определение 1. Производная многочлена P по переменной t называется *полной производной* и обозначается через ΔP .

Замечание 1. По сути полная производная — это производная вдоль векторного поля с компонентами $(1, 1, \dots, 1)$. Подобная трактовка возможна и для принципа Штурма, причем она оказывается весьма плодотворной.

Предположим, что нам нужно доказать неравенство $P(x, y) \geq 0$, где $P(x, y) = P(y, x)$ — симметричная функция. Принцип Штурма заключается в следующем. Мы предполагаем, что $x \leq y$ (это возможно в силу симметричности неравенства) и затем сдвигаем переменные x и y друг к другу, сохраняя их сумму. Иначе говоря, мы фиксируем точку (x^0, y^0) и рассматриваем точки $x = x^0 + t$, $y = y^0 - t$, где $t \geq 0$. Мы снова получаем функцию лишь от переменной t , и на этот раз мы хотим проверить, что эта функция невозрастает. В таком случае для доказательства неравенства $P(x, y) \geq 0$ достаточно доказать неравенство $P(s, s) \geq 0$, где $s = \frac{x+y}{2}$.

Как проверить, что функция от t невозрастает? Нужно посчитать производную по t и проверить, что она неположительна при $x \leq y$. Эта производная является производной функции P вдоль векторного поля v с компонентами $(1, -1)$ (т.е. производная x равна 1, а производная y равна -1).

Такой взгляд на принцип Штурма выглядит более удобным, нежели обычные попытки понять, как ведет себя функция при сдвиге переменных. Рассмотрим следующий пример.

Для $n \geq 2$ положительных вещественных чисел x_1, \dots, x_n , таких, что $x_1 + \dots + x_n = 1$, докажите, что

$$\left(\frac{1}{x_1^2} - 1\right) \left(\frac{1}{x_2^2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n^2} - 1\right) \geq (n^2 - 1)^n.$$

Пусть

$$P(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)$$

и $x \leq y$, $x + y \leq 1$. Что будет происходить с этой функцией, если мы будем сдвигать переменные x и y , сохраняя их сумму? Для этого посчитаем производную вдоль векторного поля $v = (1, -1)$:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -\frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{y^2} - 1\right) + \frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{2(y-x)(y^2 + yx + x^2 - 1)}{x^3 y^3} \leq \frac{2(y-x)(y+x-1)}{x^3 y^3} \leq 0$$

(в последнем переходе мы использовали формулы $y^2 + yx = y(y+x) \leq y$ и $x^2 \leq x$), а значит, $P(x, y) \geq P(s, s)$, где $s = \frac{x+y}{2}$.

Таким образом, если $n = 2$, то $P(x_1, x_2) \geq P(s, s) = P(1/2, 1/2) = 9$, что и требовалось. Если же $n > 2$, то теперь будем сдвигать переменные s_1, s_1 и $x_3 \geq s_1$, прибавляя к s_1 величину t и вычитая из x_3 величину $2t$ (здесь $s_1 = (x_1 + x_2)/2$). Проверить, что при таком сдвиге значение левой части нашего неравенства не увеличивается, можно аналогичными методами: для этого достаточно посчитать

производную выражения $\left(\frac{1}{s_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{s_1^2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3^2} - 1\right)$ вдоль векторного поля $v = (1, 1, -2)$, являющегося суммой векторных полей $v_1 = (1, 0, -1)$ и $v_2 = (0, 1, -1)$. Поскольку для каждого из полей v_1, v_2 производная вдоль него неположительна в соответствии с рассуждениями из предыдущего абзаца, то и производная вдоль v неположительна, что и требовалось.

Последовательно выравнивая значения переменных, в конечном счете получаем, что наименьшее значение выражения из левой части неравенства достигается, когда все x_i равны $\frac{1}{n}$. В этом случае мы получаем в точности правую часть, что и доказывает наше неравенство.

Упражнение 1. Сумма положительных чисел x_1, \dots, x_n равна 1. Докажите следующие неравенства:

$$1. 0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}; \quad 2. \frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1x_2\dots x_n} \geq (n-1)^n; \quad 3. \frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)} \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Конец замечания 1.

Обсудим подробнее, что собой представляет полная производная, и в чем заключается смысл ее рассмотрения. Прежде всего отметим, что полная производная ΔP не зависит от выбора стартовой точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (от выбора этой точки зависит лишь область определения переменной t , поскольку $t \geq -\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$), т.к. $\Delta x_i = 1$ для любого i . Иначе говоря, полная производная позволяет дифференцировать многочлен P по привычным правилам взятия производной, при этом дифференцируются сразу все переменные. Например, $\Delta(x_1x_2) = \Delta(x_1)x_2 + x_1\Delta(x_2) = x_1 + x_2$ и

$$\Delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) - (x_3 + x_1) = 0.$$

Теперь поймем, как связана полная производная с поведением многочлена P . Предположим, что выполнено неравенство $\Delta P \geq 0$. Тогда многочлен P как функция от t является неубывающей. Это означает, что для доказательства неравенства $P \geq 0$ достаточно доказать это неравенство для наименьшего возможного значения переменной t . С учетом ограничений $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ это означает, что одну из переменных x_1, x_2, \dots, x_n можно положить равной 0.

В результате вместо неравенства на n переменных мы получаем неравенство на $(n-1)$ переменную. Продолжая этот процесс, мы рано или поздно сведем задачу либо к малому количеству переменных, либо к неравенству, которое мы уже сможем решить «руками».

Ну а для доказательства неравенства $\Delta P \geq 0$ можно применить тот же самый прием. Таким образом, мы постепенно уменьшаем степень многочлена P и в конце концов сведем задачу к многочлену невысокой степени, решить которую уже несложно.

Замечание 2. Разумеется, можно применять такой метод и к произвольным неравенствам, а не только полиномиальным. Однако функции, отличные от многочленов, редко имеют простую полную производную...

В чем преимущество такого подхода? Причин здесь несколько.

Во-первых, работая с полиномиальным выражением, естественно попытаться понизить его степень, чему способствует взятие производной. Рассмотрение многочлена более низкой степени часто оказывается более простым и удобным.

Во-вторых, при доказательстве неравенств важно бывает отслеживать ситуации, в которых достигается точное равенство. Классические неравенства Коши, Йенсена и т.д. обращаются в равенства лишь в ситуации, когда все переменные равны друг другу: например,

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n \quad (\text{при } x_1, \dots, x_n \geq 0).$$

Однако более трудные неравенства обращаются в равенство не только когда все переменные равны друг другу, но и когда часть из них равна 0. Примером является классическое неравенство Шура

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2,$$

равенство в котором достигается в ситуации, когда либо все три переменные равны друг другу, либо лишь две переменные равны друг другу, а третья равна 0.

Возможность обращения некоторых переменных в 0 означает, что доказательство таких неравенств не может быть получено применением *только лишь* неравенств Коши, Йенсена и других неравенств, которые обращаются в равенство, лишь когда все переменные равны друг другу. С другой стороны, как мы увидим в дальнейшем, метод полной производной позволяет работать с такими ситуациями.

Наконец, в-третьих, иногда многочлен P является несимметрическим (а, например, циклическим, т.е. переходящим в себя лишь при циклической перестановке переменных, а не при произвольной перестановке), а его полная производная уже является симметрической, что также упрощает задачу.

3. Пример: неравенства Мюрхеда и Шура

Теперь посмотрим, как метод полной производной работает на практике. Мы начнем с двух классических результатов в теории неравенств: *неравенство Мюрхеда* и *неравенство Шура*.

Сначала поговорим о неравенстве Мюрхеда. Для краткости будем рассматривать лишь случай трех переменных, хотя неравенство Мюрхеда справедливо и для произвольного числа переменных. Чтобы записать это неравенство, нам потребуется определить симметрические многочлены $T_{\alpha,\beta,\gamma}$. А именно, положим

$$T_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{\alpha} x_{\sigma(2)}^{\beta} x_{\sigma(3)}^{\gamma},$$

где суммирование берется по всевозможным перестановкам σ трех переменных, а числа α , β и γ — целые неотрицательные¹. Например,

$$T_{2,0,0} = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad T_{1,1,0} = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

Ясно, что от перестановки индексов α , β и γ многочлен $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ не изменится, поэтому всюду далее мы будем считать, что $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Неравенство Мюрхеда связывает два многочлена $T_{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i}$, где $i = 1, 2$. Для этого нам потребуется еще одно определение.

Определение 2. Набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *мажорирует* набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, если выполнены следующие неравенства:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 \geq \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2.$$

Теперь мы готовы сформулировать неравенство Мюрхеда.

Теорема 1 (Неравенство Мюрхеда). *Если набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ мажорирует набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то для неотрицательных значений переменных справедливо неравенство $T_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} \geq T_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}$.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по степени $d = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ симметрических многочленов $T_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}$ и $T_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}$. Для случая $d = 1$ неравенство Мюрхеда очевидно. Докажем теперь шаг индукции. Рассмотрим многочлен

$$P(x_1, x_2, x_3) = T_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} - T_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}.$$

Докажем, что если набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ мажорирует набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то полная производная многочлена P неотрицательна. Для этого нам потребуется важная формула для полной производной симметрического многочлена $T_{\alpha,\beta,\gamma}$:

$$\Delta T_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha T_{\alpha-1,\beta,\gamma} + \beta T_{\alpha,\beta-1,\gamma} + \gamma T_{\alpha,\beta,\gamma-1}. \quad (1)$$

¹На самом деле неравенство Мюрхеда справедливо и для дробных, и даже для иррациональных степеней, но эти случаи следуют из случая целых степеней, который для нас будет основным.

Упражнение 2. Докажите формулу (1).

По предположению индукции имеют место неравенства

$$T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} \geq T_{\alpha_2-1, \beta_2, \gamma_2}, \quad T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1} \geq T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2}, \quad T_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1-1} \geq T_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2-1}.$$

Из них легко следует неравенство $\Delta P \geq 0$, равносильное неравенству

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} - \alpha_2 T_{\alpha_2-1, \beta_2, \gamma_2} \right) + \left(\beta_1 T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1} - \beta_2 T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2} \right) + \\ & \quad + \left(\gamma_1 T_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1-1} - \gamma_2 T_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2-1} \right) \geq 0. \quad (2) \end{aligned}$$

В самом деле, пусть $\alpha_1 > \alpha_2$. Разобьем выражение $\alpha_1 T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1}$ на два:

$$\alpha_1 T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} = \alpha_2 T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} + (\alpha_1 - \alpha_2) T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1}.$$

Первое выражение не меньше $\alpha_2 T_{\alpha_2-1, \beta_2, \gamma_2}$, поэтому первая скобка в неравенстве (2) неотрицательна. Для второго выражения по предположению индукции имеем

$$T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} \geq T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2},$$

значит,

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \alpha_2) T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1} + \beta_1 T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1} - \beta_2 T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2} \geq \\ & \geq \beta_1 T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1} - (\beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2) T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2} \geq \\ & \geq (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2} \geq 0 \end{aligned}$$

по условию мажоризации и предположению индукции.

Обратите внимание: вообще говоря, нельзя утверждать, что вторая скобка в неравенстве (2) неотрицательна. Но если к этой скобке добавить выражение $(\alpha_1 - \alpha_2) T_{\alpha_1-1, \beta_1, \gamma_1}$, оставшееся из первой скобки, то получившаяся сумма уже будет неотрицательной.

Теперь осталось разбить слагаемое $\beta_1 T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1}$ на две части

$$(\beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2) T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1} + (\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) T_{\alpha_1, \beta_1-1, \gamma_1},$$

первое из которых оценивает слагаемое $(\beta_2 - \alpha_1 + \alpha_2) T_{\alpha_2, \beta_2-1, \gamma_2}$, а второе вместе с последней скобкой также дает неотрицательное выражение в силу условия мажоризации.

Значит, $\Delta P \geq 0$, что дает возможность доказать неравенство Мюрхеда при $x_3 = 0$. Возникает неравенство Мюрхеда для меньшего числа переменных, так что применив на этот раз индукцию по числу переменных, мы наконец-то заканчиваем доказательство.

Замечание 3. Классическое доказательство неравенства Мюрхеда использует перестройку диаграмм Юнга. Ознакомиться с ним можно, например, в [1].

Упражнение 3. Как изменится доказательство, если $\alpha_1 = \alpha_2$?

Упражнение 4. Обобщите приведенное выше доказательство неравенства Мюрхеда на случай произвольного количества переменных.

Упражнение 5. Докажите с помощью неравенства Мюрхеда неравенство Коши для n переменных.

Может показаться, что доказательство неравенства Мюрхеда с использованием полных производных довольно громоздко. Но это связано с наличием сразу шести параметров в неравенстве — степеней переменных x_1, x_2, x_3 . В дальнейшем мы увидим, что полная производная работает достаточно быстро, когда в неравенстве нет такого большого числа параметров.

В качестве еще одного примера докажем неравенство Шура.

Теорема 2 (Неравенство Шура). *Имеет место неравенство*

$$T_{3,0,0} + T_{1,1,1} \geq 2T_{2,1,0}.$$

Доказательство. Перенесем все слагаемые в левую часть и возьмем полную производную получившегося многочлена:

$$\Delta(T_{3,0,0} + T_{1,1,1} - 2T_{2,1,0}) = 3T_{2,0,0} + 3T_{1,1,0} - 4T_{1,1,0} - 2T_{2,0,0} = T_{2,0,0} - T_{1,1,0} \geq 0$$

по неравенству Мюрхеда. Значит, достаточно доказать неравенство Шура, когда одна из переменных равна 0. В таком случае мы получаем неравенство $T_{3,0} \geq T_{2,1}$, которое также верно по неравенству Мюрхеда. Таким образом, неравенство Шура доказано.

Упражнение 6. Докажите, что для любого $n \geq 3$ имеет место неравенство

$$T_{n,0,0} + T_{n-2,1,1} \geq 2T_{n-1,1,0}.$$

Данное неравенство также называется неравенством Шура.

Упражнение 6. С помощью полной производной для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенства:

1. $(x + y + z)^3 + 12xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx),$
2. $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}(x + y + z)^3,$
3. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 3(x^3y + y^3z + z^3x).$

Для каждого неравенства укажите все наборы переменных, при которых оно обращается в равенство.

4. pqr -метод и неравенства на $T_{\alpha,\beta,\gamma}$

В начале статьи мы говорили о том, что метод полной производной является в некотором смысле обобщением так называемого pqr -метода доказательства неравенств. Напомним, что собой представляет pqr -метод, а также докажем одно из известных неравенств, связанных с ним.

Пусть P — симметрический многочлен от трех переменных, и мы хотим доказать неравенство $P(x, y, z) \geq 0$. Тогда рассмотрим элементарные симметрические многочлены

$$p = x + y + z, \quad q = xy + yz + zx, \quad r = xyz,$$

выразим многочлен P как многочлен от p, q, r и будем доказывать неравенство $F(p, q, r) \geq 0$, где $F(p, q, r) \equiv P(x, y, z)$. Рассмотрим получившийся многочлен как многочлен от r . Тогда если этот многочлен выпуклый по r , то достаточно проверить неравенство $F(p, q, r) \geq 0$ в крайних значениях переменной r . Обычно эти крайние значения соответствуют ситуациям, когда или одна из переменных x, y, z равна 0 (это происходит, поскольку $r = xyz \geq 0$ при $x, y, z \geq 0$, откуда $r = 0$, если одна из переменных x, y или z равна 0), или когда две из трех переменных равны друг другу (если выбрать r больше такого значения, у кубического уравнения $t^3 - pt^2 + qt - r$ будет не три неотрицательных корня, а только один). Таким образом, мы снова сводим задачу к неравенству от двух переменных, с которым работать уже проще.

Вот, например, решение pqr -методом неравенства

$$(x + y + z)^3 + 12xyz \geq 4(xy + yz + zx)(x + y + z).$$

Переносим все слагаемые в левую часть и переписывая ее через переменные p, q, r , получаем неравенство $12r - 4q + p^3 \geq 0$. Поскольку функция в левой части линейна по r , она принимает минимальное значение в крайних значениях переменной r . Т.к. числа x, y, z неотрицательны, то $r \geq 0$, поэтому первый случай, требующий проверки, — это ситуация, когда $r = 0$, т.е. без ограничения общности $z = 0$. Второй случай, как уже отмечалось выше, соответствует ситуации, когда две переменные принимают равные значения, т.е. $y = z$.

При $z = 0$ получаем неравенство $(x + y)^3 \geq 4xy(x + y)$, которое легко превращается в верное неравенство $(x + y)(x - y)^2 \geq 0$.

При $y = z$ получаем неравенство $(x + 2y)^3 + 12xy^2 \geq 4(2xy + y^2)(x + 2y)$, которое после алгебраических преобразований также преобразуется в верное неравенство $3y^2 + (x - y)^2 \geq 0$.

Таким образом, наше неравенство доказано.

Читатель может узнать о дальнейшем развитии техники pqr -метода, обратившись к статье [2].

Для нас сейчас будет играть ключевую роль вопрос о том, в каких диапазонах может меняться значение переменной r при фиксированных значениях p и q , если числа x, y и z неотрицательны. Этот факт хорошо известен в pqr -методе. А именно, имеет место следующее утверждение (его доказательство можно найти, например, в [2]).

Утверждение 1. Если $x, y, z \geq 0$ и $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, то выполнены неравенства

$$\frac{-2(p^2 - 3q)^{3/2} - (p^3 - 6pq)}{18} \leq r \leq \frac{2(p^2 - 3q)^{3/2} - (p^3 - 6pq)}{18}. \quad (3)$$

Для нас будет интересен следующий момент. Неравенство (3) можно переписать в терминах симметрических многочленов $T_{\alpha,\beta,\gamma}$. А именно, это неравенство равносильно следующему:

$$|T_{3,0,0} + 2T_{1,1,1} - 3T_{2,1,0}| \leq 2Q^{3/2}, \quad (4)$$

где $Q = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$.

Оказывается, имеет место целая серия аналогичных неравенств, в которых фигурируют симметрические многочлены $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и выражение Q . Покажем, как можно получать такие неравенства для многочленов более высоких степеней. Поможет нам в этом именно техника полной производной.

Сначала приведем доказательство неравенства (4), использующее полную производную (а также объясняющее появление странного на первый взгляд выражения Q).

Заметим, что

$$\Delta Q = 0, \quad \text{и} \quad \Delta(T_{3,0,0} + 2T_{1,1,1} - 3T_{2,1,0}) = 3T_{2,0,0} + 6T_{1,1,0} - 6T_{1,1,0} - 3T_{2,0,0} = 0,$$

т.е. левая и правая части неравенства (4) не меняются при одновременном уменьшении переменных x, y и z на одно и то же число. Значит, достаточно проверить неравенство (4) при $z = 0$. Тогда оно записывается в виде

$$|2T_{3,0} - 3T_{2,1}| \leq 2(x^2 - xy + y^2)^{3/2}.$$

Теперь для удобства снимем модуль и рассмотрим пару неравенств

$$-2(x^2 - xy + y^2)^{3/2} \leq 2T_{3,0} - 3T_{2,1} \leq 2(x^2 - xy + y^2)^{3/2}.$$

Будем доказывать лишь левое неравенство (правое доказывается абсолютно аналогично).

Поскольку получившееся неравенство от двух переменных является однородным и симметрическим, достаточно доказать его при $y = 0$ и $y = 1$. В первом случае неравенство очевидно, а во втором мы получаем неравенство

$$f(x) = 2(x^3 + 1) - 3(x^2 + x) + 2(x^2 - x + 1)^{3/2} \geq 0.$$

Для его доказательства посчитаем производную (на этот раз обычную) функции f :

$$f'(x) = 3(2x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \cdot (2x - 1)).$$

Оказывается, что производная $f'(x)$ не всегда положительна (например, $f'(0) = -6 < 0$). Но вторая производная $f''(x)$ уже оказывается неотрицательной:

$$f''(x) = 3\left(4x - 2 + \frac{(2x - 1)^2}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right) \geq 6((2x - 1) + |2x - 1|) \geq 0$$

(в первом неравенстве мы применили неравенство Коши к двум последним слагаемым). Таким образом, функция f выпукла.

Что это означает? Это означает, что первая производная f' имеет ровно один корень (поскольку она монотонна), являющийся точкой абсолютного минимума функции f при $x \geq 0$. Эта точка легко угадывается: она равна 1. Поэтому достаточно проверить неравенство $f(1) \geq 0$, которое верно.

Таким образом, неравенство (4) доказано.

Упражнение 8. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z справедливо неравенство

$$|T_{3,0,0} + 2T_{1,1,1} - 3T_{2,1,0}| \leq 2q^{3/2},$$

где $q = xy + yz + zx$.

Суммируем наши соображения, примененные при доказательстве неравенства (4):

- полная производная левой и правой частей неравенства равна 0, что дает возможность подставить $z = 0$;
- при подстановке $z = 0$ мы получаем однородное симметрическое неравенство от двух переменных, поэтому достаточно доказать его при $y = 0$ и $y = 1$;
- при $y = 0$ неравенство очевидно, а при $y = 1$ получается выпуклая по x функция f , что дает возможность найти (угадать) корень x_0 ее первой производной (являющийся глобальным минимумом функции f) и проверить справедливость неравенства $f(x_0) \geq 0$.

Эти соображения позволяют получить целую серию аналогичных неравенств для симметрических многочленов более высоких степеней. Вот лишь несколько примеров.

1. $T_{4,0,0} + 2T_{2,1,1} - 3T_{2,2,0} + 2Q^2 \geq 0$;
2. $2T_{3,1,0} + T_{2,1,1} - 3T_{2,2,0} + 2Q^2 \geq 0$;
3. $T_{5,0,0} - 5T_{4,1,0} + 3T_{3,2,0} + 7T_{3,1,1} - 6T_{2,2,1} \geq 0$;
4. $T_{5,0,0} - 5T_{4,1,0} + 2T_{3,2,0} + 8T_{3,1,1} - 6T_{2,2,1} + 2Q^{5/2} \geq 0$

Как были придуманы эти неравенства? Поясним механизм их нахождения на примере последних двух неравенств. Рассмотрим комбинацию симметрических многочленов $T_{5,0,0}$, $T_{4,1,0}$, $T_{3,2,0}$, $T_{3,1,1}$ и $T_{2,2,1}$ с неизвестными коэффициентами:

$$aT_{5,0,0} + bT_{4,1,0} + cT_{3,2,0} + dT_{3,1,1} + eT_{2,2,1}.$$

Мы хотим подобрать коэффициенты так, чтобы полная производная этой линейной комбинации была бы неотрицательна (например, была бы равна 0). Посчитаем эту производную:

$$(5a + b)T_{4,0,0} + (4b + 2c + 2d)T_{3,1,0} + (3c + e)T_{2,2,0} + (3d + 4e)T_{2,1,1}.$$

Теперь возьмем какую-нибудь неотрицательную комбинацию симметрических многочленов степени 4 и запишем систему линейных уравнений на неизвестные коэффициенты a, b, c, d, e , чтобы получить эту комбинацию. В неравенстве под номером 3 выбрана комбинация $T_{2,2,0} - T_{2,1,1}$, а в неравенстве 4 — тривиальная комбинация, равная 0. Для неравенства 3 получается система

$$\begin{cases} 5a + b = 0 \\ 4b + 2c + 2d = 0 \\ 3c + e = 1 \\ 3d + 4e = -1. \end{cases}$$

Одно из ее решений имеет вид $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{5}{3}, c = 1, d = \frac{7}{3}, e = -2$. Домножая на общий знаменатель, находим искомое неравенство.

Для неравенства 4, проводя аналогичные рассуждения, мы получаем выражение $T_{5,0,0} - 5T_{4,1,0} + 2T_{3,2,0} + 8T_{3,1,1} - 6T_{2,2,1}$, которое, однако, всегда отрицательно. И чтобы это исправить, мы прибавляем к нему выражение $2Q^{5/2}$, которое не влияет на полную производную (напомним, что $\Delta Q = 0$), но которое неотрицательно, а потому помогает «подправить» исходную комбинацию симметрических многочленов, сделав ее положительной. Степень $\frac{5}{2}$ выбирается из соображений однородности, а коэффициент 2 появляется для того, чтобы обеспечить выполнение неравенства при $x = y$ и $z = 0$.

Замечание 4. В некотором роде описанный выше процесс — это процедура *полного интегрирования*, обратная вычислению полной производной: мы берем заведомо неотрицательную комбинацию симметрических многочленов степени 4 и пытаемся найти комбинацию симметрических многочленов степени 5, чья полная производная равнялась бы нашей выбранной комбинации. К сожалению, автору не удалось придумать более быстрого способа производить такое полное интегрирование, равно как и не удалось доказать, что приведенный алгоритм всегда дает верные неравенства.

Обратим внимание на еще один интересный факт. Указанные неравенства остаются верными при замене выражения $Q = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ на выражение $q = xy + yz + zx$. Автору неизвестно неравенство аналогичного вида, верное для Q и неверное для q (или наоборот), равно как неизвестно какое-либо объяснение этого явления. . .

Также остается открытым вопрос, можно ли проинтерпретировать приведенные выше неравенства в терминах корней кубических многочленов. . .

Упражнение 9. Докажите приведенные выше неравенства, а также неравенства, получающиеся из них заменой Q на q .

Упражнение 9. Попробуйте самостоятельно выписать свои неравенства между симметрическими многочленами степени 4, 5 или 6.

5. (CD-3)-теорема

Результаты предыдущих разделов наводят на мысль о том, что полиномиальные симметрические и циклические неравенства практически всегда можно доказать, рассмотрев пару частных случаев. Оказывается, что эту мысль можно формализовать и превратить в строгое утверждение. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 ((CD-3)-теорема). Пусть P — циклический полином степени 3 от неотрицательных переменных x, y, z . В таком случае неравенство $P(x, y, z) \geq 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $P(x, x, x) \geq 0$ и $P(x, y, 0) \geq 0$.

Доказательство этой теоремы хоть и не очень трудно с идейной точки зрения (мы хотим проверить, что из указанных условий будет следовать неотрицательность полной производной ΔP), но довольно громоздко. Поэтому мы разобьем его на две части. Сначала рассмотрим случай циклического однородного полинома P .

Часть 1 (Доказательство для случая однородного полинома P). Пусть

$$P(x, y, z) = a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2y + y^2z + z^2x) + c(xy^2 + yz^2 + zx^2) + dxyz.$$

Тогда из условия $P(x, x, x) \geq 0$ следует, что

$$3a + 3b + 3c + d \geq 0.$$

Теперь будем рассматривать условие $P(x, y, 0) \geq 0$. Подставив $x = 1, y = 0$, получаем, что $a \geq 0$, а выбрав $x = 1, y = 1$, — что $2a + b + c \geq 0$.

Из этих трех неравенств следует неотрицательность полной производной ΔP . В самом деле,

$$3a + b + c = a + (2a + b + c) \geq 0 \quad \text{и} \quad 2b + 2c + d \geq -(3a + b + c),$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta P &= (3a + b + c)(x^2 + y^2 + z^2) + (2b + 2c + d)(xy + yz + zx) \geq \\ &\geq (3a + b + c)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $P(x, y, z) \geq 0$ следует из неравенства $P(x, y, 0) \geq 0$, что и требовалось доказать.

Упражнение 11. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенства

1. $27(x^2y + y^2z + z^2x + xyz) \leq 4(x + y + z)^3$;
2. $4(x^3 + y^3 + z^3) + 12(x^2y + y^2z + z^2x) \geq 15(xy^2 + yz^2 + zx^2) + 3xyz$;
3. $80(xy^2 + yz^2 + zx^2) + 48xyz \leq 9(x + y + z)^3 + 48(x^2y + y^2z + z^2x)$.

Теперь перейдем к доказательству (CD-3)-теоремы в общем случае.

Часть 2 (Доказательство (CD-3)-теоремы в общем случае). Пусть

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2y + y^2z + z^2x) + c(xy^2 + yz^2 + zx^2) + dxyz + \\ &\quad + e(x^2 + y^2 + z^2) + f(xy + yz + zx) + g(x + y + z) + h. \end{aligned}$$

Зафиксируем сумму $x + y + z = S \geq 0$ и рассмотрим однородный многочлен

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x, y, z) &= a(x^3 + y^3 + z^3) + b(x^2y + y^2z + z^2x) + c(xy^2 + yz^2 + zx^2) + dxyz + \\ &\quad + \frac{e}{S}(x^2 + y^2 + z^2 + f(xy + yz + zx))(x + y + z) + \frac{g}{S^2}(x + y + z)^2 + \frac{h}{S^3}(x + y + z)^3. \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что $\tilde{P}(x, y, z) \geq 0$ для любого $S \geq 0$. Применяя доказанное выше утверждение про симметрический однородный многочлен степени 3, получаем, что это условие равносильно выполнению неравенств $P_1(x) := \tilde{P}(x, x, x) \geq 0$ и $P_2(x, y) := \tilde{P}(x, y, 0) \geq 0$. Поскольку оба многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x, y)$ однородны, можно нормировать их и доказать неравенства $P_1(S) \geq 0$ и $P_2(x, y) \geq 0$ при $x + y = S$. Но $P_1(S) = P(x, x, x)$ и $P_2(x, y, 0) = P(x, y, 0)$, поэтому эти неравенства действительно справедливы, что и доказывает нашу теорему.

Упражнение 12. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенства

1. $3(x^2 + y^2 + z^2) + 6 + 4(x^2y + y^2z + z^2x) \geq 9(xy + yz + zx)$;
2. $x^3 + y^3 + z^3 + 9xyz + 4(x + y + z) \geq 8(xy + yz + zx)$;

3. $(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^2y + y^2z + z^2x) + 12 \geq 6(x + y + z) + (xy + yz + zx);$
4. $(x^2 + y^2 + z^2) + 3 + \frac{1}{6}(x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz) \geq (x + y + z) + 2(xy + yz + zx);$
5. $2(x^3 + y^3 + z^3) + xyz + (xy + yz + zx) + 2 \geq 2(x^2y + y^2z + z^2x) + (x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z).$

Применять (CD-3)-теорему можно не только к полиномиальным неравенствам. Докажем следующее неравенство:

$$F(a, b, c) = \frac{a + 2b}{c + 2b} + \frac{b + 2c}{a + 2c} + \frac{c + 2a}{b + 2a} \geq 3.$$

Если мы домножим его на $(c + 2b)(a + 2c)(b + 2a)$ и приведем подобные слагаемые, получится циклический однородный многочлен степени 3. Поэтому к нему (а значит, и к исходному неравенству) можно применить (CD-3)-теорему. Учитывая однородность, достаточно проверить неравенства $F(1, 1, 1) \geq 3$ и $F(x, 1, 0) \geq 3$. Первое неравенство очевидно, а второе записывается в виде

$$\frac{x + 2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{2x}{1 + 2x} \geq 3.$$

Это неравенство легко доказывается с помощью неравенства Коши:

$$\frac{x + 2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{2x}{1 + 2x} - 3 = \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{x(1 + 2x)} - 1 \geq \sqrt{\frac{2x(1 + x)}{x(1 + 2x)}} - 1 = \sqrt{\frac{2 + 2x}{1 + 2x}} - 1 \geq 0.$$

Упражнение 13. Для неотрицательных чисел x, y, z , не равных 0 одновременно, докажите неравенства

1. $1 \leq \frac{x+y}{x+4y+z} + \frac{y+z}{y+4z+x} + \frac{z+x}{z+4x+y} < \frac{4}{3};$
2. $\frac{3x+2y+z}{x+2y+3z} + \frac{3y+2z+x}{y+2z+3x} + \frac{3z+2x+y}{z+2x+3y} \geq 3;$
3. $\sqrt{\frac{x}{4x+4y+z}} + \sqrt{\frac{y}{4y+4z+x}} + \sqrt{\frac{z}{4z+4x+y}} \leq 1.$

6. Четыре переменные и неравенство Туркевича

В заключение мы рассмотрим применение метода полной производной для неравенств от четырех переменных. Наверное, одним из самых известных таких неравенств является неравенство Туркевича.

Утверждение 2 (Неравенство Туркевича) *Для неотрицательных чисел x, y, z, t имеет место неравенство*

$$2T_{4,0,0,0} + T_{1,1,1,1} - 3T_{2,2,0,0} \geq 0. \quad (5)$$

Замечание 5. Это неравенство вошло в шортлист Международной математической олимпиады 1986 г. Однако задача не вошла в окончательный вариант, поскольку была признана задачным комитетом чрезмерно сложной.

Доказательство. Пусть $P := 2T_{4,0,0,0} + T_{1,1,1,1} - 3T_{2,2,0,0}$. Полная производная равна

$$\Delta P = 4(2T_{3,0,0,0} + T_{1,1,1,0} - 3T_{2,1,0,0}).$$

Докажем, что $\Delta P \geq 0$. Для этого снова вычислим полную производную:

$$\Delta^2 P = 12(T_{2,0,0,0} - T_{1,1,0,0}) \geq 0$$

по неравенству Мюрхеда. Значит, неравенство $\Delta P \geq 0$ достаточно проверить при $x = y = z = t = 1$ и при $t = 0$. В первом случае неравенство очевидно, а во втором оно превращается в неравенство

$$6T_{3,0,0} + T_{1,1,1} - 6T_{2,1,0} \geq 0,$$

которое также справедливо по неравенству Мюрхеда.

Значит, и исходное неравенство достаточно проверить лишь при $x = y = z = t = 1$ и при $t = 0$. И снова в первом случае неравенство очевидно, а во втором оно превращается в неравенство

$$6T_{4,0,0} - 6T_{2,2,0} \geq 0,$$

которое также верно по неравенству Мюрхеда. Таким образом, неравенство Туркевича полностью доказано.

Упражнение 14. Для неотрицательных значений переменных докажите следующие неравенства:

1. $2T_{3,0,0,0} + T_{1,1,1,0} - 3T_{2,1,0,0} \geq 0$;
2. $T_{3,0,0,0} - 3T_{2,1,0,0} + 2T_{1,1,1,0} \geq 0$;
3. $T_{4,0,0,0} - 4T_{3,1,0,0} + 3T_{2,2,0,0} \geq 0$;
4. $\sum_{\text{сус}} x(x-y)(x-z)(x-t) \geq -\frac{(x+y+z+t)^4}{432}$ (в левой части стоит циклическая сумма).

Упражнение 15. Докажите следующий аналог (CD-3)-теоремы для многочленов от четырех переменных.

Пусть $P(x, y, z, t)$ — симметрический многочлен степени 3 от неотрицательных переменных x, y, z, t . Тогда неравенство $P(x, y, z, t) \geq 0$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$P(1, 1, 1, 1) \geq 0, \quad P(1, 1, 1, 0) \geq 0, \quad P(1, 1, 0, 0) \geq 0, \quad P(1, 0, 0, 0) \geq 0.$$

Автор благодарит С. Севастьянова за полезные обсуждения и внимание к работе.

Литература

- [1] Прасолов В. Многочлены. - М.: МЦНМО, 2003. - 336 с.
- [2] Розенберг М. Метод *uvw* для доказательства неравенств // Математическое образование. - № 3-4. - 2011. - с. 6-14.

*Биби́ков Павел Вита́льевич,
заведующий кафедрой математики
ГБОУ «Лицей “Вторая школа”», г. Москва,
старший научный сотрудник Института
проблем управления РАН, к.ф.-м.н.,
Почетный работник сферы образования РФ.*

E-mail: bibikov.pv@sch2.ru

Моделирование контуров листьев растений в среде GeoGebra

Г. А. Клековкин

В статье рассматривается использование возможностей интерактивной математической системы GeoGebra для моделирования контуров листьев растений уравнениями, заданными в полярной системе координат.

Окончание статьи. Первая часть опубликована в предыдущем выпуске журнала.

5. Обобщенные улитки Паскаля

Улитки Паскаля Б. Хабенихт называет кривыми *сердцевидного типа*. Кроме них к этому типу он относит кривые

$$\rho = a_0 + a_n \cos^n \varphi, \quad (10)$$

где n — нечетное натуральное число. При $n = 1$ уравнение (10) является уравнением улитки Паскаля, поэтому при n , отличном от 1, условимся кривую (10) называть *обобщенной улиткой Паскаля*. В частности, кривую

$$\rho = a(1 + \cos^n \varphi) \quad (11)$$

— *обобщенной кардиоидой*.

На примере последней экспериментально исследуем, как при фиксированном a меняется форма кривой при изменении n . Для этого достаточно создать динамическую модель, аналогичную модели, использованной для изучения формы различных улиток Паскаля. Только теперь потребуется дополнительно создать ползунок для показателя n степени косинуса (при создании этого ползунка выбирается опция *Целое число*).

На рисунке 16 показаны графики кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ и обобщенных кардиоид $\rho = 2(1 + \cos^7 \varphi)$ и $\rho = 2(1 + \cos^{37} \varphi)$, полученные с помощью построенной динамической модели. Меняя с помощью ползунка значение n , можно продолжить наблюдения за изменением формы обобщенной кардиоиды при изменении показателя степени косинуса в уравнении (11).

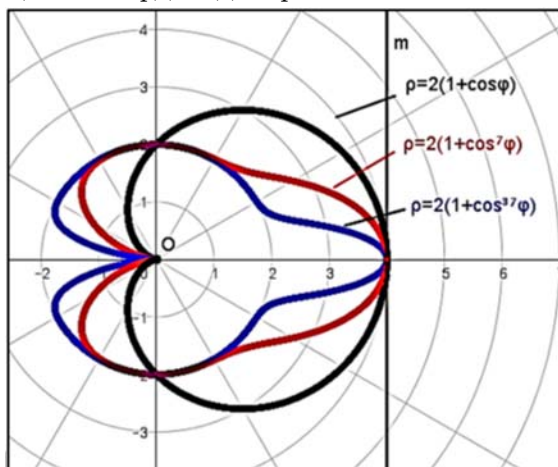


Рис. 16

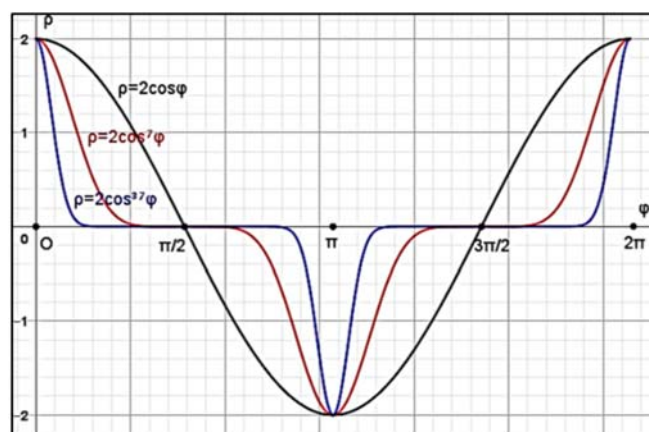


Рис. 17

Причину этих изменений легко понять, если сравнить на промежутке $[0, 2\pi]$ графики функций $\rho = 2 \cos \varphi$, $\rho = 2 \cos^7 \varphi$ и $\rho = 2 \cos^{37} \varphi$ в декартовой системе координат $O\varphi\rho$ (рис. 17). Видим, что

– в окрестности точек $\pi/2$ и $3\pi/2$ функции $\rho = 2 \cos^7 \varphi$ и $\rho = 2 \cos^{37} \varphi$ принимают значения, достаточно близкие к нулю, причем “размеры” этих окрестностей растут вместе с увеличением показателя n степени косинуса;

– при φ стремящемся к π функции стремятся к своему минимальному значению -2 , а скорость убывания возрастает вместе с n ;

– при φ стремящемся к 0 и 2π функции, наоборот, стремятся к максимальному значению, причем скорость возрастания также растет вместе с ростом n .

Это означает, что для полярных углов, близких к $\pi/2$ и $3\pi/2$, обобщенные кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos^7 \varphi)$ и $\rho = 2(1 + \cos^{37} \varphi)$ достаточно мало отличаются от окружности $\rho = 2$. При приближении величины полярного угла к π величины полярных радиусов точек обобщенных кардиоид убывают; для них, как и для обычной кардиоиды, полюс O полярной системы координат является точкой возврата первого рода. Для полярного угла в 0° полярный радиус ρ принимает наибольшее значение, равное 4. Сравнение обычной кардиоиды с обобщенными показывает, что последние в результате увеличения скорости изменения полярных радиусов в окрестности полярных углов 0° и 180° “прижимаются” к оси симметрии. Это открывает перспективу пытаться использовать уравнение (11) для моделирования контуров некоторых листьев за счет удачного выбора в нем показателя n степени косинуса.

Аналогичные результаты дает эмпирическое исследование с помощью динамической модели обобщенных улиток (10) при $a_0 \neq a_n$. Примеры таких улиток даны на рис. 18.

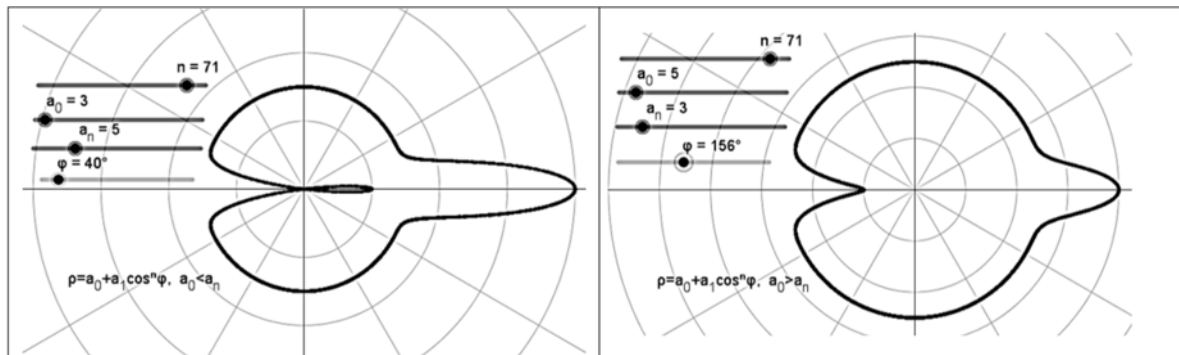


Рис. 18

В работах немецкого ученого кривые сердцевидного типа, как правило, используются в качестве своеобразного базисного “строительного материала” при составлении уравнений контуров листьев, имеющих один гладкий симметричный лепесток.

Так, например, контур листа *сирени*, по мнению Хабенихта, можно аналитически представить уравнением

$$\rho = 5 + 2 \cos \varphi + 3 \cos^{71} \varphi. \quad (12)$$

Кривая, определяемая этим уравнением, представлена на рисунке 19.

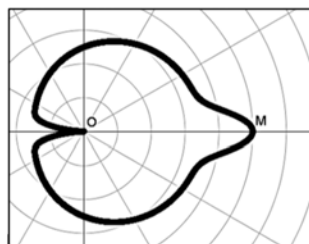


Рис. 19

Задания и задачи для самостоятельного решения

1. Представьте правую часть уравнения (10) в виде суммы Фурье.
2. Создайте динамическую модель, позволяющую строить различные типы обобщенных улиток Паскаля. С помощью этой модели проведите наблюдение, как меняются тип и форма улитки (10): а) для фиксированного коэффициента a_0 при изменении коэффициента a_1 ; б) для фиксированного коэффициента a_1 при изменении коэффициента a_0 ; в) для фиксированных коэффициентов a_0 и a_1 при изменении показателя степени n косинуса.
3. С помощью модели, созданной в предыдущем задании, выясните и объясните, зачем в определении обобщенной улитки Паскаля требуется, чтобы показатель степени косинуса был нечетным числом.
- 4*. Выясните, как расположена касательная обобщенных улиток Паскаля в их “вершине” $(a_0 + a_n, 0^\circ)$.

6. Контуры листьев и розы Гранди

При составлении уравнений контуров листьев, состоящих из нескольких лепестков, исходным строительным материалом для Хабенихта служат розы (или кривые Гранди), подробно изученные итальянским математиком Гвидо Гранди (*Guido Grandi*) в первой половине XVIII века [9].

Розами называют кривые, имеющие в полярной системе координат уравнение $\rho = a \sin k\varphi$ или

$$\rho = a \cos k\varphi, \quad (13)$$

где a, k — постоянные положительные действительные числа [4, с. 162].

Очевидно, что роза (13) целиком лежит в круге радиуса a с центром в полюсе O полярной системы координат. При конструировании уравнений контуров листьев особый интерес представляют розы с целым k . Такая роза состоит из k лепестков при нечетном k и из $2k$ лепестков при четном. В силу периодичности функции $\cos k\varphi$ каждый лепесток имеет ось симметрии. При $a = 4$ и $k = 2, 3, 4, 5$ изображения роз представлены на рис. 20.

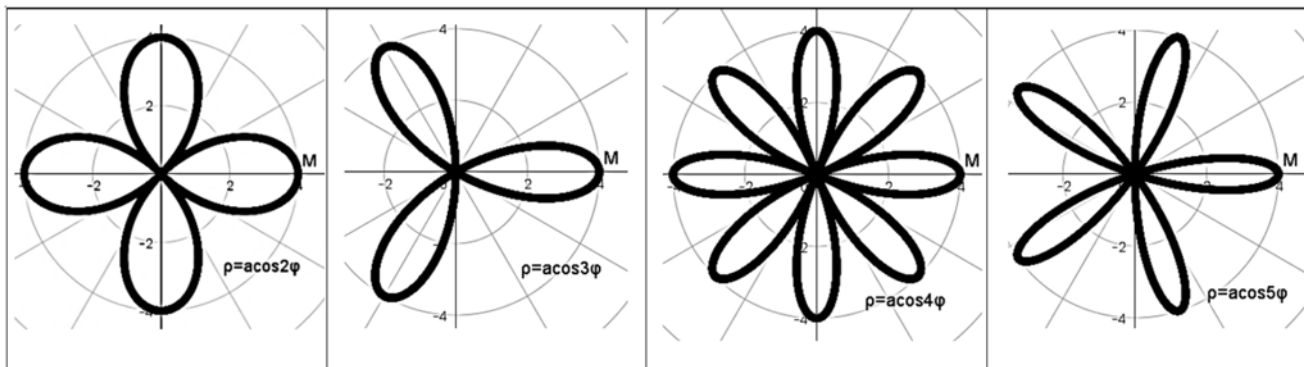


Рис. 20

Следующим естественным шагом становится исследование для кратных углов уравнения

$$\rho = a_0 + a_1 \cos k\varphi, \quad (14)$$

являющегося аналогом уравнения улиток Паскаля (7). Это уравнение отличается от уравнения (13) слагаемым a_0 в правой части, которое все полярные радиусы точек розы увеличивает на a_0 . Примеры различных типов кривых, определяемых уравнением (14), представлены на рис. 21 (для $k = 3$) и рис. 22 (для $k = 2, 4$).

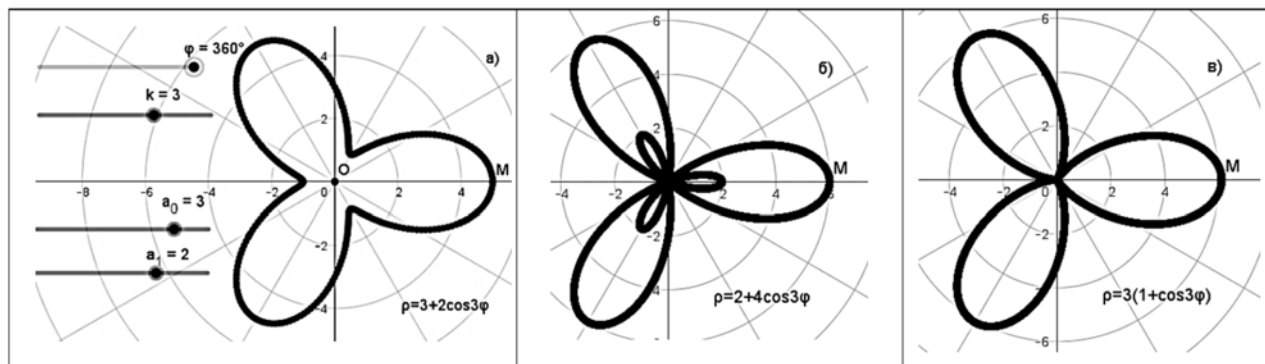


Рис. 21

При $k = 3$ видим, что, как и для улиток Паскаля, выделяются три типа кривых. Если $a_0 > a_1$, то полюс O полярной системы координат является внутренней точкой области, ограниченной кривой (рис. 21, а). Если $a_0 < a_1$, то полюс O является узловой точкой кривой, а полярный радиус ρ может принимать отрицательные значения. Поэтому кривая, в отличие от розы $\rho = a \cos 3\varphi$, имеет не три, а шесть петель (для внутренних петель $\rho < 0$) (рис. 21, б). Если $a_0 = a_1$, то полюс O также является узловой точкой, но здесь всегда $\rho \geq 0$ и кривая, как и роза $\rho = a \cos 3\varphi$, состоит из трех петель (рис. 21, в).

При четных k у кривой $\rho = a_0 + a_1 \cos k\varphi$, наоборот, число лепестков может стать меньше, чем у розы $\rho = a_1 \cos k\varphi$ (рис. 22, а, в для $k = 4$).

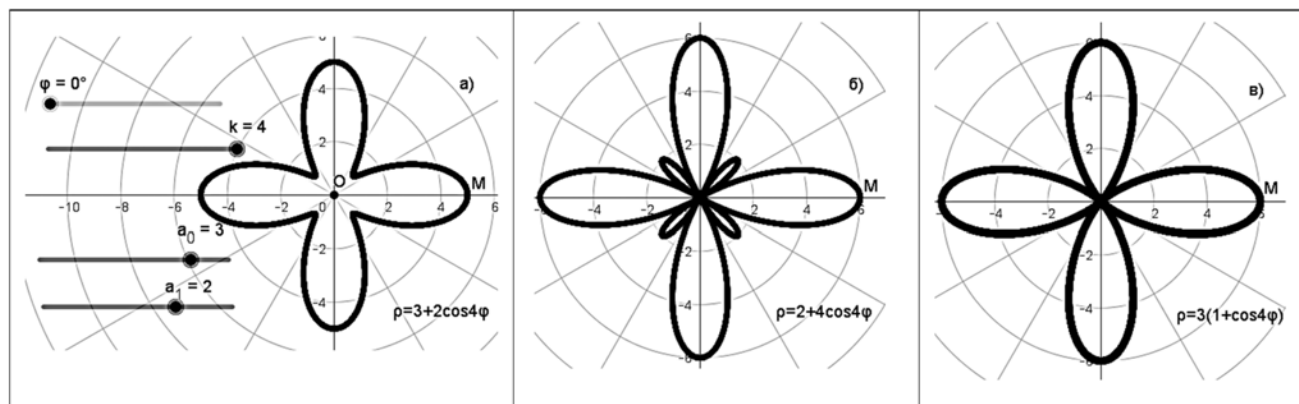


Рис. 22

Преобразуя с помощью дополнительного члена $a \sin^2 3\varphi$ правую часть уравнения $\rho = 4(1 + \cos 3\varphi)$, Хабенихт получает уравнения, которые, по его мнению, аналитически представляют контуры листьев трех хорошо известных растений:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 4(1 + \cos 3\varphi) + 4 \sin^2 3\varphi && (\text{кислица}); \\
 \rho &= 4(1 + \cos 3\varphi) + 2 \sin^2 3\varphi && (\text{трилистник}); \\
 \rho &= 4(1 + \cos 3\varphi) - 4 \sin^2 3\varphi && (\text{донник трилистный}).
 \end{aligned}$$

Кривые, построенные по этим уравнениям, показаны на рис. 23. В случае донника изображены только те точки кривой, для которых $\rho \geq 0$.

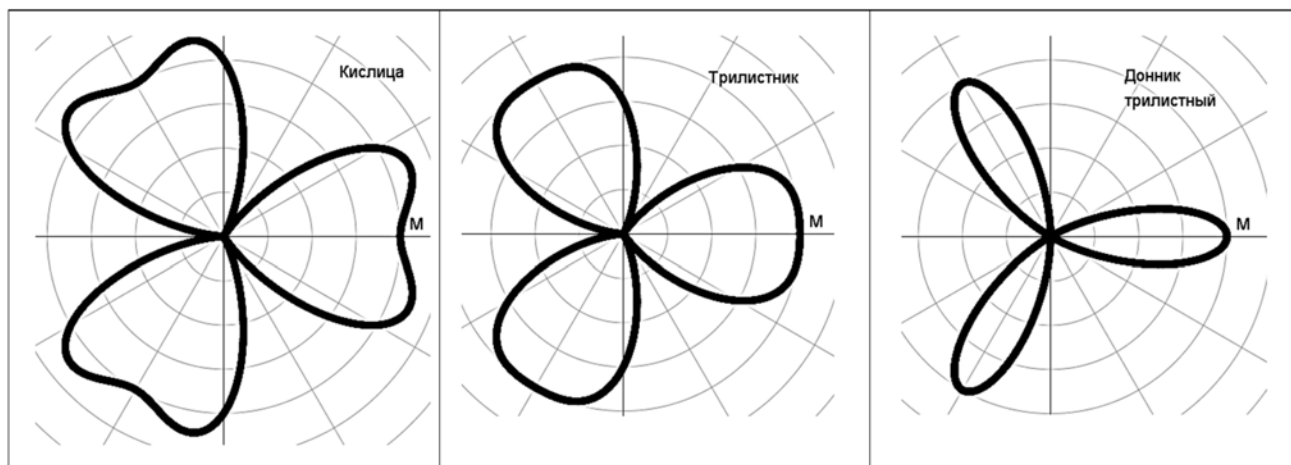


Рис. 23

Чтобы придать лепесткам кислицы сердцевидную форму, сделать более плоскими концы лепестков трилистника и, наоборот, вытянуть лепестки донника, Хабенихту требовалось подобрать четную периодическую функцию $\rho = f(\varphi)$, удовлетворяющую двум условиям: 1) множество нулей функции $\rho = f(\varphi)$ содержит нули функции $\rho = a_0(1 + \cos 3\varphi)$; 2) функция $\rho = f(\varphi)$ принимает минимальные значения для тех φ , при которых функция $\rho = a_0(1 + \cos 3\varphi)$ принимает максимальные. Функция $\rho = a_0 \sin^2 3\varphi$ удовлетворяет обоим этим требованиям. В самом деле, на промежутке $[0, 2\pi)$ обобщенная кардиоида имеет нули $\pi/3, \pi, 5\pi/3$ и принимает максимальные значения при $\varphi = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$. Функция же $\rho = a_0 \sin^2 3\varphi$ является четной периодической функцией с нулями $\pi k/3$, причем в нулях она принимает минимальные значения. На рис. 24 при $a_0 = 1$ графики функций и их суммы приведены в декартовой системе координат $O\varphi\rho$.

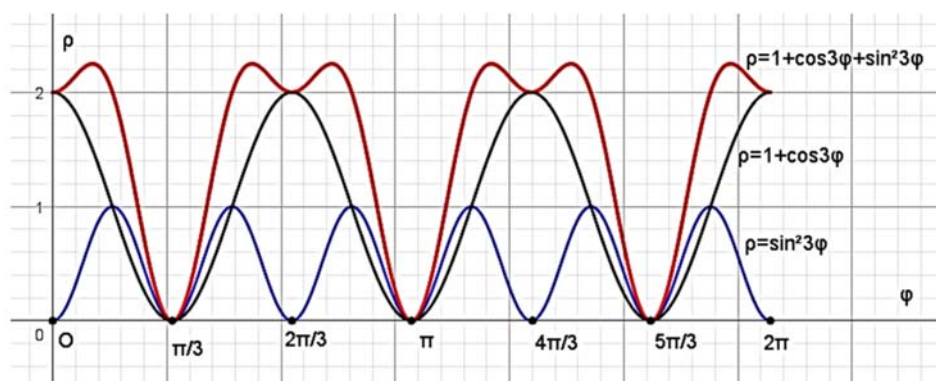


Рис. 24

Перспективным способом моделирования контуров листьев, состоящих из нескольких лепестков разных размеров, может также стать усложнение уравнений окружностей и улиток Паскаля с помощью добавления членов вида $a \cos k\varphi$, где k — целое. Таким образом, например, составляется уравнение $\rho = 8 + \cos \varphi + \cos 5\varphi$ контура листа настурции (рис. 1).

Другим примером уравнения, построенного подобным способом, является уравнение

$$\rho = 2(\cos \varphi + 2 \cos 7\varphi) \quad (15)$$

где $\rho \geq 0$. Кривая, определяемая этим уравнением, достаточно хорошо соответствует контуру листа люпина (рис. 25).

Похожее изображение края листа люпина (рис. 26) Хабенихт получает с помощью “более сложного” уравнения

$$\rho = 2(\cos \varphi + \sqrt{3 + \cos^2 \varphi}) - 6 \sin^2 \frac{7\varphi}{2} \quad (16)$$

($\rho \geq 0$). В качестве исходной кривой, как нетрудно заметить, он использует окружность с центром $(2, 0^\circ)$ радиуса 4 (см. уравнение (9)), а в качестве добавочного члена — функцию $-6 \sin^2 \frac{7\varphi}{2}$.

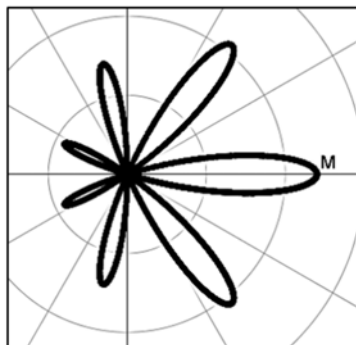


Рис. 25

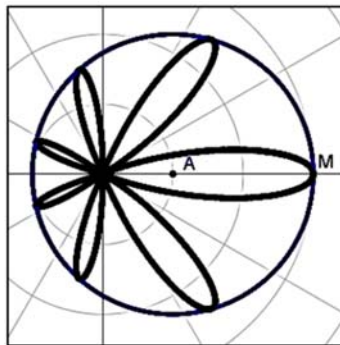


Рис. 26

Учитывая, что $2 \sin^2 \frac{7\varphi}{2} = 1 - \cos 7\varphi$, на основании рассмотренных примеров и свойств роз Гранди можно предположить, что с помощью добавления к правой части уравнений окружностей и улиток Паскаля членов вида $a \cos k\varphi$, где k — целое, можно конструировать уравнения листьев, состоящих из нескольких лепестков одинаковой формы.

Задания и задачи для самостоятельного решения

1. Объясните, почему роза состоит из k лепестков при нечетном k и из $2k$ лепестков при четном.
2. Создайте динамическую модель для вычерчивания роз Гранди при любом рациональном $k = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$). С помощью этой модели опишите свойства роз, у которых коэффициент k не является целым числом.
3. Как построить розу, у которой $k = \sqrt{2}, \sqrt{3}$? Сколько лепестков у таких роз?
4. Создайте динамическую модель для вычерчивания кривых (14).
5. Объясните, куда “пропадают” лепестки у кривых (14) при четном k .
6. Создайте динамическую модель для исследования кривых, определяемых уравнением вида

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi + a \cos k\varphi.$$

При различных фиксированных a_0 и a_1 пронаблюдайте, как меняется форма кривых при изменении коэффициентов a и k .

7. Листья с зубчатыми и волнистыми краями

Наиболее интересными задачами являются реконструкции возможных рассуждений Б. Хабенихта при поиске дополнительных членов в уравнениях, аналитически описывающих листья с зубчатым и волнообразным краем.

Для некоторых листьев сформировать зубчатый край ему удастся достаточно просто, путем добавления к уже найденным уравнениям члена вида $a \sin^2 k\varphi$, где k — достаточно большое целое положительное число. Преобразуя, например, подобным образом уравнение (16) контура листа люпина, он получает уравнение

$$\rho = 2(\cos \varphi + \sqrt{3 + \cos^2 \varphi}) - 6 \sin^2 \frac{7\varphi}{2} - 0,3 \sin^2 60\varphi, \quad (\rho \geq 0),$$

которое, на его взгляд, может служить уравнением листа *конского каштана* (рис. 27). Аналогичное изображение получится при дополнении этим же членом правой части уравнения (15) и введении ограничения $\rho \geq 0$ (рис. 28).

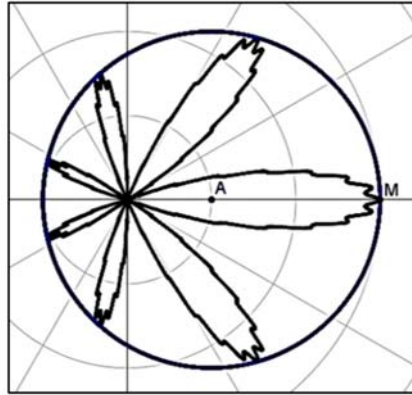


Рис. 27

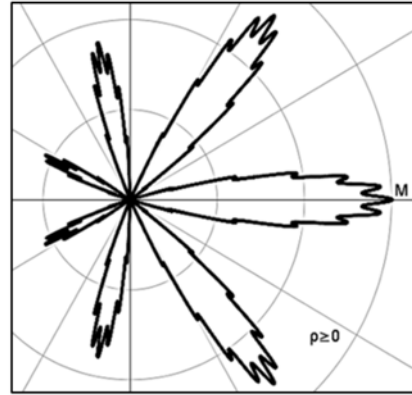


Рис. 28

Для других листьев с зубчатым и/или волнистым краем поиск дополнительных членов является не таким очевидным. Так, например, при построении уравнения контура листа крапивы Хабенихт берет в качестве исходного найденное выше уравнение (12) контура листа сирени. Казалось бы, что опять для получения зубчатости можно использовать добавочный член вида $a \sin^2 k\varphi$. Примером такого уравнения является уравнение

$$\rho = 5 + 2 \cos \varphi + 3 \cos^{71} \varphi - \sin^2 18\varphi. \quad (17)$$

Кривая, определяемая уравнением (17), изображена на рис. 29, а) и дает вполне удовлетворительное представление о форме края листа крапивы. Однако Хабенихт так не считает, возможно, его не устраивают размеры или форма зубцов на некоторых участках полученной кривой. По мнению ученого, контур листа *крапивы* в полярной системе координат гораздо лучше представляет уравнение

$$\rho = 5 + 2 \cos \varphi + 3 \cos^{71} \varphi - \sin^2 18\varphi \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2}, \quad (18)$$

которое получается из уравнения (12) в результате добавления члена $-\sin^2 18\varphi \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2}$. Кривая, построенная по уравнению (18), показана на рис. 29, б).

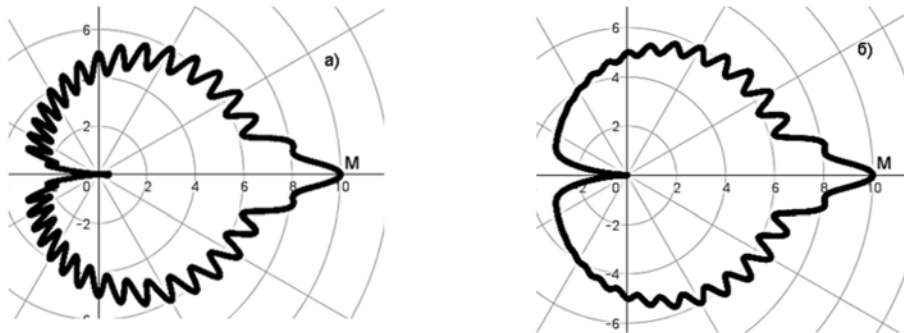


Рис. 29

Опираясь на рис. 29, попытаемся понять, какими соображениями мог руководствоваться Хабенихт, конструируя дополнительный член $-\sin^2 18\varphi \cdot \cos^4 \frac{\varphi}{2}$. Опять воспользуемся для этого более

знакомой декартовой системой координат. На рис. 30 в системе $O\varphi\rho$ на промежутке $[0, 2\pi]$ показаны графики четных неотрицательных функций $\rho = \sin^2 18\varphi$, $\rho = \cos^4 \frac{\varphi}{2}$ и их произведения, взятого со знаком минус.

Первая функция имеет период $\pi/18$; в точках, кратных $\pi/18$, принимает минимальное значение, равное 0; в точках $\pi/36 + \pi k/18$, $k = 0, 1, \dots, 35$ — максимальное, равное 1 (рис. 30). За счет этого у кривой на рис. 29, а имеется 18 зубцов при $\varphi \in (0, \pi)$ и 18 зубцов при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, а точки этой кривой, определяемые полярными углами, соответствующими точкам минимума функции $\rho = \sin^2 18\varphi$, лежат на кривой, моделирующей контур листа сирени.

Вторая функция имеет период 2π ; при $\varphi \in (0, \pi)$ убывает от 1 до 0; при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ возрастает от 0 до 1; причем в окрестности точки $\varphi = \pi$ принимает значения, близкие к нулю.

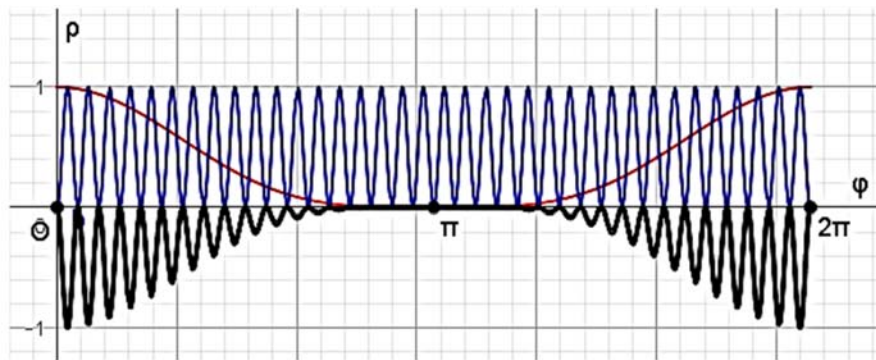


Рис. 30

На основании сказанного, функция $\rho = -\sin^2 18\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$ будет неположительной; имеет период $\pi/18$; а точки, кратные $\pi/18$, в которых она принимает нулевое значение, являются для нее точками максимума. Точки же $\pi/36 + \pi k/18$, $k = 0, 1, \dots, 35$ являются точками минимума; минимальные значения функции сначала возрастают, а затем убывают, причем в окрестности точки $\varphi = \pi$ они весьма близки к нулю. Поэтому кривая (18), изображенная на рис. 29, б, также имеет 18 зубцов при $\varphi \in (0, \pi)$ и 18 зубцов при $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, а ее точки, определяемые полярными углами, соответствующими точкам максимума функции $\rho = -\sin^2 18\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$, лежат на кривой, моделирующей край листа сирени. Основной особенностью кривой с новым дополнительным членом является то, что теперь вместе с изменением полярного угла φ меняются размеры и форма зубцов кривой, а по мере приближения φ к π они “почти сходят на нет”.

В сети Интернет можно найти богатые коллекции листьев крапивы. Знакомство с этими коллекциями заставляет усомниться, что кривая на рис. 29, б является более удачным аналитическим представлением контура листа крапивы, чем кривая на рис. 29, а. Для нас это, однако, не так важно. Перед нами стояла задача, понять ход мыслей немецкого ученого, когда он использовал при конструировании уравнений дополнительный член вида $-\sin^2 18\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$. Дело в том, что идейно похожие по своей структуре произведения он использовал и при составлении контуров листьев других растений. Например, в приведенном ранее уравнении плюща (6) добавочный член имеет вид $-\sin^2 3\varphi \cos^4 \frac{\varphi}{2}$.

При составлении же уравнения сложного для аналитического описания контура листа клена схожая по структуре конструкция дополнительных членов используется Хабенихтом дважды:

$$\rho = 10\sqrt{1 + \cos \varphi} - 5\left(1 + \sin^2 \frac{11\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2 \frac{55\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (19)$$

где $\rho \geq 0$. Сначала она используется для создания многолепестковой формы контура самого листа, а затем — для придания нужной формы отдельным лепесткам. Нетрудно также заметить, что здесь он отказывается и от использовавшихся ранее исходных кривых. Новая исходная кривая

$$\rho = 10\sqrt{1 + \cos \varphi} \quad (20)$$

показана на рис. 31, а изображение контура листа клена, которое получается с помощью уравнения (19), — на рис. 32.

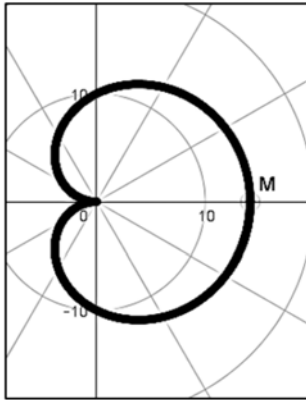


Рис. 31

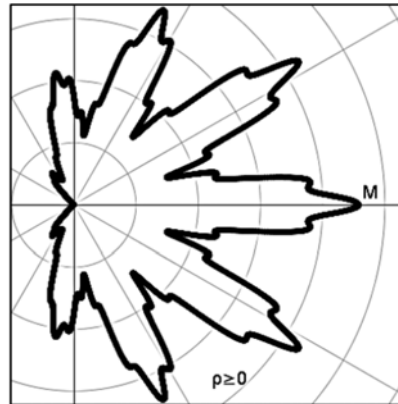


Рис. 32

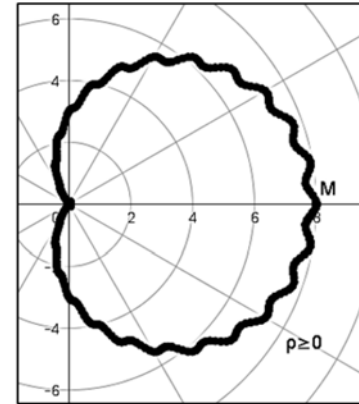


Рис. 33

Для моделирования контуров листьев некоторых растений полезно также попытаться использовать дополнительный член вида $a \sin^2 k\varphi |\cos \frac{\varphi}{2}|$. Например, с помощью уравнения

$$\rho = 5 + 3 \cos \varphi - \sin^2 18\varphi |\cos \frac{\varphi}{2}|, \quad \rho \geq 0 \quad (21)$$

можно получить аналитическое представление края листа *осины* (рис. 33).

Задания и задачи для самостоятельного решения

1. Создайте динамическую модель для исследования кривых, определяемых уравнением вида

$$\rho = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos^2 \varphi - a \sin^2 k\varphi.$$

При различных фиксированных a_0 , a_1 и a_2 наблюдайте, как меняется форма кривых при изменении коэффициентов a и k .

2. В уравнении $\rho = 10 + 3 \cos \varphi + 5 \cos^2 \varphi - a \sin^2 k\varphi$ подберите коэффициенты a и k так, чтобы определяемую им кривую можно было принять за изображение контура листа дуба.

3. В декартовой системе координат $O\varphi\rho$ экспериментально исследуйте изменения функции $\rho = \sin^{2k}((2m+1)\varphi/2) \cos^{2l} \varphi/2$ при изменениях коэффициентов k , l и m .

4. В декартовой системе координат $O\varphi\rho$ экспериментально исследуйте изменения функции $\rho = \sin^{2k}((2m+1)\varphi/2) |\cos \varphi/2|$ при изменениях коэффициентов k и m .

- 5*. Кривая на рис. 31, определяемая уравнением (20), по форме похожа на обыкновенную кардиоиду. Докажите, что эта кривая: а) не является кардиодой; б) является алгебраической кривой.

Богатый своим разнообразием мир растений открывает широкие возможности для дальнейших занятий “математической флористикой”. Возможность оперативно визуально подтверждать и отвергать возникающие гипотезы делает эти занятия весьма увлекательными. Вряд ли при этом стоит ожидать, что создаваемые модели найдут серьезные практические приложения: чисто внешнее сходство получаемых в результате моделирования кривых с их прототипами является слишком мягким требованием. Вместе с тем, самостоятельно решая предложенные задачи можно: получить определенные представления о компьютерном математическом моделировании, компьютерном эксперименте и компьютерной визуализации в среде специализированных математических пакетов; познакомиться с достаточно широким набором инструментов системы GeoGebra и тем самым обогатить свой опыт работы в этой системе.

Литература

4. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. / Под ред. А. П. Нордена. Изд. стереотип. - М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2014. - 296 с.
9. Grandi G. Flores geometrici ex rhodanearum et claelarum descriptione resultants. - Florentiae, 1728.

*Клековкин Геннадий Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
г. Самара.*

E-mail: klekovkin_ga@mail.ru

О неравенствах в тетраэдре. Окончание

В. Н. Новиков

Найдены точные границы изменения площади поверхности, объема и других величин тетраэдров для заданного отношения радиусов вписанной и описанной сфер. На достаточно ярких и содержательных примерах рассмотрена взаимосвязь метода условного экстремума и огибающих. Окончание статьи. Первая часть напечатана в предыдущем выпуске журнала.

Распределения для максимального — L и минимального — l ребер тетраэдра

Из (4) следует $L = \max(1, \sqrt{1/4 + z^2 + y^2})$ и $l = \min(2z, \sqrt{1/4 + z^2 + y^2})$. Верхнюю границу для l найдем так же, как и при соответствующем выводе для площади поверхности тетраэдра, полагая $z = 1/2$ для величины $\sqrt{1/4 + z^2 + y^2}/R$, где R определен в (5). Отсюда

$$l \leq R\sqrt{3 - 3\rho^2 - \sqrt{1 - 10\rho^2 + 9\rho^4}}.$$

Нижняя граница находится из уравнения связи на огибающей для величины $2z/R$:

$$z\sqrt{1 + 4y^2} + (1 + 2y^2 - 8y^4 - 8y^2z^2)\sqrt{y^2 + z^2} = 0,$$

одно из решений которого приводит к явному выражению:

$$y = y(z) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2z^2}{3} + \frac{9 - 12z^2 + 16z^4}{12q}} + \frac{q}{12},$$

где

$$q = \left(-27 + 162z^2 - 72z^4 + 64z^6 + 6\sqrt{3}\sqrt{-54z^2 + 207z^4 - 136z^6 + 112z^8}\right)^{1/3}.$$

После подстановки $y = y(z)$ в $(\rho(y, z), 1/R(y, z))$ получаем параметрический вид нижней границы. Обе границы показаны пунктиром на Рис. 11. При этом на верхней границе l в терминах длин сторон x, y конфигурация $(1, 1, x, 1, 1, x)$, на нижней — $(1, 1, x, 1, 1, y)$.

Структуру верхней границы L и частично нижней — участок между точками B и C , — поясняет график одной из имеющих излом и самопересекающейся заметающих параметрических кривых $(r/R, \max(1, \sqrt{1/4 + z^2 + y^2}/R))$ при $z = 0.4$, показанный на Рис. 11 точками. Видно, что участок горизонтальной прямой до точки A и участок между точками A и C (сплошные линии) являются огибающими, а точка излома движется по некоторой кривой, частично принадлежащей уже нижней границе распределения. Отрезку прямой до точки A соответствует уравнение связи на огибающей: $-1 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, или $y = \sqrt{1/4 - z^2}$. Точке A соответствуют $z = 1/2$, $y = 1/\sqrt{2}$, $\rho = 1/3\sqrt{(2/3)} \approx 0,27216$. Неравенство на этом участке принимает вид: $L \leq 2R$.

Участку верхней границы между точками A и C соответствует связь

$$(y^2 + 4y^4 - 4y^2z^2 - 8z^4)\sqrt{1 + 4y^2} - 8z^3\sqrt{y^2 + z^2} = 0$$

или

$$y = y(z) = \sqrt{-\frac{1}{6} + z^2 + \frac{1}{12q} - \frac{z^2}{q} + \frac{12z^4}{q}} + \frac{q}{12},$$

$$q = \left(1 - 18z^2 + 648z^4 - 1728z^6 + 6\sqrt{3}\sqrt{7z^4 - 136z^6 + 3312z^8 - 13824z^{10}}\right)^{1/3}.$$

Участок BC нижней границы находится как траектория движения точки излома заметающей параметрической кривой, что приводит к условию $1 = \sqrt{1/4 + z^2 + y^2}$, или $y = \sqrt{3/4 - z^2}$. Отсюда можно найти неравенство для этого участка в явном виде:

$$L \geq \frac{R\sqrt{3 + 8\rho - 3\rho^2 + \sqrt{3}(1 - \rho)\sqrt{3 - 10\rho + 3\rho^2}}}{\sqrt{2}}.$$

Далее оказывается, что так же, как и при обобщении неравенства Бляшке (см. выше), семейства (4) недостаточно для полного описания нижней границы для L . На участке до точки B неравенство имеет вид $L \geq Rb_1$. Или, согласно (7)

$$L \geq R\sqrt{6}\sqrt{\rho(1 + \rho + \sqrt{1 - 2\rho - 3\rho^2})}.$$

Точка B находится приравниванием двух последних выражений. Для нее $\rho = 0.28046$. Конфигурация на участке до точки A и на участке AC — $(1, 1, x, 1, 1, y)$. На участке BC — $(1, 1, x, 1, 1, 1)$, затем на участке от начала координат до точки B : $(1, 1, 1, x, x, x)$ — правильная треугольная пирамида.

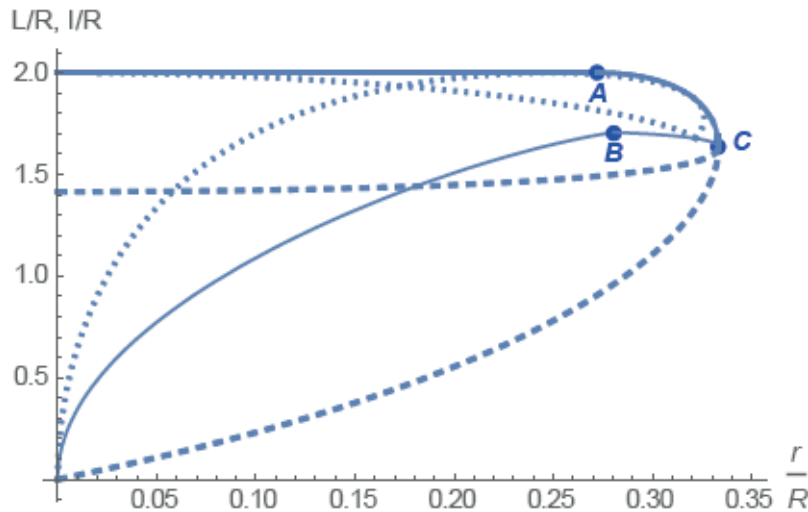


Рис. 11.

Замена R на радиус наименьшей сферы, содержащей тетраэдр

Если вместо радиуса описанной сферы рассматривать радиус наименьшей сферы, которая содержит тетраэдр, то опять рассматривая семейство (4), находим координаты центра радиуса описанной сферы: $(0, (-1 + 4y^2 + 4z^2)/8y, 0)$. Он может быть расположен вне тетраэдра только при условии $y < \sqrt{1/4 - z^2}$ и тогда R в (5) надо заменить на $1/2$. Так как теперь $\rho = 2$, $\tilde{s} = 4S$, где согласно (5), $S = z\sqrt{1 + 4y^2} + \sqrt{y^2 + z^2}$, $r = 3V/S = yz/(z\sqrt{1 + 4y^2} + \sqrt{y^2 + z^2})$, то из (2) получим уравнение связи для нижней границы распределения \tilde{s} :

$$(y^2 - z^2)\sqrt{1 + 4y^2} = z\sqrt{y^2 + z^2}.$$

Отсюда находим саму эту связь:

$$y = y(z) = \sqrt{-\frac{1}{8} + z^2 + \frac{1}{8}\sqrt{1 + 32z^2}}.$$

Теперь нижняя граница может быть найдена в параметрическом виде как множество точек: $(\rho(y(z), z), \tilde{s}(y(z), z))$. Она показана нижней сплошной линией на Рис. 12. Пунктир — нижняя граница из Рис. 1. Точка касания кривых:

$$z = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{r}{R} \approx 0.266585.$$

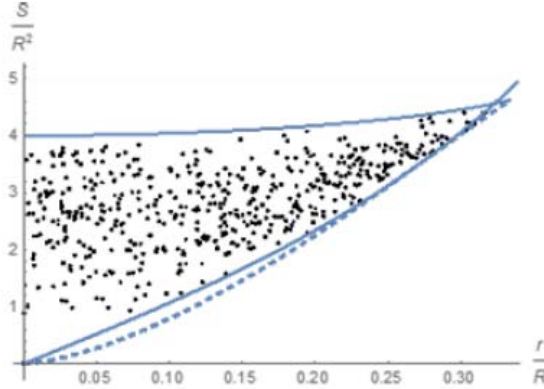


Рис.12.

Видно, что в этом случае нижняя граница распределения площади поверхности произвольных тетраэдров состоит из двух участков: сначала проходит по параметрически заданной кривой до точки касания, а затем совпадает с нижней границей на Рис. 1.

Доказательство формул для верхних и нижних границ распределений в случае равногранных тетраэдров

В случае равногранных тетраэдров формулы для верхних и нижних границ распределений полной поверхности и других величин могут быть доказаны из соотношений для треугольников со сторонами a, b, c любой из его граней. Пусть p, r, R — полупериметр, радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника и p_d, r_d, R_d — соответствующие величины для равногранных тетраэдров, V_d — объем. Тогда

$$V_d = \frac{2}{3}pr\sqrt{p^2 - (r + 2R)^2}, \quad r_d = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - (r + 2R)^2}, \quad R_d^2 = R^2 + r_d^2. \quad (9)$$

Эти формулы получаются, если в известном выражении для объема равногранных тетраэдров

$$V_d^2 = \frac{1}{72}(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2),$$

пользуясь тем, что это — симметрический многочлен от переменных a, b, c , выразить его через элементарные симметрические многочлены:

$$V_d^2 = \frac{1}{72}(-s_1^6 + 6s_1^4s_2^2 - 8s_1^2s_2^2 - 8s_1^3s_3 + 16s_1s_2s_3 - 8s_3^2),$$

где $s_1 = a + b + c$, $s_2 = ab + ac + bc$, $s_3 = abc$, которые, в свою очередь, можно заменить на $s_1 = 2p$, $s_2 = p^2 + 4Rr + r^2$, $s_3 = 4Rrp$. После преобразований получим первую из формул (9). Так как $V_d = 4prr_d/3$, получим вторую формулу. Используя $8R_d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$, получим последнюю из формул (9).

Обозначая теперь $x = r/R$, $y = p/R$, $u = r_d/R_d$, $v = p_d/R_d$, можно построить взаимно-однозначное гладкое отображение $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ области распределения периметра остроугольных треугольников на область распределения периметра равногранных тетраэдров. Воспользуемся известным фундаментальным неравенством для полупериметра треугольников, которое запишем в виде

$$y_1 \leq y \leq y_2; \quad y_{1,2} = \sqrt{2 + 10x - x^2 \mp 2(1 - 2x)^{3/2}}. \quad (10)$$

При этом для $0 < x \leq 1/2$ экстремальные значения $y_{1,2}$ достигаются только на равнобедренных треугольниках. Поскольку равногранные тетраэдры существуют только для остроугольных треугольников-граней, то ниже вместо (10) будем рассматривать усеченное неравенство $\tilde{y}_1 \leq x \leq y_2$, где \tilde{y}_1 — ломаная линия, состоящая из отрезка прямой, соответствующей прямоугольным треугольникам $\tilde{y}_1 = 2 + x$, $0 < x \leq \sqrt{2} - 1$ и части старой границы $\tilde{y}_1 = y_1$, $(\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1/2)$.

Используя (9), получим

$$u = \frac{r_d}{R_d} = \sqrt{\frac{r_d^2}{R^2 + r_d^2}} = \frac{1}{\sqrt{4R^2/(p^2 - (r + 2R)^2) + 1}}.$$

Отсюда

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/(y^2 - (x + 2)^2)}} \quad (11)$$

и аналогично

$$v = \frac{p_d}{R_d} = \frac{2pR}{RR_d} = \frac{2yR}{\sqrt{R^2 + r_d^2}} = \frac{2y}{\sqrt{1 + (y^2 - (x + 2)^2)/4}}. \quad (12)$$

Обратное отображение:

$$x = -2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^2 - 16u^2}{1 - u^2}}; \quad y = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Из (11) следует:

$$y^2 = (x + 2)^2 + \frac{4u^2}{1 - u^2}. \quad (13)$$

Это означает, что вертикальные отрезки на линиях $u = \text{const}$, заключенные между нижней и верхней границей распределения для v , переходят в куски гипербол (13), которые в рассматриваемой области являются практически прямыми. Причем отрезок, соответствующий $u = 0$, переходит в часть асимптоты семейства гипербол. При этом отображение переворачивает каждый отрезок — т.е. нижняя часть границы для y при $\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1/2$ переходит в полную верхнюю границу для v , а верхняя граница для y при $0 \leq x \leq 1/2$ переходит в нижнюю границу для v . Из построения отображения (11), (12) следует, что оно взаимно-однозначное и гладкое в рассматриваемой области за исключением отрезка для $u = 0$, соответствующего вырожденным тетраэдрам. Кроме того из (13) видно, что y монотонно возрастает при возрастании x , так как $0 < u \leq 1/3$. Из равенства $v = 2y\sqrt{1 - u^2}$ видно, что v также монотонно возрастает. Поэтому экстремальные значения безразмерного периметра $v = p_d/R_d$ могут достигаться тогда и только тогда, когда грани являются равнобедренными треугольниками.

Заменяя в (11), (12) y на $y_{1,2}$ из (10), получим параметрическое представление для границ изменения периметра

$$(u, v) = \left(\sqrt{1 - \frac{2}{q}}, \frac{2\sqrt{2}\sqrt{2q + 4x + x^2}}{\sqrt{q}} \right), \quad q = q_{1,2} = 1 \mp (1 - 2x)^{3/2} + 3x - x^2.$$

При этом $\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1/2$, если $q = q_1$ и $0 \leq x \leq 1/2$, если $q = q_2$.

Аналогично для безразмерной площади поверхности, полагая $v = S_d/R_d^2$, приходим к выражению

$$v = \frac{4pr}{R_d^2} = \frac{4pr}{R^2 + (p^2 - (r + 2R)^2)/4} = \frac{16yx}{q + 4},$$

где q определено выше, и к параметрическому представлению для границ изменения площади: $(\sqrt{1 - 2/q}, (8x\sqrt{2q + 4x + x^2})/q)$. Так как $\rho = \sqrt{1 - 2/q}$, находим $(1 - 2x)^{3/2} = 1 - 2/(1 - \rho^2) + 3x - x^2$; $x = -(1 + g)/2 + \sqrt{1 + g}$, $g = \sqrt{(1 - 9\rho^2)/(1 - \rho^2)}$.

После подстановки этих выражений в квадрат второй компоненты параметрического представления, упрощений и извлечения обратного корня получим формулу (3) для верхней границы распределения площади. Для нижней границы вывод аналогичен.

О фундаментальном неравенстве для треугольников

В случае треугольника предложенный выше метод обладает рядом интересных особенностей. Если принять одну из сторон за 1, а две другие обозначить x, y , то полупериметр, площадь, радиусы описанной и вписанной окружностей, отношение радиусов $\rho = r/R$ и безразмерный полупериметр $\tilde{p} = p/R$ суть:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(1 + x + y), \quad S = \frac{1}{4}\sqrt{2x^2 - x^4 + 2y^2 + 2x^2y^2 - y^4 - 1}, \quad R = \frac{xy}{4S} \\ r &= \frac{S}{p}, \quad \rho = \frac{(1-x+y)(1+x-y)(x+y-1)}{2xy}, \quad \tilde{p} = \frac{1}{2xy}(1 + x + y)S. \end{aligned} \quad (14)$$

На Рис. 13 сплошные линии — границы известного фундаментального неравенства:

$$\tilde{p}_{1,2} = \sqrt{1 + 10\rho - \rho^2 \mp 2(1 - 2\rho)^{3/2}}. \quad (15)$$

Пунктир — параметрические заметающие линии $(\rho(x, y_0), \tilde{p}(x, y_0))$ при $y_0 = 0.2; 0.5$, для которых $\tilde{p}_{1,2}$ являются огибающими.

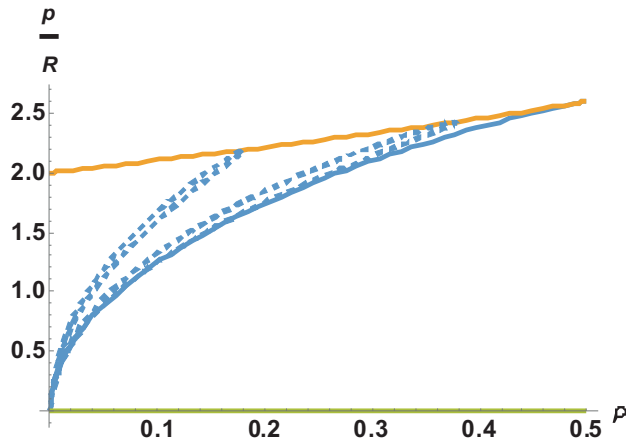


Рис. 13.

Так как ρ, \tilde{p} — симметрические функции x, y , то, в отличие от случая тетраэдра, при фиксации вместо y переменной x получим то же самое семейство заметающих линий. Это приводит к тому, что теперь соответствие метода условного экстремума и огибающих можно представить еще и следующим образом: существует функция $F = F(u, v, c)$ где c — параметр, такая, что уравнения $F = 0, \partial F / \partial c = 0$ описывают огибающую в плоскости u, v (в нашем случае ρ, \tilde{p}). Если известно отображение с симметрическими функциями $u = f(x, y), v = g(x, y)$, то функцию $F(u, v, c)$ можно

найти, полагая $y = c$ и затем исключая x в виде: $F(u, v, c) = v - g(x(u, c), y)$, где $x(u, c)$ определяется из уравнения $u = f(x, c)$. В силу симметричности функций $f(x, y), g(x, y)$, для определения $F(u, v, c)$ можно, конечно, сначала положить $x = c$, результат не изменится. При этом, в зависимости от ситуации, функцию $F(u, v, c)$ можно и не находить, а сразу искать границы распределений как огибающие, используя (2), либо решая множество задач на условный экстремум, как это делалось в случае тетраэдров.

В нашем случае последние два из соотношений (14) после вычисления якобиана приводят к уравнению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{(1-x)(x-y)(-1+y)(1+x+y)S}{2x^3y^3} = 0.$$

Отсюда находим связь: $y = 1$. Тогда $\rho = (1 - x/2)x, \tilde{\rho} = (1 + x/2)\sqrt{4 - x^2}$.

Аналогично выводу формулы (3), исключая из последних двух равенств x , после упрощений приходим к соотношению (15). Как можно проверить, остальные возможные связи не дают ничего нового.

Для получения точных неравенств в более сложных случаях, ниже опишем модификацию метода условного экстремума для треугольников.

Рассмотрим с точностью до подобия все множество треугольников. Примем наибольшую сторону (или любую из них) за единицу, а две других обозначим a и b . Тогда

$$0 \leq a \leq 1; \quad 0 \leq b \leq 1; \quad a + b \geq 1; \quad a \geq b. \quad (16)$$

Последнее неравенство в (16) можно принять в силу симметрии. Пусть $\rho = r/R$ — отношение радиусов вписанной и описанной окружности. Так как полупериметр $p = (a + b + 1)/2$, площадь треугольника по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-1)(p-a)(p-b)}$, то используя соотношения $r = ab/4S$, $\rho = 4S^2/pab$, получаем уравнение

$$2ab\rho = (a + b - 1)(a - b + 1)(1 - a + b). \quad (17)$$

которое представляет в плоскости (a, b) некоторую кубическую кривую. Ее несложно исследовать, перейдя к системе координат, повернутой на 45° : если $a = (x - y)/\sqrt{2}$, $b = (x + y)/\sqrt{2}$, то $1 - \sqrt{2}x + \rho x^2 - 2y^2 - \rho y^2 + 2\sqrt{2}xy^2 = 0$.

Отсюда $y = \pm \sqrt{-1 + \sqrt{2}x - x^2\rho}/\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}x - \rho}$. Такое, на первый взгляд удивительное упрощение, объясняется специальным видом кубических кривых.

На Рис. 14 показаны две неявных кривых (17) в области положительных a и b для значений $\rho = 0.48$ и $\rho = 0.4$. Область (16) показана пунктирным треугольником. Точка с координатами $(1, 1)$, к которой стягиваются кубические кривые при $\rho \rightarrow 0.5$, соответствует правильному треугольнику. Наклонная прямая (пунктир) — одна из линий, на которой значение полупериметра p постоянно. Вертикальная сторона пунктирного треугольника соответствует равнобедренным треугольникам с двумя сторонами, равными 1. Другой тип равнобедренных треугольников находится на диагонали $a = b$. Точками показана часть единичной окружности, соответствующая прямоугольным треугольникам. Она разбивает область (16) на две подобласти, соответствующие тупоугольным и остроугольным треугольникам.

Полагая $a = 1$, из (17) находим $b = 1 - \sqrt{1 - 2\rho}$, а при $a = b$: $b = (1 - \sqrt{1 - 2\rho})/2\rho$. Отсюда, как видно из Рис. 14, экстремальные значения полупериметра:

$$\tilde{p}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\rho}}{2\rho} + 1/2, \quad \tilde{p}_2 = 1 + \frac{1 - \sqrt{1 - 2\rho}}{2}. \quad (18)$$

Для перехода к размерному виду их надо умножить на наибольшую сторону треугольника c , что поясняется ниже. Заметим, что из (18) автоматически следует известное неравенство Эйлера $1 - 2\rho \geq 0$, или $R \geq 2r$.

В области (16) точка A всегда расположена выше точки B , что следует из элементарного неравенства $(1 - \sqrt{1 - 2\rho})/2\rho \geq 1 - \sqrt{1 - 2\rho}$, при $0 \leq \rho \leq 1/2$.

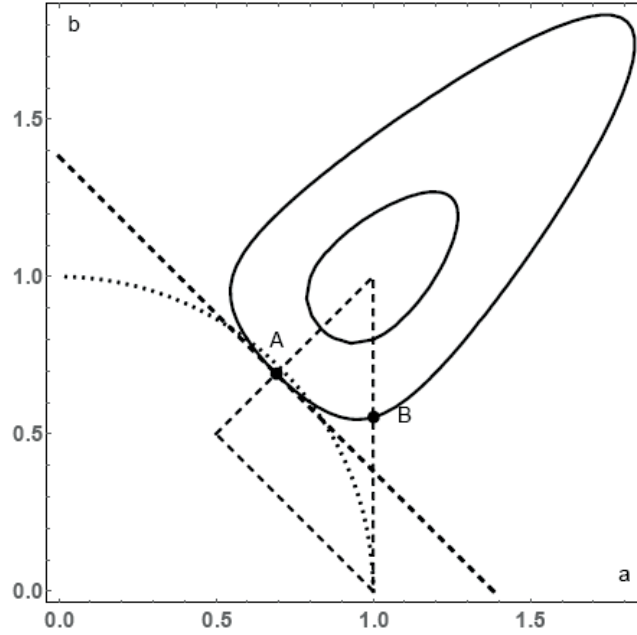


Рис. 14.

Как следует из сказанного выше, при заданном ρ на участке между точками A и B вдоль кривой (17) все треугольники неравнобедренные за исключением самих конечных точек A и B , причем именно в них и достигаются экстремальные значения полупериметра. То есть можно сказать, что при приближении точки вдоль кривой к экстремальным для периметра конечным точкам A и B происходит постепенное вырождение формы треугольника до равнобедренного. Зная это, легко найти экстремальные значения полупериметра как функции параметра ρ непосредственно. Рассмотрим произвольный равнобедренный треугольник со сторонами a , a и b . Тогда $p = a + b/2$, $R^2 = a^4/(2a - b)(2a + b)$. Отсюда $b = a\sqrt{4 - \tilde{a}^2}$, где $\tilde{a} = a/R$. Используя $r = S/p$, приходим к уравнению $\rho = r/R = (\tilde{a}^2\sqrt{4 - \tilde{a}^2})/(4 + 2\sqrt{4 - \tilde{a}^2})$. Решая его относительно \tilde{a} , находим экстремальные значения:

$$a_{1,2} = \sqrt{2}\sqrt{1 \mp \sqrt{1 - 2\rho}} + \rho, \quad b_{1,2} = 2\sqrt{\rho(2 \pm 2\sqrt{1 - 2\rho} - \rho)}. \quad (19)$$

И экстремальные значения полупериметра: $p_1/R = a_1 + b_1/2$, $p_2/R = a_2 + b_2/2$.

Как видно из Рис.14, для точки A , расположенной на диагонали, равнобедренные треугольники могут быть тупоугольными и остроугольными, и имеют только одну наибольшую сторону, что соответствует случаю, когда b_1 является большей стороной и основанием, а боковые стороны равны a_1 , так как из (19) следует $b_1 \geq a_1$. Действительно, возводя обе части последнего неравенства в квадрат и перегруппируя, приходим к эквивалентному неравенству: $(1 + 4\rho)\sqrt{1 - 2\rho} \geq 1 - 3\rho + 2\rho^2$. Правая часть неотрицательна при $0 \leq \rho \leq 1/2$, поэтому еще раз возводя в квадрат и разлагая на множители, приходим к очевидному неравенству $\rho(4 + \rho)(1 - 2\rho)(3 + 2\rho) \geq 0$. Отсюда следует, что масштаб для перехода к размерному виду в точке A есть Rb_1 .

Аналогично устанавливается, что в точке B все треугольники остроугольные с двумя равными сторонами a_2 и меньшей стороной b_2 . Масштаб для перехода к размерному виду в точке B есть Ra_2 . Поэтому приходим также к другому представлению, которое оказывается удобным при решении

различных задач: $p_1/R = b_1\bar{p}_1$, $p_2/R = a_2\bar{p}_2$ где $\bar{p}_{1,2}$ даются формулами (18). Или

$$\frac{p_1}{R} = \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{1-2\rho} - \rho}{\rho}}(1 + \sqrt{1-2\rho} + \rho), \quad \frac{p_2}{R} = \frac{3 - \sqrt{1-2\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1-2\rho} + \rho}. \quad (20)$$

Функции p_1 и p_2 можно рассматривать как точные нижнюю и верхнюю границы “спектра” или распределения для значений полупериметра в произвольном треугольнике. Т.е. для любого треугольника должно выполняться фундаментальное неравенство $p_1 \leq p \leq p_2$. Полученное неравенство совпадает с (15).

Предложенный подход можно использовать для получения новых результатов. Обычно при использовании фундаментального неравенства треугольника величину, для которой хотят получить неравенство, сначала выражают с помощью симметрических многочленов через p , R , r . Например, для суммы высот треугольника $S_h = h_a + h_b + h_c = (p^2 + r^2 + 4Rr)/2R$. Поэтому для определения верхней и нижней границ распределения S_h достаточно подставить вместо p значения p_2 и p_1 , например, из формул (20). Однако этот подход не работает, когда соответствующее выражение через p , R , r отсутствует. Такова, например, задача определения распределения для минимальной стороны треугольника. Решим ее с помощью предлагаемого подхода. Как и выше, временно выберем в качестве масштаба максимальную сторону треугольника. Так как согласно (16) $a \geq b$, то функция двух переменных $\text{Min}(1, a, b) = b$. Ее линии уровня при $a, b \geq 0$ — это горизонтальные прямые $b = \text{const}$. Как следует из Рис. 14, минимальное значение этой функции достигается в точке B и равно $b = 1 - \sqrt{1-2\rho}$, а максимальное достигается в точке A : $b = (1 - \sqrt{1-2\rho})/2\rho$. Аналогично выводу формул (19), умножая на соответствующие масштабы a_2, b_1 , в размерном виде получим выражения для нижней и верхней границ распределения. При этом оказывается, что $a_2(1 - \sqrt{1-2\rho}) = b_2$, $b_1((1 - \sqrt{1-2\rho})/2\rho) = a_1$. Таким образом, границы распределения минимальной стороны произвольного треугольника есть b_2 (нижняя) и a_1 (верхняя).

Неравенства для суммы медиан и биссектрис

Если взять за масштаб наибольшую сторону треугольника, то сумма медиан запишется как $S_m = (\sqrt{2 + 2a^2 - b^2} + \sqrt{2 - a^2 + 2b^2} + \sqrt{-1 + 2a^2 + 2b^2})/2$. Для исследования поведения ее линий уровня $S_m = t$, где t — константа для каждой такой линии, можно ввести на плоскости a, b полярные координаты $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, где r временно обозначает расстояние до начала координат. Если $u = r \cos^2 \varphi$, то S_m принимает вид:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2 - r^2 + 3r^2u} + \sqrt{2 + 2r^2 - 3r^2u} + \sqrt{-1 + 2r^2}).$$

Тогда для u можно получить явное выражение:

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{6r^2} \sqrt{-9 + 18r^2 + 56t^2 - 40r^2t^2 - 16t^4 + t(-40 + 8r^2 + 32t^2)\sqrt{-1 + 2r^2}}.$$

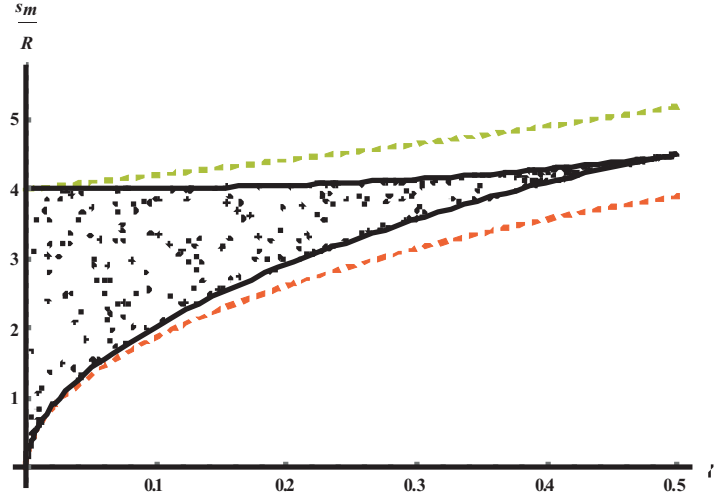


Рис. 15.

Поэтому экстремальные значения для S_m также достигаются на равнобедренных треугольниках, что и позволяет получить соответствующее неравенство, используя тот же прием, что и при выводе формул (20). Значение S_m в точке $B(1, 1 - \sqrt{1 - 2\rho})$ (оно же — максимальное) после упрощений есть $\sqrt{5 - 4\sqrt{1 - 2\rho}} - 4\rho + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 2\rho}} + \rho$. Для перехода к размерному виду умножаем его на масштаб Ra_2 . Отсюда, после простых преобразований, получаем формулу для верхней границы распределения $S_m/R \leq 1 + q + \rho + \sqrt{2}\sqrt{1 + 9\rho - 4\rho^2 + (1 - 8\rho)q}$, где $q = \sqrt{1 - 2\rho}$, а S_m — теперь сумма медиан для произвольного треугольника со сторонами a, b, c . Формула для нижней границы получается заменой $q \mapsto -q$.

Аналогично, сумма биссектрис имеет вид ($c = 1$):

$$S_i = \frac{1}{2}\sqrt{(1 + a + b)} \left(\frac{\sqrt{a(1 + a - b)}}{1 + a} + \frac{\sqrt{b(1 - a + b)}}{1 + b} + \frac{\sqrt{ab(-1 + a + b)}}{a + b} \right).$$

Для верхней границы можно получить формулу:

$$\frac{S_i}{R} \leq \frac{(4 + 8\rho + 4q + (3 + 2\rho)\sqrt{1 - q})\sqrt{2 + 5\rho - (2 - \rho)q}}{\sqrt{2}(3 + 2\rho)}.$$

Нижняя граница также получается заменой $q \mapsto -q$.

Границы для суммы медиан показаны на Рис. 15 сплошными линиями. Точки — результат численного эксперимента, в котором задавались 300 случайных треугольников с помощью трех случайных точек, равномерно распределенных на единичной окружности, и вычислялись соответствующие суммы медиан. Пунктир — известное приближение: сумма медиан меньше периметра треугольника и больше $3/4$ периметра.

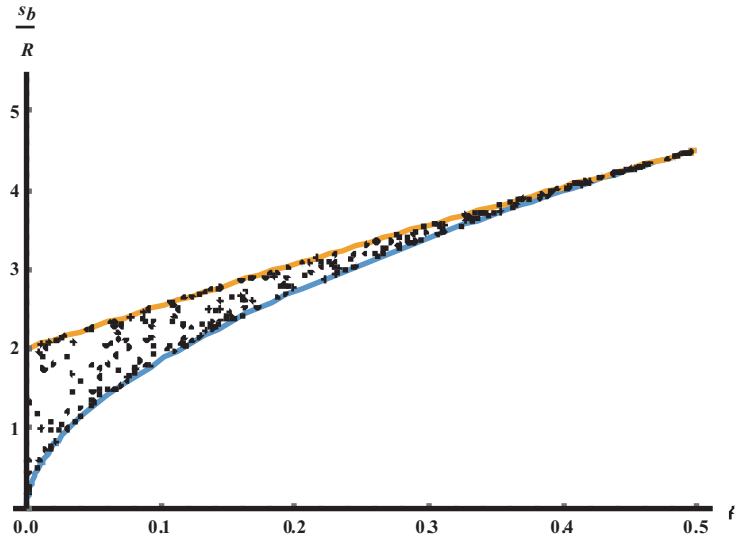


Рис. 16.

Рис. 16 — распределение для суммы биссектрис. Видно, что сумма биссектрис изменяется в среднем в более узких границах, чем сумма медиан. Кроме того, если верхняя граница распределения для суммы медиан выгнута вниз, то для суммы биссектрис — наоборот.

Дополнение. Асимптотика распределений в окрестности правильного тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр со сторонами $1, 1+a, 1+b, 1+c, 1+d, 1+e$, где a, b, c, d, e — малы. Тогда разлагая $\rho, \tilde{\rho}, \tilde{s}$, (которые могут быть выражены через стороны с помощью известных выражений [3]) в ряды Тейлора с точностью до бесконечно малых высшего порядка, получим:

$$\rho = \frac{1}{3} + \frac{4}{27}(ab + ac + bc + bd + cd + ae + ce + de) - \frac{8}{27}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2),$$

$$\tilde{\rho} = 4\sqrt{6} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(ab + ac + bc + 13ad + bd + cd + ae + 13be + ce + de) - \frac{17(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)}{3\sqrt{6}},$$

$$\tilde{s} = \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{9\sqrt{3}}(ab + ac + 3ad + ae + bc + bd + 3be + cd + ce + de) - \frac{56}{9\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

Для определения границ распределений в этом приближении безразмерного периметра, теперь вместо одного уравнения типа (2) можно получить всего 10 уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial b} = \frac{\partial \rho}{\partial b} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial c} = \frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial a}, \dots, \quad \frac{\partial \rho}{\partial d} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial e} = \frac{\partial \rho}{\partial e} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial d}.$$

Отбрасывая совпадающие выражения, получим систему из 8 уравнений:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + ac - bc + 4bd - cd - d^2 - 4ae + ce + e^2 &= 0, \\ a^2 + ab - bc - c^2 - bd + 4cd - d^2 + ae - ce - de &= 0, \\ (a - d)(2a - b - c + 2d - e) &= 0, \\ a^2 - 4ab + b^2 + ac + bc - cd - d^2 - ce + 4de - e^2 &= 0, \\ ab + b^2 - ac - c^2 + bd - cd - ae + 4ce - de - e^2 &= 0, \\ (a - 2b + c + d - 2e)(b - e) &= 0, \\ a^2 + ab - 4ac + bc + c^2 - bd - d^2 + ae + ce - de &= 0, \\ ab + b^2 + ac - 4bc + c^2 + bd + cd - ae - de - e^2 &= 0. \end{aligned}$$

Используя специальный вид третьего и шестого уравнений, можно найти все решения системы:

$$\begin{aligned} d = -a + c, \quad e = -b + c; \quad a = \frac{c}{2}, \quad d = \frac{c}{2}, \quad e = -b + c; \quad b = \frac{c}{2}, \quad d = -a + c, \quad e = \frac{c}{2}; \quad c = 0, \quad d = a, \quad e = b; \\ a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{c}{2}, \quad d = \frac{c}{2}, \quad e = \frac{c}{2}; \quad a = 0, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad e = -b; \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = -a, \quad e = 0; \\ b = \frac{a}{2}, \quad c = 0, \quad d = a, \quad e = \frac{a}{2}; \quad a = \frac{b}{2}, \quad c = 0, \quad d = \frac{b}{2}, \quad e = b. \end{aligned}$$

При подстановке первого из этих решений в выражения для ρ , \tilde{p} получим

$$\rho = \frac{9}{27} - \frac{4}{27}(4a^2 + 4b^2 - 4ac - 4bc + 3c^2), \quad \tilde{p} = -\frac{-24 + 5(4a^2 + 4b^2 - 4ac - 4bc + 3c^2)}{\sqrt{6}}.$$

Исключая из этих равенств выражение в скобках, приходим к выражению

$$\tilde{p} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(17 + 45\rho),$$

что совпадает с асимптотическим выражением, которое может быть получено непосредственно для правильной треугольной пирамиды.

При подстановке четвертого решения:

$$\rho = \frac{1}{27}(9 - 16a^2 + 16ab - 16b^2), \quad \tilde{p} = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}(-9 + a^2 - ab + b^2).$$

Отсюда

$$\tilde{p} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(5 + \rho),$$

что, в свою очередь, совпадает с асимптотикой, которую можно получить исходя из формулы для верхней границы периметра, состоящей из равногранных тетраэдров. Остальные аналогично получаемые асимптотики для периметра совпадают с уже найденными.

Для безразмерной площади поверхности аналогично получаются тоже только две асимптотики. Для нижней границы:

$$\tilde{S} = \frac{2(-1 + 15\rho)}{\sqrt{3}},$$

для верхней границы:

$$\tilde{S} = \frac{4(1 + 3\rho)}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, показано, что рассмотрение тетраэдра в общем случае приводит к тем же результатам (по крайней мере, в достаточно малой окрестности правильных тетраэдров) для границ распределений периметра и площади поверхности, что и исследование тетраэдров существенно более простых форм, выбираемых на основе соображений симметрии и численных экспериментов. А также подтверждено более сложное поведение границ для периметра, по сравнению с полной поверхностью тетраэдра.

Покажем как можно непосредственно получить найденные выше асимптотики исходя из простейших конфигураций тетраэдров. Для правильной треугольной пирамиды конфигурация: $(1, 1, 1, x, x, x)$. Отсюда

$$\rho = \frac{2(-1 + 3x^2)}{\sqrt{3}x^2(\sqrt{3} + 3\sqrt{-1 + 4x^2})}; \quad \tilde{p} = \frac{2\sqrt{3}(1 + x)\sqrt{-1 + 3x^2}}{x^2}.$$

Заменяя $x = 1 - \varepsilon$, представим с точностью до бесконечно малых высшего порядка ρ , \tilde{p} в виде: $\rho_0 + \rho_2\varepsilon^2$; $\tilde{p}_0 + \tilde{p}_2\varepsilon^2$, где, например, ρ_0 — соответствующее значение ρ при $\varepsilon = 0$, а ρ_2 — половина второй производной ρ по ε , взятой при $\varepsilon = 0$. Или: $\rho = 1/3 - (4/9)\varepsilon^2$; $\tilde{p} = 4\sqrt{6} - 5\sqrt{3/2}\varepsilon^2$. Исключая из последних двух равенств ε^2 , приходим к асимптотике найденной выше: $\tilde{p} = (1/4)\sqrt{3/2}(17 + 45\rho)$.

Для верхней границы периметра, состоящей из равногранных тетраэдров конфигурация: $(1, 1, x, 1, 1, x)$. Отсюда

$$\rho = \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2+x^2}}; \quad \tilde{p} = \frac{4\sqrt{2}(2+x)}{\sqrt{2+x^2}}, \quad \rho = \frac{1}{3} - \frac{16}{27}\varepsilon^2; \quad \tilde{p} = 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon^2.$$

Для верхней границы площади та же конфигурация.

$$\rho = \frac{x\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2+x^2}}; \quad \tilde{s} = \frac{8x\sqrt{4-x^2}}{2+x^2}, \quad \rho = \frac{1}{3} - \frac{16}{27}\varepsilon^2; \quad \tilde{s} = \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{64}{9\sqrt{3}}\varepsilon^2.$$

Для нижней границы площади конфигурация: $(1, 1, x, 1, 1, 2-x)$. Выражение для последней стороны: $2-x$ получено из асимптотики уравнения связи на огибающей при $x \approx 1$. Тогда

$$\rho = \frac{2x^2(2-x)^2}{\sqrt{(2+2x-x^2)(2-2x+x^2)(\sqrt{(4-x)(2-x)^2x+x\sqrt{4-x^2}})}},$$

$$\tilde{s} = \frac{4(2-x)x(\sqrt{(4-x)(2-x)^2x+x\sqrt{4-x^2}})}{(2+2x-x^2)(2-2x+x^2)}, \quad \rho = \frac{1}{3} - \frac{16}{27}\varepsilon^2; \quad \tilde{s} = \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{160}{9\sqrt{3}}\varepsilon^2.$$

Литература

1. Mitrinovic D.S., Pecaric J.E., Volenec V. Recent advances in geometric inequalities. - Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1989.
2. Новиков В.Н. Формулы в пыли тысячелетий. Номер юридической регистрации документа (текста): 50/35 - Н/50 - 2020 - 1-404. - Отпечатано в тип. "Шерна", 2020.
3. Понарин Я.П. Элементарная геометрия, т. 2. - Изд. МЦНМО, 2006.

Новиков Владимир Николаевич,
г. Москва.

E-mail: noviknovik1944@gmail.com

От линейной системы через геометрию к определителю

И. Б. Писаренко, М. И. Зайдель

Данная статья адресована преподавателям высшей математики (особенно линейной алгебры), а также студентам вузов, желающим разобраться в основах линейной алгебры и получить ключ к целостному пониманию этого раздела математики.

Как правило, определение определителя матрицы вводится через перестановки. При этом утверждается, что эта функция должна обладать некоторыми свойствами. Однако для студентов остается загадкой, как можно было додуматься до введения такой странной функции, и как ее определение идейно связано с ее свойствами.

В статье предлагается некоторое рассуждение, которое позволяет ввести определение определителя матрицы (а также некоторых других понятий) естественным образом. Свойства определителя при этом становятся самоочевидными.

Введение

Из лекций по линейной алгебре проф. Гилберта Стренга, МИТ, США (Gilbert Strang, MIT, USA) [1, 2] мы почерпнули идею “столбцового подхода”, позволяющего перевести задачу решения линейной системы на язык геометрии. В данной статье мы развиваем эту идею: геометрическое решение системы линейных уравнений приводит к возникновению ориентированной площади в двумерном случае и ориентированного объема — в трехмерном, причем переход от первого ко второму происходит индуктивно. Сами решения при этом записываются через формулы Крамера (которые также получаются естественным образом из геометрических соображений).

Все это подготавливает почву для алгебраического обобщения ориентированной площади и ориентированного объема под общим названием определителя. Необходимость такого обобщения возникает из нашего желания решать системы более высоких порядков, что уже невозможно делать геометрически.

Основные свойства определителя при этом возникают на этапе понимания его как ориентированной площади (позже — ориентированного объема) и являются очевидными (либо простым следствием очевидных) при такой интерпретации.

1. Ориентированная площадь, или косое произведение

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

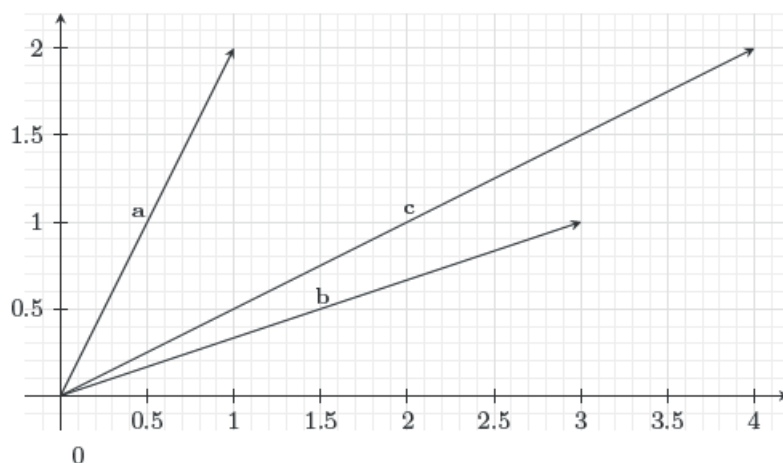
Ее матричная форма будет следующей:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

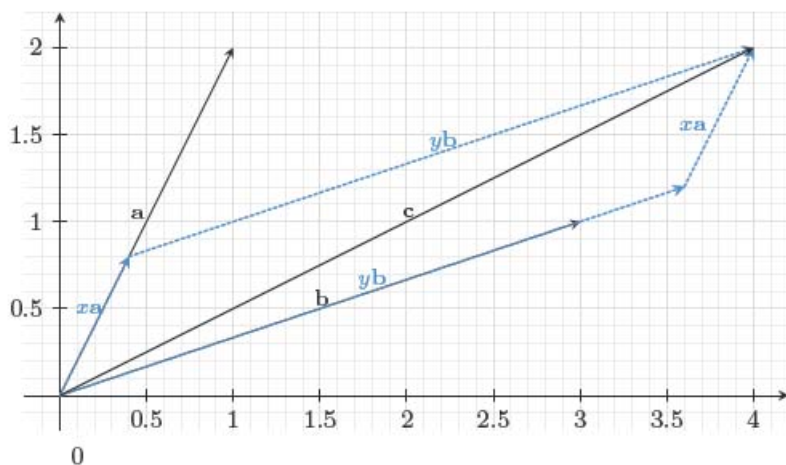
Из “столбцового подхода” [1, 2] мы знаем, что произведение матрицы и вектора-столбца есть линейная комбинация столбцов этой матрицы. Перепишем систему:

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \text{ или } x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ где } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Из последней записи видно, что для решения системы нам требуется найти такие числа x и y , что соответствующая им линейная комбинация давала бы вектор-столбец \mathbf{c} . Посмотрим на эту задачу с геометрической точки зрения (Рис. 1).

Рис. 1: данные векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c}

Теперь посмотрим на Рис. 2. Здесь мы видим параллелограмм, соответствующий равенству $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Он задает нам некое правило, обеспечивающее связь между известными векторами и неизвестными коэффициентами. Как использовать эту связь, чтобы найти x и y ? Нам нужно связать воедино несколько различно направленных линий на плоскости. Чтобы записать их связь, можно рассмотреть площади фигур, которые они образуют.

Рис. 2: условие $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$ порождает параллелограмм

Прежде всего, дополним параллелограмм второй диагональю, а векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} уберем с картинки, поскольку они нам более не нужны (Рис. 3).

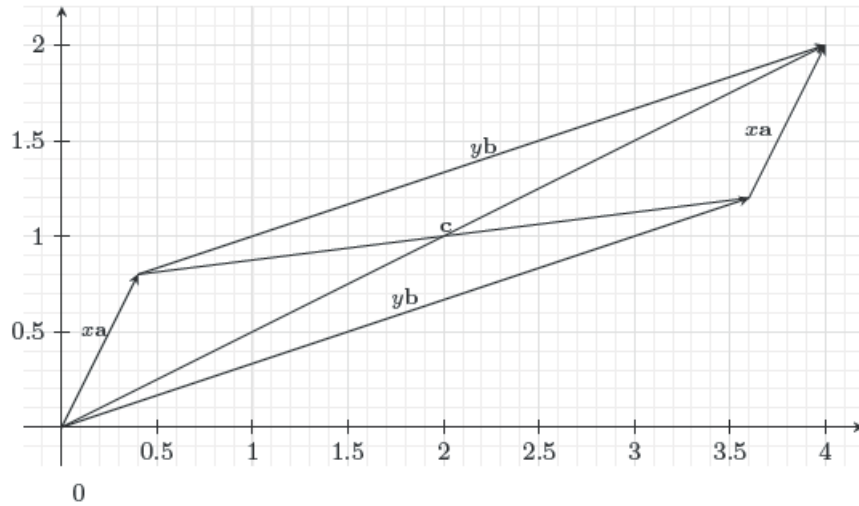


Рис. 3: наш параллелограмм с обеими диагоналями

Обозначим через $s_{[v,w]}$ площадь треугольника, построенного на векторах v и w . Легко видеть, что

$$s_{[xa,yb]} = s_{[xa,c]} = s_{[c,yb]}, \quad (1)$$

поскольку все они равны половине площади нашего параллелограмма (Рис. 4).

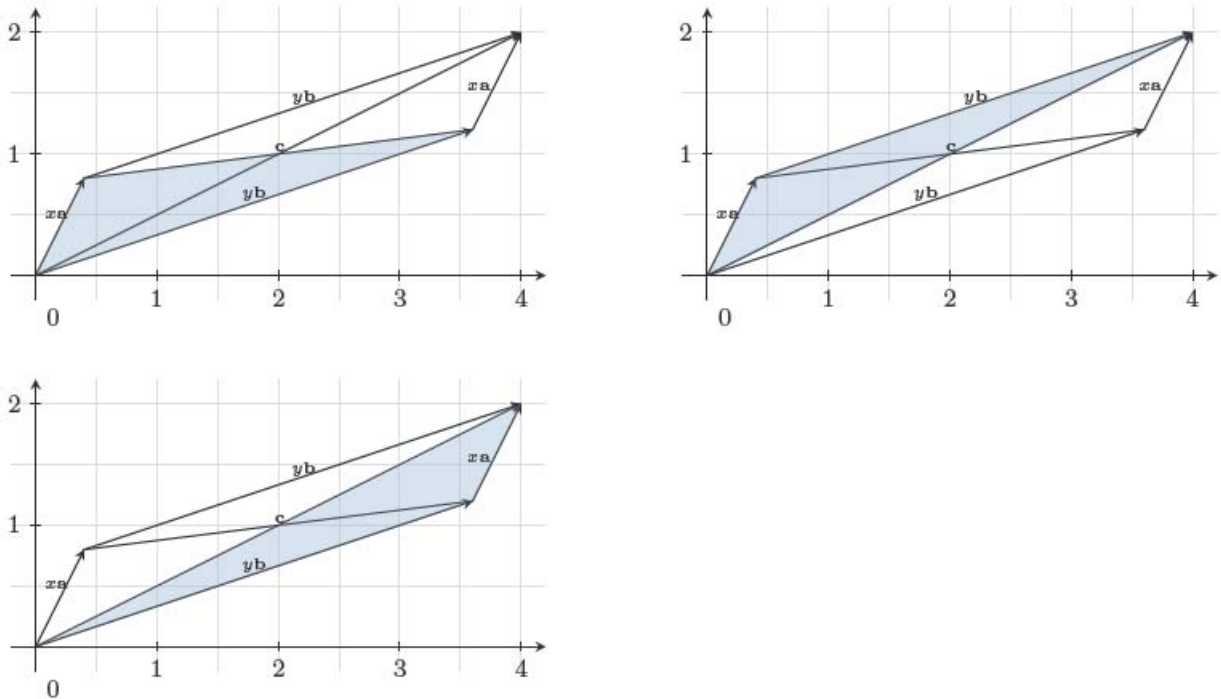


Рис. 4

Если увеличить сторону треугольника в некоторое число раз, его площадь увеличится во столько же раз. Поэтому,

$$s_{[xa,yb]} = xy \cdot s_{[a,b]}, \quad s_{[xa,c]} = x \cdot s_{[a,c]}, \quad s_{[c,yb]} = y \cdot s_{[c,b]}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) легко получить следующие два важных равенства:

$$xy \cdot s_{[a,b]} = y \cdot s_{[c,b]}, \quad xy \cdot s_{[a,b]} = x \cdot s_{[a,c]}.$$

Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то мы получаем

$$x = \frac{s_{[c,b]}}{s_{[a,b]}}, \quad y = \frac{s_{[a,c]}}{s_{[a,b]}}.$$

Следовательно, чтобы найти x и y , нам нужно найти площади треугольников, построенных на этих векторах; даже меньше того — только их отношения.

На самом деле, проще рассматривать площади не треугольников, а параллелограммов, построенных на тех же векторах, поскольку площадь треугольника мы всегда вычисляем как половину площади соответствующего параллелограмма, а раз нам важны только отношения площадей, писать всюду эту $\frac{1}{2}$ не представляется целесообразным. Обозначим через $S_{[v,w]}$ площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{v} и \mathbf{w} . Получим следующие равенства:

$$S_{[v,w]} = 2s_{[v,w]},$$

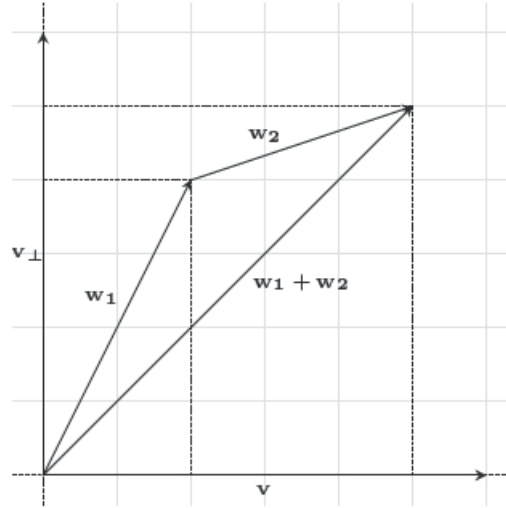
$$\boxed{x = \frac{S_{[c,b]}}{S_{[a,b]}}, \quad y = \frac{S_{[a,c]}}{S_{[a,b]}}.} \quad (3)$$

Формула (3) выглядит, однако, несколько странно. Мы понимаем, что значения x и y могут быть не только положительными, но и отрицательными, стало быть, выражаться отношениями площадей они не могут. Значит, $S_{[v,w]}$ — не совсем площадь. Чтобы продолжать рассуждения, нам нужно уточнить, что такое $S_{[v,w]}$. Для начала изучим свойства этого объекта. Для краткости будем писать просто $[v, w]$ вместо $S_{[v,w]}$.

Если мы попытаемся построить параллелограмм на двух равных векторах, его площадь окажется нулевой. Это соображение дает нам **свойство A°**:

$$[v, v] = 0.$$

Теперь было бы интересно узнать, как ведет себя наша функция, если в качестве одного из аргументов будет стоять сумма векторов. Самое простое и естественное предположение таково: $[v, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2] = [v, \mathbf{w}_1] + [v, \mathbf{w}_2]$. Давайте проверим его. Как известно, площадь параллелограмма может быть найдена как произведение его высоты и основания, на которое она опущена. В нашем случае слева и справа стоят площади параллелограммов с одним и тем же основанием \mathbf{v} , так что нам остается разобраться с высотами. Мы можем рассматривать их как проекции вторых аргументов на вектор \mathbf{v}_\perp , перпендикулярный \mathbf{v} . С помощью Рис. 5 можно заметить, что высота параллелограмма, соответствующего $[v, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2]$, равна сумме высот двух других параллелограммов, поскольку проекция суммы равна сумме проекций.

Рис. 5: $\text{pr}_{v^\perp}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \text{pr}_{v^\perp} \mathbf{w}_1 + \text{pr}_{v^\perp} \mathbf{w}_2$

Таким образом, **свойство B°** таково:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}_1] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}_2].$$

Заметим, что его можно применить и к первому аргументу $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$, так как доказательство в этом случае будет совершенно аналогичным.

Следующий шаг — изучить $[\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}]$. Пользуясь первыми двумя свойствами, получим

$$0 = [\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}] + [\mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{w}, \mathbf{v}] + [\mathbf{w}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{w}, \mathbf{v}],$$

$$0 = [\mathbf{v}, \mathbf{w}] + [\mathbf{w}, \mathbf{v}],$$

и, следовательно, **свойство C°** таково:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}]. \quad (4)$$

Оно называется *антисимметрией*. В нашем случае это означает, что $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ — не совсем площадь, а *площадь со знаком*, или *ориентированная площадь*, а настоящая площадь выражается как модуль этой величины. Раз наша функция антисимметрична, нам нужно договориться, в каком случае считать величину $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ положительной. Обычным соглашением на этот счет является следующее: $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] > 0$, если мы идем от \mathbf{v} к \mathbf{w} против часовой стрелки, и $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] < 0$ в противном случае.

Рассмотрим теперь $[\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Что ж, если мы растянем сторону параллелограмма в два раза, его площадь удвоится. То же самое произойдет для любого $\lambda > 0$: $[\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \lambda [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$. А если $\lambda < 0$? Рассмотрим этот случай так: $\lambda = (-1) \cdot |\lambda|$. Несложно увидеть, что $[(-1)\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [-\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ (Рис. 6). Оставшийся случай $\lambda = 0$ очевиден: если какая-то сторона обращается в ноль, то и площадь становится нулевой. Наконец, мы получили **свойство D°**:

$$[\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \lambda [\mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad \text{для любого вещественного } \lambda.$$

Ясно, что и для второго аргумента эти рассуждения остаются верными.

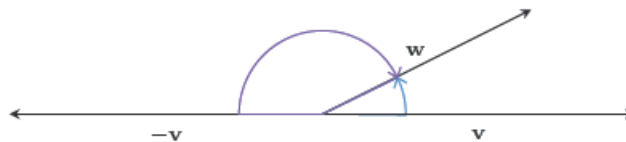


Рис. 6

Свойства B° и D° вместе означают *линейность* нашей функции. Поскольку они применимы как к первому, так и ко второму аргументу, функция $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ *линейна по обоим аргументам*.

Теперь у нас есть четыре свойства функции $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$, и следующее, что мы хотели бы сделать, — это записать ее координатный вид. Для этого рассмотрим Рис. 7а и выразим высоту h через известные величины. Обозначим через \mathbf{v}_\perp вектор, полученный в результате поворота вектора \mathbf{v} против часовой стрелки (т.е. в положительном направлении) на угол $\frac{\pi}{2}$. Ясно, что, если $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, то $\mathbf{v}_\perp = (-v_2, v_1)$ (см. Рис. 7б).

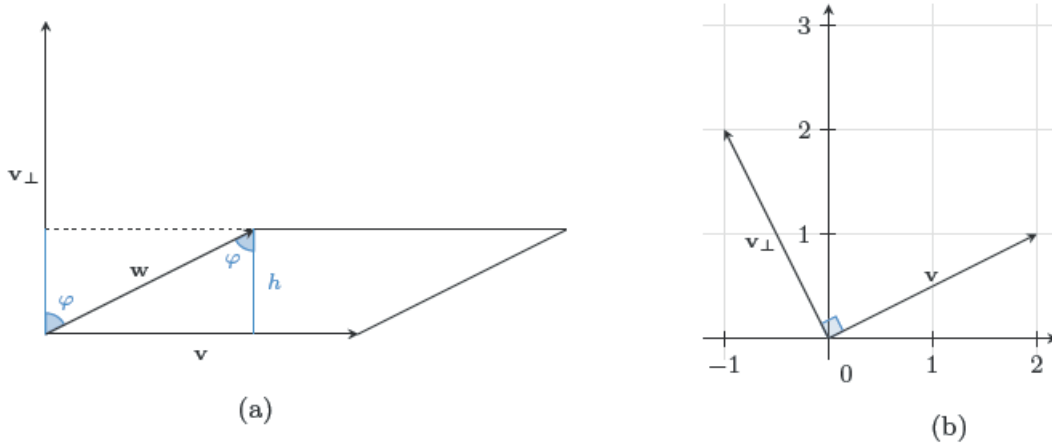


Рис. 7

Замечание. Здесь может возникнуть вопрос, почему мы поворачиваем вектор \mathbf{v} именно в положительном направлении. Дело в том, что соглашение о знаке нашей функции будет выполняться, если мы будем поворачивать этот вектор именно в направлении положительного отсчета углов. Убедиться в этом несложно самостоятельно.

Получим, что ориентированная площадь выражается следующим образом (здесь и далее круглыми скобками обозначено скалярное произведение векторов):

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = |\mathbf{v}|h = |\mathbf{v}||\mathbf{w}| \cos \varphi = |\mathbf{v}_\perp||\mathbf{w}| \cos \varphi = (\mathbf{v}_\perp, \mathbf{w}) = -v_2w_1 + v_1w_2 = v_1w_2 - v_2w_1,$$

$$\boxed{[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = v_1w_2 - v_2w_1.} \quad (5)$$

Это можно записать с помощью мнемонического правила, таблицы:

$$\boxed{[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = v_1w_2 - v_2w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix},}$$

где мы перемножаем элементы каждой диагонали, а затем берем разность результатов.

Мы знаем уже достаточно много о функции $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$, чтобы дать ей название.

Определение. Функцию

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = v_1w_2 - v_2w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. Другое название этой функции — *ориентированная площадь* параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{v} и \mathbf{w} .

Теперь мы можем проверить, что формула (3) верна не только для положительных x, y , а для любых. Используя (5), получим, что решение системы

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

записывается так:

$$x = \frac{[\mathbf{c}, \mathbf{b}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \quad (7)$$

Проверим эти формулы алгебраически. Нужно убедиться, что

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

когда x — решение системы (6). Для этого подставим в таблицу выражение столбца $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ из (6).

Используя изученные свойства функции $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$, получим:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa_1 + yb_1 & b_1 \\ xa_2 + yb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa_1 & b_1 \\ xa_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} yb_1 & b_1 \\ yb_2 & b_2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + y \cdot 0 = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

— в точности то, чего мы хотели. Выражение для y проверяется аналогично.

2. Ориентированный объем

В предыдущем разделе мы нашли общее решение линейной системы второго порядка (см. (3) и (7)). Следующий шаг — система третьего порядка:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{d},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ и $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$.

Чтобы решить систему, попробуем действовать аналогично тому, как это было для двумерного случая, только здесь нам придется рассматривать трехмерное пространство. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ (Рис. 8).

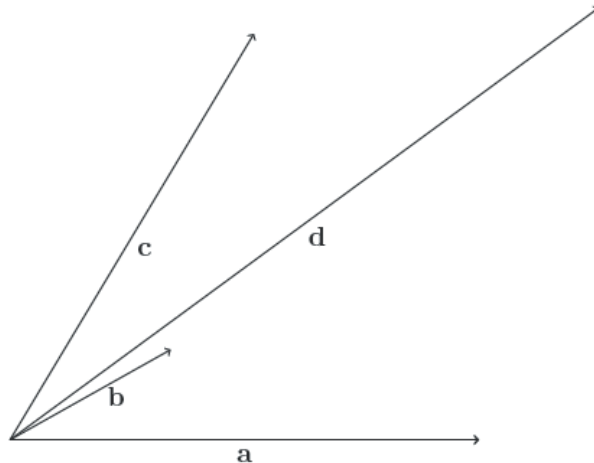


Рис. 8: данные векторы из \mathbb{R}^3

В \mathbb{R}^3 условие, описанное системой, задает не параллелограмм, как в \mathbb{R}^2 , а параллелепипед (см. Рис. 9). Ясно, что в этом случае нам нужно рассматривать объемы параллелепипедов вместо площадей параллелограммов.

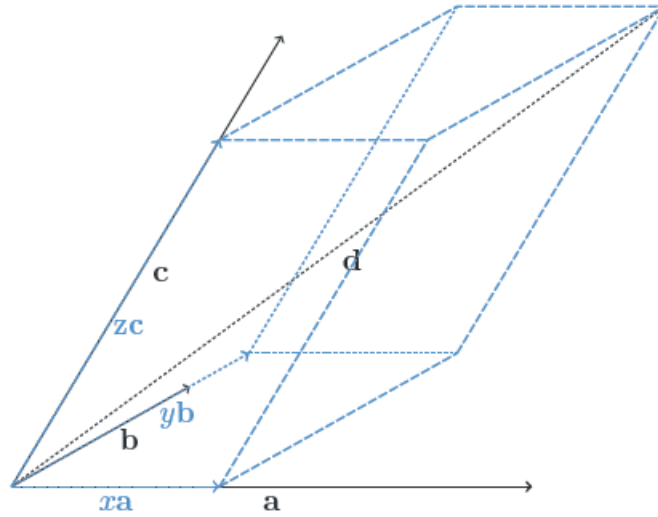


Рис. 9: условие $xa + yb + zc = d$ порождает параллелепипед

Заметим, что

$$V_{\langle xa, yb, zc \rangle} = V_{\langle d, yb, zc \rangle} = V_{\langle xa, d, zc \rangle} = V_{\langle xa, yb, d \rangle},$$

где $V_{\langle u, v, w \rangle}$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах u, v, w . Эта цепочка равенств верна, поскольку каждая соединенная знаком равенства пара объемов соответствует параллелепипедам, имеющим одно и то же основание и равные высоты.

Так как при увеличении стороны параллелепипеда в λ раз его объем также увеличивается в λ раз, получаем следующее:

$$xyzV_{\langle a, b, c \rangle} = yzV_{\langle d, b, c \rangle} = xzV_{\langle a, d, c \rangle} = xyV_{\langle a, b, d \rangle},$$

и, следовательно,

$$x = \frac{V_{\langle d, b, c \rangle}}{V_{\langle a, b, c \rangle}}, \quad y = \frac{V_{\langle a, d, c \rangle}}{V_{\langle a, b, c \rangle}}, \quad z = \frac{V_{\langle a, b, d \rangle}}{V_{\langle a, b, c \rangle}}.$$

Мы понимаем, что это должен быть ориентированный объем, поскольку неизвестные величины могут быть любого знака. Поэтому, как и раньше, будем писать просто $\langle u, v, w \rangle$ вместо $V_{\langle u, v, w \rangle}$, и нас снова будут интересовать свойства этой функции и ее явное выражение.

Свойства ориентированного объема параллелепипеда повторяют свойства ориентированной площади параллелограмма, и почти все они могут быть получены из аналогичных геометрических соображений. Единственное свойство, которое требует пояснения, — **свойство C°** , кососимметричность.

Свойство A° :

$$\langle v, v, w \rangle = \langle v, w, w \rangle = \langle v, w, v \rangle = 0$$

для любых v, w .

Свойство B° :

$$\langle u, v, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, v, w_1 \rangle + \langle u, v, w_2 \rangle.$$

Это свойство верно для любого аргумента $\langle u, v, w \rangle$, что несложно подтвердить теми же рассуждениями, что и для двумерного случая.

Свойство C° : с помощью первого и второго свойств получим, что

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \\ &0 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \quad 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle, \\ &\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Тот же эффект сохраняется, если мы поменяем местами любую другую пару аргументов (проверяется аналогично).

Обычное соглашение о знаке $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ таково: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle > 0$, если векторы $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ образуют правую тройку, и $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$ в противном случае.

Свойство D° :

$$\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Из свойств B° и D° вновь имеем *линейность*, и, так как они применимы к любому аргументу, то функция $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *полилинейна*.

Следующим шагом должно быть координатное представление $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. В случае косого произведения мы для этой цели выразили площадь как скалярное произведение. Попробуем поступить аналогично в трехмерном случае: нам нужно записать произведение высоты и площади основания как скалярное. Для этого нужно брать скалярное произведение вектора, из конца которого мы опускаем высоту, и вектора, ортогонального основанию (в положительном направлении отсчета углов) и по длине равного его площади. Поясним.

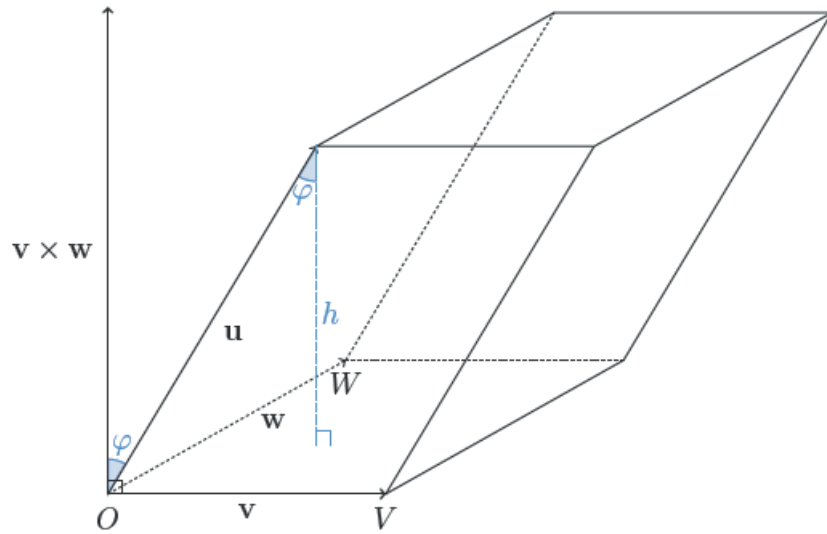


Рис. 10

Рассмотрим Рис. 10. Высота, опущенная из конца вектора \mathbf{u} , выразится так: $h = |\mathbf{u}| \cos \varphi$, где φ — угол от \mathbf{u} к вектору, ортогональному основанию и повернутому от него в положительном направлении. В двумерном случае мы просто повернули основание, что позволило нам сохранить информацию о его длине. Здесь нас интересует площадь, поэтому нам нужно наделить этот вектор длиной, равной площади основания. Обозначим его $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Значит, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{u}| |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \cos \varphi = (\mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Итак,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}). \quad (10)$$

Но как это использовать? Чтобы получить координатное выражение для ориентированного объема, нам нужно сначала выяснить, как $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ выражается через координаты векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} .

Выберем ортонормированную систему координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с центром в точке O . Обозначим через VOW плоскость, содержащую векторы \mathbf{v} и \mathbf{w} , а через $\Pi_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$ — построенный на этих векторах параллелограмм. Вектор $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ортогонален плоскости VOW и имеет длину, равную площади параллелограмма $\Pi_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$, поэтому он имеет проекцию на ось $O\mathbf{e}_1$, равную площади проекции параллелограмма $\Pi_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$ на плоскость $O\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ (так как площади параллелограмма и его проекции связаны так же, как и длины вектора и его проекции). Осталось найти площадь проекции $\Pi_{[\mathbf{v}, \mathbf{w}]}$ на $O\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Но это есть ни что иное, как площадь параллелограмма, построенного на двумерных векторах (v_2, v_3) и (w_2, w_3) , которая, как известно, равна их косому произведению (это, конечно, ориентированная площадь). Поскольку векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют правую тройку, с конца вектора \mathbf{e}_1 мы видим векторы $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в "правом" порядке: от \mathbf{e}_2 к \mathbf{e}_3 мы идем против часовой стрелки. Значит, косое произведение в системе координат $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеет ту же ориентацию, что и в обычном двумерном случае.

Итак,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_1 = [(v_2, v_3), (w_2, w_3)] = v_2 w_3 - v_3 w_2 = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Проведем аналогичные рассуждения для двух других координатных направлений.

Для второго направления будет некоторое изменение: с конца вектора \mathbf{e}_2 мы будем наблюдать пару $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ в "левом" порядке, поэтому, чтобы рассматривать их как обычный двумерный базис, нам придется поменять их последовательность. Чтобы избавиться от режущей глаз инверсии букв, появляющейся вследствие этого, мы можем, пользуясь кососимметричностью косого произведения, заменить ее на знак минус. Получим:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_2 = [(v_3, v_1), (w_3, w_1)] = v_3 w_1 - v_1 w_3 = w_1 v_3 - w_3 v_1 = \begin{vmatrix} w_1 & v_1 \\ w_3 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Наконец, для третьего направления рассуждения в точности такие же, как для первого, поэтому

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_3 = [(v_1, v_2), (w_1, w_2)] = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3. \quad (11)$$

Определение. Векторным произведением векторов $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ называется вектор, обозначаемый $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, равный по длине площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{v} и \mathbf{w} , ортогональный им и образующий с ними правую тройку. В формуле (11) записан явный вид этого вектора в ортонормированной системе координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Из формулы (10) следует, что, умножая $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ скалярно на вектор \mathbf{u} , мы получим в точности ориентированный объем:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Координатное выражение получено. Мы хотели бы, аналогично предыдущему случаю, записать (12) с помощью мнемонической таблицы:

$$u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Чтобы "вычислить таблицу," нужно понизить порядок (см. (13)). Знаки в получающейся сумме чередуются, и мы видели, почему.

Общим решением системы третьего порядка (8) будет, таким образом, следующий набор:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \quad (14)$$

Давайте проведем алгебраическую проверку этих формул, как мы делали для предыдущей системы, используя свойства ориентированного объема.

Покажем, что $\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$. Для этого снова возьмем выражение правых частей уравнений (теперь это столбец **d**) из системы (8):

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa_1 + yb_1 + zc_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 + yb_3 + zc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} xa_1 & b_1 & c_1 \\ xa_2 & b_2 & c_2 \\ xa_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} yb_1 & b_1 & c_1 \\ yb_2 & b_2 & c_2 \\ yb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} zc_1 & b_1 & c_1 \\ zc_2 & b_2 & c_2 \\ zc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \cdot 0 + z \cdot 0 = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Равенства для y и z проверяются аналогично.

Отметим, что, как и в двумерном случае, для осуществления такой проверки нам были важны свойства **линейности** и **равенства нулю таблицы с одинаковыми столбцами**.

А можем ли мы и эти свойства установить алгебраически? Точнее, их алгебраическое наследование от косога произведения? Проверим это, заметив, что из координатной записи $[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = v_1 w_2 - v_2 w_1$ легко получить все рассмотренные нами свойства для косога произведения, так что, считая эту запись определением, мы можем полностью отказаться от геометрических рассуждений (которые, однако, крайне важны для понимания).

3. Определитель

Действуя вне геометрических терминов, было бы полезно дать некоторое алгебраическое название и ориентированному объему. Мы видим аналогию между функциями ориентированной площади и ориентированного объема, причем последняя вычисляется через первую. Здесь мы хотели бы дать нашим mnemonic таблицам общее название.

Определение для матрицы 2×2 .

Определителем матрицы $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ называется величина $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Определение для матрицы 3×3 .

Определителем матрицы $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ называется величина

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Теперь проверим, наследуются ли определителем 3×3 свойства определителя 2×2 алгебраически.

Для алгебраического доказательства сложность утверждений перераспределяется, поэтому мы расположим свойства в другом порядке, заодно переформулировав их в новых терминах.

Поскольку при сведении ориентированного объема к ориентированной площади особую роль играет первый столбец, мы будем рассматривать по два случая: для первого и для не первого столбца. Возможные подслучаи при этом аналогичны между собой.

Свойство 1°: если столбец матрицы увеличить в λ раз, то и определитель возрастет в λ раз.

Доказательство для первого столбца:

$$\begin{vmatrix} \lambda u_1 & v_1 & w_1 \\ \lambda u_2 & v_2 & w_2 \\ \lambda u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \lambda u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - \lambda u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \lambda u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \left(u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right) = \lambda \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство для не первого столбца:

$$\begin{vmatrix} u_1 & \lambda v_1 & w_1 \\ u_2 & \lambda v_2 & w_2 \\ u_3 & \lambda v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} \lambda v_2 & w_2 \\ \lambda v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} \lambda v_1 & w_1 \\ \lambda v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} \lambda v_1 & w_1 \\ \lambda v_2 & w_2 \end{vmatrix} = u_1 \lambda \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \lambda \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \lambda \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \left(u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right) = \lambda \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Если в матрице есть нулевой столбец, ее определитель равен 0.

Свойство 2°: если столбец матрицы представлен суммой двух столбцов, то ее определитель равен сумме определителей матриц с этими столбцами.

Доказательство для первого столбца:

$$\begin{vmatrix} u_1 + s_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 + s_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 + s_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = (u_1 + s_1) \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - (u_2 + s_2) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + (u_3 + s_3) \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ s_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - s_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + s_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & v_1 & w_1 \\ s_2 & v_2 & w_2 \\ s_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство для не первого столбца:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 + s_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 + s_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 + s_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 + s_2 \\ v_3 & w_3 + s_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 + s_1 \\ v_3 & w_3 + s_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 + s_1 \\ v_2 & w_2 + s_2 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} +$$

$$+ u_1 \begin{vmatrix} v_2 & s_2 \\ v_3 & s_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & s_1 \\ v_3 & s_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & s_1 \\ v_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & s_2 \\ u_3 & v_3 & s_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства 1° и 2° означают *линейность* определителя.

Свойство 3°: определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Мы понимаем, что для объема иначе быть не может. Алгебраически это свойство можно проверить либо прямым вычислением, либо сведением к определителям 2×2 . Мы чуть позже проделаем это для определителя 4×4 , где это делается аналогично, но чуть более общим образом.

Свойство 4° (*кососимметричность*): если в матрице поменять местами два столбца, знак определителя изменится на противоположный.

Так как наше доказательство этого факта и раньше было алгебраическим, мы позволим себе просто сослаться на формулу (9), поскольку алгебраические обоснования производимых там действий мы только что дали.

Пусть теперь нам дана система четвертого порядка

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad xa + yb + zc + td = f.$$

Здесь даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$, и снова решать геометрически мы не сможем. Попробуем действовать алгебраически. Мы догадываемся, что решение этой системы будет записываться через мнемонические таблицы (определители) аналогично тому, как это было раньше, причем определители 4×4 будут вычисляться через определители 3×3 подобно тому, как определители 3×3 — через определители 2×2 . Такое индуктивное правило вычисления мы возьмем за определение.

Определение для матрицы 4×4 .

Определителем матрицы $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix}$ называется величина

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, мы можем предположить, что решение системы (15) будет выглядеть так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ f_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ f_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ f_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & f_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & f_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & f_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & f_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & f_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & f_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & f_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & f_4 & d_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}, \quad t = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & f_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & f_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}. \quad (16)$$

Вывести эти формулы геометрически затруднительно, но мы уже угадали их и нам достаточно просто проверить их справедливость алгебраически. Как было замечено в трехмерном случае, для такой проверки важны свойства линейности и равенства нулю определителя матрицы с двумя одинаковыми столбцами. Это три из четырех свойств, которые мы выводили. Еще одно свойство, кососимметричность, является, по существу, следствием других.

Итак, чтобы проверить состоятельность формул (16), нужно убедиться, что определитель 4×4 наследует свойства определителей меньшей размерности. Об определителе 4×4 мы знаем только его индуктивное определение, так что нам ничего не остается, кроме как им и воспользоваться. Попробуем провести алгебраическое доказательство нужных нам четырех свойств.

Линейность определителя 4×4 доказывается в точности так же, как и 3×3 . Мы не будем повторять доказательство, а просто сформулируем соответствующие два свойства.

Свойство 1° : если столбец матрицы увеличить в λ раз, то ее определитель возрастет также в λ раз.

Свойство 2° . Если столбец матрицы представлен суммой двух столбцов, то ее определитель равен сумме определителей матриц с этими столбцами.

Свойство 3° : определитель матрицы с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

Доказательство для случая, когда среди равных столбцов нет первого:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_2 & w_2 \\ v_3 & v_3 & w_3 \\ v_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_3 & v_3 & w_3 \\ v_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_2 & v_2 & w_2 \\ v_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_4 \begin{vmatrix} v_1 & v_1 & w_1 \\ v_2 & v_2 & w_2 \\ v_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$u_1 \cdot 0 - u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 0 - u_4 \cdot 0 = 0.$$

Доказательство для случая, когда среди равных столбцов есть первый. Пусть сперва равны первый и второй столбцы:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_4 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Ясно, что для установления равенства нулю этого выражения нам придется понижать размерность определителей еще на один порядок. Избегая нагромождения записей, попробуем проследить визуально закономерности, которые при этом возникнут. Посмотрим на слагаемые, содержащие произведение $u_1 u_2$. Они возникнут, только когда мы раскроем первые два определителя. Заметим, что знаки перед ними стоят противоположные, а $u_1 u_2$ в обоих случаях будет умножаться только на $\begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_4 & w_4 \end{vmatrix}$. Таким образом, сумма слагаемых, содержащих $u_1 u_2$, будет равна нулю. Несложно понять, что то же самое произойдет и с другими слагаемыми (каждое будет содержать произведение $u_i u_j$, и у каждого будет пара — такое же слагаемое с другим знаком). Итак, алгебраическая сумма выше равна нулю.

Пусть теперь равны первый и не второй столбцы.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & u_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & u_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & u_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & u_4 & w_4 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \\ v_4 & u_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_3 & u_3 & w_3 \\ v_4 & u_4 & w_4 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_4 & u_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_4 \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix} = \\
= -u_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} - u_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix} + u_4 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & u_3 & v_3 & w_3 \\ u_4 & u_4 & v_4 & w_4 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему.

Свойство 4° (*кососимметричность*): если в матрице поменять местами два столбца, знак определителя изменится на противоположный.

Доказательство такое же, как для определителя 3×3 .

Замечание. Для определителей более высокого порядка (5×5 , 6×6 , ..., $n \times n$, ...) никаких новых эффектов не возникает, и четыре свойства, которые мы рассматривали, наследуются, что можно показать индуктивно. Фактически, мы проделали это, переходя от определителя 2×2 к определителю 3×3 , а от него — к определителю 4×4 .

Для определителя матрицы также встречается **обозначение** $\det A$.

Определение. Формулы для решений систем линейных уравнений (7), (14), (16), а также аналогичные им для любой размерности, называются *правилом Крамера*.

Заключение

Напоследок мы хотели бы указать направления развития мысли на основе приведенных рассуждений.

Замечание 1. По ходу нашего рассуждения из смешанного произведения (мы его так не называли, но именно оно записано в формуле (10)) естественным образом возникло векторное произведение в трехмерном пространстве. Мы не стали изучать его свойства, но это можно было сделать.

Замечание 2. Рассмотрев в трехмерном случае систему $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ и ее решение в виде $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{d}$ (здесь через \mathbf{x} обозначен вектор-столбец неизвестных, т.е. $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$) и сопоставив его с формулами (14) (правило Крамера), можно естественным образом получить выражение обратной матрицы через алгебраические дополнения.

Замечание 3. Мы всюду рассматривали ортонормированный базис. Если теперь совершить переход к произвольному базису, правило Крамера естественным образом даст теорему о том, что произведение определителей равно определителю произведения.

Замечание 4. Для определителя 2×2 можно заметить, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, определитель 2×2 по строкам имеет такие же свойства, как и по столбцам. Далее несложно проверить, что и для больших размерностей наследуется линейность по строкам, откуда можно вывести разложение определителя по строке, а далее — что $\det A = \det A^T$.

Замечание 5. Если мы захотим уйти от индуктивного определения определителя, мы сможем определить его напрямую, через перестановки. Механизм формирования определителя в этом смысле хорошо виден на примере определителя 3×3 , если довести его индуктивное вычисление до конца.

Литература

- [1] G. Strang. Introduction to Linear Algebra, 5th Edition. - USA : Wellesley - Cambridge Press. - 2016. - 574 p.
- [2] G. Strang. (2005) Gilbert Strang lectures on Linear Algebra (MIT) [плейлист видеозаписей лекций Г. Стренга] // YouTube. Обновлено 2 июля 2014 г. URL: <https://www.youtube.com/playlist?list=PL49CF3715CB9EF31D>

*Писаренко Игорь Борисович,
ГБОУ Школа № 1557, г. Москва,
учитель математики.*

E-mail: gbpltcm@gmail.com

*Зайдель Мария Игоревна,
аспирантка механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова.*

E-mail: mariil8480@gmail.com

Какая функция больше — показательная или степенная?

А. А. Рубан

Описывается область значений x , для которых степенная функция x^p будет больше показательной функции a^x . Доказывается, что эта область есть отрезок (l, r) и приводится асимптотически точная оценка для границ данной области.

Распространено мнение, что показательная функция больше степенной. В конце концов, все знают, что полиномиальный алгоритм гораздо лучше экспоненциального, так как работает быстрее. Итак, всем (или почти всем) известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x / x^p = \infty$. Но, во-первых, справедливо это только если $a > 1$, а во-вторых, верно это только в пределе, то есть при достаточно больших x . Тут же возникает вопрос — а насколько больших x ? То есть попробуем решить неравенство $a^x / x^p < 1$. Вроде ничего хитрого — логарифмируем и получаем равносильное неравенство $x / \ln(x) < c$ ($c = p / \ln(a)$).

Дальше для лучшего понимания нам потребуется график функции $x / \ln(x)$.

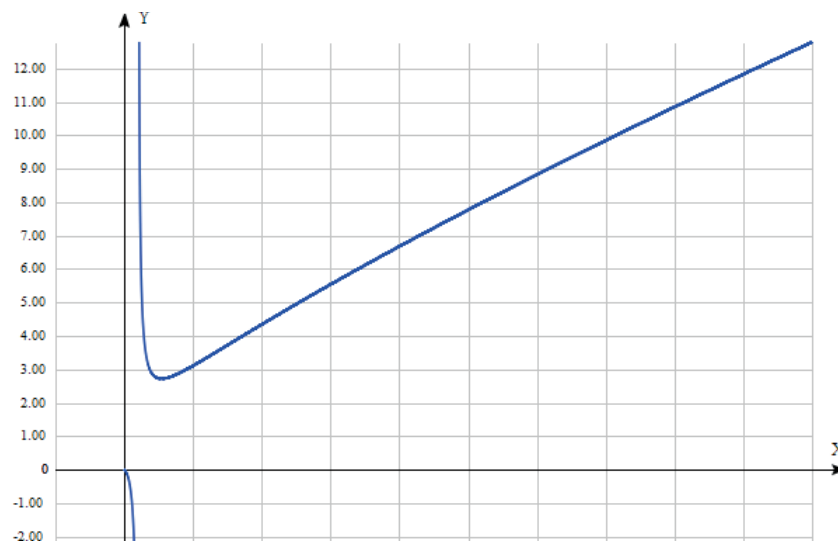


Рис. 1. График функции $x / \ln(x)$

Как наглядно видно (и это нетрудно проверить несложными вычислениями) функция $x / \ln(x)$ убывает от 1 до e , достигая минимума, равного e при $x = e$. Далее она возрастает до бесконечности. Перегиб происходит при $x = e^2$, хотя это уже не столь актуально.

Теперь можно понять, что решением интересующего нас неравенства $a^x / x^p < 1$ будет либо интервал (l, r) , где l и r — два корня уравнения $x / \ln(x) = p / \ln(a)$, либо пустое множество, в случае если правая часть уравнения $p / \ln(a) = c$ будет не больше e — минимального значения нашей функции $x / \ln(x) = f(x)$. Левый корень нашего уравнения $f(x) = c$ для нас большого интереса не представляет — понятно, что с ростом c он стремится к 1 справа и скорость этого стремления будет как у гиперболы ($x / \ln(x) \sim x / (x - 1)$).

Гораздо интереснее, да и более актуально поведение правого корня, ведь именно при всех $x > r$ показательная функция и будет больше степенной. Итак, попробуем решить нужное нам уравнение $x / \ln(x) = c$. Естественно, будем рассматривать только $c > e$, так как при меньших c уравнение решений не имеет. Первое, что приходит тут в голову, это соображение, что раз $\ln(x)$ гораздо меньше, чем x , то вместо деления на логарифм будем на него умножать. То есть $x = c \ln(c)$. Самое интересное, что этот ответ весьма близок к истине, что и доказывает ледующая теорема:

Теорема 1. Для правого корня r уравнения $f(x) = c$ верна асимптотически точная формула $r \approx c \ln(c)$. То есть $r = c \ln(c)(1 + o(1))$.

Доказательство. Для доказательства вспомним метод итераций решения нелинейных уравнений. Преобразуем исходное уравнение $x/\ln(x) = c$ к виду, удобному для итераций $x = c \ln(c)$, то есть к виду $x = u(x)$ и запустим итерационный процесс, стартуя с $x_0 = c$. Получаем следующую последовательность приближений:

$$\begin{aligned} x_0 &= c \\ x_1 &= c \ln(c) \\ x_2 &= c \ln(c \ln(c)) \\ x_3 &= c \ln(c \ln(c \ln(c))) \end{aligned} \tag{1}$$

и так далее.

Данная последовательность приближений достаточно быстро сходится к правому решению нашего уравнения $x/\ln(x) = c$. Оценим, сколько итераций нам необходимо сделать, чтобы получить решение уравнения с заданной точностью и вообще разберемся поподробнее с этой последовательностью.

Начнем с объяснения поведения этой последовательности и пояснения, почему и как она сходится. Тут нам очень поможет рисунок, поясняющий поведение последовательности (1).

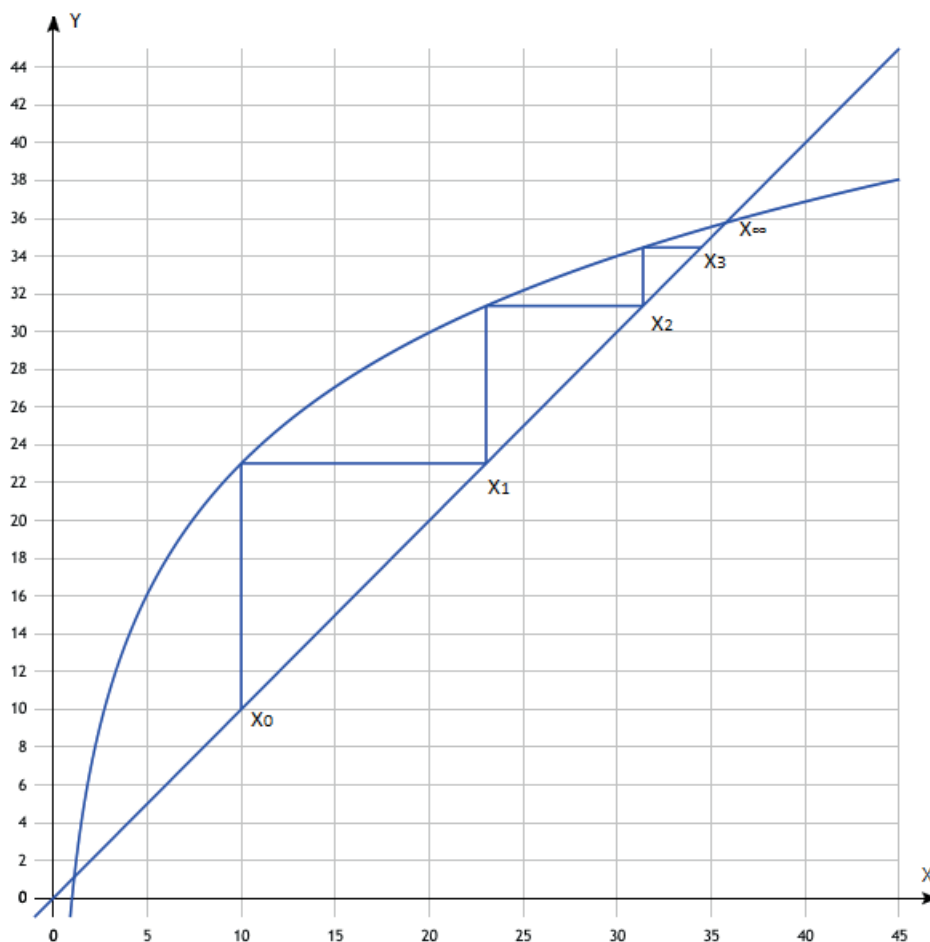


Рис. 2. График поведения последовательности (1)

Как видно из рисунка, (он выполнен при $c = 10$) последовательность x_k возрастает и стремится к правому решению нашего уравнения $x/\ln(x) = c$ — эта точка обозначена x_∞ . Как известно из теоремы о сжимающем отображении, скорость сходимости последовательности итераций будет не хуже, чем у геометрической прогрессии со знаменателем $q = \max |u'(x)|$, $x \in [x_k, x_\infty]$. А так как производная нашей функции $u(x)$ положительна и убывает, то максимум производной достигается в крайней левой точке и будет равен c/x_k . Кроме этого, последовательность x_k монотонно возрастает, поэтому получаем:

$$\begin{aligned} x_\infty &= x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \leq \dots \\ &\leq x_1 + (x_2 - x_1) + q(x_2 - x_1) + q^2(x_2 - x_1) + q^3(x_2 - x_1) + \dots = \\ &= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1 - q} = c \ln(c) + \frac{c \ln(\frac{c \ln(c)}{c})}{1 - \frac{c}{c \ln(c)}} = c \ln(c) + \frac{c \ln(\ln(c))}{1 - \frac{1}{\ln(c)}} = \\ &= c \ln(c) \left(1 + \frac{\ln(\ln(c))}{\ln(c) - 1}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

(здесь мы, естественно, брали производную в крайней левой точке отрезка $[x_1, x_\infty]$, для которого мы и применяли теорему о сжимающем отображении). Итак, мы получили вполне удовлетворительную оценку для нахождения решения нелинейного уравнения $x/\ln(x) = c$, которое дает нам оценку сверху для $x_\infty = r$, начиная с которого показательная функция будет всюду больше степенной. При этом, как нетрудно заметить, оценка $x_\infty \approx c \ln(c)$ оказывается асимптотически верной при $c \rightarrow \infty$, так как множитель $1 + \ln(\ln(c))/(\ln(c) - 1) \rightarrow 1$ при $c \rightarrow \infty$.

Например, для случая $a = 1, 1$ и $p = 10$ получаем $c = 10/(\ln(1, 1)) = 104, 92$ и наша формула (2) выдает для x_∞ оценку сверху 693, 7, что довольно близко к точному решению x_∞ равному 685, 08. В то же время оценка снизу $x_1 = c \ln(c) = 488, 22$.

Литература

- [1] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1966. - 137 с.

*Рубан Анатолий Альбертович,
доцент кафедры ПММК СибГУТИ, г. Новосибирск,
доцент, кандидат физ.-мат. наук.*

ruban-anatoly@yandex.ru

Метод аффинных преобразований для решения диофантовых уравнений применительно к многочленам второй степени

Б. Ж. Сагиндыков

При решении диофантовых уравнений применяются различные методы: секущих и касательных Диофанта, разложение на множители, алгоритм Евклида, цепных дробей, сравнений и т.д.

Основная цель данной работы — найти рациональные точки кривой на плоскости, задаваемой уравнением второй степени.

1. Рациональные точки на эллипсе

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (1)$$

где a_{ij} — целочисленные коэффициенты.

Из общей теории кривых второго порядка известно, что в случае, когда $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$ уравнение (1) определяет эллипс. Здесь $I_1 = a_{11} + a_{22}$, $I_2 = \det A \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I_3 = \det \bar{A} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$ являются инвариантами левой части уравнения.

Пусть уравнение (1) определяет эллипс. Тогда с помощью аффинного преобразования этот же эллипс можно получить из окружности. Каким образом?

Рассмотрим отображение плоскости в себя, при котором каждой точке x', y' в декартовой прямоугольной системе координат ставится в соответствие точка с теми же координатами в косоугольной системе координат $[1, 2]$, т.е. $z'_{\partial\epsilon\kappa} = z_{\kappa\sigma\sigma}$, где $z'_{\partial\epsilon\kappa} = x' + iy'$, $i^2 = -1$, $z_{\kappa\sigma\sigma} = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$, $\theta_0 > 0$, $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$.

В нашем случае аффинное преобразование задается формулами вида

$$\begin{cases} x' = x + \frac{\theta_1}{2}y, \\ y' = \sqrt{-D}y \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x' - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{-D}}y', \end{cases} \quad (2)$$

которые удовлетворяют условию $D \neq 0$ и связывают координаты точки при переходе от декартовой прямоугольной системы координат к косоугольной системе координат и наоборот.

Пусть в прямоугольной системе координат $x'Oy'$ задана окружность уравнением

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 = r^2, \quad (3)$$

где $(x'_0; y'_0)$ — центр окружности, r — радиус окружности.

Образом этой окружности после аффинного преобразования (2) относительно той же прямоугольной системы координат будет эллипс.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в уравнении (3), получим

$$x'^2 + y'^2 - 2x'_0x' - 2y'_0y' + x_0'^2 + y_0'^2 - r^2 = 0. \quad (4)$$

Тогда образ этой окружности запишется в виде уравнения (1)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, \quad 2a_{12} = \theta_1, \quad a_{22} = \theta_0, \quad a_1 = -\left(x_0 + \frac{\theta_1}{2}y_0\right), \quad a_2 = -\left(\frac{\theta_1}{2}x_0 + \theta_0y_0\right), \\ a_0 &= x_0^2 + \theta_1x_0y_0 + \theta_0y_0^2 - r^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Задача 1. Найдите рациональные точки кривой

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 4y - 2 = 0. \quad (7)$$

Решение. Чтобы получить заданное уравнение, сначала надо найти уравнение окружности, к которой применяется аффинное преобразование (2).

Выписываем коэффициенты данного уравнения

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 2, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = -2, \quad a_0 = -2.$$

Исследуемая кривая является эллипсом. В действительности $I_1 = a_{11} + a_{22} = 3$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ — значит кривая центральная; $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4$ — значит кривая нераспадающаяся. Таким образом $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$. Следовательно, кривая — эллипс.

Решив систему двух линейных уравнений, найдем центр этого эллипса

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 = 1, \\ x_0 + 2y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Итак, точка $(x_0; y_0) = (0; 1)$ — центр эллипса.

Далее центр искомой окружности находим из центра эллипса с помощью аффинных преобразований (2)

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \frac{\theta_1}{2}y_0 = 1, \\ y'_0 = \sqrt{-D}y_0 = 1, \end{cases}$$

где $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 2a_{12} = 2$, $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = -1$. Тогда центром окружности будет точка $(x'_0; y'_0) = (1; 1)$. При этом по определению аффинного преобразования рассматриваемый эллипс переходит в окружность, определяемую уравнением

$$(x' - 1)^2 + (y' - 1)^2 = 4. \quad (8)$$

так как из (6) $r^2 = x_0^2 + \theta_1x_0y_0 + \theta_0y_0^2 - a_0 = 2 - (-2) = 4$.

Это означает, что между рациональными точками окружности (8) и эллипса (7) устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Отступление. Диофантом методом секущих найдены рациональные точки единичной окружности. Рациональные решения уравнения $x'^2 + y'^2 = 1$ также представлены в виде

$$x' = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad y' = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad (9)$$

где m и n — произвольные целые числа.

Воспользовавшись решением Диофанта для единичной окружности, находим рациональные решения уравнения

$$\left(\frac{x' - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y' - 1}{2}\right)^2 = 1.$$

Тогда $(x'; y') = \left(\frac{4mn + m^2 + n^2}{m^2 + n^2}; \frac{3m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)$ — рациональные точки окружности (8).

С помощью аффинного преобразования (2) находим рациональные точки эллипса (7)

$$\begin{cases} x = x' - \frac{\theta_1}{2\sqrt{-D}}y' = x' - y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{-D}}y' = y', \end{cases}$$

Тогда

$$(x; y) = \left(\frac{4mn - 2m^2 + 2n^2}{m^2 + n^2}; \frac{3m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right) \quad (10)$$

— рациональные точки эллипса (7), где m, n — произвольные целые числа.

2. Рациональные точки на гиперболе

Если в уравнении (1) $I_2 < 0$, то кривая относится к гиперболическому типу. Если при этом $I_3 \neq 0$, то кривая представляет собой гиперболу.

Задача 2. Найдите рациональные точки кривой

$$x^2 + xy - 2y^2 - x + y = 1. \quad (11)$$

Решение. Вычислим инвариант $I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}$. Так как $I_2 < 0$, то кривая относится к гиперболическому типу. Вычислим инвариант $I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{9}{4}$.

Так как $I_3 \neq 0$, то кривая (11) представляет собой гиперболу.

Для нахождения координат центра x_0 и y_0 гиперболы воспользуемся системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 - 1 = 0, \\ x_0 - 4y_0 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим центр гиперболы $(x_0; y_0) = (1/3; 1/3)$. После переноса начала координат в центр кривой уравнение принимает вид

$$x'^2 + x'y' - 2y'^2 = 1. \quad (12)$$

где $x' = x - \frac{1}{3}$, $y' = y - \frac{1}{3}$.

Левая часть уравнения (12) представляет норму обобщенного комплексного числа [1]: $z = x + py$, $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$, так как $\bar{z} = x' + \theta_1 y' - py'$ и

$$\|z\|^2 = z \cdot \bar{z} \equiv x'^2 + \theta_1 x'y' + \theta_0 y'^2. \quad (13)$$

Сравнивая уравнение (12) с нормой обобщенного комплексного числа (13), устанавливаем, что $\theta_0 = -2$, $\theta_1 = 1$ и $D = \frac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = 9/4 > 0$. Тогда такие обобщенные комплексные числа относятся к гиперболическому типу.

Раскладывая правую часть тождества (13) на линейные множители, имеем

$$\left(x' + \left(\frac{\theta_1}{2} + \sqrt{D}\right)y'\right) \left(x' + \left(\frac{\theta_1}{2} - \sqrt{D}\right)y'\right) = 1 \Rightarrow (x' + 2y')(x' - y') = 1$$

или

$$x_*^2 - y_*^2 = 1, \quad (14)$$

где $x_* = \frac{2x' + y'}{2}$, $y_* = \frac{3y'}{2}$.

Диофант методом секущих находил рациональные точки единичной равнобочной гиперболы. То есть он нашел рациональные решения уравнения (14) и эти решения представлены в виде

$$(x_*; y_*) = \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}; \frac{2mn}{m^2 - n^2}\right), \quad (15)$$

где m, n — произвольные целые числа. Формула (15) при всевозможных $m \neq \pm n$ дает все решения уравнения (14) в рациональных числах. Тогда

$$(x; y) = \left(\frac{4m^2 - 2mn + n^2}{3(m^2 - n^2)}; \frac{m^2 + 4mn - n^2}{3(m^2 - n^2)}\right) \quad (16)$$

представляют рациональные точки исходной кривой (11), где m, n — произвольные целые числа.

Замечание 1. Не на всякой кривой второй степени имеются рациональные точки, например их нет на эллипсе $x^2 + 2xy + y^2 = 3$ или на окружности $x^2 + y^2 = 3$.

3. Уравнения Пелля

Уравнение второй степени вида

$$x^2 - Ny^2 = 1, \quad (17)$$

называется уравнением Пелля; здесь N — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Теорема. Если $x^2 - Ny^2 = 1$, то пара чисел $(X; Y) = (x_1x + Ny_1y; y_1x + x_1y)$ удовлетворяет равенству $X^2 - NY^2 = 1$.

Доказательство. Осуществляем аффинное преобразование:

$$X \mapsto ax + by, \quad Y \mapsto cx + dy.$$

Тогда коэффициенты аффинного преобразования $(c; d)$ удовлетворяют уравнению (17), т.е. $d^2 - Nc^2 = 1$; а коэффициенты $(a; b)$ удовлетворяют уравнению

$$b^2 - Na^2 = -N.$$

Пусть $(x_1; y_1)$ некоторое нетривиальное частное решение уравнения (17). Тогда можно принять за $d = x_1$, $c = y_1$, $b = Ay_1$, $a = x_1$. Далее подставив значения X и Y в (17) убедимся, что

$$X^2 - NY^2 = (x_1x + Ny_1y)^2 - N(y_1x + x_1y)^2 = (x_1^2 - Ny_1^2)(x^2 - Ny^2) = 1.$$

Замечание 2. Обычно за $(x_1; y_1)$ берется то нетривиальное решение, при котором двучлен $x + \sqrt{N}y$ принимает наименьшее значение из всех возможных.

Замечание 3. Такое решение $(x_1; y_1)$ называется *фундаментальным решением* уравнения Пелля.

Таким образом, при помощи правила $(x; y) \rightarrow (x_1x + Ny_1; y_1x + x_1y)$ можно получить рекуррентные формулы для “новых” решений

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_1x_n + Ny_1y_n, \\ y_{n+1} = y_1x_n + x_1y_n \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & Ny_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Следовательно, более быстрый прием отыскания последовательных решений уравнения (17) основывается на так называемом “тождестве Брахмагупты”

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & Ny_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & Ny_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 + Ny_1y_2 & Nx_1y_2 + Nx_2y_1 \\ y_1x_2 + x_1y_2 & x_1x_2 + Ny_1y_2 \end{pmatrix},$$

и используя формулу $\det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$ получим “тождество Брахмагупты”.

Задача 3. Найдите рациональные точки кривой

$$x^2 + 4xy + (4 - 9m)y^2 = 1, \quad (20)$$

где m — любое натуральное число.

Решение. Исходное уравнение (20) с помощью аффинного преобразования

$$x = x' - \frac{2}{3}y', \quad y = \frac{1}{3}y'. \quad (21)$$

запишем в более компактном виде

$$x'^2 - my'^2 = 1. \quad (22)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение Пелля.

Самое изящное доказательство теоремы существования уравнения Пелля получено австралийским математиком Н. Вайлдбергером [3]. И в статье [3] дан алгоритм нахождения фундаментального решения уравнения Пелля.

Пусть $m = 3$. Тогда уравнение

$$x'^2 - 3y'^2 = 1. \quad (23)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Фундаментальное решение уравнения (23) находим по алгоритму Н. Вайлдбергера.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R]{T=-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L]{T=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R]{T=-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ начальная матрица; $T = a + 2b + c$ — сумма всех элементов матрицы;

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L'AL = \begin{pmatrix} a + 2b + c & b + c \\ b + c & c \end{pmatrix}, \quad R'AR = \begin{pmatrix} a & b + c \\ a + b & a + 2b + c \end{pmatrix}.$$

Здесь переход от A к $L'AL$ назовем левым шагом, а переход от A к $R'AR$ — правым шагом.

Таким образом применяя алгоритм Н. Вайлдбергера, из начальной матрицы после трех операций снова получили исходную матрицу. Следовательно, результирующая матрица задается в виде $N = RLR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и удовлетворяет тождеству $N'AN = A$. Здесь “штрих” означает транспонирование матрицы. Тогда фундаментальное решение определяется из матричного равенства $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — тривиальное решение уравнения Пелля.

Чтобы получить бесконечно много решений уравнения (23) в натуральных числах, воспользуемся “тождеством Брахмагупты” или рекуррентными формулами (18):

$$\begin{aligned} (x'_2; y'_2) &= (x'^2_1 + 3y'^2_1; x'_1y'_1 + x'_1y'_1) = (7; 4); \\ (x'_3; y'_3) &= (x'_1x'_2 + 3y'_1y'_2; y'_1x'_2 + x'_1y'_2) = (26; 15); \\ (x'_4; y'_4) &= (x'_1x'_3 + 3y'_1y'_3; y'_1x'_3 + x'_1y'_3) = (97; 56); \\ &----- \\ (x'_{n+1}; y'_{n+1}) &= (2x'_n + 3y'_n; x'_n + 2y'_n). \end{aligned}$$

Теперь, чтобы найти рациональные точки кривой (20) при $m = 3$, воспользуемся аффинным преобразованием (21). Тогда уравнение $x^2 + 4xy - 23y^2 = 1$ имеет следующую последовательность рациональных решений:

$$\begin{aligned} (x_1; y_1) &= \left(x'_1 - \frac{2}{3}y'_1; \frac{1}{3}y'_1\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right); \\ (x_2; y_2) &= \left(x'_2 - \frac{2}{3}y'_2; \frac{1}{3}y'_2\right) = \left(\frac{13}{3}; \frac{4}{3}\right); \\ (x_3; y_3) &= \left(x'_3 - \frac{2}{3}y'_3; \frac{1}{3}y'_3\right) = (16; 15); \\ (x_4; y_4) &= \left(x'_4 - \frac{2}{3}y'_4; \frac{1}{3}y'_4\right) = \left(\frac{179}{3}; \frac{56}{3}\right); \\ &----- \\ (x_n; y_n) &= \left(x'_n - \frac{2}{3}y'_n; \frac{1}{3}y'_n\right). \end{aligned}$$

Литература

1. Сагиндыков Б.Ж., Бимурат Жанар // “Естественные и математические науки: вопросы и тенденции развития”, материалы международной заочной-практической конференции 01 апреля 2013 г. - Новосибирск. - 2013. - 150 с.
2. Сагиндыков Б.Ж., Джатыков Т.Е. // “Достижения вузовской науки 2021”: сборник статей XVII международного научно-исследовательского конкурса. - Пенза: МЦНС “Наука и просвещение”. - 2021. - 382 с.
3. Wildberger N.J. Pell's equation without irrational numbers // arXiv: 0806.2490 1 [math. NT] 16 June 2008.

Сагиндыков Бимурат Жумабекович,
ассоциированный профессор
Satbayev University, Казахстан
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: bimurat55@gmail.com

Любимый учитель. Сивашинскому Израилю Хаимовичу — 112 лет

Т. И. Кузнецова

Статья об одном из харизматичных советских учителей математики написана его ученицей из знаменитого класса 11Г московской школы № 2 выпуска 1963 года — по докладу «Сивашинскому Израилю Хаимовичу — 110 лет», сделанному на Всероссийском научно-методическом семинаре «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом» 11 апреля 2019 года.

К 30-летию со дня смерти



Фото 1. Сивашинский Израиль Хаимович (29.03.1909–31.01.1991)

Сивашинский Израиль Хаимович (для нас, его учеников, Ефимович) — замечательный учитель математики — родился на Украине, в Полтавской области, в семье винодела. Родным языком для него был идиш, потом выучил иврит и украинский (в школе). Русский язык выучил, только когда поступил в Киевский университет (1931 г.). В 1936 г. окончил физико-математический факультет. И.Х. Сивашинский — участник Великой Отечественной Войны — в 1941–43 гг. служил офицером топографической службы на фронте, в результате контузии был демобилизован [1].

1. Сивашинский И.Х. преподавал математику в Москве:

1943–45 гг. — в Школе военно-воздушных сил,

1945–47 гг. — в станкостроительном техникуме,

1947–60 гг. — в школе № 17,

1960–69 гг. — в школе № 2.

Больше 20 лет проработал в Московском городском Институте усовершенствования учителей (МГИУУ) методистом.

2. В Российской еврейской энциклопедии [2] можно прочитать, что в 1960 г. И.Х. Сивашинский организовал в Москве математическую школу № 2. Уточним эти сведения: школа № 2 существует с 1956 г. и сначала она была с политехническим уклоном по специальности «радиомонтажник электронной вычислительной техники» с производственной практикой в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР. В 1960 г. И.Х. Сивашинский как сильный преподаватель математики и, более того, методист Городского института усовершенствования учителей, был приглашен на работу в московскую школу № 2 её директором В.Ф. Овчинниковым для проведения занятий во вновь набранном сильном девятом классе 9Г, представителем которого является автор настоящих строк. После этого события началась история школы как физико-математической. Поэтому и считается, что И.Х. Сивашинский — один из её организаторов.

Награды СССР И.Х. Сивашинского:

1946 г. — Орден «Красной звезды».

1957 г. — «Знак почета», присужден Верховным Советом СССР.

1963 г. — Знак «Отличник народного образования» от Министерства просвещения РСФСР.

1968 г. — Верховный Совет РСФСР наградил беспартийного Сивашинского И.Х. званием «Заслуженный учитель РСФСР».

1969–71 гг. — персональный пенсионер.

3. В СССР в 1969–71 гг. И.Х. Сивашинский был активным борцом за право советских евреев на свободную репатриацию в Израиль. Вёл кружок по изучению иврита. В ноябре 1971 г. вместе с женой и двумя детьми уехал в Израиль, где в 1971–82 гг. преподавал математику в Иерусалимском университете и издал несколько пособий по математике на иврите [3, с. 199].

Скончался 31.01.1991 и похоронен в Иерусалиме.

Потомки И.Х. Сивашинского — сын, дочь и двое внуков [4, см. раздел «Биографические справки»].

Сын Григорий — ученик академика А.Н. Колмогорова, окончил механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, профессор Тель-Авивского университета, крупнейший в мире специалист по математической теории горения. Вывел уравнение, описывающее распространение неустойчивых фронтов в активных средах, — уравнение Курамото-Сивашинского. Математики называют его научным «внуком» А.Н. Колмогорова.

Дочь Виктория окончила в Москве нашу Вторую школу и математический факультет Иерусалимского университета, ныне проживает в США.

Внук Моше известен как докторант факультета компьютерных наук, внучка Эстер — как студентка экономического факультета в университете Оклахомы.

На фото 2 Виктория — первая справа, Григорий — в центре (третий справа). Замечу, что на фотографии видно разительное сходство Виктории с отцом.

4. И.Х. Сивашинский — автор семи замечательных книг — пособий, большинство из которых адресовано поступающим в вузы, изданных им в течение 1965–1971 гг.:

1. Как помочь детям учиться. — М.: Знание, 1965. 79 с. (в соавторстве с И.Г. Овчинниковой) — в серии «Народный университет. Педагогический факультет».

2. Элементарные функции и графики (теория и задачи с решениями). — М.: Наука, 1965; 244 с.; 2-е изд. — 1968.

3. Задачник по элементарной математике. — М.: Наука, 1967. 513 с.

4. Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967. 304 с.

https://math.ru/lib/files/pdf/misc/Geom_Sivashinski.pdf



Фото 2 (8 марта 1971 г.). Слева направо: Юлия Винер, Израиль Минц, Григорий Сивашинский, Меир Гельфонд, Вика (сестра Г. Сивашинского). Ниже Г. Сивашинского — Симона, дочка Меира Гельфонда. Фотография взята из публикации Якова Мельника [5]

5. Задачи по математике для внеклассных занятий (9–10 классы) / Под редакцией В.Г. Болтянского. – М.: Просвещение, 1968. 311 с.

6. Пособие по математике для техникумов. – М.: Высшая школа, 1970. 450 с.

7. Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. – М.: Наука, 1971. 367 с.

Эти пособия не потеряли своей актуальности и в настоящее время, хотя большинство из них являются библиографической редкостью.

Приведем выдержку из аннотации одного из них — «Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям»:

«Книга представляет собой сборник задач повышенной трудности по алгебре и элементарным функциям, снабженных решениями. Это пособие предназначено в первую очередь для самообразования. Книга может быть полезной преподавателям и учащимся математических школ, руководителям математических кружков, студентам ВУЗов, а также при подготовке к конкурсным экзаменам в ВУЗы, в которых предъявляются повышенные требования по математике. Пособие охватывает все разделы курса «Алгебра и элементарные функции». Приведены решения всех задач. В отдельных случаях, когда задача допускает существенно различные подходы к решению, приведены два решения, а несколько задач решены тремя способами».

Замечу, что однажды Израиль Ефимович похвастался, что для одного тригонометрического уравнения имеет 21 способ решения (типа $5 \sin x - \cos x = 5$ — Т.К.).

5. О преподавании математики И.Х. Сивашинским можно говорить много. Первое, на что обычно обращается внимание, это то, что на дом он задавал по сто задач, точнее, по целым разделам задачника, соответствующим изученному на уроке материалу. Помнится уникальный случай, когда в 9-м классе на зимние каникулы Израиль Ефимович задал нам перерешать задачник Антонова [6]! Правда, из всего класса только ваша покорная слуга после каникул положила на учительский стол две пухлые общие тетрадки... Этот факт побудил учителя обратить на меня своё пристальное

внимание. В дальнейшем я постоянно ощущала его бесконечное уважение, доверие, которое выражалось в использовании меня в качестве помощника учителя. Более того, он рискнул поручить мне самостоятельное проведение занятий математического кружка в классе, всего на год меньше, — в рамках Моденовской математической школы. Не боялся перехвалить меня. Так, он говорил, что во время моего проведения занятия кружка «муха пролетит, услышишь». Моей маме однажды он сказал, что за все годы его работы учителем математики Танечка — его лучшая ученица (а было ему в тот момент 58 лет)!

Не побоялся И.Е. в 1964 году привлечь меня и мою одноклассницу Марину Душенат, студенток первого курса мехмата Московского университета, к подготовке рукописи одной из его первых книг («Элементарные функции и графики (теория и задачи с решениями)» к публикации в Главной редакции физико-математической литературы центрального издательства «Наука». На форзаце дарственного экземпляра учитель написал (см. фото 3):

«Дорогой Таничке! Одной из самых любимых учениц. Дай б. тебе здоровья и хорошего мужа. Уверен, что в ближайшие годы я с гордостью буду говорить, что математик Татьяна Ивановна — это моя ученица. 30.09.1965 Сивашинский (подпись).»

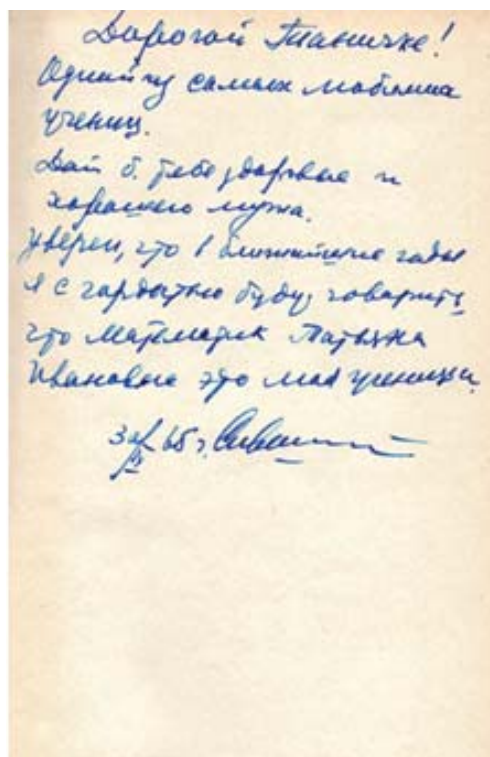


Фото 3.

Замечу, что пожелания здоровья и хорошего мужа получала практически каждая девочка после удачного ответа у доски [7, с. 109]... Ясно, что такие высказывания создавали необычную доверительную среду общения. Вообще, теплую память об И.Х. Сивашинском мы, его ученики, пронесли через всю жизнь. Так, Заслуженный профессор ВШЭ С.Р. Филонович, вспоминая о своей учебе во Второй школе, пишет: «Я получил блестящую подготовку: математику у нас преподавал знаменитый Израиль Сивашинский...» [8, с.156].

Двойки он ставил редко и неохотно. Показательно, что ученик нашего класса Георгий Франгулян, в настоящее время академик РАН, Народный художник РФ, рано определившийся со своей будущей профессией и далеко не блиставший на уроках математики, в своей биографии в Википедии не преминул упомянуть о том, что он — ученик И.Х. Сивашинского, назвав его мастером отечественной педагогики.

Талантливый и мудрый педагог, И.Х. прозорливо делил своих учеников на условные группы. Так, тех из них, кто наверняка планировал в дальнейшей своей жизни идти по гуманитарным направлениям, он совсем не удручал высокими требованиями к познанию математики! Из нашего класса вышли успешные дипломат, журналист, востоковед, кинематографист, вышеупомянутый скульптор мирового уровня. И все они хранят самое уважительное отношение к математике и к своему в ней наставнику... А вот к будущим абитуриентам ведущих математических и физических ВУЗов у Израйля Хаимови-а было особое отношения, особые требования, дополнительные задачи и задания.

Нельзя обойти молчанием и репетиторскую деятельность И.Х. Сивашинского. Он считался самым знаменитым репетитором шестидесятых годов (см. [7, с. 107–109]). Занятия проходили в его квартире. Одновременно занимались до 10 старшеклассников, сидевших вокруг круглого стола, что создавало совершенно уникальную атмосферу единения в порыве стремления к достижению цели решения задачи. Характерно то, что учащийся, решивший задачу ранее других, рассказывал решение остальным, незаметно для себя становясь «маленьким Сивашинским». При этом сам учитель оставался «в тени» и только изредка появлялся перед ребятами со словами «Да, кстати, ...», предлагая на всеобщее обозрение какой-нибудь изощренный прием или нетривиальную идею решения. Надо отметить, что во время уроков в школе при решении задач он вел себя аналогично, часто стоя в коридоре перед открытой дверью в кабинет и время от времени появляясь перед классом со словами «Да, кстати, ...». Результат таких занятий — практически все ученики поступали, куда хотели...

6. В процессе подготовки к докладу о И.Х. Сивашинском на адрес нашего семинара было получено письмо от Дворянинова Сергея Владимировича (журнал «Математика в школе»), после чего автор был приглашен на заседание семинара, посвященное юбилею (11.04.2019) и сделал соответствующий доклад. Приводим содержание письма:

Уважаемая Татьяна Ивановна!

Ваше решение отметить 110-летие Сивашинского заслуживает всяческой поддержки и одобрения. Книга Израйля ХАИМОВИЧА (именно так написано в выходных данных его книг, именно так я запомнил его имя) — одна из двух первых купленных мною в январе 1968 г. математических книг в книжном магазине у метро «Лермонтовская». Мы возвращались с областной математической олимпиады, которая проходила в пединституте поблизости. До электрички на Серпухов оставалось время, вот мы и зашли в книжный... Купленная там книга «Неравенства в задачах» мне памятна. Она мне очень дорога. Я считаю ее самой лучшей для школьников по элементарной математике.

Подробнее о роли И.Х. Сивашинского в жизни нашего 9Г–11Г класса и автора настоящей статьи, в частности, можно прочитать в статье [9, с. 97–100].

7. Галерея фотографий И.Х. Сивашинского в любимом 11Г. См. фото 4–7.



Фото 4. Понятно?



Фото 5 . Дома решите задачи номер 305–404...

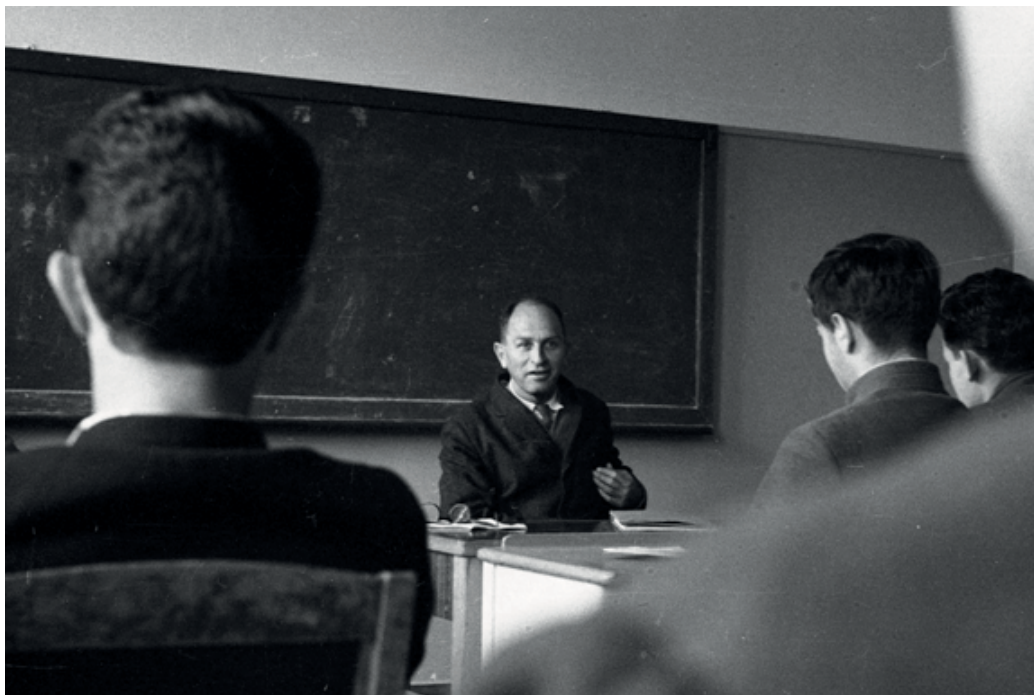


Фото 6. Кстати, ... На переднем плане ученики 11Г класса (слева направо): В. Меркулов, Б. Колесников, В. Шляков



Фото 7. Удовлетворение и радость за учеников

Фотографии 1, 4–7 — кинокадры, взятые из архива Ивана Преображенского — выпускника нашего 11Г класса, академика Российской Академии Кинематографических Искусств НИКА, руково-

дителя нашей школьной любительской киностудии ЛЮКС, участники которой много снимали своих любимых учителей.

8. Преемственность поколений



Фото 8. Фрагмент выпускного фото 1970 года: методист Института усовершенствования учителей Сивашинский И.Х., учитель 2-й школы, и будущий главный редактор журнала «Математика в школе» Бунимович Е.А., выпускник 2-й школы. См. [7]

Литература

1. Сивашинский Израиль Хаимович (29.03.1909 – 31.01.1991). URL: math.ru. История математики.
2. Сивашинский Израиль Ефимович / Российская еврейская энциклопедия / Персоналии. - М., 1994. - URL: <http://www.rujen.ru/index.php/>
3. Бунимович Е.А. Вкратце жизнь. - М.: Изд-во АСТ: CORPUS, 2015. - 320 с.
4. Записки о Второй школе: групповой портрет во второшкольном интерьере. Выпуск II. 1956–1983 гг. / Сост. Г. Ефремов, А. Ковальджи / Ред. А. Ковальджи / Под общей ред. В.Ф. Овчинникова и И.Г. Овчинниковой. — URL: ilib.mcsme.ru
5. Мемуары активиста алии Менра Гельфонда и воспоминания о нем. - Иерусалим: издательство ЛИРА, 2008.
6. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И. Сборник задач по элементарной математике. - М.: Наука. Физматгиз, 6-е изд. 1960. - 532 с.
7. Бунимович Е.А. Девятый класс. Вторая школа. Объяснение в любви в 23 частях. - М.: Изд-во АСТ: CORPUS, 2012. - 160 с.

8. Филонович С.Р. Учителя / Поколения ВШЭ. Учителя об учителях. - М.: Изд. дом ВШЭ, 2013. С. 156.

9. Кузнецова Т.И. Из истории отечественного школьного и педвузовского математического образования. Роль М.В. Ломоносова. Всероссийские съезды учителей и преподавателей математики / Вестник ЦМО МГУ. Естественные и точные науки: Сборник трудов / Под общей редакцией Т.И. Кузнецовой. - Вып. 7. - М.: ЦМО МГУ, 2012. - С. 47–104.

*Кузнецова Татьяна Ивановна,
профессор кафедры естественнонаучных и гуманитарных
дисциплин Института русского языка и культуры
МГУ имени М.В. Ломоносова, доктор педагогических наук,
доцент. Академик МАНПО. Руководитель Всероссийского
научно-методического семинара «Передовые идеи
в преподавании математики в России и за рубежом».*

E-mail: kuzti45@gmail.com

Память

Владимир Георгиевич Попов (03.10.1946 – 26.09.2021)

От редакции

26 сентября этого года скончался Владимир Георгиевич Попов, внесший большой вклад в организацию негосударственного образования и активно сотрудничавший с редакцией нашего журнала.



В.Г. Попов

В.Г. Попов был заметным общественным деятелем неформальных кругов московской интеллигенции начиная с 60-х годов прошлого столетия. Область его интересов была очень широка: правозащитная деятельность (в начале 80-х годов он был осужден за действия, считавшиеся в то время противоправными, и провел несколько месяцев в заключении за политическую деятельность), методология создания неформальных объединений, орден единомышленников СКО (о нем вышла книга, а также две книги с литературными произведениями его участников), клуб самодеятельной песни (КСП), воспитание детей в неформальных структурах — он работал в кружках при Дворце пионеров, Политехническом музее, Московском Планетарии, ряде московских школ. Активно выражал свою позицию во время событий 1991 и 1993 гг. В всех делах он проявлял исключительную активность, пользовался авторитетом у своих соратников.

В 90-е годы создал (или участвовал в создании) несколько коммерческих и некоммерческих организаций, в основном для реализации различных образовательных проектов. В частности, на первом этапе активно участвовал в создании Учредительного комитета математического университета — консультировал членов Учредительного комитета по юридическим и организационно-методологическим вопросам, организовывал его финансирование в первый, самый тяжелый период его деятельности. С учреждением в 1997 г. нашего журнала активно сотрудничал с редакцией, был инициатором выпуска естественно-научного приложения к журналу “Обозрение Z”, часть материалов которого была опубликована в самом журнале, см. № № 12, 14; само приложение вышло несколькими печатными выпусками. Несколько лет назад при поддержке нашей редакции выпустил книгу собственных стихов, которые постепенно писал на протяжении многих лет.

Он был сторонником неформального ведения дел, много лет участвовал в собраниях единомышленников, которые с юмором назывались “семинарами” — на них в непринужденной обстановке обсуждались всевозможные вопросы — от острых политических до текущих практических и организационных. Любил поэзию, песни, сам хорошо пел.

В последние годы у него сильно ухудшилось здоровье, он скончался после тяжелой продолжительной болезни. Память о Владимире Георгиевиче навсегда останется в сердцах знавших его людей. Редакция выражает соболезнование его родным и близким.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2021 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2021 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

Nikolai Nikolaevich Konstantinov Passed Away 2

Nikolai Nikolayevich Konstantinov (born January 2, 1932), a permanent member of the editorial board of our journal, died on July 3 of this year after a serious long illness.

Yu. Neretin. About the Konstantinov System and the White Sea Construction Brigades 3

The article tells about the “Konstantinov System”, which worked in mathematics education in 60-80 years of XX century, as well as about the White Sea construction teams of mathematicians, 1969-1987, which were a kind of offshoot of this system.

S. Dvoryaninov. Encouraging the Student 14

The first part of the article discusses problems with a parameter for preparing for the Unified State Exam. The second deals with geometric problems solved by the method of coordinates.

L. Steingarz. Anti-Magic Squares and their Generalizations 21

The concepts of anti-magic squares w.r.t. addition and multiplication, as well as anti-magic rectangles, are introduced. Some general and particular methods of their construction are given, various properties are studied, and a number of hypotheses are formulated. To be continued.

P. Bibikov. On Total Derivative and Polynomial Inequalities 36

A method is proposed for proving polynomial inequalities in several variables (for nonnegative values of variables), based on the use of the total derivative of the polynomial.

G. Klekovkin. Modeling the Contours of Plant Leaves in the GeoGebra Environment 48

The article discusses the use of the capabilities of the interactive mathematical system GeoGebra for modeling the contours of plant leaves by equations given in a polar coordinate system. Finished.

V. Novikov. On Inequalities in a Tetrahedron, Finished 58

The exact boundaries of variation of the surface area, volume, and other quantities of tetrahedrons are found for a given ratio of the radii of the inscribed and circumscribed spheres.

I. Pisarenko, M. Zaidel. From a Linear System through Geometry to a Determinant 70

The article proposes some reasoning that allows us to introduce a definition of the determinant of a matrix (as well as some other concepts) in a natural way.

A. Ruban. Which Function is More, a^x or x^p ? 86

The range of values x is described, for which the function x^p is larger than the function a^x . It is proved that this region is a segment (l, r) and an asymptotically sharp estimate for the boundaries is given.

B. Sagindykov. The Method of Affine Transformations for Solving Diophantine Equations as Applied to Polynomials of the Second Degree 89

The main goal of this work is to find rational points of a curve in the plane defined by an equation of the second degree.

T. Kuznetsova. Favorite Teacher. 112 Years to Sivashinsky Israel Haimovich 95

An article about one of the charismatic Soviet mathematics teachers was written by his student from the famous class 11G of the Moscow school № 2, graduation of 1963.

Vladimir Georgievich Popov (03.10.1946 - 26.09.2021) 103

On September 26 this year, Vladimir Georgievich Popov, who made a great contribution to the organization of non-state education and collaborated with the editorial board of our journal, died.

ISSN 1992-6138



9 771992 613776 >