Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год первый

№ 1

Апрель - Июнь 1997 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 1, 1997 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 1, апрель – июнь 1997 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1997 г.
"Математическое образование", периодическое издание,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 15.07.97. Корректура: О. В. Никишкина
Объем 13,5 п.л. Тираж 3000 экз.

От редакции

Роль математического образования в системе современного образования общепризнана.

Российское математическое образование в настоящее время представляет собой большую и разветвленную образовательную отрасль, точнее, совокупность нескольких уже и не слишком взаимосвязанных направлений: общее школьное математическое образование, специальное школьное математическое образование, университетское высшее, математическое образование технических ВУЗов, педагогическое физико-математическое и т.п.

Некоторые направления имеют собственные периодические издания: журнал "Математика в школе" и газета "Математика" для школьных учителей, журнал "Квант" для интересующихся математикой школьников и другие.

По нашему мнению, необходимо издание, которое освещало бы вопросы математического образования более всесторонне. Предполагается, что читатель нашего журнала сможет:

- получить представление об основных направлениях современного математического образования (как российского так и зарубежного) – от среднего школьного до послевузовского;
- в каждом направлении познакомиться с интересным содержательным материалом;
- получить сведения о деятельности тех или иных активно действующих образовательных объединений или инициатив, специальное внимание и издательская поддержка будут оказаны образовательным инициативам в провинции;
- получить достаточно подробные библиографические указания по тому или иному направлению.

Мы рассматриваем наш журнал как возрожденный журнал "Математическое образование", который издавался в России в 1912 – 1917 гг. и, недолгое время, в СССР: в 1928 – 1930 гг. Журнал был основан Московским Математическим Кружком (в СССР – Московским научно-педагогическим математическим кружком) и освещал вопросы преподавания математики в основном в средних учебных заведениях и отчасти в высших. Публиковались материалы по следующим основным разделам:

- статьи по математике (в основном по элементарной), имеющие как содержательный математический, так и методический интерес;
- небольшие математические заметки;
- статьи методического характера по различным разделам математики, много внимания уделялось обсуждению программ преподавания;
- статьи и заметки по истории математики;

- статьи о математиках и деятелях математического образования, другие биографические материалы;
- статьи, посвященные приложениям математики; освещались также некоторые вопросы преподавания физики.
- из номера в номер велся задачный раздел. Решения задач из текущего номера публиковались в следующем номере, приводился список читателей, успешно решивших задачи. (Эта традиция была затем возрождена журналом "Квант".);
- хроника математического образования;
- библиографический отдел;

Журнал выходил ежемесячно, кроме мая и летних месяцев, так что получалось восемь выпусков журнала в год. По объему книжка журнала была невелика, в среднем около 50 страниц достаточно убористым шрифтом. Большие статьи печатались с продолжением в нескольких номерах.

На рисунке приведена копия страницы журнала "Математическое образование", №4 за 1912 год, с содержанием. В этом выпуске приводится также подборка задач из номеров "Математического образования" за 1912-1917 гг. В последующих выпусках будут перепечатаны некоторые, по мнению редакции, интересные и сегодня материалы из старых номеров. Стиль оформления настоящего номера повторяет стиль старого журнала.

В нашем журнале сохранятся практически все упомянутые разделы прежнего "Математического образования". Несколько бо́льшее внимание будет уделяться вопросам преподавания высшей математики, а также приложениям математики в естественных и гуманитарных науках. В качестве эксперимента будут публиковаться главы из новых учебных пособий.

Журнал начнет выходить с периодичностью 4 номера в год (1 номер в квартал).

Редакция надеется на плодотворное сотрудничество с читателями; на то, что энтузиасты преподавания математики смогут через журнал знакомить всех читателей со своими инициативами, разработками и достижениями.

В конце номера приведены информация о подписке и условия приема авторских материалов.

Страница дореволюционного выпуска журнала “Математическое Образование”

Журналъ Московскаго Математическаго Кружка

„Математическое Образованіе“

Апрѣль 1912 г. № 4.

Чисто геометрическое обоснованіе ученія о пропорціяхъ и о площадяхъ.

К. Коммерель*).

Окончаніе.

Переводъ О. Н. Цубербиллеръ. Москва.

ГЛАВА II.

О площадяхъ.

Мы не будемъ вводить никакихъ измѣненій въ изложеніе §§ 18 и 19 „Основаній“ Гильберта, такъ какъ мы предполагаемъ лишь освободить отъ исчисленія отрѣзковъ ученіе о мѣрѣ площади, данное въ „Основаніяхъ“. Главное затрудненіе въ ученіи о площадяхъ представляетъ доказательство теоремы, что два равновеликіе треугольника съ одинаковыми основаніями имѣютъ и равныя высоты. Для доказательства этой теоремы Гильбертъ пользуется тѣмъ положеніемъ, вытекающимъ изъ его исчисленія отрѣзковъ, что половина произведенія (символическаго) основанія треугольника на его высоту не зависитъ отъ того, которая изъ сторонъ принята за основаніе, и слѣдовательно является для треугольника характеризующимъ отрѣзкомъ. Можетъ показаться нѣсколько страннымъ, что Гильбертъ принимаетъ этотъ отрѣзокъ за характеристику *площади* треугольника; самъ по себѣ онъ могъ бы играть такую же роль и для *периметра* треугольника. Лишь дальнѣйшія изслѣдованія показываютъ, что всѣмъ *равновеликимъ* (а не *изопериметрическимъ*) треугольникамъ соотвѣтствуетъ одинъ

*) См. „Математическое Образованіе“, № 3.

Избранные главы алгебры

И. Р. Шафаревич

В российском (и ранее советском) математическом образовании существует замечательная традиция: крупные ученые, внесшие существенный вклад в развитие математики, создают произведения, рассчитанные на школьников, заинтересованных этой наукой. Мы начинаем публикацию журнального варианта "Избранных глав алгебры", написанных выдающимся русским математиком академиком РАН И. Р. Шафаревичем. Надеемся, что материал заинтересует старших школьников и учителей, работающих по углубленной программе.

Предисловие

В школьном математическом образовании алгебре выпала доля Золушки, а геометрии – Любимой Дочки. Объем знаний по геометрии, изучаемый в школе, приблизительно совпадает с уровнем в этой области, который был достигнут в Древней Греции и суммирован в сочинении Евклида "Начала" (III в. до Рождества Христова). Долгое время геометрию преподавали по Евклиду, потом возникли упрощенные варианты. Но, при всех изменениях, внесенных в курс геометрии, в нем все же сохранилось влияние Евклида и веяние грандиозного научного переворота, произошедшего в Греции. Не раз мне встречались люди, говорившие: "Я не выбрал математику своей профессией, но на всю жизнь запомнил красоту стройного здания геометрии с ее строгим выводом все более сложных положений, начиная с самых простых."

К сожалению, мне ни разу не пришлось слышать подобные отзывы об алгебре. Школьный курс алгебры составляет странную смесь полезных правил, логических рассуждений, упражнений в пользовании такими вспомогательными средствами, как логарифмические таблицы или микрокалькулятор. По духу этот курс ближе к тому типу математических знаний, который сложился в Древнем Египте или Вавилоне, чем к направлению развития, возникшему в Древней Греции и потом продолженному в Новое время в Западной Европе. Тем не менее, алгебра является столь же фундаментальной, глубокой и красивой частью математики, как и геометрия. Больше того, с точки зрения принятого сейчас деления математики, школьный курс алгебры содержит элементы *нескольких* частей математики: алгебры, теории чисел, комбинаторики и – в небольшой части – теории вероятностей.

Задача настоящей публикации (с продолжением в последующих номерах) – показать алгебру как часть математики на материале, по возможности примыкающем к школьному курсу. Изложение использует очень небольшой запас знаний: действия с целыми числами и дробями, квадратные корни, раскрытие скобок и другие преобразования буквенных выражений, свойства неравенств. Все эти навыки закрепляются к девятому классу. Сложность математических рассуждений несколько увеличивается по мере продвижения в материале. Чтобы помочь читателям закрепить прочитанный текст, приведены простые задачи.

Изложение сгруппировано вокруг нескольких основных тем: "Число", "Многочлен", "Множество", каждая из которых развивается в нескольких главах, а главы, посвященные разным темам, чередуются.

В качестве приложений выделено изложение некоторых вопросов, примыкающих по теме к остальному тексту, не использующее ничего, кроме того, что в нем уже есть, но немного более сложное, то есть такое, при котором в голове надо держать немного больше уже известных фактов и определений. В следующих главах они не используются.

Примерный список глав

Глава 1. Число.
(Иррациональность $\sqrt{2}$ и других радикалов. Однозначность разложения натурального числа на простые множители.)

Глава 2. Многочлен.
(Корни и линейные множители. Общие корни. Интерполяция. Кратные корни. Производная многочлена. Бином Ньютона.)

Глава 3. Множество.
(Конечные множества и их подмножества. Комбинаторика. Некоторые понятия теории вероятностей.)

Глава 4. Число (продолжение).
(Аксиомы действительных чисел. Свойства многочленов как непрерывных функций.)

Глава 5. Многочлен (продолжение).
(Отделение корней многочленов. Теорема Штурма.)

Глава 6. Множество (продолжение).
(Бесконечные множества, счетные и несчетные множества.)

Глава 7. Число (продолжение).
(Бесконечность множества простых чисел. Плотность множества простых чисел.)

Приложение I.
(Чебышевские оценки для числа простых чисел, меньших заданной границы.)

Глава 8. Число (продолжение).
(Комплексные числа.)

Глава 9. Многочлен (продолжение).
(Существование комплексного корня у многочлена с комплексными коэффициентами.)

Глава 10. Число (продолжение).
(Арифметика Гауссовых чисел, теоретико-числовые приложения.)

Глава 11. Многочлен (продолжение).
(Построения при помощи циркуля и линейки и решение уравнений в квадратных радикалах.)

Глава 12. Многочлен (продолжение).
(Симметрические функции.)

Глава 13. Многочлен (продолжение).
(Решение уравнений 3-й и 4-й степени. Неразрешимость в радикалах уравнения степени $\geqslant 5$.)

Приложение II.
(Уравнение 5-й степени, икосаэдр, проблема резольвент.)

Глава 14. Число (окончание).
(Конечные поля и конечные геометрии.)

Приложение III.
(Построение правильного 17-угольника.)

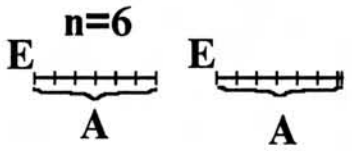
Глава 15. Многочлен (окончание).
(Формальные степенные ряды и бесконечные произведения. Применения к теории чисел.)

Глава I. Число.

§1. Иррациональные числа

Натуральные числа возникли в результате *пересчета*. Важной ступенью в логическом развитии человечества было осознание того, что два глаза, два рядом идущих человека и два весла лодки имеют нечто общее, выражаемое абстрактным понятием "два". Следующая ступень была преодолена не легко, о чем свидетельствует то, что во многих языках слово "три" созвучно со словом "много" или "слишком". Но постепенно было выработано представление о бесконечном ряде натуральных чисел.

Вслед за этим было естественно применить числа не только для *пересчета*, но и для *измерения*: длин, площадей, веса и т.д. Дальше мы будем для конкретности говорить об измерении длин отрезков. Прежде всего нам надо выбрать единицу длины: см, мм, км, световой год ... Это определяет отрезок E. Когда она выбрана, то можно попробовать измерить при ее помощи другие отрезки. Если E целиком уложится в некотором отрезке A ровно n раз, то мы скажем, что длина отрезка A равна n (рис. 1, а). Но, как правило, этого не будет (рис. 1, б).



а) б)

Рис. 1

Тогда можно уменьшить единицу длины, разбив E на m одинаковых более мелких отрезков отрезков E'. Если E' целиком уложится в отрезке A ровно n раз, то мы скажем, что длина A равна $\frac{n}{m}$ (при единице измерения E). Люди в разных странах на протяжении тысячелетий применяли этот процесс в различных ситуациях, пока не поставили вопрос: **всегда ли такое разбиение длины возможно?** Эта совершенно новая постановка вопроса относится уже к исторической эпохе: она возникла в школе Пифагора в Древней Греции в VI или V веке до Р.Х. Отрезки A и E называются *соизмеримыми*, если существует отрезок E', который m раз целиком укладывается в E и n раз — в A. Таким образом, вопрос заключается в том, **соизмеримы ли любые два отрезка**? Или, еще иначе, является ли длина любого отрезка (при выбранной единице длины) рациональным числом $\frac{n}{m}$? Ответ оказывается **отрицательным**, причем пример несоизмеримых отрезков привести очень просто. Рассмотрим квадрат, сторона которого равна единице длины E и возьмем за A ее диагональ.

Теорема 1. *Сторона квадрата и его диагональ несоизмеримы.*

Прежде, чем приступать к доказательству, дадим теореме другую формулировку. Согласно знаменитой теореме Пифагора площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах. Или, иначе говоря, квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов. Но диагональ квадрата A является гипотенузой равнобедренного треугольника, стороны которого совпадают со сторонами квадрата E (рис. 2),

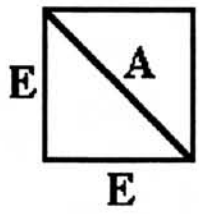


Рис. 2

поэтому в нашем случае $A^2 = 2E^2$ и если $A = nE', E = mE'$, то $\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2$ или $\frac{n}{m} = \sqrt{2}$. Таким образом, теорема 1 может быть переформулирована так:

Теорема 2. $\sqrt{2}$ *не является рациональным числом.*

В этом виде мы и будем ее доказывать. Но сначала сделаем одно замечание. Хоть мы и сослались на теорему Пифагора, но использовали ее в очень частном случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В этом случае она совсем очевидна. Надо только дополнить рис. 2, построив квадрат с основанием A (рис. 3).

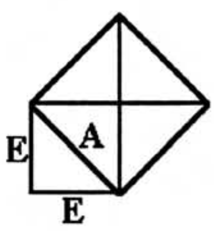


Рис. 3

Из известных признаков равенства треугольников сразу вытекает, что все пять маленьких прямоугольных равнобедренных треугольников на рис. 3 равны друг другу. Поэтому они имеют одинаковую площадь S. Но квадрат, построенный на отрезке E, состоит из двух таких треугольников и площадь его есть E^2. Поэтому $E^2 = 2S$. Аналогично $A^2 = 4S$. Поэтому $A^2 = 2E^2$ и $(A/E)^2 = 2$, что нам и было нужно.

Теперь можно приступить к доказательству теоремы 2. Так как речь идет о доказательстве *невозможности* представить $\sqrt{2}$ в виде $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, то естественно доказывать ее от противного. Мы предположим, что $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, где n и m — натуральные числа. Их мы будем предполагать взаимно простыми, так как если бы они имели общий множитель, то его можно было бы сократить, не изменив дробь $\frac{n}{m}$. По определению квадратного корня, равенство $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ означает, что $2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$. Умножим обе части на m^2, получим равенство

$$2m^2 = n^2, \tag{1}$$

где m и n — натуральные взаимно простые числа, невозможность которого и надо доказать.

Так как в левой части стоит множитель 2, то, естественно, вопрос связан с делимостью натуральных чисел на 2. Числа, делящиеся на 2, называются *четными*, не делящиеся — *нечетными*. Таким образом, каждое четное число k представляется в виде $k = 2l$, где l — натуральное число, то есть для них мы имеем некоторое явное выражение, в то время как нечетные числа определены пока чисто отрицательно — тем, что для них такое выражение невозможно. Но и для них легко получить явное выражение.

Лемма 1. *Всякое нечетное число r может быть представлено в виде $r = 2s+1$, где s — натуральное число или 0. Обратно, всякое такое число нечетно.*

Последнее утверждение совсем очевидно: если бы $r = 2s + 1$ было четным, то оно имело бы представление $r = 2l$, откуда $2l = 2s + 1, 2(l - s) = 1$ — а это явное противоречие.

Для доказательства первого утверждения заметим, что если нечетное число $r \leqslant 2$, то $r = 1$ и для него искомое представление имеет место с $s = 0$. Если же нечетное число $r > 1$, то оно уже $\geqslant 3$. Вычтя из него 2, получим число $r_1 = r - 2 \geqslant 1$, причем r опять нечетно. Если оно все еще больше 1, то опять вычтем 2 и положим $r_2 = r_1 - 2$. Мы получим убывающий ряд чисел $r, r_1, r_2, \ldots$, среди которых следующее на 2 меньше предшествующего. Так мы можем продолжать, пока $r_i \geqslant 1$, а так как натуральные числа не могут неограниченно убывать, то когда-то придем к тому месту, в котором наше вычитание двойки уже произвести нельзя, то есть к $r_i = 1$. Мы получим, что $r_i = r_{i-1} - 2 = r_{i-2} - 2 - 2 = \ldots = r - 2 - 2 \ldots - 2 = r - 2i = 1$. Значит, $r = 2i + 1$, как и утверждалось.

Теперь можно вывести основное свойство четных и нечетных чисел.

Лемма 2. *Произведение двух четных чисел четно, четного и нечетного — четно, а двух нечетных — нечетно.*

Первые два утверждения очевидны из определения четного числа: если $k = 2l$, то каков бы ни был второй множитель m — четный или нечетный — всегда $km = 2lm$ и, значит, четно. Но для доказательства последнего свойства нужна лемма 1. Пусть k_1 и k_2 — два нечетных числа. По лемме 1 мы можем их представить в виде $k_1 = 2s_1 + 1, k_2 = 2s_2 + 1$, где s_1 и s_2 — натуральные числа или 0. Тогда $k_1k_2 = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) = 4s_1s_2 + 2s_1 + 2s_2 + 1 = 2s + 1$, где $s = 2s_1s_2 + s_1 + s_2$. Мы видели, что любое число вида $2s + 1$ — нечетно, значит, и k_1k_2 нечетно.

Отметим частный случай леммы 2: *квадрат нечетного числа нечетен.*

Теперь уже совсем просто завершить доказательство теоремы 2. Предположим, что выполнено равенство (1), в котором m и n — натуральные взаимно простые числа. Если бы n было нечетным, то по лемме 2 нечетным было бы и n^2, а оно четно ввиду равенства (1). Поэтому n четно и мы можем его представить в виде $n = 2s$. Но m и n взаимно просты, а значит, m должно быть нечетным (иначе они имели бы общий множитель 2). Подставляя выражение для n в равенство (1) и сокращая на 2, получим

$$m^2 = 2s^2,$$

то есть квадрат нечетного числа m четен, что противоречит лемме 2. Теорема 2, а значит, и теорема 1 доказаны.

На теоремы 1 и 2 можно смотреть и с другой точки зрения, предполагая заранее, что результат измерения длины отрезка (при заданной единице длины) есть некоторое число и что квадратный корень из любого положительного числа есть некоторое число. Тогда теоремы 1 и 2 утверждают, что в случае диагонали квадрата или в случае $\sqrt{2}$ это число не является рациональным, то есть, иначе говоря, является иррациональным. Это простейший пример иррационального числа. Все числа — рациональные и иррациональные — вместе составляют действительные числа. В одной из следующих глав мы постараемся уточнить логические представления о понятии действительного числа, а пока будем пользоваться им в такой форме, как оно сложилось в школьном преподавании математики, не задумываясь особенно о его логическом обосновании.

Почему же такое простое и в то же время важное обстоятельство, как существование иррациональных чисел, так долго не было обнаружено человечеством? Ответ прост — потому что, например, $\sqrt{2}$ для любых практических надобностей можно считать рациональным числом, а именно, имеет место

Теорема 3. *Какое бы малое число ε не было бы задано, можно найти такое рациональное число $a = \frac{m}{n}$, что $a < \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} - a < \varepsilon$.*

Так как все практические измерения производятся по необходимости лишь с некоторой точностью, а с этой степенью точности мы можем считать $\sqrt{2}$ рациональным, то можно сказать, что наше измерение дает нам $\sqrt{2}$ как рациональное число.

Для доказательства теоремы 3 мы возьмем наше сколь угодно малое число ε в виде $\frac{1}{10^n}$ при достаточно большом n и найдем такое натуральное число k, что

$$\frac{k}{10^n} \leqslant \sqrt{2} < \frac{k+1}{10^n}. \tag{2}$$

Тогда можно положить $a = \frac{k}{10^n}$, так как $\sqrt{2} - \frac{k}{10^n} < \frac{1}{10^n}$. Неравенства (2) равносильны неравенствам $\frac{k^2}{10^{2n}} \leqslant 2 < \frac{(k+1)^2}{10^{2n}}$ или $k^2 \leqslant 2 \cdot 10^{2n} < (k+1)^2$. Поскольку число n, а значит, и $2 \cdot 10^{2n}$ нам заданы, то существует последнее по величине натуральное число k, квадрат которого еще не больше, чем $2 \cdot 10^{2n}$. Оно и будет тем значением, которое нам нужно.

Очевидно, что заключение теоремы 3 верно не только для числа $\sqrt{2}$, но и для любого положительного (для простоты ограничимся ими) действительного числа x. Это очевидно, если изобразить x точкой на числовой оси, разбить единицу длины E на мелкие отрезки $\frac{1}{10^n}E$ и покрыть всю прямую этими отрезками (рис.4).

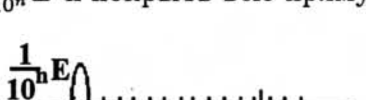


Рис. 4

Тогда последнее деление, которое еще не правее x и будет нам давать нужное рациональное число: если это k-е деление, то $a = \frac{k}{10^n} \leqslant x$ и $x - a < \frac{1}{10^n}$.

Но теперь оцените, пожалуйста, глубину того утверждения, которое содержат теоремы 1 и 2. Это утверждение не может быть подтверждено *никаким* экспериментом, так как эксперимент всегда производится лишь с определенной точностью, а с любой предписанной точностью $\sqrt{2}$ можно выразить рациональным числом! Это достижение *чистого разума*, которое и не могло возникнуть даже в результате накопившегося многотысячелетнего опыта человечества, пока не произошел переворот в математике, совершившийся в Древней Греции в VII–V в.в. до Р.Х. Не удивительно, что в школе Пифагора эти сведения считались священным, тайным знанием, которое не должно быть доступно непосвященным. А один из пифагорейцев, Гиппас, разгласивший тайну, по легенде был наказан за это богами смертью в результате кораблекрушения. Сто лет спустя Платон в книге "Законы", написанной в старости, рассказывает, как был поражен уже не молодым, когда узнал, что не всегда возможно "измерять длину длиной". Он говорит о своем "позорном невежестве": "Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. И я устыдился не только за себя, но и за всех эллинов".

Доказанные теоремы 1 и 2 могут пролить свет на вопрос, который часто задают математики: зачем доказываются теоремы? Первый ответ, который приходит в голову — чтобы убедиться в истинности некоторого утверждения. Но иногда бывает так, что в частных случаях таких проверок уже накопилось столь много, что истинность утверждения не вызывает сомнения (а часто вызывает насмешки физиков по поводу того, что математики доказывают и без того несомненные истины). Но мы видели, что иногда доказательство вводит математиков в совершенно новый мир математических понятий, о которых мы без того не узнали бы.

Задачи

1. Докажите иррациональность чисел $\sqrt{6}$ и $\sqrt[3]{2}$.
2. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
3. Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$.
4. Найдите $\sqrt{2}$ с точностью не меньшей, чем $\frac{1}{100}$.
5. Докажите, что всякое натуральное число можно представить как сумму слагаемых вида 2^k, причем так, чтобы равных слагаемых не было. Докажите, что для каждого числа такое представление есть только одно.

§2. Иррациональность других квадратных корней

Интересно теперь попытаться обобщить результаты, к которым мы пришли в прошлом параграфе. Можно ли, например, доказать таким же способом иррациональность числа $\sqrt{3}$? Очевидно, естественно постараться приспособить рассуждения предшествующего параграфа к нашей новой ситуации.

Теперь нам надо доказать невозможность равенства $3 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ или

$$3m^2 = n^2, \tag{3}$$

причем, как и в §1, мы можем считать дробь $\frac{n}{m}$ несократимой, то есть натуральные числа m и n взаимно просты. Так как в равенство (3) входит тройка, то естественно привлечь свойства делимости на 3. Проверим, что леммы 1 и 2 можно приспособить к этому новому случаю.

Лемма 3. *Каждое натуральное число r делится на 3 или представляется в одном из двух видов: $r = 3s+1$ или $3s+2$, где s — натуральное число или 0. Числа вида $3s+1$ или $3s+2$ на 3 не делятся.*

Последнее утверждение очевидно. Если, например, $n = 3s+1$ делилось бы на 3, то мы имели бы $3s+1 = 3m$, то есть $3(m-s) = 1$ — что есть противоречие. Если же $n = 3s+2$ делится на 3, то $3s+2 = 3m, 3(m-s) = 2$, а это опять противоречие. Первое утверждение леммы 3 доказывается дословным повторением рассуждений из доказательства леммы 1. Если r не делится на 3 и меньше 3, то или $r = 1$, или $r = 2$, и нужное представление имеет место с $s = 0$. Если же $r > 3$, то вычитая из него 3, получаем $r_1 = r - 3 > 0$, причем r_1 опять не делится на 3. Продолжая последовательное вычитание 3, получим ряд чисел $r, r_1 = r-3, r_2 = r-3-3, \ldots, r_s = r-3-3\ldots-3$, причем к r_s наш прием вычитания 3 применить уже нельзя, так что, как мы заметили выше, $r_s = 1$ или $r_s = 2$. В результате мы имеем две возможности: $r - 3s = 1$, то есть $r = 3s+1$ — или $r - 3s = 2$, то есть $r = 3r+2$, как и утверждалось в лемме.

В формулировке следующей леммы мы возьмем из формулировки леммы 2 только ту часть, которая действительно потом применяется.

Лемма 4. *Произведение двух натуральных чисел, не делящихся на 3, само не делится на 3.*

Пусть r_1 и r_2 — два числа, не делящиеся на 3. Согласно лемме 3 для каждого из них имеется две возможности: оно представлено или в виде $3s+1$, или в виде $3s+2$. Таким образом, возможны 4 случая:

1)$r_1 = 3s_1+1, r_2 = 3s_2+1$, 2)$r_1 = 3s_1+1, r_2 = 3s_2+2$, 3)$r_1 = 3s_1+2, r_2 = 3s_2+1$, 4)$r_1 = 3s_1+2, r_2 = 3s_2+2$.

Здесь случаи 2) и 3) отличаются только нумерацией r_1 и r_2 — можно рассматривать лишь один из них (например, 2). В оставшихся трех случаях произведем умножение:

$$1) r_1 r_2 = 9s_1s_2 + 3s_1 + 3s_2 + 1 = 3t_1 + 1, t_1 = 3s_1s_2 + s_1 + s_2$$

$$2) r_1 r_2 = 9s_1s_2 + 6s_1 + 3s_2 + 2 = 3t_2 + 2, t_2 = 3s_1s_2 + 2s_1 + s_2$$

$$3) r_1 r_2 = 9s_1s_2 + 6s_1 + 6s_2 + 4 = 3t_3 + 1, t_3 = 3s_1s_2 + 2s_1 + 2s_2 + 1$$

(в последней формуле мы отделили от 4 одно слагаемое, равное 3, соединив его со слагаемыми, делящимися на 3). В результате мы получим числа вида или $3t+1$ или $3t+2$, которые, как мы видели, не делятся на 3 (Лемма 3).

Теперь не представляет никакого труда перенести на наш случай теорему 2.

Теорема 3. $\sqrt{3}$ *не является рациональным числом.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 2. Нам надо привести к противоречию равенство (3): $3m^2 = n^2$, где числа m и n взаимно просты. Если бы число n не делилось на 3, то по Лемме 4 его квадрат не делился бы на 3. Но он равен $3m^2$. Значит n делится на 3: $n = 3s$. Подставляя это равенство в (3) и сокращая на 3, получаем $m^2 = 3s^2$. Но так как n и m взаимно просты, а n делится на 3, то m не делится на 3. Согласно Лемме 4 и его квадрат не должен делиться на 3, но он равен $3s^2$. Это противоречие доказывает теорему.

Такой параллелизм всех рассуждений в этих двух случаях заставляет думать, что тот же путь можно продолжить и дальше. Конечно, бессмысленно исследовать $\sqrt{4}$, так как $\sqrt{4} = 2$, но к $\sqrt{5}$ наши рассуждения применить можно. Очевидно, что заметно увеличится число произведений, которые нужно будет вычислить при доказательстве леммы, аналогичной Леммам 2 и 4. Можно все же проверить, что доказательство получится: $\sqrt{5}$ – иррационально. Вполне можно продолжить рассуждение и в других случаях, исследуя $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и т.д. На каждом шаге число проверок, которые необходимо осуществить в том месте доказательства, которое будет соответствовать Леммам 2 и 4 в случае $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, будет все больше. Перебрав все целые числа n, скажем, до 20, мы сможем убедиться, что $\sqrt{n}$ иррационален кроме очевидных исключений – когда n есть квадрат целого числа ($n = 4$, 9 и 16). Таким путем мы смогли бы убедиться, за счет все более сложных вычислений, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, и $\sqrt{19}$ иррациональны. Это подсказывает общую гипотезу: для любого натурального числа n, не являющегося квадратом натурального числа, $\sqrt{n}$ иррационален. Но для доказательства этой общей гипотезы наше рассуждение недостаточно, так как оно в одном месте основывается на переборе всех возможных случаев и прямой проверке.

Интересно, что путь, пройденный нами в наших рассуждениях, был некогда действительно пройден человечеством. Как уже сказано, иррациональность $\sqrt{2}$ была доказана в школе пифагорейцев. Позже была доказана иррациональность $\sqrt{n}$ еще для некоторых небольших n, пока не возникла общая проблема, сформулированная выше. О ее решении мы узнаем из диалога Платона "Теэтет". Дело происходит в 400 г. до Р.Х. или очень близко. Автор рассказывает, как знаменитый философ Сократ встретился с математиком Феодором из Кирены и тот познакомил его со своим молодым, очень талантливым учеником по имени Теэтет. Теэтет был тогда в возрасте теперешнего школьника: ему было 14-15 лет. Феодор так характеризует его способности: "он подходит к учению и любому исследованию легко, плавно и верно, так спокойно, словно вытекает масло из сосуда, – и я удивляюсь, как в таком возрасте можно столь многого достичь." Дальше уже сам Теэтет рассказывает Сократу о своем исследовании, которое он провел вместе с товарищем по имени тоже Сократ, тезкой философа. Он сообщает, что Феодор рассказал им о несоизмеримости (если переводить на современную терминологию) стороны квадрата и единицы длины, если площадь квадрата является целым числом, но не квадратом целого. Если площадь есть n, то это и означает иррациональность $\sqrt{n}$. Феодор доказал это для $n = 2$, 3, 5 "и так, перебирая случаи один за другим, он дошел где-то до семнадцати." Теэтет заинтересовался общей проблемой и решил ее, вместе со своим другом Сократом, как он сообщает в конце диалога. Мы не будем пытаться восстановить те рассуждения, которые использовал Феодор (тут существует несколько гипотез), а изложим доказательство общего положения, следуя по сути изложению Евклида, которое, весьма вероятно, аналогично доказательству Теэтета (с одним упрощением, найденным более 2000 лет спустя Гауссом).

Сначала мы докажем аналог лемм 1 и 3.

Теорема 4. *Для любых натуральных чисел n и m существуют такие числа t и r, натуральные или равные 0, причем $r < m$, что*

$$n = mt + r. \tag{4}$$

При заданных n и m такое представление единственно.

Представление (4) называется *делением с остатком n на m*, число t – *неполным частным*, а r – *остатком*.

Доказательство следует известному нам принципу. Если $m > n$, то равенство очевидно выполнено с $t = 0, r = n$. Если же $n \geqslant m$, то положим $n_1 = n - m$. Очевидно, $n_1 \geqslant 0$. Если все еще $n_1 \geqslant m$, то положим $n_2 = n_1 - m$. Так будем последовательно вычитать m пока не получим число $n_t = n - m - \ldots - m = r$, которое все еще $\geqslant 0$, но уже $< m$. Мы получаем нужное представление $n - mt = r$, $n = mt + r$.

Докажем единственность представления (4) при заданных n и m. Пусть

$$n = mt_1 + r_1, n = mt_2 + r_2.$$

Пусть $t_1 \neq t_2$ и, например, $t_1 > t_2$. Вычитая из первого представления второе, получим: $m(t_1 - t_2) + r_1 - r_2 = 0$, то есть $m(t_1 - t_2) = r_2 - r_1$. Так как по условию $r_2 < r_1$, то справа стоит положительное число, меньшее m, слева же – число, делящееся на m. Это невозможно.

Прежде чем перейти к доказательству аналога лемм 2 и 4, мы должны ввести (а вернее – напомнить) важное понятие.

Натуральное число, отличное от 1, называется *простым*, если не имеет других делителей, кроме себя самого и 1. Например, среди первых двадцати чисел мы имеем простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Хоть и очевидное, но важное свойство: *каждое натуральное число, отличное от 1, имеет хотя бы один простой делитель.* Действительно, если число n не имеет никаких делителей, кроме себя и 1, то оно по определению просто и является своим собственным простым делителем. Если же у n есть другие делители, то $n = ab$, где $a < n$ и $b < n$. Теперь рассматриваем a, которое опять или просто (и, значит, является простым делителем n) или разлагается на два множителя: $a = a_1 b_1$, тогда $n = a_1(b_1 b)$, причем $a_1 < a$, то есть a_1 является делителем n. Применяя то же рассуждение к a_1 и т.д., мы получаем убывающие делители $n : a_r < \ldots < a_1 < n$. Где-то мы должны будем остановиться. Если остановимся на a_r, то a_r и будет простым делителем n.

Теперь можно доказать аналог лемм 2 и 4.

Теорема 5. Если произведение двух целых чисел делится на некоторое простое число, то хотя бы одно из них делится на это простое число.

Предположим, что мы хотим доказать теорему для простого числа p. Мы будем доказывать ее для всех простых чисел в порядке возрастания (как мы, собственно, и делали, доказав ее в лемме 2 для $p = 2$, а в лемме 4 — для $p = 3$). Поэтому, когда мы дойдем до простого числа p, то можем считать, что лемма уже доказана для меньших простых чисел $q < p$. Пусть $n_1 \cdot n_2$ делится на p, но ни n_1, ни n_2 на p не делится. Тогда

$$n_1 n_2 = pa. \tag{5}$$

Применим теорему 4 к числам n_1 и p и n_2 и p. Мы получим представления

$$n_1 = pt_1 + r_1, \quad n_2 = pt_2 + r_2,$$

где r_1 и r_2 — натуральные числа, меньшие p (они не равны 0, так как иначе n_1 или n_2 делилось бы на p). Подставляя в соотношение (5) и собирая числа, делящиеся на p, мы получим

$$r_1 r_2 = p(a - t_1 r_2 - t_2 r_1 - p t_1 t_2),$$

то есть

$$r_1 r_2 = pb, \quad b = a - t_1 r_2 - t_2 r_1 - p t_1 t_2 \tag{6}$$

где теперь, в отличие от (5), $r_1 < p$ и $r_2 < p$. Если $r_1 = 1$ и $r_2 = 1$, то мы получаем противоречие: $1 = pb$. Пусть $r_1 > 1$. Мы знаем, что r_1 имеет простой множитель q, который не больше r_1, а, значит, меньше p. Пусть $r_1 = qa_1$. Тогда равенство (6) дает

$$q(a_1 r_2) = pb. \tag{7}$$

Как мы уже говорили, можно считать теорему доказанной для простых чисел, меньших p, в частности, для q. Так как pb делится на q, то один из сомножителей должен делиться на q. Это не может быть p, так как p — простое число. Значит, b делится на $q : b = qb_1$. Подставляя в равенство (7), мы получаем после сокращения:

$$a_1 r_2 = pb_1$$

с $a_1 < r_1$ и $b_1 < b$. Если $a_1 \neq 1$, то применяем к нему то же рассуждение и сократим равенство еще на одно простое число. Так как входящие в него числа a, a_1 и т.д. все время убывают, то мы должны когда-то остановиться, то есть прийти к числу 1. Мы получим, что $r_2 = pb'$, а это невозможно, так как $r_2 < p$ (и, как мы видели, $r_2 > 0$). Этим теорема доказана.

Вы видите, что рассуждение похоже на доказательство лемм 2 и 4: утверждение сводится к случаю, когда в равенстве (5) n_1 и n_2 (то есть r_1 и r_2) меньше p. Но здесь перебор всех случаев и прямая проверка заменены изящным рассуждением, использующим то, что теорема может считаться верной для меньших значений p. (Евклид доказывал теорему 5 несколько по-другому. Приведенное рассуждение принадлежит, по-видимому, Гауссу.)

Теперь доказательство иррациональности в общем случае не требует никаких новых соображений.

Теорема 6. *Если c — натуральное число, не являющееся квадратом никакого натурального числа, то c не является квадратом никакого рационального числа, то есть $\sqrt{c}$ иррационален.*

Мы можем опять проверять наше утверждение, переходя от одного натурального числа к другому, большему его, и поэтому считать, что теорема доказана для всех меньших значений c. Тогда можно предполагать, что c не делится на квадрат какого-либо натурального числа, большего 1. Действительно, если $c = d^2 f, d > 1$, то $f < c$ и f — не квадрат натурального числа: $f = g^2$ дало бы $c = (dg)^2$ в противоречии с предположением теоремы. Поэтому можно считать теорему уже доказанной для f, то есть считать, что $\sqrt{f}$ — иррациональное число. Но тогда и $\sqrt{c}$ не может быть рациональным числом. Действительно, равенство $\sqrt{c} = \frac{n}{m}$ дает ввиду того, что $\sqrt{c} = d\sqrt{f}$, что $\frac{n}{m} = d\sqrt{f}, \sqrt{f} = \frac{n}{dm}$, то есть $\sqrt{f}$ — рационально.

Теперь переходим к основной части доказательства. Предположим, что $\sqrt{c}$ рационально и $\sqrt{c} = \frac{n}{m}$, причем мы можем, как уже делали раньше, считать n и m взаимно простыми. Тогда $m^2 c = n^2$. Рассмотрим произвольный простой делитель p числа c. Положим $c = pd$, причем d не делится на p, так как иначе c делилось бы на p^2, а мы предположили, что c не делится на квадрат. Из равенства $m^2 c = n^2$ мы видим, что n^2 делится на p, а из теоремы 5 тогда следует, что n делится на p. Пусть $n = pn_1$. Подставив равенства $n = pn_1$ и $c = pd$ в соотношение $m^2 c = n^2$, мы получим $m^2 d = pn_1^2$. Так как m и n взаимно просты, а n делилось на p, то m не может делиться на p. По теореме 5 тогда и m^2 не делится на p, а, как мы видели, d тоже не делится на p, иначе c делилось бы на p^2. Теперь равенство $m^2 d = pn_1^2$ приводит нас к противоречию с теоремой 5.

Заметим, что в этом параграфе мы не раз строили доказательство какого-то утверждения о натуральных числах n, представляя себе, что мы их перебираем одно за другим, проверяем, что утверждение верно для $n = 1$ и потом доказываем его для любого n, считая, что оно верно для чисел, меньших n.

Здесь мы опираемся на утверждение, которое следует рассматривать как одну из аксиом арифметики:

Если некоторое свойство натуральных чисел n имеет место для $n = 1$ (или $n = 2$) и из его справедливости для всех натуральных чисел, меньших n, следует справедливость для n, то оно справедливо для всех натуральных чисел. Оно называется *принципом математической* или *полной индукции.* Иногда предполагают, что свойство справедливо не для всех чисел, меньших n, а только для $n - 1$. Утверждение, соответствующее случаю $n = 1$ или $n = 2$, с которого начинается рассуждение (иногда удобно взять $n = 0$), называется *базой индукции.* Утверждение для $n - 1$, которое мы считаем доказанным, – *индуктивным предположением.* Принцип индукции применяется также для определений, когда некоторое понятие, зависящее от номера или индекса n, который является натуральным числом, определяется в предположении, что для значения $n - 1$ оно уже определено. Например, когда мы определяем арифметическую прогрессию тем, что каждый ее член получается из предшествующего прибавлением одного и того же числа d, называемого разностью прогрессии, то это есть определение по индукции. В виде формулы определение записывается так:

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Чтобы задать исходя из этого определения всю прогрессию, надо знать лишь ее первый (или нулевой) член: a_1 или a_0.

Французский математик и физик А. Пуанкаре в одной из своих работ обсуждает вопрос о том, как математика, построенная на доказательствах, основанных на силлогизмах, то есть утверждениях, состоящих из конечного числа слов, может приводить к утверждениям, верным для бесконечных совокупностей. А ведь любое нетривиальное математическое утверждение касается какой-то бесконечной совокупности (так, теорема 6 верна для бесконечного числа значений c; но и теорема 2 утверждает, что $2n^2 \neq m^2$ для любых натуральных n и m, число которых бесконечно). Пуанкаре видит причину в принципе математической индукции, который, как он говорит, "содержит бесконечное число силлогизмов, как бы сжатое в одной формуле".

Задачи

1. Докажите иррациональность $\sqrt{5}$ тем же способом, которым доказаны теоремы 2 и 3.

2. Докажите, что число натуральных чисел, не превосходящих n, и делящихся на m, равно неполному частному от деления n на m.

3. Докажите, что если натуральное число c не является кубом натурального числа, то число $\sqrt[3]{c}$ иррационально.

4. Замените рассуждение, связанное с последовательным вычитанием числа m в доказательстве теоремы 4, ссылкой на принцип математической индукции.

5. Докажите, используя принцип математической индукции, формулу

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6. Докажите, используя принцип математической индукции, неравенство $n \leqslant 2^n$.

§3. Разложение на простые множители

В прошлом параграфе мы видели, что любое натуральное число имеет простой делитель. Исходя из этого можно получить гораздо больше:

Теорема 7. *Каждое натуральное число, большее 1, является произведением простых чисел.*

Если само число p простое, то равенство $p = p$ мы рассматриваем как представление в виде произведения с единственным сомножителем. Если же число $n > 1$ не простое, то оно имеет, как мы видели, простой делитель, отличный от него: $n = p_1 \cdot n_1$ и (так как по определению $p_1 \neq 1$), $n_1 < n$. Теперь можно применить то же рассуждение к n_1 и так далее. Мы получим разложение на множители $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot n_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ – простые числа, а частные n_k убывают:

$n > n_1 > n_2 \ldots$. Поэтому наш процесс должен оборваться, мы получим $n_r = 1$ при каком-то значении r и искомое разложение $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Конечно, "научнее" оформить наше доказательство путем применения метода математической индукции – читатель легко может это сделать.

Процесс, использованный при доказательстве теоремы 7, не однозначен: если число n имеет несколько простых множителей, то первым мы можем выделить любой из них. Например, 30 можно, в духе этого доказательства, сначала представить как $2 \cdot 15$, а потом $2 \cdot 3 \cdot 5$, но можно представить и как $3 \cdot 10$, а потом $3 \cdot 2 \cdot 5$. То, что полученные в результате два разложения на простые множители отличаются лишь порядком множителей, заранее нельзя было предвидеть. И если для числа 30 все возможности легко охватываются, то так ли просто убедиться, что число

$$740037721 = 23623 \cdot 31327$$

не имеет другого разложения на простые множители?

В школьной программе обычно принимается как самоочевидное, что существует только одно разложение натурального числа на простые множители. Однако это утверждение нуждается в доказательстве, как показывает следующий пример. Предположим, что мы знаем только четные числа и не можем пользоваться нечетными. (Возможно, такое предположение в какой-то мере отражает существовавшую некогда историческую ситуацию, так как, например, в английском языке термин "нечетное" (odd) означает в то же время "странное".) Повторяя дословно известное нам определение, мы должны назвать "простым" четное число, не разлагающееся на два *четных* сомножителя. Например, "простыми" будут 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 .... Тогда можно указать два разных разложения четного числа на "простые" множители, например

$$60 = 2 \cdot 30 = 6 \cdot 10.$$

Можно найти числа и с бóльшим числом разных разложений, например

$$420 = 2 \cdot 210 = 6 \cdot 70 = 10 \cdot 42 = 14 \cdot 30.$$

Таким образом, если разложение натурального числа на простые множители и единственно, то доказательство должно использовать какие-то соображения, отражающие то, что мы имеем дело именно с совокупностью всех натуральных чисел, а не, например, с четными числами.

После того, как мы убедились, что единственность разложения на простые множители не самоочевидна, перейдем к ее доказательству.

Теорема 8. *Два разложения натурального числа на простые множители различаются только порядком сомножителей.*

Доказательство теоремы действительно не вполне очевидно, но все трудности мы уже преодолели при доказательстве теоремы 5. Из нее все следует очень просто.

Прежде всего отметим очевидное обобщение теоремы 5.

Если произведение любого числа множителей делится на простое число p, то хоть один из них делится на p.

Пусть

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r = p \cdot a.$$

Наше утверждение докажем полной индукцией по числу множителей r. При $r = 2$ оно совпадает с теоремой 5. При $r > 2$ перепишем равенство в виде

$$n_1(n_2 \cdot \ldots \cdot n_r) = p \cdot a.$$

По теореме 5 либо p делит n_1 – но тогда утверждение доказано – либо p делит $n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$ – но тогда утверждение опять верно по предположению индукции.

Теперь докажем теорему 8. Пусть некоторое число n имеет два разложения на простые множители:

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s. \tag{8}$$

Мы видим, что p_1 делит произведение $q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$. По доказанному обобщению теоремы 5 оно делит какое-то из чисел $q_1, \ldots, q_s$. Но q_i – простые числа и значит у q_i есть только один делитель – оно само. Таким образом, p_1 совпадает с одним из q_i. Меняя их нумерацию, можно считать, что $p_1 = q_1$. Сокращая равенство (8) на p_1, получим, что

$$n' = \frac{n}{p_1} = p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s. \tag{9}$$

Это утверждение относится уже к меньшему числу n' и, используя принцип математической индукции, мы можем считать его верным. Таким образом, число множителей в двух разложениях одно и то же, то есть $r - 1 = s - 1$, а значит $r = s$. Кроме того, множители $q_2, \ldots, q_s$ можно написать в таком порядке, что $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3, \ldots, p_r = q_r$. Так как мы уже знаем, что $p_1 = q_1$, то этим теорема доказана.

Теорема, которую мы доказали, содержится еще у Евклида. Она всегда считалась хоть и простой, но абстрактной математической теоремой. Однако в два последние десятилетия она получила неожиданные практические приложения, о которых мы скажем несколько слов. Речь идет о *шифровке*, то есть записи информации в таком виде, что она не может быть восстановлена лицом, не обладающим некоторой дополнительной информацией (ключ шифра). Именно, оказалось, что задача разложения больших чисел на простые сомножители требует колоссального числа операций, она несопоставимо сложнее "обратной" задачи – перемножения простых чисел. Например, перемножение двух простых чисел, каждое из которых записывается несколькими десятками десятичных знаков (скажем, тридцатизначного на сороказначное) можно, при большом усердии, произвести вручную за один день и к вечеру выписать ответ (приблизительно семидесятизначный). Но для того, чтобы разложить это число на простые множители, даже для хорошего современного компьютера потребовалось бы больше времени, чем существует Земля. Таким образом, пара больших чисел p и q с одной стороны, и их произведение $n = pq$ с другой, содержит, согласно теореме 8, в точности одну и ту же информацию, записанную двумя разными способами, причем переход от пары p, q к числу

$n = pq$ не представляет труда, а от n к паре p, q практически не выполним. Это и есть основная идея "шифра"; техническое его описание мы опустим.

В разложении числа на простые множители некоторые простые сомножители могут встречаться несколько раз, например: $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Мы можем объединить все равные друг другу простые множители в их степень: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Так мы получаем для каждого натурального числа разложение

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}, \tag{10}$$

где все простые числа $p_1, \ldots, p_r$ различны между собой, а показатели $\alpha_i \geqslant 1$. Такое разложение называется *каноническим*. Оно, конечно, тоже существует только одно единственное для каждого n.

Зная каноническое разложение числа n, мы можем узнать все, что захотим, о его делителях. Во первых, если каноническое разложение имеет вид (10), то очевидно, что числа

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}, \tag{11}$$

где $\beta_1 \leqslant \alpha_1, \beta_2 \leqslant \alpha_2, \ldots, \beta_r \leqslant \alpha_r$, будут делителями n, причем для β_i допустимо и значение 0 (то есть одно из p_i, делящих n, может не делить m). Наоборот, любой делитель n имеет вид (11). Действительно, если $n = mk$, то k тоже является делителем n, то есть имеет вид (11): $k = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\gamma_r}$. Перемножая канонические разложения m и k и объединяя вместе степени одинаковых простых чисел, мы должны получить разложение (10) для n – так как подобное разложение единственно, то есть, в силу теоремы 8. Так как при перемножении степеней одного простого числа показатели степеней складываются, то отсюда следует, что $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_1$, а значит $\beta_1 \leqslant \alpha_1$; точно так же $\beta_2 \leqslant \alpha_2, \ldots, \beta_r \leqslant \alpha_r$.

Например, теперь мы можем найти сумму делителей числа n. К числу делителей удобно причислять и само число n, и 1. Например, $n = 30$ имеет делители 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 и сумма делителей равна 72. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда n является степенью простого числа: $n = p^\alpha$. Тогда его делителями являются числа p^β, где $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, то есть числа $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. Нам надо, следовательно, найти сумму: $1 + p + p^2 + \ldots + p^\alpha$. Существует общая формула (возможно вам уже известная), выражающая сумму последовательных степеней некоторого числа:

$$s = 1 + a + a^2 + \ldots + a^r.$$

Вывод формулы очень прост: надо умножить обе части равенства на a и справа раскрыть скобки:

$$sa = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{r+1}.$$

Мы видим, что выражения для s и sa состоят из почти одних и тех же членов, только в s входит 1, которой нет в sa, зато в sa входит a^{r+1}, которого нет в s. Поэтому при вычитании s из sa сократятся все члены, кроме этих двух:

$$sa - s = a^{r+1} - 1,$$

то есть $s(a-1)=a^{r+1}$ и

$$s = 1 + a + a^2 + \ldots + a^r = \frac{a^{r+1}-1}{a-1}. \tag{12}$$

Так как мы делим на $a-1$, то должны предполагать, что $a \neq 1$.

Таким образом, если $n=p^\alpha$, то сумма его делителей равна $1+p+p^2+\ldots+p^\alpha = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$. Рассмотрим следующий по сложности случай, когда n имеет два простых делителя p_1 и p_2. Его каноническое разложение следовательно имеет вид $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. Согласно формуле (11), простые делители числа n записываются в виде $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$, где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$. Разобьем их на группы, объединив в одну группу те, для которых число β_2 одно и то же. Таким образом, при $\beta_2=0$ мы получим делители $1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1}$, сумма которых равна $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}$. При $\beta_1=1$ получится группа $p_2, p_1p_2, p_1^2p_2, \ldots, p_1^{\alpha_1}p_2$. Вычисляя сумму ее членов, мы можем вынести за скобку p_2, а в скобке получим сумму уже известного вида: $(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})p_2 = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}p_2$. Точно так же из группы с произвольным общим значением β_2 мы получим сумму $(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})p_2^{\beta_2} = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}p_2^{\beta_2}$. Вся сумма будет разбиваться на такие частичные суммы и следовательно равна

$$\begin{aligned}&\tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} + \tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}p_2 + \tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}p_2^2 + \ldots + \tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}p_2^{\alpha_2}\\ &= \tfrac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2}).\end{aligned}$$

Сумма в скобках опять вычисляется по формуле (12) и в результате для всей суммы делителей числа $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ мы получаем выражение $\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}$.

Теперь ответ уже угадывается и в общем случае. Рассмотрим произведение

$$S' = (1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_r+p_r^2+\ldots+p_r^{\alpha_r})$$

и раскроем все скобки. Как мы раскрываем скобки при перемножении нескольких скобок? Если скобка одна и произведение имеет вид $(a+b+\ldots)k$, то каждое слагаемое a, b и т.д. умножают на k и все ak, bk и т.д. складывают. Если скобок две: $(a_1+b_1+c_1+\ldots)(a_2+b_2+c_2+\ldots)$, то умножают каждый член в одной скобке на каждый член в другой и все полученные выражения складывают: a_1a_1, a_1b_2, a_1c_2, b_1a_2, b_1b_2 и т.д. Наконец, если число скобок произвольное: $(a_1+b_1+c_1+\ldots)(a_2+b_2+c_2+\ldots)\ldots(a_r+b_r+c_r+\ldots)$, то надо из каждой скобки взять по какому-то члену, перемножить их и все такие произведения сложить. Применим это правило к нашей сумме S'. Члены в разных скобках имеют вид $p_1^{\beta_1}, p_2^{\beta_2}, \ldots, p_r^{\beta_r}$, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Перемножая их, мы получим $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_r^{\beta_r}$, то есть, согласно формуле (11), как раз делители числа n и, согласно теореме 8, каждый по одному разу. Таким образом, сумма S' равна сумме делителей числа n. С другой стороны, i-я скобка по формуле (14) равна $\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$, а все произведение равно

$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}.$$

Такова формула для суммы делителей. Заодно мы нашли и *число* делителей. Действительно, чтобы определить число делителей, надо в сумме делителей каждое слагаемое заменить на 1. Возвращаясь к предшествующему доказательству, мы увидим, что для этого достаточно в произведении S' каждое слагаемое в каждой скобке заменить на 1. Первая скобка тогда станет равной α_1+1, вторая α_2+1 и т.д., r-я α_r+1. Для числа делителей мы получим выражение $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$. Например, для числа, каноническое разложение которого имеет вид $p^\alpha q^\beta$, число делителей равно $(\alpha+1)(\beta+1)$.

Точно таким же способом можно вывести формулу для суммы квадратов или кубов делителей числа n или даже для суммы произвольных k-х степеней. Рассуждение абсолютно ничем не отличается от того, при помощи которого мы нашли сумму делителей. Убедитесь, что в общем случае мы таким образом приходим к следующей формуле для суммы k-х степеней всех делителей числа n, имеющего каноническое разложение (10):

$$S = \frac{p_1^{k(\alpha_1+1)}-1}{p_1^k-1}\cdot\frac{p_2^{k(\alpha_2+1)}-1}{p_2^k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_r^{k(\alpha_r+1)}-1}{p_r^k-1}. \tag{13}$$

Мы можем также исследовать *общие делители* двух натуральных чисел m и n. Для этого запишем их канонические разложения в виде

$$n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\alpha_r}, m = p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\beta_r}, \tag{14}$$

где теперь в каждой паре чисел (α_i,β_i) одно из них может принимать значение 0 – чтобы учесть простые числа, которые делят одно из чисел m и n, но не делят другое. Тогда, используя то, что мы знаем о делителях, мы можем сказать, что число k тогда и только тогда является общим делителем m и n, когда оно имеет вид

$$k = p_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\gamma_r},$$

где одновременно $\gamma_1\leqslant\alpha_1, \gamma_1\leqslant\beta_1$, $\gamma_2\leqslant\alpha_2, \gamma_2\leqslant\beta_2, \dots$, $\gamma_r\leqslant\alpha_r, \gamma_r\leqslant\beta_r$. Иначе говоря, если мы обозначим через σ_i наименьшее из двух чисел α_i и β_i, то должны быть выполнены условия $\gamma_1\leqslant\sigma_1$, $\gamma_2\leqslant\sigma_2$, …, $\gamma_r\leqslant\sigma_r$. Положим

$$d = p_1^{\sigma_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{\sigma_r}. \tag{15}$$

Тогда предшествующие рассуждения доказывают, что верна

Теорема 9. *Для любых двух чисел, имеющих канонические разложения (13), число d, определенное формулой (14), делит и n, и m, а любой общий делитель n и m является делителем d.*

Число d называется *наибольшим общим делителем* n и m и обозначается НОД(n,m). Заметим, что среди общих делителей чисел n и m есть конечно наибольший по абсолютной величине, но не очевидно, что все другие общие делители его *делят*. Это следует только из теоремы 8 (об однозначности разложения на простые множители). Поэтому мы и напомнили эти свойства, обычно излагаемые в школьном курсе без доказательства.

Как уже было сказано выше, разложение числа на простые множители – очень трудоемкая задача. Потому напомним другой способ нахождения наибольшего общего делителя, не требующий разложения на сомножители – этот прием часто излагается в школе. Он основан на теореме 4. Пусть n и m – два натуральные числа и $n = mt + r$, $0 \leqslant r < m$, – представление, установленное в теореме 4.

Лемма 5. *Если $r \neq 0$, то НОД$(n,m) =$ НОД(m,r).*

Легко убедиться, что верно даже больше: у пар (n,m) и (m,r) все общие делители одинаковы, в частности и тот наибольший, который все остальные делят. Действительно, любой общий делитель d чисел n и m является как делителем m, так и r – ввиду того, что $r = n - mt$, а общий делитель d' чисел m и r является и делителем m, и делителем n – так как $n = mt + r$.

Однако преимущество перехода от пары (n,m) к (m,r) – в том, что по условию $r < m$. Теперь мы можем применить то же рассуждение к паре (m,r). Пусть $m = rt_1 + r_1$, $0 \leqslant r_1 < r$. Если $r_1 \neq 0$, то НОД(m,r)= НОД(r,r_1). Так мы будем двигаться, пока не остановимся. А остановиться мы будем должны, когда очередной остаток окажется равным 0, например: $r_i = r_{i+1}t_{i+2} + 0$ $(r_{i+2} = 0)$. Но тогда r_{i+1} делит r_i и тогда очевидно НОД$(r_i, r_{i+1}) = r_{i+1}$. Таким образом, последний ненулевой остаток в процессе последовательного деления числа n на m, m на r, r на r_1 и т.д. и будет равен НОД(n,m). Этот способ нахождения НОД называется *алгорифмом Евклида*, он действительно имеется у Евклида. Например, для нахождения НОД(8891, 2329) производим деления с остатком:

$$8891 = 2329 \cdot 3 + 1904; \quad 2329 = 1904 \cdot 1 + 425;$$

$$1904 = 425 \cdot 4 + 204; \quad 425 = 204 \cdot 2 + 17; \quad 204 = 17 \cdot 12 + 0,$$

НОД(8891, 2329)=17.

Числа n и m называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме 1. Это означает, что НОД$(n,m) = 1$. Таким образом, при помощи алгорифма Евклида, мы можем в частности, узнать, будут ли два числа взаимно простыми, не разлагая их на простые сомножители.

Закончим эту главу, вернувшись к вопросу, с которого мы начали: вопросу об иррациональности. Мы докажем очень широкое обобщение нашего первого утверждения об иррациональности $\sqrt{2}$. Оно связано с понятием, которому посвящена следующая глава и поэтому является также введением в нее.

Выражение вида ax^k, где a – число, x – неизвестная, а k – натуральное число или 0 (тогда пишут просто a) называется *одночленом.* Число k называется его *степенью*, a – *коэффициентом.* Можно, вообще говоря, рассматривать одночлены, содержащие и несколько неизвестных, например ax^2y^3, но мы сейчас будем говорить только об одночленах от одного неизвестного. Сумма одночленов называется *многочленом.* Если в многочлен входит несколько одночленов одинаковой степени, например, ax^k и bx^k, то мы можем, приведя подобные члены, заменить их одним – $(a+b)x^k$. Ввиду этого мы будем дальше предполагать, что в многочлен входит только один член определенной степени k и записывать этот член в виде a_kx^k; при $k = 0$ мы имеем просто число a_0. Наибольшая степень одночлена, входящая в многочлен, называется *степенью* многочлена. Например, многочлен $2x^3 - 3x + 7$ имеет степень 3, для него $a_0 = 7$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$. Таким образом, многочлен степени n имеет запись:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

причем некоторые a_k могут быть равны 0, но $a_n \neq 0$, иначе многочлен имел бы степень меньшую, чем n. a_0 называется *свободным членом* многочлена, a_n – *коэффициентом при старшем члене.* Равенство $f(x) = 0$ называется *алгебраическим уравнением* с одним неизвестным. Число α называется его *корнем*, если $f(\alpha) = 0$. Корень уравнения $f(x) = 0$ называется также *корнем многочлена* $f(x)$. Степень многочлена $f(x)$ называется *степенью уравнения.* Очевидно, что уравнения $f(x) = 0$ и $cf(x) = 0$, где c – отличное от 0 число, имеют одни и те же корни, т.е. равносильны.

Сейчас мы займемся такими уравнениями $f(x) = 0$, что коэффициенты a_0, a_1, $\ldots$, a_n – рациональные числа, некоторые из них могут быть равными 0 или отрицательными. Взяв за c общий знаменатель всех отличных от 0 коэффициентов, мы можем перейти от уравнения $f(x) = 0$ к уравнению $cf(x) = 0$, коэффициенты которого – целые. С такими уравнениями мы и будем иметь дальше дело. При этом мы будем встречаться со свойствами делимости целых (не обязательно натуральных) чисел. Напомним, что целое число a по определению делится на целое число b, если $a = bc$ при некотором целом c.

Теорема 10. *Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшем члене, равном 1. Если уравнение $f(x) = 0$ имеет рациональный корень α, то α – целое число и является делителем свободного члена многочлена $f(x)$.*

Представим α в виде $\alpha = \pm\frac{a}{b}$, где дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то есть натуральные числа a и b взаимно просты. По условию многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$ с целыми a_i. Подставим α в уравнение $f(x) = 0$. По условию

$$a_0 + a_1\left(\pm\frac{a}{b}\right) + \ldots + a_{n-1}\left(\pm\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\pm\frac{a}{b}\right)^n = 0. \tag{16}$$

Умножим это равенство на b^n и перенесем $(\pm a)^n$ в правую часть. Все члены, оставшиеся в левой части будут делиться на b:

$$(a_0b^{n-1} + a_1(\pm a)b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(\pm a)^{n-1}b^{n-2})b = (\pm 1)^{n-1}a^n.$$

Мы видим, что b делит a^n. Если бы α было не целым, то b было бы > 1. Пусть p – некоторый его простой делитель. Тогда он должен делить a^n, а по теореме 5 на p должно делиться и a. Однако по условию a и b взаимно просты и мы пришли к противоречию. Таким образом, $b = 1$ и $\alpha = a$.

Чтобы получить второе утверждение теоремы, оставим в левой части равенства только a_0, остальные члены перенесем в правую часть (помня, что $b = 1$). Все члены справа будут делиться на a:

$$a_0 = a(\mp a_1 - a_2(\pm a) - \ldots - a_{n-1}(\pm a)^{n-2} - (\pm a)^{n-1}).$$

Отсюда очевидно, что a делит a_0.

Теорема 10 дает возможность найти рациональные корни уравнений указанного вида: для этого надо выписать все делители свободного члена (со знаками + и -) и испробовать, будут ли они корнями. Например, для уравнения $x^5 - 13x + 6 = 0$ надо испробовать $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Только $x = -2$ будет корнем.

Таким образом, у многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами и коэффициентом при старшем члене, равном 1, все корни иррациональные – кроме целых корней, которые содержатся среди делителей свободного члена. Именно это мы и установили в начале главы сначала для $f(x) = x^2 - 2$ (теорема 2), потом для $f(x) = x^2 - 3$ (теорема 3), наконец для $f(x) = x^2 - c$, где c – целое (теорема 6). Теперь мы получили широчайшее обобщение всех этих утверждений. Оно имеет и много других геометрических приложений, кроме теорем 1, 2, 3, 6.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0. \tag{17}$$

Согласно теореме 10 его корнями могут быть только целые делители числа -7, то есть одно из чисел 1, -1, 7, -7. Подстановка показывает, что ни одно из них уравнению не удовлетворяет. Мы можем сказать, что корни уравнения являются иррациональными числами. Правда, мы не знаем, что уравнение (18) вообще имеет корни. Но позже мы покажем, что оно корни имеет, и очень интересные. Его корнем является квадрат длины стороны правильного 7-угольника, вписанного в круг радиуса 1. Более того, уравнение (18) имеет три корня, расположенных: между 0 и 1, между 2 и 3 и между 3 и 4. Они равны квадратам длин *диагоналей* правильного 7-угольника, вписанного в круг радиуса 1. При этом диагональю мы называем *любой* отрезок, соединяющий две вершины многоугольника, так что в число диагоналей включаем и стороны. У правильного 7-угольника имеются три разные по длине диагонали AB, AC и AD (рис. 5). Таким образом, все эти три длины – иррациональные числа.

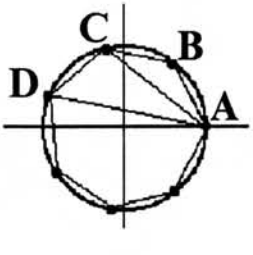


Рис. 5.

Задачи.

1. Убедитесь, что теорема 5 не верна, если понятие числа и “простого числа” понимать только в применении к четным числам, как было рассказано в начале

параграфа. Какое место в доказательстве теоремы 5 оказывается в этом случае неверным?

2. Докажите, что если числа m и n взаимно просты, то делители числа mn получаются умножением делителей числа m на делители числа n и каждый делитель числа mn получится так точно один раз. Вывести отсюда, что если $S(N)$ обозначает сумму k-х степеней делителей числа N, а m и n взаимно просты и $N = mn$, то $S(N) = S(m)S(n)$. Получите этим путем новый вывод формулы (14).

3. Натуральное число n называется *совершенным*, если оно равно сумме своих собственных делителей (то есть само число мы *исключаем* из числа его делителей). Например, совершенными являются числа 6 и 28. Доказать, что если при некотором r число $p = 2^r - 1$ – простое, то число $2^{r-1}p$ – совершенное (но помните, что выведенная нами формула для суммы делителей S включает и *само число* n). Это утверждение содержится еще у Евклида. Почти 2000 лет спустя Эйлер доказал обратное утверждение: любое четное совершенное число имеет вид $2^{r-1}p$, где $p = 2^r - 1$ – простое число. Доказательство не использует никаких сведений, кроме изложенных выше, но не совсем простое. Попробуйте восстановить его! До сих пор не известно, существуют ли *нечетные* совершенные числа.

4. Если для двух натуральных чисел m и n существуют такие целые числа a и b, что $ma + nb = 1$, то очевидно, что m и n взаимно просты: любой их общий делитель делил бы 1. Докажите обратное: для взаимно простых m и n всегда существуют такие целые a и b, что $ma + nb = 1$. Воспользуйтесь делением с остатком и математической индукцией.

5. Используя результат задачи 4, докажите леммы 6 и 7 без использования теоремы об однозначности разложения на простые множители. Убедитесь, что таким способом можно дать новое доказательство этой теоремы (теорема 8). Именно так ее доказал Евклид.

6. При каких целых значениях a многочлен $x^n + ax + 1$ имеет рациональные корни?

7. Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Доказать, что если несократимая дробь $\alpha = \pm\frac{a}{b}$ является корнем уравнения $f(x) = 0$, то b – делитель коэффициента при старшем члене, а q – делитель свободного члена. Это – обобщение теоремы 10 на случай многочленов с целыми коэффициентами, у которых коэффициент при старшем члене не обязательно равен 1.

Интегральная геометрия и компьютерная томография

В.П. Паламодов

Специальный курс по интересному разделу современной математики – интегральной геометрии – и ее приложениям в компьютерной томографии был прочитан профессором Виктором Павловичем Паламодовым в Математическом Колледже Независимого Московского Университета в осеннем семестре 1995/96 г. Редакция предполагает опубликовать избранные части этого курса в первых выпусках журнала.

1. О первых задачах интегральной геометрии

Интегральная геометрия и томография исторически возникли из разных источников. Интегральная геометрия произошла из поздних работ Германа Минковского. Минковский родился в 1864 году в Алексоты (тогда это была Российская империя, теперь Литва). В двадцатилетнем возрасте он был награжден премией Парижской академии наук за работу на тему "Разложение целых чисел в сумму пяти квадратов". Его метод основан на изучении соответствующей квадратичной поверхности в $\mathbf{R}^5$. Позднее интересы Минковского стали все более смещаться к вещественной геометрии: выпуклые тела, пространство Минковского, теория относительности. В начале XX века он выступил с докладом в Московском Математическом обществе. Рассмотрим два класса выпуклых тел: тела постоянной ширины и тела постоянного охвата.

Шириной тела в направлении данного вектора называется расстояние между опорными плоскостями тела, ортогональными этому вектору, рис.1. Тело имеет постоянную ширину, если ширина не зависит от вектора.

Охватом тела в направлении данного вектора называется периметр проекции тела на опорную плоскость, ортогональную вектору, рис.2. Если охват не зависит от вектора, то это тело постоянного охвата.

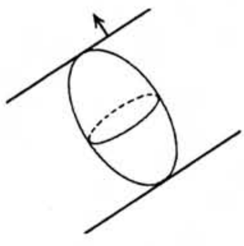


Рис. 1

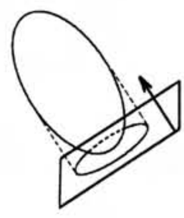


Рис. 2

В своем докладе Минковский доказал, что класс тел постоянной ширины совпадает с классом тел постоянного охвата. Пример: шар. Эту задачу можно свести к следующей. Пусть на сфере $S^2 \subset E^3$ задана непрерывная функция f. Будем рассматривать ее интегралы по большим окружностям C, то есть сечениям, проходящим через центр. Определяется ли функция f своими интегралами $\int\limits_C f ds$? Нет, если функция нечетная, то есть $f(-x) = -f(x)$, (мы считаем, что центр сферы в начале координат). Если же функция четная, то f однозначно восстанавливается, как доказал Минковский.

Это одна из первых теорем интегральной геометрии.

Замечание. Большие круги — геодезические на сфере.

Восстановление было не вполне эффективным: Минковский восстановил по $g(C)$ коэффициенты в разложении функции f в ряд по сферическим функциям. Статья была опубликована в Математическом Сборнике. Умер Минковский в 1909 г. (ему было 45 лет), после упомянутого доклада он уже не продолжал эту тематику. Гильберт, разобрав его бумаги, упомянул этот результат в речи на памятном заседании, которая была впоследствии напечатана. Им была поставлена задача: найти явную формулу для восстановления f по $g(C)$. Этим занимался его ученик Функ.

Пусть $g(C) = \frac{1}{2}\int\limits_C f ds$, то есть интеграл по полуокружности. Именно он существен в силу четности. Функ свел задачу к интегральному уравнению типа Абеля (работы 1913–1916 г.г.), но саму явную формулу не выписал. Тем не менее путь к этой формуле в его работах намечен. Завершив его рассуждение, можно прийти к формуле, которую мы приводим.

Пусть радиус сферы равен 1, p — точка сферы. Рассмотрим все большие круги на расстоянии q от этой точки, то есть те, которые касаются окружности радиуса q с центром p, рис. 3.

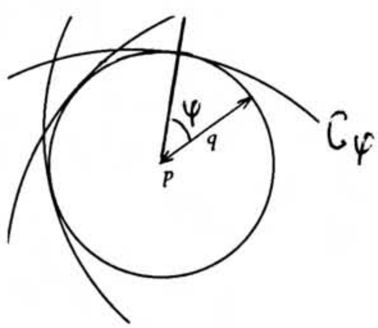


Рис. 3.

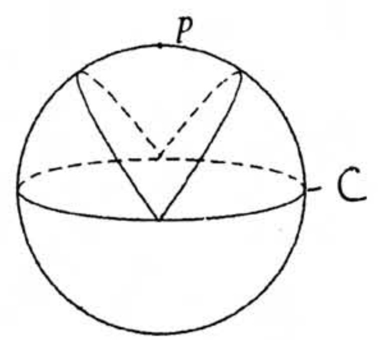


Рис. 4. Вид “сбоку”

Пусть φ — угол между перпендикуляром к большому кругу, из точки p в точку касания, относительно некоторого фиксированного перпендикуляра. Положим $F(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(C_\varphi)d\varphi$, где C_φ — большая окружность, отвечающая углу φ, рис. 3. Тогда

$$f(p) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{F'(q)dq}{\sin q} + \frac{1}{\pi}F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Последнее слагаемое в этой формуле является вкладом единственной окружности, отстоящей от точки p на расстояние $\pi/2$ (если p — "полюс", то эта окружность — "экватор", она же совпадает с C_φ для всех φ. $g(C_\varphi)$ постоянна по φ, и

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(C_\varphi)$$

При других значениях расстояния q $g(C_\varphi)$ не постоянно, и приходится реально выполнять интегрирование, см. вид "сбоку"на рис. 4. C — экватор на расстоянии $\frac{\pi}{2}$.

Для большей компактности формулы будем в дальнейшем писать: $F'(q)dq = dF$.

Интеграл в нашей формуле несобственный, ядро $\frac{dq}{\sin q}$ имеет особенность в нуле.

Затем появился важный результат Радона (1917 г.). Вместо сферы он рассмотрел плоскость, вместо окружностей — прямые, то есть рассматривается пространство нулевой кривизны и в нем геодезические.

"Интегральная геометрия" — термин Бляшке, который предложил эту задачу Радону.

Итак, рассмотрим евклидову плоскость E^2, пусть f — непрерывная функция на E^2, L — прямая, $g(L) = \int\limits_L f ds$. Как восстановить f по g? Ответ Радона:

$$f(p) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{dF(q)}{q}, \quad F(q) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(L(\varphi, q))d\varphi, \text{ см. рис. 5.}$$

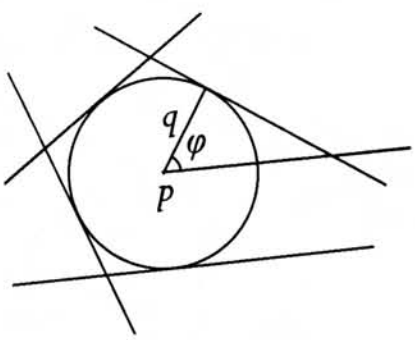


Рис. 5

В случае пространства постоянной отрицательной кривизны получается аналогичная формула, только в знаменателе sh$q$. Работа Радона была долгое время забыта, формула переоткрывалась. Последние приблизительно 25 лет она стала очень популярна, нашла приложение в томографии, в частности, в медицинской томографии — новом средстве диагностики по сравнению с рентгеноскопией. Это область контакта современной математики и техники. Мы обратимся к ней в следующей лекции.

2. Принцип рентгеновской томографии

В настоящее время в медицине используются стандартные томографы третьего поколения. На рис. 1 показана принципиальная схема такого томографа.

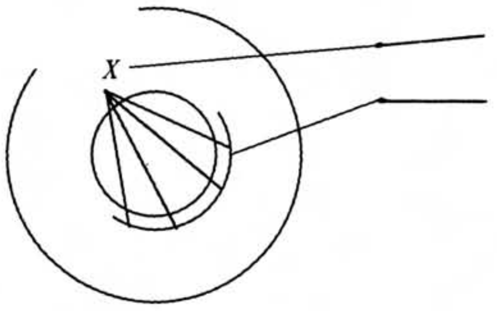


Рис. 1. Принцип работы

В отверстие помещается исследуемая часть тела пациента. Конструкция, состоящая из источника и линейки детекторов, может вращаться, как единое целое; очередной импульс излучения происходит после поворота на угол π/N, где N может достигать значения 720 в медицинских томографах третьего поколения.

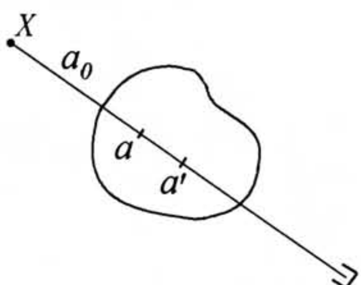


Рис. 2

На рис. 2 изображен рентгеновский луч, проходящий сквозь исследуемое тело и попадающий в детектор.

Здесь: a_0 — количество квантов, двигающихся по заданному направлению, a — количество квантов, попавших в начало малого отрезка, расположенного на рассматриваемом луче, a' — количество квантов, которое пришло в конец отрезка.

Детектор регистрирует γ-кванты, опадающие на него вдоль указанного луча. По пути происходит взаимодействие рентгеновского излучения с веществом. При взаимодействии фотон поглощается или рассеивается:

Рис. 3

Часть квантов продолжает двигаться в том же направлении.

Рис. 4. Детектор

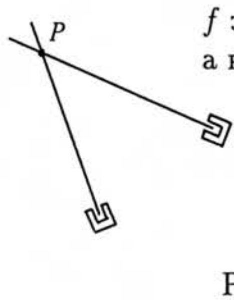
Детектор (см. рис. 4) представляет собой колодец (коллиматор) с поглощающими стенками (например, свинцовыми). Он проводит регистрацию только квантов, летящих в данном направлении.

Применима простая физическая модель:

$$\ln \frac{a'}{a} \simeq -\triangle l f(p),$$

где p — точка, в которой все рассматривается, $\triangle l$ — длина отрезка, f имеет размерность l^{-1}.

f называется коэффициентом линейного поглощения. В простейшей модели будем считать, что f не зависит от направления в точке p и не зависит от положения данного элемента объема среды в пространстве, рис. 5. f имеет размерность обратной длины; если записать $f = h$ см$^{-1}$, то h называется числом Хаунсфилда. Оно зависит от энергии рентгеновского излучения. Этот коэффициент информативен, то есть различает разные ткани исследуемого тела.



f зависит только от p,
а не от направления.

Рис. 5

$$f = \begin{cases} -1000 & \text{для воздуха} \\ \sim 1 & \text{для кости} \\ 0,1 \div 0,3 & \text{для мягких тканей} \\ 1000 \div 2000 & \text{для металла} \end{cases}$$

Более того, f различается для больных и здоровых тканей. Опухоль мозга: больная ткань на $3 \div 0,5\%$ отличается по плотности от здоровой. Современные томографы находят поражение на ранних стадиях, когда опухоль еще очень мала.

Перепишем соотношение: $-\ln \frac{a'}{a} = f(p)\triangle l$

$$\ln a - \ln a' = -\triangle \ln a$$

$$-\int d \ln a = \int f(p) dl$$

Интеграл накапливается в пределах объекта, так как по воздуху подынтегральная величина пренебрежительно мала.

$$\int d \ln a = \ln a|_{\text{детектор}} - \ln a|_{\text{трубка}} ,$$

здесь в правой части — регистрируемые величины, хотя интенсивность излучения в трубке подвержена флуктуации. Для учета этого ставят калибровочный детектор (сбоку на рис. 5). Поэтому основную информацию несет a_D — интенсивность излучения на детекторе. В итоге

$$-\ln \frac{a_D}{a_T} = \int\limits_L f(p) dl.$$

В левой части — известная величина, значит, известна и вторая величина, интеграл по прямой. Объект можно считать неподвижным (фиксируется), кроме бьющегося сердца (это отдельная область томографии — мультфильмы сердца). Итак, интегралы известны, по ним требуется восстановить f. Насколько это удается, показывают реальные томограммы (демонстрируются). На самом деле можно получить много дополнительной информации, помимо изображения.

Первый практически применимый томограф построен инженером Хаунсфилдом в 1972 году. В 1979 г. Хаунсфилд и Кормиак были награждены Нобелевской премией по медицине. Алгоритмы восстановления в современной томографии основаны на формуле Радона. Формула, полученная Радоном в 1917 году, выглядит так:

$$f(p) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{F'(r) dr}{r}. \tag{1}$$

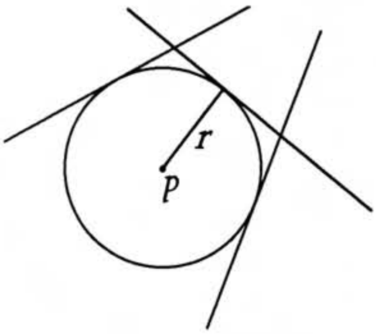


Рис. 6

$F(r)$ — интегральное среднее по всем прямым на расстоянии r.

От этой формулы еще далеко до полного решения задачи томографии, так как на практике имеем лишь конечное число интегралов. Одна вспышка дает интегралы по 512 прямым. Большие дозы излучения вредны для пациента. Формула Радона требует большое число измерений для фиксированного r, затем изменения r для нахождения производной и последующего интегрирования. Параметризуем прямые λ на плоскости следующим образом:

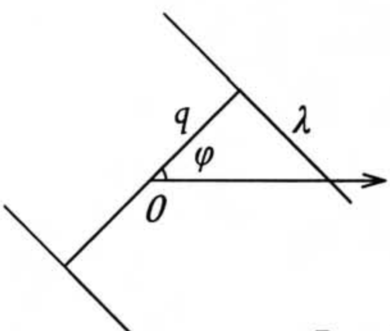


Рис. 7

$$q = x\cos\varphi + y\sin\varphi$$

Можно допускать для q отрицательные значения:

$$\lambda = \lambda(q,\varphi) = \lambda(-q,\varphi+\pi).$$

тем самым имеем двулистную параметризацию множества Λ прямых на плоскости. Мы построили двулистное накрытие: $\mathbf{R}_q \times S_\varphi \to \Lambda$. $\mathbf{R}_q \times S_\varphi$ топологически — цилиндр. Λ получается из этого цилиндра склеиванием центрально-симметрических точек:

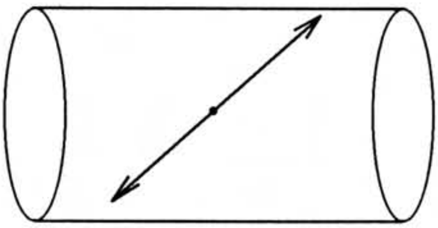


Рис. 8

Можно представить себе структуру Λ и по-другому:

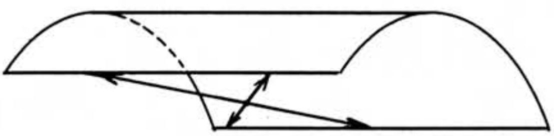


Рис. 9

$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \qquad q \in \mathbf{R}$. 0 и π соответствуют вертикальным прямым, то есть цилиндр склеивается по краям с поворотом. Так что топологически получается лист Мебиуса без края ($\mathbf{R}_q \sim (-a, a)$). Итак, преобразование Радона

$$g(q,\varphi) = \int\limits_{\lambda(q,\varphi)} f ds$$

определено на листе Мебиуса.

Формула Радона дает обращение этого преобразования. В координатах:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(q,\varphi)dq}{x\cos\varphi + y\sin\varphi - q},$$

$$g'(q.\varphi) = \frac{\partial g(q,\varphi)}{\partial q}.$$

Здесь в формулу (1) подставлена формула интегрального среднего для F, все дано в координатах.

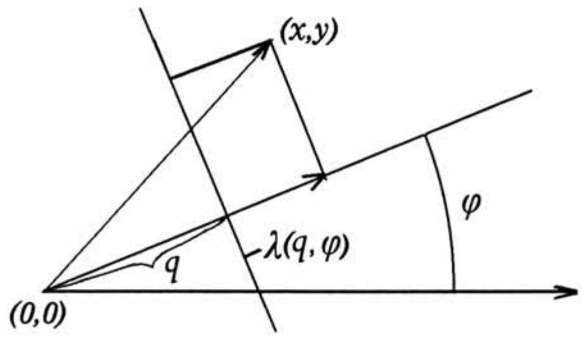


Рис. 10

Проекция равна скалярному произведению $x\cos\varphi + y\sin\varphi$.

В знаменателе получается расстояние от точки (x, y) до L. Знаменатель равен 0 на прямой, проходящей через точку (x, y).

Проинтегрируем по частям:

$$f(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(q,\varphi)dq}{(x\cos\varphi + y\sin\varphi - q)^2}.$$

Второй интеграл расходится, поэтому запись не совсем корректна. Мы интерпретируем эту запись так: у g большой коэффициент, когда прямая проходит близко к точке (x, y). Формально в формуле обращения участвуют интегралы по всем прямым, а не только по близким.

Рассмотрим ядро: $K(q) = \frac{1}{(x\cos\varphi + y\sin\varphi - q)^2}$, при фиксированных x, y. Например, при $g = 1$ интеграл равен площади под графиком. Горизонтальные "хвосты" конечны, а вертикальный бесконечен.

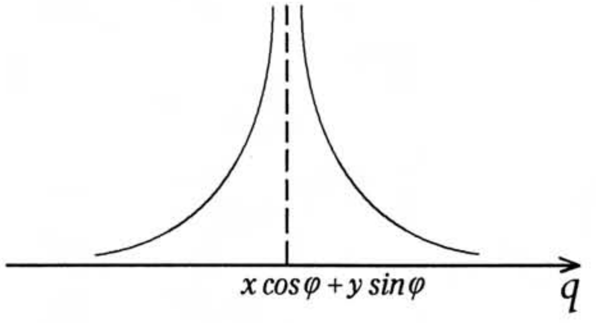


Рис. 11

На самом деле интеграл понимается в смысле, который был до интегрирования по частям:

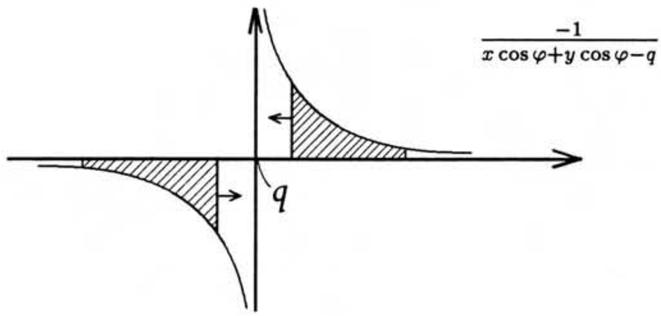


Рис. 12

$f = 0$ вне некоторого круга, так что интеграл берется по конечному отрезку. В окрестности особенности интеграл существует в смысле **главного значения**

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-R}^{c-\varepsilon} + \int\limits_{c+\varepsilon}^{R} \frac{g'dq}{c-q}, \qquad c = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

По отдельности пределы не существуют! Таким образом, в формуле Радона имеется в виду интеграл в смысле главного значения.

Трудности для решения практических задач:

— посчитать производную по значениям в конечном числе точек,

— посчитать предел для интеграла в смысле главного значения.

Наши следующие шаги: доказать формулу Радона; получить практический алгоритм.

Специальный курс математики для 9 класса в листках

Материал подготовил С.А. Дориченко

Листки с задачами по специальному курсу математики для учащихся 9-го класса школы с углублённой программой по математике

В этой статье мы хотим познакомить вас со «специальным» курсом математики, который изучали школьники девятого математического класса «Д» школы 57 г. Москвы в 1996/97 учебном году (это был их первый год обучения в 57 школе: класс был набран весной 1996 года по результатам собеседований).

Поясним сначала в общих чертах, как происходит обучение математике в классе.

Преподаваемый курс математики условно разделен на две части: «школьную» и «специальную». Уроки «школьной» математики ведет один учитель, придерживаясь, в основном, стандартной школьной программы математических классов.

«Специальный» курс — более широкий и углубленный, часто выходящий за рамки школьной программы. Он служит дополнением к «школьному» курсу, развивает некоторые его темы.

На уроках по «специальному» курсу присутствуют одновременно несколько преподавателей, каждый из которых работает с закреплёнными за ним тремя – четырьмя учениками.

Учащимся выдаются листки с задачами и минимальными теоретическими сведениями. Школьники обучаются, решая эти задачи и обсуждая их со своим преподавателем.

Листки делятся на основные и дополнительные. Школьникам необходимо прорабатывать основные листки (задачи, отмеченные звёздочками, необязательны), дополнительные листки решаются школьниками по их желанию.

Определённый срок проработки листка не устанавливается — он сильно зависит от конкретного школьника. Но это не мешает работе в классе благодаря большому количеству преподавателей и индивидуальному подходу к каждому ученику.

Школьники, быстро справляющиеся с материалом основных листков, имеют возможность думать над задачами со звёздочкой (бывали случаи, когда школьник приносил решение трудной задачи через год!), решать задачи дополнительных листков.

Большинство задач в приведённых здесь листках не являются оригинальными и взяты из различных сборников задач, учебников, журнальной и научной литературы, задач математических олимпиад. К сожалению, невозможно упомянуть про каждую задачу, откуда она взята; многие из них уже давно вошли в математический фольклор. В конце статьи мы приводим краткий (и, разумеется, неполный) список использованной и рекомендуемой литературы.

При написании листков был использован опыт работы школы за прошлые годы.

Листки составлялись преподавателями «специального» курса математики, работающими в этом классе. Это С.А. Васильев, Л.М. Гершензон, С.А. Дориченко, В.В. Крюков, В.В. Острик и Г.Л. Рыбников.

Надеемся, что этот курс может быть полезным школьникам, интересующимся математикой, а также учителям математических классов.

Следует отметить, что этот курс ориентирован на вполне конкретный класс. Он не был написан заранее: сначала была лишь в общих чертах намечена программа, и каждый следующий листок составлялся с учётом того, как решались школьниками предыдущие листки.

Поэтому использование курса учителями может потребовать в каждом конкретном случае большой переработки.

Листки приведены в том порядке, в котором они выдавались школьникам. Около номера каждого листка указана примерная дата его выдачи.

Основные листки нумеруются независимо от дополнительных, к номерам последних добавлена буква «д».

Приведены также задачи, предлагавшиеся школьникам на контрольных работах и на зачёте в конце первого полугодия.

Более подробно о системе преподавания по листкам можно прочитать в статье Р.К. Гордина «Опыт работы московской школы №57», опубликованной в журнале «Математика в школе», 1989, №4, стр. 47 – 54.

Заинтересованному читателю рекомендуем также ознакомиться со статьёй Н.Н. Константинова «Введение в математический анализ» (сб. Углублённое изучение алгебры и анализа. М.: Просвещение, 1977), в которой представлен один из вариантов изложения в виде листков курса математического анализа для школьников.

Листок №1. Математическая индукция 09.96

Пусть имеется последовательность утверждений A_1, A_2, A_3, ..., причём выполнены условия:

1) утверждение A_1 верно;

2) при любом натуральном n, если верно утверждение A_n, то верно и утверждение A_{n+1} (т. е. за верным утверждением последовательности следует верное утверждение).

Принцип математической индукции гласит: все утверждения этой последовательности верны.

Пример. Докажите для каждого натурального n формулу

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение. Мы имеем целую последовательность утверждений:

$$A_1: \quad 1=\frac{1\cdot 2}{2}, \qquad A_2: \quad 1+2=\frac{2\cdot 3}{2}, \qquad A_3: \quad 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2}, \quad \ldots$$

Утверждение A_1, очевидно, верно.

Проверим, что за каждым верным утверждением следует верное.

Пусть верно утверждение A_n, т. е. верно равенство $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Прибавим к обеим частям этого равенства число $n+1$. Получим

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Но это как раз и есть утверждение A_{n+1}.

В силу принципа математической индукции все утверждения A_1, A_2, ... верны, т.е. наша формула верна при любом натуральном n.

* * *

Задача 1. Найдите сумму[1]

$$1+3+5+\ldots+(2n+1).$$

Задача 2. Докажите равенства:

а)

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

б)

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2.$$

Задача 3. Найдите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Задача 4. Докажите неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geqslant 1+na$ при $a \geqslant -1$.

Задача 5. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не превосходит суммы модулей этих слагаемых.

Задача 6. а) Докажите неравенство $2^n > n$ при любом натуральном n.

б) Найдите все натуральные n, при которых $2^n > n^2$.

Задача 7. В компании из k человек ($k>3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k-4$ разговора все они могут узнать все новости.

Задача 8. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

Задача 9. Плоскость разбита на куски n прямыми. Докажите, что эти куски можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждый кусок был покрашен одной краской, а любые два куска, имеющие общий участок границы, были покрашены разными красками.

---

[1]Здесь и далее в этом листке буква n обозначает произвольное натуральное число.

Задача 10. Найдите ошибку в следующем рассуждении:

Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти. Воспользуемся индукцией по числу лошадей в табуне. Если в табуне всего одна лошадь, то, разумеется, все лошади в этом табуне одной масти.

Предположим теперь, что в любом табуне из n лошадей все лошади одной масти. Рассмотрим произвольный табун из $n+1$ лошади. По предположению индукции любые n лошадей в этом табуне одной масти. Поэтому все лошади в табуне одной масти, что и требовалось доказать.

Задача 11*. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ такова, что $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, а $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ при $n > 2$. Найдите a_n.

Задача 12*. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость n окружностей.

* * *

Пусть A_1, A_2, ... — последовательность утверждений. Справедливо следующее обобщение принципа математической индукции:

> *Пусть утверждение A_1 верно и, при любом натуральном числе n, если верны утверждения A_1, ..., A_n, то верно и утверждение A_{n+1}. Тогда утверждение A_n верно для любого натурального числа n.*

Задача 13. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Задача 14. Докажите, что если $(x + \dfrac{1}{x})$ — целое число, то число $(x^n + \dfrac{1}{x^n})$ — тоже целое при любом натуральном n.

Задача 15*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причем по правилам игра продолжается не более n ходов. Ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Задача 16*. Докажите, что принцип математической индукции равносилен следующему «принципу наименьшего числа»: в любой совокупности натуральных чисел есть наименьшее число.

Задача 17*. Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Листок №2. Комбинаторика 1 09.96

Задача 1. **а)** Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг из трех горизонтальных полос, если имеется материал 5 разных цветов?

б) Та же задача, если одна из полос должна быть красной.

Задача 2. Сколькими способами можно так составить флаг из 11 горизонтальных полос красного, синего или белого цвета каждая, чтобы любые две соседние полосы были разного цвета?

Задача 3. а) Семь девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?

б) Сколько ожерелий можно составить из семи различных бусин?

Задача 4. Ожерелье должно состоять из пяти бусин. Сколько таких ожерелий можно составить, если имеется неограниченное количество синих и зеленых бусин?

Задача 5. Шириной прямоугольника называется длина наименьшей из его сторон. Сколькими различными способами можно вырезать из квадратного листа бумаги размером 10×10 клеток прямоугольник ширины 3?

Задача 6. Некоторый алфавит состоит из n различных букв $a_1, \ldots, a_n$.

а) Сколько можно составить различных слов из k букв $(k \leqslant n)$?

б) Сколько можно составить различных слов из k букв $(k \leqslant n)$, если потребовать, чтобы буквы в слове не повторялись?

в) Сколькими способами можно переставить буквы в слове $a_1 a_2 \ldots a_n$?

Задача 7. В классе учатся 19 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты?

Задача 8. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных в классе из 19 человек?

Определение 1. *Числом сочетаний из n элементов по k* называется количество способов выбрать k дежурных в классе из n человек $(k \leqslant n)$. Обозначение: C_n^k (читается «це из n по k»).

Задача 9. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Задача 10. Докажите, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 11. Найдите формулу для C_n^k.

Задача 12. Садовник хочет высадить в ряд 3 груши и 4 яблони. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 13. У Пети есть 5 книг по математике, а у Васи — 7. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Определение 2. *Треугольником Паскаля* называется числовой треугольник, изображенный на рис. 1. Поясним, как он строится. В нулевой строке треугольника записывается единица. В первой строке записываются две единицы. Каждая следующая строка получается из предыдущей так: под каждыми двумя числами предыдущей строки записывается их сумма; затем в начале и в конце получившейся строки записывается по единице.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Рис. 1

Задача 14. На рис. 1 изображены первые 6 строк треугольника Паскаля (с нулевой по пятую). Напишите шестую и седьмую строки этого треугольника.

Задача 15. Будем нумеровать места в каждой строке треугольника Паскаля начиная с нуля (например, во второй строке на нулевом месте стоит 1, на первом месте — 2, на втором месте — 1). Докажите, что на k-ом месте n-ой строки стоит число C_n^k. (*Указание:* воспользуйтесь результатом задачи 10.)

Задача 16. а) Докажите, что сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n.

б) Докажите тождество: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Задача 17. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n различных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому.

а) Сколько дней ему удастся это делать?

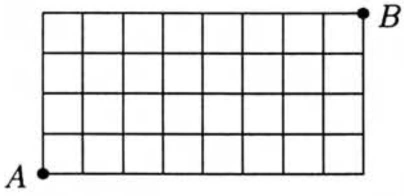
б) Сколько блюд он съест за это время?

(Петя может съесть за один раз от 0 до n различных блюд; ни в какие два дня его завтрак не должен состоять из одних и тех же блюд).

Задача 18. а) Вася, приятель Пети из задачи 17, решил последовать примеру своего друга, но съедать каждый день нечётное число блюд. Сколько дней ему удастся это делать?

б) Докажите тождество: $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 19. На рисунке справа изображен план города. На его улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вправо» или «вверх». Сколько есть разных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?



Задача 20. а) Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.

б) Докажите формулу (она называется *биномом Ньютона*):

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Задача 21. Выведите тождества задач 16б) и 18б) из бинома Ньютона.

Листок №1д. **Комбинаторика 2** 09.96

Формула включений и исключений

Задача 1. а) В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий язык, и 23 — оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языков?

б) Пусть кроме этого французский язык знают 20 человек, английский и французский — 12 человек, немецкий и французский — 11 человек, а все три языка — 5 человек. Сколько человек в институте не знают ни одного из этих трёх языков?

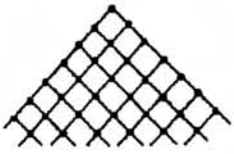
в) Решите предыдущую задачу в общем случае: когда английский знает $N_{\text{а}}$ человек, французский — $N_{\text{ф}}$ человек, немецкий — $N_{\text{н}}$ человек, английский и французский — $N_{\text{аф}}$ человек, ..., все три языка — $N_{\text{афн}}$ человек.

Задача 2. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак "+". Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 3. На полке стоят пять книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте?

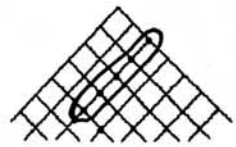
Треугольник Паскаля

Задача 4. На рисунке справа изображен треугольник, состоящий из линий и узлов. Запишем в его вершине единицу, а в каждом узле — количество путей, которыми можно добраться до него из вершины, двигаясь по линиям вниз. Докажите, что получится треугольник Паскаля.



Определение 1. Лучи, параллельные правой стороне треугольника Паскаля, назовём *правыми диагоналями*, а лучи, параллельные левой стороне — *левыми диагоналями*.

Задача 5. **а)** Докажите, что каждое число C в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей левой диагонали, начиная с самого правого вплоть до стоящего слева над числом C (см. рисунок справа).



б) Докажите тождество: $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}$.

Задача 6. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение о правой диагонали. Запишите доказанное утверждение в виде тождества.

Задача 7. Выведите из задачи 5 формулы для следующих сумм:

а) $1 + 2 + \ldots + m$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + m \cdot (m+1)$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + m \cdot (m+1) \cdot (m+2)$.

Задача 8*. Выведите из задачи 7 формулы для сумм $1^2 + \ldots + m^2$ и $1^3 + \ldots + m^3$.

Сочетания с повторениями

Задача 9. **а)** На бумажной полоске написано слово «комбинат». Сколькими способами эту полоску можно разрезать на пять частей? (Резать можно только между буквами).

б) Сколькими способами можно разложить восемь одинаковых кусков сахара по пяти различным чашкам так, чтобы не было пустых чашек?

Задача 10. Сколько букетов из пяти роз можно составить, если имеются розы трёх сортов?

Задача 11. Сколькими способами можно разложить десять одинаковых кусков сахара по пяти различным чашкам?

Определение 2. *Числом сочетаний с повторениями из n элементов по k* называется количество способов разложить k одинаковых шаров по n различным ящикам. Обозначение: $\overline{C}_n^k$.

Задача 12. Докажите, что $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1}$.

Задача 13. Сколькими способами натуральное число n можно представить

а) в виде суммы k натуральных слагаемых;

б) в виде суммы k неотрицательных целых слагаемых?

(Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считают различными).

Разные задачи

Задача 14. Имеется сеть дорог (см. рисунок к задаче 4 этого листка). Из вершины выходят 2^{100} человек. Половина идёт направо, половина — налево. Дойдя до первого перекрёстка, каждая группа делится: половина идет направо, половина — налево. Такое же разделение происходит на каждом перекрёстке. Сколько людей придёт в каждый из перекрёстков сотого ряда?

Задача 15. Сколько существует строк из 20 цифр, в которых встречаются только нули и единицы, причём никакие два нуля не стоят рядом?

Задача 16*. **а)** «Чёртово колесо» состоит из p одинаковых кабинок (p — простое число). Каждую кабинку можно покрасить в один из n цветов. Сколько есть способов раскраски?

б) (*Малая теорема Ферма*). Докажите, что $n^p - n$ делится на p при любом натуральном числе n и любом простом числе p.

Задача 17*. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр его (шестизначного) номера равна сумме трёх последних цифр.

а) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько номеров с суммой цифр, равной 27.

б) Сколько есть последовательностей из шести неотрицательных целых чисел с суммой 27?

в) Сколько существует счастливых билетов?

Задача 18*. Найдите сумму: $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \ldots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0$.

Контрольная работа по листкам 1 и 2 09.96

Задача 1. Докажите формулу

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Задача 2. Сколькими способами из девяти различных цветков можно составить три букета: один — из двух цветков, другой — из трёх, третий — из четырёх?

Задача 3. Докажите равенство:

$$C_{n+2}^{m+2} = C_n^{m+2} + 2 \cdot C_n^{m+1} + C_n^m.$$

Задача 4. На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

Листок №3. Целые числа 1 10.96

Разные задачи на делимость чисел

Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Число k *делит* число n (обозначение: $k \mid n$), если существует такое целое число m, что $n = k \cdot m$. В этом случае говорят также, что n *делится* на k или что n *кратно* k (обозначение: $n \,\vdots\, k$).

Задача 1. Пусть $k \mid n$ и $n \mid k$. Обязательно ли $n = k$?

Задача 2. Докажите, что **а)** если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$;
б) если $a \mid b$ и $a \mid c$, то $a \mid b + c$;
в) если $a \mid b$ и $c \mid d$, то $ac \mid bd$.

Задача 3. Докажите, что трёхзначное число вида $\overline{aaa}$ делится на 37.

Задача 4. Докажите, что если в трёхзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и само число делится на 7.

Задача 5. Пусть $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что тогда $9m + n \vdots 11$ (m и n — целые).

Задача 6. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 4, 5, 10.

Задача 7. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 3, 9, 11.

Задача 8. Докажите, что если a и b — различные целые числа, то $a^n - b^n \vdots a - b$ для любого натурального числа n.

Задача 9. Докажите, что если a и b — целые числа, и $a + b \neq 0$, то $a^n + b^n \vdots a + b$ для любого нечётного натурального числа n.

Задача 10. Найдите все целые n, при которых число $(n^3 + 3)/(n + 3)$ целое.

Задача 11. Докажите, что $1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k \vdots n$ при нечётных натуральных n и k.

Задача 12. Какой цифрой оканчивается число **а)** 14^{14}? **б)** $14^{14^{14}}$?

Задача 13. Докажите, что $a!b!c!d! \mid (a + b + c + d)!$ для любых целых чисел a, b, c, d.

Задача 14. Докажите, что $m(m + 1)(m + 2)$ делится на 6 при любом целом m.

Задача 15. Верно ли, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на $(n!)$?

Задача 16. Докажите, что число, записанное 3^n одинаковыми цифрами, делится на 3^n.

Задача 17. Докажите, что $12^{2n+1} + 11^{n+2}$ делится на 133 при любом натуральном n.

Задача 18. Найдите все натуральные k, при которых **а)** $7 \mid 2^k - 1$; **б)** $7 \mid 2^k + 1$.

Задача 19*. Из чисел 1, 2, 3, …, 100 выбрали произвольным образом 51 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делит другое.

Листок №4. Целые числа 2 10.96

Деление с остатком

Соглашение. В этом листке числа, обозначаемые латинскими буквами, считаются целыми; пары чисел, обозначаемые буквами a и b, считаются не равными одновременно нулю.

Задача 1. Пусть a и b — любые числа, $b \neq 0$. Докажите, что тогда существуют и единственны такие числа q и r, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < |b|$.
Число q называется *частным*, а число r — *остатком* от деления a на b.

Задача 2. Найдите частные и остатки от деления 996 на 23, -17 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n.

Задача 3. Найдите все возможные частные и остатки от деления числа 53.

Задача 4. Докажите, что из любых 100 целых чисел всегда можно выбрать 2 числа, разность которых делится на 99.

Задача 5. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать 2 числа, сумма или разность которых делится на 100.

Задача 6*. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 7*. **а)** Докажите, что для любого n есть число вида $1\dots 10\dots 0$, делящееся на n.

б) Докажите, что существует число вида $1\dots 1$, которое делится на 1997.

Определение 1. *Наибольшим общим делителем* чисел a и b называется наибольшее целое число, на которое делятся оба эти числа. Обозначение: (a, b).

Задача 8. Докажите, что (a, b) существует и единствен для любых двух чисел a и b.

Задача 9. Докажите, что $(a, b) = |b|$ тогда и только тогда, когда $a \,\vdots\, b$.

Задача 10. Докажите, что $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b.

Задача 11. Найдите все возможные значения

а) $(n, 12)$; **б)** $(n, n+1)$; **в)** $(n, n+6)$; **г)** $(2n+3, 7n+6)$; **д)** $(n^2, n+1)$.

Задача 12. Пусть a и b — любые числа, d — наименьшее положительное число, представимое в виде $ax + by$ для некоторых x и y. Докажите, что

а) d делится на (a, b); **б)** a и b делятся на d; **в)** $d = (a, b)$.

Определение 2. Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $(a, b) = 1$.

Задача 13. Пусть числа a и b взаимно просты. Докажите, что

а) существуют такие числа x и y, что $ax + by = 1$;

б) в п. а), если $|ab| > 1$, то числа x и y можно выбрать такими, что $|x| < |b|$, $|y| < |a|$.

в) для любого числа k существуют такие числа x и y, что $ax + by = k$;

г) если числа a и b натуральные, то для любого числа $k > ab$ существуют такие натуральные числа x и y, что $ax + by = k$;

Задача 14. Докажите, что для любых чисел a, b и c уравнение $ax + by = c$ имеет решение тогда и только тогда, когда $c \,\vdots\, (a, b)$. Как найти одно из решений?

Задача 15. Кузнечик умеет прыгать вдоль прямой на 6 см и на 10 см. Сможет ли он попасть в точку, отстоящую от исходной на **а)** 1,5 см; **б)** 7 см; **в)** 14 см?

Определение 3. Пусть a и b — натуральные числа. Согласно задаче 1, можно написать ряд равенств:

$$\begin{array}{rll}
a = bq_1 + r_1, & 0 < r_1 < b, & \text{(делим } a \text{ на } b \text{ с остатком)} \\
b = r_1 q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, & \text{(делим } b \text{ на } r_1 \text{ с остатком)} \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, & \text{(делим } r_1 \text{ на } r_2 \text{ с остатком)} \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, & \text{(делим } r_{n-2} \text{ на } r_{n-1} \text{ с остатком)} \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1}, & & \text{(если } r_{n-1} \text{ разделилось нацело на } r_n\text{)}
\end{array}$$

Процесс нахождения таких равенств называют *алгоритмом Евклида*. Процесс продолжают до тех пор, пока при каком-либо n число r_{n-1} не разделится нацело на r_n. В этом случае говорят, что алгоритм завершает свою работу за $n+1$ шаг.

Задача 16. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b

а) существует такое n, что алгоритм Евклида завершает работу за $n+1$ шаг;

б) в этом случае $(a,b)=(b,r_1)=(r_1,r_2)=\ldots=(r_{n-1},r_n)=r_n$.

Задача 17. Найдите с помощью алгоритма Евклида число $(525,231)$.

Задача 18. Докажите, что (a,b) делится на любой общий делитель чисел a и b.

Задача 19. Докажите, что **а)** $(ca,cb)=c(a,b)$ при $c>0$; **б)** $\left(\dfrac{a}{(a,b)},\dfrac{b}{(a,b)}\right)=1$.

Задача 20. Пусть $(a,b)=1$. Докажите, что

а) $(ac,b)=(c,b)$; **б)** если $ac \,\vdots\, b$, то $c \,\vdots\, b$.

Задача 21. Решите задачу 14, используя алгоритм Евклида.

Задача 22. Пусть пара (x_0,y_0) — решение уравнения $ax+by=c$. Докажите, что все решения этого уравнения задаются формулами $x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t$, $y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t$.

Задача 23. Решите уравнения в целых числах:

а) $17x+23y=36$; **б)** $nx+(2n-1)y=3$; **в)** $525x-231y=42$.

Задача 24*. Имеется m произвольных целых чисел. За одну операцию разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно, совершив несколько раз такую операцию, сделать все числа равными?

Определение 4. *Наименьшим общим кратным* ненулевых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и b. Обозначение: $[a,b]$.

Задача 25. Докажите, что $[a,b]$ существует и единственно для любых ненулевых чисел a и b.

Задача 26. Найдите **а)** $[192,270]$; **б)*** $[a^2-ab+b^2,ab]$.

Задача 27. Докажите, что **а)** $[ca,cb]=c[a,b]$ при $c>0$; **б)** $\left(\dfrac{[a,b]}{a},\dfrac{[a,b]}{b}\right)=1$.

Задача 28. Докажите, что любое общее кратное чисел a и b делится на $[a,b]$.

Задача 29. Докажите, что $|ab|=(a,b)\cdot[a,b]$.

Задача 30. Известно, что $(a,b)=15$, $[a,b]=840$. Найдите a и b.

Контрольная работа по листкам 3 и 4

11.96

Задача 1. Найдите $(\overline{abcd},\overline{efg})$, где $\overline{abcdefg}$ — номер Вашего телефона.

Задача 2. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a\times b$ клеток (стороны прямоугольника идут по линиям сетки). Проведём в нём диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат.

а) На сколько частей эти узлы делят диагональ?

б) А на сколько частей делят диагональ линии сетки?

Задача 3. Пусть a и b — натуральные числа. Верно ли, что

а) числа a и $b/(a,b)$ взаимно просты;

б) либо числа a и $b/(a,b)$ взаимно просты, либо числа b и $a/(a,b)$ взаимно просты?

Задача 4. Пусть a и b — целые числа, d — наименьшее положительное число, представимое в виде $ax+by$ для некоторых целых x и y. Докажите, что $d=(a,b)$.

Задача 5. Докажите, что $(2^m-1, 2^n-1) = 2^{(m,n)}-1$.

Листок №2д. Графы 1 11.96

Определение 1. *Графом* называется конечное множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями. Эти точки называются *вершинами* графа, а линии — *рёбрами* графа.

Мы будем считать, что каждое ребро соединяет различные вершины (*нет петель*), и каждые две вершины соединены не более чем одним ребром (*нет кратных рёбер*).

Задача 1. В графе n вершин, каждые две из них соединены ребром (такие графы называют *полными*). Сколько графов можно из него получить, стирая некоторые рёбра?

Определение 2. *Степенью вершины* называют количество выходящих из неё рёбер. Обозначение: $\deg A$ — степень вершины A.

Задача 2. (*Лемма о рукопожатиях*). Докажите, что сумма степеней вершин произвольного графа равна удвоенному количеству его рёбер.

Задача 3. Докажите, что количество вершин нечётной степени любого графа чётно.

Задача 4. Докажите, что если в графе не менее двух вершин, то в нём есть две вершины одинаковой степени.

Задача 5. У Пети 28 одноклассников, причём они имеют различное число друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

Пути в графах

Определение 3. *Путём* в графе называется любая последовательность его вершин A_1, A_2, ..., A_{n+1}, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром. Последовательность рёбер b_1, b_2, ..., b_n, где b_i при i от 1 до n соединяет A_i и A_{i+1}, также называют путём. Про такой путь говорят, что он *соединяет вершины* A_1 *и* A_{n+1}.

Если первая и последняя вершины пути совпадают, и все рёбра пути различны, то этот путь называют *циклом*.

Задача 6. Верно ли, что любая последовательность рёбер, в которой каждые два соседних ребра имеют общий конец, является путём?

Определение 4. Граф называют *связным*, если каждые две его вершины можно соединить путём.

Задача 7. В графе n вершин, причём степень каждой из них не меньше $(n-1)/2$. Докажите, что этот граф связен.

Задача 8. Из столицы некоторого государства выходит 101 авиалиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 100. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Определение 5. Граф называется *эйлеровым*, если в нём существует цикл, проходящий через все рёбра ровно по одному разу.

Задача 9. Докажите, что граф (возможно, с кратными рёбрами) является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степень любой его вершины чётна.

Определение 6. *Плоским графом* называют граф, рёбра которого не пересекаются (нигде, кроме вершин). Такой граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

Задача 10. Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы грани с общим ребром были разного цвета[1].

Задача 11*. Серёжа забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед ними были набраны другие цифры). Докажите, что Серёжа сможет открыть замок не более чем за 1002 секунды, если он набирает одну цифру в секунду.

Разные задачи

Задача 12. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в два цвета так, что любые две соединённые ребром вершины будут окрашены в разные цвета, если и только если граф не содержит циклов нечётной длины. Такие графы называют *двудольными*.

Задача 13. На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

Задача 14. Каждый из 450 депутатов парламента дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.

Задача 15*. (*Теорема Холла*). В некоторой компании n юношей. Для любых k из них (при каждом k от 1 до n) количество девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, не меньше k. Докажите, что всех юношей можно женить на знакомых девушках.

Задача 16*. В гости могут прийти либо n человек, либо m человек, причём $(n, m) = 1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n одинаковых кусков, так и m одинаковых кусков?

Задача 17*. Докажите, что среди любых 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

---

[1] Последнее условие, в частности, запрещает грани «иметь общее ребро с самою собой», т. е. грань не может примыкать к ребру с двух сторон.

Листок №3д. **Графы 2** 11.96

Деревья. Плоские графы. Формула Эйлера

Определение 1. Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом.*

Задача 1. Докажите, что граф является деревом тогда и только тогда, когда каждые две его вершины соединены ровно одним путём с различными рёбрами.

Определение 2. Вершину называют *висячей*, если из неё выходит ровно одно ребро.

Задача 2. Докажите, что в дереве с $n \geqslant 2$ вершинами найдутся две висячие вершины.

Задача 3. Многоугольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Докажите, что найдутся два треугольника разбиения, у каждого из которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника.

Задача 4. Докажите, что число вершин дерева на единицу больше числа его рёбер.

Определение 3. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 5. а) Докажите, что всякий связный граф имеет остов.

б) Может ли граф иметь несколько остовов?

Задача 6. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным.

Задача 7. (*Формула Эйлера*). Докажите, что для каждого связного плоского графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями имеет место равенство: $в - р + г = 2$.

Задача 8. Докажите для графа из задачи 7 неравенства:

а) $2р \geqslant 3г$ при $в \geqslant 2$; **б)** $р \leqslant 3в - 6$ при $в \geqslant 3$.

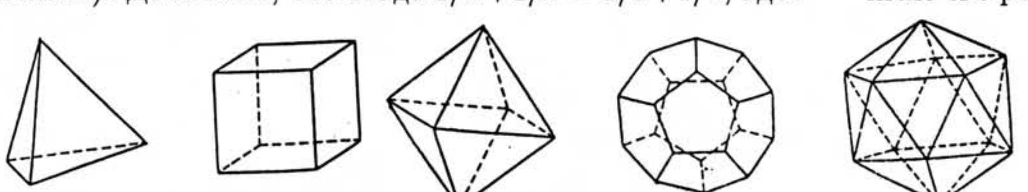
Задача 9. Докажите, что полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Задача 10. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Задача 11. Докажите, что в плоском графе всегда есть вершина степени не выше 5.

Задача 12. Пусть $в$, $р$ и $г$ — соответственно количество вершин, рёбер и граней некоторого выпуклого многогранника. Докажите, что $в - р + г = 2$.

Задача 13. Пусть все грани выпуклого многогранника — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится ровно k граней (такие многогранники называют *правильными*). Докажите, что тогда $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число его рёбер.



Задача 14. Докажите, что каждый правильный многогранник является либо тетраэдром, либо кубом, либо октаэдром, либо додекаэдром, либо икосаэдром (см. рис.).

Разные задачи

Задача 15*. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме данных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что один из играющих будет выигрывать всегда, причём независимо от своей игры и игры соперника.

Задача 16*. Каждый из n^3 единичных кубиков просверлили по диагонали, после чего их плотно нанизали на нить и связали нить в кольцо (т. е. вершину первого кубика соединили с вершиной последнего). При каких n такое «ожерелье» из кубиков можно упаковать в кубическую коробку с ребром длины n?

Задача 17*. В лесу $k \cdot m$ тропинок и несколько полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в m цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.

Задача 18*. В графе n вершин $A_1, \ldots, A_n$ и n рёбер $b_1, \ldots, b_n$. Известно, что любые две вершины A_i и A_j этого графа соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j выходят из одной вершины. Докажите, что степень каждой вершины равна 2.

Задача 19*. (*Теорема Кели*). Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

Листок №5. **Целые числа 3** 12.96

Целые числа 3

Простые числа. Основная теорема арифметики

Определение 1. Натуральное число $p > 1$ называется *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным*.

Задача 1. а) (*Решето Эратосфена*) Выпишем в ряд все натуральные числа от 2 до n. Обведём число 2 в кружок и вычеркнем все числа, делящиеся на 2. Первое невычеркнутое число обведём в кружок и вычеркнем теперь все числа, делящиеся на него. Снова первое невычеркнутое число обведём в кружок, и т. д. Будем действовать так, пока все числа от 2 до n не будут либо обведены в кружок, либо вычеркнуты. Докажите, что числа, обведённые в кружок — это все простые числа от 1 до n.

б) Пусть в п. а) очередное число, которое мы хотим обвести в кружок, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что все невычеркнутые к этому моменту числа от 2 до n — простые.

в) Выпишите все простые числа от 1 до 100.

Задача 2. Докажите следующие утверждения:

а) произведение первых n простых чисел больше следующего простого числа ($n > 1$);

б) простых чисел бесконечно много;

в) простых чисел вида $3k + 2$, где $k \in \mathbb{N}$, бесконечно много.

Задача 3. Назовём натуральное число *чётнопростым*, если оно не раскладывается в произведение двух чётных чисел. (Например, число 2 чётнопростое, а число 12 — нет, так как $12 = 2 \cdot 6$). Верно ли, что любое чётное число единственным образом раскладывается в произведение чётнопростых чисел (с точностью до порядка сомножителей)?

Задача 4. (*Основная теорема арифметики*). Докажите следующие утверждения:

а) если p — простое число, a и b — целые, и $p|ab$, то либо $p|a$, либо $p|b$;

б) для любого натурального n найдутся такие простые $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$;

в) (*каноническое разложение*). Для любого натурального n найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$;

г) каноническое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Задача 5. Найдите каноническое разложение числа **а)** 1996; **б)** 17!; **в)** C_{20}^{10}.

Задача 6. **а)** Докажите, что показатель, с которым простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$, равен $[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\ldots$ С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?

б) Найдите число нулей в конце числа 1996!;

в) Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

Задача 7. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся n последовательных натуральных чисел, являющихся составными.

Задача 8. Пусть a, b, c и n — натуральные числа, причём $(a, b) = 1$ и $ab = c^n$. Докажите, что $a = x^n$ и $b = y^n$ для некоторых натуральных x и y.

Задача 9. Найдите все натуральные числа с нечётным числом натуральных делителей.

Задача 10. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\tau(n)$ и $S(n)$ — соответственно количество и сумма натуральных делителей n.

а) Докажите, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$, если $(a, b) = 1$.

б) Найдите $\tau(n)$.
(*Указание:* найдите сначала $\tau(p_1^{\alpha_1})$, а затем воспользуйтесь пунктом а)).

в) Докажите, что $S(ab) = S(a)S(b)$, если $(a, b) = 1$.

г) Найдите $S(n)$.
(*Указание:* найдите сначала $S(p_1^{\alpha_1})$, а затем воспользуйтесь пунктом в)).

Задача 11*. Натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Докажите, что чётное число n совершенно тогда и только тогда, когда $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ для некоторых простых чисел p и $2^p - 1$.

Задачи к зачёту по листкам 1 – 4 12.96

Математическая индукция

Задача 1. Найдите все натуральные n, при которых $2^n > n^3$.

Задача 2. Докажите, что $2^{n+2} > 2n + 5$ при любом натуральном числе n.

Задача 3. Докажите при любом натуральном n равенство

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Задача 4. Докажите, что число $11^{2n}-2^{6n}$ делится на 57 при любом натуральном n.

Задача 5. Докажите, что сумма кубов любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

Задача 6. Докажите при любом натуральном n неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Задача 7. Про последовательность чисел a_1, a_2, a_3, ... известно, что $a_1=1$, $a_2=2$ и $a_{n+1}=a_n-a_{n-1}$ при всех натуральных $n>2$. Докажите, что $a_{n+6}=a_n$ при любом натуральном n.

Задача 8. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или на 6 кусков. Докажите, что по этим правилам его можно разорвать на любое число кусков, начиная с девяти.

Задача 9. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с шести.

Задача 10. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое число правильных треугольников, начиная с шести.

Задача 11. Несколько окружностей делят плоскость на части. Докажите, что можно раскрасить эти части в два цвета так, чтобы любые две соседние части были покрашены в разные цвета.

Задача 12. У Пети есть детская пирамидка с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что

а) Петя сможет переложить все кольца на один из пустых стержней;

б) он сможет сделать это за 2^n-1 перекладываний;

в)* меньшим числом перекладываний обойтись не удастся.

Комбинаторика

Задача 13. Имеются три книжных шкафа, в каждом из которых содержится 100 книг. Все эти книги разные. Сколькими способами можно выбрать из них пару книг так, чтобы книги в паре были из разных шкафов?

Задача 14. Перед экзаменом профессор пообещал поставить двойки половине экзаменуемых. На экзамен пришло 20 студентов. Сколькими способами он может выполнить обещание?

Задача 15. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске черную и белую клетки, не лежащие в одном столбце?

Задача 16. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух королей так, чтобы они не били друг друга? (Короли бьют друг друга, если они находятся в клетках, у которых есть общая вершина).

Задача 17. На балу собрались 10 дам и 10 кавалеров.Сколькими способами могут они разбиться на пары?

Задача 18. Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно составить из 5 букв А и не более чем трёх букв Б?

Задача 19. Сколькими способами можно посадить за круглый стол пять мужчин и пять женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

Задача 20. Сколько существует шестизначных чисел, в которых хотя бы 2 цифры совпадают?

Задача 21. Из села Забугорного в город Лукоморье через Лихой Бор ведут три параллельные автострады, пересекаемые десятью параллельными просеками. Сколькими способами можно проехать из города в село, если ни по какому участку пути не проезжать дважды?

Задача 22. В нашем распоряжении имеется три флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается?

Задача 23. При приготовлении пиццы к сыру добавляются разные компоненты, обеспечивающие тот или иной вкус. В распоряжении Билла имеются лук, грибы, помидоры, перец и анчоусы, причём всё это можно, по его мнению, добавлять к сыру. Сколько типов пиццы может приготовить Билл?

Задача 24. В продаже есть шоколадное, клубничное и молочное мороженое. Сколькими способами можно купить три мороженых?

Задача 25. Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?

Задача 26. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Задача 27. **а)** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь разных ладей так, чтобы они не били друг друга?

б) А если все ладьи одинаковые?

(Две ладьи бьют друг друга, если они находятся на одной горизонтали или вертикали).

Задача 28. Сколько существует шестизначных чисел, в десятичной записи которых цифры идут в порядке возрастания?

Задача 29. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Задача 30. Свидетель криминальной разборки помнит, что преступники скрылись на «мерседесе», номер которого содержал буквы Т, З, У и цифры 3 и 7 (номер — это строка, в которой сначала идут три буквы, а затем — три цифры). Сколько существует таких номеров?

Задача 31. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 (цифры могут повторяться).

Задача 32. Поступающий в некоторое высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена — терпимость, математику, пение и почитание. Сколькими способами он может успешно сдать экзамены, если проходной балл равен 17, а на экзаменах ставят только оценки 5, 4 и 3?

Задача 33. Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

Задача 34. Пусть n, m, k — натуральные числа, причём $n \geqslant k$ и $m \geqslant k$. Докажите, что

$$C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m.$$

Задача 35. Докажите для любого натурального n формулу

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

Целые числа

Задача 36. Число 1270 при делении на некоторое число даёт частное 74. Найдите делитель и остаток.

Задача 37. В числе переставили цифры и получили число, в 3 раза меньшее исходного. Докажите, что исходное число делится на 27.

Задача 38. Пусть m и n целые и $5m + 3n \mathrel{\vdots} 11$. Докажите, что $9m + n \mathrel{\vdots} 11$.

Задача 39. Пусть a и b — целые числа, причём $a^2 \mathrel{\vdots} (a+b)$. Докажите, что $b^2 \mathrel{\vdots} (a+b)$.

Задача 40. Найти остаток от деления 50^{13} на 7.

Задача 41. При каких n число $3(n^2 + n) + 7$ делится на 5?

Задача 42. Пусть p — простое, a и b — целые. Докажите, что p делит $(a+b)^p - a^p - b^p$.

Задача 43. Сократима ли дробь $\dfrac{14m + 17}{21m + 25}$?

Задача 44. Найдите $(54321, 67890)$.

Задача 45. Решите в целых числах уравнение: $21x + 48y = 6$.

Задача 46. Решите в целых числах уравнение: $105x + 42y = 56$.

Задача 47. Решите в целых числах уравнение: $1990x - 173y = 11$.

Задача 48. На какую максимальную степень двойки делится число C_{50}^{25}?

Задача 49. Делится ли число C_{100}^{50} на 83?

Задача 50. **а)** Докажите, что $[2x] - 2[x]$ равняется либо 0, либо 1 при любом x. ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.)

б) Докажите, что C_{1000}^{500} не делится на 1024.

Задача 51. Число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 52. Найдите все натуральные числа, имеющие ровно три натуральных делителя.

Задача 53. Пусть $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n. Найдите произведение всех натуральных делителей n.

Задача 54. Найдите целые числа a и b, если известно, что $(a, b) + [a, b] = 84$ и $a + b = 60$.

Задача 55. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?

Задача 56. Докажите, что пятая степень любого целого числа оканчивается на ту же цифру, что и само число.

Задача 57. Пусть a, b, c, d — натуральные числа, причём $ab = cd$. Докажите, что тогда найдутся такие целые числа k, l, m, n, что $a = kl$, $b = mn$, $c = km$, $d = ln$.

Задача 58. Пусть a, b, c, d — натуральные числа, причём $ab = cd$.

а) Докажите, что найдутся такие целые числа k, l, m, n, что $a = kl$, $b = mn$, $c = km$, $d = ln$.

б) Может ли число $a + b + c + d$ быть простым?

Задача 59. Найдите все натуральные n, при которых $[n^2/5]$ — простое число. ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Разные задачи

Задача 60. Длины сторон треугольника ABC являются целыми числа. Найдите их, если известно, что квадрат длины стороны AB равен сумме длин сторон AC и BC, а квадрат длины стороны BC — сумме длин сторон AC и AB.

Задача 61. Докажите, что при любых натуральных m и n справедливо равенство

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$$

Задача 62. Каких треугольников с целыми сторонами больше: тех, периметр которых равен 1993, или тех, периметр которых равен 1996?

Задача 63. **а)** Решите в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

б) Имеет ли это уравнение решения в натуральных числах?

Задача 64. Дана последовательность F_1, F_2, F_3, … чисел Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при всех $n > 1$. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

Задача 65. Найдите число прямоугольников, составленных из клеток доски с 19 горизонталями и 96 вертикалями, которые содержат клетку с координатами $(4, 5)$.

Задача 66. Шахматная фигура тянитолкай может совершать следующие передвижения по бесконечной клетчатой доске:

1) на 2 клетки вверх и на 5 вправо;
2) на 2 клетки вниз и на 5 влево;
3) на 3 клетки вверх и на 8 вправо;
4) на 3 клетки вниз и на 8 влево.

На какие клетки может попасть тянитолкай?

Задача 67*. Докажите, что из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, … можно так вычеркнуть некоторую их часть, что любое натуральное число можно будет единственным образом записать в виде $a + 2b$, где a и b — какие-то невычеркнутые числа.

Листок №6. Теория множеств 1 01.97

Напомним[1] основные определения и обозначения. Пусть A и B — множества. Тогда

объединением множеств A и B называется множество $A\cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;

пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;

разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Говорят, что A — *подмножество* B, если любой элемент множества A содержится в множестве B. Обозначение: $A \subseteq B$. Если при этом множества A и B не совпадают, то пишут: $A \subset B$. Аналогично определяются знаки "$\supseteq$" и "$\supset$".

* * *

Задача 1. Пусть A, B и C — произвольные множества. Докажите, что:
а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
г) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
д) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Задача 2. а) Известно, что $A \setminus B = C$. Верно ли, что тогда $A = B \cup C$?
б) Известно, что $A = B \cup C$. Верно ли, что тогда $A \setminus B = C$?

Определение 1. *Отображением* из множества X в множество Y называется соответствие, при котором каждому элементу x множества X соответствует ровно один элемент множества Y (он называется *образом* x при отображении f и обозначается $f(x)$).

Пусть $y \in Y$. Всякий элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y при отображении f.

Отображения обозначают следующими способами: $f\colon X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$.

Задача 3. Найдутся ли такие множества X и Y и такое отображение $f\colon X \to Y$, что
а) в множестве X найдётся элемент, не имеющий образа;
б) в множестве X найдётся элемент, имеющий несколько образов;
в) в множестве Y найдётся элемент, не имеющий прообраза;
г) в множестве Y найдётся элемент, имеющий несколько прообразов?

Задача 4. а) Нарисуйте все отображения из множества $\{0,1,2\}$ в множество $\{0,1\}$.
б) Сколько существует отображений из k-элементного множества в l-элементное?

Определение 2. Отображение $f\colon X \to Y$, при котором каждый элемент множества Y соответствует ровно одному элементу множества X, называют *взаимно однозначным*.

Задача 5. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение. Докажите, что существует и единственно такое отображение $g\colon Y \to X$, что $g(f(x)) = x$ при любом $x \in X$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in Y$. Его называют *обратным к* f. Обозначение: f^{-1}.

---

[1]В первом полугодии школьникам были прочитаны две лекции об основных понятиях теории множеств.

Задача 6. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 7. Каких треугольников с целыми сторонами больше: тех, периметр которых равен 1993, или тех, периметр которых равен 1996?

Определение 3. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

Задача 8. Докажите, что: **а)** $|X| = |X|$;
б) если $|X| = |Y|$, то $|Y| = |X|$;
в) если $|X| = |Y|$ и $|Y| = |Z|$, то $|X| = |Z|$.

Задача 9. Докажите, что следующие множества *счётны* (то-есть равномощны множеству $\mathbb{N}$):
а) множество целых чисел $\mathbb{Z}$;
б) множество $\mathbb{N} \setminus \{1997\}$;
в) множество натуральных чисел, делящихся на данное число $m \in \mathbb{N}$.

Задача 10. Докажите, что:
а) подмножество счётного множества или конечно, или счётно;
б) если A и B — счётные множества, то $A \cup B$ тоже счётно;
в) конечное объединение счётных множеств счётно;
г) счётное объединение счётных множеств счётно.

Задача 11. а) Докажите, что множество точек плоскости, координаты которых являются целыми числами, счётно.
б) Докажите,что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.
в)* Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством неотрицательных целых чисел и множеством точек плоскости, координаты которых — неотрицательные целые числа.

Задача 12. Докажите, что следующие множества счётны:
а) множество конечных последовательностей 0 и 1;
б) множество предложений в русском языке;
в) множество конечных подмножеств множества натуральных чисел;
г)* любое бесконечное множество непересекающихся интервалов на прямой;
д)* любое бесконечное множество непересекающихся кругов на плоскости.

Задача 13. Счётны ли следующие множества:
а) множество всех треугольников на плоскости, координаты всех вершин которых рациональны;
б) множество всех многоугольников на плоскости, координаты всех вершин которых рациональны?

Задача 14*. Докажите, что следующие множества *несчётны* (т. е. бесконечны, но не являются счётными):
а) множество бесконечных последовательностей 0 и 1;
б) множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$;
в) множество взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Задача 15. а) Докажите, что множество бесконечных последовательностей 0 и 1 равномощно множеству всех подмножеств множества $\mathbb{N}$.

б)* Докажите, что все множества из задачи 14 равномощны.

Задача 16. Докажите следующие утверждения:

а) В любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество;

б) Множество M является бесконечным тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 17*. Докажите, что следующие множества точек равномощны:

а) любые два отрезка;

б) любые два интервала;

в) интервал и прямая;

г) интервал и отрезок.

Листок №7. Многочлены 1 02.97

Задача 1. а) Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает при каждом целом x целое значение. Верно ли, что среди его коэффициентов хотя бы один — целое число?

б) Верно ли, что все его коэффициенты — целые числа?

Задача 2. Правильные треугольники со сторонами 1, 3, 5, ... расположены в ряд так, что их основания лежат на одной прямой вплотную друг к другу. Докажите, что вершины треугольников, противоположные основаниям, лежат на некоторой параболе.

Задача 3. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не больше, чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?

Задача 4. а) Для каждого числа x из множества $\{-3, -2, -1, -1/2,\ 0,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 3\}$ нарисуйте на плоскости pOq графики прямых, задающихся уравнениями $x^2 + px + q = 0$.

б) Напишите уравнение, задающее множество таких точек (p, q), что квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет кратный корень, и изобразите его на плоскости.

в) Докажите, что прямые из пункта а) и, вообще, все прямые вида $x^2 + px + q = 0$ на плоскости pOq касаются[1] некоторой кривой. Что это за кривая?

г) Укажите на плоскости множества таких точек (p, q), что квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных корня, не имеет корней.

д)* Укажите на плоскости множества таких точек (p, q), что квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет на отрезке $[-1; 1]$ два различных корня, кратный корень, не имеет корней.

---

[1]В этой задаче будем считать, что прямая l *касается* некоторой кривой, если эта кривая лежит по одну сторону от прямой l и имеет с l ровно одну общую точку.

Основные определения

Определение 1. *Многочленом степени n от одной переменной x* называется выражение вида
$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \qquad (*)$$
где $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, а коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ — действительные числа, причём $a_n \neq 0$. Число 0 называется *нулевым* многочленом.

Многочлен задаёт функцию $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому числу $r \in \mathbb{R}$ число $A(r)$ (результат подстановки числа r в выражение $(*)$).

Задача 5. а) Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа C найдётся такое число x, что $x^n > C(1 + x + \ldots + x^{n-1})$.

б) Докажите, что если многочлен задаёт нулевую функцию, то он нулевой.

в) Докажите, что разные многочлены задают разные функции.

Замечание. Таким образом, можно не различать многочлен и задаваемую им функцию.

Определение 2. *Сумма* и *произведение* многочленов — это сумма и произведение соответствующих функций.

Задача 6. Докажите, что сумма и произведение многочленов также являются многочленами. Как найти их коэффициенты?

Задача 7. Найдите сумму и произведение многочленов
а) $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и $b_2x^2 + b_1x + b_0$; **б)** $x^{19} - 9x + 7$ и $x^7 + 99x + 1$.

Задача 8. Найдите суммы всех коэффициентов следующих многочленов:
а) $(x-1)^{100}$; **б)** $(x+1)^{100}$; **в)** $(x-2)^{100}$; **г)** $(x+2)^{100}$; **д)** $(1 - x + x^4)^{1997}$.
е) Найдите сумму всех нечётных коэффициентов многочлена из пункта д).

Задача 9. Известно, что произведение двух многочленов — нулевой многочлен. Докажите, что один из этих многочленов также нулевой.

Теорема Виета

Задача 10. а) Пусть многочлен $a(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ раскладывается на линейные множители: $a(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$. Докажите, что справедливы следующие *формулы Виета:*
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = b, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c.$$

б)* Выведите аналогичные формулы для многочлена степени $n \in \mathbb{N}$, раскладывающегося на линейные множители.

Задача 11. а) Про числа a, b, c известно, что $a + b + c > 0$, $ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Докажите, что числа a, b, c — положительные.

б) Пусть $a + b + c < 0$, $ab + bc + ac < 0$, $abc < 0$. Какие знаки могут иметь числа a, b, c?

Задача 12*. а) Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен $x^5 + ax^2 + bx + c$ не может раскладываться на линейные множители с вещественными коэффициентами.

б) Докажите то же утверждение для многочлена $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$.

Рациональные корни многочленов

Задача 13. Докажите, что если многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, то уравнение $A(x) = 0$ не имеет целых решений.

Определение 3. Число s называется корнем многочлена A, если $A(s) = 0$.

Задача 14. а) Несократимая дробь p/q — корень многочлена $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда $a_n \vdots q$ и либо $a_0 \vdots p$, либо $a_0 = p = 0$.

б) Пусть в пункте а) коэффициент $a_n = 1$. Докажите, что все рациональные корни многочлена A — целые числа.

Задача 15. Найдите все рациональные корни следующих многочленов:
а) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; **б)** $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Задача 16. Пусть $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.
а) Докажите, что $a - b$ делит $p(a) - p(b)$ при любых различных целых числах a и b.
б) Пусть уравнения $p(x) = 1$ и $p(x) = 3$ имеют целое решение. Может ли уравнение $p(x) = 2$ иметь два различных целых решения?

Дополнительные задачи

Задача 17. Пусть многочлен $A(x)$ таков, что $A(x) = A(-x)$ при любом x. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$, что $A(x) = P(x^2)$ при любом x.

Задача 18. Пусть $p(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами.
а) Докажите, что при любом целом числе n либо $p(n)$ делит $p(n + p(n))$, либо $p(n) = p(n + p(n)) = 0$.
б) Могут ли все числа $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, … быть простыми?

Задача 19. Пусть $s_1, \ldots, s_k$ — корни многочлена $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Найдите корни многочленов **а)** $(-1)^n a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 - a_1 x + a_0$; **б)** $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$.

Задача 20. Коэффициенты произведения двух многочленов с целыми коэффициентами делятся на 5. Докажите, что коэффициенты одного из этих многочленов делятся на 5.

Задача 21. Используя равенство $(1 + x)^p (1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}$, вычислите двумя способами коэффициент при x^m в многочлене $(1 + x)^{p+q}$ и решите задачу 18 листка 1д.

Задача 22*. У многочлена $P(x)$ есть отрицательный коэффициент. Могут ли у всех его степеней $P^n(x)$ (где $n > 1$ — целое) все коэффициенты быть положительными?

Листок №4д. Геометрия на клетчатой бумаге 02.97

Определение 1. Пусть дан многоугольник с вершинами в узлах сетки, S — его площадь, i — число узлов сетки, лежащих внутри него, b — число узлов сетки, лежащих на его сторонах (считая вершины). *Формулой Пика* называют формулу: $S = i + b/2 - 1$.

Задача 1. Докажите формулу Пика для прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки.

Задача 2. Докажите формулу Пика для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

Задача 3. Имеются три многоугольника, один из которых составлен из двух других. Пусть формула Пика верна для некоторых двух многоугольников из этих трёх. Докажите, что она верна и для третьего многоугольника.

Задача 4. Докажите формулу Пика для любого треугольника с вершинами в узлах сетки.

Задача 5. **а)** Пусть M — невыпуклый многоугольник, A — такая его вершина, что внутренний угол при этой вершине больше развёрнутого. Рассмотрим все лучи, исходящие из A и направленные внутрь M; на каждом луче отметим первую точку пересечения с контуром M. Могут ли все отмеченные точки принадлежать одной стороне M?

б) Докажите, что во всяком n–угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком.

Задача 6. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники (требуется, чтобы диагонали целиком принадлежали многоугольнику и не пересекались друг с другом нигде кроме его вершин).

Задача 7. Докажите формулу Пика в общем случае.

Задача 8*. (*Теорема Минковского*). На плоскости расположен параллелограмм площади 4, имеющий центр в узле сетки. Докажите, что внутри этого параллелограмма или на его сторонах лежит по крайней мере ещё один узел сетки.

Определение 2. Назовём треугольник с вершинами в узлах сетки *простым*, если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки.

Задача 9. Докажите, что все простые треугольники имеют одинаковую площадь. Какую?

Задача 10. Пусть A и B — узлы сетки, причём на отрезке AB нет других узлов. Докажите, что для некоторого узла сетки C треугольник ABC будет простым.

Задача 11. Прямая l соединяет узлы сетки с координатами $(0;0)$ и $(p;q)$, где p и q взаимно просты. Найдите расстояние до прямой l от ближайшего к ней узла, не лежащего на l.

Задача 12. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату длины какой-то его стороны иррационально. Докажите, что никакой подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

Задача 13. **а)** Существует ли равносторонний треугольник с вершинами в узлах сетки?

б) Тот же вопрос для правильного шестиугольника.

Задача 14*. Предположим, что существует правильный n–угольник с вершинами в узлах сетки. Докажите, что тогда

а) существует правильный n–угольник с вершинами и центром в узлах сетки;

б) при $n > 6$ существует правильный n–угольник со стороной меньшей длины и вершинами в узлах сетки.

Задача 15*. Для каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки?

Листок №8. Многочлены 2 03.97

Обозначение. *Степень ненулевого многочлена* A обозначается $\deg A$.

Задача 1. а) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$.

б) Пусть $\deg A = 10$, $\deg B = \deg C = 7$. Выясните, какими могут быть $\deg(A+B)$ и $\deg(B+C)$?

в) Докажите, что $\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$.

Число корней многочлена

Определение 1. Многочлен A *делится* на многочлен B, если существует такой многочлен C, что $A = BC$. В этом случае говорят также, что многочлен B *делит* многочлен A.

Задача 2. Докажите, что если многочлен A делится на многочлен B, то все корни многочлена B являются корнями многочлена A. Верно ли обратное утверждение?

Задача 3. Делится ли многочлен $x^9 - 1$ на многочлен x? А на многочлен $x^2 - 1$?

Задача 4. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится на двучлен $x - s$ тогда и только тогда, когда s — корень $A(x)$.

Задача 5. Пусть $A(1) = A(2) = 0$. Докажите, что $A(x)$ делится на $(x-1)(x-2)$.

Задача 6. Докажите, что число различных корней многочлена $A(x)$ не больше $\deg A$.

Задача 7. Является ли многочленом функция $\sin x$?

Задача 8. Пусть значения многочленов A и B совпадают при n различных значениях переменной, и степени этих многочленов меньше n. Докажите, что тогда $A = B$.

Задача 9. В скольких точках прямая может пересекать параболу?

Задача 10. а) Докажите, что любой квадратный трёхчлен можно представить в виде $a + bx + cx(x-1)$.

б) Найдите уравнение параболы, проходящей через точки $(0;1)$, $(1;2)$ и $(2;4)$.

в) Докажите, что любой многочлен третьей степени можно представить в виде $a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x-2)$.

г) Найдите такой многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$, $P(3) = 8$.

Задача 11*. Докажите, что для любых различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и любых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n такой, что $P(a_1) = b_1$, $P(a_2) = b_2$, $\ldots$, $P(a_n) = b_n$.

Деление с остатком

Определение 2. Пусть A и B — многочлены, причем $\deg B > 0$. Разделить A на B с остатком значит найти такие многочлены Q и R, что $A = BQ + R$, где $\deg R < \deg B$.

Задача 12. Разделите с остатком $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$.

Задача 13. а) Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно.

б) Докажите, что при делении с остатком многочлены Q и R определяются однозначно.

Задача 14. (*Теорема Безу*). Докажите, что остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - a$ равен значению многочлена $A(x)$ при $x = a$.

Задача 15. Остаток от деления $A(x)$ на $x - 1$ равен 5, а на $x - 3$ равен 7. Найдите остаток от деления $A(x)$ на $(x-1)(x-3)$.

Определение 3. *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух многочленов, один из которых ненулевой, называют многочлен наибольшей степени, делящий оба этих многочлена.

Задача 16. Верно ли, что НОД двух многочленов определяется однозначно?

Задача 17. а) Докажите, что для любых двух многочленов A и B существуют такие многочлены U и V, что $\text{НОД}(A, B) = AU + BV$.

б)* Докажите, что если степени многочленов A и B положительны, то существуют такие многочлены U и V из пункта а), что $\deg U < \deg B$ и $\deg V < \deg A$.

Задача 18. Найдите НОД многочленов: **а)** $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$; **б)** $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$; **в)*** $x^m - 1$ и $x^n - 1$; **г)*** $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

Задача 19. Обозначим многочлены из пункта б) предыдущей задачи как f и g. Найдите такие многочлены u и v, что $\text{НОД}(f, g) = fu + gv$, причём $\deg u < \deg g$ и $\deg v < \deg f$.

Листок №5д.

Радикальные оси

03.97

Определение 1. *Радикальной осью* двух неконцентрических окружностей называется множество таких точек M, что касательные, проведённые из M к этим окружностям, имеют равные длины.

Задача 1. Докажите, что радикальная ось двух непересекающихся окружностей — прямая. Напишите уравнение этой прямой, если радиусы окружностей имеют длины R_1 и R_2, а их центры имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно.

Задача 2. Найдите радикальную ось двух пересекающихся окружностей.

Определение 2. Две окружности, пересекающиеся в точках A и B, называют *перпендикулярными,* если касательные, проведённые к ним в точке A, пересекаются под прямым углом.

Задача 3. Докажите, что радикальная ось двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 совпадает с множеством центров окружностей, перпендикулярных одновременно и S_1, и S_2.

Пучки окружностей

Определение 3. *Пучком окружностей* называется множество окружностей и прямых, перпендикулярных двум данным неконцентрическим окружностям S_1 и S_2. Будем говорить, что окружности S_1 и S_2 *задают* этот пучок.

Задача 4. Нарисуйте пучки, задаваемые двумя **а)** пересекающимися (но не касающимися); **б)** касающимися; **в)** непересекающимися окружностями.

Задача 5. Докажите, что окружность, перпендикулярная некоторым двум окружностям одного пучка, перпендикулярна всем окружностям этого пучка.

Задача 6. Докажите, что множество окружностей и прямых, перпендикулярных всем окружностям данного пучка, также является пучком (он называется *перпендикулярным* данному).

Задача 7. Нарисуйте пучки, перпендикулярные пучкам из задачи 4.

Задача 8. Докажите, что радикальная ось любых двух окружностей одного пучка проходит через центры окружностей, задающих этот пучок. (Таким образом, радикальная ось — одна и та же для каждых двух окружностей одного пучка.)

Задача 9. **а)** Пусть пучок задан двумя пересекающимися (но не касающимися) окружностями. Докажите, что через каждую точку плоскости проходит единственная окружность или прямая пучка.

б) Что можно сказать в случае, когда окружности, задающие пучок, касаются?

в) Что можно сказать в случае, когда окружности, задающие пучок, не пересекаются?

Задача 10. Докажите, что любые две неконцентрические окружности принадлежат некоторому пучку окружностей.

Большая теорема Понселе

Задача 11. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Найдите геометрическое место таких точек M, что разность квадратов длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, есть заданное число l.

Задача 12. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическое место таких точек M, что отношение длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, есть заданное число $k > 1$, является некоторой окружностью S из того же пучка, что и S_1 и S_2. При этом $k^2 = OO_1/OO_2$, где O, O_1, O_2 — центры окружностей S, S_1, S_2 соответственно.

Задача 13. Прямая l пересекает две неконцентрические окружности S_1 и S_2 в точках A, B и C, D соответственно. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — касательные, проведённые к S_1 и S_2 в соответствующих точках. Докажите, что точки пересечения прямых l_A, l_B с прямыми l_C, l_D

а) лежат на радикальной оси S_1 и S_2, если l проходит через центр подобия этих окружностей;

б) лежат на некоторой окружности в противном случае.

в) Докажите, что окружность из пункта б) принадлежит тому же пучку, что и окружности S_1 и S_2.

Задача 14. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2, причём S_2 лежит внутри S_1. Пусть вершины ломаных $A_1A_2\dots A_n$ и $A'_1A'_2\dots A'_n$ лежат на окружности S_1, а их звенья, а так же отрезок A_nA_1, касаются окружности S_2. Докажите, что если для всех i от 1 до n точки A_i и A'_i расположены достаточно близко друг от друга, то отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ касаются некоторой окружности, причем из того же пучка, что и S_1 и S_2.

Задача 15. (*Большая теорема Понселе*). Две окружности лежат одна внутри другой. Выберем на внешней окружности точку, проведём через неё касательную к внутренней, продолжим до пересечения с внешней во второй точке, из неё снова проведём касательную к внутренней (отличную от уже проведённой) и так далее. Докажите, что если через n шагов мы вернемся в исходную точку, то с какой бы другой точки внешней окружности мы не начали аналогичный процесс, через n шагов мы вернемся в точку, с которой начинали.

Разные задачи

Задача 16. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведём для каждой пары из этих окружностей прямую, содержащую радикальную ось этой пары. Докажите, что три проведённые прямые пересекаются в одной точке.

Задача 17*. (*Теорема Брианшона*). Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

Задача 18. Докажите, что прямые, проведённые через общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей, пересекаются в одной точке (или параллельны друг другу).

Задача 19*. Даны точка A и две неконцентрические окружности S_1 и S_2.

а) Всегда ли найдётся окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная окружностям S_1 и S_2?

б) Как с помощью циркуля и линейки построить такую окружность (если она существует)?

Задача 20*. **а)** Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей в некоторый треугольник, d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что тогда

$$\frac{1}{R+d}+\frac{1}{R-d}=\frac{1}{r}.$$

б) Выведите из пункта а) большую теорему Понселе для $n=3$.

Задача 21*. **а)** Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей в некоторый четырехугольник, d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что тогда

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

б) Выведите из пункта а) большую теорему Понселе для $n=4$.

Листок №9. **Логика** 04.97

Задача 1. За день до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня Петин кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

Задача 2. Два школьника ведут наблюдения за погодой. Каждый делает наблюдения три раза в день — утром, днем и вечером. Если хотя бы в одно из наблюдений был дождь, первый школьник ставит «−», иначе он ставит «+». Если хотя бы в одно из наблюдений дождя не было, второй школьник ставит «+», иначе «−». Какие из четырех возможных оценок «++», «+−», «−+», «−−»действительно могут встретиться?

Задача 3. К школьникам из задачи 2 присоединился третий, который проводит наблюдения в то же время, что и первые два, и ставит «−», если по крайней мере во время двух наблюдений шел дождь, а во остальных случаях «+». Какие из восьми возможных оценок могут встретиться?

Задача 4. а) Является ли старейший шахматист среди музыкантов старейшим музыкантом среди шахматистов?

б) Является ли лучший шахматист среди музыкантов лучшим музыкантом среди шахматистов?

Задача 5. Среди математиков каждый десятый — музыкант, среди музыкантов каждый пятнадцатый — математик. Кого больше — математиков или музыкантов, и во сколько раз?

Задача 6. а) Триста человек построены в 30 шеренг и 10 рядов. Из каждой шеренги выбрали самого высокого человека, а из этих 30 человек выбрали самого низкого. Потом из каждого ряда выбрали самого низкого человека, а из этих 10 человек — самого высокого. Кто окажется выше: самый высокий из низких, или самый низкий из высоких?

б) Изменится ли ответ, если построить людей не прямоугольником, а углом: в первых пяти рядах по 10 человек, в следующих пяти — по 5 (см. рис. 1)?

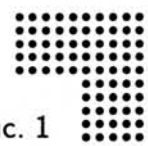


Рис. 1

Задача 7. Контрольная называется легкой, если на каждой парте найдется ученик, который решил все задачи. Сформулируйте определение трудной контрольной.

Задача 8. Рассмотрим два определения легкой контрольной:

а) В каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик.

б) В каждом варианте хотя бы один ученик решил все задачи.

Может ли контрольная быть легкой в смысле определения а) и трудной в смысле определения б)?

Задача 9. Пусть A и B обозначают какие-то два утверждения. Чертой над буквой будем обозначать отрицание соответствующего утверждения. Рассмотрим восемь теорем:

1. Если A, то B. 2. Если $\overline{A}$, то B. 3. Если A, то $\overline{B}$. 4. Если $\overline{A}$, то $\overline{B}$.

5. Если B, то A. 6. Если $\overline{B}$, то A. 7. Если B, то $\overline{A}$. 8. Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$.

Известно, что теорема 1 верна. Разбейте остальные теоремы на три группы: в первую включите теоремы, которые заведомо верны, во вторую — которые заведомо не верны, а в третью — которые могут быть верны, а могут быть и не верны (в зависимости от выбора утверждений A и B).

Условимся при этом не рассматривать в качестве A и B утверждения, которые всегда верны, или утверждения, которые всегда не верны, например, «В треугольнике все углы прямые», или «Сумма углов треугольника — 180 градусов».

Задача 10. Солдату-парикмахеру пришел приказ: брить тех солдат одной с ним части, которые не бреются сами. Сможет ли он его выполнить?

Задача 11. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными:

$\boxed{\text{Утверждение в рамке ложно}}$

$\boxed{\boxed{\text{Утверждение в двойной рамке истинно}}}$

Листок №10. Неравенства и оценки. 04.97

Задача 1. Что больше:
а) 5^{15} или 15^5? **б)** 2^{100} или 10^{30}? **в)** 7^8 или 8^7? **г)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. а) Докажите, что $a + 1/a \geqslant 2$ при всех $a > 0$.
б) Найдите наименьшее значение выражения $a + 9/a$.

Задача 3. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных a выполнены неравенства **а)** $(1+a)^n \geqslant 1 + na$; **б)** $(1+a)^n \geqslant 1 + an + a^2n(n-1)/2$.

Задача 4. Докажите, что существует натуральное число n такое, что
а) $(1,001)^n > 1000$; **б)** $(0,999)^n < 10^{-100}$; **в)*** $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$.

Задача 5. В банк кладётся 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет вкладчик получит больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы один раз в год или если он начисляет (5/12)% один раз в месяц?

Задача 6. Верно ли, что существует такое натуральное число n, для которого
а) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 0{,}1$? **б)** $\sqrt{n^2+n} - n < 0{,}1$?

Определение 1. Говорят, что неравенство выполнено при $n \gg 0$ (т. е. при всех достаточно больших n), если найдётся такое число $c > 0$, что это неравенство выполнено при всех $n > c$.

Задача 7. Докажите, что при всех натуральных $n \gg 0$
а) $2^n > n^{100}$; **б)** если $a > 1$ и b – натуральное число, то $a^n > n^b$.

Задача 8. Докажите неравенства:
а) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$; **б)** $|x-y| \geqslant |x| - |y|$; **в)** $|x-y| \geqslant ||x| - |y||$.
В каждом из случаев выясните, когда неравенство превращается в равенство.

Задача 9. Пусть $P(x) = x^n + \ldots$ и $Q(x) = x^m + \ldots$ — многочлены степеней n и m, причем $n > m$. Докажите, что $P(x) > Q(x)$ при $x \gg 0$.

Задача 10. Найдите такое натуральное число C, что при всех целых k выполняется неравенство $|k^3-2k+1|<C|k^4-3|$

Задача 11. Докажите, что для любого a неравенство $n!>a^n$ выполнено при $n\gg 0$.

Задача 12. Докажите, что для любого числа C выполнено неравенство $n^n>Cn!$ при $n\gg 0$.

Задача 13. **а)** Докажите, что $1/(n+1)+1/(n+2)+\dots+1/2n\geqslant 1/2$ при любом натуральном n;

б) *(Гармонический ряд)* Докажите, что для любого числа C найдется такое натуральное число n, что будет выполнено неравенство $1+1/2+\dots+1/n\geqslant C$.

Задача 14. Докажите, что $1/1^2+1/2^2+\dots+1/n^2\leqslant 2-1/n$ при любом $n\in\mathbb{N}$.

Задача 15. Докажите для всех положительных a и b и всех натуральных n неравенства **а)** $a^2/b\geqslant 2a-b$; **б)** $a^{n+1}/b^n\geqslant(n+1)a-nb$.

Задача 16. Докажите для всех натуральных n неравенства
а) $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\geqslant(1+\frac{1}{n})^n$; **б)** $2\leqslant(1+\frac{1}{n})^n\leqslant 4$; **в)*** $(1+\frac{1}{n})^n\leqslant 3$.

Задача 17. Докажите, что при любом натуральном числе n выполнено следующее неравенство: $(n/4)^n\leqslant n!\leqslant((n+1)/2)^n$.

Задача 18. Пусть $P(x)=x^{n_1}-x^{n_2}+x^{n_3}-x^{n_4}+\dots+x^{n_{2k+1}}$, где $n_1>n_2>\dots>n_{2k+1}$ — набор натуральных чисел. Докажите что $P(x)\geqslant 0$ при всех $x>0$.

Задача 19*. Рассмотрим выражение $\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. Найдите наименьшее значение этого выражения. При каких x и y оно достигается?

Задача 20*. Докажите, что найдётся такое натуральное n, что $\{\sqrt{n}\}=0,1997\dots$.

Листок №11. Предел последовательности 05.97

Определение 1. Говорят, что задана *последовательность* чисел x_1; x_2; x_3; ..., если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n. Другими словами, *последовательность* — это произвольная числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел. Обозначение: (x_n).

Задача 1. Изобразите следующие последовательности:
а) $x_n=n$; **б)** $x_n=1$; **в)** $x_n=(-1)^n$; **г)** $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$; **д)** $1;\frac{1}{2};1;\frac{1}{3};1;\frac{1}{4};\dots$;
е) $x_n=(n+1)/(2n+3)$; **ж)** $x_n=(n^2+1)/(2n+3)$; **з)** $x_n=(n+1)/(2n^2+3)$.

Определение 2. Пусть ε — произвольное положительное число. *ε-окрестностью* точки a называется интервал $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$. Обозначение: $U_\varepsilon(a)$.

Определение 3. Число a называют *пределом* последовательности (x_n), если для всякого $\varepsilon>0$ в ε-окрестности a содержатся почти все члены последовательности (т.е. все, кроме конечного числа). Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Говорят также, что (x_n) стремится к a при n, стремящемся к бесконечности (и пишут $x_n\to a$ при $n\to\infty$).

Задача 2. Докажите, что последовательность не может иметь более одного предела.

Задача 3. Какие из последовательностей задачи 1а)–д) имеют предел? Найдите эти пределы.

Определение 4. Число a называют пределом последовательности (x_n), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное N, что при любом $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$.

Задача 4. Докажите эквивалентность определений 3 и 4 (т.е. докажите, что число a является пределом последовательности (x_n) в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда a является пределом последовательности (x_n) в смысле определения 4).

Задача 5. Какие из последовательностей задачи 1е)–з) имеют предел? Найдите эти пределы.

Задача 6. Для каждой из следующих последовательностей (x_n) найдите число a, являющееся её пределом, и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ укажите какой-нибудь номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

а) $x_n = \frac{1}{n}$; **б)** $x_n = \frac{2}{n^3}$; **в)** $x_n = \frac{\sin n}{n}$; **г)** $x_n = \frac{1}{2n^2+n}$; **д)** $\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{8}; \frac{1}{5}; \frac{1}{16}; \frac{1}{7}; \ldots$.

Задача 7. а) Напишите, что значит, что число a не является пределом последовательности (x_n).

б) Напишите, что значит, что последовательность (x_n) не имеет предела.

Задача 8. Какие из следующих последовательностей имеют предел? Найдите эти пределы.

а) $x_n = (1,001)^n$; **б)** $x_n = (0,999)^n$; **в)** $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **г)** $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$;
д) $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$.

Задача 9. Найдите пределы следующих последовательностей, если они существуют (в пункте б) ответ будет зависеть от значений a и k, а в пункте в) — от q):

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}$, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$. **г)*** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Задача 10. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}$ (разберите все случаи, когда предел существует);
б)* $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

Листок №6д. Теорема Рамсея 05.97

Задача 1. а) Идёт Петя, а навстречу ему 5 человек. Докажите, что среди них найдутся либо 3 человека, знакомых с Петей, либо 3 человека, незнакомых с Петей.

б) Докажите, что в любой компании из 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых человека.

Задача 2. На планете Зям-лям 17 государств. Некоторые из них дружат между собой, некоторые враждуют, а некоторые нейтральны по отношению друг к другу.

а) Докажите, что каждое государство находится в одинаковых отношениях не менее чем с шестью другими.

б) Докажите, что на Зям-ляме есть либо тройка попарно дружественных, либо тройка попарно враждебных, либо тройка попарно нейтральных государств.

Задача 3. Планетная система Ух-ты состоит из 9 планет, каждая из которых обитаема. С незапамятных времён все планеты жили дружно. Но после того, как на Ух-ты побывали космические пираты Весельчак и Глот, некоторые планеты разорвали дипломатические отношения. Однако, среди любых 4-х планет некоторые две по-прежнему дружат между собой.

Системе Ух-ты угрожает вторжение сумчатых бегемотов, противостоять которому могут только объединённые силы 3-х планет. Докажите, что сумчатым бегемотам не одолеть систему Ух-ты.

Определение 1. Пусть m и n — натуральные числа, большие 1. Обозначим через $r(m,n)$ минимальное число с таким свойством, что в любой компании из $r(m,n)$ человек найдутся либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых человека.

Задача 4. Докажите, что: **а)** $r(m,2)=m$; **б)** $r(m,n)=r(n,m)$.

Задача 5. Докажите, что $r(m,n)\leqslant r(m-1,n)+r(m,n-1)$.

Задача 6. Докажите, что неравенство задачи 5 строгое, если оба числа $r(m-1,n)$ и $r(m,n-1)$ чётны.

Задача 7. Докажите, что: **а)** $r(3,3)=6$; **б)*** $r(3,4)=9$; **в)*** $r(4,4)=18$.

Задача 8. Докажите, что $r(m,n)\leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$ $(m\geqslant 2,\ n\geqslant 2)$.

В таблице справа указанны все известные к 1988-му году числа $r(m,n)$ (для $m\leqslant n$)

$m\backslash n$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23		36
4	9	18					

Определение 2. В некотором множестве A рассмотрим все его s-элементные подмножества ($s\in\mathbb{N}$). Раскрасим их в два цвета: чёрный и белый. Пусть m, n — натуральные числа, не меньшие s. Множество A назовём $(s;m,n)$-*хорошим,* если в нём можно выбрать либо m-элементное подмножество, все s-элементные подмножества которого чёрные, либо n-элементное подмножество, все s-элементные подмножества которого белые. Через $R(s;m,n)$ обозначим такое минимальное натуральное число, что любое множество с таким количеством элементов будет $(s;m,n)$-хорошим (независимо от раскраски).

Упражнение. Прочитайте определение 2 несколько (не менее пяти) раз.

Задача 9. Докажите, что: **а)** $R(1;m,n)=m+n-1$; **б)** $R(2;m,n)=r(m,n)$.

Задача 10. Через неделю президент должен назначить из числа парламентариев правительство из n человек. После этого правительство выберет (по своему усмотрению) из своего состава s человек в руководящий кабинет. Президенту грозит свержение одним из двух способов, к каждому из которых он может подготовиться за неделю, но не может подготовиться к двум сразу. Про любых s членов парламента президенту известно, какой способ свержения они предпочтут, если будут выбраны в руководящий кабинет. Свергнуть президента может только руководящий кабинет, и только если президент не успел подготовиться. Свержение может начаться сразу после избрания кабинета, но не ранее.

Докажите, что если парламент состоит из $R(s;n,n)$ человек, то президент может выбрать правительство так, чтобы свержение не удалось.

Задача 11. *(Теорема Рамсея)* Число $R(s;m,n)$ существует для любого натурального s и любых натуральных $m \geqslant s$, $n \geqslant s$. При $m,n > s > 1$ его можно оценить с помощью неравенства

$$R(s;m,n) \leqslant R(s-1; R(s;m-1,n), R(s;m,n-1)) + 1.$$

Определение 3. Говорят, что m точек на плоскости находятся *в общем положении,* если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.

Задача 12. а) Докажите, что среди любых 5 точек на плоскости, находящихся в общем положении, можно выбрать 4, являющиеся вершинами выпуклого четырёхугольника.

б) Докажите, что если среди m точек на плоскости, находящихся в общем положении, любые 4 являются вершинами выпуклого четырёхугольника, то все m точек являются вершинами выпуклого m-угольника.

в) *(Теорема Эрдёша-Секереша)* Докажите, что для любого натурального $m \geqslant 3$ существует наименьшее натуральное число $S(m)$ такое, что среди любых $S(m)$ точек плоскости, находящихся в общем положении, можно найти m точек, являющихся вершинами выпуклого m-угольника.

Задача 13. Докажите, что для любых натуральных m и n найдется такое число $T(m,n)$, что среди любых $T(m,n)$ точек на плоскости можно выбрать либо m точек в общем положении, либо n точек на одной прямой.

Задача 14. На плоскости нарисованы 19 кругов так, что среди любых 4-х кругов какие-то 3 имеют общую точку. Докажите, что есть 4 круга, имеющие общую точку.

Задача 15*. В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 7000 космонавтов. Известно, что среди любых 4-х из них можно выбрать 3, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что найдутся 5 космонавтов, любые 3 из которых составляют слаженный экипаж.

Задача 16*. Обобщите теорему Рамсея на случай трёх и более цветов.

Задача 17*. *(Теорема Шура)* Докажите, что для любого числа цветов m существует натуральное число n такое, что при любой раскраске чисел $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ в m цветов среди них найдутся 3 числа x, y, z одного цвета такие, что $x + y = z$.

Задача 18*. Эрдёш выдвинул гипотезу, что $S(m) = 2^{m-2} + 1$. (Определение числа $S(m)$ смотрите в задаче 12в). Докажите гипотезу Эрдёша[1] для $m = 5$.

Литература

[1] Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9-го класса средней школы (под ред. А. Н. Колмогорова). — М.: Просвещение, 1976

[2] Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975

[1]Этой гипотезе уже несколько десятков лет, но к началу 1995 г. она была доказана только для $m \leqslant 5$.

[3] Башмаков М. И., Беккер Б. М., Голохвост В. М. Задачи по математике. Алгебра и анализ. — М.: Наука, 1982 («Библиотечка «Квант», вып. 22)

[4] Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. — М.: Мир, 1965

[5] Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982 («Библиотечка «Квант», вып. 21)

[6] Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. Конкурсы по математике. — М.: ТЕИС, 1995

[7] Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика. //«Квант», 1974, №12, стр. 39 – 43.

[8] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1987

[9] Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969

[10] Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975

[11] Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1969

[12] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1972

[13] Волков М., Силкин Н. Кого послать на Марс? //«Квант», 1988, №8, стр. 51 – 57.

[14] Галочкин А. И. Числа и многочлены. Методические указания для учащихся. — М.: Моск. ун-т, 1988

[15] Рамсеевская теория графов. //«Квант», 1988, №4, стр. 14 – 20.

[16] Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы. — М.: Наука, 1965 («Библиотечка физико-математической школы». Серия «Математика». Вып. 3)

[17] Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. — Киров: АСА, 1994

[18] Грэхем Р. Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984

[19] Дополнительные главы по курсу математики 7 – 8 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся. Сост. Сикорский К. П. — М.: Просвещение, 1969

[20] Дополнительные главы по курсу математики 9 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся. Сост. Стратилатов П. В. — М.: Просвещение, 1970

[21] Дополнительные главы по курсу математики 10 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся. Сост. Скопец З. А. — М.: Просвещение, 1970

[22] Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1970 («Библиотечка физико-математической школы». Серия «Математика». Вып. 3*)

[23] Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977

[24] Избранные задачи. — М.: Мир, 1977

[25] Интервью с профессором Рональдом Грэхемом. //«Квант», 1988, №4, стр. 21 – 26.

[26] Кириллов А. А. Пределы. — М.: Наука, 1973 («Библиотечка физико-математической школы». Серия «Математика». Вып. 2*)

[27] Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. («Библиотека математического кружка», вып. 14)

[28] Коровкин П. П. Неравенства. — М.: Наука, 1983 («Популярные лекции по математике», вып. 5)

[29] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Наука, 1994

[30] Линейная алгебра и геометрия. — М.: Просвещение, 1967

[31] Оре О. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980 («Библиотечка «Квант», вып. 3)

[32] Математика и естествознание. — М.: Просвещение, 1969

[33] Математический анализ и алгебра. — М.: Просвещение, 1967

[34] Обучение в математических школах. — М.: Просвещение, 1965

[35] Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966 («Библиотека сборника «Математика»)

[36] Табачников С. Л. Геометрия уравнений. //«Квант», 1988, №4, стр. 10 – 16.

[37] Табачников С. Л. Многочлены. — М.: ФАЗИС, 1996 («Библиотека «Ступени знаний», серия «Математика»)

[38] Ткач М. В. Нові доведення деяких класичних нерівностей. //«У світі математики», 1995, том 1, вип. 2, ст. 37 – 41 (на укр. яз.)

[39] Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979 («Популярные лекции по математике», вып. 43)

[40] Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970

[41] Цыпкин А. Г., Пинский А. Н. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. — М.: Наука, 1989

[42] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1976 («Библиотека математического кружка», вып. 1)

[43] Яглом И. М. Геометрические преобразования, ч. I, II. — М.: Гостехиздат, 1955 – 1956. («Библиотека математического кружка», вып. 7, 8)

Материалы “Из истории преподавания математики”

Редакция предполагает публиковать интересные материалы, освещающие преподавание математики в прошлом. В настоящем номере мы приводим подборку задач из дореволюционных выпусков журнала “Математическое образование”; включены задачи как по элементарной, так и по высшей математике. Материал подготовили Н. В. Дубовицкая и В. М. Имайкин.

Задачи из старых выпусков “Математического образования”

1) [1] Если четырехугольник может быть одновременно вписан в один круг и описан около другого, то между радиусами кругов (R и r) и расстоянием их центров d существует соотношение:

$$(R+d)^{-2}+(R-d)^{-2}=r^{-2}.$$

2) Если между радиусами двух кругов и расстоянием их центров существует соотношение, данное в предыдущей задаче (напр. $R=35$, $r=24$ и $d=5$), то число четырехугольников одновременно вписуемых и описуемых неограниченно и произведение диагоналей таких четырехугольников есть величина постоянная.

3) Показать, что если члены арифметической прогрессии суть положительные целые числа, то, при нечетной разности прогрессии, сумма четырех последовательных членов не может быть точным квадратом.

4) Показать, что ни в одной арифметической прогрессии с рациональными членами произведение четырех последовательных членов не может быть точным биквадратом.

5) В треугольник ABC вписаны три окружности так, что они касаются вписанной окружности и двух сторон треугольника. Если их радиусы суть s_a, s_b, s_c, то

$$s_a+s_b+s_c=r,$$
$$\frac{1}{\sqrt{s_as_b}}+\frac{1}{\sqrt{s_bs_c}}+\frac{1}{\sqrt{s_cs_a}}=\frac{1}{r},$$

[1] Внимательный читатель заметит, что эта задача содержится в серии задач одного из листков предыдущего материала. Тем не менее нам кажется интересным поместить ее и в этом разделе – она была опубликована в одном из выпусков “Математического образования” за 1912 год, со ссылкой на английский журнал “Lock and Child”.

$$S = r^3 \cdot \sqrt{\frac{r}{s_a s_b s_c}},$$

r – радиус вписанного круга.

6) Доказать, что стороны треугольника, имеющего вершинами центры тяжести треугольников ABH, BCH, CAH, где H – какая угодно точка в плоскости треугольника ABC со сторонами a, b, c, соответственно равны $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{3}$.

7) Определить число равнобедренных треугольников, которые могут быть составлены с помощью отрезков длиною в 1, 2, 3, ... n дюймов.

8) Показать, что если число представляет собою сумму четырех квадратов, то квадрат его можно представить в виде суммы четырех квадратов и в виде суммы пяти квадратов.

9) Дано уравнение

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{ctg} y = x^3 + 3x;$$

показать, что производная $\frac{dy}{dx}$ есть рациональная функция от x.

10) В эллипсе, уравнение которого относительно прямоугольных осей координат есть $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, провести параллельно бóльшей оси AB хорду CD так, чтобы трапеция ACDB имела наибольшую площадь.

11) Определить все системы действительных значений x и y, при которых выражение $(x + yi)^3$ действительно и более 8, и, проведя прямоугольные оси координат, построить точки, для которых эти значения служат координатами.

12) В данный эллипс вписан прямоугольник, вершинами которого служат точки, обладающие тем свойством, что расстояние каждой из них до центра эллипса есть среднее пропорциональное между расстояниями ее же до фокусов. Вычислить площадь этого прямоугольника и сравнить ее с площадью наибольшего прямоугольника, который может быть вписан в данный эллипс.

13) Решить в целых числах уравнение

$$x^2 - y^3 = 1.$$

14) Показать, что произведение двух чисел, из которых каждое есть сумма n квадратов, может быть представлено в виде суммы $(1 + C_n^2)$ квадратов.

15) Решить в целых числах уравнение

$$x^4 + y^4 + 2 = 4xy.$$

16) Провести в данном направлении к двум данным окружностям секущую, определяющую в окружностях две равные хорды.

17) Провести в данном направлении прямую так, чтобы разность квадратов ее расстояний от данных точек A и B была равна квадрату данного отрезка k. (Решение требуется чисто геометрическое.)

18) Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе острого угла.

19) Доказать, что на направлении равнодействующей двух сходящихся сил существует точка, обладающая тем свойством, что при повороте этих сил около их точек приложения на один и тот же произвольный угол, равнодействующая всегда будет проходить через эту точку (теорема Мёбиуса).

20) Найти производную функции

$$y = \arcsin x + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

и объяснить результат.

21) Доказать теорему: если в треугольной пирамиде один из плоских углов при вершине – прямой и высота ее проходит через точку пересечения высот основания, то и прочие углы при вершине – прямые.

22) Основанием пирамиды SABCD служит прямоугольник ABCD, а длины ребер SA, SB, SC и SD измеряются целыми числами. Найти общие выражения для этих чисел.

23) Решить уравнения:

$$\text{a)}\, x^4 + 4x - 1 = 0,\ \text{b)}\, x^4 - 4x^3 - 1 = 0.$$

24) Решить уравнение:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

25) Показать, что при N целом и большем 2

$$N^{N+1} > (N+1)^N.$$

26) Показать, что если a, b и c – числа, большие 1, то

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) > 16abc.$$

Турнир имени Ломоносова 1996 года

Популярное многопредметное соревнование московских школьников - Турнир имени М. В. Ломоносова - стало уже традиционным. Подробный отчет о Турнире 1996 года подготовлен сотрудниками Информационного Центра Турнира Городов (ИЦТГ) под руководством Н. Н. Константинова.

В Москве есть давняя хорошая традиция — представители разных наук ищут свой резерв, готовят свою будущую смену среди школьников. Для этого проводятся вечерние школы, кружки при вузах, предметные олимпиады и другие мероприятия, цель которых — помочь любознательным старшеклассникам правильно найти свою любимую профессию.

Представители разных наук конкурируют между собой за души учащихся. В конечном счете все они делают общее дело, и чем больше разных предметов, тем меньше шансов, что выбор профессии будет случайным.

Но есть в Москве одно школьное соревнование, которое представители различных наук проводят совместно. Это — Турнир им. М.В.Ломоносова. Книжка, которую Вы держите в руках, рассказывает о том, как проводился Турнир в 1996–97 учебном году.

Учащиеся были приглашены в один из нескольких вузов. Турнир проходил в этих вузах одновременно, и его программа была в них почти одинакова. Проводилось несколько конкурсов по различным предметам — математике, физике, химии, биологии, истории, лингвистике, астрономии, геофизике. Каждый учащийся мог принять участие в одном конкурсе или в нескольких — по своему выбору. Задание в каждом из конкурсов было рассчитано на час или полтора. После Турнира проводилось награждение победителей, причем отмечались как хорошие выступления по отдельным конкурсам, так и совокупное хорошее выступление по нескольким предметам (грамота за выступление в многоборье). Но главное — это не грамоты, а те приглашения, которые учащиеся получали после Турнира в различные предметные кружки.

О месте и времени проведения Турнира в 1997-98 учебном году будут извещены все школы. Оргкомитет турнира им. М.В.Ломоносова просит директоров школ и учителей оповестить учащихся о Турнире, а учащихся, которые узнают о Турнире от знакомых — сообщить о нем своим учителям.

Оглавление

Задачи

Лингвистика

Задачи по лингвистике и их решения предоставлены оргкомитетом Традиционной Олимпиады по лингвистике и математике, организуемой совместно отделением теоретической и прикладной лингвистики МГУ и факультетом теоретической и прикладной лингвистики РГГУ.

1. (автор В.А.Плунгян). Даны болгарские существительные и их переводы на русский язык в перепутанном порядке:

осигуровка, разтривач, отварачка, спирка, разтривка, спирачка;
массаж, штопор, остановка, страхование, тормоз, массажист.

А: Установите правильные переводы.
Б: Определите что могут значить следующие болгарские слова:

носач, играчка.

Кратко поясните свое решение.

2. (авторы А.А.Кибрик и С.А.Старостин). Даны словосочетания на древнекитайском языке (в латинской транскрипции) и их переводы на русский язык:

rāu bōk gu — враг старого раба;
rāu gu bōk — раб старого врага;
gu rāu bōk — старый раб врага.

Известно, что слова в словосочетании древнекитайского языка располагаются согласно определенным, всегда обязательным правилам.
А: Определите как на древнекитайский язык переводятся слова

старый раб враг

Б: Переведите на древнекитайский язык:

старый враг
старый раб
раб врага

В: Сформулируйте правила расстановки слов в словосочетании древнекитайского языка.
Примечание: Черточка на гласной обозначает ее долготу.

3. (автор Г.Г.Яровая). Перед вами шуточное стихотворение, которое мы воспроизводим, переставив строки произвольным образом (кроме того, начальная заглавная буква той строки, которая была первой, заменена на строчную).

я видел дома над землей в вышине
я видел комету с лицом дождевым
я видел бочку с головку спички
я видел солнце в двенадцать ночи
я видел павлина с хвостом огневым
я видел репу по кочке ползущую
я видел глаза с очагом в глубине
я видел речку пивом бурлившую
я видел того кто все видел воочию
я видел слезы на кукольном личике
я видел улитку сома проглотившую
я видел тучу на грядке растущую

Задание: Установите правильный порядок слов и объясните почему строки должны быть расположены именно в такой последовательности.

Примечание: Текст приводится без знаков препинания, так как они отсутствуют в оригинале.

Физика

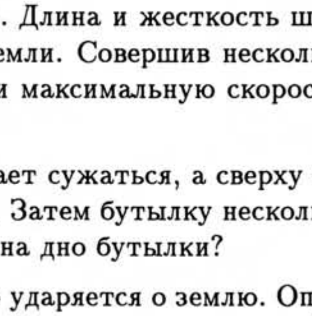
1. С вышки высоты H прыгает каскадер, привязанный шнуром. Длина и жесткость шнура подобраны так, что каскадер останавливается у самой земли. Совершив несколько колебаний, каскадер зависает над землей на высоте L. Найти максимальную скорость, которую имел каскадер во время прыжка.

2. В бутылку наливают воду до того места, где бутылка начинает сужаться, а сверху наливают керосин (керосин легче воды и не смешивается с ней). Затем бутылку несколько раз встряхивают и ставят на место. Как изменится давление на дно бутылки?

3. Шарик от пинг-понга падает с Останкинской башни и упруго ударяется о землю. Определите ускорение шарика сразу после отрыва от Земли. Качественно нарисуйте график зависимости ускорения от времени.

4. Узкая плоская пластинка длины L лежит на горизонтальном шероховатом столе. Пластинку начинают вращать с постоянной небольшой скоростью, прикладывая усилие (пальцем) сбоку у одного из концов пластинки. Определите, где находится точка, вокруг которой вращается пластинка.

5. Рассмотрим такую модель часов. Луч света последовательно отражается от двух зеркал, расположенных параллельно на расстоянии L. Каждый раз, когда луч отражается от зеркала II, срабатывает электронная схема, увеличивающая показания часов на $2L/c$, c — скорость света.



   Покажите, что если придать этим часам некоторую скорость v в направлении, параллельном плоскости зеркал, то скорость хода часов уменьшится, и найдите, во сколько раз (это — известное «релятивистское сокращение времени»). (Напоминание: скорость света в любой системе отсчета одинакова и равна $c = 300000$ км/сек).

6. Как известно, в лунную ночь на воде образуется световая дорожка (там, где должно быть отражение луны). Объясните (качественно) ее форму. Как зависит ее ширина от высоты волн (или ряби) на воде?

7. Перед вами штангенциркуль. Определите (с его помощью) какому цвету — красному или зеленому соответствует меньшая длина волны света.
   Примечание: Одним из первых, кто высказал идею о том, что цвет определяется длиной волны, был Л.Эйлер. Он считал, что красному свету соответствует меньшая длина волны, чем зеленому. Придумайте простой способ проверки этого. Прав ли был Эйлер?

История

Задачи

1. Перечислите известных вам египетских фараонов (не более 10 человек). В какой последовательности они правили? Чем прославился каждый из них?
2. В каких исторических событиях сыграли решающую роль Г.К.Жуков и И.С.Конев?
3. Постройте цепочку из общих знакомых между собой и М.В. Ломоносовым.
4. Перечислите самых знаменитых ученых-москвичей XX века. Какие открытия они совершили, и когда?
5. Перечислите тех деятелей XII–XX веков (по одному из каждого века), которые более всего повлияли на судьбу Москвы. Какие поступки этих людей имели особое значение?
6. Какие города (кроме Москвы и Петербурга) могли бы быть сейчас столицами России, если бы в прежние века некоторые события не произошли, или имели иной исход? Перечислите эти события и эпохи.
7. Перечислите тех современников Тимура Хромого, на жизнь которых он оказал значительное влияние. В чем оно проявилось?
8. Назовите известных вам руководителей русской церкви в XI–XVIII веках (не более 10 человек). Какими поступками прославились эти люди?
9. Перечислите географов-землепроходцев, чьи имена остались на карте Земли (по ОДНОМУ от каждого НАРОДА). В какие века они жили, и что названо в их честь?
10. Упорядочите по временам жизни 10 (или меньшее число) героев из различных пьес Шекспира.
11. Какие знаменитые индейские вожди вам известны? Когда они жили? Из каких племен происходили? Какими делами прославились?

ИВАН ГРОЗНЫЙ (текст с ошибками)

Вербное воскресенье лета 7077 выдалось в Вологде теплым и погожим. Князь Иван Васильевич отдыхал от трудов праведных. Вот уже третий год, как он оставил буйную Москву во власти царя Симеона Бекбулатовича — сам же удалился в северные леса с горстью верных монахов и опричников. Тридцатилетнее правление его на Москве завершилось удачно. Мирно покорилась царю Ливония; река Нарова перестала быть военным рубежом, превратившись в главные морские ворота России. Король Юхан Шведский и английская королева Мария Стюарт прислали в Москву послов напрямик — через Балтику, вместо прежнего трудного пути через Белое море и Ледовитый океан. Римский кесарь Рудольф признал, наконец, московского царя ровней себе — после того, как его воевода Стефан Баторий был наголову разбит под Псковом, а поляки предложили царю Ивану древний венец Ягеллонов.

Иван тогда отказался; зачем россиянам лезть со своим уставом в чужой монастырь? Негоже православному царю властвовать над католиками; а принуждать их к православию бесполезно и опасно. Это приведет Россию к войне со всей Европой — Московии же нужен мир и торговля с хитроумным Западом. Иное дело — Восток; там Россия должна перенять все наследство Золотой Орды, вплоть до Амура и Восточного океана! Первый шаг в ту сторону сделал дед и тезка Ивана, подчинив Казань. Отец — Василий Темный покорил Астрахань и Крым и заставил местных ханов креститься. Одного из них царь Иван назначил своим преемником на московском престоле, наказав ему посылать гулящих людей в Сибирь: пусть приводят бурят и якутов под руку единокровного им и единоверного Руси московского царя?

Сам Иван подумывал тогда: не уйти ли в монастырь, вслед за храбрым воеводой Андреем Курбским и праведным дьяком Сильвестром Адашевым? Не была ли внезапная смерть единственного царского сына указанием перста Божьего: пора роду Даниловичей, получившему высшую власть из рук литовцев-Гедиминовичей, передать венец новой царской династии? Но что-то удержало тогда царя от необратимого шага: он лишь удалился в родную Вологду, сменив царский венец на соболью шапку удельного князя. Как-то примет Москва нового правителя из колена Батыева?

Три года все было тихо на Руси. Но страстная неделя лета 7077 оказалась роковой. Крымский хан Ахмед Петрович из рода Ногаев, сговорившись с турецким султаном Селимом, восстал против Москвы. Если один Чингизид сидит на московском троне — почему его не может сменить другой потомок Батыя? Пограничная стража прозевала набег крымчаков; они беспрепятственно перешли Оку, подошли к Москве и подожгли ее. Царь Симеон струсил и сбежал куда-то; воевода Василий Шуйский едва сумел отстоять Кремль с помощью итальянского пушкаря Понтуса Делагарди.

Неслыханное за сто лет поражение московской рати от татар вызвало чреду мятежей по всей Руси. Князь Владимир Старицкий восстал в Твери; ему помог бывший митрополит Филипп Колычев, сосланный царем Иваном в Отрочь монастырь и теперь вышедший из затвора. Новгородцы тут же выгнали московского посадника, пригласив к себе на княжение Михаила Шаховского из Литвы. Киевляне завели тайные переговоры с Польшей, делая вид, будто события в Москве их не касаются. Только смоляне и нижегородцы, сознавая себя щитами Руси на западе и на востоке, сохранили российское единство. Накануне Пасхи их послы прибыли в Вологду к бывшему царю Ивану с требованием: Приди и спаси отечество, отданное тобою в недостойные руки!

Так началось второе правление царя Ивана на Руси — недолгое, но кровавое, принесшее ему прозвище Ивана Грозного. Восставшая Тверь была разорена вновь, как во времена Калиты; ее судьбу разделил вольный Новгород. К счастью, возвращение Ивана на отчий трон разом погасило многие мелкие бунты в русских городах. Страна воссоединилась раньше, чем соседи успели усугубить своим вмешательством русскую смуту. Тем не менее, царь Иван сознавал себя недостойным пастырем перед лицом Господа. После окончания усобиц он предложил Земскому собору избрать нового владыку Руси — своего наследника. Им стал доблестный воевода Василий Шуйский, венчанный на Московское царство в день Покрова лета 7080 — ровно через сто лет после свержения ордынского ига над Русью. На следующий день царь Иван постригся в монахи и удалился в скит преподобного Нила Сороского, где и кончил свои дни спустя немного лет.

Математика

7–9 классы

1. Из горячего крана ванна заполняется за 23 минуты, из холодного — за 17 минут. Маша открыла сначала горячий кран. Через сколько минут она должна открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды налилось в 1,5 раза больше, чем холодной?

2. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. В каком отношении биссектриса угла ABC делит сторону CD?

3. На каждом километре шоссе между селами Елкино и Палкино стоит столб с табличкой, на одной стороне которой написано, сколько километров до Елкино, а на другой — до Палкино. Боря заметил, что на каждом столбе сумма всех цифр равна 13. Каково расстояние от Елкино до Палкино?

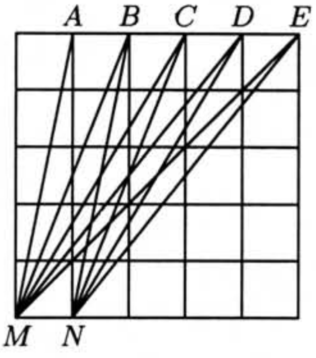
10–11 классы

1. Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

2. В круге провели несколько (конечное число) различных хорд так, что каждая из них проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

3. Существует ли выпуклый многогранник, имеющий 12 ребер, которые соответственно равны и параллельны 12 диагоналям граней куба?

Дополнительные задачи.



1. Найдите сумму величин углов MAN, MBN, MCN, MDN и MEN, нарисованных на клетчатой бумаге так, как показано на рисунке.

2. Дан бумажный круг. Можно ли с помощью ножниц разрезать его на несколько частей, из которых складывается квадрат той же площади? (Резать разрешается по прямым и дугам окружностей).

3. На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших стоили вчера, а две большие и одна маленькая сегодня — столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Можно ли по этим данным выяснить, что дороже: одна большая и две маленькие сегодня, или пять маленьких вчера?

4. Петя разрезал прямоугольный лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Затем он проделал то же самое с одним из трех получившихся кусков и т.д. Докажите, что после достаточного количества разрезаний можно будет выбрать среди получившихся кусков 100 многоугольников с одинаковым числом вершин (например, 100 треугольников или 100 четырехугольников и т.д.).

Химия

1. Кусочек мела массой 50 г прокалили и остаток вещества растворили в 1 литре воды. Через этот раствор при комнатной температуре был пропущен хлор, полученный при взаимодействии 250 мл 20% раствора HCl ($\rho = 1{,}1\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$) с избытком пермаганата калия.

   а) Какие вещества содержатся в растворе?

   б) Оцените содержание в нем основного продукта реакции (масс. %).

   в) Определите массовую долю карбоната кальция в исходном кусочке мела, считая, что хлор прореагировал полностью.

2. При сжигании неизвестного вещества в кислороде образовалось 3,6 мл воды и 2,24 л азота (н.у.). Относительная плотность паров этого вещества по водороду равна 16. Определите молекулярную формулу вещества. Какими свойствами оно обладает? Где используется?

3. Определите, сколько граммов 10%-го раствора оксида серы (VI) в чистой серной кислоте и 60%-го раствора серной кислоты необходимо для приготовления 480 г 90%-го раствора кислоты.

4. Для полного сгорания некоторого органического вещества потребовалось в два раза меньше кислорода, чем для полного сгорания следующего члена гомологического ряда. Какие это могут быть соединения?

5. Четыре химических элемента обозначены буквами A, B, C, D. Подберите такие реакции, которые можно зашифровать следующим образом:

   а) $2CA + A_2 = 2CA_2$;

   б) $D_4C_3 + 6B_2A = 3CB_4 + 2D_2A_3$;

   в) $CB_2A_2 + CB_4A = C_2B_4A_2 + B_2A$.

6. Металлическая пластинка массой 50 г после пребывания в растворе соляной кислоты уменьшилась в массе на 1,68%, при этом выделилось 0,336 л газа. Из какого металла может быть изготовлена пластинка?

7. Как изменится скорость реакции между молекулами оксида азота (II) и кислорода, если в герметичном сосуде, заполненном смесью этих газов в соотношении 2 : 1, увеличить давление в 3 раза?

Биология

1. Почему кузнечик может своей ногой поднять вес в 15 раз больше своего веса, а человек только такой же вес как и его собственный?

2. Какие из названных растений относятся к семейству крестоцветные (I), розоцветные (II), бобовые (III), пасленовые (IV), сложноцветные (V), лилейные (VI), злаковые (VII)?

1 — чеснок,
2 — белена черная,
3 — бодяк полевой,
4 — василек,
5 — гулявник лекарственный,
6 — гравилат речной,
7 — дурман обыкновенный,
8 — ежа сборная,
9 — земляника,
10 — икотник серо-зеленый,
11 — клевер,
12 — венерин башмачок,
13 — кульбаба осенняя,
14 — лапчатка прямостоячая,
15 — лисохвост,
16 — мятлик,
17 — нивяник,
18 — паслен сладко-горький,
19 — пастушья сумка,
20 — петунья гибридная,
21 — пижма обыкновенная,
22 — помидор,
23 — редька дикая,
24 — роза,
25 — соя,
26 — тимофеевка,
27 — тюльпан,
28 — фасоль,
29 — чина лесная,
30 — шиповник,
31 — ярутка полевая.

3. Существует ли в природе вампиры? Если да, то кто они? Каким образом вампиры добывают себе корм? Чем опасны вампиры?

4. Какие вы знаете напитки, приготовленные с помощью дрожжей?

5. Попробуйте определить, о каких птицах идет речь и чем они питаются?

   а. Птица эта осторожна и близко к себе не подпускает. Голос у нее резкий, неприятный, хотя сама отличается завидной красотой. У сгиба крыла ярко-голубые перья с черным ободком, на голове выделяются черные «усы», великолепны также черный хвост и концы крыльев. Грудь, брюшко и спинка приятного буровато-рыжеватого цвета. Перья головы удлинены и образуют округлый хохолок, который птица поднимает, если чем-то встревожена.

   б. Целыми днями летают родители над полями, дорогами (перед дождем) в поисках корма. Их потомство довольно неплохо летает, но добывать корм еще не умеет. Весь день сидят птенцы на проводах, греются на солнышке. Хвосты у них вильчатые.

6. Решите, какие из нижеприведенных суждений правильны. Выпишите их номера.

   а. Любой цветок имеет лепестки и чашечку.
   б. Пестик может быть и без столбика.
   в. Плод груши называется яблоком.
   г. У цветка тюльпана и чашечка, и венчик имеют яркую окраску.
   д. На одном растении тыквы бывают как пестичные, так и тычиночные цветки.
   е. Цветок ландыша имеет простой венчиковидный околоцветник.
   ж. Ива, как и кукуруза, растение однодомное.
   з. У малины плод ягода.
   и. Из завязи развивается семя.
   к. По внешнему краю цветка ромашки расположено много крупных лепестков.

7. Мхи — наиболее примитивные из высших растений, имеющие некоторые общие признаки с многоклеточными зелеными водорослями. Цикл развития их можно представить в виде следующей схемы: (см. рис 1).

   Расставьте число хромосомов (n — гаплоидное, $2n$ — диплоидное), характерное для каждой стадии развития.

Рис. 1. Цикл развития мха

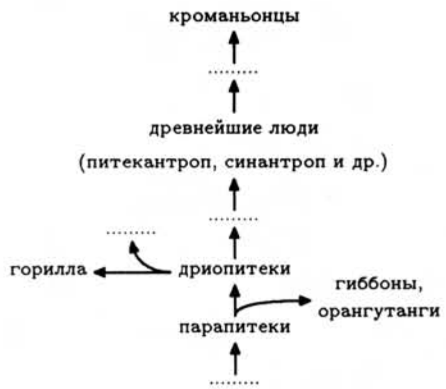


Рис. 2. Дерево эволюции человека

8. Какие органы закладываются из каких зародышевых листков у позвоночных животных?
9. Заполните недостающие звенья в дереве эволюции человека: (см. рис. 2).
10. Какие химические вещества получили названия от растений?

Астрономия

1. Когда люди построили самые первые обсерватории? Зачем им это понадобилось?
2. Вы смотрите на небо. Как отличить звезду от планеты?
3. Какие созвездия самые древние? Почему?
4. Говорят: "Светит, а не греет". Кто это? А бывает ли наоборот?
5. Случайно ли расположены планеты? Почему они разные? Почему у одних много спутников, а у других совсем нет?
6. Кто на небе хочет казаться са-а-мым большим, а сам-то совсем маленький?
7. Почему мы не видим, как рождаются звезды?
8. В космосе нашли много разных молекул. Откуда они?

Геофизика

1. Почему небо днем голубое?
2. Почему у летних облаков плоский низ на одной высоте?

3. Как и почему образуются озоновые дыры?
4. Мыс Доброй Надежды всегда пользовался у моряков дурной славой. Как это можно объяснить?
5. Некто предложил растопить Антарктиду. Хорошо ли это?
6. Есть ли на других планетах моря и океаны? А вулканы?
7. Как образовались крупные формы планетарного рельефа?
8. Как связаны между собой микроэлементы и микроорганизмы?
9. Какие горные породы возникли при участии живых организмов?
10. Какая катастрофа произошла на Земле 60 млн. лет назад? Какие существуют опасности для человечества в целом?

Решения

Лингвистика

1. Как и во всех задачах такого рода, будем исходить из того, что закономерности формального устройства слов в иностранной части соответствуют закономерностям содержательного устройства слов в русской части; иначе говоря, болгарская «морфологическая таблица» должна однозначно наложиться на русскую «семантическую таблицу».

Попробуем построить и ту и другую:

1)

осигуров-ка		
разтрив-ка	*разтрив-ач*	
		отвар-ач-ка
спир-ка		*спир-ач-ка*

2)

массаж		*массажист*
	штопор	
остановка	*тормоз*	
страхование		

В предложенном варианте соответствие устанавливается однозначно; следовательно, правильными переводами будут: *разтривач — массажист, разтривка — массаж, отварачка — штопор, спирачка — тормоз, спирка — остановка, осигуровка — страхование.*

Все болгарские слова, представленные в задаче, содержат (в отличие от их русских переводов) по крайней мере один суффикс, что и дает возможность построить нашу таблицу. Эти суффиксы присоединяются к основам глаголов (что видно при сравнении болгарских и русских корней) и имеют каждый свое значение, для установления которого мы должны обратиться к русской части, попытавшись выделить в ней три группы существительных. Сделать это можно, по-видимому, единственным способом — так, как показано (разумеется, частичное сходство болгарских и русских корней оказывает нам некоторую помощь, но не является определяющим: так, полезно сопоставить основу *разтрив-* с русским *растирать*, основу *спир-* с русским *спертый*, *спирать* «давить, теснить; ограничивать»).

Далее, таким образом, выясняется, что в болгарском языке суффикс *-ка* оформляет общие названия действий («то, когда делают» — как и в русском, ср. *строй-ка*, *останов-ка*), суффикс *-ач* — названия (профессиональных) деятелей («тот, кто [обычно, в силу профессии] делает»: ведь далеко не всякий, кто тебя массирует, имеет право называться массажистом; в русском языке с этим суффиксом находим только отыменные производные типа *скрип-ач*, *труб-ач*; вспоминается хлебниковский *смех-ач*, образованный именно по этой — «южнославянской» — модели; ср. также распространенную на Балканах фамилию *Ковач*, т. е. «кузнец»); наконец, суффикс *-ачка* (морфологически составной, но семантически, видимо, нечленимый) оформляет отглагольные названия «инструментов» («то, чем [обычно] делают»; в русском языке этот суффикс встречается только в загадочном слове *кусачки*).

Зная все это, нетрудно выполнить и второе задание: *носач* — производное от глагола (NB!) с корнем *нос-*, имеющее значение «тот, кто [обычно, в силу профессии] носит»; предполагая сходство в значениях болгарского и русского корней (иной возможности у нас просто нет), получаем возможный перевод *носильщик*. Аналогично, *играчка* — производное от глагола с корнем *игр-*, имеющее значение «то, чем [обычно] играют» — в русском языке такая вещь называется *игрушка*.

Предложенное решение учитывает все особенности данных задачи и содержит наименьшее число противоречий по сравнению с другими (в принципе, возможными, но заведомо более фантастическими) предположениями. Например, если мы примем, что *носач* — это «человек с большим носом» (что было бы естественнее с точки зрения русского языка), то это войдет в противоречие сразу с двумя фактами болгарского языка: с тем, что основы при суффиксах представлены только глагольные и, главным образом, с тем, что суффикс *-ач* должен указывать на профессию, занятие, а не на обладание какими-то особыми свойствами.

2. Сразу же бросается в глаза, что слова в древнекитайских словосочетаниях не изменяются (русским морфологическим вариантам типа «старый — старого», «раб — раба» соответствуют всего три древнекитайские формы: rāu, bōk и gu). Это может означать только то, что все различные типы отношений между этими словами выражаются исключительно порядком слов. А раз так, мы вправе ожидать однозначных соответствий между синтаксическими позициями в русских и китайских словосочетаниях.

   Исходя из этого, нужно сперва обратить внимание на тот факт, что в словосочетаниях 1 и 2 слово «старого» стоит в одной и той же позиции (определение к зависимому слову), в то время как слова «враг» и «раб» своими позициями «меняются». Аналогично, в соответствующих древнекитайских словосочетаниях мы видим «неподвижное» слово rāu, в то время как bōk и gu также меняются местами. Можно предположить, таким образом, что значение слова rāu — «старый». Более того, можно также уверенно сформулировать одно из правил расположения слов в древнекитайских словосочетаниях, а именно, что прилагательное в роли определения предшествует определяемому слову (действительно, независимо от того, какое из двух слов bōk и gu обозначает «врага», а какое — «раба», определение «старый» в любом случае стоит перед обоими).

   Перейдя к разбору словосочетания 3, нетрудно убедиться в том, что слово bōk имеет значение «раб». Поскольку оно и только оно следует в этом словосочетании за словом rāu, то, согласно сформулированному выше правилу, оно не может означать «враг»; в противном случае будет нарушен принцип обязательности, поскольку в словосочетаниях 1 и 2 определение будет предшествовать определяемому, а в словосочетании 3 — следовать за ним, что недопустимо.

Слову gu, таким образом, по принципу остатка автоматически приписывается значение «враг».

Теперь, когда значения всех трех слов установлены, нетрудно сформулировать все основные правила расстановки слов древнекитайских сочетаниях: а) определение всегда предшествует определяемому слову; б) то же самое относится и к притяжательной конструкции, где зависимый член всегда стоит перед главным.

Словосочетания из задания Б переводятся следующим образом: rāu gu, rāu bōk, gu bōk.

3. «Секрет» этого стихотворения такой: вторая часть каждой строки образует осмысленное выражение с первой частью следующей строки. Таким образом, восстанавливаем порядок строк оригинала:

   Я видел павлина с хвостом огневым
   я видел комету с лицом дождевым
   я видел тучу на грядке растущую
   я видел репу по кочке ползущую
   я видел улитку сома проглотившую
   я видел речку пивом бурлившую
   я видел бочку с головку спички
   я видел слезы на кукольном личике
   я видел глаза с очагом в глубине
   я видел дома над землей в вышине
   я видел солнце в двенадцать ночи
   я видел того кто все видел воочию

   Комментарий. Это стихотворение — перевод английского стихотворения «I saw a peacock with a fiery tail», которое было придумано для обучения детей пунктуации. Если правильно расставить запятые (и сделать в соответствующих местах паузы при чтении), то стишок из бессмысленного превращается в абсолютно логичный.

Физика

1. Скорость каскадера будет максимальной в тот момент, когда будет максимальной его кинетическая энергия. Кинетическая энергия в каждый момент времени равна работе, совершенной над каскадером внешними силами к этому моменту. Внешними силами, которые следует учитывать в этой задаче, являются сила тяжести и сила упругости шнура. Пусть длина шнура равна l, жесткость k, масса каскадера m, ускорение свободного падения g. Если обозначить через x расстояние от вершины вышки, которое пролетел каскадер к данному моменту времени, то работа силы тяжести к этому моменту равна mgx, а работа силы упругости пружины $-\frac{kx^2}{2}$. Работа силы упругости отрицательна, поскольку эта сила направлена против движения каскадера. Получаем выражение для энергии каскадера

$$\frac{mv^2}{2} = mgx - \frac{k(x-l)^2}{2} = -\frac{k}{2}\left(x - \left(\frac{m}{k}g + l\right)\right)^2 + \frac{m^2g^2}{2k} + mgl.$$

Значение этого выражения максимально и равно $\frac{m^2g^2}{2k} + mgl$, когда $x - (\frac{m}{k}g + l)) = 0$, то есть

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{m^2g^2}{2k} + mgl.$$

Откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{m}{k}g^2 + 2gl}$$

Осталось выразить неизвестные нам здесь величины через данные задачи. Для этого перепишем условия задачи в виде уравнений, содержащих эти искомые величины. То что каскадер останавливается у самой земли, означает, что работа внешних сил равна 0, когда растяжение шнура равно $H - l$, то есть

$$0 = -\frac{k(H-l)^2}{2} + mgH.$$

То что в конце концов каскадер зависает на высоте L от земли, означает, что на этой высоте сила упругости шнура равна силе тяжести, то есть

$$k(H - L - l) = mg.$$

Для удобства вычислений обозначим $u = \frac{k}{m}$. Тогда наши условия можно переписать как два уравнения

$$\frac{u(H-l)^2}{2} = gH, \quad u(H - L - l) = g$$

относительно двух неизвестных l и u. Решив эту систему и подставив решение в выражение для максимальной скорости, получим ответ:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g^2}{u} + 2gl} = g(H - L + \sqrt{2H(L - H/2)}).$$

2. Выберем столбик жидкости от поверхности до дна бутылки. До встряхивания такой столбик складывается из столбика чистой воды и столбика керосина над водяным столбиком. Давление на дно после встряхивания изменится так, как изменится вес выбранного столбика, который при тех же размерах теперь будет состоять из смеси воды и керосина. Итак, выясним, станет этот столбик легче, или тяжелее. Для начала представим, что горлышко очень узкое. Тогда доля керосина в смеси с водой будет очень мала, и вес нашего столбика практически станет равен весу столбика из чистой воды. Этот столбик будет настолько тяжелее исходного составного столбика, насколько вес керосинового столбика меньше веса столбика из воды, который заменил его в горлышке после встряхивания. Значит, давление на дно увеличится. После этого остается заметить, что вес столбика из смеси воды и керосина может сравняться с весом составного столбика до встряхивания, только когда ширина горлышка станет равной ширине бутылки.

3. Шарик очень легкий, поэтому нужно учесть сопротивление воздуха его движению, так же, как это необходимо для падения в воздухе легкого перышка. Поскольку сопротивление воздуха растет с ростом скорости предмета в воздухе, то, падая с высокой башни, шарик рано или поздно наберет такую скорость, при которой сила сопротивления воздуха станет равной силе притяжения шарика Землей — его весу. После этого скорость шарика перестанет меняться, поскольку сумма действующих на него сил станет равной 0. С этой скоростью он и долетит до земли. Шарик очень упругий, поэтому после удара о землю, величина его скорости практически не изменится, но скорость будет направлена теперь вверх. Сила сопротивления воздуха, оставшись прежней по величине, то есть равной весу, будет направлена теперь вниз. В этот момент величина суммы сил, приложенных к шарику, станет в два раза больше силы его притяжения Землей, а значит ускорение шарика будет в два раза больше ускорения свободного падения g.

4. Будем считать, что на движущийся участок пластинки фиксированной длины s действует сила трения ks, где k — коэффициент трения, который не зависит от положения участка на пластинке, то есть одинаков по всей ее длине, и не зависит от скорости движения участка. Тогда для поддержания равномерного движения прикладываемое пальцем усилие F должно уравновешивать суммарную силу трения:

$$F = kL.$$

То, что движение является равномерным вращением вокруг фиксированного центра означает, что сумма моментов внешних сил относительно этого центра равна 0. Обозначим через l расстояние от пальца до центра вращения. Тогда величина момента силы F равна $F \cdot l = kLl$. Вычислим момент сил трения действующих, например, на отрезке от центра до конца пластинки, на который действует палец. Координатой точки на этом отрезке можно считать расстояние от нее до центра вращения. Разобьем отрезок на N маленьких участков точками с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_N$ (при этом получается, что $x_0 = 0$ а $x_N = l$) и сложим величины моментов сил трения, действующих на этих участках. Величина силы трения, приложенной к участку от x_i до x_{i+1} равна $k(x_{i+1} - x_i)$. Расстоянием от центра вращения до места приложения этой силы можно приближенно считать расстояние до середины участка $(x_{i+1} + x_i)/2$. Тогда величина момента силы трения на этом участке равна $k(x_{i+1} - x_i) \cdot (x_{i+1} + x_i)/2 = \frac{kx_{i+1}^2}{2} - \frac{kx_{i+1}^2}{2}$. Складывая моменты на всех участках, получим

$$\left(\frac{kx_N^2}{2} - \frac{kx_{N-1}^2}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{kx_3^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}\right) + \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) + \\ + \left(\frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right) = \frac{kl^2}{2} - \frac{k0^2}{2} = \frac{kl^2}{2}.$$

Таким же образом получим, что величина момента сил трения, действующих на отрезок по другую сторону от центра равна

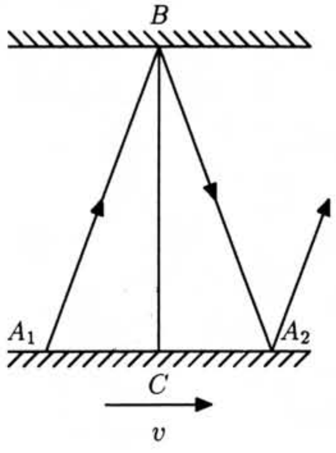
$$\frac{k(L-l)^2}{2}.$$

Учитывая направление действующих сил, запишем условие равенства нулю суммы моментов внешних сил

$$0 = F \cdot l - \frac{kl^2}{2} - \frac{k(L-l)^2}{2} = kLl - \frac{kl^2}{2} - \frac{k(L-l)^2}{2}.$$

Из этого уравнения получаем, что расстояние от пальца до центра вращения

$$l = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)L.$$



5. Найдем время τ между двумя последовательными отражениями луча от зеркала II для наблюдателя K, который видит, как наша модель движется со скоростью v параллельно плоскости зеркал. Для этого нужно длину пути пройденного лучом между отражениями поделить на скорость его движения. Скорость луча в системе отсчета K (как и в любой другой системе отсчета) равна $c = 300000$ км/сек. Осталось найти длину пути (см. рисунок), которая равна $A_1B + BA_2 = 2A_1B$. Можно записать уравнение:

$$A_1B^2 = A_1C^2 + BC^2$$

где $BC = L$, $A_1C = A_1A_2/2$. Выразим члены этого уравнения через данные задачи и искомое время τ. A_1A_2 — это расстояние, на которое сдвинется наша модель за время между двумя отражениями, $A_1A_2 = v\tau$. С другой стороны, $A_1B + BA_2$ — это расстояние, которое прошел свет за время между двумя отражениями, $A_1B+BA_2 = c\tau$, и значит $A_1B = c\tau/2$. Подставляя полученные выражения в наше уравнение, получаем уравнение для τ:

$$\left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\tau}{2}\right)^2 + L^2,$$

откуда

$$\tau = \frac{2L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, отмеченное наблюдателем K время между двумя отражениями

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где $\tau' = 2L/c$ — время между этими же событиями, отмеченное электронной схемой, для которой наша модель неподвижна. Это означает, что скорость хода часов, приводимых в движение электронной схемой, после придания модели скорости v станет меньше, чем скорость хода часов наблюдателя, оставшегося стоять на месте, в $\frac{\tau}{\tau'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ раз.

6. Если бы поверхность воды была зеркально гладкой, то никакой дорожки мы не увидели бы. Вода создавала бы четкое отражение Луны, видимое в одной конкретной точке поверхности такого зеркала. Если мы видим дорожку, то это значит, что поверхности волн играют роль маленьких зеркал, которые из-за различного наклона посылают к нам свет Луны от точек, находящихся в стороне от места расположения ее отражения гладким зеркалом. Разброс в расположении точек, от которых попадает к нам лунный свет, то есть ширина дорожки, тем больше, чем сильнее возможный наклон этих маленьких зеркал, то есть чем выше волны на воде. Если рассматривать волну как выпуклую отражающую поверхность, то для падающего на эту поверхность луча его отражения от всех точек поверхности составляют конус, который тем шире, чем более выпукла поверхность, или чем выше волна (в случае, когда поверхность плоская, то есть высота волны нулевая, этот конус сжимается в один отраженный луч). Попадает ли отражаемый от данного места водоема свет к наблюдателю, то есть находится ли это место в

пределах лунной дорожки, зависит от того, находится ли наблюдатель в пределах конуса лучей, создаваемого в этом месте волнами с максимальной высотой. Если рассмотреть максимальные конусы отражаемых лучей в разных местах водоема, в пределы которых попадает стоящий на берегу наблюдатель, то получится, что дорожка расширяется при приближении к наблюдателю.

7. Все, что нам нужно в этом опыте от штангенциркуля — это узкая щель, которую можно сделать между его створками. Чтобы заинтересоваться этой щелью, нужно вспомнить, что интенсивность принимаемых световых волн, прошедших через щель, зависит от угла их распространения после щели. Для волн данной частоты эта зависимость выглядит в виде чередования на экране-приемнике (или сетчатке глаза наблюдателя) светлых и темных полос, параллельных щели. Это явление называется дифракцией. Дело в том, что волны, приходящие в данную точку от разных точек щели могут усиливать или ослаблять друг друга в зависимости от разности длин путей, которые они прошли. Если длина волны намного больше ширины щели, то волны, приходящие от разных точек щели практически не отличаются друг от друга, а значит только усиливают друг друга не зависимо от угла распространения. Для наблюдателя это выглядит в виде одной широкой светлой полосы. Зависимость интенсивности от угла становится тем сильнее, а значит ширина полос и расстояние между полосами тем меньше, чем меньше длина волны. Таким образом, если расстояние между наблюдаемыми полосами одного цвета меньше, чем другого, то волны этого цвета имеют меньшую длину. И если посмотреть на полосы красного и зеленого цветов от света, прошедшего через створки штангенциркуля, то выяснится, что Эйлер был не прав.

История

Задачи

1. Нармер — предполагаемый объединитель Верхнего и Нижнего Египта (около 3000 года до н.э.); Джосер — фараон, для которого была построена первая (ступенчатая) пирамида (XXVIII век до н.э.); Хуфу (=Хеопс) — обладатель самой большой пирамиды (XXVII век до н.э.); Хафра — сын Хуфу, по приказу которого была возведена другая большая пирамида и вытесан из скалы Большой Сфинкс; Ментухотеп (XX век до н.э.) — первый фараон Среднего царства, воссоединивший страну после усобиц; Сенусерт III (XVIII век до н.э.) — великий завоеватель, постоянно воевал в Нубии, Ливии и Сирии; Яхмос I — победитель гиксосов, основатель Нового царства (XVI век до н.э.); Тутмос III — завоеватель Сирии и Нубии; при нем были построены первые храмы Карнака и Луксора (XV век до н.э.); Аменхотеп IV (=Эхнатон) — основатель новой религии с культом единого бога Атона (XIV век до н.э.); Рамзес II — воевал с хеттами за контроль над Сирией; для него построен храм в Абу-Симбеле (XIII век до н.э.); Шешоннек — основатель Ливийской династии в Египте (X век до н.э.); Нехо II (конец VII века до н.э.) — по его приказу финикийцы проплыли вокруг Африки; Александр Македонский (IV век до н.э.) — основатель греческого царства в Египте; Клеопатра VII (I век до н.э.) — последняя независимая правительница Египта из династии Птолемеев.

2. В 1939 году Г.К.Жуков успешно командовал войсками СССР на Халхин-голе (в войне с Японией).

   В 1941 году он нанес германской армии первые поражения: под Ельней (август), под Ленинградом (сентябрь), под Москвой (октябрь-декабрь).

   В конце 1942 года Жуков руководил окружением немецких войск под Сталинградом.

Летом 1943 года (будучи заместителем Верховного Главнокомандующего — И.В.Сталина) он координировал действия советских войск в битве на Курской дуге, а осенью — при форсировании Днепра и освобождении Киева.

В 1944 году Жуков руководил прорывом блокады Ленинграда, а затем координировал освобождение Белоруссии и Украины.

В 1945 году, командуя I Белорусским фронтом, Жуков участвовал в штурме Берлина. После этого он стал главой советской военной администрации в Германии, но вскоре попал в опалу (по проискам Берия) и командовал малым Уральским военным округом.

В 1953 году Жуков руководил арестом Берии, а позднее помог Н.С.Хрущеву одолеть его соперников — группу Маленкова и Молотова. После этого он был отправлен в отставку.

И.С.Конев летом 1941 года успешно командовал разными армиями на Западном фронте. В октябре, командуя Западным фронтом, Конев был разбит («Вяземское окружение»), но спасен Г.К.Жуковым от расстрела по обвинениям Берии и Маленкова.

После этого (в ноябрьской битве за Москву) Конев командовал правым флангом Западного фронта, позднее — Калининским фронтом.

В 1943 году (в Курской битве) Конев командовал Степным фронтом и сыграл важную роль в последующем контрнаступлении — включая форсирование Днепра и освобождение Киева.

В 1944 году Конев, во главе I Украинского фронта, руководил освобождением Северной Украины.

В 1945 году войска Конева первыми ворвались в Берлин с юга, облегчив задачу I Белорусского фронта (которым командовал Жуков). После этого Конев руководил разгромом последних армий Германии и освобождением Чехословакии.

В 1953 году Конев был председателем трибунала, судившего Берия и его сообщников.

В 1956 году Конев, как командующий вооруженными силами Варшавского договора, руководил вторжением советских войск в восставшую Венгрию.

3. М.В.Ломоносов — Екатерина II — Александр I — Николай I — Александр II — Николай II — Александр Керенский — В.И.Ленин — В.А.Стеклов (академик-математик) — А.Н.Колмогоров — Н.Н.Константинов (председатель жюри турнира им. Ломоносова).

4. Физика: П.Н.Лебедев (обнаружил давление света), П.Л.Капица (обнаружил в опыте сверхтекучесть гелия) и Л.Д.Ландау (создал теорию сверхтекучести гелия).

   Математика: А.Н.Колмогоров (создал аксиоматику теории вероятностей), С.П.Новиков (завершил классификацию гладких многообразий).

   Биология: В.А.Энгельгардт (выяснил внутреннюю энергетику клетки, роль АТФ и АДФ).

   История: В.Л.Янин (руководитель археологического изучения Новгорода).

5. XII век: Юрий Долгорукий, создатель московского Кремля.
   XII век: Даниил Александрович — первый князь Москвы.
   XIV век: Дмитрий Донской — победитель Мамая.
   XV век: Иван III — окончательная победа над Ордой.
   XVI век: Иван Федоров — начало книгопечатания.
   XVII век: Кузьма Минин — освобождение Москвы от поляков.
   XVIII век: Петр I — перенес столицу в Петербург.
   XIX век: М.И.Кутузов — изгнание Наполеона.
   XX век: Г.К.Жуков — оборона Москвы от немцев.

6. Тверь — равноправная соперница Москвы в борьбе против Орды в XIV веке. Только прочный союз Ивана Калиты с русской церковью обеспечил победу Москвы.

   Владимир — остался бы столицей Руси, если бы не монгольское нашествие в XIII веке.

   Вильнюс (или Смоленск) — мог стать общей столицей Руси и Литвы, если бы в XIV веке князья Литвы приняли православие.

   Казань — могла стать столицей Руси в XIII веке, если бы завоевавшие Русь монгольские ханы приняли крещение

   Новгород — НЕ мог стать столицей Руси, поскольку эта республика не желала подчиняться никакому князю-абсолютисту, даже ради победы над Ордой.

7. Хан Тохтамыш: он захватил власть над Белой Ордой с помощью Тимура (в 1376 году), но потом обособился от него (в 1383 году), был разбит и изгнан (в 1395 году).

   Князья Василий I Московский и Олег Рязанский: остановка Тимура на южной границе Руси в 1395 году спасла этих правителей от гибели и разорения их земель.

   Эмир Едигей — правитель Орды, поставленный Тимуром на смену Тохтамышу в 1395 году и правивший в согласии с ним до 1405 года.

   Султан Турции Баязет I — разбит Тимуром в 1402 году и умер у него в плену.

   Император Византии — спасен от подчинения туркам вмешательством Тимура в 1400 году.

   Император Китая Чен-цзу — спасен смертью Тимура в 1405 году от нашествия западных степняков; после этого он смог организовать первые океанские плавания китайцев.

8. XI век: Антоний и Феодосий — основатели первого на Руси Киево-Печерского монастыря; митрополит Иларион — первый русский на этом посту, автор «Слова о законе и благодати».

   XII век: Леонтий Ростовский — епископ, креститель лесных племен; убит язычниками из племени мурома.

   XIII век: митрополит Кирилл — восстановитель русской церкви после монгольского разгрома, сподвижник Александра Невского.

   XIV век: митрополит Алексий — глава московского правительства при князе Иване Красном и в малолетство Дмитрия Донского.

   XV век: Иона — первый митрополит Руси, избранный независимо от Константинополя; игумен Иосиф Волоцкий — инициатор тесного сотрудничества русской церкви с царской властью.

   XVI век: митрополит Филипп — борец с самовластьем Ивана Грозного, убит по его приказу.

   XVII век: патриарх Гермоген — он возглавил сопротивление полякам и был убит ими; патриарх Филарет — родоначальник династии Романовых.

9. Голландец Абель Тасман (остров Тасмания); Датчанин Витус Беринг (Берингов пролив); Норвежец Руальд Амундсен (полярная станция Амундсен-Скотт); Русский Степан Челюскин (Мыс Челюскина); Немец Александр Гумбольдт (Гумбольдтово течение в Тихом океане); Англичанин Джемс Кук (пролив Кука в Новой Зеландии); Француз Лаперуз (пролив Лаперуза); Португалец Фернан Магеллан (Магелланов пролив); Испанец Эрнандо Кортес (море Кортеса); Итальянец Америго Веспуччи (материк Америка).

10. Юлий Цезарь; Марк Антоний; Макбет (XI век); Ричард II (XIV век); Генрих IV (XIV век); Генрих V (XV век); Жанна д'Арк (XV век); Генрих VI (XV век); Ричард III (XV век); Генрих VIII (XVI век); Отелло (XVI век).

11. Основатель царства инков — Манко Капак (XIV век). Последний царь инков — Атауальпа (XVI век). Основатель империи ацтеков — Ицкоатль (XV век). Последний правитель ацтеков — Монтесума II (XVI век). Основатели союза ирокезов — Деканавида и Гайявата (XVI век). Текумсе из племени шауни — в 1810-е годы пытался создать Соединенные Штаты Индейской Америки; погиб в бою. Татанка Йотанка (=Сидящий Бык) из племени тетон союза племен дакота — в 1876 году разгромил войско генерала Дж.Кастера у реки Литтл Бигхорн.

ИВАН ГРОЗНЫЙ (текст с ошибками)

1. 7077 год от Сотворения Мира — это 1569 год от Рождества Христова.
2. Иван Грозный передал царский титул Симеону Бекбулатовичу позже — в 1576 году, и всего на один год.
3. Даже отдав царский титул, Иван не покидал Москву, а остался в ней в роли «удельного князя».
4. Визит Ивана в Вологду происходил позже — в 1578 году. Этот визит длился не 3 года, а несколько недель; после этого Иван отказался от мысли о переносе столицы в Вологду.
5. Первые 30 лет правления Ивана Грозного (1547–1577) закончились неудачно: Ливонская война была проиграна, страна истощена.
6. Мария Стюарт никогда не была английской королевой: она недолго правила во Франции, затем — в Шотландии, а в 1570-е годы она была в плену у английской королевы Елизаветы I.
7. Даже английские (а тем более — шведские) послы никогда не прибывали в Россию через Белое море, а всегда — через Балтику. Этому не мешали даже войны на Балтике.
8. Римским кесарем (то есть — правителем Римско-Германской империи) в 1570-е годы был не Рудольф, а Матиас II Габсбург.
9. Стефан Баторий не был воеводой императора. Он был князем Трансильвании, а затем — выборным королем Польши.
10. Стефан Баторий не был разбит под Псковом, а только не сумел взять город, и было это позже — в 1581 году.
11. Поляки никогда не предлагали Ивану Грозному корону Польши — хотя он сам не раз ее домогался (но безуспешно).
12. Никаких возражений против правления над иноверцами Иван не имел: так, он завоевал исламскую Казань и пытался завоевать лютеранскую Ливонию.
13. Иван еще в 1550-е годы разочаровался в «мире и торговле с Западом». Оттого он в 1558 году начал Ливонскую войну.
14. Владения Золотой Орды доходили на востоке только до Оби, но не до Амура и Тихого океана.
15. В середине XV века в России не было надежных сведений о Дальнем Востоке: знали, что там лежит Китай, но об Амуре вряд ли слыхали.
16. Отцом Ивана Грозного был не Василий II Темный, а Василий III. Этот князь не сумел подчинить ни Астрахань, ни Крым (хотя Казань была вассалом Москвы со времен Ивана III).

17. Побеждая восточных ханов в XV–XVII веках, московские правители НЕ ЗАСТАВЛЯЛИ их креститься, чтобы не упал авторитет ханов среди местного населения. Но крещение СЛУЖИЛЫХ татар в Москве поощрялось: например, царевич Симеон Бекбулатович (дальний потомок Батыя) был православным, как видно из его имени.

18. Мысль о покорении Сибири пришла к Ивану Грозному позже — в 1570-е годы, после полной неудачи в Ливонской войне. Тогда царь поручил это рискованное дело не своим воеводам, а купцам Строгановым, которые вели «русскую конкисту» за свой счет, силами «гулящих людей».

19. Первыми народами Сибири, которых подчинили русские казаки (гулящие люди), стали татары, манси и ханты, жившие по Иртышу и Оби. О существовании якутов и бурят русские узнали только в 17 веке.

20. Князь Андрей Курбский не ушел в монастырь, а бежал в Литву в начале Ливонской войны (в 1565 году), опасаясь смертной казни.

21. Не было «дьяка Сильвестра Адашева», а были ДВА разных человека: окольничий Алексей Адашев и протопоп Сильвестр.

22. Сильвестр был сослан царем в дальний монастырь, а Адашев — отправлен воеводой в армию в конце 1550-х годов. Оба они умерли до начала опричнины.

23. Иван Грозный дважды внезапно терял сыновей. Но в первый раз младенец-царевич случайно утонул (в 1566 году), а во второй раз сам Иван убил своего сына Ивана (в 1581 году). Оба раза царь не собирался с горя отречься от престола.

24. Московское княжение досталось семейству Даниловичей (потомков Александра Невского) в момент своего возникновения — в 1270-е годы. Князья Гедиминичи появились на престоле Литвы позже — в XIV веке; тогда они пытались подчинить Москву, но безуспешно.

25. В 1560–70-е годы Крымом правил хан Девлет-Гирей; он был коренной мусульманин, и не мог носить христианское отчество «Петрович».

26. Крымский хан был тогда вассалом турецкого султана — так что о «сговоре» между ними и о «восстании» против Москвы не может быть речи.

27. Успешный набег крымчаков на Москву произошел в 1571, а не в 1569 году. В боевых действиях тогда не участвовали ни Симеон Бекбулатович, ни Василий Шуйский, ни Делагарди.

28. Имя Якоба Делагарди (французского гугенота, поселившегося в Швеции и ставшего видным военачальником) появилось в русской истории только в Смутное Время — в начале XVII века.

29. Поражение от крымчаков в 1571 году НЕ вызвало на Руси бунтов — но оно стало следствием разложения русской армии, начавшегося по ходу опричного террора. Незадолго до этого нашествия (весной 1571 года) царь Иван устроил в Москве массовую показательную казнь своих видных соратников (включая некоторых опричников).

30. Тверь не восставала против царя Ивана — но она была разорена царем в 1570 году, во время его похода на Новгород. Тогда опальный митрополит Филипп Колычев был убит Малютой в Отроче монастыре в Твери.

31. Князь Владимир Старицкий (двоюродный брат царя Ивана) был убит по его приказу в 1570 году — без вины, но как возможный претендент на престол.

32. В XVI веке в Новгороде не было посадника, но был воевода — наместник московского царя.
33. Правителей из Литвы или иных стран новгородцы к себе не приглашали с 1478 года, когда город был подчинен князем Иваном III.
34. Киевляне не могли вести «тайные переговоры» с Польшей, поскольку с XIV века Киев находился в составе Литвы, а в XVI веке — в составе объединенного Польско-Литовского государства (Речи Посполитой).
35. Просьба к Ивану — вернуться на царство в Москву — исходила лишь однажды: в начале 1565 года, когда царь удалился с придворными и казной в Александрову слободу, а москвичи умоляли его вернуться в столицу. Позднее царь заслужил такую ненависть россиян, что никто не стал бы просить его вернуться на трон.
36. В 1570-е годы Иван сознавал себя «недостойным пастырем Руси» (он написал это во втором письме к Курбскому). Однако отказаться от престола он не помышлял, предполагая (видимо, справедливо), что в таком случае найдутся охотники его убить.
37. За время правления Ивана Грозного Земский собор собирался лишь однажды — в самом начале (в 1551 году), и не по воле царя. Позднее Иван обходился без этой «демократии».
38. Василий Шуйский был избран царем Руси в 1606 году — после свержения и убийства первого Самозванца. К этому времени (и позже) Василий не проявил никаких военных талантов.
39. Нил Сорский основал свой скит в конце XV века — в правление князя Ивана III.
40. Царь Иван принял монашеский постриг лишь за несколько дней (или часов) до своей смерти — в 1584 году, будучи тяжело болен.

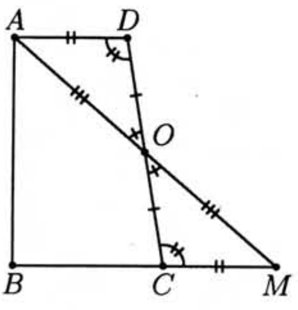
Математика

7–9 классы

1. **Ответ:** 7 минут.

   Решение. Чтобы горячей воды в ванне оказалось в 1,5 раза больше, чем холодной, холодный кран должен наполнить $\frac{2}{5}$ ванны, а горячий — $\frac{3}{5}$ ванны (чтобы узнать это, можно было обозначить объем ванной за 1, объем холодной воды за x; тогда $x+1{,}5x = 1$, откуда $x = \frac{2}{5}$). Но тогда горячий кран должен быть открыт всего $\frac{3}{5}\cdot 23 = \frac{69}{5}$ минут, а холодный — $\frac{2}{5}\cdot 17 = \frac{34}{5}$ минут. Значит, холодный кран нужно открыть через $\frac{69}{5}-\frac{34}{5} = \frac{35}{5} = 7$ минут.

2. Докажем, что биссектриса угла ABC делит сторону DC пополам.

   Пусть O — середина стороны DC. Проведем через точки A и O прямую, пусть M — точка пересечения этой прямой с прямой BC. Тогда треугольники AOD и MOC будут равны по второму признаку ($DO = OC$ по условию; $\angle AOD = \angle COM$ как вертикальные; $\angle ADO = \angle OCM$, т.к. прямые AD и BC параллельны). Это значит, что $AO = OM$, т.е. O — середина отрезка AM. Кроме того, $AD = CM$, откуда $AB = BC + AD = BC + CM = BM$, т.е. треугольник ABM — равнобедренный. Но биссектриса при вершине в равнобедренном треугольнике является и медианой, откуда биссектриса угла ABC проходит через середину AM, т.е. точку O, и значит делит DC на равные части (т.к. O — середина DC).

3. Пусть расстояние от Елкино до Палкино равно n километров (по условию, n — целое). Занумеруем столбы от Елкино до Палкино по порядку. Рассмотрим 9-ый столб, т.е. столб, отстоящий от Елкино на 9 километров (ясно, что $n \geqslant 10$). Тогда с одной его стороны написано 9, а с другой: $n-9$. На следующем столбе с одной стороны написано: 10, а с другой: $n-10$. Если бы n оканчивалось не на 9, то $n-9$ оканчивалось бы не на 0, а значит суммы цифр чисел $n-9$ и $n-10$ были бы равны, но тогда на 9-ом столбе сумма цифр была бы на 8 больше, чем на десятом, что невозможно. Значит, n заканчивается на 9.

   Если $n > 49$, то сумма цифр на 49 столбе будет больше 13. Значит, для n есть только такие возможности: 19, 29, 39, 49.

   Если $n = 19$, то на 9-ом столбе сумма цифр будет равна $9 + 1 + 0 = 10$ — противоречие.

   Если $n = 29$, то сумма цифр на 9-ом столбе будет равна $9 + 2 + 0 = 11$ — противоречие.

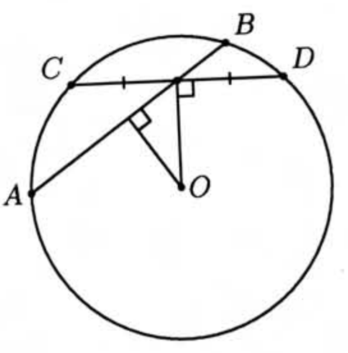
   Если $n = 39$, то сумма цифр на 9-ом столбе будет равна $9 + 3 + 0 = 12$ — противоречие.

   Остается только одна возможность: $n = 49$. Легко проверить, что в этом случае на всех столбах сумма цифр будет равна 13 (достаточно проверить это только для 9, 19, 29, 39 и 49 столбов; подумайте, почему).

10–11

1. Заметим, что если у числа a средняя цифра больше обеих крайних, то у числа $999 - a$ средняя цифра меньше обеих крайних. Поэтому среди чисел от 100 до $999 - 100 = 899$ одинаковое количество чисел с наибольшей средней цифрой и с наименьшей средней цифрой (их можно разбить на пары). Но остались еще числа от 900 до 999. Ясно, что среди них нет чисел с наибольшей средней цифрой, но есть с наименьшей, например, 901. Поэтому больше тех чисел, у которых средняя цифра меньше обеих крайних.

2. Заметим, что чем меньше расстояние от центра O окружности до хорды, тем больше длина хорды. Так как хорд конечное число, то среди них есть наименьшая по длине, скажем, AB. По условию, она проходит через середину K некоторой другой хорды, скажем, CD. Если точка пересечения AB и CD не является также и серединой AB, то расстояние от точки O до CD будет, очевидно, больше, чем от O до AB (т.к. OK будет больше длины перпендикуляра, опущенного из точки O на AB), следовательно, хорда CD имеет меньшую, чем AB, длину — противоречие. Значит, CD проходит через середину AB, откуда перпендикуляры, опущенные из точки O на эти хорды, совпадают. Это возможно, только если AB и CD совпадают, или если AB и CD пересекаются в центре. Первое невозможно, значит AB и CD — диаметры. Точно так же доказывается, что все остальные хорды проходят через O.

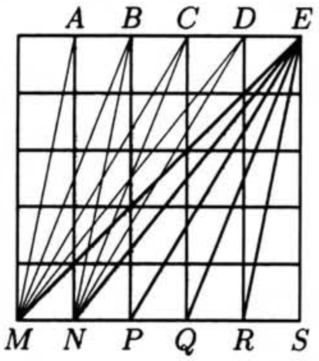


3. **Ответ:** существует.

   Пример. Построим куб, у которого ребра в два раза больше, чем у исходного, и отметим середины его граней. Ясно, что можно построить октаэдр с вершинами в отмеченных точках, причем все его ребра будут равны половинкам диагоналей граней построенного куба. Таким образом, этот октаэдр и является искомым.

Дополнительные задачи.

1. Заметим, что $\angle MAN = \angle RES$, $\angle MBN = \angle QER$, $\angle MCN = \angle PEQ$, $\angle MDN = \angle NEP$. Отсюда сразу видно, что



$$\angle MAN + \angle MBN + \angle MCN +$$

$$+ \angle MDN + \angle MEN =$$

$$= \angle MES = 45°.$$

2. Допустим, что это можно сделать. Тогда край каждого кусочка состоит из отрезков и дуг окружностей. Для каждой дуги определим ее «угловую меру», равную отношению длины этой дуги к радиусу, причем взятую со положительным знаком, если радиус вектор, проведенный из центра окружности торчит «внутрь» нашего бумажного кружочка, и с отрицательным знаком, если он торчит во внешнюю сторону.

Теперь поставим в соответствие каждому кусочку сумму угловых мер его дуг. Не трудно видеть, что если мы «состыкуем» вместе два кусочка A и B, то сумма угловых дуг кусочка A и B равна (сумма угловых мер кускаA) + (сумма угловых мер куска B). Это происходит от того, что если две дуги «склеиваются», то сумма их угловых мер равна 0.

Отсюда мы получаем, что сумма угловых мер дуг на границе круга должна совпадать с суммой угловых мер на границе квадрата. Но это не так: для круга это число равно 2π, а для квадрата — 0.

3. Обозначим «рыбные цены»: сегодня большая рыба стоит b_c, а маленькая m_c. Вчера большая стоила b_v, а маленькая — m_v. Тогда из условий задачи имеем два уравнения:

$$3b_c + m_c = 5b_v, \qquad 2b_c + m_c = 3b_v + m_v.$$

Отсюда получаем:

$$5m_v = (2b_c + m_c - 3b_v)5 = 10b_c + 5m_c - 3(3b_c + m_c) = b_c + 2m_c.$$

Т.е. пять маленьких вчера стоили столько же, сколько одна большая и две маленькие сегодня.

4. Заметим, что при Петиных разрезаниях получаются только выпуклые многоугольники. Кроме того, заметим, что разрезая выпуклый n-угольник по прямой, мы получим два новых многоугольника с n_1 и n_2 вершинами соответственно и $n_1 + n_2 \leqslant n + 4$ (это следует из того, что при обратном склеивании выпуклых n_1 и n_2-угольников «пропасть» могут не более четырех вершин). Значит, после того, как Петя сделает $m - 1$ разрез, всего получится m многоугольников с общим количеством вершин не более $4 + 4(m-1) = 4m$. Пусть Петя сделает $3 \cdot 99 + 1$ разрез. Покажем, что тогда найдутся либо 100 треугольников, либо 100 четырехугольников.

Действительно, пусть наши $(3 \cdot 99 + 1)$ многоугольника имеют n_1, n_2, ..., $n_{3 \cdot 99+1}$ вершин соответственно, тогда

$$4(3 \cdot 99 + 1) = n_1 + \ldots + n_{3 \cdot 99+1} \geqslant 3 \cdot 99 + 4 \cdot 99 + 5(3 \cdot 99 + 1 - 99 - 99),$$

(т.к. среди чисел $n_1, \ldots$ есть не более 99 равных 3, не более 99 равных 4, а остальные числа не меньше 5). Тогда

$$12 \cdot 99 + 4 \geqslant 7 \cdot 99 + 5 \cdot 99 + 5,$$

поэтому $4 \geqslant 5$ — противоречие. Значит, после $3 \cdot 99 + 1$ петиных разрезов найдутся 100 многоугольников с одинаковым числом вершин.

Химия

1. Считая, что мел представляет собой чистый $CaCO_3$, имеем 0,5 моль карбоната кальция. По уравнению

$$CaCO_3 = CaO + CO_2$$

количество CaO составит также 0,5 моль. После процесса

$$CaO + H_2O = Ca(OH)_2$$

получим 0,5 моль или 37 г извести.

В 250 мл 20%-ного раствора HCl содержится $250 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}2 = 55$ г хлороводорода, что составляет $55/36{,}5 = 1{,}507$ моль. По уравнению

$$2KMnO_4 + 16HCl = 2MnCl_2 + 5Cl_2 + 2KCl + 18H_2O$$

получим $1{,}507 \cdot 5/16 = 0{,}471$ моль или 17,19 г хлора.

а) Реакция хлора с известью при комнатной температуре протекает по уравнению:

$$Ca(OH)_2 + Cl_2 = CaOCl_2 + H_2O. \tag{1}$$

Видно, что хлор в недостатке, и в растворе могут присутствовать помимо основного продукта $CaOCl_2$ также $Ca(OH)Cl$, $CaCl_2$, $Ca(OH)OCl$, $Ca(OCl)_2$, $Ca(OH)_2$.
б) Максимальное содержание $CaOCl_2$ в растворе будет

$$\frac{0{,}471 \text{ моль } \cdot 127\frac{\text{г}}{\text{моль}}}{1000 \text{ г } + 37 \text{ г } + 17{,}9 \text{ г}} = 0{,}0567 \text{ или } 5{,}67\%.$$

в) Если реакция (1) прошла количественно, то извести, а соответственно, оксида и карбоната кальция, было 0,471 моль. В таком случае масса $CaCO_3$: $m = 0{,}471$ моль $\cdot 100\frac{\text{г}}{\text{моль}} =$ 47,1 г. Тогда $\omega(CaCO_3) = 47{,}1/50 = 0{,}942$.

2. Вещество может содержать водород, азот, кислород. Однако относительная молекулярная масса вещества $16 \cdot 2 = 32$ ограничивает число атомов кислорода до одного или полностью исключает его. По условию азота образовалось 2,24 л, что составляет 0,1 моль. Водорода в воде 0,4 моль; 0,1 моль N_2 составляет 0,2 моль атомов азота.

Соотношение азота и водорода в соединении будет $0{,}2 : 0{,}4 = 1 : 2$. Простейшая формула — NH_2. $M_r(NH_2) = 16$; $M_r(N_2H_4) = 32$ совпадает с задаваемой в условии задачи. Отсюда формула исходного вещества $H_2N{-}NH_2$. Это гидразин, при комнатной температуре он представляет собой бесцветную жидкость, используется как один из компонентов ракетного топлива.

3. В 100 г 10%-го олеума содержится 10 г SO_3 и 90 г 100%-й серной кислоты. Если пересчитать содержание SO_3, то в 90 г H_2SO_4 условно содержится всего $(18/98) \cdot 90 = 16{,}53$ г воды, остальные $100 - 16{,}53 = 83{,}47$ г в олеуме составляет SO_3. Аналогично, в случае 60%-ной серной кислоты: $40 + 60 \cdot (18/98) = 11{,}02 + 40 = 51{,}02$ г воды и 48,98 г SO_3. В 480 г 90%-ной кислоты содержится $0{,}9 \cdot 480 = 432$ г H_2SO_4, или $(80/98) \cdot 432 = 352{,}65$ г SO_3 и

$(480 - 352{,}65) = 127{,}35$ г воды. Пусть надо взять x г олеума, тогда 60%-ной кислоты — $(480 - x)$ г. В олеуме содержится $(x/100) \cdot 83{,}47$ г SO_3, а в кислоте $((480 - x)/100) \cdot 48{,}98$ г SO_3, что в сумме составляет $352{,}65$ г SO_3. Отсюда:

$$\frac{x}{100} \cdot 83{,}47 + \frac{480 - x}{100} \cdot 48{,}98 = 352{,}65.$$

Решая уравнение, получим $x = 340{,}8$ г олеума, а 60%-ной кислоты соответственно $480 - 340{,}8 = 139{,}2$ г.

4. Для окисления группы $-CH_2-$ (гомологической разности) нужно три атома кислорода. Поэтому исходное вещество также должно окисляться тремя атомами кислорода, тогда следующий член гомологического ряда будет окисляться шестью атомами кислорода:

$$C_xH_y + (x + \tfrac{y}{2})O_2 = xCO_2 + \tfrac{y}{2}H_2O,$$
$$C_{x+1}H_{y+2} + (x + \tfrac{y}{2} + 1{,}5)O_2 = (x+1)CO_2 + (\tfrac{y}{2} + 1)H_2O.$$

Примеры веществ, окисляемых тремя атомами кислорода (первые члены гомологических рядов):
CH_3OH — метанол,
$HOOCCH(OH)COOH$ — гидроксималоновая кислота,
CH_2N_2 — диазометан, $HO-CH_2-COOH$ — гидроксиуксусная кислота,
$HO-C(COOH)_3$ — трикарбоксиметанол.

5. A — кислород, B — водород, C — углерод, D — алюминий.

6. Уравнение реакции: $M + nHCl = MCl_n + \frac{n}{2}H_2$. Потеря массы составила $50 \cdot 0{,}0168 = 0{,}84$ г. x г металла выделяют $\frac{n}{2} \cdot 22{,}4$ л H_2, а $0{,}84$ г — $0{,}336$ л H_2, $x = \frac{0{,}84 \cdot n \cdot 22{,}4}{2 \cdot 0{,}336} = 28n$ г.

Если металл одновалентный, т.е. $n = 1$, его относительная атомная масса равна 28 (кремний). Но кремний не растворяется в соляной кислоте и не может быть одновалентным. При $n = 2$ относительная атомная масса равна 56, т.е. металл — железо. Можно проверить и варианты с $n = 3$ и 4 и убедиться в том, что правильный ответ — только железо.

7. Уравнение реакции: $2NO + O_2 = 2NO_2$.

Обозначим концентрацию NO буквой a, O_2 — b, тогда до изменения давления $V_1 = ka^2b$. При увеличении давления концентрация увеличилась в 3 раза, скорость равна $V_2 = k(3a)^2 \cdot 3b$; увеличение скорости реакции: $\frac{V_2}{V_1} = 27$ раз.

Биология

1. Сила мышц организма F пропорциональна квадрату длины организма L:

$$F \approx L^2.$$

Для сравнения силы двух организмов нужно рассмотреть «удельную» силу — силу, не зависящую от массы тела. Масса M же тела, пропорциональна объему, т.е. кубу длины L:

$$F_y \approx \frac{F}{M} \approx \frac{L^2}{L^3} \approx \frac{1}{L}.$$

Если длина кузнечика приблизительно 2 см, а длина человека приблизительно 2 м, то очевидно, что кузнечик в 100 раз сильнее человека. Мышцы человека работают эффективней, поэтому реально кузнечик сильнее всего лишь в 15 раз.

2. К семейству “Крестоцветные” относятся гулявник лекарств енный, икотник серо-зеленый, пастушья сумка, редька дикая, ярутка полевая.

   “Розоцветные” — гравилат речной, земляника, лапчатка прямостоячая, роза, шиповник.

   “Бобовые” — клевер, соя, фасоль, чина лесная.

   “Пасленовые” — белена черная, дурман обыкновенный, паслен сладко-горький, петунья гибридная, помидор.

   “Сложноцветные” — бодяк полевой, василек, кульбаба осенняя, нивяник, пижма обыкновенная.

   “Лилейные” — чеснок, тюльпан.

   “Злаковые” — ежа сборная, лисохвост, мятлик, тимофеевка.

   Венерин башмачок относится к неназванному семейству “Орхидные”.

3. Вампиры — кровососы из семейства десмодовые отряда рукокрылые. Питаются вампиры только кровью. Они подбираются к спящему животному (десмодовые хорошо бегают по земле), отыскивают наименее защищенный участок кожи и острыми зубами делают надрез. В ранку впрыскивают слюну, которая обладает двумя свойствами: обезболивает место надреза и не дает вытекающей крови свертываться.

   Вампиры опасны несмотря на то, что крови они выпивают немного. На одно животное за ночь может напасть несколько вампиров, тогда животное может погибнуть от большой потери крови. Ранки долго не заживают, часто воспаляются, и кроме того со слюной вампиры могут заразить животное какой-либо болезнью, например, бешенством.

4. Все алкогольные напитки — вина, водки, пиво, квасы и другие национальные напитки, содержащие спирт, а также кефир и кумыс.

5. а) Сойка (семейство врановые). Питаются сойки растительной и животной пищей.

   б) Деревенская ласточка (семейство ласточковые). Питаются комарами, мошками, бабочками.

6. Верны утверждения под буквами: б, в, д, е.

7. Спора, мужское и женское растения, сперматозоид, яйцеклетка — гаплоидные; зигота и коробочка — диплоидные.

8. Из эктодермы развиваются эпидермис, нервная система, в основном органы чувств. Из энтодермы развивается эпителий пищеварительного тракта и органы, являющиеся его производными — пищеварительные железы, лежащие вне пищеварительного тракта, легкие, хорда, половые клетки. Все остальные органы: мышцы, кровь, кости, почки и т.д. являются производными мезодермы.

9. См. схему

кроманьонцы
неандертальцы

древнейшие люди
(питекантроп, синантроп и др.)

австралопитеки

шимпанзе

горилла *дриопитеки*

гиббоны,
орангутанги

парапитеки

насекомоядные

10. Лимонная кислота, ментол (Mentha — мята), щавелевая кислота, солонин (Solanum — паслен, картофель), аллицин (Allium — лук), кофеин (кофе), салициловая кислота (Salix — ива), коричная кислота (коричник), атропин (Atropa — красавка) и др.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью создания условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать со всеми организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд будет поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание будет оказано образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Подписаться на журнал можно в редакции по адресу: 117419, Москва, ул. Донская, д. 37, комн. 319.

Стоимость подписки на второе полугодие 1997 года (включая стоимость пересылки) – 34000 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции (можно по факсу) копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается **для журнала "Математическое образование", июль-декабрь 1997 г.**

Реквизиты для перечисления:
Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 1467495 в Лефортовском ОСБ 6901/019 г. Москвы, к/с 002890408 в РКЦ 342164500 БИК 044583342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 17000 руб.

Контактные телефоны: (095) 954-00-12, (095) 362-82-56. Факс: (095) 362-82-56.
Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно соответствующий выпуск журнала (10 экз.).

Mathematical Education N 1, 1997

Contents