Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год первый

№ 2

Июль - Сентябрь 1997 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 1, 1997 г.

Москва

Contents

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 2, июль – сентябрь 1997 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1997 г.
“Математическое образование”, периодическое издание,
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 19.12.97. Корректура: О. В. Никишкина
Объем 8,5 п.л. Тираж 2000 экз. Цена свободная.

27 октября 1997 года исполнилось 70 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Ленинской премии Михаила Михайловича Постникова. Настоящий выпуск журнала посвящается этому юбилею; в выпуске помещена биографическая статья о М.М.Постникове, список опубликованных им книг и несколько его работ, отражающих, по мнению редакции, широту интересов этого замечательного математика. Редакция журнала "Математическое образование" поздравляет юбиляра и желает ему долгих лет жизни, крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

Избранные главы алгебры[1]

И. Р. Шафаревич

Глава II. Многочлен.

§1. Корни и делимость многочленов.

В этой главе мы займемся уравнениями вида $f(x) = 0$, где f — многочлен. Мы уже встречались с ними в конце предшествующей главы. Уравнение $f(x) = 0$ следует понимать как задачу: найти все корни многочлена (или уравнения). Но может случиться, что все коэффициенты многочлена $f(x)$ равны 0 и уравнение $f(x) = 0$ превращается в тождество. Тогда мы будем писать $f = 0$. В этом случае будем считать, что степень многочлена f не определена.

Для того, чтобы *сложить* два многочлена, надо просто привести подобные члены. Многочлены *перемножаются* по правилам раскрытия скобок. Если $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, то $f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)$. Раскрывая скобки, мы получаем члены $a_kb_lx^{k+l}$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant m$. После этого надо привести подобные члены. В результате получается многочлен $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$ с коэффициентами

$$c_0 = a_0b_0, \quad c_1 = a_0b_1 + a_1b_0, \quad c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \ldots \tag{1}$$

Коэффициент c_m равен сумме всех произведений a_kb_l, в которых $k + l = m$.

Многочлены имеют много общих свойств с целыми числами. Саму запись многочлена в виде $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ можно считать аналогом записи натурального числа в десятичной системе счисления (или в системе счисления с другим основанием). Степень многочлена играет роль, аналогичную абсолютной величине целого числа. Например, если при доказательстве некоторого свойства целых чисел используется индукция по абсолютной величине, то при доказательстве аналогичного свойства многочленов обычно используется индукция по степени. Отметим важное свойство: степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей. Действительно, пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ и $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ — многочлены степеней n и m, так что $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$. Вычисляя коэффициенты многочлена $f(x)g(x)$ по формуле (1), мы получаем члены вида $a_kb_lx^{k+l}$, где $k + l \leqslant n + m$. Очевидно, что наибольшая степень, которую мы получим — это $m+n$, причем член такой степени будет один: $a_nb_mx^{n+m}$, он отличен от нуля, так как $a_nb_m \neq 0$ и ни с каким другим членом сократиться не может, так как имеет бо́льшую степень. Это свойство аналогично свойству $|xy| = |x||y|$ для абсолютной величины $|x|$ числа x.

Теорема о делении с остатком для многочленов формулируется и доказывается почти так же, как и для натуральных чисел (теорема 4, гл.I).

---

[1]Продолжение. Начало см. в N 1.

Теорема 1. *Для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$, причем $g \neq 0$, существуют такие многочлены $h(x)$ и $r(x)$, что*

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x) \tag{2}$$

причем или $r = 0$, или степень многочлена r меньше, чем степень многочлена g. При заданных f и g многочлены h и r определяются однозначно.

Если $f = 0$, то нужное представление (2) очевидно: $f = 0 \cdot g + 0$. Предположим, что $f \neq 0$ и применим метод математической индукции по степени многочлена $f(x)$. Пусть $f(x)$ имеет степень n, а $g(x)$ — m:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$$

Если $m > n$, то представление (2) имеет вид $f = 0 \cdot g + f$ с $h = 0$, $r = f$. Если $m \leqslant n$, положим $f_1 = f - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g$ (вспомним, что по условию $b_m \neq 0$, так как степень многочлена $g(x)$ равна m). Очевидно, что в многочлене f_1 член с x^n сократится (для этого мы и подбирали коэффициент $-\frac{a_n}{b_m}$), то есть его степень будет меньше, чем n. Поэтому мы можем считать, что для него теорема верна и имеется представление типа (2): $f_1 = gh_1 + r$, где $r = 0$ или имеет степень меньшую, чем m. Отсюда $f = f_1 + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g = (h_1 + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m})g + r$. Мы получили представление (2) с $h = h_1 + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$. Докажем теперь единственность представления (2). Если $f = gk + s$ — другое такое представление (и значит многочлен s равен 0 или его степень меньше m), то мы вычтем одно из другого и получим:

$$g(h - k) + r - s = 0$$

$$g(h - k) = s - r$$

Если многочлен $s - r$ равен 0, то $s = r$ и $h = k$. Если же $s - r \neq 0$, то по условию он имеет степень меньшую m и мы приходим к противоречию, так как он оказывается равным многочлену $g(h - k)$, получающемуся из g умножением на $h - k$, то есть имеющему степень не меньшую, чем g, которая равна m.

Прочитайте теперь, пожалуйста, доказательство теоремы 4 в гл.I и убедитесь, что наше доказательство ему совершенно параллельно. С другой стороны, если выполнить все действия, подразумеваемые при применении метода математической индукции (то есть перейти от f_1 к многочлену f_2 еще меньшей степени и т.д., пока не получим остаток r, степени, меньшей m), то мы получим обычное правило деления многочлена на многочлен “уголком”, применяемое в школе. Например, если $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$, а $g(x) = x^2 + 2x - 1$, то деление “уголком” происходит по схеме:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2-2x+5 & x^2+2x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3+2x^2-x\quad} & x+1 \\
x^2-x+5 & \\
\underline{x^2+2x-1} & \\
-3x+6 &
\end{array}
$$

Это значит, что мы подбираем старший член многочлена $h(x)$ так, чтобы будучи помноженным на старший член многочлена $g(x)$ (то есть x), он дал старший член многочлена $f(x)$ (то есть x^2). Поэтому в качестве старшего члена под уголком берем x. В первой строке таблицы стоит $f(x)$, во второй — $g(x)x$ (произведение $g(x)$ на старший член под уголком). Их разность стоит в третьей строке. Теперь подбираем следующий член под уголком так, чтобы его произведение на старший член многочлена $g(x)$ (то есть x^2) дало старший член многочлена, полученного в третьей строке (то есть x^2). Поэтому вторым числом под уголком является 1. Теперь повторяем всю операцию. Так как в пятой строке мы получили многочлен первой степени (меньшей, чем степень $g(x)$, равная 2), то на этом процесс заканчивается. Мы видим, что

$$x^3+3x^2-2x+5=(x^2+2x-1)(x+1)-3x+6.$$

Как и в случае чисел, представление (1) называется *делением с остатком* многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, многочлен $h(x)$ называется *неполным частным*, а $r(x)$ — *остатком* при делении $f(x)$ на $g(x)$.

Деление многочлена на многочлен с остатком аналогично такому же делению чисел и даже проще, так как складывая члены одной степени, мы получаем члены той же степени и мы не встретимся с тем, что в случае чисел называется "переносом в следующий десятичный разряд".

Дословно повторяя рассуждения, приведенные в гл.I в случае чисел, мы можем применить теорему 1 к нахождению наибольшего общего делителя двух многочленов. А именно, в обозначениях теоремы 1 имеет место аналог леммы 5 из гл.I: НОД$(f,g)=$НОД(g,r), точнее говоря, у пары (f,g) и пары (g,r) одинаковые общие делители. Теперь мы можем воспользоваться таким же алгоритмом Евклида, как и в гл. I: разделить с остатком g на $r:\ g=rh_1+r_1,\ r$ на r_1 и т.д., получив последовательность многочленов убывающих степеней: $r,r_1,r_2,\dots,r_k$. Мы вынуждены будем остановиться, когда придем к многочлену $r_{k+1}=0$, то есть если будет $r_{k-1}=r_kh_k$. Из цепочки равенств НОД$(f,g)=$НОД$(r,r_1)=\dots=$НОД(r_{k-1},r_k) мы видим, что НОД$(f,g)=$НОД(r_{k-1},r_k). Но так как само r_k является делителем r_{k-1}, то НОД$(r_{k-1},r_k)=r_k$ и значит НОД$(f,g)=r_k$ — последнему ненулевому остатку в алгоритме Евклида. Надо только заметить, что, в отличие от натуральных чисел, НОД(f,g) определен не однозначно: вместе с каждым многочленом $d(x)$, являющимся общим делителем $f(x)$ и $g(x)$, их общим делителем является и многочлен $c \cdot d(x)$, где c — отличное от нуля число. Поэтому и НОД(f, g) определен с точностью до умножения на числовой множитель.

Теорема 1 принимает особенно простой и полезный вид в случае, когда $g(x)$ — многочлен первой степени. Тогда можно написать $g(x) = ax + b$ с $a \neq 0$. Так как свойства делимости на g не меняются при умножении его на число, то умножим $g(x)$ на a^{-1}. Этим мы добьемся того, что коэффициент при x станет равным 1. Запишем тогда $g(x)$ в виде $g(x) = x - \alpha$ (почему α удобнее писать с минусом, будет вскоре видно). Согласно теореме 1, для любого многочлена $f(x)$ имеется представление

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) + r \tag{3}$$

Но в нашем случае степень r меньше 1, то есть равна 0: r *есть число*. Можно ли узнать это число, не проводя деления с остатком? Очень просто — для этого достаточно положить в тождестве (3) $x = \alpha$. Мы получим для числа r выражение $r = f(\alpha)$ и можем переписать равенство (3) в виде

$$f(x) = (x - \alpha)h(x) + f(\alpha) \tag{4}$$

Многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha$ тогда и только тогда, когда остаток от его деления на $x - \alpha$ равен 0. Но, согласно равенству (4), он равен $f(\alpha)$. Мы получаем утверждение, которое называется *теоремой Безу*.

Теорема 2. *Многочлен $f(x)$ тогда и только тогда делится на $x - \alpha$, когда α является его корнем.*

Например, многочлен $x^n - 1$ имеет корень $x = 1$. Поэтому $x^n - 1$ делится на $x - 1$. Это деление было выполнено нами раньше: смотри формулу (12) гл.I (с заменой n на $r + 1$ и x на a).

Несмотря на простое доказательство, теорема Безу связывает два совершенно разных понятия: делимости и корня, а поэтому имеет много важных применений. Например, что можно сказать об *общих корнях* многочленов f и g, то есть о решениях системы уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$? По теореме Безу число α является их общим корнем, если и f, и g делятся на $x - \alpha$. Но тогда на $x - \alpha$ делится НОД(f, g), который мы можем найти при помощи алгоритма Евклида. Если $d(x) =$НОД(f, g), то $d(x)$ делится на $x - \alpha$, то есть $d(\alpha) = 0$. Таким образом, вопрос об общих корнях многочленов f и g сводится к вопросу о корнях многочлена d, имеющего, вообще говоря, гораздо меньшую степень. Проиллюстрируем нахождение общего наибольшего делителя многочленов на случае двух многочленов второй степени, которые запишем в виде $f(x) = x^2 + ax + b$ и $g(x) = x^2 + px + q$ (к такому виду их можно привести путем умножения на числа). По общему правилу делим f с остатком на g:

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + ax + b & \underline{\;x^2 + px + q\;} \\
\underline{x^2 + px + q} & \;1 \\
(a - p)x + (b - q) &
\end{array}$$

Остаток $r(x) = (a-p)x + (b-q)$ и мы знаем, что НОД(f,g) =НОД(g,r). Здесь надо отдельно рассмотреть случай $a = p$. Если и $b = q$, то $f(x) = g(x)$ и система уравнений $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ сводится к одному уравнению $f(x) = 0$. Если же $b \neq q$, то $r(x)$ — отличное от нуля число и f и g не имеют общих множителей. Наконец, если $a \neq p$, то проще заметить, что $r(x)$ имеет единственный корень $\alpha = \dfrac{b-q}{p-a}$. Мы знаем, что НОД$(f,g)$ =НОД(g,r) и достаточно подставить α в $g(x)$, чтобы узнать, будет ли $g(x)$ делиться на $x-\alpha$. Мы получим соотношение

$$\Big(\frac{b-q}{p-a}\Big)^2 + p\Big(\frac{b-q}{p-a}\Big) + q = 0$$

или, умножая на отличное от 0 число $p-a$, равносильное соотношение

$$(b-q)^2 + p(b-q)(p-a) + q(p-a)^2 = 0 \tag{4}$$

Во втором и третьем члене этого равенства есть общий множитель $p-a$. Вынося его за скобки, раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы запишем соотношение (4) в виде

$$(q-b)^2 + (p-a)(pb-aq) = 0$$

Выражение $D = (q-b)^2 + (p-a)(pb-aq)$ называется *результантом* многочленов f и g. Мы видели, что условие $D = 0$ необходимо и достаточно для существования у $f(x)$ и $g(x)$ общего непостоянного множителя при $p \neq a$. Но при $p = a$ условие $D = 0$ превращается в $q = b$, а это, как мы видели, равносильно существованию у f и g общего непостоянного множителя при $p = a$. Таким образом, требование $D = 0$ во всех случаях необходимо и достаточно для того, чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имели общий непостоянный множитель. В принципе так же, но технически, конечно, сложнее, можно для многочленов $f(x)$ и $g(x)$ любых степеней найти выражение от их коэффициентов, равенство которого нулю необходимо и достаточно для того, чтобы многочлены имели общий непостоянный множитель.

Другое важное применение теоремы Безу связано с числом корней многочлена. Пусть многочлен $f(x)$ не равен тождественно 0, то есть $f \neq 0$. Предположим, что кроме корня α_1 многочлен $f(x)$ имеет другой корень $\alpha_2 \neq \alpha_1$. По теореме Безу $f(x)$ делится на $x - \alpha_1$:

$$f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x). \tag{5}$$

Подставим в это тождество значение $x = \alpha_2$. Так как α_2 — тоже корень многочлена, то $f(\alpha_2) = 0$. Значит $(\alpha_2 - \alpha_1)f_1(\alpha_2) = 0$ и (так как $\alpha_2 \neq \alpha_1$), то $f_1(\alpha_2) = 0$, то есть α_2 — корень многочлена $f_1(x)$. Применяя теорему Безу теперь уже к многочлену $f_1(x)$, получаем равенство $f_1(x) = (x-\alpha_2)f_2(x)$, а подставляя в равенство (5), видим, что

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$$

Предположим, что многочлен $f(x)$ имеет k разных корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Повторяя наше рассуждение k раз, получим, что $f(x)$ должен делиться на $(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)$:

$$f(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_k)f_k(x). \tag{6}$$

Пусть степень многочлена $f(x)$ равна n. Справа в равенстве (6) стоит многочлен степени не меньше, чем k, а слева — степени n. Значит, $n \geqslant k$. Словами это выражается так:

Теорема 3. *Число различных корней многочлена, не равного тождественно нулю, не превосходит его степени.*

Конечно, для многочлена, тождественно равного нулю, все числа являются его корнями. Теорема 3 была доказана в XVIIв. философом и математиком Декартом.

Теорема 3 дает возможность ответить на вопрос, который мы до сих пор обходили: что значит *равенство многочленов*? Одно понимание таково: приведем в обоих многочленах подобные члены, то есть запишем их в виде

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, \qquad g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m;$$

мы будем считать их равными, если все коэффициенты одинаковы: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ и т.д. Так мы понимаем равенство $f = 0$ — все коэффициенты многочлена f равны нулю. Другое понимание термина "равенство" такое: многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны, если при подстановке вместо x любого числа c мы получим равные числа, то есть $f(c) = g(c)$ для всех c. Докажем, что эти два понятия "равенства" на самом деле совпадают. Но сначала мы должны их различать и в первом случае будем говорить, что "у $f(x)$ и $g(x)$ совпадают все коэффициенты", а во втором, что "$f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения при всех значениях x".

Очевидно, что если у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ все коэффициенты совпадают, то совпадают и их значения при всех значениях x. Обратное утверждение мы докажем в более сильной форме: достаточно предполагать, что значения многочленов $f(x)$ и $g(x)$ совпадают не при всех значениях x, а при каких-то $n+1$ значениях, где n не меньше, чем степени обоих многочленов.

Теорема 4. *Пусть степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ не превосходят n и они принимают одинаковые значения при некоторых $n+1$ различных значениях x. Тогда коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$ совпадают.*

Доказательство. Предположим, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения при $n+1$ значениях x: $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, то есть

$$f(\alpha_1) = g(\alpha_1),\ f(\alpha_2) = g(\alpha_2),\ \ldots,\ f(\alpha_{n+1}) = g(\alpha_{n+1})$$

Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$ (здесь "=" означает равенство коэффициентов). Мы видели, что отсюда следует $h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha)$ для любого α и, в частности, $h(\alpha_1) = 0$, $h(\alpha_2) = 0$, $\ldots$, $h(\alpha_{n+1}) = 0$, то есть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ являются корнями многочлена $h(x)$. Но степени многочленов f и g не превосходят n, поэтому и степень многочлена h не превосходит n. Мы получаем противоречие с теоремой 3, если только не предположим, что $h = 0$, то есть, что все коэффициенты многочлена h равны 0. Отсюда следует, что коэффициенты многочленов f и g совпадают.

Теперь мы можем употреблять термин "равенство" в отношении многочленов, не уточняя в каком из двух смыслов мы его понимаем.

Теорема 4 указывает на интересное свойство "жесткости" многочленов. А именно, если нам известны значения многочлена $f(x)$ степени не большей n, при каких-то $n+1$ значениях неизвестной x, то этим уже однозначно определены коэффициенты многочлена $f(x)$, а значит и его значения при *всех других* значениях неизвестной x. Заметим, что в этой фразе слова "коэффициенты однозначно определены" означает лишь, что *не может быть* двух разных многочленов с указанным свойством. Поэтому естественно возникает вопрос о *существовании* такого многочлена. Более подробно: пусть заданы $n+1$ различных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ и $n+1$ различных чисел $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$; существует ли такой многочлен $f(x)$ степени не большей чем n, что $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_{n+1}) = y_{n+1}$? Теорема 4 утверждает лишь, что если такой многочлен существует, то только один. Задача о построении такого многочлена называется *задачей интерполяции*. Она часто возникает при обработке результатов эксперимента, когда некоторая величина $f(x)$ измерена лишь при определенных значениях $x = x_1,\ x = x_2, \ldots,\ x = x_{n+1}$ и надо сделать какие-то правдоподобные допущения о ее значениях для остальных значений x. Данные задаются тогда таблицей

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n+1}
$f(x)$	y_1	y_2	$\ldots$	y_{n+1}

(7)

Одним из возможных правдоподобных допущений было бы такое: построить многочлен $f(x)$ степени не большей n, для которого $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_{n+1}) = y_{n+1}$ и положить нашу величину равной $f(x)$ при всех других значениях x. Но существует ли такой многочлен? Мы сейчас докажем, что существует и найдем для него формулу. Он называется *интерполяционным многочленом*, соответствующим таблице (7). Чтобы вывести формулу для интерполяционного многочлена в общем случае, сделаем это сначала для *простейшей задачи интерполяции*, когда в таблице (7) все значения $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ равны 0, кроме одного. Пусть $y_1 = y_2 = \ldots = y_{k-1} = y_{k+1} = \ldots = y_{n+1} = 0$, так что таблица принимает вид

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\ldots$	x_{n+1}
$f(x)$	0	0	$\ldots$	0	y_k	0	$\ldots$	0

Для интерполяционного многочлена $f_k(x)$, который будет решением этой задачи интерполяции, нам тем самым дано, что n чисел $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_{n+1}$ (то есть все числа $x_1, ...x_{n+1}$ кроме x_k) являются его корнями. Но тогда он должен делиться на произведение соответствующих разностей $x - x_i$. Так как разностей будет n, а степень многочлена по условию не больше, чем n, то он может отличаться от этого произведения лишь постоянным множителем. То есть, мы *должны положить*

$$f_k(x) = c_k(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_{n+1}) \tag{8}$$

Наоборот, любой многочлен такого вида удовлетворяет нужным условиям для всех $x_1, ..., x_{n+1}$ кроме, может быть $x = x_k$. Чтобы он удовлетворял и условию для x_k надо положить $x = x_k$ в равенстве (8) и найти из полученного равенства значение для c_k. Так как $f_k(x_k)$ должно быть равно y_k, то мы получим

$$c_k = \frac{y_k}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_{n+1})}$$

$$f_k(x) = c_k(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{n+1})$$

Эту формулу можно переписать короче, введя вспомогательный многочлен степени $n+1$ $F(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{n+1})$. Тогда произведение $(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{n+1})$ равно $\dfrac{F(x)}{x - x_k}$. Положив $\dfrac{F(x)}{x - x_k} = F_k(x)$, мы получим

$$c_k = \frac{y_k}{F_k(x_k)}$$

$$f_k(x) = \frac{y_k}{F_k(x_k)} F_k(x) \tag{9}$$

Переходя к случаю произвольной задачи интерполяции с таблицей (7), остается только заметить, что ее решением является сумма всех многочленов $f_k(x)$, соответствующих всем простейшим задачам интерполяции:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n+1}(x)$$

Действительно, если мы положим $x = x_k$, то справа обратятся в 0 все члены, кроме $f_k(x_k)$, а так как $f_k(x)$ соответствует k-й простейшей задаче интерполяции, то $f_k(x_k) = y_k$. Наконец, степени многочленов $f_1(x), ..., f_{n+1}(x)$ не превосходят n и, значит, это верно и для их суммы. Мы можем переписать полученную формулу в виде

$$f(x) = \frac{y_1}{F_1(x_1)} F_1(x) + \frac{y_2}{F_2(x_2)} F_2(x) + \cdots + \frac{y_{n+1}}{F_{n+1}(x_{n+1})} F_{n+1}(x), \tag{10}$$

$$\text{где} \qquad F_k(x) = \frac{F(x)}{x - x_k}, \qquad F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1}).$$

Обратим внимание на неожиданное тождество, вытекающее из формулы для интерполяционного многочлена. Рассмотрим задачу интерполяции, соответствующую таблице

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n+1}
$f(x)$	x_1^k	x_2^k	$\ldots$	x_{n+1}^k

где k — натуральное число, не превосходящее n или $k = 0$. С одной стороны, очевидно, что этой задаче интерполяции удовлетворяет многочлен $f(x) = x^k$. С другой стороны, он должен записываться по формуле (10). Мы получаем, что

$$x^k = \frac{x_1^k}{F_1(x_1)} F_1(x) + \frac{x_2^k}{F_2(x_2)} F_2(x) + \cdots + \frac{x_{n+1}^k}{F_{n+1}(x_{n+1})} F_{n+1}(x),$$

где $F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n+1})$, а $F_i(x) = \dfrac{F(x)}{x - x_i}$. Многочлены $F_i(x)$ имеют степень n и коэффициент при x^n равен 1. Если $k < n$, то и справа должен стоять многочлен степени меньшей, чем n и все члены степени n должны, следовательно, сократиться. То есть, должно иметь место равенство

$$\frac{x_1^k}{F_1(x_1)} + \frac{x_2^k}{F_2(x_2)} + \cdots + \frac{x_{n+1}^k}{F_{n+1}(x_{n+1})} = 0$$

для $k < n$. Если же $k = n$, то коэффициент при x^n должен быть равен 1 и мы должны иметь

$$\frac{x_1^n}{F_1(x_1)} + \frac{x_2^n}{F_2(x_2)} + \cdots + \frac{x_{n+1}^n}{F_{n+1}(x_{n+1})} = 1.$$

Заметьте, что здесь $F(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{n+1})$, $F_k(x) = \dfrac{F(x)}{x - x_k}$, так что мы имеем некоторые тождества между произвольными числами $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Задачи.

1. Напишите последние тождества для $n = 1$ и 2, то есть для $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ и $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Проверьте их потом непосредственным вычислением.

2. Разделите "уголком" $x^{n+1} - 1$ на $x - 1$ и получите таким образом другой вывод формулы (12) гл.I.

3. Разделите с остатком $x^n - a$ на $x^m - b$ (Указание: ответ зависит от деления с остатком n на m).

4. Почему при выводе формулы (6) нельзя было рассуждать короче: раз $f(x)$ делится на каждое $x - \alpha_i$, то он делится на их произведение? Убедитесь, что для чисел утверждение: если n делится на a и на b, то n делится и на ab — неверно. Убедитесь, что оно не верно и для многочленов.

5. Докажите, что любой многочлен может быть представлен в виде произведения двучленов $x - \alpha_i$ и многочлена, не имеющего корней. Докажите, что такое представление для каждого заданного многочлена — единственно.

6. Пусть $F(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ различны между собой, а $f(x)$ – многочлен степени меньшей n. Докажите, что дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ равна сумме дробей вида $\frac{a_k}{x - x_k}$, $k = 1, \ldots, n$. Найдите формулы для a_k.

7. Докажите, что если $g(x)$ — многочлен степени меньшей, чем n, а числа $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и многочлены $F_i(x)$ имеют тот же смысл, что и в конце § 1, то

$$\frac{g(x)}{F_1(x_1)} + \ldots + \frac{g(x_{n+1})}{F_{n+1}(x_{n+1})} = 0.$$

8. То же, что и в задаче 7, но многочлен $g(x)$ имеет степень n, а коэффициент при x^n равен a. Докажите, что

$$\frac{g(x)}{F_1(x_1)} + \ldots + \frac{g(x_{n+1})}{F_{n+1}(x_{n+1})} = a.$$

§2. Кратные корни и производная.

Уравнение $x^2 - a = 0$ при $a > 0$ имеет два корня, задаваемые формулой $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$, где $\sqrt{a}$ — арифметическое значение корня квадратного из a. При $a = 0$ та же формула дает два одинаковые значения. Точно так же, формула для решения произвольного квадратного уравнения иногда дает два одинаковых корня. Имеет ли место подобное явление для уравнений произвольной степени? На первый взгляд сама постановка вопроса не имеет смысла. Что значит, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два *равных* корня? Мы можем любой корень уравнения написать на бумаге сколько угодно раз и всегда это будут равные числа! Но в случае квадратного уравнения для ответа мы прибегли к формуле для его решения. И в общем случае речь идет о том, чтобы при помощи дополнительных соображений дать разумное *определение*, когда надо считать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два равные корня $x = \alpha$ и $x = \alpha$.

Такие соображения подсказывает теорема Безу (теорема 2). Пусть многочлен $f(x)$ имеет корень $x = \alpha$. По теореме Безу он делится на $x - \alpha$ и представляется в виде $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен на 1 меньшей степени. Если многочлен $g(x)$ опять имеет корень $x = \alpha$, то мы будем говорить, что многочлен $f(x)$ *имеет два корня, равных* α. По теореме Безу тогда и $g(x)$ представляется в виде $g(x) = (x - \alpha)h(x)$ и значит

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \tag{11}$$

Мы можем сказать, что имеет место представление (6), в котором содержатся два множителя $x - \alpha$. Это соответствует интуитивному представлению о том, что имеется два одинаковых корня.

Если в представлении (11) опять $h(x)$ имеет корень α, то мы будем говорить, что $f(x)$ имеет *три корня*, равных α. Вообще, если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = (x - \alpha)^r u(x)$, где $u(x)$ — многочлен, не имеющий α корнем, то мы будем говорить, что многочлен $f(x)$ имеет r *одинаковых корней*, равных α. Если $r \geqslant 2$, то α называется *кратным корнем*. Таким образом, α — кратный корень, если $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^2$. Если многочлен $f(x)$ имеет ровно k корней, равных α, то k называется *кратностью* корня α. Тогда $f(x)$ представляется в виде $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$, где многочлен $g(x)$ не имеет α корнем, то есть $g(\alpha) \neq= 0$.

Например, пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корень $x = \alpha$. Деля $x^2 + px + q$ на $x - \alpha$, получим

$$\begin{array}{l|l}
x^2 + px + q & x - \alpha \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 - \alpha x} & x + p + \alpha \\
\quad (p + \alpha)x + q & \\
\quad \underline{(p + \alpha)x - \alpha(p + \alpha)} & \\
\qquad\qquad q + p\alpha + \alpha^2 &
\end{array}$$

То есть $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x + p + \alpha) + (\alpha^2 + p\alpha + q)$. Так как α — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и, значит, $x^2 + px + q = (x - \alpha)(x + p + \alpha)$. По нашему определению уравнение имеет два корня, равных α, если $x + p + \alpha$ имеет корень α, то есть $2\alpha + p = 0$. Отсюда $\alpha = -\frac{p}{2}$. Так как $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, то подставляя сюда

$\alpha = -\frac{p}{2}$, получаем, что $-\frac{p^2}{4} + q = 0$. Это известное условие того, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет равные корни.

Для уравнения третьей степени $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ вычисления лишь несколько сложнее. Пусть это уравнение имеет корень α. Делим $x^3 + ax^2 + bx + c$ на $x - \alpha$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + ax^2 + bx + c & x - \alpha \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - \alpha x^2} & x^2 + (a+\alpha)x + b + a\alpha + \alpha^2 \\
\quad (a+\alpha)x^2 + bx + c & \\
\quad \underline{(a+\alpha)x^2 - \alpha(a+\alpha)x} & \\
\qquad (b + a\alpha + \alpha^2)x + c & \\
\qquad \underline{(b + a\alpha + \alpha^2)x - \alpha(b + a\alpha + \alpha^2)} & \\
\qquad\qquad c + b\alpha + a\alpha^2 + \alpha^3 &
\end{array}$$

По условию $\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, поэтому $x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x^2 + (a + \alpha)x + b + a\alpha + \alpha^2)$. Согласно нашему определению, уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет два одинаковых корня, равных α, если, во-первых, α является корнем уравнения, а, во-вторых α является корнем многочлена $x^2 + (a + \alpha)x + b + a\alpha + \alpha^2$. Иными словами, $\alpha^2 + (a + \alpha)\alpha + b + a\alpha + \alpha^2 = 0$, то есть $3\alpha^2 + 2a\alpha + b = 0$. Мы видим, что кратные корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ это *общие корни* многочленов $x^3 + ax^2 + bx + c$ и $3x^2 + 2ax + b$. Как мы видели в §1 — это корни многочлена НОД$(x^3 + ax^2 + bx + c, 3x^2 + 2ax + b)$, а этот наибольший общий делитель мы можем найти при помощи алгоритма Евклида.

Теперь применим те же рассуждения к многочлену произвольной степени: $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Не считая α корнем многочлена, разделим его с остатком на $x - \alpha$ при произвольном α. В качестве неполного частного мы получим многочлен $g(x)$ степени $n - 1$, в коэффициенты которого будет входить α, так что мы его обозначим через $g(x, \alpha)$. Мы видели (формула (3)), что остаток равен $f(\alpha)$:

$$f(x) = (x - \alpha)g(x, \alpha) + f(\alpha) \tag{12}$$

Положив в многочлене $g(x, \alpha)$ x равным α, мы получим многочлен от α, который называется *производной* многочлена $f(x)$ и обозначается $f'(\alpha)$. Таким образом, по определению

$$f'(\alpha) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\,(\alpha) \tag{13}$$

Такая запись может вызвать сомнения, так как при подстановке $x = \alpha$ как числитель, так и знаменатель выражения $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ обращается в 0 и мы получаем $\frac{0}{0}$. Формула требует разъяснения: на самом деле числитель *делится* на знаменатель (до подстановки $x = \alpha$) и мы подставляем $x = \alpha$ уже в частное, являющееся многочленом. Так мы могли бы придать смысл выражению $\frac{x^2 - 1}{x - 1}(1)$ пояснив, что $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ и мы рассматриваем $(x + 1)(1) = 2$.

Те из вас, кто будет изучать математику дальше, встретятся с понятием производной для других случаев, например, $f(x) = \sin x$ или $f(x) = 2^x$. Собственно говоря, она определяется той же самой формулой (13), но в общем случае труднее придать точный смысл выражению в правой части. В случае же многочленов все разъяснится применением теоремы Безу к многочлену $f(x) - f(\alpha)$.

Если в формуле (12) α является корнем многочлена $f(x)$, то есть $f(\alpha) = 0$, то мы получаем, что $f(x) = (x-\alpha)g(x,\alpha)$ и по нашему определению α является кратным корнем многочлена $f(x)$, если $g(x,\alpha)$ имеет α корнем, то есть $g(\alpha,\alpha) = 0$. Но это и значит, что $f'(\alpha) = 0$. Мы доказали утверждение:

Теорема 5. *Корень многочлена $f(x)$ тогда и только тогда является кратным, когда он является также корнем производной $f'(x)$.*

Мы видим, что кратный корень α является *общим корнем* многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Иными словами, α является корнем НОД$(f(x), f'(x))$, а этот наибольший общий делитель мы можем найти при помощи алгоритма Евклида и, как правило, он оказывается многочленом гораздо меньшей степени, чем степень многочлена $f(x)$.

Сейчас мы приведем в явном виде деление с остатком на $x-\alpha$, найдем многочлен $g(x,\alpha)$ в формуле (12) и выведем явную формулу для производной многочлена.

Можно было бы произвести деление $f(x)$ с остатком на $x-\alpha$ "уголком" и найти в явном виде неполное частное $g(x,\alpha)$ и остаток $f(\alpha)$. Но короче поступить по-другому. Вспомним, что $f(x)$ есть сумма членов вида $a_k x^k$, а поэтому $f(x) - f(\alpha)$ — сумма членов $a_k(x^k - \alpha^k)$. Многочлен $(x^k - \alpha^k)$ имеет корень $x = \alpha$ и значит, по теореме Безу делится на $x - \alpha$. Мы уже заметили (сразу после формулировки теоремы Безу), что само деление на $x - \alpha$ нами проделано раньше. Правда, только при $\alpha = 1$, но к этому случаю общий случай сводится просто. Мы должны воспользоваться формулой (12) гл. I (с заменой $r+1$ на k)

$$(x^k - 1) = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)$$

Подставим вместо x отношение $\frac{x}{\alpha}$:

$$(\frac{x^k}{\alpha^k} - 1) = (\frac{x}{\alpha} - 1)(\frac{x^{k-1}}{\alpha^{k-1}} + \frac{x^{k-2}}{\alpha^{k-2}} + \cdots + \frac{x}{\alpha} + 1)$$

Умножив обе части равенства на α^n, получим:

$$x^k - \alpha^k = (x-\alpha)(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-2}x + \alpha^{k-1}) \tag{14}$$

Эта формула выведена нами при $\alpha \neq 0$ (так как мы рассматриваем $\frac{x}{\alpha}$), но она, очевидно, верна и при $\alpha = 0$.

Рассмотрим многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ и разность $f(x) - f(\alpha)$. Она равна, как мы видели, сумме членов $a_k(x^k - \alpha^k)$. Разделим каждый такой член, воспользовавшись формулой (14). Мы получим:

$$\frac{a_k(x^k - \alpha^k)}{x-\alpha} = a_k(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \cdots + \alpha^{k-2}x + \alpha^{k-1})$$

Если мы положим (в правой части!) $x = \alpha$, то получим член $ka_k\alpha^{k-1}$. Поэтому для многочлена $g(x,\alpha)$ в формуле (12) при $x = \alpha$ мы получим, что $g(x,\alpha)(\alpha) = g(\alpha,\alpha)$ есть сумма членов $ka_k\alpha^{k-1}$, то есть $a_1+2a_2\alpha+3a_3\alpha^2+\cdots+na_n\alpha^{n-1}$. Иными словами, мы вывели формулу для производной $f'(x)$ многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}. \tag{15}$$

Сравните это с тем, что мы получили раньше для многочленов степени 2 и 3 и убедитесь, что там мы вывели частные случаи формулы (15) при $n = 2$ и $n = 3$.

Понятие производной многочлена важно не только в связи с вопросом о кратных корнях, оно имеет много других приложений. Поэтому мы докажем сейчас основные свойства производной. Все они доказываются прямо исходя из определения, то есть равенства (12)

а) Производная постоянного многочлена. Если $f(x) = a_0$, то, по определению $f(x) = f(\alpha)$ и $g(x,\alpha) = 0$, поэтому $f'(\alpha) = 0$, то есть $f'(x) = 0$.

б) Производная суммы. Пусть f_1 и f_2 — два многочлена и $f = f_1 + f_2$. Мы имеем равенства

$$f_1(x) = f_1(\alpha) + (x-\alpha)g_1(x,\alpha) \tag{16}$$
$$f_2(x) = f_2(\alpha) + (x-\alpha)g_2(x,\alpha)$$

и соответственно $f_1'(\alpha) = g_1(\alpha,\alpha)$, $f_2'(\alpha) = g_2(\alpha,\alpha)$. Сложив формулы (16), получим

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)g(x,\alpha),$$

где $g(x,\alpha) = g_1(x,\alpha) + g_2(x,\alpha)$. Поэтому $f'(\alpha) = g(\alpha,\alpha) = g_1(\alpha,\alpha) + g_2(\alpha,\alpha) = f_1'(\alpha) + f_2'(\alpha)$, то есть

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'.$$

Отсюда для суммы любого числа многочленов сразу получаем индукцией по числу слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_r)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_r'.$$

в) Умножение на число. Пусть $f_1(x) = a \cdot f(x)$. Тогда из равенства $f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)g(x,\alpha)$ и $g(\alpha,\alpha) = f'(\alpha)$, умножив на a, получаем

$$f_1(x) = af(x) = af(\alpha) + (x-\alpha)ag(x,\alpha),$$

то есть $f_1(x) = f_1(\alpha) + (x-\alpha)ag(x,\alpha)$ и $f_1'(\alpha) = af'(\alpha)$:

$$(af)' = af'.$$

г) Производная произведения. Пусть $f = f_1f_2$. Перемножив равенства (16), мы получим:

$$f_1(x)f_2(x) = f_1(\alpha)f_2(\alpha) + (x-\alpha)g(x,\alpha),$$

где $g(x,\alpha) = g_1(x,\alpha)f_2(\alpha) + g_2(x,\alpha)f_1(\alpha) + (x-\alpha)g_1(x,\alpha)g_2(x,\alpha)$. Отсюда

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha)g(x,\alpha),$$

где $g(x,\alpha)$ нами выписано выше. Поэтому $f'(\alpha) = g(\alpha,\alpha) = g_1(\alpha,\alpha)f_2(\alpha) + g_2(\alpha,\alpha)f_1(\alpha) = f_1'(\alpha)f_2(\alpha) + f_2'(\alpha)f_1(\alpha)$. То есть

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_2' f_1 \tag{17}$$

Если f_1 — постоянная (многочлен нулевой степени), то отсюда ввиду а) снова вытекает в).

Индукцией по числу сомножителей получаем:

$$(f_1 f_2 \cdots f_r)' = f_1' f_2 \cdots f_r + f_1 f_2' \cdots f_r + f_1 f_2 \cdots f_r' \tag{18}$$

(в правой части в произведении $f_1 \cdots f_r$ по очереди каждый множитель заменяется его производной).

Действительно, согласно формуле (17)

$$(f_1 \cdots f_r)' = ((f_1 \cdots f_{r-1}) f_r)' = (f_1 \cdots f_{r-1})' f_r + f_1 \cdots f_{r-1} f_r'$$

Подставляя для $(f_1 \cdots f_{r-1})'$ выражение (18), которое может считаться доказанным, получаем искомую формулу.

Важный частный случай, когда в формуле (18) все сомножители равны:

$$(f^r)' = r f^{r-1} f' \tag{19}$$

Из определения производной легко проверить, что $x' = 1$. Поэтому $(x^r)' = r x^{r-1}$. Комбинируя введенные правила можно еще раз доказать явную формулу (15) для производной.

Вернемся к вопросу о кратных корнях многочленов. Пусть многочлен $f(x)$ имеет корень α кратности k. Это значит, что он представляется в виде $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$, где $g(x)$ уже не имеет α корнем. По формуле (17) $f'(x) = \left((x-\alpha)^k\right) g(x) + (x-\alpha)^k g'(x)$, а по формуле (19) $\left((x-\alpha)^k\right)' = k(x-\alpha)^{k-1}$ ($(x-\alpha)' = 1$ по формуле (15)). Поэтому $f(x) = k(x-\alpha)^{k-1}g(x) + (x-\alpha)^k g'(x) = (x-\alpha)^{k-1}p(-x)$, где $p(x) = kg(x) + (x-\alpha)g'(x)$. Здесь многочлен $p(x)$ не имеет α корнем: $p(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0$. Рассмотрим многочлен $d(x) =$НОД$(f(x), f'(x))$ и $\varphi(x) = \frac{f(x)}{d(x)}$ (так как $d(x)$ — делитель $f(x)$, то $f(x)$ делится на $d(x)$). Многочлен $d(x)$ делится на $(x-\alpha)^{k-1}$, так как и $f(x)$, и $f'(x)$ делятся на $(x-\alpha)^{k-1}$, но он не делится на $(x-\alpha)^k$, так как $p(\alpha) \neq= 0$ и, значит, $p(x)$ не делится на $x-\alpha$. В результате мы видим, что $\varphi(x)$ делится на $x-\alpha$ ровно в 1-й степени. Так как $\varphi(x)$ определяется независимо от корня α $\left(\varphi(x) = \frac{f(x)}{\text{НОД}(f(x),f'(x))}\right)$, то приведенное рассуждение верно для всех корней многочлена $f(x)$, и мы видим, что $\varphi(x)$ имеет те же корни, что и $f(x)$, но не имеет кратных корней. Благодаря этому, при исследовании корней многочленов мы всегда можем свести вопрос к многочленам без кратных корней.

Заметим, что неявно производная уже нам встречалась в связи с формулой для интерполяционного многочлена. Действительно, пусть $F(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_{n+1})$. Из формулы (14) мы видим, что $(x-x_i)' = 1$. Поэтому формула (18) дает нам:

$$F'(x) = (x-x_2)\cdots(x-x_{n+1}) + (x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{n+1}) + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

Если вспомнить обозначение $F_k(x) = \dfrac{F(x)}{x - x_k}$ из §1, то $F'(x) = F_1(x) + \cdots F_{n+1}(x)$. Подставляя сюда вместо x одно из значений $x = x_k$, мы увидим, что, так как все $F_i(x)$ при $i \neq k$ содержат множитель $x - x_k$, то значит $F_i(x_k) = 0$. Отсюда $F'(x_k) = F_k(x_k)$ и формулу (10) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{y_1}{F'(x_1)}F_1(x) + \frac{y_2}{F'(x_2)}F_2(x) + \cdots + \frac{y_{n+1}}{F'(x_{n+1})}F_{n+1}(x).$$

Задачи.

1. Многочлен $x^{2n} - 2x^n + 1$ очевидно имеет корень $x = 1$ и по теореме Безу делится на $x - 1$. Найдите частное от его деления на $x - 1$.

2. При каких значениях a и b многочлен $x^n + ax^{n-1} + b$ имеет кратный корень? Найдите значение корня.

3. При каких значениях a и b многочлен $x^3 + ax + b$ имеет кратный корень?

4. Докажите, что многочлен $x^n + ax^m + b$ не имеет корней кратности три и больше, отличных от 0.

5. Производная многочлена $f'(x)$ называется *второй производной* многочлена $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Найдите формулу для $(f_1f_2)''$, аналогичную формуле (17) (но, конечно, несколько более сложную).

6. Докажите, что производная многочлена тождественно равна 0 тогда и только тогда, когда многочлен — постоянная (то есть, когда он имеет степень 0).

7. Докажите, что для любого многочлена $f(x)$ существует такой многочлен $g(x)$, что $g'(x) = f(x)$ и что все такие многочлены $g(x)$ (при заданном $f(x)$) различаются лишь свободным членом.

8. Докажите, что число корней многочлена не превосходит его степени, если считать каждый корень столько раз, какова его кратность.

§3. Формула бинома.

В этом параграфе мы займемся важной формулой, которая выражает многочлен $(1+x)^n$ в привычном нам виде $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Для этого надо лишь раскрыть скобки в выражении $(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdots(1+x)$, перемножая в n сомножителях $(1+x)$ каждый член на каждый. Очевидно, после раскрытия скобок получатся члены вида x^k, но каждый такой член встретится несколько раз и после приведения подобных членов мы получим нужную формулу. Например для $n = 2$, как хорошо известно,

$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x) = 1(1+x) + x(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2.$$

Для $n = 3$ формула вам, вероятно, тоже известна. А если нет — то ее очень легко вывести, умножая формулу для $(1+x)^2$ на $1 + x$:

$$(1+x)^3 = (1+x)^2(1+x) = (1+2x+x^2)(1+x) =$$
$$(1+2x+x^2) + (1+2x+x^2)x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Коэффициент a_k при x^k в многочлене $(1+x)^n$ будет зависеть от индекса k, но также от того, какую степень $(1+x)^n$ мы хотим развернуть в форме многочлена. Чтобы учесть зависимость и от n, и от k, для этого коэффициента приняли обозначение C_n^k. Таким образом, C_n^k — это *по определению* коэффициенты в формуле

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \tag{20}$$

Например, $C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1; C_3^0 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1$. Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*. Наша задача заключается в том, чтобы их выписать в явном виде. Заметим, что некоторые из них мы можем сразу узнать: так как при перемножении многочленов старшие члены перемножаются, то старший член в многочлене $(1+x)^n$ равен x^n, то есть

$$C_n^n = 1. \tag{21}$$

Точно также при перемножении многочленов перемножаются свободные члены (значения при $x = 0$), поэтому свободный член многочлена $(1+x)^n$ равен 1, то есть

$$C_n^0 = 1. \tag{22}$$

В общем случае рассмотрим производную от обеих частей равенства (20). Слева, по формуле (19), мы получим $n(1+x)^{n-1}$, так как $(1+x)' = 1$ по формуле (15). Производная правой части вычисляется по формуле (15). Мы получаем:

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + kC_n^k x^{k-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1}.$$

Но и левую часть можно раскрыть по формуле (20), примененной для $n-1$. Коэффициент при x^{k-1} слева будет nC_{n-1}^{k-1}, а справа — kC_n^k. Мы видим, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ или

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1},$$

то есть коэффициент C_n^k просто выражается через коэффициент C_{n-1}^{k-1} с меньшими индексами. Применяя ту же формулу к C_{n-1}^{k-1}, получим что $C_n^k = \dfrac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2}$. Повторяя этот процесс r раз, получим формулу

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{k(k-1)\cdots(k-r+1)} C_{n-r}^{k-r}$$

(мы вычитаем из n в числителе и из k в знаменателе r раз значения $0,\ 1,\ \dots,\ r-1$). Наконец, положим $r = k$. Так как мы знаем, что $C_m^0 = 1$ для любого m, то получим формулу для C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \tag{23}$$

Это и есть искомое выражение.

Формула (20) с подставленными в нее явными выражениями (23) для биномиальных коэффициентов C_n^k называется *формулой бинома* (или "биномом Ньютона").

"Бином" здесь означает двучлен и подразумевается "формула для возведения двучлена в степень".

Формула бинома имеет очень много приложений и полезно иметь запись биномиальных коэффициентов (23) в разных видах. В знаменателе стоит произведение всех целых чисел от 1 до k. Произведение вида $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$ называется m— *факториал* и обозначается $m!$. В числителе стоит произведение целых чисел от n до $(n-k+1)$. Если домножить его на произведение целых чисел от $n-k$ до 1 (то есть на $(n-k)!$), то получится $n!$. Поэтому, умножая числитель и знаменатель формулы (23) на $(n-k)!$, мы придадим ей вид:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{24}$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$C_n^k = C_n^{n-k} \tag{25}$$

Заметьте, что и в формуле (23), и в формуле (24) сразу не ясно, что числитель делится на знаменатель, хотя мы это знаем, исходя из смысла коэффициентов C_n^k в формуле (20). Проще всего можно выразить тот факт, что выражение в правой части равенства (23) является целым числом, сказав, что *произведение любых k последовательных целых чисел делится на $k!$* Мы увидим позже, как из того факта, что правая часть формул (23) и (24) дают целые числа, вытекают интересные свойства простых чисел.

Теперь мы выведем важные свойства коэффициентов C_n^k. Первое из них вытекает из очевидного равенства $(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x)$, если развернуть $(1+x)^n$ и $(1+x)^{n-1}$ по формуле (20). Мы получим:

$$C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 x + \cdots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1})(1+x).$$

Слева коэффициент при x^k равен C_n^k, а справа он получается из суммы членов $C_{n-1}^k x^k \cdot 1$ и $C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} \cdot x$, то есть равен $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Поэтому

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{26}$$

Это очень удобная формула для вычисления коэффициентов C_n^k через коэффициенты с индексом $n-1$. Чтобы нагляднее ее представить, запишем коэффициенты C_n^k в виде треугольника, где C_n^k запишем в n-ой строке. Учитывая формулы (21) и (22), согласно которым в начале и конце каждой строки стоит 1, треугольник имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & \\
 & & 1 & & C_{n-1}^1 & & \ldots & & C_{n-1}^{n-2} & & 1 & & \\
 & 1 & & C_n^1 & & C_n^2 & & \ldots & & C_n^{n-1} & & 1 & \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots &
\end{array}$$

Формула (26) показывает, что каждый биномиальный коэффициент C_n^k равен сумме непосредственно над ним стоящих слева и справа коэффициентов. Приняв первые две строки как начальные данные, мы легко получаем значения для следующих коэффициентов:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

Этот треугольник называется “треугольником Паскаля”.

Второе свойство получится, если подставить в формулу (20) (определяющую биномиальные коэффициенты) $x = 1$. Слева мы получим 2^n, а справа — сумму всех биномиальных коэффициентов C_n^k при $k = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому *сумма всех чисел, стоящих в n-й строке треугольника Паскаля, равна* 2^n.

Наконец рассмотрим два соседних числа в одной строке: C_n^{k-1} и C_n^k. По формуле (24) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$. Так как $k! = (k-1)!k$, $(n-k+1)! = (n-k)!(n-k+1)$, то

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}.$$

Очевидно, что $\frac{n-k+1}{k} > 1$, когда $n-k+1 > k$, то есть $k < \frac{n+1}{2}$ и тогда $C_n^k > C_n^{k-1}$. Наоборот, если $k > \frac{n+1}{2}$, то так же получаем, что $C_n^k < C_n^{k-1}$. Поэтому *числа в одной строке треугольника Паскаля возрастают до середины, а потом убывают.* Если n четно, то в середине мы имеем один наибольший член $C_n^{\frac{n}{2}}$, а если нечетно, то два соседних равных друг другу наибольших: $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ и $C_n^{\frac{n+1}{2}}$. В этом случае при $k = \frac{n+1}{2}: \quad C_n^k = C_n^{k-1}$.

Формулу (20) (со значениями биномиальных коэффициентов C_n^k, определяемыми формулой (23)) можно представить в немного более общем виде. Для этого положим $x = \dfrac{b}{a}$ и умножим обе части равенства (20) на a^n. Мы получим формулу:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n \tag{27}$$

Эта формула доказана нами при $a \neq 0$ (так как мы делили на a), но она, очевидно, верна и при $a = 0$. Ее тоже называют "формулой бинома”.

Теперь мы скажем о некоторых следствиях формулы бинома и их приложениях. Как правило, каждое положение имеет тем больше приложений, чем оно проще. Так и в формуле бинома особенно часто приходится пользоваться значениями первых коэффициентов. Мы уже отметили, что самый первый коэффициент C_n^0 равен 1. Следующий за ним C_n^1 по формуле (23) равен n. Заметим, что по формуле (25) отсюда следует, что $C_n^n = 1$ (это мы уже отмечали) и $C_n^{n-1} = n$. Таким образом,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Это замечание полезно при исследовании уравнений. Уравнение степени n мы записывали в виде $a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$. То, что его степень равна именно n, означает, что $a_n \neq 0$. Поэтому мы можем разделить уравнение на a_n и получим равносильное уравнение, в котором уже $a_n = 1$. Дальше мы будем это предполагать и запишем уравнение в виде $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0$. Теперь произведем другое преобразование, заменяющее уравнение на равносильное. Для этого положим $x = y + c$, где y — новое неизвестное, а c — некоторое число. Подставив в наше уравнение это значение для x, мы из каждого члена a_mx^m получим член $a_m(y + c)^m$, который представим как многочлен от y по формуле бинома, а потом приведем подобные члены. В результате мы получим новый многочлен от y, который обозначим $g(y) = f(x + c)$. Так как y выражается через x: $y = x - c$, то уравнения $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ равносильны: корню $x = \alpha$ уравнения $f(x) = 0$ соответствует корень $y = \alpha - c$ уравнения $g(y) = 0$, а корню $g(\beta) = 0$ этого уравнения соответствует корень $x = \beta + c$ уравнения $f(x) = 0$. Посмотрим, как изменились коэффициенты уравнения при этой подстановке. Прежде всего, степень уравнения $g(y) = 0$ по-прежнему равна n и коэффициент при старшем члене по-прежнему равен 1. Это следует из того, что члены $a_m(y + c)^m$ при развертывании по формуле бинома дают члены степени $\leqslant m$ относительно y. Поэтому член степени n произойдет лишь из члена $(y + c)^n$ и будет равен (опять же по формуле бинома) y^n. Теперь обратим внимание на члены степени $n - 1$. По тем же причинам член степени $n - 1$ относительно y может возникнуть из члена $(y + c)^n$ и члена $a_{n-1}(y + c)^{n-1}$. Из последнего члена получится член $a_{n-1}y^{n-1}$, а в члене $(y + c)^n$ нам надо взять *второй* член при разложении по формуле бинома. Как мы видели, он равен $ny^{n-1}c$. Значит, в многочлене $g(y) = f(x + c)$ член степени $n - 1$ будет иметь вид $(a_{n-1} + nc)y^{n-1}$.

Этим можно воспользоваться для упрощения уравнения, подобрав число c так, чтобы член степени $n - 1$ обратился в 0: надо положить $a_{n-1} + nc = 0$, то есть $c = -a_{n-1}/n$. Нами доказано утверждение:

Теорема 6. *Производя в уравнении $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0$ подстановку $x = y - a_{n-1}/n$, мы получим равносильное уравнение $g(y) = 0$ степени n с коэффициентом при старшем члене, равном 1, но без члена степени $n - 1$ относительно y.*

Заметим, что для уравнения степени 2 теорема 6 дает формулу для его решения. Действительно, многочлен $g(y)$ имеет вид $y^2 + b_2$ и его корни сразу находятся: $y = \pm\sqrt{-b_2}$. Проведите указанную в теореме 6 подстановку, вычислите b_2, а отсюда и корни многочлена $f(x)$ и убедитесь, что таким образом мы получаем обычную формулу для решения квадратного уравнения. В случае многочлена произвольной степени мы получаем только некоторое его упрощение, иногда полезное. Например, мы видим, что любое уравнение третьей степени равносильно уравнению вида $x^3 + ax + b = 0$.

В заключение расскажем о применении формулы бинома к вычислению сумм степеней последовательных целых чисел. Речь идет о суммах

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + n^m \tag{28}$$

m-х степеней всех натуральных чисел, не превосходящих n. Вам, вероятно, известна формула $S_1(n) = \frac{m(m+1)}{2}$ (ср. задачу 5 к §1 гл. I). Начнем с некоторых замечаний о вычислении сумм общего вида. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ — любая бесконечная последовательность чисел. Нас будут интересовать суммы ее последовательных членов: $a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \ldots$ Первоначальную последовательность мы будем обозначать буквой a, тогда ее $(n+1)$-й член будет a_n (удобнее выписывать $(n+1)$-й член, а не n-й, начиная последовательность с a_0). Написанную выше последовательность сумм мы будем обозначать Sa, тогда ее $(n+1)$-й член равен

$$(Sa)_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

например, если $a_n = n^m$, $n = 0, 1, 2, ...$, то Sa — это последовательность сумм $S_m(n)$. Ясно, что зная последовательность Sa, мы можем восстановить последовательность a. Надо из $n+1$-го члена последовательности sa вычесть n-й член , и мы получим a_n. Действительно, если

$$b_n = (Sa)_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \tag{29}$$

$$b_{n-1} = (Sa)_{n-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, \tag{30}$$

то вычитая из равенства (29) равенство (30), получим:

$$b_n - b_{n-1} = a_n$$

Мы встречаемся с новой важной конструкцией. Вместе с произвольной последовательностью $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ рассмотрим последовательность $b_0, b_1 - b_0, b_2 - b_1, \ldots, b_{n+1} - b_n, \ldots$. Если первая последовательность обозначена b, то вторую обозначим Δb. Ее $n+1$-й член равен

$$(\Delta b)_0 = a_0, (\Delta b)_n = b_n - b_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Замеченную нами связь между последовательностями a и Sa можно записать теперь формулой $\Delta Sa = a$. Оказывается, что имеет место совершенно симметричная ей формула, а именно – верны оба соотношения

$$\begin{aligned} \Delta Sa &= a \\ S\Delta b &= b. \end{aligned} \tag{31}$$

Вместе их можно выразить, сказав, что операции S и Δ над последовательностями обратны друг другу. Первую формулу мы уже проверили. Для доказательства второй выпишем все равенства, определяющие числа $a_k = (\Delta b)_k$. для $k = 0, 1, ..., n-1$:

$$a_0 = b_0$$

$$a_1 = b_1 - b_0$$

$$a_2 = b_2 - b_1$$

....

$$a_n = b_n - b_{n-1}$$

и сложим их. Слева мы получим $a_0 + \cdots + a_n$, то есть, $(Sa)_n$, а справа все слагаемые сократятся, кроме b_n в последней формуле, так что мы получим: $(Sa)_n = b_n$, то есть вторую формулу (31).

Польза доказанных соотношений заключается в том, что часто проще не вычислять непосредственно суммы, образующие последовательность Sa, но угадать последовательность b, для которой $\Delta b = a$, тогда второе соотношение (31) даст нам, что $Sa = b$.

Эту идею мы и применим к суммам (28). Мы видели, что $S_m(n) = (Sa)_n$, где $a_n = n^m$. Как представить последовательность a, $a_n = n^m$, в виде $a = \Delta b$? Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 7. *Для каждого многочлена $f(x)$ степени m существует единственный многочлен $g(x)$ степени $m+1$ такой, что*

$$g(x) - g(x-1) = f(x) \tag{32}$$

и свободный член многочлена $g(x)$ равен 0.

Единственность многочлена $g(x)$ с заданными условиями доказать очень просто. Пусть $g_1(x)$ другой многочлен, удовлетворяющий соотношению $g_1(x) - g_1(x-1) = f(x)$ со свободным членом, равным 0. Вычтем из этого соотношения равенство (32). Если положить $g_1(x) - g(x) = g_2(x)$, то мы получим, что $g_2(x) - g_2(x-1) = 0$ и свободный член многочлена $g_2(x)$ равен 0, то есть $g_2(0) = 0$. Подставляя в вышестоящее равенство $x = 1$, увидим, что $g_2(1) = 0$. Подставляя $x = 2$, получим $g_2(2) = g_2(1) = 0...$ и так по индукции $g_2(n) = 0$ для всех натуральных n. То есть для многочлена $g_2(x)$ все натуральные числа являются корнями. Из теоремы 3 мы получаем, что это возможно лишь когда $g_2 = 0$, а значит, $g = g_1$.

Существование многочлена g докажем индукцией по m — степени многочлена f. Для $m = 0$ многочлен f является постоянной a и мы видим, что $g(x) = ax$ удовлетворяет условию (32). Пусть утверждение верно для многочленов f степени меньшей, чем m. Пусть $a_m x^m$ — старший член многочлена f. Подберем число a так, чтобы старший член многочлена $a(x)^{m+1} - a(x-1)^{m+1}$ был равен старшему члену $a_m x^m$ многочлена $f(x)$. Для этого напишем по формуле бинома:

$$(x-1)^{m+1} = x^{m+1} - (m+1)x^m + \cdots,$$

где точками обозначены члены степени, меньшей m. Отсюда

$$x^{m+1} - (x-1)^{m+1} = (m+1)x^m + \cdots$$

Ясно, что нам надо положить

$$a = \frac{a_m}{m+1} \tag{33}$$

Тогда в разности $f(x) - \frac{a_m}{m+1}\left[(x^{m+1} - (x-1)^{m+1}\right]$ члены степени m сократятся и эта разность будет иметь степень меньшую, чем m. Обозначив этот многочлен через

$h(x)$, мы уже можем предполагать по индукции, что для него существует такой многочлен $g_1(x)$ степени меньшей, чем $m+1$ и со свободным членом, равным 0, что $h(x) = g_1(x) - g_1(x-1)$, то есть

$$f(x) - \frac{a_m}{m+1}\Big[x^m - (x-1)^{m-1}\Big] = g_1(x) - g_1(x-1).$$

Перенося слагаемые в квадратных скобках в правую часть, мы получим, что $f(x) = g(x) - g(x-1)$, где

$$g(x) = \frac{a_m}{m+1}x^{m+1} + g_1(x).$$

Это и доказывает теорему. Разумеется, практически надо применять не индукцию, а тот же прием вычитания уже к многочлену $h(x)$ и так до тех пор, пока не дойдем до многочлена степени 0.

Вернемся теперь к вычислению сумм $S_m(n)$. Мы видели, что эти суммы равны b_n, где b — такая последовательность, что $\Delta b = a$, $a_n = n^m$. Применим теорему 7 к многочлену x^m. Мы получим многочлен $g(x)$ степени $m+1$ такой, что

$$g(x) - g(x-1) = x^m$$

и свободный член многочлена $g(x)$ равен 0. Подставляя в это равенство $x = n$, мы увидим, что последовательность $b_n = g(n)$ при $n \geqslant 1$ и $b_0 = g(0) = 0$ удовлетворяет условию $\Delta b = a$, то есть $a = Sb$. Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 8. *Суммы $S_m(n)$ выражаются в виде $g_m(n)$, где g_m — такой многочлен степени $m+1$, что $g_m(x) - g_m(x-1) = x^m$ и свободный член многочлена $g_m(x)$ равен* 0.

Заметим, что доказательство теоремы 7 дает нам способ найти многочлен $g_m(x)$ для каждого m. Рассмотрим, например, случай $m = 2$. По аналогии с последовательностями, будем обозначать многочлен $g(x) - g(x-1)$ через Δg, то есть полагать $(\Delta g)(x) = g(x) - g(x-1)$. Тогда для начала мы должны взять такой одночлен ax^3, что $\Delta(ax^3)$ имеет старший член, равный x^2. Согласно формуле (33), надо положить $a = \frac{1}{3}$ (здесь $m = 2$, $a_2 = 1$). По формуле бинома $\Delta\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(x-1)^3 = x^2 - x + \frac{1}{3}$ и $x^2 - \Delta\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x - \frac{1}{3}$. Теперь надо найти такой одночлен bx^2, что $\Delta(bx^2)$ имеет старший член, равный x. Согласно формуле (33), надо положить $b = \frac{1}{2}$ (здесь $m = 1$, $a_1 = 1$). По формуле бинома $\Delta\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(x-1)^2 = x - \frac{1}{2}$ и $x^2 - \Delta\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \Delta\left(\frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Наконец, $\frac{1}{6} = \Delta\left(\frac{1}{6}x\right) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}(x-1)$. Окончательно получаем, что $x^2 = \Delta\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right)$ и за $g(x)$ надо взять многочлен $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{(2x^2+3x+1)x}{6} = \frac{(2x+1)(x+1)x}{6}$. Мы получаем, что $S_2(n) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

К доказанному сделаем два замечания.

Замечание 1. Полученную формулу для сумм $S_m(n)$ можно резюмировать так. Для каждого m существует такой единственный многочлен $g_m(x)$ со свободным членом, равным 0, что $g_m(x) - g_m(x-1) = x^m$. Способ его вычисления содержится в доказательстве теоремы 7. Его степень равна $m+1$. Формула для $S_m(n)$ имеет вид $S_m(n) = g_m(n)$. Таким образом, вопрос сводится к исследованию замечательных многочленов $g_m(x)$. Многочлены $g_m(x)$ называются *многочленами Бернулли*. В Приложении дано гораздо более явное выражение этих многочленов при помощи одной замечательной последовательности рациональных чисел, называемых *числами Бернулли*.

Замечание 2.(Историческое) Введенные нами операции S и Δ, строящие по последовательности a последовательность Saб а по последовательности b — последовательность Δb, очень похожи на основные операции анализа, определяющие для функции $f(x)$ (однако, не для всякой!) *неопределенный интеграл* $\int f\mathrm{d}x$, и для функции g — ее *производную* g'. Наши операции S и Δ являются элементарными аналогами операций $\int f\mathrm{d}x$ и g'. В определении интеграла и производной также участвуют суммы и разности, но более сложным образом (в данном нами определении производной для случая, когда функция — многочлен, тоже участвуют разности — ср. формулу (13)). Как и в случае операций S и Δ операции взятия производной и интеграла обратны друг другу. Как и в нашем случае, вычисление производной проще, чем вычисление интеграла и интеграл функции проще всего вычислить, подобрав другую функцию, производная которой равна исходной функции.

Впрочем, между операциями над последовательностями и над функциями есть не только аналогия, но и более прямые связи. Так, вычисление интеграла функции $f(x)$ равносильно вычислению площади, ограниченной графиком этой функции, осью x и двумя перпендикулярами к оси x в точках $x = a$ и $x = b$ (рис. 1).

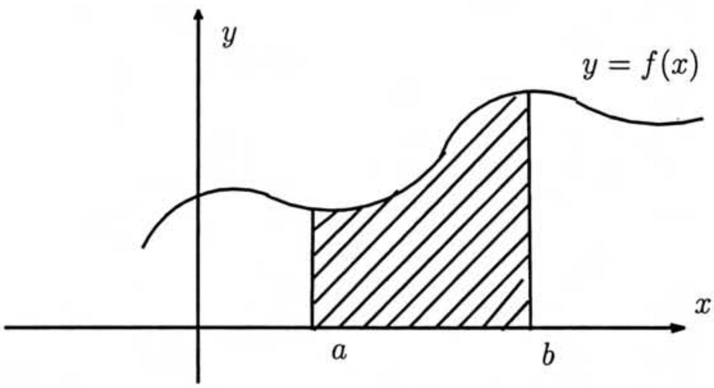


рис. 1

Мы, конечно, не будем этого доказывать, так как не давали и определения интеграла, а покажем, на простейшем примере, вычисление такой площади и его связь с разбиравшейся задачей.

Постараемся определить площадь, ограниченную параболой, являющейся графиком функции $y = x^2$, осью x и отрезком $x = 1$ (рис. 2).

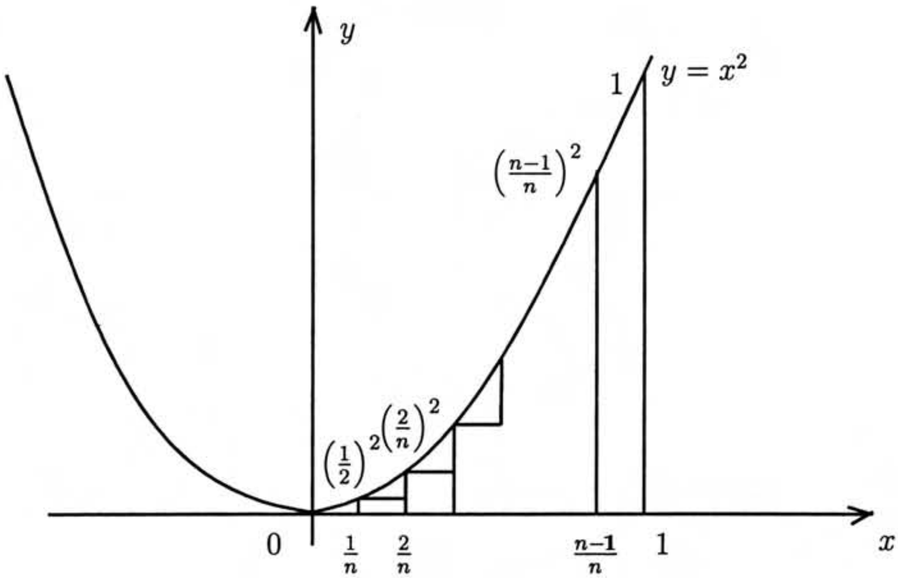


рис. 2.

Для этого разделим отрезок между 0 и 1 на большое число n равных частей с координатами $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$ и вычислим соответствующие значения $0, \left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \ldots, \left(\frac{n-1}{n}\right)^2, 1$ функции $y = x^2$. Построим прямоугольники с основанием, равным отрезку от $\frac{i}{n}$ до $\frac{i+1}{n}$ и высотой $\left(\frac{i}{n}\right)^2$. Многоугольник, составленный из этих прямоугольников, будет содержаться в куске параболы, площадь которого мы хотим определить и "на глазок" видно, что при очень большом n площадь s_n многоугольника будет очень мало отличаться от площади куска параболы (а точнее мы и не можем рассуждать, так как никак не уточняли понятие площади). Площадь же многоугольника равна сумме площадей составляющих его прямоугольников. Площадь i-го прямоугольника равна произведению основания $\frac{1}{n}$ на высоту $\left(\frac{i}{n}\right)^2$, то есть $\frac{i^2}{n^3}$. Поэтому площадь s_n многоугольника равна

$$s_n = \frac{0^2}{n^3} + \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} = \frac{S_2(n)}{n^3}.$$

Подставляя найденное выше значение для $S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, получим для площади многоугольника выражение (заменяя в выражении для $S_2(n)$ n на $n-1$)

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Ясно, что при все больших значениях n члены $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ и $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^2}$ становятся все меньше и площадь многоугольника приближается к $\frac{1}{3}$. Значит такова площадь фигуры, ограниченной параболой.

Мы изложили ход мысли, которому, в принципе, следовал Архимед (III в. до Р.Х.), впервые решивший эту задачу. (Архимед придумал искусственный прием, позволяющий в данном случае вместо вычисления суммы $S_2(n)$ обойтись суммой некоторой геометрической прогрессии. Но он знал формулу для $S_2(n)$ и применял ее для вычисления других площадей и объемов.)

Математики Нового времени были одержимы мечтой "превзойти древних" (то есть древнегреческих математиков), самым блистательным представителем которых в их глазах был Архимед. Поэтому их очень занимало решение рассмотренной выше задачи для функции $y = x^n$ со значениями n, большими 2. Решение было найдено впервые, по-видимому, французским математиком Ферма (XVII в.), причем сначала практически тем методом, который мы изложили (потом несколько проще). Тогда не была еще известна связь интеграла и производной, о которой мы говорили, и интеграл (то есть площадь) вычислялся непосредственно, из определения. Лишь позже было обнаружено, что (пользуясь современной терминологией) операции взятия производной и интеграла взаимно обратны. Это было установлено учителем Ньютона — Барроу. (Ньютон сотрудничал с Барроу, когда учился в университете, а потом занял кафедру Барроу, когда тот решил принять духовный сан). Систематически вычислять интеграл от функции f путем подбора такой функции g, что производная от g равна f, начал Ньютон. После этого вычисление интегралов и площадей тем способом, который мы изучили, стало ненужным. Теперь школьник старших классов легко находит интеграл от x^m при любом m, не прибегая к вычислению сумм $S_m(n)$.

Таким образом, если в I главе мы вращались в круге идей древнегреческих математиков (Пифагор, Теэтет, Евклид), то в этой главе встретились с идеями математики Нового времени (XVII в.).

Задачи.

1. Заметьте, что вычисленная нами в конце параграфа площадь s_n многоугольника <u>меньше</u> площади искомой фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, так как многоугольник расположен внутри этой фигуры. Постройте многоугольник, разбитый на прямоугольники с основанием — отрезки от $\frac{i}{n}$ до $\frac{i+1}{n}$ — и высотой $\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$, *содержащий* ту же фигуру. Поэтому его площадь s'_n <u>больше</u> площади фигуры. Вычислите площадь s'_n и докажите, что при увеличении числа n она будет тоже неограниченно приближаться к $\frac{1}{3}$. Это дает более убедительное (то есть "строгое") доказательство того, что искомая площадь фигуры равна $\frac{1}{3}$.

2. Попробуйте решить аналогичную задачу для "параболы степени m", заданной уравнением $y = x^m$. Убедитесь, что для ответа нам нет нужды знать полностью многочлен Бернулли $g_m(x)$, а нужно вычислить только коэффициент a_{m+1} в его старшем члене $a_{m+1}x^{m+1}$. Докажите, что $a_{m+1} = \frac{1}{m+1}$ и отсюда найдите площадь фигуры, ограниченной параболой с уравнением $y = x^m$, осью x и прямой $x = 1$.

3. Докажите, что площадь фигуры,ограниченной параболой $y = x^m$, осью x и прямой $x = a$ равна $\frac{1}{m+1}a^{m+1}$. Заметьте, что производная многочлена $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$ равна x^m. Это и есть проявление теоремы Барроу о том, что интегрирование и

нахождение производной — взаимно обратные операции.

4. Докажите, что суммы биномиальных коэффициентов с четными верхними индексами: $C_n^0 + C_n^2 + \cdots$ и с нечетными индексами: $C_n^1 + C_n^3 + \cdots$ — равны друг другу и найдите значение этих сумм.

5. Найдите соотношение между биномиальными коэффициентами, выражающими то, что $(1+x)^n(1+x^m) = (1+x)^{n+m}$. При $n = m$ выведите отсюда формулу для суммы квадратов биномиальных коэффициентов.

6. Докажите, что если p — простое число, то все биномиальные коэффициенты C_p^k при $k \neq 0,\ p$, делятся на p. Выведите отсюда, что $2^p - 2$ делится на p. Докажите, что для любого целого n число $n^p - n$ делится на p. Эту теорему впервые доказал Ферма.

7. Что можно сказать о последовательности a, если последовательность Δa состоит из одинаковых чисел? Что дает в этом случае формула (31)?

8. Найдите сумму $S_3(n)$ и проверьте, что $S_3(n) = (S_1(n))^2$.

9. Пусть a — произвольная последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Применим к последовательности Δa еще раз операцию Δ. Полученную последовательность $\Delta(\Delta a)$ обозначим $\Delta^2 a$. По индукции определим $\Delta^k a$ как $\Delta(\Delta^{k-1} a)$. Когда для последовательности a разрешима "бесконечная интерполяционная задача": когда существует такой многочлен $f(x)$ степени не большей m, что $f(n) = a_n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$? Докажите, что для этого необходимо и достаточно, условие $(\Delta^{m+1} a)_n = 0$ при $n \geqslant m$. Это условие означает, что если выписать последовательность a, под ней — последовательность, каждый член которой будет равен разности двух стоящих над ним членов, к ней применить тот же процесс и т.д.:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & \ldots & & a_n & & a_{n+1} \\
 & a_1 - a_0 & & a_2 - a_1 & & a_3 - a_2 & & \ldots & & \ldots & & a_{n+1} - a_n & \ldots \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

то в $(m+1)$-й строке окажутся одни нули.

Существует ли такой многочлен $f(x)$, что $f(n) = 2^n$ для всех целых n?

10. Докажите, что если $a_n = q^n$, то $(\Delta a)_n = a_{n-1}(q-1)$. Выведите из этого еще раз формулу (12) гл. I.

11. Пусть $m_1 < m_2 < \ldots < m_{n+1}$ — любые натуральные числа, а $f(x)$ — многочлен степени n, у которого коэффициент при x^n равен 1. Докажите, что хоть одно из значений $f(m_k)$ не меньше, чем $\frac{n!}{2^n}$.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 8 к §1. Заметьте, что (в обозначениях §1) $F_k(m_k) \geqslant k!(n-k)!$ и воспользуйтесь известными вам соотношениями между биномиальными коэффициентами.

12. Примеңите формулу (12) главы I к сумме $1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^n$. Сравнивая коэффициенты при членах одинаковой степени слева и справа, выведите формулу для суммы

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_n^k.$$

Приложение[2]

Многочлены и числа Бернулли.

В §3 Мы показали, что значения сумм степеней последовательных натуральных чисел, то есть сумм $S_m(n)$ совпадают со значениями $g_m(n)$ многочленов Бернулли $g_m(x)$, обладающих двумя свойствами:

1) $g_m(x) - g_m(x-1) = x^m$ (1)
2) свободный член многочленов $g_m(x)$ равен 0.

Для каждого m такой многочлен существует только один, его степень равна $m+1$.

Мы указали способ построения многочленов $g_m(x)$. Но хотелось бы иметь для них более явную формулу. Для этого мы сначала попробуем идти тем же путем, что и при выводе формулы бинома. А именно, мы вычислим производную левой и правой частей равенства (1). Для этого нам надо научиться вычислять производную $f(x-1)'$ многочлена $f(x-1)$.

Лемма 1. $f(x-1)' = f'(x-1)$.

На первый взгляд равенство кажется очевидным, но это не совсем так. Смысл его заключается в том, что если в $f(x)$ подставить $x-1$ вместо x и развернуть каждый член по степеням x, а потом взять производную, то результат получится тот же, как если мы в производную $f'(x)$ подставляем $x-1$ вместо x.

Доказательство получается прямо из определения производной, то есть формулы (11). Пусть

$$f(x) - f(\alpha) = (x-\alpha)g(x,\alpha).$$

Заменив в этом тождестве x на $x-1$ и α на $\alpha-1$, получим

$$f(x-1) - f(\alpha-1) = (x-\alpha)g(x-1,\alpha-1).$$

По определению $f(\alpha-1)' = g(\alpha-1,\alpha-1)$, а $f'(\alpha) = g(\alpha,\alpha)$. Поэтому $f(\alpha-1)' = f'(\alpha-1)$, что и требовалось.

Лемму 1 можно было бы вывести из формул (16) – (19) сведением к случаю одночлена (убедитесь в этом).

Теперь можно вычислить производную от обеих частей равенства (1). Принимая во внимание лемму 1 и правило (13) для производной, мы получим:

$$g'_m(x) - g'_m(x-1) = mx^{m-1}.$$

С другой стороны, заменим в равенстве (1) m на $m-1$:

$$g_{m-1}(x) - g_{m-1}(x-1) = x^{m-1}.$$

[2]Начиная с главы II, каждая глава будет сопровождаться Приложением. В приложениях не будут использоваться никакие сведения, кроме изложенных ранее, однако текст их будет несколько сложнее основного текста. Это значит, что будут применяться такие же рассуждения, но при доказательстве одной теоремы надо держать в голове большее их число. По трудности этот текст приближается уже к несложной профессиональной математической книге.

Умножим второе равенство на m и вычтем из первого. Положив $h_m = mg_{m-1} - g'_m$, мы получим, что
$$h_m(x) = h_m(x-1).$$
Но отсюда следует, что многочлен h_m равен постоянной (имеет степень 0). Действительно, положив в этом равенстве $x = 1, 2$ и т.д., мы получим, что $h_m(0) = h_m(1) = h_m(2) = \cdots$. То есть многочлен $h_m(x)$ и постоянная $h_m(0)$ принимают одинаковые значения для всех натуральных x, а отсюда по теореме 4 следует, что они совпадают: $h_m(x) = h_m(0)$. (Мы уже встречались с этим рассуждением в начале доказательства теоремы 7.) Таким образом, многочлен $h_m(x)$ равен постоянному числу. Обозначим это число через $-\alpha_m$. Вспомнив определение многочлена $h_m(x)$, получим соотношение
$$g'_m = mg_{m-1} + \alpha_m \tag{2}$$
Теперь, как мы это делали при выводе формулы бинома, запишем многочлен $g_m(x)$ по степеням x. Как и там, мы будем нижним индексом указывать в каком многочлене этот коэффициент встречается, а верхним — при какой степени x он стоит. Коэффициенты мы обозначим A_m^k; таким образом многочлен $g_m(x)$ будет иметь вид:
$$g_m(x) = A_m^1 x + A_m^2 x^2 + \cdots + A_m^k x^k + \cdots + A_m^{m+1} x^{m+1}.$$
(Вспомним, что свободный член многочлена $g_m(x)$ по условию равен 0). Напишем производную многочлена $g_m(x)$ по формуле (13):
$$g_m(x)' = A_m^1 + 2A_m^2 x + \cdots + kA_m^k x^{k-1} + \cdots + (m+1)A_m^{m+1} x^m$$
С другой стороны, напишем аналогичную формулу для $g_{m-1}(x)$ (с заменой m на $m-1$)
$$g_{m-1}(x) = A_{m-1}^1 x + A_{m-1}^2 x^2 + \cdots + A_{m-1}^k x^k + \cdots + A_{m-1}^m x^m$$
и подставим обе формулы в соотношение (2). Приравняем коэффициент при x^{k-1}:
$$kA_m^k = mA_{m-1}^{k-1} \qquad \text{при } k \geqslant 2 \tag{3}$$
$$A_m^1 = \alpha_m \qquad \text{для } k = 1. \tag{4}$$
(Заметьте, что здесь участвует только α_k с $k \geqslant 1$, то есть нет α_0). Мы получили почти такие же формулы, как для биномиальных коэффициентов C_m^k с той разницей, что формула (3) годится только для $k \geqslant 2$, а для $k = 1$ ее заменяет теперь формула (4).

Дальше опять поступим как и в случае биномиальных коэффициентов. Мы имеем: $A_m^k = \frac{m}{k} A_{m-1}^{k-1}$. Применим эту же формулу к A_{m-1}^{k-1}. Мы получим: $A_m^k = \dfrac{m(m-1)}{k(k-1)} A_{m-2}^{k-2}$. И продолжая так, через $k-1$ шагов найдем:
$$A_m^k = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)}{k(k-1)\cdots 2} A_{m-k+1}^1 = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+2)}{k(k-1)\cdots 2} \alpha_{m-k+1}$$
(заменяя A_{m-k+1}^1 по формуле (4)).

Коэффициент при α_{m-k+1} очень похож на биномиальный. Он отличается от C_m^k (см. формулу (21)) тем, что в числителе не хватает последнего множителя $m-k+1$, (а в знаменателе — множителя 1, но он произведения не изменит). Однако, в формуле для C_{m+1}^k произведение в числителе кончается как раз таким множителем — но зато оно начинается множителем $m+1$, которого теперь не хватает. Поэтому мы можем записать коэффициент при α_{m-k+1} в виде $\frac{1}{m+1}C_{m+1}^k$ а формула для A_m^k примет вид:

$$A_m^k = \frac{1}{m+1}C_{m+1}^k\alpha_{m+1-k}$$

(Чтобы множители были более похожи друг на друга, мы записываем α_{m-k+1} в виде α_{m+1-k}.)

Таким образом, мы получили для многочлена $g_m(x)$ формулу:

$$g_m(x) = \frac{1}{m+1}(C_{m+1}^1\alpha_m x + C_{m+1}^2\alpha_{m-1}x^2 + \cdots + C_{m+1}^k\alpha_{m+1-k}x^k + \cdots + C_{m+1}^{m-1}\alpha_0 x^{m+1}). \tag{5}$$

Полученная формула похожа на формулу бинома. Предположим, что мы имеем новое переменное a и рассматриваем бином $(x+a)^{m+1}$. Тогда мы получим такие же члены, как и члены в скобке нашей формулы для $g_m(x)$, только в ней степени a^k заменяем на α_k, да еще нет члена, соответствующего $C_{m+1}^0\alpha_{m+1}$. Последнее мы могли бы учесть, взяв разность $(x+a)^{m+1} - a^{m+1}$ — тогда член с a^{m+1} сократился бы. Чтобы подчеркнуть эту аналогию, вводят следующие обозначения. Пусть a — это последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ а $f(t)$ — многочлен $a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$. Тогда $f(a)$ будет обозначать число $a_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$, то есть всюду t^k заменяется на α_k. В частности, $a^m = \alpha_m$, так как, заменяя t^m на α_m, мы получаем α_m. Аналогично, $(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1}\alpha_1 + \ldots + C_m^m\alpha_m$: надо развернуть $(x+t)^m$ по степеням t и заменить t_k на α_k. Мы видим, что соотношение (5) в этих обозначениях можно записать в виде:

$$g_m(x) = \frac{1}{m}\Big((a+x)^{m+1} - a^{m+1}\Big) \tag{6}$$

Напомним, что $a^{m+1} = \alpha_{m+1}$. Заметьте, что мы не можем утверждать, что многочлен, заданный формулой (6), удовлетворяет соотношению (1). На самом деле мы нашли общий вид многочленов, удовлетворяющих соотношениям (2), а они — лишь *следствия* соотношений (1). И действительно, ответ зависит от последовательности α_m, которая в формуле (6) может быть любой, в то время, как теорема 7 утверждает, что многочлен $g_m(x)$ для каждого m — единственный. Таким образом, мы еще не решили нашу задачу.

Мы должны среди многочленов $g_m(x)$, задаваемых формулой (6), отобрать те, которые удовлетворяют соотношению (1). Мы уже знаем, что такой многочлен $g_m(x)$ существует и притом единственный, так что нам надо найти ту единственную последовательность a, которая его задает. Это сделать очень просто: достаточно в соотношении (1) положить $x = 1$. Так как $g_m(0) = 0$ (свободный член многочлена g_m равен 0), то из него мы получим, что $g_m(1) = 1$. При записи в виде (6) это дает $(a+1)^{m+1} - \alpha_{m+1} = m+1$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$ или

$$(a+1)^m - \alpha_m = m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Определение. *Числа $B_1, B_2, B_3, \ldots$ называются числами Бернулли, если составленная из них последовательность B удовлетворяет соотношениям*

$$(B+1)^m - B_m = m \qquad \text{при } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Этими соотношениями последовательность чисел Бернулли однозначно определяется. Действительно, развернув их согласно определению, мы получим:

$$1 + mB_1 + C_m^2 B_2 + \cdots + mB_{m-1} = m \;\; m = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

(B_m сокращается). Из соотношения для $m = 1$ мы получим, что $B_1 = \frac{1}{2}$, а каждое следующее соотношение дает возможность найти B_{m-1}, если известны все B_r с индексами $r < m-1$.

Многочлены

$$B_m(x) = \frac{1}{m+1}((B+x)^{m+1} - B_{m+1}),$$

где B — последовательность чисел Бернулли, называются *многочленами Бернулли*. Мы доказали, что если многочлен $g_m(x)$, удовлетворяющий соотношению (1), записать в виде (6), то соответствующая ему последовательность a должна совпасть с последовательностью чисел Бернулли B. Но мы знаем, согласно теореме 7, что такой многочлен существует. Поэтому он обязан совпадать с многочленом Бернулли $B_m(x)$, то есть

$$B_m(x) - B_m(x-1) = x^m$$

и значит

$$S_m(n) = B_m(n).$$

Наша задача решена.

Многочлены и числа Бернулли открыл Яков Бернулли (была большая семья математиков с этой фамилией). Его основные работы относятся ко второй половине XVII в., но именно это открытие появилось в книге, изданной после его смерти в начале XVIII в. Имя Бернулли числам B_n было присвоено Эйлером (XVIII в.), который нашел много их приложений.

Полагая в формулах (10) $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, мы найдем для чисел B_k значения (проверьте это сами!)

$$B_1 = \frac{1}{2}, \;\; B_2 = \frac{1}{6}, \;\; B_3 = 0, \;\; B_4 = -\frac{1}{30}, \;\; B_5 = 0, \;\; B_6 = \frac{1}{42},$$

$$B_7 = 0, \;\; B_8 = -\frac{1}{30}, \;\; B_9 = 0, \;\; B_{10} = \frac{5}{66}, \;\; B_{11} = 0, \;\; B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

и т.д. Отсюда легко найти:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, \qquad S_5(n) = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

и т.д.

Задачи.

1. Найдите $B_m(-1)$.

2. Докажите формулу $B^m = (B-1)^m$ при $m \geqslant 2$.

3. Выведите соотношение, аналогичное (10), связывающее числа Бернулли B_m с нечетными индексами $m \geqslant 3$. Докажите, что все числа Бернулли B_m с нечетными индексами m, кроме B_1, равны 0.

4. Найдите $S_6(n)$.

5. Докажите формулу для производной многочлена от многочлена: если $f(x)$ и $g(x)$ два многочлена, то

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

Это обобщение леммы 1 (она получается при $g(x) = x + 1$).

6. Найдите $(a+x)^n$, если последовательность a имеет вид $a_n = q^n$ при некотором числе q.

Материалы, посвященные 70-летию М.М.Постникова

Михаил Михайлович Постников

Эту биографическую статью написал Ю.Б. Рудяк к 60-летию со дня рождения М.М. Постникова; статья не была полностью опубликована. По рекомендации юбиляра мы приводим ее практически без изменений как не утратившую актуальности. Поправки на современность даны в подстрочных примечаниях.

27 октября 1997 года исполнилось 70 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Ленинской премии Михаила Михайловича Постникова.

Взглянув на дату рождения М.М.Постникова - 27.10.1927 - можно сказать, что это - почти счастливая комбинация цифр (почти - если принять 10=1+9). Прогнозируя на этом основании судьбу, какая-нибудь гадалка сказала бы, что М.М.Постникову будет везти, хотя баловнем судьбы он не станет. Скорее всего, на его жизненном пути будут встречаться препятствия, которые он будет успешно преодолевать исключительно ценой собственных усилий. Это прогноз оказался бы верным: не зря М.М.Постников так любит говорить: "Везет тому, кто везет." И (кто знает), может быть, именно поэтому одним из главных математических результатов М.М.Постникова является созданние "теории высших препятствий".

М.М.Постников родился в г.Шатуре (Подмосковье) в семье инженера. Когда ему было 6 лет, семья переехала в г.Пермь, а в 10 лет он лишился отца[1]. Закончив (с некоторыми приключениями) 8 классов средней школы, он в 1942г. поступил (опять-таки с некоторыми приключениями) на 1 курс математического факультета Пермского университета. Ему повезло - лекции по математическому анализу там читала эвакуированная из Москвы профессор Софья Александровна Яновская - видный специалист в области математической логики и теории множеств. Она также вела спецсеминар, который посещал и М.М.Постников.

Весной 1943 г. С.А.Яновская вернулась в Москву. М.М.Постников продолжал учиться в Перми, но вскоре понял, что ему надо продолжать образование в Москве. По его словам, это была одна из самых лучших идей, когда-либо приходивших ему в голову, но как она пришла - он не знает.

Итак, решено - в Москву. Однако возникают препятствия. Во-первых, нет паспорта, так как нет 16 лет. Во-вторых - нет аттестата зрелости. В-третьих, нужен пропуск в Москву, для чего, в свою очередь, необходим вызов. И, наконец,

[1] 37 год!

Пермский университет не хотел отпускать одного из лучших своих студентов. М.М.Постников успешно преодолевает все препятствия - получает паспорт на полгода раньше срока, добывает пропуск и, простояв (с помощью матери) в очереди 4 дня и 4 ночи, покупает билет, погружается в вагон-теплушку (на нары) и 3 ноября оказывается в военной Москве фактически без документов (кроме паспорта, была еще зачетка) и с совершенно неясным будущим. У него был адрес С.А.Яновской, но тогда в Москве далеко не все жили по своим адресам. После долгих поисков поздно вечером М.М. нашел нужный дом. Позвонил. Дверь открыла сама Софья Александровна, очень удивилась, но тем не менее напоила М.М. горячим чаем, уложила спать на диван (после нар в теплушке!) и сказала, чтобы завтра же зашел к ней на мехмат.

На следующее утро М.М.Постников пошел на мехмат, который находился тогда на Моховой, в психологическом корпусе, за библиотекой. С.А.Яновская привела его к декану - тогда им был И.Г.Петровский, впоследствии ставший ректором МГУ - и рекомендовала как своего способного ученика из Перми, желающего учиться на мехмате. М.М. продемонстрировал зачетку, и И.Г.Петровский сказал: "Ладно, ходите пока как вольнослушатель, досдайте экзамены за I курс (у нас другой учебный план, есть астрономия...), сдайте кое-что за второй курс, чтобы мы увидели, что вы за человек, а там видно будет".

Сдав на отлично несколько экзаменов, М.М.Постников вновь пошел к И.Г.Петровскому, и тот начертал на его заявлении резолюцию "Принять". Итак, в 16 лет М.М.Постников стал студентом II курса мехмата. Удивляет здесь, конечно, отнюдь не возраст студента (мехмат этим не удивишь), а целеустремленность и изобретательность совсем еще молодого человека. Дальше пошла более или менее обычная студенческая жизнь (с поправкой на экстремальные бытовые условия). Тогда занятия на четных курсах шли по утрам, а на нечетных - по вечерам. Поэтому можно было слушать лекции одновременно на двух курсах. К концу 43-44 учебного года М.М.Постников сдал все экзамены за II и III курс и подал заявление о переводе на IV курс. Стоит еще сказать, что за время обучения в МГУ М.М.Постников сдал 17 спецкурсов: все, которые тогда читались. Впрочем, он не ставит это себе в заслугу, а объясняет желанием заглушить чувство голода: "Отвлекаешься, и не так сильно есть хочется. А уж раз прослушал, то надо и сдать".

Выбор научного руководителя во многом определяет судьбу будущего математика. По этому поводу М.М.Постников рассказывает: "Зам. декана Л.Э.Эльсгольц спросил меня: "Кого записать вашим научным руководителем - П.С.Александрова или Л.А.Люстерника?" (Тогда я активно работал в семинарах обоих этих математиков.) Я мгновенно, неизвестно почему, ответил, чтобы записали Л.С.Понтрягина, который в этот момент даже не знал о моем существовании. Так и было записано, и я до сих пор не пойму, по какому наитию я сделал этот важный и, считаю, очень удачный шаг. Во всяком случае, как математик я очень многому научился у Льва Семеновича."

В 1945 г. М.М.Постников закончил университет и поступил в аспирантуру. Летом 1947 г. Л.С.Понтрягин перевел его в аспирантуру Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. Это, безусловно, было удачей, так как в МИ-

АНе аспирантуры, как таковой, тогда практически не было, и благодаря этому М.М.Постников почти автоматически остался работать в МИАНе, где работает и в настоящее время.

В 1947 г. М.М.Постников защитил кандидатскую диссертацию, а в 1953 г. — докторскую. В 1961 г. за исследования по алгебраической топологии ему была присуждена Ленинская премия.

Основные научные достижения М.М.Постникова связаны с исследованием гомотопических свойств топологических пространств и непрерывных отображений. Важнейшими проблемами здесь являются классификация пространств с точностью до гомотопической эквивалентности и классификация отображений с точностью до гомотопности. В конце 20-х – начале 30-х годов было отмечено, что многие алгебраические свойства топологических пространств и непрерывных отображений оказываются на самом деле гомотопическими инвариантами и что некоторые геометрические и аналитические задачи оказываются гомотопически устойчивыми. Это стимулировало исследования в области теории гомотопий и, в частности, сразу же поставило описанные выше задачи классификации. М.М.Постников решил эти задачи в том смысле, как это понимается в алгебраической топологии, т.е. дал ответ на языке алгебраических инвариантов.

Первоначальные результаты здесь принадлежат Хопфу и Уитни, описавшим множество $[X^n, S^n]$ гомотопических классов отображений n-мерного полиэдра X^n в n-мерную сферу S^n. Чуть позже Дж.Г.К.Уайтхед отметил, что метод Уитни дает возможность классифицировать отображения полиэдра X^n в любое Y с $\pi_i(Y) = 0$ при $i < n$ (здесь π_i — гомотопическая группа). Именно, $[X^n, Y]$ представляет собой группу когомологий $H^n(X^n; \pi_n(Y))$. В 1945 г. благодаря работам Л.С.Понтрягина (впервые рассмотревшего препятствия и различающие), Эйленберга и Маклейна было понято, что на самом деле эти методы решают задачу классификации отображений произвольного клеточного пространства X в пространство $K(\pi, n)$ с ровно одной нетривиальной гомотопической группой (так называемое пространство Эйленберга-Маклейна), то есть $\pi_i(K(\pi, n)) = 0$ при $i \neq n$, $\quad \pi_n(K(\pi, n)) = \pi$. Именно, $[X, K(\pi, n)] = H^n(X, \pi)$. Тогда же Л.С.Понтрягин решил задачу классификации отображений $X^3 \to S^2$, а Стинрод — $X^{n+1} \to S^n$, $\quad n > 2$, что привело к возникновению понятия когомологической операции.

Примерно в то же время было отмечено, что любые два пространства Эйленберга-Маклейна вида $K(\pi, n)$ гомотопически эквивалентны. Для пространств же с ровно двумя нетривиальными гомотопическими группами утверждение уже неверно: при изоморфных гомотопических группах они могут иметь разные гомотопические типы, и эти типы различаются некоторой когомологической операцией — так называемым инвариантом Эйленберга-Маклейна-Уитни.

М.М.Постников рассмотрел максимально возможное обобщение этой задачи: имеется пространство с известными гомотопическими группами. Какие еще инварианты нужны для полного описания его гомотопического типа? Оказывается, что имеется еще счетное множество инвариантов (по одному в каждой размерности), представляющих собой то, что впоследствии назвали высшими когомологичсеками операциями. Вместе с гомотопическими группами эти инварианты (давно и устойчиво названные постниковскими инвариантами) полностью определяют гомотопический тип конечномерного клеточного пространства. Попутно решилась и задача классификации отображений. Именно, пусть $\{k_n\}$ — система постниковских инвариантов пространства Y. Для любых двух отображений $f, g : X \to Y$ определено значение $k_1(f, g)$ первого постниковского инварианта k_1 на паре (f, g) . Если оно нетривиально, то f и g не гомотопны. Если оно тривиально, то определен инвариант $k_2(f, g)$. При его нетривиальности f и g не гомотопны, а при его тривиальности можно определить $k_3(f, g)$ и т.д. И если все значения $k_n(f, g)$ тривиальны, то f и g гомотопны. Такм образом, постниковские инварианты выступают здесь как препятствия к гомотопности отображений.

Надо сказать, впрочем, что на самом деле М.М.Постников предложил конструкцию, вычисляющую гомологии пространства по его гомотопичсеким группам. Он рассказал ее А.Г.Курошу, и тот спросил: "А какие еще инварианты Вы можете вычислять с помощью этой конструкции?" —"Да любые можно. Весь гомотопический тип можно," — ответил М.М.Постников. Вот так и была решена задача описания гомотопического типа. Сам М.М.Постников очень любит рассказывать (особенно молодым математикам) эту в высшей степени поучительную историю.

М.М.Постников решал свои задачи на языке симплициальных множеств. Позже А.Картан и Ж.-П.Серр переформулировали его результаты на более удобный (работы первообкрывателей неуклюжи — Дж.Литлвуд) и ныне общепринятый язык расслоений. Именно, с точностью до гомотопического типа любое пространство разлагается в башню расслоений, слоями которых являются пространства Эйленберга-Маклейна. Эта башня уже более 40 лет называется башней Постникова данного пространства. При этом постниковские инварианты являются характеристическими классами соответствующих расслоений, то есть показывают, как именно примыкают друг к другу "этажи" этой башни.

Обобщая результаты М.М.Постникова, Мур предложил представлять (с точностью до гомотопности) непрерывное отображение в виде композиции расслоений, слоями которых являются пространства Эйленберга-Маклейна. Такая композиция называется сейчас башней Постникова-Мура данного отображения.

В своем отечестве пророков, как известно, нет, и для должной оценки результатов М.М.Постникова понадобился визит в СССР выдающегося американского тополога Дж.Г.К.Уайтхеда. Ему предложили сделать доклад, и он начал его словами: "Извините, что приехал в Ньюкасл с углем[1], но я расскажу о работах М.М.Постникова, поскольку они являются самым большим достижением в алгебраической топологии последних лет."

Идеи М.М.Постникова легли в основу ряда позднейших исследований. Так, известную конструкцию локализации топологических пространств удобнее всего описывать посредством индукции по этажам башни Постникова. Знаменитая модель Сулливана, описывающая рациональный гомотопический тип пространства, является на самом деле алгебраизацией башни Постникова. Кроме того, имеется обширная деятельность по вычислению постниковских инвариантов тех или иных пространств. Отметим также, что ученики М.М.Постникова Ю.Б.Рудяк,

[1] Соответствует нашему "В Тулу с самоваром".

А.В.Пажитнов и А.В.Хохлов развили его идеи применительно к стационарной гомотопической топологии, что позволило доказать классификационные теоремы для некоторых теорий когомологий, исследовать проблему ориентируемости в различных теориях когомологий и т.д.

Свою научную деятельность М.М.Постников успешно сочетает с педагогической. Преподавать в МГУ он начал в 1954г., будучи – до 1960г. – профессором кафедры высшей алгебры. После перерыва – вызванного запрещением совместительства – М.М.Постников с 1965 г. и по настоящее время профессор кафедры высшей геометрии и топологии. Его блестящие лекции никого не оставляют равнодушными: обычно одна часть аудитории приходит от них в восторг (сколько же интересного!), а другая – в ужас (что же будет на экзамене?!), но по окончании университета все вспоминают о них как об одном из украшений студенческой жизни. Сейчас М.М.Постников работает над обширным курсом лекций по геометрии (часть лекций уже вышла в издательстве "Наука"). Цель этого – во-первых, вывести геометрию из положения Золушки, которое ей отводится в университетском преподавании, и, во-вторых, дать студентам хорошо изложенный материал для самостоятельного изучения геометрии.

Более 30 лет на мехмате работает руководимый М.М.Постниковым[1] научно-исследовательский семинар по алгебраической топологии. Практически каждый серьезный топологический результат в той или иной степени освещается на этом семинаре. Подойдя к тому возрасту, когда некоторые математики (чего греха таить) интересуются в статьях в основном ссылками на себя, М.М.Постников сохранил живой и, можно даже сказать, трепетный интерес к математике (не только к топологии). Это является одной из причин жизнеспособности и эффективной работы семинара. Заседания семинара проходят предельно демократично, раскованно, с непринужденным обменом научными, "околонаучными" и просто остроумными репликами между докладчиком, руководителями и участниками, и это, пожалуй, самый веселый семинар на факультете. Несмотря на сложность докладов, руководители семинара успешно выдерживают "кокоситизацию" (известный метод оценки и смены руководства в африканских племенах: вождя загоняют на кокосовую пальму и трясут ее; упал – не годится). Более того, довольно часто участники просят разъяснить то или иное трудное место доклада, и М.М. с успехом это делает.

Трудно переоценить роль М.М.Постникова в становлении и развитии алгебраической топологии в СССР. Почти все изданные у нас после войны книги по алгебраической топологии вышли в свет при его активном участии (непосредственное авторство, перевод, редактирование, рекомендация к переводу и т.п.), и почти все московские алгебраические топологи являются учениками М.М.Постникова, или учениками его учеников, или учениками учеников его учеников.

Первое поколение учеников М.М.Постникова — это студенты середины 50-х годов. Среди них — С.П.Новиков, ныне действительный член АН СССР[2], заведующий отделом топологии МИАН[3], заведующий кафедрой высшей геометрии

[1]последние годы – совместно с А.В. Чернавским и Ю.П. Соловьевым

[2]ныне РАН – Российская Академия Наук

[3]ныне МИРАН – Математический Институт РАН

и топологии МГУ, к.ф.-м.н. Б.Г.Авербух, Л.Н.Ивановский. Второе поколение — это студенты выпуска 1961-71 г.г., среди них — А.А. Болибрух[1] Ю.Б. Рудяк[2], А.Ф. Харшиладзе[3], А.В. Пажитнов[4], кандидат физ.-мат. наук А.В. Хохлов.

Здесь, может быть, стоит сказать, что в свое время в аспирантуре М.М.Постникова, по его словам, очень разозлило то понятое им обстоятельство, что Л.С.Понтрягин давал задачи, решения которых ему (Л.С.Понтрягину) были известны. Обычно дети или подражают родителям, или полностью отрицают их. В соответствии с последним, аспиранты М.М.Постникова обычно получали задачи (а то и просто соображения по поводу постановки задачи), о решении которых М.М. не имел ни малейшего представления. Однако М.М.Постников не боялся учить аспирантов, обучаясь вместе с ними, и поэтому работа шла успешно, диссертации защищались, наука двигалась вперед.

Интересы М.М.Постникова не ограничиваются одной лишь математикой. Не пытаясь даже перечислить здесь всех его увлечений, отметим его известное хобби — античную историю[5]. А статьи и телебеседы М.М.Постникова с предложениями кардинальной перестройки школьного образования вызвали широчайший общественный резонанс и с большим интересом обсуждаются в семьях, в учительских, министерствах.

Свое 70-летие М.М.Постников встречает в активной работе, полный творческих планов, окруженный восхищением студентов, благодарностью учеников, уважением коллег. Пожелаем же ему активного творческого долголетия. Пусть его радует жизнь, а он радует нас.

[1] ныне д.ф.-м.н., зам.директора МИ РАН, действительный член РАН

[2] ныне доктор физико-математических наук

[3] ныне доктор физико-математических наук

[4] ныне доктор физико-математических наук

[5] см. статью “О достоверности древней истории” на стр. 89 в настоящем номере

Статьи М.М.Постникова

Разложение многочленов на множители*

(метод М. В. Яковкина)

1. Введение

В этой статье мы будем рассматривать многочлены

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

лишь (если только явно не оговорено противное) с целыми (положительными, отрицательными или равными нулю) коэффициентами. Старший коэффициент a_n мы будем считать положительным:

$$a_n > 0.$$

В силу этого условия степень n многочлена f однозначно определена. Мы будем считать, что $n > 0$, т.е. что многочлен f не сводится к свободному члену a_0.

Многочлен g (положительной степени, меньшей n и с целыми коэффициентами) называется *делителем* многочлена f, если существует такой многочлен h (*дополнительный делитель*), что

$$f = gh$$

Многочлен f, не имеющий делителей, называется *неприводимым.*

Тривиальное индуктивное рассуждение показывает, что *любой многочлен является произведением неприводимых многочленов.*

(Мы не касаемся здесь — совсем нетривиального — вопроса об однозначности этого разложения.)

Целью этой статьи является изложение одного простого, но чрезвычайно изящного метода разложения многочленов на множители, предложенного М. В. Яковкиным (см. его книгу "Численная теория приводимости многочленов", Изд. АН СССР, 1959). Ясно, что для разложения произвольного многочлена на множители достаточно научиться эффективно решать вопрос о его приводимости и — в случае положительного ответа — находить хотя бы одну пару его взаимно дополнительных делителей. Этот последний вопрос мы будем, в основном, рассматривать.

*Впервые опубликовано в "Математика в школе", N 3, 1969г.

2. Позитивные многочлены

Многочлен (1) мы будем называть *позитивным*, если все его коэффициенты неотрицательны:

$$a_n > 0,\ a_{n-1} \geqslant 0,\ \ldots,\ a_1 \geqslant 0,\ a_0 \geqslant 0.$$

Ясно, что произведение двух (и, вообще любого конечного числа) позитивных многочленов позитивно. Обратное, вообще говоря неверно: существуют позитивные многочлены, обладающие непозитивными делителями. Например,

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2).$$

В качестве первого приближения к общей задаче о разложении произвольных многочленов на множители Яковкин предложил рассматривать следующую вспомогательную задачу:

Задача Яковкина. *Для любого позитивного многочлена (положительной степени и с целыми коэффициентами) найти хотя бы одну пару его взаимно дополнительных позитивных делителей (или доказать, что для данного многочлена ни одной такой пары не существует).*

Яковкин основывает решение этой задачи на следующей лемме:

Лемма 1. *Наибольший коэффициент произведения gh двух позитивных многочленов g и h не меньше наибольшего коэффициента каждого из сомножителей.*

Доказательство. Пусть b_{i_0} и c_{j_0} — наибольшие коэффициенты многочленов g и h соответственно. Так как коэффициент $a_{i_0+j_0}$ многочлена $f = gh$ выражается формулой

$$a_{i_0+j_0} = b_{i_0}c_{j_0} + \cdots,$$

где многоточие обозначает некоторые дополнительные неотрицательные слагаемые, то

$$a_{i_0+j_0} \geqslant b_{i_0}c_{j_0}.$$

Следовательно, наибольший из коэффициентов многочлена f также не меньше произведения $b_{i_0}c_{j_0}$, а потому не меньше каждого из коэффициентов b_{i_0} и c_{j_0} (ибо числа b_{i_0} и c_{j_0} являются целыми положительными числами).

В дальнейшем наибольший коэффициент позитивного многочлена мы будем называть его *высотой.*

Пусть теперь m — некоторое фиксированное целое положительное число. Каждому позитивному многочлену f высоты, меньшей m, мы отнесем целое положительное число $[f]$, положив

$$[f] = f(m).$$

Таким образом, если

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

то

$$[f] = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0.$$

Следовательно, поскольку высота многочлена f, по условию, меньше m, числа a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 являются цифрами числа $[f]$ в системе счисления с основанием m. Поэтому, обозначая число, имеющее в системе счисления с основанием m цифры a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, символом $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{\,m}$, мы для любого позитивного многочлена (1) высоты, меньшей m, получим равенство:

$$[f] = \overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^{\,m}.$$

Другими словами, для того чтобы получить запись числа $[f]$ в системе счисления с основанием m, достаточно выписать подряд все коэффициенты многочлена f.

Ясно, что соответствие

$$f \to [f]$$

является взаимно однозначным соответствием между множеством всех позитивных многочленов высоты, меньшей m (включая многочлены нулевой степени), и множеством всех целых положительных чисел. Многочлен f, соответствующий числу a, т. е. такой, что $[f] = a$, мы будем называть многочленом, *ассоциированным* с числом a (при основании m). Для его построения следует записать число a в системе счисления с основанием m и принять цифры этого числа за коэффициенты многочлена f. Заметим, что многочлены нулевой степени (которые мы исключаем из рассмотрения) ассоциированы с числами, меньшими m, и только с этими числами.

Из леммы 1 и равенства

$$f(m) = g(m)h(m)$$

немедленно вытекает следующая

Теорема 1. *Все позитивные делители многочлена f высоты, меньшей m, также имеют высоту, меньшую m, причем, если имеет место равенство*

$$f = gh, \tag{(2)}$$

то имеет место и равенство

$$[f] = [g][h]. \tag{3}$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает следующее правило для разложения позитивных многочленов в произведение двух позитивных множителей:

Правило. *Пусть f — произвольный позитивный многочлен. Выбрав некоторое число m, большее всех коэффициентов многочлена f найдем число $[f]$ и разложим его на множители. Для каждой пары взаимно дополнительных делителей a и b числа $[f]$ (больших m) составим ассоциированные с ними (при основании m) позитивные многочлены g и h. Все возможные пары взаимно дополнительных делителей многочлена f содержатся среди построенных таким образом пар (g, h). Поэтому, составив для всех таких пар произведения gh и сравнив их с многочленом f, мы либо получим разложение этого многочлена в произведение двух позитивных многочленов, либо убедимся, что многочлен f в произведение позитивных многочленов (положительных степеней) не разлагается.*

Это правило вполне эффективно и позволяет на практике находить позитивные делители позитивных многочленов. Однако его можно усовершенствовать, сопроводив правилом отбора ненужных пар (a, b) делителей числа $[f]$, т. е. пар, не приводящих к делителям многочлена f.

Пусть

$$g = b_p x^p + \cdots + b_0,$$
$$h = c_q x^q + \cdots + c_0$$

— пара взаимно дополнительных делителей многочлена (1). Тогда

$$n = p + q, \tag{4'}$$

$$a_n = b_p c_q, \tag{5'}$$

$$a_0 = b_0 c_0. \tag{6'}$$

Кроме того,

$$f(1) = g(1)h(1). \tag{7'}$$

Для каждого целого положительного числа a, записанного в системе счисления с основанием m, мы символом $\tau(a)$ будем обозначать уменьшенное на единицу число его цифр, а символом $\sigma(a)$ — сумму этих цифр. Кроме того, символами $ц(a)$ и $Ц(a)$ мы будем обозначать соответственно правую цифру числа a ("число единиц") и его левую цифру ("число единиц высшего разряда"). Используя эти обозначения, мы можем соотношения (4') — (7') переписать в следующем виде:

$$\tau([f]) = \tau([g]) + \tau([h]), \tag{4''}$$

$$Ц([f]) = Ц([g])Ц([h]), \tag{5''}$$

$$ц([f]) = ц([g])ц([h]), \tag{6''}$$

$$\sigma([f]) = \sigma([g])\sigma([h]). \tag{7''}$$

Отсюда немедленно вытекает следующее

Правило отбора. *Для составления пар (g, h) взаимно дополнительных делителей многочлена f следует оставлять лишь те пары (a, b) взаимно дополнительных делителей числа $[f]$, для которых имеют место соотношения*

$$\tau([f]) = \tau(a) + \tau(b), \tag{4}$$

$$Ц([f]) = Ц(a)Ц(b), \tag{5}$$

$$ц([f]) = ц(a)ц(b), \tag{6}$$

$$\sigma([f]) = \sigma(a)\sigma(b). \tag{7}$$

Проверка соотношений (4), (5), (6) производится, можно сказать, "с первого взгляда" на равенство $[f] = ab$. Проверка соотношения (7) чуть более трудна (но даже и ее можно почти всегда производить "в уме").

Замечательно, что соотношения (4") — (7") не только необходимы для справедливости разложения (2), но также и достаточны. Более того, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Многочлены g и h, ассоциированные с взаимно дополнительными делителями a и b числа $[f]$, тогда и только тогда являются взаимно дополнительными делителями многочлена f, когда удовлетворяется соотношение* (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен

$$F = gh.$$

Пусть

$$F = A_N x^N + A_{N-1}x^{N-1} + \cdots + A_1 x + A_0.$$

Кроме того, пусть как и выше,

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$
$$h = c_q x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Таким образом, $N = p + q$. По правилам умножения многочленов каждый коэффициент A_k, $k = 0,\ 1,\ ...,\ N$, многочлена F равен сумме всевозможных произведений $b_i c_j$, где $i + j = k$. Например,

$$A_0 = b_0 c_0,$$

$$A_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$$

и т. д.

С другой стороны, по условию, $[f] = [g]\,[h]$, т. е.

$$\overline{a_n ... a_0}^{\,m} = \overline{b_p ... b_0}^{\,m} \cdot \overline{c_q ... c_0}^{\,m}.$$

Согласно правилам умножения многозначных чисел, для вычисления цифры a_0 единиц произведения следует перемножить цифры b_0 и c_0 единиц сомножителей и из произведения $b_0 c_0$ выделить единицы высшего порядка ("десятки"). Таким образом, если в произведении $b_0 c_0$ содержится ε_0 "десятков", то $a_0 = b_0 c_0 - m\varepsilon_0$, т. е.

$$a_0 = A_0 - m\varepsilon_0. \tag{8_0}$$

Далее, число "десятков" произведения равно сумме $b_1 c_0 + b_0 c_1 = A_1$, увеличенной на число "десятков" ε_0, оставшихся после перемножения единиц. Поэтому "цифра десятков" получается из числа $A_1 + \varepsilon_0$ после выделения "сотен". Другими словами,

$$a_1 = A_1 + \varepsilon_0 - m\varepsilon_1, \tag{8_1}$$

где ε_1 — некоторое неотрицательное целое число.

Аналогично,

$$a_2 = A_2 + \varepsilon_1 - m\varepsilon_2, \tag{8_2}$$

и вообще при $k = 0,\ 1,\ \dots,\ N$

$$a_k = A_k + \varepsilon_{k-1} - m\varepsilon_k. \tag{8_k}$$

В частности,

$$a_N = A_N + \varepsilon_{N-1} - m\varepsilon_N. \tag{8_N}$$

(Тем самым мы попутно доказали, что $N \leqslant n$.)

Что же касается цифр $a_{N+1},\ \dots,\ a_n$, то (если эти цифры существуют, т. е. если $N < n$) они представляют собой, очевидно, цифры (по основанию m) числа ε_n:

$$\varepsilon_N = a_n m^{n-N-1} + \cdots + a_{N+2}m + a_{n+1}. \tag{9}$$

Складывая равенства (8_0), ..., (8_N), мы получим, что

$$a_0 + \cdots + a_N = (A_0 + \cdots + A_N) - (m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{N-1}) - m\varepsilon_N.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства число $a_{N+1} + \cdots + a_n$ и учитывая равенство (9), получаем соотношение

$$\begin{aligned} a_0 + \cdots + a_n &= (A_0 + \cdots + A_N) - (m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{N-1} + \varepsilon_N) - \\ &- [a_n(m^{n-N-1} - 1) + \cdots + a_{N+2}(m-1)]. \end{aligned}$$

Но

$$a_0 + \cdots + a_n = f(1) = \sigma([f])$$

и, аналогично,

$$A_0 + \cdots + A_N = F(1) = g(1)h(1) = \sigma([g])\sigma([h]) = \sigma(a)\sigma(b).$$

Следовательно, согласно условию

$$a_0 + \cdots + a_n = A_0 + \cdots + A_N,$$

и поэтому

$$(m-1)(\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_{N-1} + \varepsilon_N) + [a_n(m^{n-N-1} - 1) + \cdots + a_{N+2}(m-1)] = 0,$$

что возможно лишь при

$$\varepsilon_0 = \cdots = \varepsilon_{N-1} + \varepsilon_N = 0$$

(и, значит, при $a_n = \cdots = a_{N+2} = a_{N+1} = 0$).

Тем самым доказано, что при перемножении чисел $a = [g]$ и $b = [h]$ "переноса десятков" не происходит, т. е. что

$$N = n$$

и

$$a_0 = A_0,\ a_1 = A_1,\ \dots,\ a_n = A_n.$$

Теорема 2 полностью доказана.

Доказанная теорема означает, что *пары* (a, b) *взаимно дополнительных делителей числа* $[f]$, *полученные в результате применения указанного выше правила отбора, непременно приводят к парам* (g, h) *взаимно дополнительных делителей многочлена* f.

Другими словами, для таких пар проверку равенства $f = gh$ производить не нужно.

Замечание. Как известно, два многочлена степени n совпадают, вообще говоря, только тогда, когда они совпадают в $n+1$ точках. Согласно же теореме 2 для совпадения рассматриваемых в этой теореме многочленов f и $F = gh$ достаточно (независимо от их степеней), чтобы эти многочлены принимали одинаковые значения в двух точках $x = 1$ и $x = m$.

3. Примеры

Для лучшего уяснения изложенного метода мы рассмотрим теперь ряд несложных, но в достаточной мере показательных примеров.

Пример 1. Найти все позитивные делители многочлена

$$6x^6 + 7x^5 + 4x^2 + x + 7.$$

Высота этого многочлена равна 7, так что за m мы можем принять число 10. Но легко видеть (например, из таблиц простых чисел), что число

$$f(10) = 6\,700\,417$$

является простым числом. Поэтому рассматриваемый многочлен позитивных делителей не имеет.

Пример 2. Найти все позитивные делители многочлена

$$f = 2x^5 + 5x^4 + +5x^3 + 8x^2 + 5x + 5.$$

Снова мы можем считать, что $m = 10$. число

$$f(10) = 255\,855$$

следующим образом разлагается на простые множители:

$$255\,855 = 3 \cdot 5 \cdot 37 \cdot 461.$$

Следовательно, возможны следующие пять разложений числа $f(10)$ в произведение двух множителей, больших десяти:

$$\begin{aligned} f(10) &= 15 \cdot 17057 = \\ &= 111 \cdot 2\,305 = \\ &= 185 \cdot 1\,383 = \\ &= 37 \cdot 6\,915 = \\ &= 461 \cdot 555 = \end{aligned}$$

Необходимым условиям

$$ц([f]) = ц(a)ц(b), \qquad Ц([f]) = Ц(a)Ц(b)$$

удовлетворяет лишь второе разложение. Оно удовлетворяет также и достаточному условию:

$$2+5+5+8+5+5 = (1+1+1)\cdot(2+3+5)$$

$$(30 = 3\cdot 10).$$

Следовательно

$$f = (x^2+x+1)(2x^3+3x^2+5).$$

Никаких других позитивных делителей многочлен f не имеет.

Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$f = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20.$$

Этот многочлен не позитивен. Однако мы можем превратить его в позитивный, умножив его на -1 и одновременно заменив x на $-x$. В результате мы получим многочлен

$$g = x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20.$$

Для разложения этого многочлена на множители можно поступить двумя разными способами. Во-первых, можно принять $m = 100$. (Следует заметить, что, вообще говоря, использование в качестве m чисел вида 10^k имеет определенные преимущества, связанные с легкостью перехода от чисел в десятичной системе счисления к числам по основанию 10^k.) После более или менее утомительных вычислений мы можем найти для числа

$$g(100) = 10\,513\,222\,720$$

следующее разложение

$$g(100) = 10\,304\cdot 1\,020\,305.$$

Чтобы перейти к системе счисления с основанием 100, достаточно разбить эти числа справа налево на "грани" по две цифры в каждой:

$$1'05'13'22'27'20 = 1'03'04\cdot 1'02'04'05.$$

Проверяем достаточное условие:

$$(1+05+13+22+27+20) = (1+03=04)\cdot(1+02+03+05)$$

$$(88 = 8\cdot 11).$$

Следовательно,

$$x^5 + 5x^4 + 13x^3 + 22x^2 + 27x + 20 = (x^2+3x+4)(x^3+2x^2+3x+5)$$

и поэтому

$$x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 22x^2 + 27x - 20 = (x^2 - 3x + 4)(x^3 - 2x^2 + 3x - 5).$$

Желая избежать появления слишком больших чисел, можно взять за m меньшее число. Например, можно положить $m = 30$. Тогда, как легко видеть,

$$g(30) = 28\,721\,630 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 71 \cdot 5779.$$

Без труда проверяется (исследованием делителей свободного члена), что многочлен g не имеет делителей первой степени. Поэтому для числа $g(30)$ нам нужно проверить лишь взаимно дополнительные делители, большие числа $30^2 = 900$. Таких пар делителей имеется, как легко видеть, только три:

$$\begin{aligned} g(30) &= 5779 \cdot 4970 \\ &= 11\,558 \cdot 2485 \\ &= 28\,895 \cdot 1\,994. \end{aligned}$$

Проверим необходимое условие (6). Заметив, что правая цифра $ц(a)$ числа a в системе счисления с основанием 30 равняется остатку от деления этого числа на 30 (ясно, что это замечание имеет общий характер), и произведя соответствующие деления, мы немедленно получим, что

$$ц(5779) = 19, \qquad ц(4970) = 20,$$

$$ц(11\,558) = 8, \qquad ц(2485) = 25,$$

$$ц(28\,895) = 15, \qquad ц(994) = 4,$$

$$ц(28\,721\,630) = 20.$$

Условие (6) выполняется только для третьей пары.

Проверим для этой пары достаточное условие (7). Переводя числа 28 895 и 994 в систему счисления с основанием 30, мы получим, что

$$28\,895 = \overline{1235}^{30},$$

$$994 = \overline{134}^{30}$$

Следовательно,

$$\sigma(28\,895) = 11,$$

$$\sigma(994) = 8.$$

В то же время число $([g])$ равно сумме коэффициентов многочлена g, т. е. равно 88. Таким образом, мы видим, что достаточное условие (7) удовлетворено и поэтому

$$g = (x^3 + 2x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 4).$$

Естественно, что мы снова получили то же разложение, что и выше.

4. Разложение на множители произвольных многочленов

Пусть у нас указано правило, сопоставляющее каждому многочлену f некоторый (вообще говоря, другой) многочлен f^*. Это правило мы будем называть *мультипликативным изоморфизмом,* если соответствие $f \to f^*$ взаимно однозначно (т. е. если из $f^* = g^*$ следует, что $f = g$) и если каждый раз, когда имеет место равенство

$$f = gh,$$

имеет место также и равенство

$$f^* = g^* h^*,$$

причем для любого многочлена f и любых многочленов g' и h', обладающих тем свойством, что

$$f^* = g'h',$$

существуют такие многочлены g и h, что

$$f = gh$$

и

$$g^* = g', \; h^* = h'.$$

Ясно, что каждый раз, когда нам задан некоторый мультипликативный изоморфизм, задача о разложении на множители произвольного многочлена f полностью равносильна задаче о разложении на множители соответствующего многочлена f^8.

Пример. Для любого многочлена $f(x)$ степени n мы положим

$$f^*(x) = (-1)^n f(-x). \tag{10}$$

Ясно, что соответствие $f \to f^*$ является мультипликативным изоморфизмом. Если многочлен f имеет коэффициенты чередующихся знаков, то многочлен f^* позитивен. Следовательно, используя мультипликативный изоморфизм (10), мы можем свести задачу о разложении многочленов со знакочередующимися коэффициентами на множители (также со знакочередующимися коэффициентами) к уже решенной выше задаче Яковкина о разложении позитивных многочленов на позитивные множители.

Заметим, что в §3 при разборе примера 3 мы этот прием фактически уже использовали.

Иногда бывает полезно использовать мультипликативные изоморфизмы, определенные не на множестве всех многочленов, а лишь на некотором его подмножестве M. При этом нужно только требовать, чтобы вместе с каждым многочленом f множество M содержало все делители (когда они существуют) этого многочлена.

Пример. Пусть M_n — множество всех многочленов степени, не большей n и имеющих отличный от нуля свободный член. Каждому многочлену

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

из этого множества мы сопоставим многочлен f^*, имеющий те же коэффициенты, но в обратном порядке, т. е. определенный формулой

$$f^* = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Легко видеть, что

$$f^*(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right),$$

откуда непосредственно следует, что соответствие $f \to f^*$ является мультипликативным изоморфизмом. Пользуясь этим изоморфизмом, можно в ряде случаев существенно упростить вычисления.

Рассмотрим, например, многочлен

$$f = 7x^6 + x^5 + 4x^4 + 7x + 6.$$

Прямое применение метода Яковкина к этому многочлену потребует более или менее длительных вычислений. Перейдя же к многочлену f^*, мы получим многочлен, рассмотренный в примере 1 предыдущего параграфа. Отсутствие у последнего многочлена (а потому и у данного многочлена) позитивных делителей устанавливается без всяких вычислений (в предположении, что мы пользуемся таблицей простых чисел).

В дальнейшем основную роль у нас будет играть мультипликативный изоморфизм $f \to f_c$, определенный для каждого многочлена f формулой

$$f_c(x) = f(x + c),$$

где c — некоторое фиксированное целое число.

Позитивный многочлен (с целыми коэффициентами) мы будем называть *сильно позитивным,* если каждый его делитель также позитивен. Ясно, что для сильно позитивных многочленов задача Яковкина равносильна общей задаче о разложении многочленов на множители.

Теорема 3. *Для любого многочлена f (положительной степени с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом) существует такое целое неотрицательное число c, что многочлен f_c сильно позитивен.*

Для доказательства этой теоремы нам будет удобно ввести в рассмотрение многочлены с произвольными вещественными (не обязательно целыми) коэффициентами. При этом мы по-прежнему будем считать, что все рассматриваемые многочлены имеют положительную степень и что их старшие коэффициенты положительны. *Делителем* многочлена f мы теперь будем считать произвольный многочлен g с вещественными коэффициентами (положительной степени, меньшей степени n многочлена f, и с положительным старшим коэффициентом).

Как и в случае многочленов с целыми коэффициентами, мы будем многочлен f с вещественными коэффициентами называть *позитивным*, если все его коэффициенты неотрицательны, и *сильно позитивным*, если он сам и все его делители позитивны. Заметим, что в применении к многочленам с целыми коэффициентами это понятие сильной позитивности НЕ СОВПАДАЕТ с понятием сильной позитивности, введенном выше (и которое мы теперь будем называть *целочисленной* сильной позитивностью). Действительно, все делители с целыми коэффициентами многочлена с целыми коэффициентами могут быть позитивны и все же этот многочлен может обладать непозитивными делителями с вещественными (иррациональными) коэффициентами. Тем не менее ясно, что любой сильно позитивный (в новом смысле) многочлен с целыми коэффициентами необходимо сильно позитивен целочисленно. Поэтому теорема 3 непосредственно вытекает из следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 4. *Для любого многочлена f_c с вещественными коэффициентами(и с положительным старшим коэффициентом) существует такое целое неотрицательное число c, что многочлен*

$$f_c(x) = f(x+c)$$

сильно позитивен.

Для доказательства теоремы 4 нам нужно более внимательно проанализировать строение сильно позитивных многочленов с вещественными коэффициентами.

Многочлен с вещественными коэффициентами называется *полуустойчивым*, если вещественные части всех его корней неположительны. Ясно, что произведение полуустойчивых многочленов является полуустойчивым многочленом и, обратно, любой делитель полуустойчивого многочлена полуустойчив.

ЛЕММА 2. *Многочлен с вещественными коэффициентами тогда и только тогда сильно позитивен, когда он полуустойчив.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что произведение сильно позитивных многочленов сильно позитивно и, обратно, любой делитель сильно позитивного многочлена сильно позитивен. С другой стороны, известно, что любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратичных многочленов. Поэтому лемму достаточно доказать лишь для этих последних многочленов. Но в этом случае утверждение леммы непосредственно проверяется прямым вычислением корней.

Для доказательства теоремы 4 остается теперь лишь заметить, что для произвольного корня α многочлена f число $\alpha - c$ является корнем многочлена f_c и, наоборот, для любого корня β многочлена f_c число $\beta + c$ является корнем многочлена f. Поэтому любое число c, большее вещественных частей всех корней многочлена f, удовлетворяет всем условиям теоремы 4.

Тем самым теорема 4 полностью доказана. Вместе с тем полностью доказана и теорема 3.

Возвращаясь к многочленам с целыми коэффициентами, мы получаем, таким образом, следующее правило для разложения любых таких многочленов на множители:

ПРАВИЛО. *Чтобы разложить на множители многочлен f с целыми коэффициентами, следует*

1) *найти целое неотрицательное число c, обладающее тем свойством, что многочлен $g = f_c$ сильно позитивен;*

2) *разложить многочлен g на множители:*

$$g = g_1 \cdots g_r;$$

3) *получить множители $f_1, ..., f_r$ многочлена f по формулам*

$$f_1 = (g_1)_{-c}, ..., f_r = (g_r)_{-c}.$$

Пункт 3) этого правила осуществляется совершенно автоматически, а пункт 2) — в соответствии с приемами, изложенными в §2. Что же касается пункта 1), то для практического нахождения числа c можно рекомендовать, например, приближенно вычислить (с точностью до первого знака после запятой) корни данного многочлена f и взять за c наименьшее целое число, большее вещественных частей всех его корней.

Другой способ вычисления числа c основывается на том, что абсолютная величина вещественной части любого комплексного числа не больше его модуля. Поэтому любое число c, большее модулей всех корней многочлена f, обладает тем свойством, что многочлен f_c сильно позитивен (полуустойчив). С другой стороны, без труда проверяется, что модули всех корней многочлена f не превосходят числа

$$1 + \frac{A}{a_n}, \tag{11}$$

где $a_n > 0$ — старший коэффициент многочлена f, а A — максимум абсолютных величин всех его остальных коэффициентов. Поэтому любое целое число c, большее числа (11), годится для наших целей.

Третий способ вычисления числа c предполагает, что мы умеем определять, полуустойчив или нет любой данный многочлен. В этом случае, вычисляя последовательно многочлены f_c при $c = 0,\ 1,\ ...$ и определяя их полуустойчивость, мы рано или поздно найдем нужное нам c.

Для определения полуустойчивости имеется много разных критериев. Мы изложим здесь простейший критерий такого рода, принадлежащий Раусу.

Пусть

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad -$$

произвольный многочлен с вещественными коэффициентами. Составим следующую таблицу чисел:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_{n-2k} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_{n-2k-1} & \cdots \\ a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n a_{n-2k-1} - a_{n-1}a_{n-2k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right. \tag{12}$$

Закон составления первых двух строк этой таблицы ясен. Пусть уже составлено $p \geqslant 2$ строк. Тогда на q-м месте $p+1$-й строки помещается произведение первого члена $p-1$-й строки на $q+1$-й член p-й строки, уменьшенное на произведение первого члена p-й строки на $q+1$-й член $p-1$-й строки (условно считается, что все строки неограничено продолжены вправо нулями). Легко видеть, что найдется такое число $s \geqslant 1$, что первый член s-й строки отличен от нуля, тогда как первые члены всех следующих строк равны нулю.

Критерий Рауса. *Многочлен f тогда и только тогда полуустойчив, когда первые члены первых s строк таблицы* (12) *положительны.*

Доказательство этого критерия весьма сложно и мы его здесь приводить не будем.

Замечание. Все три способа приводят к числу c, для которого многочлен f_c сильно позитивен как многочлен с вещественными коэффициентами, т. е. полуустойчив. Так как нам требуются многочлены f_c, обладающие лишь свойством целочисленной сильной позитивности, то в принципе эти значения числа c можно было, вообще говоря, значительно уменьшить. В общем случае мы этого сделать не можем, ибо никаких критериев целочисленной сильно позитивности многочленов неизвестно.

Магические квадраты нечетного порядка*

ВВЕДЕНИЕ

О СРАВНЕНИЯХ

1. Сравнения и действия над ними

Пусть n —- произвольное положительное целое число. Целые (не обязательно положительные) числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если они отличаются друг от друга на число, кратное числу n, т. е. если существует такое целое число t, что

$$a = b + nt. \tag{1}$$

В этом случае пишут

$$a \equiv b \pmod{n}. \tag{2}$$

Согласно этому определению число a тогда и только тогда делится на n, когда

$$a \equiv 0 \pmod{n}.$$

Свойства сравнений (2) во многом аналогичны свойствам равенств. Например, аналогично отношению равенства отношение сравнения рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

$$a \equiv a \pmod{n};$$

$$\text{если} \quad a \equiv b \pmod{n}, \quad \text{то } b \equiv a \pmod{n};$$

$$\text{если} \quad a \equiv b \pmod{n} \text{ и } b \equiv c \pmod{n}, \quad \text{то } a \equiv c \pmod{n}.$$

Первые два свойства очевидны. Для доказательства третьего достаточно заметить, что из равенств $a = b + nt$, $b = c + ns$ вытекает равенство $a = c + n(t + s)$.

Далее, аналогично равенствам сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать. Другими словами, если имеют место сравнения

$$a \equiv b \pmod{n}, \quad c \equiv d \pmod{n},$$

то имеют место и сравнения

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n},$$

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

*Введение и первые две главы книги "Магические квадраты", М. Наука, 1964.

Действительно, если

$$a = b + nt, \qquad c = d + ns,$$

то

$$a \pm c = b \pm d + n(t \pm s),$$

$$ac = bd + n(td + bs + nts).$$

В частности, если $a \equiv b \pmod n$, то для любого k

$$a \pm k \equiv b \pm k \pmod n,$$

$$ak \equiv bk \pmod n.$$

Аналогия между сравнениями и равенствами нарушается только для деления. В то время как из равенства $ka = kb$, где $k \neq 0$, всегда вытекает равенство $a = b$, из аналогичного сравнения

$$ak \equiv bk \pmod n \tag{3}$$

сравнение

$$a \equiv b \pmod n, \tag{4}$$

вообще говоря, не вытекает. Однако

если число k взаимно просто с модулем n, то из сравнения (3) *вытекает сравнение* (4).

Другими словами,

сравнения можно сокращать на числа, взаимно простые с модулем.

Для доказательства достаточно заметить, что сравнение (3) равносильно делимости на n разности $ka - kb = k(a - b)$, и учесть, что при k взаимно простом с n число $k(a - b)$ тогда и только тогда делится на n, когда на n делится число $a - b$, т. е. когда имеет место сравнение (4).

Пусть теперь числа n и k не взаимно просты, и пусть (n, k) — их наибольший общий делитель. (Символ (n, k) для наибольшего общего делителя общепринят в научной литературе, и мы будем им впредь пользоваться без каких-либо оговорок.) Оказывается, что из сравнения (3) вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod m,$$

где $m = n/(n, k)$. Действительно, если число $k(a - b)$ делится на n, то число $a - b$ делится на m.

При $k = (n, k)$ мы получаем отсюда, что

из сравнения

$$ka \equiv kb \pmod{km} \tag{5}$$

вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod m. \tag{6}$$

Ясно, что и, обратно, из сравнения (6) вытекает сравнение (5).

2. Вычеты, полные системы вычетов

Из двух сравнимых по модулю n чисел каждое по отношению к другому называется его *вычетом.* Таким образом, каждое число имеет бесконечно много вычетов, отличающихся друг от друга на числа, кратные модулю. Среди всех вычетов данного числа a особое значение имеет вычет r, для которого

$$0 \leqslant r < n.$$

Этот вычет называется *наименьшим неотрицательным вычетом* числа a по модулю n. Он совпадает с остатком от деления числа a на модуль и поэтому всегда существует и определяется (по данному числу a) единственным образом.

Легко видеть, что два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n, когда их наименьшие неотрицательные вычеты совпадают (в одну сторону это следует из транзитивности отношения сравнимости, а в другую — из того, что наименьшие неотрицательные вычеты совпадают с остатками от деления на n). Другими словами, два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n, когда при делении на n они приводят к одинаковым остаткам. Ввиду этого сравнимые между собой числа иногда называют также *равноостаточными.*

Система целых чисел называется *полной системой вычетов по модулю* n, если выполнены следующие два условия:

1°. Любое целое число сравнимо по модулю n с одним из чисел этой системы.

2°. Различные числа этой системы не сравнимы друг с другом по модулю n.

Условие 2° обеспечивает то, что с каждым целым числом сравнимо только одно число рассматриваемой системы.

Примером полной системы вычетов по модулю n может служить система

$$0, 1, ..., n-1.$$

Эта система называется *полной системой наименьших неотрицательных вычетов.*

Очевидно, что любые две полные системы вычетов состоят из одного и того же числа элементов (ибо каждое число одной системы сравнимо с одним и только одним числом второй). Поскольку система наименьших неотрицательных вычетов состоит из n чисел, отсюда вытекает, что

любая полная система вычетов по модулю n состоит из n чисел.

Оказывается, что это свойство вместе со свойством 2° полностью характеризует полные системы вычетов, т.е.

любая система пцелых чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, \tag{1}$$

не содержащая различных сравнимых между собой чисел, является полной системой вычетов по модулю n.

Действительно, наименьшие неотрицательные вычеты чисел системы (1) исчерпывают всю систему наименьших неотрицательных вычетов (их n и все они различны). поэтому для каждого целого числа a в системе (1) найдется число a_i, имеющее тот же наименьший неотрицательный вычет, что и число a, и потому сравнимое с a. Таким образом, система (1) обладает свойством 1° и потому является полной системой вычетов.

Из доказанного утверждения немедленно вытекает, что

для любого целого числа b, *наряду с системой* (1), *полной системой является так же и система*

$$a_1 + b, \quad a_2 + b, \quad \dots, \quad a_n + b. \tag{2}$$

В самом деле, все числа системы (2) не сравнимы друг с другом по модулю n (если $a_i + b \equiv a_j + b$, то $a_i \equiv a_j$ и потому $a_i = a_j$) и их ровно n.

Аналогично,

если число a *взаимно просто с* n, *то, наряду с системой* (1), *полной системой вычетов является и система*

$$aa_1,\ aa_2,\ \dots,\ aa_n.$$

Действительно, если $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$, то $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ и потому $a_i = a_j$, а значит и $aa_i = aa_j$.

Последние два утверждения можно объединить в одно:

если число a *взаимно просто с* n, *то для любого числа* b, *наряду с системой* (1), *полной системой вычетов является также и система*

$$aa_1 + b,\ aaa_2 + b,\ \dots,\ aa_n + b.$$

3. Вычеты значений линейной функции

Доказанное в конце предыдущего пункта утверждение можно сформулировать также следующим образом:

если коэффициент a *линейной функции* $ax+b$ *взаимно прост с* n, *то при* x, *пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю* n, *соответствующие значения функции* $ax + b$ *также пробегают полную систему вычетов по модулю* n, *(уже, конечно, другую).*

Фиксируя внимание лишь на полной системе наименьших неотрицательных вычетов, это предложение можно сформулировать еще и так:

если коэффициент a *линейной функции* $ax + b$ *взаимно прост с* n, *то при* $x = 0, 1, \dots, n-1$ *остатки от деления на* n *соответствующих значений функции* $ax+b$ *пробегают (в некотором порядке) полную систему наименьших неотрицательных вычетов.*

Рассмотрим теперь общий случай, когда числа a и n не обязательно взаимно просты. Пусть

$$d = (a, n)$$

— наибольший общий делитель чисел a и n. Рассматривая для определенности полную систему

$$0,\ 1,\ \dots,\ n-1 \tag{1}$$

наименьших неотрицательных вычетов, найдем, для каких чисел x_1, x_2 этой системы имеет место сравнение

$$ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{n}. \tag{2}$$

Сравнение (2) равносильно сравнению

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{n},$$

которое в свою очередь равносильно сравнению

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Отсюда следует, что для того, чтобы по одному разу получить все возможные вычеты значений функции $ax + b$ (при x, пробегающем систему (1)), достаточно выбрать в системе (1) полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, например полную систему

$$0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{n}{d} - 1 \tag{3}$$

наименьших неотрицательных вычетов, и заставить x пробегать эту систему. Кроме того, поскольку в системе (1) имеется точно d чисел, сравнимых с некоторым произвольно взятым числом x системы (3) $\Big($эти числа имеют вид x, $x + \frac{n}{d}$, $x + 2\frac{n}{d}$, ..., $x + (d-1)\frac{n}{d}\Big)$, отсюда также вытекает, что, когда x пробегает систему (1), каждый вычет значений, принимаемых функцией $ax + b$, повторяется ровно d раз.

Далее, разделим (с остатком) число b на d:

$$b = qd + \varrho, \qquad 0 \leqslant \varrho < d.$$

Так как числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{n}{d}$ взаимно просты, то вместе с x полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$ пробегает и выражение $\frac{a}{d}x + q$. Поскольку

$$ax + b = d\left(\frac{a}{d}x + q\right) + \varrho,$$

отсюда вытекает, что вычеты значений функций $ax+b$ и $dx+\varrho$ при x, пробегающем систему (3), с точностью до порядка совпадают.

Сопоставляя все доказанные утверждения, мы окончательно получаем, что

при x, пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n, скажем систему (1), *каждый вычет значений функции $ax + b$ повторяется точно d раз; чтобы получить эти вычеты по одному разу, надо в функции $dx + \varrho$ заставить переменную x пробежать некоторую полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, скажем систему* (3).

Систему (3) брать особенно удобно, так как соответствующие значения

$$\varrho,\ d + \varrho,\ 2d + \varrho,\ \ldots,\ n - d + \varrho \tag{4}$$

функции $dx + \varrho$ уже сами являются наименьшими неотрицательными вычетами по модулю n. Таким образом, *числа* (4) *исчерпывают все наименьшие неотрицательные вычеты значений линейной функции* $ax+b$; *когда* x *пробегает полную систему вычетов, каждый из вычетов системы* (4) *повторяется ровно* d *раз.*

Сумма всех чисел (4) равна, как легко видеть, $\frac{n}{d}\left(\varrho+\frac{n-d}{2}\right)$. Следовательно,

сумма всех наименьших неотрицательных вычетов значений линейной функции $ax+b$ *при* x, *пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю* n, *равна*

$$n\left(\varrho+\frac{n-d}{2}\right), \tag{5}$$

где $d=(a,n)$, *а* ϱ *представляет собой остаток от деления на* d *свободного члена* b.

4. Сравнения и неопределенные уравнения первой степени

Общее сравнение первой степени по модулю n относительно неизвестной x имеет вид

$$ax+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n). \tag{1}$$

Ясно, что если некоторое число x_0 удовлетворяет этому сравнению (т. е. если $ax_0+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n)$), то и каждое число x, сравнимое с x_0, т. е. имеющее вид

$$x=x_0+nt,$$

где t — произвольное целое число, также удовлетворяет сравнению (1). Поэтому, чтобы описать все решения сравнения (1), достаточно найти все его решения, содержащиеся в некоторой полной системе вычетов, например в полной системе $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ наименьших неотрицательных вычетов.

Пусть сначала $(a,n)=1$. Тогда при x, пробегающем полную систему вычетов, значения функции $ax+b$ также будут пробегать полную систему вычетов, так что вычет 0 получится один и только один раз. Тем самым доказано, что

если a *взаимно просто с* n, *то сравнение*

$$ax+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n)$$

имеет в любой полной системе вычетов одно и только одно решение. Если x_0 — *это решение, то любое другое решение сравнения имеет вид*

$$x=x_0+nt,$$

где t — *произвольное целое число.*

В случае, когда $d=(a,n)$ больше единицы, сравнение (1) либо вообще не имеет решений (если b не делится на d), либо имеет их ровно d (попарно не сравнимых между собой).

В дальнейшем нам также придется решать также системы сравнений первой степени. Для простоты мы рассмотрим случай двух сравнений с двумя неизвестными:

$$a_1x + b_1y \equiv c_1 \pmod n, \quad a_2x + b_2y \equiv c_2 \pmod n, \tag{2}$$

хотя окончательные результаты будут иметь место и для систем сравнений от любого числа неизвестных. Обращаясь со сравнениями как с уравнениями, мы, не пользуясь делением, можем известными из алгебры приемами преобразовать систему (2) к следующему виду:

$$\Delta x \equiv c_1b_2 - c_2b_1 \pmod n, \quad \Delta y \equiv c_2a_1 - c_1b_2 \pmod n, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

— определитель системы (2). (Например, чтобы получить первое сравнение системы (3), следует первое сравнение системы (2) умножить на b_2, второе сравнение — на b_1 и из первого сравнения вычесть второе.)

Если $(\Delta, n) = 1$, то сравнения (3) однозначно определяют вычеты неизвестных x и y, удовлетворяющие системе (2). Таким образом,

если определитель Δ системы сравнений первой степени взаимно прост с n, то эта система имеет одно и только одно решение (в каждой полной системе вычетов).

Случай $(\Delta, n) > 1$ мы здесь рассматривать не будем.

С задачей решения сравнений первой степени тесно связана задача решения в целых числах неопределенных уравнений вида

$$ax + by = c. \tag{4}$$

Действительно, переписав уравнение (4) в виде

$$ax = c \pm |b|y,$$

мы видим, что оно приводит к сравнению

$$ax \equiv c \pmod b. \tag{5}$$

Следовательно, если коэффициенты a и b взаимно просты, то общее выражение для x имеет вид

$$x = x_0 + bt, \tag{6}$$

где t — произвольное целое число, а x_0 — некоторое решение сравнения (5).

По определению, для числа x_0 существует такое число y_0, что $ax_0 = c - by_0$, т. е.

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{7}$$

Таким образом, пара чисел x_0, y_0) составляет решение неопределенного уравнения (4).

Число y_0 удовлетворяет сравнению

$$by \equiv c \pmod{|a|},$$

общее решение которого имеет вид

$$y = y_0 + at_1. \tag{8}$$

Подставляя выражения (6) и (8) в уравнение (4) и учитывая равенство (7), мы получим, что

$$ax + by = c + ab(t + t_1).$$

Следовательно, числа (6) и (8) тогда и только тогда составляют решение уравнения (4), когда $t_1 = -t$. Тем самым доказано следующее утверждение:

если коэффициенты a и b уравнения

$$ax + by = c.$$

взаимно просты, то это уравнение обладает целочисленным решением x_0, y_0); любое другое его решение (x, y) имеет вид

$$x = x_0 + bt, \qquad y = y_0 - at,$$

где t — произвольное целое число.

Если $(a, b) > 1$, то уравнение (4) либо не имеет решений (если c не делится на (a, b)), либо после сокращения на (a, b) сводится к уравнению с взаимно простыми коэффициентами.

Доказанное утверждение теоретически полностью отвечает на вопрос о решении в целых числах уравнения (4). Для практического применения следовало бы еще указать прием фактического нахождения хотя бы одного решения (x_0, y_0). Однако в дальнейшем нам это не понадобится, и поэтому мы на этом вопросе останавливаться не будем. (Заметим, впрочем, что из всего сказанного выше такой прием, хотя и не очень практичный, можно извлечь без особого труда.)

ГЛАВА 1

Общий линейный метод построения магических квадратов нечетного порядка

1. Магические квадраты и методы их построения

Числовым квадратом порядка n, где n — некоторое положительное целое число, мы будем называть квадрат, разбитый на n^2 клеток, в котором размещены (в некотором порядке) целые числа от 1 до n^2. Числовой квадрат мы будем называть *магическим*, если суммы, получаемые от сложения чисел каждого горизонтального ряда, каждого вертикального ряда и обеих диагоналей, одинаковы. Так как квадрат порядка n содержит n, скажем, горизонтальных рядов и сумма Σ чисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате, равна $n\Sigma$. С другой стороны, она равна

$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma = \frac{n(n^2+1)}{2}. \tag{1}$$

Условия равенства суммы элементов отдельных строк, столбцов или диагоналей числу Σ мы будем называть *условиями магичности* этих строк, столбцов или диагоналей.

Пример магического квадрата порядка 4 приведен на рис. 1. (Это так называемый квадрат Дюрера, изображенный на его известной гравюре "Меланхолия". Для него, в согласии с формулой (1), $\Sigma = 34$.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

рис. 1.

Несмотря на то, что в свое время (особенно в XVI–XVIII веках) магические квадраты были предметом пристального изучения ряда известных математиков, их теория ни в коей мере не может считаться завершенной. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестен никакой общий метод построения всех магических квадратов данного порядка n и даже неизвестно их число (при $n \geqslant 5$). Можно лишь утверждать, что это число делится на 8, так как из любого магического квадрата поворотами на 90°
вокруг центра и отражениями в сторонах получаются еще 7 новых магических квадратов.

Замечание. Новые магические квадраты из данного можно получать и некоторыми другими преобразованиями (например, перестановками его рядов). Мы этот вопрос рассматривать здесь не будем.

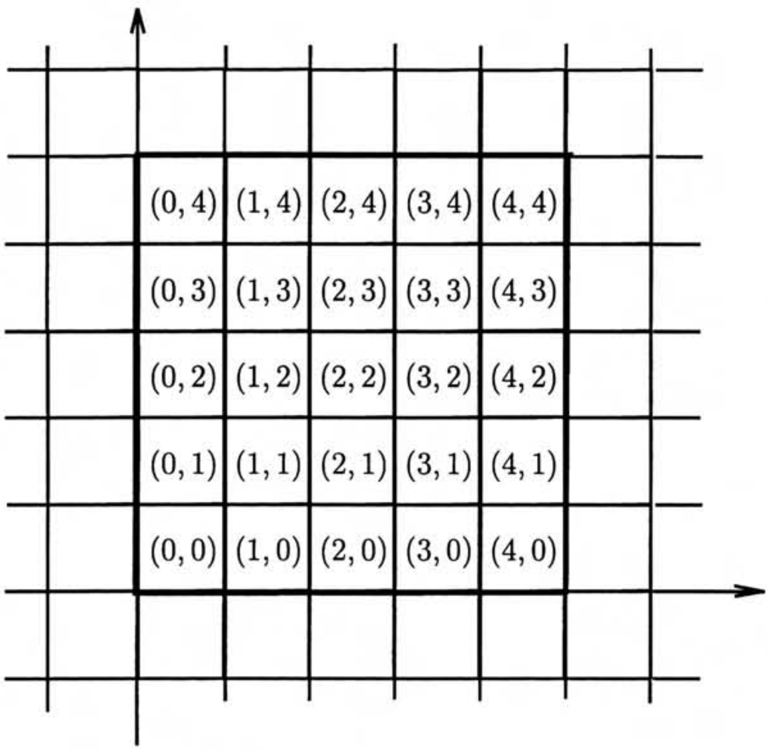


рис. 2

Клетки магического квадрата порядка n мы будем обозначать парами целых чисел (x, y) — их *координатами*, где x — номер вертикального ряда, а y — номер горизонтального ряда, на пересечении которых находится данная клетка (рис. 2 для случая $n = 5$). При этом вертикальные ряды мы нумеруем слева направо, а горизонтальные — снизу вверх. В качестве номеров мы будем использовать числа

$$0,\ 1,\ ...,\ n-1, \tag{2}$$

т. е. наименьшие неотрицательные вычеты по модулю n.

Разбиение на клетки исходного квадрата — назовем его *основным* — мы продолжим до разбиения на клетки всей плоскости (на рис. 2 основной квадрат очерчен жирной линией). Для клеток плоскости мы также введем координаты (x, y), определив их аналогично координатам клеток основного квадрата, с тем лишь отличием, что теперь эти координаты могут уже принимать любые целочисленные значения. Среди всех клеток плоскости клетки основного квадрата характеризуются тем свойством, что обе их координаты x и y принадлежат системе (2).

Сдвигая основной квадрат параллельно самому себе на векторы с целочисленными координатами, делящимися на n, мы получим систему не налегающих друг на друга квадратов порядка n, покрывающих всю плоскость. Две клетки, принадлежащие двум таким квадратам и занимающие относительно их одинаковое положение, мы будем называть *эквивалентными*. Другими словами, *две клетки эквивалентны, если их соответственные координаты сравнимы по модулю* n. Клетки, составляющие основной квадрат, попарно друг другу не эквивалентны, но каждая другая клетка плоскости эквивалентна одной (и только одной) из них. В дальнейшем эквивалентные клетки будут играть совершенно одинаковую роль и будут рассматриваться как одинаковые. В соответствии с этим нас в основном будут интересовать не сами координаты клеток, а их вычеты по модулю n, ввиду чего мы будем для них писать не равенства, а сравнения.

Каждое целое число $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ мы можем записать в виде

$$z = nr + (s+1),$$

где r и s — некоторые числа системы (2), однозначно определенные числом z и, обратно, однозначно определяющие это число. Мы будем числа $r,\ s$ называть *координатами* числа z.

Например, при $n = 3$ координаты чисел

$$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

имеют соответственно вид

$$(r,s) = (0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2).$$

При задании некоторого магического квадрата порядка n каждой паре чисел $r,\ s$ сопоставляется пара чисел $x,\ y$ — координаты клетки квадрата, в которую вписано число с координатами $r,\ s$. Другими словами, числа x и y являются функциями чисел r и s. Обозначая эти функции буквами f и g, мы получим, следовательно, что $x = f(r,s)$ и $y = g(r,s)$. Как уже говорилось, нам удобнее вместо равенств писать сравнения по модулю n. Таким образом,

каждый магический квадрат порядка n описывается двумя сравнениями вида

$$\begin{aligned} x &\equiv f(r,s)\ (\operatorname{mod} n), \\ y &\equiv g(r,s)\ (\operatorname{mod} n), \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(r,s),\ g(r,s)$ — некоторые функции чисел r и s.

В дальнейшем любую пару произвольно заданных целочисленных функций $f(r,s)$ и $g(r,s)$ мы будем называть *методом построения магических квадратов*. Метод мы условимся называть *правильным*, если формулы (3) действительно определяют магический квадрат.

Описанное сведение задачи построения магического квадрата к задаче построения пары функций $f(r,s)$ и $g(r,s)$ позволяет, в частности, классифицировать способы построения магических квадратов в зависимости от характера этих функций. Простейшим методом построения магических квадратов следует считать метод, для которого функции $f(r,s)$ и $g(r,s)$ линейны, т. е. имеют вид

$$f(r,s) = a_1 r + b_1 s + c_1,$$

$$g(r,s) = a_2 r + b_2 s + c_2,$$

где $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ — некоторые целые числа. Такого рода методы мы будем назвать *линейными*.

Основная (до сих пор не решенная) задача теории магических квадратов состоит в выяснении *необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять правильные методы построения магических квадратов.* Мы рассмотрим эту задачу лишь для линейных методов. В частности, мы покажем, что

правильные линейные методы существуют лишь для нечетных n.

2. Общий вид линейного метода построения магических квадратов

По определению, каждый линейный метод построения магических квадратов имеет вид

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 r + b_1 s + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 r + b_2 s + c_2 \pmod{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для практического применения этого метода весьма существенно, что из формул (1) можно исключить координаты r и s. Действительно, очевидно, что если

$$z = nr + s + 1, \qquad r,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

то

$$r = \left[\frac{z-1}{n}\right],$$

где [ ] — знак целой части (наибольшего целого числа, содержащегося в данном), и

$$s \equiv z - 1 \pmod{n}.$$

Поэтому формулы (1) можно переписать в следующем виде, не содержащем явно координат r и s:

$$x \equiv a_1 \left[\frac{z-1}{n}\right] + b_1(z-1) + c_1 \pmod{n},$$

$$y \equiv a_2 \left[\frac{z-2}{n}\right] + b_2(z-1) + c_2 \pmod{n}.$$

При фактическом построении магического квадрата можно также писать не эти сравнения, а соответствующие равенства

$$\begin{aligned} x &= a_1 \left[\tfrac{z-1}{n}\right] + b_1(z-1) + c_1, \\ y &= a_2 \left[\tfrac{z-2}{n}\right] + b_2(z-1) + c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя в эти равенства числа $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$, мы получим координаты ряда клеток, часть из которых будет обязательно лежать вне основного квадрата. В каждую клетку надо затем вписать соответствующее число z, заменяя одновременно клетки, лежащие вне основного квадрата, эквивалентными клетками этого квадрата (и сохраняя в последних те же числа). В результате мы получим некоторое заполнение клеток основного квадрата числами от 1 до n^2, которое и будет магическим квадратом, если только метод (1) правилен.

3. Условия правильности линейного метода

Чтобы линейный метод, выраженный формулами (1) п. 2, был правильным, необходимо в первую очередь, чтобы эти формулы устанавливали взаимно однозначное соответствие между координатами (r, s) чисел от 1 до n^2 и координатами (x, y) клеток основного квадрата, т. е. чтобы для любых координат x и y из этих формул можно было однозначно найти соответствующие координаты r и s. Но решая по известным правилам сравнения (1) п. 2 относительно r и s, мы получим сравнения

$$\begin{aligned} \Delta r &\equiv b_2x - b_1y + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod n, \\ \Delta s &\equiv -a_2x + a_1y - a_1c_2 + a_2c_1 \pmod n, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Пусть выполнено следующее условие:

M1. *Определитель* Δ *взаимно прост с* n.

Тогда для любых x и y сравнения (1) однозначно определяют координаты r и s (следует иметь ввиду, что, по определению, эти координаты принадлежат полной системе (2) п. 1 наименьших неотрицательных вычетов по модулю n). Таким образом,

при выполнении условия M1. *формулы (1) п.2 устанавливают взаимно однозначное соответствие между числами от* 1 *до* n^2 *и клетками основного квадрата.*

Рассмотрим теперь следующее условие:

M2. *Коэффициенты* a_1, a_2, b_1, b_2 *взаимно просты с* n.

Оказывается, что

при выполнении условия M2 *требование магичности выполняется по отношению ко всем вертикальным и горизонтальным рядам, т. е. сумма чисел каждого вертикального и каждого горизонтального ряда равна* $\Sigma = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Действительно, для всех клеток некоторого, скажем, горизонтального ряда координата y одна и та же, а координата x пробегает полную систему вычетов по модулю n. Так как числа b_2 и $-a_2$ по условию взаимно просты с n, то левые части сравнений (1), каждая в отдельности, также пробегают полную систему вычетов. Поэтому полную систему вычетов будут пробегать как координата r, так и координата s (ибо по условию M.1 определитель Δ взаимно прост с n). Таким образом, для чисел рассматриваемого ряда координаты r и s принимают по одному разу каждое из значений 0, 1, ..., $n-1$. Следовательно, суммы R и S этих координат равны каждая числу $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, сумма всех чисел данного ряда равна, очевидно, числу $nR + S + n$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Для вертикальных рядов рассуждение аналогично (меняется координата y, а координата x остается постоянной).

Таким образом, остается найти лишь условия магичности обеих диагоналей ("восходящей", соединяющей левый нижний угол с правым верхним, и "нисходящей", соединяющей левый верхний угол с правым нижним).

Для клеток восходящей диагонали имеет место равенство $x = y$, и поэтому координаты чисел, находящихся в клетках этой диагонали, определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 - b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod n,$$
$$\Delta s \equiv -(a_2 - a_1)x + a_2c_1 - a_1c_2 \pmod n.$$

Так как число Δ взаимно просто с n, то существует такое число Δ', что

$$\Delta\Delta' \equiv 1 \pmod n.$$

Умножая выписанные выше сравнения на это число, мы получим, что

$$\begin{aligned} r &\equiv \Delta'(b_2 - b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \pmod n, \\ s &\equiv -\Delta'(a_2 - a_1)x + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \pmod n. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, координаты r и s чисел восходящей диагонали представляют собой вычеты значений, принимаемых левыми частями сравнений (2), когда x пробегает полную систему вычетов 0, 1, ..., $n-1$. Следовательно, (см. Введение, п. 3, формула (5)), суммы R и S этих координат выражаются формулами

$$R = n\left(\varrho + \frac{n-d}{2}\right), \qquad S = n\left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2}\right),$$

где

$$d = (\Delta'(b_2 - b_1), n) = (b_2 - b_1, n),$$
$$d_1 = (-\Delta'(a_2 - a_1), n) = (a_2 - a_1, n),$$

а ϱ и ϱ_1 представляют собой наименьшие неотрицательные вычеты чисел $\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1)$ и $\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2)$ по модулям d и d_1 соответственно.

Требование магичности заключается в том, что сумма $nR + S + n$ всех чисел восходящей диагонали равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Следовательно, должно иметь место равенство

$$n^2\left(\varrho + \frac{n-d}{2}\right) + n\left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2}\right) + n = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

т. е. равенство

$$2n^2\varrho + 2n\varrho_1 = n^2(d-1) + n(d_1 - 1).$$

Последнее равенство возможно только при d и d_1 нечетных и, как легко видеть, будет заведомо выполнено, если

$$\varrho = \frac{d-1}{2}, \qquad \varrho_1 = \frac{d_1 - 1}{2},$$

т. е. если будут иметь место сравнения

$$\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \equiv \frac{d-1}{2} \pmod d,$$

$$\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \equiv \frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1}.$$

Умножив эти сравнения на Δ, мы придем к следующему условию:

M3. *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 \equiv \Delta\frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$a_2c_1 - a_1c_2) \equiv \Delta\frac{d_1-1}{2} \pmod{d_1},$$

где $d = (b_2 - b_1, n)$, $d_1 = (a_2 - a_1, n)$.

По доказанному

при выполнении условия M3 *восходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.*

Заметим, что при $d = 1$ или при $d_1 = 1$ соответствующее сравнение из условия M3 удовлетворяется автоматически. Отсюда, в частности, следует, что условие M3 будет заведомо выполнено, если $d = d_1 = 1$, т. е. если выполнено следующее условие:

M3$'$. *Числа* $b_2 - b_1$ *и* $a_2 - a_1$ *взаимно просты с* n.

Для нисходящей диагонали $x+y = n-1$, и поэтому ее клетки заполнены числами, координаты которых определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 + b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 - b_1(n-1) \pmod{n},$$

$$\Delta s \equiv (a_2 + a_1)y - a_1c_2 + a_2c_1 - a_2(n-1) \pmod{n},$$

т. е. из сравнений

$$r \equiv \Delta'(b_2 + b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1 + b_1) \pmod{n},$$

$$s \equiv \Delta'(a_2 + a_1)y + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2 + a_2) \pmod{n}.$$

Отсюда, как и выше мы приходим к условию

M4 *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 + b_1 \equiv \Delta\frac{d_1'-1}{2} \pmod{d'},$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 + a_2 \equiv \Delta\frac{d_1'-1}{2} \pmod{d_1'},$$

где

$$d' = (b_2 + b_1, n), \quad d_1' = (a_2 - a_1, n),$$

и к следующему утверждению:

при выполнении условия M4 *нисходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.*

Условие M4 будет заведомо выполнено, если имеет место следующее условие:

M4$'$. *Числа* $b_2 + b_1$ *и* $a_2 + a_1$ *взаимно просты с* n.

Резюмируя все сказанное, мы получаем окончательный результат:

при выполнении условий M1, M2, M3 *(или* M3$'$ *) и* M4 *(или* M4$'$ *) линейный метод (1) п. 2 правилен.*

Это утверждение дает лишь достаточные условия правильности линейного метода. Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о необходимых условиях.

Заметим в заключение, что

условия M1 *и* M2 *непротиворечивы только для нечетного n.*

Действительно, если n четно, то, согласно условию M2, числа a_1, a_2, b_1, b_2 должны быть нечетны, и поэтому определитель $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$, как разность двух нечетных чисел, должен быть четным, что в силу условия M1 невозможно.

Таким образом,

правильные методы (или по крайней мере методы, удовлетворяющие условиям M1—M4 *) могут существовать лишь при нечетном n.*

Примеры таких методов для любого нечетного n мы укажем в следующей главе.

ГЛАВА 2

Классические алгорифмические методы построения магических квадратов нечетного порядка

1. Индийский метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называемый также сиамским) является, по-видимому, самым древним алгорифмом построения магических квадратов произвольного нечетного порядка $n = 2m+1$. Этот алгорифм описывается следующими правилами:

1°. Числа от 1 до n^2 поочередно вписываются в клетки основного квадрата.

2°. Если некоторое правило требует вписать данное число в клетку, лежащую вне основного квадрата, то вместо этого рассматриваемое число вписывается в эквивалентную клетку основного квадрата.

3°. Число 1 вписывается в среднюю клетку верхнего ряда, т. е. в клетку с координатами

$$(m, 2m).$$

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y), то следующее число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x+1, y+1)$, т. е. в клетку, смежную с клеткой (x, y), в направлении восходящей диагонали, при условии, что эта последняя клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+1)$ уже занята некоторым числом, то число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y-1)$, т. е. в клетку, непосредственно примыкающую снизу к клетке (x, y). (Оказывается, что это всегда возможно, т. е. клетка $(x, y-1)$ обязательно свободна от чисел.)

На рис. 3 изображен магический квадрат третьего порядка, построенный индийским методом. Для ясности на этом рисунке заполнены также некоторые клетки вне основного квадрата. Не описывая подробно это построение, мы укажем лишь, что число 1 вписано на основании правил 1° и 3°, число 2 — на основании правил 4° и 2°, число 4 — на основании правил 5° и 2°, число 5 — на основании правила 4°, число 6 — на основании правила 4°, число 7 — на основании правил 5° и 2°, число 8 — на основании правил 4° и 2° и, наконец, число 9 — на основании правил 4° и 2°.

	9	2	4
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

рис. 3

Замечание. Из полученного по индийскому методу магического квадрата третьего порядка можно поворотами около центра и отражениями в сторонах получить еще семь других магических квадратов. Без труда проверяется, что этими восемью магическими квадратами исчерпываются все магические квадраты третьего порядка. Таким образом, указанная в п. 1 оценка для числа магических квадратов данного порядка n не может быть улучшена (если не налагать на n никаких дополнительных условий).

Сущность индийского метода лучше всего уясняется, если не обращать внимания на правило 2°, т. е. если не заменять внешних клеток эквивалентными. При таком упрощении применение алгорифма сводится к заполнению клетки $(m, 2m)$ числом 1 и следующих за ней вверх по диагонали клеток $(m+1, 2m+1)$, $(m+2, 2m+2)$, ..., $(m+k, 2m+k)$, ... числами 2, 3, ..., $k+1$, ..., до тех пор, пока не встретится клетка, эквивалентная клетке $(m, 2m)$, что, очевидно, произойдет при $k = n$. Под последней из заполненных клеток (это будет клетка $(m+n-1, 2m+n-1) = (3m, 4m)$ с числом n), т. е. в клетке $(3m, 4m-1)$, помещается число $n+1$, и с этой клетки начинается новый диагональный ряд, который, как легко видеть, кончится на числе $2n$, так что число $2n+1$ помещается под клеткой с числом $2n$. Следующий диагональный ряд кончится на числе $3n$, и т. д. Этот процесс остановится, когда мы дойдем до числа n^2. В результате мы получим n диагональных рядов чисел по n чисел в ряду, составляющих своеобразную "лесенку" (см. рис. 4 для $n = 3$ и $n = 5$).

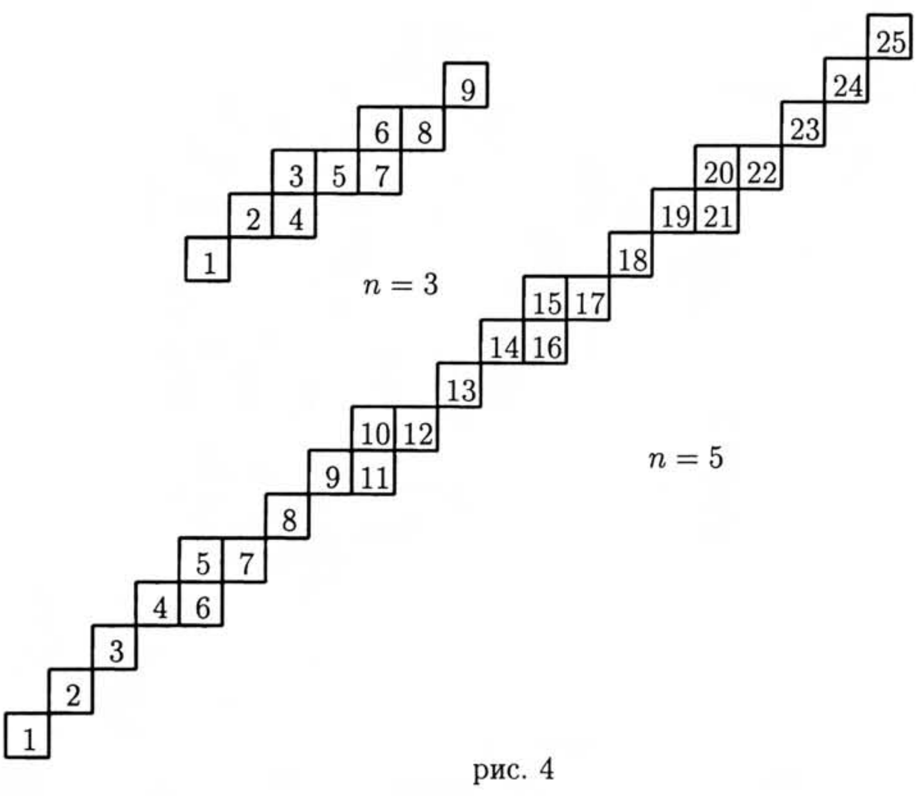


рис. 4

Покажем теперь, что клетка построенной "лесенки", содержащая некоторое число z ($z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$), имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + m - 1, \\ y &= z - 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + 2m - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$m = \frac{n-1}{2}.$$

Действительно, для чисел $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ первого диагонального ряда эти формулы дают правильные координаты $(m+z-1, 2m+z-1)$ соответствующих клеток (см. выше). Пусть формулы (1) уже доказаны для чисел $z = (p-1)n+1,\ (p-1)n+2,\ \ldots,\ pn$, составляющих p-й диагональный ряд. Тогда, согласно этим формулам, число pn помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m+1)$ и, следовательно, согласно правилам построения "лесенки", число $pn+1$ помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m)$, число $pn+2$ — в клетке $(pn-p+m+1, pn-2p+2m+1)$, вообще число $z = pn+k$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, — в клетке $(pn-p+m+k, pn-2p+2m+k-1)$, т. е. в клетке $(z-p+m-1, z-2p+2m-1)$. Поскольку при $z = pn+k$ имеет место равенство $\left[\frac{z-1}{n}\right] = p$, тем самым доказано, что формулы (1) справедливы и для чисел $z = ppn+1,\ pn+2, \ldots, (p+1)n$, составляющих $(p+1)$-й ряд. Поэтому, согласно принципу полной математической индукции, формулы (1) справедливы для чисел любого ряда, т. е. для всех чисел от 1 до n^2.

Сравнивая доказанные формулы (1) с формулами (2) из п. 2 гл. 1, мы немедленно получаем, что

индийский метод является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = m,$$

$$a_2 = -2, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 2m.$$

Определитель Δ индийского метода равен, очевидно, единице, так что этот метод для любого n удовлетворяет условию **M1**. Ясно также, что для любого нечетного n он удовлетворяет и условию **M2**. Далее, так как $b_2 - b_1 = 0,\ a_2 - a_1 = -1$, то $d = n,\ d_1 = 1$, и поэтому условие **M3** сводится к сравнению

$$1 \cdot 2m - 1 \cdot m \equiv \frac{n-1}{2} \pmod{n},$$

которое очевидным образом удовлетворяется. Наконец, так как $b_1 + b_2 = 2,\ a_2 + a_1 = -3$, то при $n \not\equiv 0 \pmod 3$ имеет место даже условие **M4**$'$, а при $n \equiv 0 \pmod 3$ условие **M4** сводится к очевидному сравнению

$$-2 \cdot m - (-1) \cdot 2m + (-2) \equiv \frac{3-1}{2} \pmod 3$$

и поэтому также выполнено.

Тем самым доказано, что

для любого нечетного n индийский метод правилен, т. е. его применение приводит к некоторому магическому квадрату.

Индийский метод, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и легкости применения, страдает тем недостатком, что для каждого нечетного n он дает лишь один, вполне определенный, магический квадрат. Однако, как мы сейчас покажем, несколько обобщив этот метод, можно получить метод, приводящий, вообще говоря, к n квадратам.

2.Обобщенный индийский метод

Существо индийского метода состоит в правилах 4°, 5°, обеспечивающих построение "лесенки". Что же касается правила 3°, т. е. требования начинать построение обязательно с клетки $(m, 2m)$, то оно, как мы сейчас покажем, отнюдь не обязательно.

Подставляя в формулы (1) п. 2 гл. 1 общего линейного метода координаты $r = 0,\ s = 0$ числа 1, мы немедленно получим, что

коэффициенты $c_1,\ c_2$ *представляют собой координаты клетки, в которую вписано число* 1.

Следовательно, варьируя числа c_1 и c_2, мы будем менять место числа 1 в квадрате. Сохраняя при этом остальные коэффициенты $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ неизменными, мы оставим метод по существу тем же самым.

Таким образом, желая исследовать вопрос о возможном обобщении правила 3° индийского метода, мы должны рассмотреть метод вида

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + c_1 - 1, \\ y &= z - 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + c_2 - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

и найти все значения коэффициентов c_1 и c_2, для которых этот метод правилен. Алгорифм для построения магических квадратов по этому методу состоит из тех же правил 1° — 5°, что и алгорифм индийского метода, с тем лишь отличием, что правило 3° заменяется следующим:

3'°. Число 1 вписывается в клетку с координатами (c_1, c_2).

Метод (1), очевидно, удовлетворяет условиям **M1** и **M2**. Что же касается условия **M3**, то, поскольку $d = n,\ d_1 = 1$, оно сводится к сравнению

$$c_2 - c_1 \equiv m \pmod n. \tag{2}$$

Этому сравнению удовлетворяютn клеток основного квадрата, эквивалентных клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего ряда.

Наконец, если $n \not\equiv 0 \pmod 3$, то выполнено условие **M4'**. Если же $n \equiv 0 \pmod 3$, то $d' = 1,\ d_1' = 3$ и поэтому условие **M4** сводится к сравнению

$$-2c_1 + c_2 - 2 \equiv 1 \pmod 3,$$

т. е. к сравнению

$$2c_1 - c_2 \equiv 0 \pmod n. \tag{3}$$

С другой стороны, при $n \equiv 0 \pmod 3$ (а значит, при $m \equiv 1 \pmod 3$) из сравнения (2) вытекает сравнение

$$c_2 - c_1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Отсюда и из сравнения (3) следует, что

$$c_1 \equiv 0 \pmod 3, \qquad c_2 \equiv 1 \pmod 3.$$

Таким образом, мы получаем следующий окончательный результат:

в алгорифме индийского метода начальную клетку, в которую вписывается число 1, *можно при* $n \not\equiv 0 \pmod 3$ *произвольно выбирать среди* n *клеток, эквивалентным клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего горизонтального ряда; если же* $n \equiv 0 \pmod 3$, *то эта клетка должна дополнительно обладать тем свойством, что ее первая координата делится на* 3 *(и тогда вторая при делении на* 3 *обязательно даст остаток* 1 *).*

В частности, за начальную клетку индийского метода можно всегда выбрать среднюю клетку левого вертикального ряда, имеющую координаты $(0, m)$. Это видоизменение индийского метода было предложено Лалюбером.

С помощью обобщенного индийского метода мы получаем либо n квадратов (при $n \not\equiv 0 \pmod 3$), либо $n/3$ квадратов (при $n \equiv 0 \pmod 3$)).

3. Метод Москопула

В методе византийского ученого Москопула, как и в индийском методе, указывается некоторый алгорифм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2. Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конем, двигающимся вверх и направо (поэтому метод Москопула иногда называют также методом коня).

Первые два правила алгорифма Москопула в точности совпадают с соответствующими правилами 1° и 2° индийского метода. остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Если $n \not\equiv 0 \pmod 3$, то начальная клетка, в которую вписывается число 1, выбирается произвольно, если же $n \equiv 0 \pmod 3$, то за эту клетку принимается средняя клетка нижнего горизонтального ряда, т. е. клетка с координатами $(m, 0)$.

4°. Если некоторое число z вписано в клетку с координатами (x, y), то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+2)$ уже занята некоторым числом, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y + 4)$, т. е. в клетку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и клетка с числом z, но находящуюся на четыре клетки выше.

Рис. 5 иллюстрирует построение магического квадрата пятого порядка по способу Москопула.

Для изучения метода Москопула мы, как и раньше, отвлечемся от правила 2°, т. е. не будем заменять внешние клетки эквивалентными им клетками основного квадрата. Тогда, если мы вписали число 1 в клетку (x_0, y_0), то число 2 мы должны вписать в клетку (x_0+1, y_0+2), число 3 — в клетку (x_0+2, y_0+4) и вообще число z — в клетку $(x_0+z-1, y_0+2(z-1))$, и так до тех пор, пока не встретим клетку, эквивалентную уже занятой. Очевидно, что это произойдет при $z = n+1$. Поэтому, вписав число n в клетку $(x_0+n-1, y_0+2(n-1))$, мы число $n+1$ должны вписать в клетку (x_0+n, y_0+2n), эквивалентную исходной клетке (x_0, y_0), а — в соответствии с правилом 5° — в клетку $(x_0+n-1, y_0+2(n+1))$. Дальнейшие вписывания мы должны опять производить по "ходу коня", пока снова не натолкнемся на клетку, эквивалентную уже занятой, что, как легко видеть, произойдет при $z = 2n+1$, после чего мы должны совершить "скачек вверх" и т. д.

			21		
	6				
	12	25	8	16	4
	18		14	22	10
11	24	7	20	3	
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	
10	18	1	14	22	

рис. 5.

Простой индукцией без труда показывается (см. аналогичные рассуждения в п. 1), что при этом построении число $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ попадает в клетку с координатами

$$x = z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + x_0 - 1,$$

$$y = 2z + 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + y_0 - 2.$$

Тем самым доказано, что *метод Москопула является линейным методом с коэффициентами*

$$a_1 = -1, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = x_0,$$

$$a_2 = 2, \qquad b_2 = 2, \qquad c_2 = y_0.$$

Для этого метода

$$\Delta = -4, \quad d = 1, \quad d_1 = (3, n), \quad d' = (3, n), \quad d'_1 = 1,$$

откуда следует, что при $n \not\equiv 0 \pmod 3$ этот метод правилен. Что же касается случая $n \equiv 0 \pmod 3$, то для правильности метода должны удовлетворятся сравнения

$$2x_0 + y_0 \equiv -4\frac{3-1}{2} \pmod 3,$$

$$y_0 - 2x_0 + 1 \equiv -4\frac{3-1}{2} \pmod 3,$$

из которых следует, что

$$y_0 \equiv 1 \pmod 3, \qquad y_0 \equiv 0 \pmod 3. \tag{1}$$

Поскольку координаты $x_0 = m$ и $y_0 = 0$ средней клетки нижнего горизонтального ряда удовлетворяют этим соотношениям, то

метод Москопула правилен для любого нечетного n.

Одновременно мы получаем, что, как и индийский метод, метод Москопула допускает обобщение. Именно, *при $n \equiv 0$ (mod 3) начальную клетку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно, лишь бы удовлетворялись сравнения* (1).

При помощи этого метода получаются n^2 магических квадратов, если $n \not\equiv 0 \pmod 3$, и $(n/3)^2$ таких квадратов, если $n \equiv 0 \pmod 3$.

При $n \not\equiv 0 \pmod 3$ метод Москопула можно видоизменить, заменяя в нем правило 5° правилом 5° индийского метода. Читателю предлагается самостоятельно исследовать правильность этого видоизменения (и, в частности, найти все допустимые начальные клетки).

4. Метод альфила

Метод альфила вполне аналогичен методу Москопула, только вместо хода коня в этом методе используется движение по диагонали через одну клетку (по этому закону в старинных шахматах двигался предок современного слона — так называемый а л ь ф и л, от которого и происходит название метода). Как и для метода Москопула, первые два правила метода альфила совпадают с правилами 1° и 2° индийского метода. Остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(0, 1)$.

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y), то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 2, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка $(x + 2, y + 2)$ уже занята, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 3)$, т. е. в клетку, получающуюся из клетки с числом z

				6		
		24	8	17		15
	21	10	19	3	12	
23	7	16	5	14	23	7
9	18	2	11	25	9	18
20	4	13	22	6	20	4
1	15	24	8	17		
12	21	10	19	3		

рис. 6

«удлиненным ходом коня».

Пример построения магического квадрата пятого порядка по методу альфила приведен на рис. 6.

Без труда проверяется (см. аналогичные рассуждения для индийского метода и метода Москопула), что аналитически метод альфила записывается формулами

$$x = 2z - \left[\frac{z-1}{n}\right] - 2,$$

$$y = 2z + \left[\frac{z-1}{n}\right] - 1,$$

откуда следует, что

метод альфила является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 0,$$

$$a_2 = 1, \qquad b_2 = 2,, \qquad c_2 = 1.$$

Проверка того, что

для каждого нечетного n метод альфила правилен,

предоставляется читателю.

Для каждого n метод альфила дает только один магический квадрат.

5. Метод Баше

По-видимому самый простой метод построения магических квадратов нечетного порядка предложен Баше де Мезириаком. Он известен также как м е т о д т е р р а с. Некоторые авторы называют его и н д и й с к и м методом. Он был известен еще Москопулу.

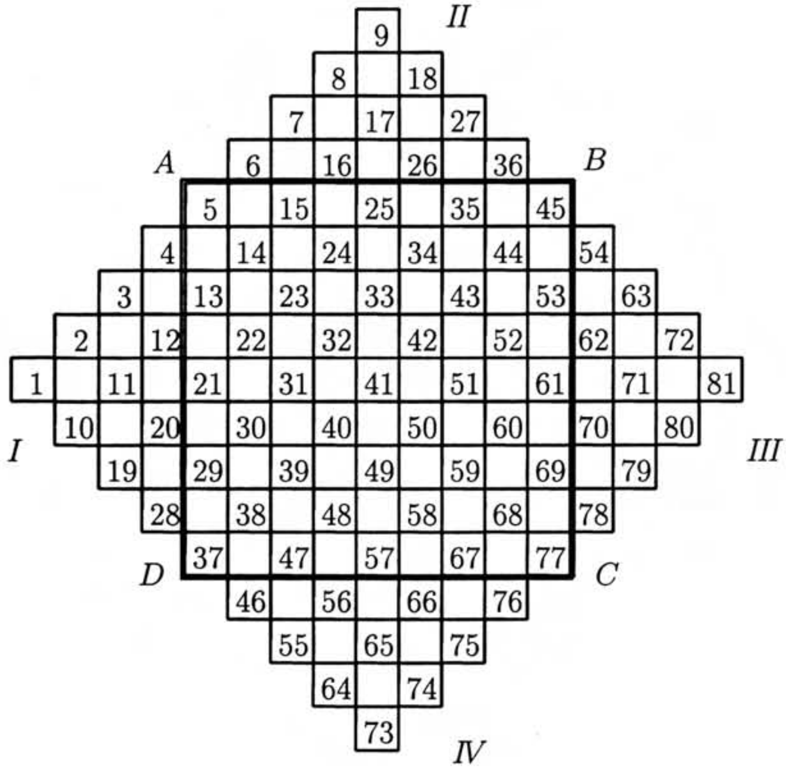


рис. 7

Для построения магического квадрата по методу Баше следует выбрать на плоскости n соседних диагональных рядов, содержащих по n клеток и таких, что средняя клетка каждого ряда принадлежит нисходящей диагонали основного квадрата. Клетки левого верхнего ряда заполняются снизу вверх числами $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, клетки следующего ряда — числами $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ и вообще клетки p-го ряда, где $1 \leqslant p \leqslant n$, — числами $(p-1)n+1,\ (p-1)n+2,\ \ldots,\ pn$ (см. для $n = 9$ рис. 7). Заполненные таким образом клетки частью расположены внутри основного квадрата, частью — вне его, причем внешние клетки образуют по бокам основного квадрата четыре совершенно одинаковых выступа или террасы. Легко видеть, что каждая пустая клетка основного квадрата эквивалентна одной и только одной клетке некоторой террасы. Следовательно, перенеся клетки террас в основной квадрат, что легко достигается параллельным перенесением этих террас, мы заполним весь основной квадрат числами от 1 до n^2. Оказывается, что получающийся таким образом числовой квадрат является магическим.

На рис. 7 образовавшиеся при заполнении клеток террасы обозначены римскими цифрами I, II, III и IV. Для построения магического квадрата террасу I следует передвинуть параллельно самой себе так, чтобы линия AD совпала с линией BC, террасу II передвинуть так, чтобы линия AB совпала с линией DC, террасу III — так, чтобы линия BC совпала с линией AD и, наконец, террасу IV — так, чтобы линия DC совпала с линией AB. Получающийся в результате магический квадрат изображен на рис. 8.

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

рис. 8

Для доказательства правильности метода Баше мы сдвинем второй сверху диагональный ряд вдоль его направления на n клеток вверх. Ясно, что при этом каждая клетка ряда заменится ей эквивалентной. Далее подобным же образом сдвинем третий ряд на $2n$ клеток вверх и вообще p-й ряд, где $1 \leqslant p \leqslant n$, сдвинем на $(p-1)n$ клеток вверх. Без труда проверяется, что получившаяся таким образом система клеток аналитически определяется формулами

$$x = z + \left[\frac{z-1}{n}\right] - m - 1,$$

$$y = z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + m - 1.$$

Отсюда вытекает, что

метод Баше является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = -m,$$

$$a_2 = -1, \qquad b_2 = 1, \qquad c_2 = -m.$$

Для этого метода

$$\Delta = 2, \quad d = n, \quad d_1 = 1, \quad d' = 1, \quad d_1' = n.$$

Следовательно, проверки требует лишь первое сравнение условия **М3** и второе сравнение условия М4. В данном случае эти сравнения имеют вид

$$m + m \equiv 2m \pmod n,$$

$$m - m - 1 \equiv 2m \pmod n$$

и очевидным образом справедливы.

Тем самым доказано, что

метод Баше правилен для любого нечетного n.

По форме алгорифм метода Баше отличается от ранее рассмотренных алгорифмов (индийского, Москопула и альфила). Однако, как легко видеть, он приводит к тому же магическому квадрату, что и алгорифм, для которого правила 1°, 2° и 4° совпадают с правилами индийского метода, а правила 3° и 5° формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(m+1, m)$.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+1)$ уже заполнена, то число $z+1$ вписывается в клетку, имеющую координаты $(x+2, y)$, т. е. в клетку, сдвинутую на две клетки вправо.

Таким образом, метод Баше принадлежит к тому же типу алгорифмических методов, что и рассмотренные ранее методы.

Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о возможном изменении начальной клетки в описанном выше алгорифме.

6. Классические алгорифмические методы с общей точки зрения

Все рассмотренные алгорифмические методы имеют друг с другом много общего. Все они описываются пятью правилами, из которых первые два для всех методов одинаковы, третье описывает возможные координаты (x_0, y_0) начальной клетки, в которую вписывается число 1, четвертое указывает координаты $(\bar{x}, \bar{y})$ клетки, в которую вписывается число $z+1$, при условии, что число z вписано в клетку (x, y) и что клетка $(\bar{x}, \bar{y})$ еще свободна от чисел, и, наконец, пятое правило указывает координаты (x^*, y^*) клетки, в которую вписывается число $z+1$, если клетка $(\bar{x}, \bar{y})$ уже оказалась занятой. При этом для любых x и y величины

$$p = \bar{x} - x, \qquad q = \bar{y} - y, \qquad p_1 = x^* - x, \; q_1 = y^* - y$$

имеют одно и то же постоянное значение.

Такого рода алгорифмы построения магических квадратов мы будем называть *классическими,* а числа p, q, p_1 и q_1 — *параметрами* данного классического алгорифма.

Для индийского метода

$$p = 1, \qquad q = 1, \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = -1;$$

для метода Москопула

$$p = 1, \qquad q = 2, \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = 4;$$

для метода альфила

$$p = 2, \qquad q = 2, \qquad p_1 = 1 \qquad q_1 = 3;$$

для метода Баше

$$p = 1, \qquad q = 1, \qquad p_1 = 2 \qquad q_1 = 0.$$

По индукции легко проверяется (см. аналогичные рассуждения для конкретных методов), что классический метод с параметрами p, q, p_1 и q_1 аналитически выражается формулами

$$x = (p_1 - p)\left[\frac{z-1}{n}\right] + p(z-1) + x_0,$$

$$q = (q_1 - q)\left[\frac{z-1}{n}\right] + q(z-1) + y_0.$$

Таким образом,

любой классический алгорифмический метод построения магических квадратов равносилен линейному методу с коэффициентами

$$\begin{array}{lll} a_1 = p_1 - p, & b_1 = p, & c_1 = x_0 \\ a_2 = q_1 - q, & b_2 = q, & c_2 = y_0. \end{array} \tag{1}$$

Обратно,

любой линейный метод равносилен классическому алгорифмическому методу с параметрами

$$p = b_1, \qquad q = b_2, \quad p_1 = b_1 + a_1, \qquad q_1 = b_2 + a_2$$

и начальной клеткой c_1, c_2).

Подставляя выражения (1) в условия **M**1—**M**4 правильности общего линейного метода, мы получим следующие условия:

A1. *Число*

$$-\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = pq_1 - p_1 q$$

взаимно просто с n.

A2. *Числа* p, q, $p_1 - p$ *и* $q_1 - q$ *взаимно просты с* n.

A3. *Имеют место сравнения*

$$qx_0 - py_0 \equiv -\Delta\frac{d-1}{2} \pmod{d},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta\frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1},$$

где $\qquad d = (p - q, n), \qquad d_1 = (p - q - p_1 + q_1, n).$

A4. *Имеют место сравнения*

$$qx_0 - py_0 \equiv p - \Delta\frac{d' - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta\frac{d_1' - 1}{2} - q_1 + q \pmod{d_1'},$$

где $d' = (p + q, n), \qquad d_1' = (p + q - p_1 - q_1, n).$

Аналогично условия M3′ и M4′ переходят в условия:

A3′. *Числа* $p - q$ *и* $p - q - p_1 + q_1$ *взаимно просты с* n.

A4′. *Числа* $p + q$ *и* $p + q - p_1 + q_1$ *взаимно просты с* n.

Из всего сказанного немедленно следует, что

для правильности классического алгорифмического метода с параметрами p, q, p_1, q_1 *достаточно выполнение условий* **A1**, **A2**, **A3** *(или* **A3′** *)* *и* **A4** *(или* **A4′** *).*

Является ли математика наукой?

(Стенограмма лекции, прочитанной на конференции по философии математики, август 1984, Одесса)

Нет, по видимому, ни одной области человеческой деятельности, представления о которой у неспециалистов так далеки от действительности, как математика. Даже люди, считающие себя вполне интеллигентными, полагают, что математика является собранием скучнейших формул и длинных, утомительных вычислений, и в отличие, скажем, от музыки, изобразительного искусства и литературы культурный человек вполне может ее не знать и тем не менее оставаться "культурным". Тому есть много причин. Одна из них состоит в том, что преподавание математики в школе и – увы! – во многих втузах фактически останавливается на уровне XVII столетия и более чем трехсотлетнее развитие ее идей и методов остается для выпускников школ "терра инкогнита".

Но более фундаментальной – и можно сказать определяющей – причиной служит тот факт, что до сих пор нет четкого концептуального определения математики как науки. Даже лучшие из существующих сочинений, посвященных этому вопросу – яркий пример представляет собой известная книга С.Маклейна – ограничиваются перечислением составляющих ее частей (алгебра, геометрия, анализ) и рассказом о том, чем и как каждая такая часть занимается. В чем же состоит их единство (почему они объединяются в единую математику) и чем они отличаются от других наук, – остается четко не сформулированным.

Основная цель этой лекции – дать определение математики как науки и объяснить в чем состоит ее отличие от всех остальных наук.

Слово "наука" имеет в русском языке очень широкое значение. Наукой является физика, наукой является литературоведение, наукой является учение о сварке (недаром есть институты сварки), наукой является искусство плетения лаптей (оборот "он постиг науку плетения" по-русски вполне допустим, а института по последней науке нет только потому, что это сейчас не актуально).

В английском языке дело обстоит иначе и слово science имеет существенно более узкое значение, означая то, что в русском языке называется естественными науками, т.е. науками о природе. В этом смысле я и буду употреблять слово "наука". Таким образом более точное название этой лекции будет: "Является ли математика естественной наукой?".

Чтобы дать ответ на этот вопрос, давайте более внимательно рассмотрим какую-нибудь естественную науку, скажем физику.

Что изучает физика? Ответ кажется тривиальным. Наука физика изучает природу. Или точнее, некоторые аспекты природы (в отличие, например, от химии). Ну, а что изучают физики? Казалось бы, какая разница? Но тут есть тонкое различие. Физики вовсе не изучают природу непосредственно, они не занимаются явлениями природы, как таковыми. Физик-экспериментатор, ставя эксперимент, смотрит на движение каких-то стрелок, изучает фотографии треков каких-то частиц, и тому подобное. Физик-теоретик что-то пишет на бумаге, делает какие-то вычисления, приходит к каким-то выводам о результатах тех или иных экспериментов. Вот непосредственно чем занимаются физики.

Ну, а какое имеет отношение к природе их деятельность? Очень простое. Прежде чем ставить эксперимент или производить какие-то вычисления, человек создает в своем уме некую модель тех явлений, которые он хочет изучить, исследовать. Анализируя модель, физик делает вывод, какой должен быть результат эксперимента. Он ожидает, что если собрать такой-то прибор, то стрелки будут показывать то-то и то-то. Он собирает такой прибор, ставит эксперимент и убеждается, что стрелки ведут себя нужным образом. Он с удовлетворением говорит, что его модель достаточно точно отражает исследуемое явление. Аналогично, теоретик, имея запас некоторых законов природы, – или придумывая новый закон, – делает из него выводы и смотрит, согласуются ли эти выводы с тем, что получает экспериментатор. Так работают физики.

Таким образом, основное в деятельности естествоиспытателей – это исследование не окружающего мира, а его моделей.

Здесь слово "модель" я употребляю в максимально широком смысле (любое словесное описание – это уже модель). Модели должны быть не слишком просты – иначе можно не уловить существенных черт явления – но и не слишком сложны – иначе модель нельзя будет исследовать.

С течением времени ученые научились придумывать удовлетворяющие их модели и на этой основе исследовать окружающий мир.

Возникает ворос, почему этот метод приводит к успеху? Почему мы познаем мир посредством моделей?

Это очень тонкий, чисто философский вопрос. Я бы даже сказал, это **первый основной вопрос** философии природы. Удивительно, что до сих пор – насколько я знаю – никто его не поднимал.

Я не знаю ответа на этот вопрос. Поэтому утверждение, что наше познание идет с помощью моделей, я вынужден принять как экспериментальный факт.

Быть может, ответ можно получить, рассмотрев сначала иной – возможно даже более интересный вопрос – возможно ли изучение природы без моделей, на основании каких-то совершенно других принципов?

Не претендует ли так называемая восточная философия на возможность изучения природы без моделей, посредством чистого воззрения? Грубо говоря, человек сидит уставившись на свой пуп, и ему в голову приходят мысли о том, как устроен мир. Конечно, и это есть метод познания мира. Но эффективен ли он?

Возможны, конечно, подходы в рамках религиозного или мистического опыта, но это полностью выходит за пределы нашей сегодняшней темы.

Как бы то ни было, мы будем считать экспериментально установленным тот факт, что природу мы познаем с помощью моделей. Это та печка, от которой мы будем танцевать.

Второй экспериментальный факт состоит в том, что, рассматривая модели в разных науках, мы вдруг обнаруживаем группы чрезвычайно сходных моделей и результаты, полученные в одной модели, могут быть применены в другой. Например, изменение численности хищника в системе хищник - жертва очень похоже на изменение силы тока в колебательном контуре. Каждый может привести массу таких примеров и поэтому на этом я останавливаться больше не буду.

Возникает вопрос, в чем причина такой схожести?

Это я рассматриваю, как **второй основной вопрос** философии природы. В отличии от первого, на него многие пытались давать ответы, но все эти ответы представляли собой чисто словесную шелуху. Например, одно из широко распространенных объяснений состоит в том, что этот параллелизм обусловливается материальным единством природы.

Но, конечно, это типичное словоблудие, выдаваемое за философию.

Настоящего объяснения до сих пор нет и я считаю, что сейчас это одна из важнейших проблем философии.

Схожесть моделей можно по-иному выразить, сказав, что модели каждого класса имеют общую *схему*, т.е. что схожие модели - это модели, которые основываются на одной и той же схеме.

Введя таким образом понятие схемы, мы приходим к задаче абстрактного изучения схем как таковых, безотносительно к их конкретному воплощению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Математикой называется наука, изучающая все возможные – хотя бы мысленно – схемы, их взаимосвязи, методы их конструирования, иерархии схем (схемы схем) и т.д. и т.п.

Таким образом, математика не есть наука о моделях окружающего мира, а есть наука о схемах этих моделей.

Так как естественные науки есть науки, изучающие модели мира, то, следовательно, математика такой наукой **не является***.

Не является она, конечно, и гуманитарной наукой: достаточно вспомнить отношение к математике большей части гуманитариев. (Кстати, как я уже упоминал, в их среде можно с гордостью признаваться к нелюбви к математике и в даже полном ее незнании, но Вас обольют презрением, если выяснится, что Вы не любите классическую музыку или литературу. Причины этого социо-культурного феномена многие пытались вскрыть, но исчерпывающего объяснения до сих пор по-видимому нет.)

Толчком к моим размышлениям о математике послужила давнишняя лекция академика Б.М.Кедрова о классификации наук, в которой он достаточно удовлетворительно сумел разложить по полочкам все науки за исключением географии и математики. (Весьма неожиданное сближение!)

Впрочем, особая роль математики давно замечалась уже многими. Еще Галилей характеризовал математику как язык. Другие подчеркивали ее формальный характер (что, впрочем, справедливо только в отношении математики современной) или тот факт, что она представляет собой "создание чистого духа по Платону", но все эти формулировки не полностью отражают суть дела, и они не позволяют, скажем, понять, какая разница между прикладной и чистой математикой и есть ли такая разница.

*Другое мнение выражено в статье академика В.И.Арнольда, опубликованной в настоящем выпуске журнала

Мы ощущаем, что такая разница есть, но до сих пор она не поддавалась четкой формулировке. Теперь же дело совершенно ясно.

Математики детально изучают имеющиеся схемы моделей и обобщают опыт их применения. Результатом являются некие рецепты, которые и выдаются практикам в виде математических методов исследования (например, чтобы найти объем, надо вычислить интеграл). Предметом преподавания в школе и во втузах и являются в основном эти рецепты. Их применение (скажем, определение оптимальной формы коробки) – это, конечно, не дело математиков, точно так же, как шитье платья по выкройке – не работа модельера.

Однако, многочисленность разнообразных схем моделей, накопленных в математике, не позволяет практику (скажем, инженеру) их все знать. Поэтому вторая задача математиков – помочь практике в создании моделей по еще не получившим широкой известности схемам. С этой целью в математике изучаются не только схемы реальных моделей, но и схемы схем, схемы схем схем и т.д. до бесконечности. На практике это выражается в приобретении опыта конструирования схем на примерах решения головоломных, чисто математических задач. В результате очень часто при ответе на какой-нибудь вопрос из практики математик, как фокусник из рукава, вытаскивает нужную схему и вместе с ней решение практической задачи.

Наконец, в математике нужно постоянно придумывать принципиально новые схемы моделей. Иногда – при редкой удаче – это удается сделать, так сказать, "из головы". Но, как правило, эти схемы приходится с большим трудом извлекать из реальных моделей. Каждый раз это – крупный успех, знаменующий скачок в развитии математики, открывающий новое поле работы. Поэтому для развития математики необходимо постоянное обращение к практике.

Конечно, все эти роды деятельности математика должны быть в идеале тесно взаимосвязаны. Однако ныне, в век специализации, каждому математику приходится выбирать (часто не по собственной воле) и заниматься либо приложением уже разработанных схем к проблемам практики, либо созданием и разработкой новых схем или их вариантов. Первое направление деятельности называется "прикладной" математикой, а второе – "чистой". При этом работа как в "прикладной", так и в "чистой" математике может варьироваться от рутинного применения уже давно разработанных схем до создания принципиально новых схем. Поэтому провести между этими двумя направлениями четкий водораздел невозможно.

Причины же того, почему различение "прикладной" и "чистой" математики столь живуче, лучше всего обсуждать в рамках общей проблемы об устойчивости человеческих заблуждений. Здесь этому не место.

В последнее время широко распространилось мнение, что внедрение в практику компьютеров резко изменило принципы взаимоотношений математики и других наук. На самом деле это мнение основано на недоразумении. Компьютеризация никак на эти принципы не повлияла. Она лишь сделала безнадежно устаревшими многие любовно лелеемые математиками схемы моделей и позволила разработать другие, более эффективные. В истории математики так происходило уже много раз, и появление компьютеров лишь направило этот процесс по новому пути.

Распространено также мнение – особенно среди практиков-техников – уподобляющее современных математиков средневековым схоластам, обсуждавшим проблемы типа "сколько ангелов может поместиться на кончике иглы?". Но для схоластов эти дискуссии были – используя современную терминологию – операциональной игрой, в которой они оттачивали свой интеллект для решения более серьезных задач. Аналогично дело обстоит и в математике, многие проблемы которой часто выглядят со стороны бессодержательной игрой.

Сторонники последнего мнения ссылаются также на тот бесспорный факт, что тысячи и тысячи придуманных и изученных математиками умозрительных схем отомрут и забудутся, прежде чем найдут реализацию хотя бы в одной модели. Однако их трупы послужат питательной средой для новых схем (имеющих техническое имя теорем), а опыт их существования поможет сформулировать более удачливым или – что фактически равносильно – более талантливым коллегам новые приемы формулирования схем, схем схем и т.д. Так в круговороте жизни и смерти происходит развитие математики.

Следует сказать, что та или иная конкретная наука вполне может существовать и даже процветать и без разработанных в математике моделей. Примером являются биология (в которую математические модели только начали проникать) и эстетика (где математика еще не используется). Тот факт, что разработанные в математике схемы моделей – так уж сложилось исторически – ориентированы в первую очередь только на "точные" науки естественнонаучного цикла, является основным дефектом современной математики. Одной из ее первоочередных задач должно быть осмысление "гуманитарных" моделей и создание их общей теории. Эта теория, по-видимому, будет совсем не похожа на привычные математические схемы и, во всяком случае, не будет иметь вид формального исчисления. Основные идеи этой будущей теории не должны заимствоваться из уже имеющихся в математике принципов, а должны возникать из конкретного анализа моделей гуманитарных наук.

Известное противопоставление "физиков" и "лириков" отражает существование двух дополнительных равноправных способов освоения фактов реального мира – рационалистического, выражающегося в системе наук, и эмоционального, выражающегося в системе искусств. Дополнительность (в смысле Нильса Бора) этих способов маскирует тот факт, что оба они пользуются моделями (хотя, конечно, и различного характера). Попытки исследования моделей искусства делаются ныне в рамках кибернетики (это так называемые "кибернетические теории искусства"), но их общим дефектом является стремление к дурно понятой "математизации". На самом же деле и здесь общие принципы должны не привноситься извне, а возникать на базе анализа конкретного материала той или иной области человеческой деятельности.

Я излагал все эти идеи уже несколько раз и они вызвали оживленную полемику. В отношении многих математических понятий утверждение, что они являются схемами каких-то моделей, возражений не вызывает. Например, все согласны, что уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами – это схема всех моделей колебательного движения, в какой бы конкретной ситуации они не возникали.

Однако, дискуссию вызывал вопрос, как в эту концепцию входит понятие числа.

Это действительно трудный вопрос, потому что возникновение понятия числа столь древнее явление, что едва ли остались следы, как люди пришли к этому понятию, т.е. в результате абстрагирования каких моделей оно возникло... Но оказывается, что это не совсем так – следы остались!

Например, они обнаруживаются в японском языке. В этом языке существуют специальные группы числительных, скажем, для круглых предметов, совсем другие числительные для длинных предметов, совсем другие числительные для живых предметов и так далее. С точки зрения, европейской грамматики это оформляется, сейчас, правда, не как различные числительные, а как одни и те же числительные, к которым прибавляются различные суффиксы. Но это вопрос лишь описания этого языкового явления.

Можно сделать вывод, что система японских числительных представляет собой некоторый рудимент хода мыслей, в котором люди пришли к абстрактному понятию числа и, где-то на самом первоначальном уровне еще пикантропов, для арбузов была одна система числительных, для дынь – другая, для палок – третья, для людей – четвертая. Конечно, это система далеко не уходила – раз, два, три и все, но, во всяком случае, для каждого набора предметов были собственные слова для их счета. Потом постепенно было замечено, что, можно использовать одни и те же слова для всех предметов круглой формы, но для предметов продолговатой формы остались другие слова. Только на очень высокой ступени развития пришли к той мысли, что вообще конкретная суть предметов роли не играет и счет можно производить в совершенно абстрактной форме.

Таким образом, моделями здесь были процедуры счета конкретных вещей, причем для каждого конкретного вида предметов использовались свои слова. А потом было замечено, что эти процедуры очень схожи, и было выработано понятие числа, как схемы любого конкретного счета.

Предметом дискуссии было также отсутствие у меня точных определений, что такое модель и что такое схема модели. Но дело здесь в том, что в такого рода философских, или точнее, полуфилософских рассуждениях какие либо уточнения понятий просто вредны. В этих рассуждениях действует своеобразный принцип неопределенности – чрезмерное уточнение смысла используемых слов убивает мотивировки и многие подразумеваемые аспекты просто пропадают.

Здесь стоит вообще объяснить, что такое философствование.

Человеку свойственно пытаться рассуждать о вещах, которые он еще не полностью понимает, но очень хочет их понять (а также ставить и обсуждать вопросы в принципе не имеющие ответа; например, о смысле жизни). Рассуждать о не полностью понятых вещах – и даже не полностью осознанных – для многих страшно интересно, и попытки такого мудрствования - это и есть философия. После того, как в результате длительного обсуждения что-нибудь четко выкристаллизовывается, возникает уже четкая наука с четкими определениями, которая отпочковывается от философии. Вся история философии и состоит в том, что от нее постепенно отпочковываются те или иные науки. Например, в конце XIX века, отпочковалась от философии психология, а на заре времен – математика.

О достоверности древней истории

(Техника и наука, №7, 1982)*

В этой статье излагаются соображения, впервые высказанные и обоснованные известным революционером, почетным академиком Н.А.Морозовым-Шлиссельбуржцем.

В отличие от истин математики, физики или географии, которые в принципе могут быть каждым проверены, утверждения истории не допускают непосредственных экспериментальных исследований. Мы не можем отправиться в прошлое и удостовериться в справедливости сообщаемых нам сведений. Вся историческая информация неизбежно вторична и опирается главным образом на письменные свидетельства, достоверность которых нуждается в оценке.

Конечно, исторический документ только тогда имеет какую-нибудь ценность, когда он аутентичен, то есть не является фальсификацией, изготовленной легкомысленными или недобросовестными потомками.

К счастью, в большинстве исторических исследований аутентичность основной массы документов самоочевидна. Она опирается на непрерывность и массовость. Например, мы вполне уверены в том, что во второй половине XVIII века императрицей России была Екатерина II, что ее сменил Павел, что во время правления Екатерины произошло крестьянское восстание под предводительством Емельяна Пугачева и т.д. и т.п. Колоссальное количество документов того времени, аутентичность которых обосновывается непрерывной цепью ссылающихся друг на друга документов, простирающейся до нашего времени, делает эти утверждения столь же достоверными, как, скажем, утверждение о круглой форме Земли. Однако уже неясно, кто был отец Павла, да и в том, что он был сын Екатерины, имеются сомнения. Споры шли о том, умер ли Александр I в 1825 г. (так называемая "проблема старца Кузьмича").

Ясно, что чем дальше мы удаляемся в прошлое, тем острее стоит вопрос об аутентичности. Особенно плохо дело обстоит с античными документами, ни для одного из этих сочинений мы не имеем цепочки последовательных копий от античности до момента его тиснения на типографском станке. Более того, как правило, мы имеем только самые последние копии (датируемые в лучшем случае IX-X веками), предыстория которых совершенно неизвестна.

Например, рукопись Тацита его открывателю Поджо принес около 1425 г. какой-то безвестный монах из какого-то северогерманского монастыря; имя монаха и местонахождение монастыря Поджо никому не сообщил. Риторические сочинения Цицерона были известны только в отрывках, пока в 1420 г. специалист по Цицерону миланский профессор Барцицца не обнаружил в г. Лоди их полный текст. После изготовления копий лодийской рукопись исчезла (!).

*По сравнению с публикацией в ТиН заголовок изменен. – Ред.

Аналогично дело обстоит и с греческими классиками. Платон был фактически неизвестен гуманистам до 1482 г., когда Фичино опубликовал латинский перевод его диалогов. Однако, несмотря на многочисленные требования друзей и издателей, Фичино никому не показывал греческих оригиналов, а после его смерти они пропали бесследно.

Обстоятельства находок античных текстов неизвестны даже в наше время. Например, подробности обнаружения в 1891 г. "Афинской политии" Аристотеля были в свое время скрыты и до сих пор остаются тайной.

МОГЛА ЛИ АНТИЧНАЯ КНИГА ДОЙТИ ДО НАС?

Всем музейным и библиотечным работникам хорошо известно, что без специальных предосторожностей книги и рукописи быстро ветшают, приходя в полную негодность. Их нужно держать при определенной температуре, беречь от пыли, предохранять от сырости и прямых лучей солнца, от плесени, насекомых, грызунов и принимать десятки других защитных мер. И все же продолжительность жизни книги всего несколько столетий. Поэтому, чтобы она могла сохраниться в веках, ее нужно периодически переписывать. Никто из историков не сомневается в наличии для каждого античного сочинения "непрерывной рукописной традиции, восходящей в конечном счете к одному из его античных изданий". Здесь действует простейший силлогизм: 1) античная книга дошла до наших дней; 2) без переписывания это невозможно; 3) следовательно, книги переписывались.

Но кем осуществлялось это переписывание? Обычный ответ гласит, что это делалось в монастырях благочестивыми монахами, бескорыстно трудившимися "во спасение души". И это действительно единственно возможный ответ, поскольку этот труд в продолжении столетий могла взять на себя только постоянная и мощная организация.

Но здесь сразу возникает несколько сомнений.

Во-первых, в раннем средневековье (VI-IX века) среди монашества царила почти полная безграмотность, а грамотные люди отнюдь не пользовались уважением: на них смотрели со страхом, как на колдунов, прикосновенных к магии и нечистой силе, а официальные церковные власти лишь мирились с грамотностью, как с неизбежным и необходимым злом. В этих условиях, если даже отдельные энтузиасты и предпринимали переписку не церковных книг, то их могли только терпеть и уж никак не поощрять. А ведь переписка книг ввиду дороговизны пергамента требовала в то время и значительных финансовых затрат. Где предположительные энтузиасты находили необходимые средства (и не раз, и не два, а на протяжении многих столетий)?

Правда, в истории известен один такой энтузиаст – знаменитый Кассиодор, живший якобы в VI веке. Однако фактические сведения о Кассиодоре весьма скудны и велика вероятность, что это просто вымышленная личность.

Впрочем, если мы даже согласимся с легендой о Кассиодоре, то по-прежнему будет неясно, кто финансировал переписку книг четыреста лет после его смерти до IX-X веков, когда отношение к грамотности изменилось и переписка книг в монастырях стала идеологически и экономически возможной.

Во-вторых, как под внешним давлением официальных властей, так и по своим внутренним убеждениям монахи-переписчики должны были сосредоточить свое внимание на книгах божественного содержания. На звание коллекционеров языческих и вольнодумных текстов монахи очень и очень плохие кандидаты. Но тогда спрашивается, кто же переписывал (и не раз, и не два) атеистическую поэму Лукреция Кара "О природе вещей?" Историки утверждают, что сохранилась записка (?) Цицерона от 15 марта 44 г. до н.э., возможно, относящаяся к убийству Цезаря: "Поздравляю тебя, радуюсь за тебя... хочу знать, что ты делаешь и что происходит". Не странно ли, что эту записку тоже добросовестно переписывали столетиями благочестивые монахи?

В-третьих, чтобы переписывать научные, например математические, сочинения, надо хотя бы понимать их ценность и иметь в виду хотя бы одного возможного читателя. А кто в VIII-X веках мог понимать и ценить Евклида, Архимеда и Аполлония? Арабы? А кто переписывал Евклида до арабов? Кстати сказать, обычно считается, что древнейшая известная нам рукопись Евклидовых "Начал" была сделана в 888 г. в Византии для епископа Цезарейского. Значит ли это, что в Византии IX века существовали математики первоклассного ранга (тот же епископ Цезарейский), для которых был понятен и интересен Евклид?

В-четвертых, средневековым монахам классическая латынь была неизвестна. Можно ли представить себе не знающего этого языка монаха, скрупулезно переписывающего, как машина, Цицерона?

Все эти соображения принуждают нас отвергнуть указанный выше силлогизм и сформулировать новый: 1) без переписывания античная книга дойти до нас не могла; 2) осуществлять переписывание было некому, и потому его не было; 3) следовательно, античная книга до нас дойти не могла.

БЕЗ БУМАГИ НЕ ОБОЙТИСЬ

А могла ли античная книга вообще существовать? Чтобы приготовить один лист пергамента, необходимо шкуру молодого теленка (вещь саму по себе дорогую) подвергнуть длительной, сложной и дорогостоящей обработке. Это ставило пергамент на уровень драгоценных предметов, и такое положение сохранялось вплоть до изобретения тряпичной бумаги накануне Возрождения (отнюдь не случайное совпадение). Как же при такой ценности писчего материала могла развиться изящная литература?

Для того чтобы человек мог написать разветвленное литературное сочинение сложной структуры, необходима довольно высокая литературная культура, воспитываемая на примерах и собственных попытках, что, во всяком случае, требует достаточного количества доступного писчего материала. Более того, для этого, безусловно, необходимо быть грамотным, то есть знать и уметь руководствоваться общепринятыми орфографическими и грамматическими положениями. Однако, чтобы стать грамотным, требуется постоянные и многолетние упражнения (прописи, диктанты и т.п.), невозможные на пергаменте (и, добавим, на папирусе, который был лишь ненамного дешевле). Чтобы достигнуть достаточной грамотности и умения легко излагать в письменной форме свои мысли, нужно не только написать несчетное число диктантов, но и прочитать колоссальное количество книг, написанных по стандартной орфографии. Если человек не читает много книг, то как бы он добросовестно ни учился, он останется малограмотным человеком и, во всяком случае, никогда не будет литератором, уверенно владеющим языком.

Малограмотный автор, мучительно медленно выписывает каждую букву, гадая почти над каждым словом, как его написать, мог сочинить за один присест только очень краткий текст. Стесненный недостатком писчего материала, он не мог сколько-нибудь удовлетворительно согласовывать эти тексты друг с другом, переписывая их несколько раз. Он был способен, собрав (или самостоятельно составив) несколько различных рассказов, лишь переписать их друг за другом почти без изменений, соединив простейшими, переходными мостками типа "и вдруг", "затем" и т.п. И на самом деле, истинно древние сочинения (Библия, индийский эпос, средневековый рыцарский роман) имеют как раз такую структуру. По существу, только в XIX веке литераторы научились более искусно соединять отдельные эпизоды своих романов.

Все это доказывает, что без бумаги мало-мальски развитая литература невозможна. Поэтому, в частности, литературные сочинения, которые мы называем теперь "античными" и которые характеризуются довольно правильной орфографией, сложным и изящным стилем, вероятнее всего, были написаны в эпоху, когда бумага была уже широко распространена, то есть в эпоху, когда они были "открыты".

БЫЛ ЛИ ГЕРОДОТ?

Известно, что характерной чертой средневековой литературной продукции была анонимность; ее авторы не считали нужным ставить на ней свое имя. Когда же ранние гуманисты во главе с Петраркой "отправились в поход за изгрызенными крысами пергаментами", то не удовлетворяясь анонимностью находимых манускриптов, они стали по собственной инициативе приписывать их знаменитым древним именам (которые, заметим кстати, ассоциировались в то время совсем с иными профессиями: например, Вергилий считался магом, Платон – врачом, Архимед – астрологом, а Цицерон – трубадуром!). Этому также способствовал средневековый обычай приписывать свои сочинения знаменитым древним именам; например, масса средневековых богословских сочинений была приписана их авторами Иоанну Златоусту, а сам Петрарка любил писать "от имени древних" письма, биографии и т.п. Попадая через сотню лет в руки собирателей, эти сочинения уже автоматически оказались "древними".

С развитием гуманистического движения и ростом спроса на древние рукописи появилась и их злостная фальсификация. Ученые XV-XVI веков постоянно упоминают в своих письмах беспардонных фальсификаторов, пытающихся "всучить их жалкие поделки". Однако фальсификацией баловались и сами гуманисты. Немецкий гуманист Пролюциус написал седьмую книгу "Календарной мифологии" Овидия, чтобы победить в ученом споре, а испанский монах Хигера сочинил римского историка Декстера и написал от его имени обширное сочинение, чтобы заполнить досадный пробел в истории распространения христианства в Испании. Знаменитый гуманист Сигониус сочинил и опубликовал ряд новых отрывков из Цицерона, а Анниус де Виттербе издал сборник поддельных произведений целого ряда римских авторов, которые были сочинены им самим. Это установленные факты.

Когда фальсификатор сам не сознается, разоблачить умело сделанную фальшивку очень трудно, и, как правило, это происходит чисто случайно. Например, еще в прошлом веке француз Ошар и англичанин Росс очень подробно и аргументировано доказали, что сочинения Тацита являются умелой фальсификацией, сделанной Поджо, который как раз в момент "открытия" им Тацита отчаянно нуждался в деньгах. Ошар и Росс, в частности, вскрыли в тексте Тацита большое число мест, где автор обнаруживает свое незнакомство с географией Рима, с римским правом, военным делом и т.п., а также мест, которые обличают в нем человека с мировоззрением и традициями XV века. В отношении менее авторитетного автора уже этого было бы достаточно для доказательства фальсификации, но Тациту все прощается.

Аналогично, текст Геродота буквально пестрит ошибками, многие из которых выдают его средневековое происхождение. Но вместо того, чтобы признавать его фальшивость, историки всячески выгораживают Геродота; ошибки его (достигающие, например, при изложении истории Египта полутора тысяч (!) лет) приписываются его некритическому отношению к собственным информаторам (среди которых, кстати сказать, были египетские жрецы, обязанные знать историю своей страны), а их средневековый характер объясняется тем, что ученые средних веков заимствовали их у Геродота. Тут явно уважение к авторитету побеждает здравый смысл.

Пример Поджо-Тацита заставляет думать, что мы имеем дело со злостной фальсификацией каждый раз, когда обстоятельства "находки" рукописи нарочито туманны и непроверяемы. Поэтому почти наверняка фальсифицированы диалоги Платона (о подлинности которых, кстати сказать, специалисты не пришли к единому мнению и по сей день) и риторические сочинения Цицерона.

Громко вопиет о своей фальсифицированности сочинение Витрувия "Об архитектуре", в которой гелиоцентрические (!) периоды обращения планет указаны с минутной точностью, неизвестной даже Копернику. По-видимому, здесь мы имеем дело не со злобной, а с вынужденной фальсификацией, когда молодой ученый (Альберти?), отчаявшись издать книгу под своим именем, был принужден (то ли по собственной инициативе, то ли под давлением издателя) выпустить ее в свет под древним псевдонимом, чтобы обеспечить ей лучший сбыт.

Одной из немаловажных причин фальсификации было также желание прикрыться, как щитом, древним именем со стороны автора вольнодумных или антицерковных сочинений (Лукреций Кар). Лишая себя опасной славы, автор, по крайней мере, обеспечивал широкое распространение своих взглядов.

Бывают мистификации и другого рода. Например, известен резко антихристианский писатель II века Цельс. Его сочинения до нас не дошли, а его взгляды известны только по сочинению опровергающего его Оригена. Обращает на себя внимание, что Ориген, подробно цитируя Цельса и аккуратно излагая его взгляды, никак, по существу, их не опровергает, ограничиваясь грубой бранью и заявлениями типа "это невозможно, ибо противоречит Священному Писанию". Не является ли здесь "Ориген" лишь маской антиклерикального автора, решившего в такой форме изложить свои взгляды? (Цитирование "Оригеном" Цельса настолько подробно, что современные исследователи смогли "восстановить" по этим цитатам почти все сочинения Цельса.) Не является ли также тонким издевательством антиклерикального автора-апокрифиста и знаменитое изречение Тертуллиана "Верю, потому что абсурдно"?

Одной из последних документально установленных маскировочных фальсификаций является сочинение "О системе мира" Аристарха из Самоса, вышедшее в свет в 1644 г. и принадлежащее перу знаменитого Роберваля, который для пропаганды идей Коперника воспользовался древним псевдонимом (быть может, сам его выдумал), чтобы избежать инквизиционных преследований, которым только что подвергся за то же Галилей. Впрочем, находясь во Франции, Роберваль свое авторство не очень скрывал, и потому мы сейчас знаем истину. А что было бы, если Роберваль тщательнее хранил свое инкогнито? Не обладали бы мы сейчас еще одним "чудом дошедшим до нас" античным сочинением, имеющимся только в печатном издании с безнадежно утраченным оригиналом?

ЕВКЛИД И ПТОЛЕМЕЙ

В отношении научных (и в частности математических) античных сочинений утверждение об их фальсифицированности в средние века наталкивается на вопрос об их истинном авторе. Если по отношению к сочинениям гуманитарного характера мы можем либо прямо указать предполагаемого автора, либо, по крайней мере, очертить круг людей, вполне способных им быть по образованию, культуре и литературному дарованию, то кто, спрашивается, мог бы написать "Начала" Евклида? Ведь, безусловно, математик такого размаха не мог пройти в веках бесследно, а мы никого, хотя бы мало-мальски пригодного на роль автора "Начал", указать в средние века не можем.

Чтобы объяснить это, следует принять во внимание, что до изобретения книгопечатания каждый ученый копировал книги своих предшественников исключительно для собственного пользования и потому при переписке исправлял неясные места и вносил необходимые, по его мнению, добавления. Поэтому с каждой новой перепиской текст книги постоянно видоизменялся, пополняясь новым материалом и разрастаясь в своем объеме. Происходил процесс бессознательного коллективного творчества, при котором, естественно, за сочинением оставалось имя первоначального автора. "Геометрия Евклида" – помечал на своем экземпляре ученый, умолчав о том, что прибавил две-три теоремы от себя и лучше обосновал ту или иную из старых. Тем самым он давал повод и последующему копиисту добавить две-три теоремы от себя, сохраняя за учебником прежнее имя. Нечто подобное происходит с учебниками и теперь: постоянно пополняясь свежим материалом, они, как правило, сохраняют имя первоначального автора.

И вот с течением веков собрание десятка простейших теорем превращалось в большую и хорошо разработанную в своих деталях книгу. Историки же науки, упустив из виду этот вековой процесс улучшения, приписали ее одному древнему гиганту геометрической науки, завысив тем самым уровень познания в древние времена.

Это относится, конечно, не только к Евклиду (чье имя, кстати сказать, допускает многозначительный перевод: "Хорошо Переплетенный"), но и к Аристотелю (чье имя переводится еще замечательнее: "Наилучшее Завершение") и к Птолемею (чье имя означает "Борющийся с Богом"). Изданиям всех этих авторов предшествовали так называемые "дурные переводы", явно представляющие собой первоначальные, еще несовершенные, их варианты.

В отношении книги Птолемея можно, к тому же, указать более десятка астрономических улик, подтверждающих ее принадлежность XVI веку (когда она была впервые опубликована). Например, поскольку долготы всех звезд увеличиваются в результате прецессии по 50,2 секунды в год, то, разделив на 50,2 разность современных долгот на долготы, приводимые Птолемеем в его "Каталоге звезд", мы получим время наблюдения этого каталога. Соответствующее вычисление в точности дает XVI век! Кроме того, во II веке, когда якобы жил этот астроном, ближайшей к полюсу звездой была не теперешняя Полярная (Альфа Малой Медведицы), а более яркая звезда того же созвездия – Бета, в то время как звезда Ахернар вообще не была доступна наблюдениям. Тем не менее Птолемей начинает свой каталог с Полярной звезды, а заканчивает Ахернаром!

"ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТЬ" АНТИЧНОГО ОБЩЕСТВА

Средневековое происхождение "античных" сочинений выдает также неправдоподобность и фантастичность содержащейся в них информации о политической, социальной и экономической структуре античного общества. По существу, эта фантастичность общеизвестна, но традиционно она трактуется как исключительность.

Исключителен расцвет науки и культуры в Древней Греции, никак не оправдываемый развитием производительных сил и производственных отношений и, что уже совсем странно, никак не повлиявший ни на технику, ни на социально-политические структуры. Без пресловутого "духа эллинизма" тут никак не обойтись!

Эта исключительность – фантастичность распространяется не только на глобальные структуры, но пронизывает каждый элемент традиционного представления об античном обществе.

Особенно фантастичны сообщения "классиков" о военном деле, что, впрочем, и неудивительно, если учесть кабинетный характер учености их истинных авторов. Они, не считаясь с элементарными требованиями стратегии, выбирают для побед такие неудобные пункты и такие условия, при которых можно только погибнуть. Они ведут армии по странам, в которых они все через неделю умерли бы с голоду, а на поле боя заставляют скакать царей и полководцев на парах лошадей в одноколках с одним дышлом, которые при первом крутом повороте, а тем более на поле, заваленном трупами, переворачиваются. Римских солдат они заставляют каждый вечер после утомительного марша строить укрепленный лагерь, производя земляные работы в масштабах, доступных лишь экскаваторам, и т. д. и т. п.

Таким образом, все эти соображения приводят к одному выводу, что вся так называемая "античная" литература написана в средние века и что древняя история Греции и Рима, по крайней мере, до IV века н. э. – величайшая мистификация средневековых литераторов и историков. Можно ли эту идею проверить математическими или естественнонаучными способами?

ИДЕИ МОРОЗОВА

Еще в XVI веке была высказана идея, что если в документе описано какое-нибудь астрономическое явление, дата которого допускает вычисления, например, затмение Солнца и Луны, то это дает возможность определить подлинность исторического документа. Однако хронологи однобоко пользовались этим методом. Не сомневаясь в аутентичности того или иного документа, они комбинировали астрономические вычисления со всем комплексом исторической информации. Морозов предложил методику непредвзятого астрономического датирования. Она состоит в том, что из текста извлекаются характеристики затмения, а из астрономических таблиц выписываются даты всех затмений с этими характеристиками. Для примера возьмем описанное Фукидидом в "Истории Пелопонесской войны" солнечное затмение, происшедшее в начале войны. Оказывается, за последние три тысячи лет в районе Средиземноморья было только одно затмение, удовлетворяющее описанию Фукидида, и это – затмение 2 августа 1133 г. н. э. Таким образом, в полном соответствии со сказанным, книга Фукидида оказывается средневековым сочинением, написанным не ранее XII века. Поскольку Фукидид упоминается у Геродота, то это доказывает и средневековое происхождение "Истории" Геродота. Конечно, отдельно взятую датировку сочинения Фукидида можно оспаривать, ссылаясь на ее единичный характер. Чтобы получить более значимые результаты, следует изучить все затмения, упомянутые в античных документах. В них содержалось описание 89 затмений, но в 10 случаях они совершенно неудовлетворительны (часто не ясно даже, идет ли речь о затмении, а не, скажем, о каком-то метеорологическом явлении), и потому было исследовано 79 затмений. Результаты таковы: до середины IV века ни одно затмение не подтверждается астрономией, а 75% вообще отвергаются. Напротив, после середины IV века лишь два затмения (8%) отвергаются астрономией. Это не только подтверждает общий тезис о средневековом происхождении "античной" литературы, но и позволяет его уточнить. Получается, что все произведения, традиционно относимые ко времени до середины IV века н. э., написаны значительно позже. Поэтому мы вынуждены признать мифической всю информацию о событиях, происходивших в Средиземноморье до IV века н. э.

Давно замечено, что употребление имен собственных со временем течет и меняется. Это, в принципе, позволяет устанавливать одновременность двух текстов: если в них употребление имен одинаково, то они одновременны, и наоборот. Конечно, здесь нужна соответствующая, статистически обусловленная методика. Такую методику предложил Мищенко. Результаты получились очень любопытными. Например, в списке афинских архонтов (496-293 гг. до н. э.) употребляются те же имена, что и в сочинениях Иоанна Кантакузена (1320-1356 гг.). В "Греческой истории" Ксенофонта (411-362 гг. до н. э.) те же, что и в текстах Никиты Хониата (1186-1206 гг.). В "Агезила" Плутарха (401-361 гг. до н. э.). и в "Иллиаде" Гомера те же имена, что и в сочинениях византийского поэта XII века Евматия Макремволита, и т. д. и т. п.

Одно из самых удивительных и в то же время наиболее фундаментальных наблюдений Морозова состоит в обнаружении среди древних династий параллельных пар. Рассмотрим с этой точки зрения Римскую империю. Как известно, созданная Суллой и Помпеем, она практически распалась в III веке н. э. после Каракаллы (так называемый кризис III века). Мы будем называть этот период Римской империей II (сохраняя имя Римской империи I для легендарного периода семи римских царей от Ромула до Тарквиния). Империя была восстановлена в конце III века н. э. Авреланом и Диоклетианом и просуществовала до конца V века. Этот период мы будем называть Римской империей III. Так вот, если составить последовательный список императоров II и III империй и сравнить, то по всем 27 позициям длительность их царствования совпадет. Кроме числового параллелизма, Морозов указал также на определенный параллелизм событий. Так, оба списка начинаются крупными политическими фигурами, имеющими сходные почетные титулы, а заканчиваются также выдающимися императорами, которые известны идентичной акцией дарования права римского гражданства всему свободному населению империи. Более последовательно (и на базе некоего полуформального алгоритма) этот событийный параллелизм был прослежен А. Фоменко. Оказалось, что он распространяется очень глубоко, доходя иногда до полного тождества биографий (соответствующим образом формализованных).

Единственное рациональное объяснение этих совпадений состоит в том, что история империи II списана с истории империи III, так что самостоятельное существование имела только империя III, а империя II является лишь ее фантомной тенью, появившейся в результате добросовестных заблуждений и злостных фальсификаций более позднего времени. Не нужно, впрочем, думать, что мы можем доверять информации и об империи III. Напротив, внимательный анализ этой информации (к сожалению, размеры данной статьи не позволяют этого сделать) показывает, что, по-видимому, она почти вся столь же ложна, как и информация об империи II. Единственно, что можно с некоторой уверенностью утверждать, так только факт ее существования. Вместе с тем ее государственные формы, социальные отношения и религиозная жизнь – все является фантазиями значительно позднего времени. Эту империю следует представлять себе по образцу Древнерусского государства как конгломерат фактически независимых приморских государств-городов, формально признававших власть императора и плативших ему ежегодную дань.

В различных частях этой разношерстной империи летописцы составляли своды текущих событий. Их записи, которые они вели на местных языках, отражали в основном местные события, и своих императоров они называли своими местными именами-прозвищами. Когда через несколько столетий в связи с ростом влияния папского Рима возникла необходимость подкрепить его притязания на мировое господство в религиозной и светской сферах ссылками на прошлое могущество, на этой основе начались попытки создания его истории. При этом хроники, описывающие одно и то же время, но созданные в разных местах и на разных языках, были приняты за описания различных правлений и были расположены последовательно во времени.

КАК ЭТО МОГЛО ПОЛУЧИТЬСЯ?

Морозов разъясняет этот механизм на примере Австрийской империи XIX века. Эта империя состояла из двух частей: немецкой Австрии со столицей Веной и мадьярской Венгрии со столицей Будапештом, а к этой паре присоединилась еще и славянская Босния-Герцеговина. В ней с 1848 г. царствовал Франц-Иосиф и жил почти всегда в своем венском дворце, а в будапештский приезжал лишь по временам. Австрийские немцы считали его своим королем, венгерские мадьяры – своим и, наконец, присоединенные герцеговинцы – своим князем.

Войска его состояли и из немецких , и из мадьярских , и из славянских полков. Каждая из трех частей жила своей собственной внутренней жизнью, имела свою собственную экономическую и гражданскую эволюцию. Внешняя торговля и другие экономические отношения шли у каждой части особо, в зависимости от географического положения, и только представительство перед иностранными державами да войны были общими.

Представим себе, что какой-нибудь венгерский летописец написал историю Венгрии на мадьярском языке, где называл Франца-Иосифа просто Иосифом, а какой-нибудь немецкий летописец в Тироле написал на немецком языке историю Австрии (то есть Тироля с Веной), где называл Франца-Иосифа просто Францем, обозначая время, как и первый, лишь по годам его царствования.

Представим затем, что то же самое сделал и какой-нибудь боснийский монах на славянском языке, называя его по-своему – Франциском.

Вообразим затем, что вся наша современная литература о событиях XIX века погибла в каком-нибудь общественном или стихийном перевороте и каким-то чудом сохранились только эти три манускрипта. Потом культура началась снова с младенческого возраста, и некий "историк" лет через триста нашел эти документы. При страстном желании узнать как можно больше об истории погибшей культуры, он невольно поддался бы стремлению принять Франца, Франциска и Иосифа за трех государей, один из которых царствовал над Тиролем, другой – над Венгрией, а третий – над Боснией-Герцеговиной . Он отметил бы , что каждый из них имел отношение и к двум остальным странам. Большие различия в культуре каждой описанной страны легко могли подать ему мысль, что тут он имеет дело с тремя периодами культуры одной и той же Придунайской империи, которая целиком называлась Австрией, и он написал бы научный трактат под названием "Три периода австрийской культуры: первый – Австрия под славянским владычеством

Франциска I, второй – Австрия под мадьярским владычеством Иосифа I, третий – Австрия под немецким владычеством Франца I".

В названиях, упоминаемых тремя летописцами городов, он тоже легко бы запутался. Так, венгерская столица Будапешт состоит из Пешта на правом берегу Дуная и Буды – против него, которая по-немецки называется Офен. Если у немецкого летописца Будапешт был бы назван бург-Офеном, у венгерского – просто Будой, а у славянского град-Пестом, то, восстановив один на его реальном месте, историк стал бы искать другие в других местах и из одного и того же взятия Будапешта после венгерского восстания сделал бы три: взятие града-Песта Франциском I (еще до тех пор, как он стал боснийским властелином), взятие Буды Иосифом I при венгерской династии и, наконец, взятие Офена Францем I при немецкой династии. Относя этимологически и географически Буду в Венгрию, он стал бы искать и, при сильном желании, нашел бы Офен где-нибудь в немецких странах, например. принял бы его за город Гоф в Баварии.

Точно то же вышло бы и с другими географическими названиями, и с самой Веной, которая по-славянски называется Ведень, а по-немецки – Вин.

В результате такого соединения друг с другом трех разноязычных и разномастных историй, царствование одного и того же Франца-Иосифа оказалось бы историей трех различных царей и в трех разных странах, и в царствованиях их не оказалось бы ничего общего, кроме созвучия некоторых имен, вроде Франциск, Вин и Вена.

Точно так же создалось представление о Римской империи II, на самом деле никогда реально не существовавшей. И если империя II является мифом, то с неизбежностью приходится также отрицать реальное существование "античной Древней Греции", а также отвергнуть и представление об ужасающей катастрофе V века, когда нашествие варваров якобы уничтожило античную цивилизацию, и человечество было вынуждено начать свое культурнее развитие заново.

На самом же деле культурное развитие человечества никогда не испытывало глобальных катастроф, представление о которых следует считать таким же рудиментом метафизики XVIII века, как палеонтологическую "теорию катастроф" Жоржа Кювье. Мало того, средние века вовсе не были "темным периодом", не были мрачными столетиями материального и духовного господства обскурантизма, монашеского фанатизма, веками народной темноты и богословско-схоластической мудрости. Напротив, это было время интенсивного научного развития, живой мысли и активной деятельности, происходившей, как и в новое время, в постоянной и ожесточенной борьбе с мракобесием церковной идеологии. До нас дошли лишь слабые отголоски этой титанической деятельности, которая почти вся оказалась отброшенной в "античность".

Необходимые разъяснения к статье “О достоверности древней истории”

Я познакомился с теорией Морозова году в 65-ом, приобретя в букинистическом магазине на Пушкинской улице семь томов его сочинения "Христос". Прочитав эти тома, я не знал, что думать. С одной стороны все его изложение было для меня весьма убедительным, но выводы представлялись совершенно бредовыми, полностью противореча всему, что я знал об истории, и в чем я был твердо уверен. Я пришел к выводу, что я не могу найти ошибку в рассуждениях Морозова просто потому, что я не грамотен в истории. И, конечно, любой достаточно квалифицированный историк мне сразу объяснит, в чем у Морозова ошибка. Потому что с того момента, как Морозов написал свои книги, прошло уже много десятилетий и, безусловно, его работы были историками обдуманы и опровергнуты. Я был твердо в этом уверен и стал спрашивать у моих знакомых историков, но никакого вразумительного ответа — кроме тривиальной ругани — я от них получить не смог.

Я понял, что, по-видимому, я обращаюсь не туда. Я был тогда все-таки уверен, что опровержение Морозова имеется, но просто я спрашивал не тех людей. Значит, передо мной встала задача найти специалистов-историков, умеющих Морозова опровергать.

Тут я хочу сказать, что я совсем не хотел ни тогда, ни сейчас как-нибудь развивать идеи Морозова и работать в этом направлении. Моя цель была простая — понять самому, в чем Морозов ошибается, и получив разъяснения по этому вопросу, я бы успокоился.

Как же найти таких специалистов? Естественно было — пойти в институт истории, поговорить, скажем, с заведующим отделом античной истории. Но тут у меня был опыт с ферматистами. Вообще, я считал тогда и считаю сейчас, что наукой должны заниматься специалисты — математику должны двигать математики, которые имеют соответствующее образование, историю должны двигать историки. И когда кто-нибудь лезет с суконным рылом в калашный ряд, он должен получать решительный отпор. Все это мы хорошо знаем на примере ферматистов, которые, не зная математики, пытаются что-либо в ней получить. И я хорошо знаю, как мы, математики, относимся к ферматистам. Я понимал, что если я незваный приду к историкам, они будут со мной обращаться точно так же, как я обращаюсь с ферматистами, которые заявляются в математический институт. И я совсем не хотел выступать в этой глупейшей роли. А чтобы объяснить, что на самом деле я просто ищу объяснений, а вовсе ничего не пытаюсь доказывать и опровергать, нужно время, а меня просто не стали бы слушать, как я часто не слушаю ферматистов, прогоняя их с ходу.

Я думал, что же тут делать. И придумал способ, как привлечь внимание историков, найти человека, который имеет историческое образование, работает в области истории и знает, как же обстоят дела с измышлениями Морозова, как они опровергаются. Для этого я решил читать публичные лекции по теории Морозова, на них будет приходить много народа и среди них рано или поздно появится специалист, который встанет и скажет, что все, что я говорю со слов Морозова — это бред потому, потому и потому.

И я стал читать такие лекции. Я читал лекцию в Московском университете, там присутствовал Гумилев, аудитория была человек четыреста. Но единственная реакция Гумилева была — "Мы, историки, не лезем в вашу математику и просим вас, математиков, не лезть в нашу историю". Я читал лекцию в ЛОМИ, но высокопоставленные историки, которые пришли, не зная, о чем я буду говорить, как только услышали имя Морозова, с негодованием встали и вышли. Поэтому я опять там не получил никаких ответов. после нескольких таких лекций я понял, что моя попытка найти человека, который сможет мне опровергнуть Морозова неудачна, и если я хочу во всем этом разобраться, надо поступать по-другому. Но тут возникли два новых обстоятельства.

Во-первых, готовясь к этим лекциям и продумывая каждый раз заново все построения Морозова, я постепенно пришел к убеждению, что Морозов во многом прав, что это вовсе не такой уж и бред,как сначала кажется, что ошибается не Морозов, а наука история, которая где-то в XVI веке повернула не туда в результате работы Скалигера и Петавиуса.

Конечно, я не рассчитывал только на историков и пытался самостоятельно сам все понять. Я прочел массу исторической литературы — более или менее все книги по античной истории, выпущенные на русском языке, — и обнаружил удивительный феномен — практически в каждом абзаце любого сочинения по истории античности пристрастный "морозовский" взгляд обнаруживает подгонки и логические скачки, совершенно незаметные "ортодоксальному" читателю. Это более всего убедило меня в справедливости морозовской точки зрения.

Поскольку я — вопреки мнению Новикова*, основывающемуся не на фактах, а, по-видимому, на собственной психологии — никогда не имел в виду обращать когонибудь в собственную веру, я, поэтому, имел все основания лекции прекратить. Мне не нужны были больше мнения специалистов-историков, в которых я горько разочаровался.

Во-вторых, я испытывал во время и после этих лекций общий интеллектуальный дискомфорт. Получалось, что я выступаю в роли этакого клоуна, научного шута, что люди ходят меня послушать не для того, что понять и задуматься о том, что я говорю, а просто провести хорошо время и посмеяться.

В результате я решил с лекциями пока завязать и больше их не делать. Разумная дискуссия не получается, а для себя я все, что хотел, понял.

На этом закончился первый период в развитии всех этих идей в моей голове. Это было где-то уже в конце 60-х, начале 70-х.

Но тут вступил в действие Анатолий Тимофеевич Фоменко. Нужно сказать, что Фоменко – человек, чрезвычайно умеющий уговаривать. (Описанная Новиковым история его взаимоотношений с Фоменко служит тому ярким примером.) Ко мне он приходил много раз, приставал, уговаривал: "Михаил Михайлович! Мы вот слушали Ваши лекции, расскажите поподробнее обо всем этом." И вот тут я поддался и прочитал курс лекций длительностью около пятидесяти часов.

*См. "Природа", 1997 г., №2, с. 70

Чтение происходило у меня на дому по воскресеньям. Приходило слушателей человек десять-двенадцать. Сначала я рассказывал вещи, которые я хорошо продумал и понимал. К концу это мне все надоело, и последние лекции состояли просто в чтении отрывков из заключительных томов сочинения Морозова. Все лекции были записаны на магнитофон, и Фоменко с Мищенко эти лекции расшифровали. Но получился, естественно, совершенно нечитабельный текст, потому что одно дело — говорить, другое — писать. Чтобы мой труд все же не пропал даром — хотя повторяю, мои лекции на 99 процентов были просто пересказом Морозова — они на основе стенограммы сочинили некий текст и принесли мне на апробацию. Этот текст мне чрезвычайно не понравился и я просидел целый месяц, его редактируя, в основном с помощью клея и ножниц. Результат они прочитали и им он в свою очередь не понравился. Тогда после нескольких тяжелых сцен мы пришли к компромиссу и решили, что текст, который я переклеил, остается у меня, а они получают исходный текст, правда в разрезанном виде, но вполне восстанавливаемый. На этом мы разошлись, условившись, что каждая сторона может со своим текстом делать все, что хочет. У меня в отношении полученного текста не было никаких планов и я решил, что пусть он пока полежит, а дальше будет видно.

После этого мне стало известно, что Фоменко, Мищенко и Никишин организовали некий семинар в Университете, где стали продумывать и дальше развивать это направление. Я хочу подчеркнуть, что я в этой деятельности никакого участия не принимал, потому что по моему мнению это дело не математиков, а историков. Математики, вообще, люди очень самоуверенные; умея хорошо использовать свой тренированный мозг на решение своих математических задач, они считают, что могут решать любые специальные задачи откуда угодно. Это в определенном отношение правильно, но чтобы добиться успеха, им надо предварительно эти специальные вопросы изучить. А Фоменко и Мищенко начали заниматься историей , не имея никакого предварительного исторического задела. Я помню, что они даже не знали самые простейшие вещи, например, что в иврите не пишутся гласные. “Как это может быть, гласные не писать! Понять же ничего невозможно!” — вот такая была их реакция.

Все же на первых порах я относился к их деятельности, можно сказать, благосклонно-нейтрально. Узнав об их семинаре, я сказал: “Ну, молодцы. Действуйте дальше. А меня это не касается.” По-видимому, эта страусиная политика — к которой, нельзя не признаться, я склонен — была ошибочна.

В это время Фоменко придумал довольно хитрые статистические схемы для обнаружения так называемых дублетов. Я продумал его математику, она несложная, но использует такие понятия, как n-мерное евклидово пространство и тому подобные, абсолютно недоступные историкам.

На первый взгляд это действительно строгий математический аппарат для обнаружения дублетов или чего-то похожего. Но когда я покопался глубже, то наткнулся на фразы типа: “А теперь давайте примем этот параметр равным 1,5”. Вопрос — почему именно эти значения параметра надо принять? Я спросил Фоменко, и он сказал: “Ну потому, что так тогда хорошо получается”. Я ответил, что рано или поздно возмущенные историки найдут хорошего математика, который в этом разберется и ткнет носом, что вот, пожалуйста, ниоткуда взялись какие-то числа, явно для того, чтобы подогнать результат под ответ. В этот момент мы друг друга перестали понимать. Я заявил, что все это применение математики здесь совершенно не нужно, поскольку и так ясно, что, скажем, дублеты, которые нашел Морозов, очевидны и без всякой математики, по здравому смыслу, и ни один историк не сможет отрицать их существование потому, что там какая-то непонятная математика.

По-видимому, здесь проявилась та черта характера Фоменко, о которой пишет Новиков в связи с фоменковскими "доказательствами"[†]. Потом Фоменко с Мищенко разошлись, остался один Фоменко и он набрал новую команду молодых людей. Что-то такое делалось и делается. Я про это ничего не знаю и отношусь к этому очень скептически, потому что опять-таки историков среди этой команды нет, а этим делом должны заниматься все-таки историки. Математики здесь могут ставить только вопросы. Откуда дублеты? Как их объяснить? Почему они? Дублеты это или не дублеты? Это тоже ведь вопрос. Во всяком случае, нужно, чтобы работал историк с некоторым математическим пониманием или , лучше, команда, состоящая из историков и математиков, которые бы работали в общем единстве для того, чтобы с этим делом разобраться. А насколько я понимаю, до сих пор у Фоменко в его команде находятся, главным образом, молодые математики. Может быть, там есть уже историки, но тоже не очень авторитетные — возможно, студенты. Я просто не знаю, поскольку никакого отношения к этой деятельности не имел и не имею.

Это был второй этап развития идей Морозова на мехмате.

Третий этап наступил, когда я заболел и попал на два месяца в больницу. Мне нечего было там делать и я взялся и дописал оставленный у меня отредактированный мной текст Фоменко-Мищенко. там были античность и частично библия. Я написал поподробнее про библейскую тему, добавил средневековье и страны Востока. Но, я еще раз хочу подчеркнуть, что там было очень мало моих собственных соображений, может быть, только по Индии, которой совершенно Морозов не касался, или по Китаю, по которому у Морозова было очень мало материала. На 90 процентов это было простое переосмысливание, переписывание работы Морозова, так сказать, ее популяризация. И вот у меня образовался некий текст. При этом текст узнал Велихов и предложил мне его обсудить на отделении истории, предварительно размножив в двадцати экземплярах[‡].

Было устроено заседание отделения с обсуждением. Но все кончилось, конечно, катастрофично, потому что историки раздали шести аспирантам шесть томов моего текста, которые читали тома отдельно, хотя они имеют непосредственную связь, являясь продолжением один другого. естественно, что читающий пятый том просто не понимал, о чем, собственно говоря, идет речь. И когда они рассказывали свои впечатления, то это было весьма убогое зрелище. И диалог на этом заседании, вел его Бромлей, оказался разговором двух глухих. В общем, никакого контакта

[†]См. указанный выпуск журнала "Природа"

[‡]Этот текст, возможно, будет издан в виде отдельной книги: М.М.Постников, Введение в критику хронологии древней истории.

не получилось, но все происходило на очень высоком уровне академической вежливости со взаимным расшаркиванием. Правда, какой-то мужик, археолог-практик, послушав мое выступление, вдруг заорал: "Какого черта вы их слушаете! Гнать их в шею надо!" Но его быстро взяли под белы ручки и вывели, а обсуждение продолжалось. Ну, понятно, публика боялась Велихова. На этом все и кончилось. Я слышал, что потом, через несколько месяцев, опять устроили заседание, на котором говорилось, что Постников дискредитирует советскую науку, и не надо ли послать в ВАК рекомендацию о лишении его звания профессора и доктора наук, но решили этого не делать.

Одновременно, или около этого времени, ко мне пришел Фоменко и предложил: "Надо, Михаил Михайлович, что-то напечатать." Теперь я думаю, что он ко мне пришел просто потому, что тогда его административной силы было недостаточно, чтобы самому пробить печатание, а с моей помощью он надеялся это сделать. Мы составили некий текст и сумели его действительно в виде препринта опубликовать, сто штук, кажется, или двести. Это вызвало шум в исторических кругах и появилось несколько ругательных рецензий в журнале "Вестник древней истории", в журнале "Вестник истории" и других. При этом упоминалась в основном моя фамилия, что, между прочим, я хочу подчеркнуть, неверно, потому что инициатором всего этого был Фоменко, у которого к этому времени уже, по-видимому, было несколько больших рукописей, которое он сейчас публикует (конечно, надо думать, в переработанном виде).

После того, как слух об этих дискуссиях и статьях распространился по Москве, ко мне приходили киношники и телевизионщики, предлагавшие организовать документальный фильм или интервью по этим вопросам. Но все это резко прекращалось на уровне ЦК. Приходили и из журналов — нельзя ли статью... В конце концов удалось напечатать статью в журнале "Техника и наука". Я тут вынужден был писать несколько категоричнее, чем я на самом деле думал, иначе редакция статью бы просто не приняла. И, кроме того, для того, чтобы вообще оправдать, почему, собственно говоря, я об этом пишу, я написал во врезке (между прочим, я сейчас точно не помню, но думаю, что под давлением редакции, но, конечно, я и сам — забыв о характере Фоменко — отнесся к этому легкомысленно), что Фоменко и Мищенко, которых я тщательно цитировал, развивают теорию Морозова дальше под моим руководством.

Эта несчастная оговорка "под моим руководством" вызвала бурю негодования у Фоменко, который чрезвычайно следит за своими приоритетами. И он отправил письмо в ЦК, в котором писал, что Постников ничего не понимает, что на самом деле у него не научный подход, а научный подход только у меня, до меня этим занимался Морозов, но он вообще мало что сделал, а все сделал я, и прочее в таком духе. Нужно сказать, что моя статья была опубликована без акта экспертарецензента, помимо всех официальных инстанций. Поэтому ее публикация была для ЦК неожиданностью. В отделе печати ЦК, по-видимому, долго думали, что же делать. Разогнать редакцию, обвинить Постникова или реагировать как-то иначе. И письмо Фоменко в ЦК стало для них манной небесной. Они потребовали, чтобы письмо Фоменко было опубликовано в том же журнале как опровержение, что и было сделано[§].

Я пытался как-нибудь ответить на эту статью, но мне сказали: не рыпайся, хуже будет. И в это же время эта статья пришла в КГБ, и эта организация тоже обратила внимание на эту деятельность. Меня даже вызывали в КГБ, но это сейчас уже мало интересно, разве только с целью показать, как тогда обстояли дела, об этом очень много сейчас неправильно говорят. И целый год еще журнал публиковал статьи на эту тему, в частности и мою статью о радиоуглеродном методе, но под псевдонимом. Все статьи (целого ряда авторов) были с техническим уклоном, как для конспирации (имя Морозова вообще не упоминалось), так и в связи с общим направлением журнала. Потом все это постепенно сошло на нет. На этом все мои дела в этой области кончились. Я еще раз подчеркиваю, что когда для себя я убедился в том, что в основном Морозов прав, и составил себе в голове некое представление о том, что на самом деле происходило в античное время, я был полностью удовлетворен и заниматься далее историей не планировал. А специально пропагандировать теорию Морозова или как-нибудь ее развивать, я считал и считаю не моим делом, а делом историков.

Я вынужден все это сейчас рассказать из-за статьи Новикова, где моя роль и мои побудительные мотивы выставлены в совершенно ложном свете.

В заключение стоит, я думаю, объяснить, почему собственно историки отвергают сходу соображения Морозова. Есть такое понятие в психологии "импринтинг" — это впечатления, представления и мнения, которые человек получает где-то в самом раннем детстве. Они очень твердо усваиваются и их очень трудно изменить. Так дело обстоит, например, с религиозными представлениями. То же самое в меньшей степени происходит при обучении студентов. То, что рассказывается на первом курсе, воспринимается без всякой критики, лишь бы сдать экзамен. Потом это откладывается где-то на низших уровнях сознания, человек в это верит и к этому больше не возвращается. Вспомните в математике теорию действительных чисел по Вейерштрассу или теорию пределов. Как правило, работающий математик не задумывается о том, что такое действительное число, хотя он и знает, что в этом есть определенные трудности, что есть специалисты, которые это изучают, рассматривают и обобщают. Он знает, что что-то тут не в порядке, но это ему безразлично.

Аналогичная ситуация и в истории. На первом курсе сообщаются некоторые хронологические факты и эти факты помещаются в очень глубокой памяти, и студент ими пользуется, совершенно не задумываясь, справедливы они или нет. Сообщено было профессором, и поэтому надо сдать экзамен, а не критиковать. Потом уже к этому он не возвращается. Тут ситуация немножко хуже, чем в математике, потому что в математике все-таки имеется узкий круг специалистов по основаниям математики, которые думают о том, что такое действительное число, и этот вопрос изучают, а остальные математики, не зная, что они, собственно говоря делают, знают про их существование и в случае необходимости могут к ним обратиться. В истории же, по-видимому, подобных исследователей хронологии с методологической точки зрения не было. Это все равно, как, скажем, в матема-

[§] См. ТиН, №9, 1982 г.

тике теория действительного числа осталась бы на уровне Вейерштрасса, как она и существовала лет 20-30, пока парадоксы теории множеств не заставили обратить на нее внимание. В истории же ложная хронология существует не 20-30 лет, а все 300-400, и только парадоксы, которые обнаружил Морозов, заставляют ее пересматривать.

Эта параллель очень поучительна и во многом объясняет, почему историки этими вопросами, во-первых, не занимаются, а во-вторых, относятся к морозовской критике хронологии с такой яростью. Вещи, помещенные в память посредством импринтинга, очень трудно выкорчевываются. Это мы знаем на примере религии, когда после того, как где-то в раннем детстве человеку сообщены основные принципы веры, он остается верующим и взрослым, хотя рационально он это уже не обдумывает, атеистическую критику не воспринимает, а если он, паче чаяния, вдруг начинает рационализировать, то как правило, веру теряет. Этим объясняется та же ярость, с которой борются с инакомыслящими. Их сжигают на кострах или убивают в религиозных войнах. Это проявления одного и того же психологического механизма. Мы просто боимся изменить импринтированные идеи и стараемся против этого, как можем, бороться. Этим же объясняется, почему наука так консервативна. Идеи и результаты, которые в науке получены, очень трудно изменить. Наука не терпит новых идей, она с ними борется. Новые идеи принимаются только тогда, когда они высказаны или поддержаны авторитетным ученым, и чем радикальнее идея, тем выше должен быть его авторитет. И чтобы новые идеи победили и стали общепринятыми, нужны очень большие усилия и долгое время. Это хорошо понимал Планк — по-видимому, на собственном опыте — который говорил в отношении физики, что для того, чтобы новые идеи (он имел в виду теорию квантов) были признаны, нужно, чтобы представители старых идей вымерли.

И в математике то же самое. Мы помним, сколько времени длилась дискуссия по основаниям математики. Сначала во Франции выступили Борель и Адамар, потом в Германии — Гильберт и Вейль, а в Нидерландах — Брауэр. Все это продолжалось довольно долго, пока, наконец, математики не смирились и пришли к некоторому консенсусу. Это, облегчалось, конечно, тем, что в математике есть понятие неопровержимого доказательства, разработана строгая система логического рассуждения, и если человек не пользуется этой системой рассуждений, то с ним математик как с математиком спорить не может.

В физике аналогичная ситуация, но более трудная, поскольку там, хотя и есть эксперимент, возникает вопрос его интерпретации. Поэтому победа, скажем, теории квантов заняла в физике гораздо больше времени. Ну а в гуманитарных науках и, в частности, в истории вообще нет понятия неопровержимого доказательства. Поэтому с таким трудом и пробиваются парадоксальные идеи Морозова.

Критики Морозова до сих пор не удосуживаются внимательно изучить его соображения и соображения его последователей. Они выхватывают из контекста те или иные утверждения и издевательски их комментируют. Конечно, на каждой странице проморозовских сочинений легко отыскиваются бредовые с ортодоксальной точки зрения утверждения, подобно тому, как на каждой странице учебника по неевклидовой геометрии есть утверждения, бредовые для Евклида. Некомпетентность критика четко проявляется и когда он делает упор на астрономический метод у Морозова или на пресловутый радиоуглеродный метод. Все это не является центральным в теории Морозова и лежит на ее периферии.

Тем не менее я уверен, что молодые историки, которые, сейчас, конечно, слышали про все дискуссии и читали книги Фоменко, рано или поздно всерьез займутся хронологией. Сами они сейчас свое мнение или хотя бы интерес высказать не могут. Это им закроет всякую профессиональную карьеру, их просто выгонят из научной среды. Я помню, лет пятнадцать тому назад, во время дискуссии на отделении истории, одна историческая дама, кандидат наук, склонялась в кулуарах к морозовской точке зрения. Я сказал: "Что вы делаете? Вас же заклюют." — "А, Михаил Михайлович, – ответила она, – ничего страшного. Отбрешемся."

В то время надо было еще отбрешиваться. Я думаю, что когда люди вроде нее лет еще через 10-15 приобретут академические звания и выгнать их из науки будет уже невозможно, они выступят с открытым забралом и, может быть, сначала частично, а потом постепенно, все больше и больше, идеи Морозова войдут в плоть исторической науки. Так же, как, скажем, идеи Фреге или Бореля теперь стали более или менее общепринятыми в математике.

Еще раз повторяю. Для того, чтобы идеи Морозова победили, необходимо, чтобы их разрабатывали авторитетные и квалифицированные историки, имеющие статус, и достаточно высокий, чтобы к ним прислушивалась широкая историческая общественность. Вот это и есть совершенно необходимое (и достаточное) условие победы "Морозовщины".

Список книг, опубликованных М. М. Постниковым[†]

1) * Основы теории Галуа. Физматгиз, 1960, 124 с.
2) * Теория Галуа. Физматгиз, 1963, 84 с.
3) * Вариационная теория геодезических. Физматгиз, 1965, 5 с.
4) Введение в теорию Морса. Наука, 1971, 567 с.
5) Аналитическая геометрия. Наука, 1973, 751 с.
6) Топология. Большая Советская Энциклопедия, 6 с.
7) * Теорема Ферма. Наука, 1978, 128 с.
8) * Аналитическая геометрия (I семестр). Наука, 1979, 333 с.
9) * Линейная алгебра и дифференциальная геометрия (II семестр). Наука, 1979, 309 с.
10) Устойчивые многочлены. Наука, 1981, 176 с.
11) Введение в теорию алгебраических чисел. Наука, 1982, 239 с.
12) * Группы и алгебры Ли (V семестр). Наука, 1982, 447 с.
13) Основы теории гомотопий. Наука, 1984, 416 с.
14) * Теория гомотопий клеточных пространств. Наука, 1985, 332 с.
15) * Аналитическая геометрия (I семестр), переработанное издание N 8. Наука, 1986, 416 с.
16) * Линейная алгебра (II семестр), переработанное издание N 9. Наука, 1986, 400 с.
17) * Гладкие многообразия (III семестр). Наука, 1987, 478 с.
18) Дифференциальная геометрия (IV семестр). Наука, 1988, 496 с.
19) Риманова геометрия (VI семестр). (Готовится к выходу в издательстве “Факториал” в текущем году.)
20) Группы в геометрии (VII семестр). (Готовится к выходу в издательстве “Факториал” в текущем году.)

[†]Книги, отмеченные звездочкой, переведены на иностранные языки.

Математика и математическое образование в современном мире

В.И.Арнольд, академик РАН, вице-президент Международного математического союза

Настоящий материал представляет собой один раздел статьи с тем же названием, опубликованной в журнале "Открытая политика", №11 за 1997 год. В нашем журнале материал помещен с разрешения автора и редакции названного журнала.

"No star wars – no mathematics*" – говорят американцы. Тот прискорбный факт, что с (временным?) прекращением военного противостояния математика, как и все фундаментальные науки, перестала финансироваться, является позором для современной цивилизации, признающей только "прикладные" науки†, ведущей себя совершенно подобно свинье под дубом.

На самом деле никаких прикладных наук не существует и никогда не существовало, как это отметил более ста лет назад Луи Пастер (которого трудно заподозрить в занятиях, не нужных человечеству). Согласно Пастеру, существуют лишь приложения науки.

Опыты с янтарем и кошачьим мехом казались бесполезными правителям и военачальникам XVIII века. Но именно они изменили наш мир, после того как Фарадей и Максвелл написали уравнения теории электромагнетизма. Эти достижения фундаментальной науки окупили все затраты человечества на нее на сотни лет вперед. Отказ современных правителей платить по этому счету – удивительно недальновидная политика, за которую соответствующие страны, несомненно, будут наказаны технологической и, следовательно, экономической (а также и военной) отсталостью.

Человечество в целом (перед которым, ведь, стоит тяжелейшая задача выживания в условиях мальтузианского кризиса) должно будет заплатить тяжелую цену за близоруко-эгоистическую политику составляющих его стран.

Математическое сообщество несет свою долю ответственности за повсеместно наблюдаемое давление со стороны правительств и общества в целом, направленное на уничтожение математической культуры как части культурного багажа каждого человека и в особенности на уничтожение математического образования.

Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Наиболее характерными приметами формализованного преподавания является изобилие немотивированных определений и непонятных (хотя логически безупречных) доказательств. Отсутствие примеров, от-

---

*Нет звездных войн – нет математики.

†Непрекращающееся финансирование псевдоспиритических наук вроде парапсихологии и антиисторического вздора академика А.Т.Фоменко (зам. академика-секретаря отделения математики РАН) еще ждет своего объяснения.

сутствие анализа чертежей и рисунков – столь же постоянный недостаток математических текстов, как и отсутствие внематематических приложений и мотивировок понятий математики.

Уже Пуанкаре отмечал, что есть только два способа научить дробям – разрезать (хотя бы мысленно) либо пирог, либо яблоко. При любом другом способе обучения (аксиоматическом или алгебраическом) школьники предпочитают складывать числители с числителями, а знаменатели – со знаменателями.

Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук. Основные принципы построения и преподавания всех этих наук применимы и к математике. Искусство строгого логического рассуждения и возможность получать этим способом надежные выводы не должны оставаться привилегией Шерлока Холмса – каждый школьник должен овладеть этим умением. Умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Успех приносит не столько применение готовых рецептов (жестких моделей), сколько математический подход к явлениям реального мира. При всем огромном социальном значении вычислений (и computer science) сила математики – не в них, и преподавание математики не должно сводиться к вычислительным рецептам.

В истории России был премьер-министр с математическим образованием (окончивший Санкт-Петербургский университет по математике в школе Чебышева). Вот как он описывает разницу между мягким и жестким математическим моделированием[‡]: «Между математиками есть двоякого рода люди: 1) математики-философы, т.е. математики высшей математической мысли, для которых цифры и исчисления есть ремесло; для этого рода математиков цифры и исчисления не имеют никакого значения, их увлекают не цифры и исчисления, а сами математические идеи; 2) напротив, есть такие математики, которых философия математики, математические идеи не трогают, которые всю суть математики видят в исчислениях, цифрах и формулах...

Математики-философы, к которым принадлежу и я, относятся всегда с презрением к математикам-исчислителям, а математики-исчислители, среди которых есть много ученых весьма знаменитых, смотрят на математиков-философов как на людей в известном смысле "тронутых"».

Сейчас мы знаем, что описанные Витте различия имеют физиологическое происхождение. Наш мозг состоит из двух полушарий. Левое отвечает за умножение многочленов, языки, шахматы, интриги и последовательности силлогизмов, а правое – за пространственную ориентацию, интуицию и все необходимое в реальной жизни. У "математиков-исчислителей", по терминологии Витте, гипертрофировано левое полушарие, обычно засчет недоразвития правого. Это заболевание составляет их силу (вспомним "Защиту Лужина" Набокова). Но доминирование математиков этого типа и привело к тому засилью аксиоматическо-схоластической математики, особенно в преподавании (в том числе и в средней школе), на которое общество естественно и законно реагирует резко отрицательно. Результатом

[‡]С.Ю. Витте. Воспоминания, Т.3, гл.5.

явились повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее изничтожением.

Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга.

После окончания университета Витте не нашел работы по специальности и принял предложение частной компании стать начальником дистанции на Юго-Западной железной дороге. Для занятия этого поста ему пришлось по неделе простажироваться в должности каждого из своих подчиненных (стрелочника, путевого обходчика, багажного раздатчика, билетного кассира, машиниста, начальника станции...) – неоценимый опыт для будущего премьер-министра.

Однажды царский поезд, следующий в Крым, был замедлен по приказу Витте на его дистанции. Несмотря на возмущение Александра III, машинист подчинился не его приказу, а приказу своего начальника дистанции. Когда поезд перешел на следующую, уже не подчинявшуюся Витте дистанцию, скорость была, естественно, повышена. Вскоре царский поезд сошел с рельсов и опрокинулся (катастрофа у станции Борок). Царь запомнил имя непокорного начальника дистанции, и Витте был назначен министром (кажется, путей сообщения), а впоследствии стал и премьер-министром.

Но Витте лучше разбирался в реальной жизни страны и в проблемах экономики и техники, чем в политических интригах (к которым большой талант имеют люди левополушарные). С приходом к власти деятелей типа Распутина он был отправлен в отставку. Витте вновь призывался к власти для ликвидации критических ситуаций, созданных политиками (Русско-японская война, революция 1905 года), я даже предполагаю, что если бы Витте оставался руководителем России в течение следующего десятилетия, то наша история была бы совсем иной: не было бы ни мировой войны, ни революции и мы жили бы сейчас, как Финляндия или Швеция...

Конечно, сила Витте заключалась вовсе не в применении какой-либо математики ("исчислений"), а в том способе мышления, который он называет "математикой-философией" и который заставляет человека с математическим образованием думать о всех реалиях окружающего мира с помощью (сознательного или бессознательного) мягкого математического моделирования.

Идея о необходимости этого рода мышления для успеха в любой экономической или производственной деятельности (исключая, быть может, политические интриги) была хорошо понята уже сто лет назад[§]:

"Не пользующаяся математическими символами человеческая логика зачастую запутывается в словесных определениях и делает вследствие этого ошибочные выводы – и вскрыть эту ошибку за музыкою слов иногда стоит огромного труда и бесконечных, часто бесплодных споров."

К сожалению, и сейчас остаются актуальными слова классика математической экономики Парето[¶]:

"Экономисты, не знающие математики, находятся в положении людей, желающих решить систему уравнений, не зная ни того, что она из себя представляет, ни

[§] В.Ф.Арнольд. Политико-экономические этюды. Одесса: Изд. Распопова. 1904. с.5.

[¶] V.Pareto. Anwendung der Mathematik auf Nationalokonomie. Encyclopedie der Mathematischen Wissenshaften, Band I, Heft 7. S.1114.

того даже, что представляет из себя каждое входящее в нее единичное уравнение".

На приеме в честь президента Франции, приезжавшего недавно в Москву, я обсуждал проекты перестройки преподавания математики в средних школах Франции с министром народного образования, исследований и технологии Клодом Аллегре и его советником Винсентом Куртийо, который так описал их планы: берем учебник математики, рвем его на куски, оставляем одну треть, выкидывая остальное, но зато требуем, чтобы оставшуюся треть школьники знали как следует.

Хочу предупредить возможных российских реформаторов-последователей: математика – живой организм, вдобавок подобный лестнице, в которой выкидывание даже отдельных ступенек чрезвычайно опасно.

Выводы: планируемое во всех странах подавление фундаментальной науки и, в частности, математики (по американским данным, на это им потребуется лет 10–15), принесет человечеству (и отдельным странам) вред, сравнимый со вредом, который принесли костры инквизиции западной цивилизации (и Испании).

Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа каждого школьника.

Основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира, умение, так хорошо описанное Витте в его характеристике "математики-философии" и так блестяще использованное им в вовсе не математической деятельности. Искусство составлять и исследовать мягкие математические модели является важнейшей составной частью этого умения.

Применяя таблицу умножения, легко получить следующий результат: уменьшение средней продолжительности жизни на десять лет приводит в масштабах СССР к такой же потере человеко-лет, как одновременный расстрел порядка 80 миллионов человек (в масштабах России – порядка 40 миллионов). Здесь использована лемма: когда коммунисты расстреливают вас, вы теряете в среднем порядка половины своей жизни.

Математика, подобно физике, – экспериментальная наука, отличающаяся от физики лишь тем, что в математике эксперименты очень дешевы. Видимо, именно поэтому бюджет отделения математики в РАН в сорок раз меньше бюджета физических отделений (а следовательно, производительность наших математиков – в соответствующее число раз выше).

Как мне сообщил на днях академик-секретарь отделения математики РАН Л.Д.Фаддеев, затраты СССР на математику в год составляли стоимость одного танка, а современные затраты России – стоимость примерно одной десятой танка в год. Мы живем в сумасшедшем мире, будущее которого представляется весьма сомнительным. То, что в России еще остались математики, упорно не желающие эмигрировать и воспитывающие новые поколения талантливых студентов, – свидетельство своеобразного героизма (с точки зрения наших западных коллег – глупости), традиционного для российской интеллигенции. Но долго удерживаться такое состояние не может.

Девятая Конференция Турнира Городов

Материалы подготовлены оргкомитетом Конференции

«Конференции» Турнира Городов не похожи на научные конференции в обычном смысле слова. Здесь нет «пленарных докладов», «работы по секциям», официальной программы. Это, скорее, неформальные встречи, на которые приглашаются школьники — победители международного математического Турнира Городов — и сопровождающие их учителя.

Одна из целей конференции — приобщить способных школьников к решению задач исследовательского характера. Для этого организаторы предлагают им интересные трудные задачи, часто с выходом на открытые математические проблемы. Даже рассказ условий такого типа задач превращается в целую лекцию. Поэтому *презентация* задач занимает по крайней мере день работы конференции.

Решение таких задач требует больших затрат времени и значительных интеллектуальных усилий. Поэтому организационно процесс решения проходит в свободной форме: дается много времени (несколько дней), решения могут быть как индивидуальными, так и коллективными, т.е. допускается решение от любой группы объединившихся людей. Это не обязательно совпадает с «командой», приехавшей из одного города. Жюри назначает сроки сдачи письменных решений, по традиции их два, и для них прижились названия «предварительный финиш» и «окончательный финиш». Сданные решения проверяются, оценивается степень продвижения участников в решении той или иной задачи. Затем проводится разбор решенных задач. Некоторые пункты после первого срока сдачи снимаются с конкурса. Иногда после промежуточного разбора добавляются новые задачи. Критерии успеха также отличаются от традиционных: успешность выступления оценивается по *наибольшему* продвижению в одной из задач. Т.е. фактически проводится одновременно несколько конкурсов (по каждой из задач в отдельности). В реальности многие участники не могут остановиться на какой-то единственной задаче и решают сразу несколько задач.

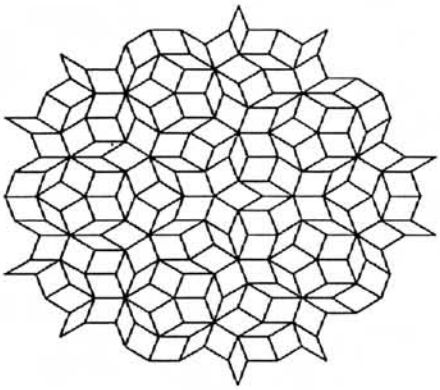
Вообще все участники — как школьники, так и учителя — получают возможность активного отдыха, интенсивной творческой работы и интересного общения.

Девятая Коференция проходила с 1 по 8 августа в г. Переславль-Залесский.

Ниже приводятся условия некоторых задач этой Конференции (полный отчет о Конференции, с условиями и решениями всех задач, списками команд, результатами участников выйдет отдельным изданием).

Задача 1. Кодирующие отображения и узоры Пенроуза

Предложена и представлялась К.П.Кохасем



Кодирования и декодирования

Пусть S_1 — множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц, S_2 — множество всевозможных двусторонних последовательностей из нулей и единиц (т. е. последовательностей, элементы которых занумерованы не натуральными, а целыми числами). Изображая двустороннюю последовательность в виде бесконечного в обе стороны списка, мы будем подчеркивать элемент с номером 1, например: $\ldots, 1, 0, 1, \underline{0}, 1, 0, \ldots$

Определение. Операцией *кодирования* называется следующее преобразование последовательностей из S_1. Каждый нуль в последовательности $\{x_n\}$ заменим на единицу, а каждую единицу — на две цифры — 1 и 0 (именно в таком порядке), причем замены всех элементов последовательности выполняются одновременно. Например:

$$1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots \quad \longrightarrow \quad 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1 \ldots$$

Обозначим операцию кодирования буквой $\Bbbk$. Операция кодирования на множестве S_2 определяется аналогичным образом. Пример:

$$\begin{array}{c} \ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \underline{1},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots \\ \downarrow \\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ \underline{1},\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots \end{array}$$

Результат кодирования двусторонней последовательности определен с точностью до сдвига, хотя обычно мы будем считать, что подпоследовательность $\{x_n\}_{n>0}$ при кодировании переходит в в подпоследовательность $\{y_n\}_{n>0}$.

1.1. Докажите, что существует последовательность $\{x_n\} \in S_1$, такая что $\Bbbk(\{x_n\}) = \{x_n\}$.

Определение. Если для последовательности $\{x_n\} \in S_1$ удается подобрать такую последовательность $\{y_n\}$, что $\{x_n\} = \Bbbk(\{y_n\})$, то мы будем говорить, что последовательность y_n получается из последовательности x_n *декодированием*. Аналогично определяется декодирование двусторонних последовательностей. Нетрудно сообразить, что результат декодирования определен однозначно с точностью до сдвига.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно декодируемой*, если ее можно декодировать бесконечно много раз, то есть для всякого натурального m, найдется такая последовательность $\{z_n\}$, что

$$\{x_n\} = \underbrace{\Bbbk(\Bbbk(\dots(\Bbbk}_{m\ \text{раз}}(\{z_n\})\dots).$$

1.2. Докажите, что существует бесконечно декодируемая последовательность из S_2.

1.3. Докажите, что бесконечно декодируемая последовательность из S_1 непериодична.

1.4. Докажите, что множество бесконечно декодируемых последовательностей несчетно.

1.5. Докажите, что последовательности, допускающие бесконечно много декодирований, локально изоморфны. Это значит, что если в любой такой последовательности взять фрагмент конечной длины, то в любой другой такой последовательности обязательно встретится такой же фрагмент, причем он встречается там бесконечно много раз.

Теперь наша цель — дать исчерпывающее описание множества последовательностей, допускающих бесконечно много декодирований.

Обозначения. Через $\lfloor x \rfloor$ будем обозначать целую часть x, а через $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое, которое больше либо равно x.

Пусть $\alpha > 1$, γ — вещественные числа. Положим $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ (тогда $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$). Рассмотрим двусторонние последовательности

$$p_n = \left\lceil \gamma + \frac{n+1}{\alpha} \right\rceil - \left\lceil \gamma + \frac{n}{\alpha} \right\rceil \qquad (1)$$

$$q_n = \left\lfloor \gamma + \frac{n+1}{\alpha} \right\rfloor - \left\lfloor \gamma + \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \qquad (2)$$

1.6. Докажите, что
а) $\{n:\ p_n = 1\} = \{\lfloor \alpha(k-\gamma) \rfloor, k \in \mathrm{Z}\}$
б) $\{n:\ p_n = 0\} = \{\lceil \beta(k+\gamma) \rceil - 1, k \in \mathrm{Z}\}$
(Аналогично можно доказать, что
в) $\{n:\ q_n = 1\} = \{\lceil \alpha(k-\gamma) \rceil - 1, k \in \mathrm{Z}\}$
г) $\{n:\ q_n = 0\} = \{\lfloor \beta(k+\gamma) \rfloor, k \in \mathrm{Z}\}$).

1.7. $\{p_n\}$ — двусторонняя последовательность из нулей и единиц. Для нее подобрали такую функцию φ, что $p_n = \varphi(n+1) - \varphi(n)$. Возьмем произвольный элемент p_m. При выполнении кодирования этому элементу будет соответствовать одна единица (и еще, может быть, один нуль). На каком месте в последовательности $\Bbbk\{p_n\}$ будет находиться эта единица?

Начиная с этого места, мы будем считать параметр α, использованный в формулах (1) и (2), равным золотому сечению (т. е. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

1.8. Пусть p_n — последовательность вида (1). В качестве функции φ из предыдущей задачи для такой последовательности естественно взять функцию $\varphi(n) = \lceil \gamma + \frac{n}{\alpha} \rceil$. Докажите, что образ последовательности $\{p_n\}$ при кодировании имеет вид $\{\lfloor \gamma^\star + \frac{n+1}{\alpha} \rfloor - \lfloor \gamma^\star + \frac{n}{\alpha} \rfloor\}$ и найдите $\gamma^\star$.

1.9. а) Докажите, что последовательности из задач 1.1, 1.2 — тоже последовательности вида (1), где α — по-прежнему золотое сечение. Найдите параметр γ для этих последовательностей.

б) Как изменится параметр γ, если последовательность вида (1) сдвинуть на m символов вправо?

1.10. Пусть на координатной плоскости нанесены линии целочисленной решетки и проведена прямая $y = \alpha x + b$. Выделим стандартный единичный квадрат с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и пронесем его вдоль прямой. Квадрат заметет полосу, содержащую исходную прямую; отметим точки с целочисленными координатами, находящиеся в этой замкнутой полосе, за исключением точки $(0,1)$. Нетрудно сообразить, что существует единственная бесконечная ломаная, звенья которой параллельны координатным осям, проходящая через все отмеченные точки и не выходящая из полосы. Спроектируем эту ломаную на исходную прямую. Тогда прямая окажется разбита на отрезки двух типов: проекции горизонтальных единичных отрезков и проекции вертикальных, обозначим эти типы соответственно через 0 и 1. Докажите, что двусторонняя последовательность типов этих отрезков вдоль нашей прямой является бесконечно декодируемой.

1.11. Докажите, что любая последовательность вида (1) или (2) бесконечно декодируемая.

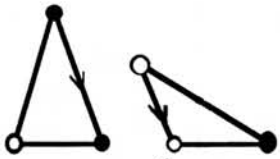
1.12. Докажите, что любая бесконечно декодируемая последовательность из S_1 или S_2 имеет вид (1) или (2).

3. Лирическое отступление. Игра «Цяньшидзы» (или «ним Витхоффа»). Есть две кучи спичек. Двое игроков по очереди берут спички из этих кучек, причем при каждом ходе игрок или берет произвольное количество спичек из одной кучи или поровну из обеих. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что если начальные количества спичек в кучах равны $(\lfloor \alpha n \rfloor, \lfloor \beta n \rfloor)$, то выигрывает второй игрок, в остальных случаях выигрывает первый. Здесь α, конечно же, по-прежнему золотое сечение, а β — сопряженный показатель: $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$.

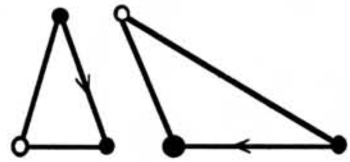
Мозаики Пенроуза

2.1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle ABC = 36°$, $AC = 1$. В треугольнике DEF $DE = EF$, $\angle DEF = 108°$, $DE = \alpha$. Докажите, что $AB = \alpha$, $DF = 1 + \alpha$. Докажите также, что $\sin 18° = \alpha^{-1}/2$, $\cos 36° = \alpha/2$.

2.2. Есть конечное число типов плиток, каждая из которых представляет собой выпуклый многоугольник. Известно, что для любого r из этих плиток можно сложить фигуру, которая содержит круг радиуса r. Докажите, что тогда этими плитками можно замостить всю плоскость.

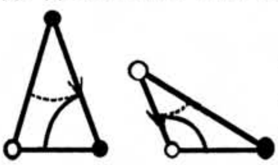


Мозаики Пенроуза можно строить для разных наборов плиточек. Мы начнем с треугольных плиток. Есть два стандартных набора треугольных плиток, назовем их А-набор (слева) и Б-набор (внизу справа). Каждый из этих наборов состоит из двух треугольников, с углами кратными 36°. Вершины треугольников раскрашены в два цвета, стороны с одноцветными вершинами помечены стрелкой. Треугольники разрешается прикладывать друг к другу так, чтобы совмещались вершины одинакового цвета, при этом, если совмещаются стороны со стрелками, то стрелки должны иметь одинаковые направления. Треугольники разрешается поворачивать и переворачивать. Прикладывая плиточки друг к другу по этим правилам, мы получим мозаику Пенроуза. Мы будем, в основном, пользоваться плитками из А-набора.



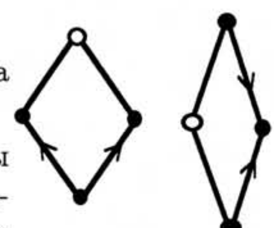
2.3. Докажите, что плиточками из А-набора можно замостить всю плоскость.

2.4. Докажите, что это можно сделать не единственным способом (с точностью до движений плоскости).

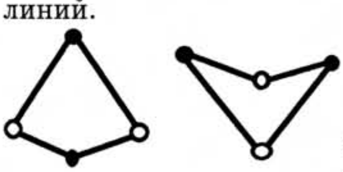


Правило, по которому плитки прикладываются друг к другу при составлении мозаики, можно сделать более наглядным. Нарисуем на каждой плиточке две линии так, как это показано на рисунке и потребуем, чтобы при выкладывании мозаики стороны плиток совмещались так, чтобы концы линий совпадали. Тогда на любой мозаике появится узор из линий.

2.5. Докажите, что всякая замкнутая линия из этого узора имеет симметрию пятого порядка.



Другой способ разметки плиток — так называемые полосы Аммана. На каждой из двух плиток можно нарисовать несколько отрезков таким образом, что при выкладывании мозаики концы этих отрезков совмещаются и на плоскости образуется семейство прямых линий.



2.6. Придумайте такой способ разметки.

Кроме упомянутых наборов из треугольников, рассматривают также набор из ромбов (с углами 72°, 108° и 36°, 144°, см. мозаику в начале текста) и набор “(воздушный) змей + дротик”. Последний набор удобен тем, что не требует введения ориентации на сторонах.

2.7. Докажите, что указанными наборами плиток можно замостить всю плоскость.

2.8. Докажите, что существует несчетное множество различных мозаик Пенроуза.

Будем говорить, что мозаика Пенроуза имеет дыру, если плитки этой мозаики покрывают всю плоскость, за исключением (не обязательно связной) фигуры конечной площади. Для такой мозаики можно попытаться увеличить дыру, сняв несколько (конечное число) плиток, после чего замостить какой-либо фрагмент непокрытой части по-другому. Мозаики с дырами, получающиеся друг из друга при помощи таких операций, будем считать эквивалентными.

2.9. На рисунке изображена фигура «циркулярная пила», построенная из плиток Б-набора с нарушением правил совмещения плиток. Можно считать, что все вершины правильного десятиугольника одного цвета, а стороны ориентированы по часовой стрелке.

Докажите, что существует мозаика с дырой в виде циркулярной пилы.

2.10. Докажите, что никакая мозаика с дырой в виде циркулярной пилы не эквивалентна мозаике без дыр.

2.11. а) Рассмотрим семейство параллельных прямых Аммана. Докажите, что расстояния между соседними прямыми в этом семействе принимают ровно два различных значения.

б) Обозначим эти расстояния через 0 и 1 и выпишем последовательность, в которой эти расстояния встречаются в нашем семействе прямых. Докажите, что эта последовательность бесконечно декодируемая.

Задача 2. Хулиган в библиотеке

Предложена на конференцию С.Л. Берловым и Ф. Назаровым. Представлялась на конференции С.Берловым.

1. Оказавшись как-то раз в библиотеке без присмотра, хулиган Вася переставил 100 томов энциклопедии, стоявших на полке. Библиотекарь заметил это и стал наводить порядок. Для этого проделывает каждый день следующую операцию:

a) меняет местами любые два соседних тома.

b) меняет местами любые два тома.

c) берет любые три тома и расставляет их в другом порядке.

d) переставляет в конец любой том (сдвинув остальные тома).

e) ставит любой том в любое другое место.

За какое наименьшее число дней библиотекарь сможет расставить тома в порядке возрастания номеров?

2. Обнаружив, что библиотекарь исправил его предыдущую шалость, хулиган Вася снова переставил тома и решил, что будет приходить в библиотеку каждый день перед закрытием для поддержания беспорядка. Теперь библиотекарь по утрам вынимает любые k томов и ставит их в другом порядке на те же места, а Вася каждый вечер проделывает такую же операцию с любыми n томами. В энциклопедии по-прежнему 100 томов. Теперь библиотекарь уже не надеется расставить все тома по порядку, а лишь хочет, чтобы на своем месте стояло как можно больше томов. Пусть $P(n,k)$ – наибольшее количество томов, которое он сможет расставить на свои места до очередного прихода Васи (при любых действиях Васи: при этом мы всегда будем предполагать, что исходно тома расставляет Вася).

a) Найдите $P(n,k)$ при $k > n+1$.

b) Найдите $P(2,3)$.

c) Найдите $P(2k, 2k+1)$.

d) Докажите, что $P(3,4) \leqslant 28$. e) Найдите $P(3,4)$.

f) Докажите, что $P(2k-1, 2k) \leqslant [\frac{100}{2k}] + 2k - 1$ при $k < 20$.

g) Вычислите $P(2k-1, 2k)$ с точностью до аддитивной константы, не зависящей от S и k, если в энциклопедии $S >> k$ томов.

h) Пусть k фиксировано. Верно ли, что $P(2k-1, 2k)$ не убывает при возрастании S?

3. Пусть энциклопедия содержит S томов, а подсчет числа томов, стоящих на своих местах, всегда происходит после хода библиотекаря.

a) Библиотекарь переставляет любые два тома, а Вася – любые два соседних тома. Какое наибольшее число томов библиотекарь сумеет расставить на своих местах?

b.1) Библиотекарь переставляет любые три тома, а Вася – любые два соседних. Докажите, что библиотекарь сможет расставить не менее $1/20$ количества всех томов, но не более $2/3$.

b.2) Докажите, что библиотекарь сможет расставить не менее $1/5$ всех томов.

c.1) Лемма о торжестве порядка. Пусть библиотекарь переставляет произвольные $k \geqslant 4$ томов, а хулиган Вася любые n подряд стоящих томов. Тогда найдется такое число $\alpha \in (0,1)$, не зависящее от S, что при любых действиях Васи библиотекарь сумеет поставить на место не менее αS томов.

c.2) Лемма о торжестве беспорядка. Пусть библиотекарь переставляет произвольные $k \geqslant 4$ томов, а хулиган Вася любые $n \geqslant k$ подряд стоящих томов. Тогда найдется такое число $\beta \in (0,1)$, не зависящее от S, что при любых действиях библиотекаря Вася сумеет добиться того, чтобы не менее βS томов стояли не на месте.

4. Теперь библиотекарь переставляет любые k подряд стоящих томов, а Вася – любые n подряд стоящих томов. Пусть $Q(n,k)$ – наибольшее количество томов, которое библиотекарь сможет поставить на место *после своего хода.*

a) Докажите, что $0 < Q(2,3) \leqslant 3$ при любом S.

b) Найдите $Q(2,3)$ при четном S.

c) Докажите лемму о торжестве беспорядка для рассматриваемых операций при любых n и k.

d*) Докажите лемму о торжестве порядка при $k = 5n$.

5. Пусть библиотекарь переставляет любые k подряд стоящих томов, а Вася — 2 любых тома.

a) Лемма о полном торжестве беспорядка. При любом $\alpha > 0$ найдется такое (очень большое) S, что библиотекарь не сумеет поставить на места более чем αS томов.

b) Докажите, что количество томов, которые библиотекарь сможет поставить на место, не превосходит некоторой константы, не зависящей от S.

c) Лемма об абсолютном беспорядке. Если S значительно больше k, то библиотекарь не сумеет поставить на место ни одного тома.

Точный смысл слов «значительно больше» оставляем на Ваше усмотрение.

Задача 3. Почти арифметическая прогрессия

Предложена и представлялась К.Салиховым

Вводные задачи

Определение. Будем называть множество точек X из полуинтервала $[0,1)$ *всюду плотным*, если для любого полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ существует такая точка $x \in X$, что $x \in [a,b)$.

1. Докажите, что если X всюду плотно на $[0,1)$, то для любого полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ существует бесконечно много таких точек $x \in X$, что $x \in [a,b)$.

2. а) Пусть α — рациональное число и k пробегает все натуральные числа. Покажите, что множество $\{\{k\alpha\} \mid k \in \mathrm{N}\}$ не является всюду плотным на $[0,1)$ ($\{x\}$ означает дробную часть x).

б) Если α — иррационально, то множество $\{\{k\alpha\} \mid k \in \mathrm{N}\}$ является всюду плотным на $[0,1)$.

Для каждого фиксированного α и полуинтервала $[a,b) \subset [0,1)$ рассмотрим множество K тех натуральных значений k, при которых $\{k\alpha\} \in [a,b)$. Общая проблема состоит в том, чтобы при данных α и $[a,b)$ описать это множество K. Так как K – подмножество N, то K удобно представлять себе как возрастающую последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, … (которая может, конечно, не содержать ни одного члена, если K пусто). Наша цель будет состоять в нахождении по данному номеру n числа a_n.

Основные задачи

Пусть m — натуральное число, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{m}$. Для начала попытаемся найти множество K для числа α и полуинтервала $[m\alpha, 1) \subset [0,1)$.

Легко видеть, что $a_0 = m$.

3. Докажите, что K бесконечно.

4. Найдите a_1.

Подсказка 1. Докажите, что существует и единственно $t \in \mathrm{N}$, такое что $\dfrac{t-1}{(t-1)m+1} \leqslant \alpha < \dfrac{t}{tm+1}$.

5. Пусть a_n и a_{n+1} — два последовательных члена последовательности a_n. При каком условии число $(a_{n+1} - a_n) \in \mathrm{K}$?

6. Какие значения может принимать разность $a_{n+1} - a_n$?

Подсказка 2. Подумайте, когда, например, $\{(a_n + a_1)\alpha\} \in [m\alpha, 1)$.

7. Докажите, что $(a_n - n) \,\vdots\, m$.

8. Докажите, что $[a_n\alpha] = \dfrac{a_n - n}{m} - 1$ (где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x).

9. По данному n научитесь находить a_n.

10. Найдите все натуральные числа k, такие что десятичная запись числа 3^k начинается с цифры 9.

На исследование

11. Попробуйте заменить натуральное число m на какое-нибудь рациональное.

12. Что произойдет, если мы заменим полуинтервал $[m\alpha, 1)$ на полуинтервал $[m\alpha, \frac{p}{q}\alpha)$, где p, q — натуральные числа?

Задача 4. Многомерные многогранники

Предложена и представлялась В.О.Бугаенко

Предлагаемый цикл задач связан с понятием выпуклого многогранника, обобщающим понятие выпуклых многоугольника на плоскости и многогранника в трехмерном пространстве на случай пространства любой размерности.

Выпуклый многогранник может быть определен, как выпуклая оболочка конечного множества точек, или как пересечение конечного числа полупространств (если это пересечение является ограниченным).

1. Покажите, что в n-мерном пространстве существуют аналоги трехмерных многогранников — куба, тетраэдра и октаэдра.

Определение. Эти многогранники называют n-мерными *кубом*, *симплексом* и *октаэдром* соответственно.

Легко заметить, что если на каждой грани выпуклого трехмерного многогранника выбрать по точке, те пары из них, которые принадлежат смежным граням, соединить ребрами, то получится новый многогранник. Так из куба получится октаэдр, из октаэдра — куб, а из тетраэдра — тетраэдр. Эту конструкцию можно обобщить на n-мерный случай.

2. Докажите, что для любого многогранника M существует ему двойственный многогранник M'. Между гранями многогранников M и M' можно установить взаимно-однозначное соответствие f, такое, что:

1) если Γ — грань многогранника M размерности k, то $f(\Gamma)$ — грань многогранника M' размерности $n-k-1$;

2) если грань Γ_1 многогранника M содержится в грани Γ_2 большей размерности, то грань $f(\Gamma_2)$ многогранника M' содержится в грани $f(\Gamma_1)$.

3. В сечении четырехмерного куба трехмерным пространством, перпендикулярным главной диагонали, получаются трехмерные многогранники. Какие? (Естественно, ответ зависит от того, в какой точке пространство сечения пересекает эту диагональ.)

Указание. Рассмотрите трехмерный аналог задачи. Желательно, исходя из аналогий, догадаться, каким будет ответ, а затем строго это доказать.

4. Существует ли многогранник, отличный от симплекса,

а) любые две вершины которого соединены ребром?

б) любые две грани старшей размерности пересекаются?

Определение. Многогранник называется *симплициальным*, если все его грани (коразмерности больше 0) — симплексы. Многогранник, двойственный к симплициальному называется *простым*. Иными словами, простой n-мерный многогранник – это такой, из каждой вершины которого выходит ровно n ребер.

Считаем заданным некоторый многогранник M. Обозначим через a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ количество его граней размерности i. Рассмотрим многочлен $P_M(t) = a_n(t-1)^n + a_{n-1}(t-1)^{n-1} + \ldots + a_1(t-1) + a_0$. Раскрыв скобки, его можно привести к виду $P_M(t) = b_nt^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1t + b_0$. Многочлен $P_M(t)$ называется *комбинаторным многочленом* многогранника M.

5. Найдите комбинаторный многочлен для n-мерного а) куба; б) тетраэдра; в) октаэдра.

6. Выразите коэффициенты b_i комбинаторного многочлена через количества a_i граней всех размерностей и наоборот.

Определение. Пусть M — простой многогранник, $\vec{e}$ — вектор в пространстве, не параллельный ни одному из ребер M. Снабдим каждое ребро многогранника M стрелкой в направлении проекции на него вектора $\vec{e}$. Назовем *индексом* (относительно вектора $\vec{e}$) *вершины* многогранника количество выходящих из нее стрелок. (Поскольку, M — простой, то индекс вершины может принимать значения от 0 до n.)

Обозначим через c_i количество вершин простого многогранника индекса i.

7. Выразите числа c_i через числа a_i (естественно, для нахождения каждого числа можно использовать все a_i) и наоборот.

8. Докажите, что $b_i = c_i$ для любого i и любого вектора. В частности, количество вершин индекса i не зависит от выбора вектора $\vec{e}$.

9. (Уравнения Дэна–Соммервиля) Докажите, что коэффициенты комбинаторного многочлена простого многогранника симметричны, т. е. $b_i = b_{n-i}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

Замечание. Соотношение $b_0 = b_n$ называется *формулой Эйлера* и справедливо для любых многогранников, а не только простых.

10. Докажите, что коэффициенты комбинаторного многочлена простого многогранника

а) неотрицательны; б) положительны.

Задача 6. Кляксы и шаблоны

Предложена и представлялась А. Я. Канелем и А. И. Буфетовым

На бесконечной белой плоскости живет ограниченная черная клякса. Она эволюционирует. Каждую секунду все точки меняют свой цвет по следующему закону: Чтобы определить цвет точки в следующий момент времени, надо окружить ее кругом единичного радиуса. Если больше половины его площади черная, то центр становится черным, иначе — белым. Пусть K — клякса, K^n означает результат эволюции кляксы за n единиц времени.

1. а) (А. Тоом) Может ли клякса жить вечно?

б) Может ли ее площадь на промежуточной стадии эволюции увеличиться более, чем в миллион раз?

2. Пусть K — клякса, имеющая форму круга радиуса R. Оцените, по возможности более точно, время его исчезновения.

Перейдем к исследованию дискретной ситуации. Пусть Z — множество целых точек на прямой, *клякса* — произвольное конечное подмножество Z. *Площадь кляксы* — число ее точек. Дискретный закон эволюции таков: фиксируется конечное множество $S \subset \mathrm{Z}$, с нечетным числом элементов, и одна точка из S отмечена. S называется *шаблоном* эволюции. Чтобы узнать цвет точки $x \in \mathrm{Z}$ через секунду, надо параллельно перенести S так, чтобы отмеченная точка перешла в x и посмотреть, точек какого цвета шаблон закрывает больше — это и будет цвет x через секунду. Будем называть шаблон *убивающим*, если любая клякса гибнет при этом шаблоне, и *неубивающим* в противном случае.

3. а) Покажите, что если отметить другую вершину у шаблона, то новая эволюция отличается от старой параллельными переносами.

б) Существует ли неубивающий шаблон на прямой?

в) Может ли площадь кляксы увеличиться более, чем в миллион раз при некотором шаблоне?

г) Существует ли шаблон, содержащий менее ста точек, такой что площадь любой кляксы в процессе эволюции увеличивается не более, чем в миллион раз по сравнению с начальной площадью?

4. Существует ли убивающий шаблон на прямой?

Перейдем к случаю плоскости. Пусть Z^2 — множество точек на плоскости, обе координаты которых целые. *Шаблон* — это подмножество Z^2, содержащее нечетное число элементов, одна точка которого отмечена. Закон эволюции такой же. Понятия *кляксы*, *убивающего* и *неубивающего* шаблона вводятся аналогично.

5. Решите задачу 3 для плоскости.

6. Пусть *Ш* есть квадрат

а) 3×3, образованный 9 узлами решетки;

б) $(2n+1) \times (2n+1)$, образованный $(2n+1)^2$ узлами решетки.

Являются ли такие шаблоны убивающими?

7. Существует ли убивающий шаблон на плоскости?

8. а) Исследуйте эволюцию полуплоскости $ax + by \geqslant c$ для случая общего центрально-симметричного шаблона.

б)* Докажите, что всякий центрально-симметричный шаблон на плоскости неубивающий.

9.** Докажите, что если шаблон убивающий, то для любого $C > 0$ найдется такая клякса, что через некоторое время ее площадь вырастет более, чем в C раз.

10*. Докажите, что для любого неубивающего шаблона найдется такое $C > 0$, что площадь кляксы в процессе эволюции ни за какое время не может вырасти более, чем в C раз.

11.** Обобщите результаты предыдущих пунктов для пространственного случая.

12. а) Существуют ли шаблон и клякса такие, что диаметр кляксы в процессе эволюции неограничен?

б) Верно ли, что путем выбора отмеченной точки (не обязательно внутри шаблона) можно добиться того, что вся эволюция кляксы будет содержаться внутри некоторого круга?

13. Существует ли такой шаблон на прямой, что для всякого $C > 0$ найдется клякса, площадь которой вырастает в процессе эволюции более, чем в C раз?

14. Пусть шаблон сохраняет две полуплоскости $a_1x + b_1y \geqslant c_1$ и $a_2x + b_2y \geqslant c_2$, причем прямые $a_1x+b_1y = c_1$ и $a_2x+b_2y = c_2$ не параллельны. Пусть полуплоскость $a_3x + b_3y \geqslant c_3$ не сохраняется под действием этого шаблона. Докажите, что тогда шаблон убивающий.

15. Пусть шаблон сохраняет все полуплоскости. Докажите, что тогда он неубивающий.

16. Верно ли, что для всякого убивающего шаблона найдется $C > 0$, такое, что время жизни кляксы диаметра d не превосходит Cd?

17. Существует ли неубивающий шаблон, такой, что не все его точки лежат на одной прямой и не являющийся центральносимметричным?

18. Попробуйте научиться по данному шаблону определять, является ли он убивающим.

19. Опишите эволюцию кляксы через большое время.

а) Возможна ли непериодическая эволюция?

б) Возможна ли периодическая эволюция? Если да, то какие могут быть периоды?

20. Обобщите Ваши результаты на n-мерное пространство.

21. Вернемся к непрерывному случаю на плоскости. Пусть шаблон $Ш$ есть конечное объединение многоугольников и кругов.

а) Верно ли, что любой шаблон — убивающий?

Будем говорить, что при данном шаблоне кляксы имеют *линейное время жизни*, если существует константа $C > 0$ такая, что время жизни любой кляксы не превосходит $C \cdot$ *диаметр*. Будем говорить, что кляксы имеют *квадратичное время жизни*, если при некотором $C > 0$ время жизни любой кляксы не превосходит

$C \cdot \textit{диаметр}^2$, причем найдутся кляксы со сколь угодно большим диаметром, время жизни которых не меньше $C \cdot \textit{диаметр}^2/2$.

б) Верно ли, что для любого шаблона кляксы имеют либо линейное, либо квадратичное время жизни?

22. а)** Существует ли шаблон, для которого всякая клякса имеет прообраз?

б)* Тот же вопрос в дискретном случае на плоскости.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Подписаться на журнал можно в редакции по адресу: 117419, Москва, ул. Донская, д. 37, комн. 333.

Стоимость подписки на первое полугодие 1998 года (включая стоимость пересылки) – 40 рублей (новых).

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается **для журнала "Математическое образование", январь – июнь 1997 г.**

Реквизиты для перечисления (с 1 января 1998 г.):

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Лефортовском ОСБ 6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044583342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 20 руб. (новых).

Контактные телефоны: (095) 236-37-09, (095) 362-82-56, (095) 261-33-12.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.