Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год первый

№ 3

Октябрь - Декабрь 1997 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 3, 1997 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 3, октябрь – декабрь 1997 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1997 г.
"Математическое образование", периодическое издание
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 17.02.98. Корректура: О. В. Никишкина
Объем 7 п.л. Тираж 2000 экз. Цена свободная.

Избранные главы алгебры

И. Р. Шафаревич

В российском (и ранее советском) математическом образовании существует замечательная традиция: крупные ученые, внесшие существенный вклад в развитие математики, создают произведения, рассчитанные на школьников, заинтересованных этой наукой. Мы продолжаем публикацию журнального варианта "Избранных глав алгебры", написанных выдающимся русским математиком академиком РАН И. Р. Шафаревичем. Надеемся, что материал заинтересует старших школьников и учителей, работающих по углубленной программе. Главы I, II были опубликованы соответственно в первом и втором номерах журнала.

Глава III. Множество

Множества и подмножества

В математике понятие множества имеет несколько иной смысл, чем в обыденной речи. Обычно слово "множество" подразумевает наличие относительно большого числа объектов ("он имеет множество друзей"). Математик же понимает под множеством совершенно произвольную совокупность объектов, выделенных четко определенным свойством. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Так, вполне допустимы множества, состоящие из двух или одного элемента. Множество обычно обозначается прописной буквой (например, M), его элементы – строчными буквами (например, a,b,…,α,β,…). То, что a является элементом множества M, записывается как $a \in M$, говорят также, что *a принадлежит M*. Если M состоит из элементов $a_1, \dots, a_n$, то пишут $M = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*, состоящее из бесконечного числа элементов, – *бесконечным*. Число элементов конечного множества M обозначается $n(M)$.

В этой главе мы будем в основном иметь дело с конечными множествами. Два конечных множества M и M' называются *равномощными*, если они состоят из одинакового числа элементов, то есть $n(M) = n(M')$. Сейчас мы опишем прием, которым обычно устанавливается равномощность двух множеств. *Взаимно однозначным соответствием* между двумя множествами M и M' называется объединение их элементов в пары (a, a'), в которых $a \in M, a' \in M'$, причем такое, что каждый элемент a множества M находится в паре с одним и только одним элементом a' множества M', а каждый элемент a' множества M' находится в паре с одним и только одним элементом a множества M. Если мы наглядно представим себе множества M и M' и соединим линией те элементы, которые объединяются в одну пару, то наше требование означает, что каждый элемент множества M соединен с одним и только одним элементом множества M' и наоборот (рис. 1).

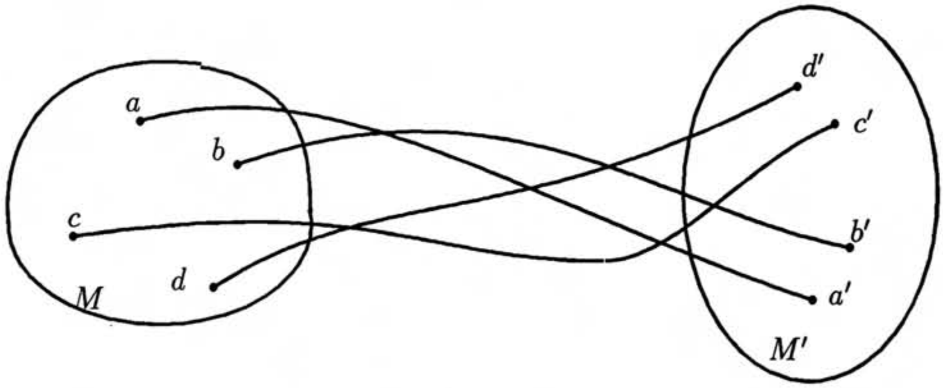


Рис. 1

Например, если $n(M) = n$ и мы каким-то образом занумеруем элементы множества M: $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то этим мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством M и множеством N чисел $1, 2, \ldots, n$.

Выбрав на прямой начало отсчета – точку O и единицу измерения – отрезок OE, мы можем сопоставить любой точке A, лежащей на этой прямой, действительное число $\frac{|OA|}{|OE|}$, со знаком "+", если A лежит по ту же сторону от точки O, что и E, и знаком "−" в противоположном случае. Так устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством всех действительных чисел, которое обозначают обычно $\mathbf{R}$. Мы скажем об этом подробнее в одной из следующих глав.

Если при некотором взаимно однозначном соответствии между множествами M и M' элементы $a \in M$ и $a' \in M'$ объединяются в пару (a, a'), то говорят, что элемент a' соответствует элементу a и элемент a соответствует элементу a'.

Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Это утверждение настолько очевидно, что его трудно назвать теоремой. Если $n(M) = n(M') = n$, то мы можем перенумеровать наши множества: $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $M' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$ и объединение в пары (a_i, a'_i) элементов с одинаковыми индексами является взаимно однозначным соответствием. Наоборот, если между M и M' существует взаимно однозначное соответствие и мы занумеровали элементы множества $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то a_i находится в паре с одним и только одним элементом $a' \in M'$, которому мы можем приписать тот же номер, то есть положить $a' = a'_i$. По определению взаимно однозначного соответствия так мы припишем какой-то номер $i = 1, \ldots, n$ любому элементу множества M', то есть получим, что $M' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$.

Р. Дедекинд (вторая половина XIX в.), много сделавший для выяснения той роли, которую в математике играет понятие множества, считал даже, что предшествующее утверждение является скрытой формой *определения* натурального числа. Сначала, согласно его взглядам, надо определить понятие взаимно однозначного соответствия, а потом – натуральное число, как то общее, что имеется у всех конечных множеств, между которыми можно установить взаимно однозначное

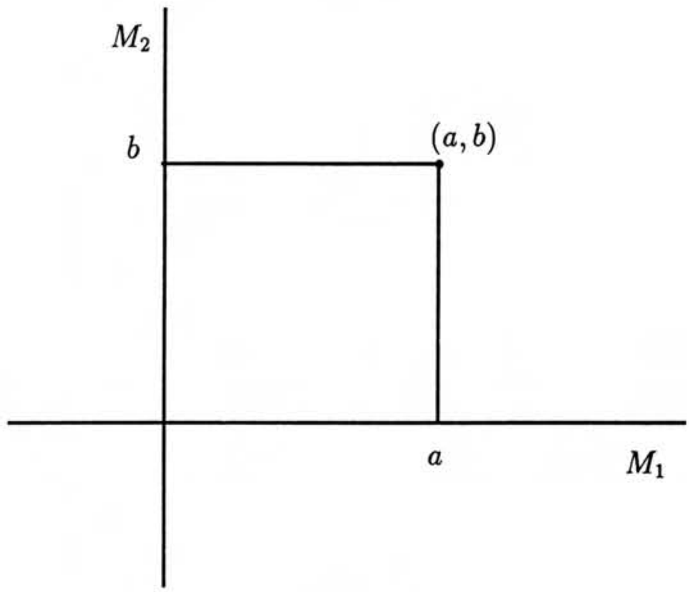


Рис. 2

соответствие. Так, вероятно, и формировалось исторически понятие натурального числа (хотя, конечно, без этой терминологии). Например, понятие "два" возникло, как мы говорили в §1 главы I, путем абстракции, то есть выделения того общего, что есть у множеств, состоящих из: двух глаз; двух весел лодки; двух путников, идущих по дороге – и вообще любых множеств, которые обладают взаимно однозначным соответствием с одним из упомянутых выше.

Таким образом, понятие множества – самое основоположное понятие математики, даже понятие натурального числа основывается на понятии множества.

Мы будем дальше часто встречаться с конструкцией, определяющей новое множество по двум заданным.

Произведением множеств M_1 и M_2 называется множество, элементами которого являются все пары (a, b), где a – произвольный элемент множества M_1, а b – множества M_2. Произведение множеств M_1 и M_2 обозначается $M_1 \times M_2$.

Например, если $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$, то $M_1 \times M_2$ состоит из пар $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$.

Если $M_1 = M_2$ – есть множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, то $M_1 \times M_2$ есть множество любых пар (a, b) с действительными a и b. Метод координат на плоскости устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $M_1 \times M_2$ и множеством точек плоскости (рис. 2).

В качестве другого примера предположим, что множество M_1 состоит из чисел $1, 2, \ldots, n$, а M_2 – из чисел $1, 2, \ldots, m$. Введем две новые переменные x и y и сопоставим числу $k \in M_1$ одночлен x^k, а числу $l \in M_2$ – одночлен y^l. Элемент множества $M_1 \times M_2$ имеет вид (k, l) и ему можно сопоставить одночлен $x^k y^l$. Так мы получим взаимно однозначное соответствие между $M_1 \times M_2$ и множеством одночленов вида $x^k y^l$, где $k = 1, \ldots, n$; $l = 1, \ldots, m$. Иначе говоря, это множество одночленов, стоящих в правой части равенства

$$(x + x^2 + \ldots + x^n)(y + y^2 + \ldots + y^m) = xy + x^2y + xy^2 + \ldots + x^ny^m. \tag{1}$$

Множество этих одночленов, следовательно, равномощно множеству $M_1 \times M_2$.

Аналогично, пусть $M_1, M_2, \ldots, M_r$ – произвольные множества. Их *произведением* называется множество, состоящее из последовательностей $(a_1, \ldots, a_r)$, где на i-м месте может стоять произвольный элемент множества M_i. Произведение множеств $M_1, \ldots, M_r$ обозначается $M_1 \times \ldots \times M_r$.

Например, если $M_1 = M_2 = M_3$ есть множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, то метод координат в пространстве устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространств и множеством $M_1 \times M_2 \times M_3$.

Но нас будут в этой главе интересовать конечные множества.

Теорема 1. *Если множества $M_1, \ldots, M_r$ конечны, то конечно и множество $M_1 \times \ldots \times M_r$, и $n(M_1 \times \ldots \times M_r) = n(M_1) \cdot \ldots \cdot n(M_r)$.*

Сначала докажем теорему для случая двух множеств, то есть при $r = 2$: это будет базой индукции. Пусть $M_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}, M_2 = \{b_1, \ldots, b_m\}$, тогда все пары (a_i, b_j) можно записать в прямоугольник

$$\begin{array}{ccc} (a_1, b_1) & \ldots & (a_n, b_1) \\ (a_1, b_2) & \ldots & (a_n, b_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_1, b_m) & \ldots & (a_n, b_m). \end{array} \tag{2}$$

Здесь в j-й строке стоят пары, у которых последний элемент b_j один и тот же. Таких пар (a_i, b_j) столько, сколько элементов a_i, то есть n. Число же строк равно числу разных элементов b_j, то есть равно m. Таким образом, число пар равно nm. Заметим, что прямоугольник (2) несколько напоминает рис. 2. (Рассуждая по-другому, мы могли бы сказать, что множество M_1 равномощно множеству $\{1, \ldots, n\}$ или множеству одночленов $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$, а множество M_2 равномощно множеству $\{y, y^2, \ldots, y^m\}$. Тогда $n(M_1 \times M_2)$ есть, как мы видели, число членов в правой части равенства (1). Подставляя в него $x = 1, y = 1$, мы получим, что это число членов равно nm.)

Общий случай r множеств $M_1, \ldots, M_r$ мы рассмотрим, используя индукцию по числу r. В каждой последовательности $(a_1, \ldots, a_r)$ поставим еще две скобки, записав ее в виде $((a_1, \ldots, a_{r-1}), a_r)$. Ясно, что от этого число последовательностей не изменится. Однако, сложная последовательность $((a_1, \ldots, a_{r-1}), a_r)$ есть пара (x, a_r), где $x = (a_1, \ldots, a_{r-1})$ можно рассматривать как элемент множества $M_1 \times \ldots \times M_{r-1}$. Таким образом, множество $M_1 \times \ldots \times M_r$ равномощно множеству $P \times M_r$, где $P = M_1 \times \ldots \times M_{r-1}$. По доказанному $n(P \times M_r) = n(P)n(M_r)$, а по индуктивному предположению $n(P) = n(M_1) \ldots n(M_{r-1})$. Таким образом, $n(M_1 \times \ldots \times M_r) = n(M_1) \ldots n(M_{r-1})n(M_r)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 позволяет заново найти выражение для числа делителей натурального числа n. Пусть n имеет каноническое разложение

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

В §3 гл. I мы видели, что делители n представляются в виде

$$m = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r},$$

где β_i могут принимать любые целые значения между 0 и α_i (формула (11) главы I). Иными словами, множество делителей равномощно множеству последовательностей $(\beta_1, \dots, \beta_r)$ с указанными значениями для β_i. Это — не что иное, как произведение $M_1 \times \cdots \times M_r$ множеств M_i, где M_i есть множество $\{0, 1, \dots, \alpha_i\}$. Так как $n(M_i) = \alpha_i + 1$, то по теореме 1 число делителей равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$. Эту формулу мы и получили другим путем в §3 гл. I.

Если множества $M_1, ..., M_r$ совпадают: $M_1 = M_2 = \cdots = M_r = M$, то произведение $M_1 \times \cdots \times M_r$ обозначается M^r. Рассмотрим случай, когда $M_1 = \ldots = M_r = I$, и множество I состоит из двух элементов a и b. Элемент множества I^r – это последовательность из r знаков, каждый из которых равен a или b: вроде $aababbba$ (для краткости мы опускаем запятые). Можно считать это текстом из r букв, записанным в алфавите из двух букв. Такой короткий алфавит действительно используется – это азбука Морзе, там a и b соответствуют точке и тире. Таким образом, $n(I^r)$ равно числу текстов длины r, записанных азбукой Морзе. Как мы видим, оно равно 2^r (все $n_i = 2$).

Дальше в этой главе мы изучим множества, содержащиеся в данном множестве M. Они называются его *подмножествами.* Таким образом, подмножество N множества M состоит лишь из элементов множества M, но быть может не из всех. То, что N – подмножество множества M, записывается как $N \subset M$. В число подмножеств включается и само M. Как дальше будет видно, очень удобно рассматривать подмножество множества M, не содержащее ни одного элемента – это сильно упрощает формулировку определений и теорем. Оно называется *пустым подмножеством* и обозначается $\emptyset$. По определению полагают $n(\emptyset) = 0$.

Если $N \subset M$, то совокупность элементов множества M, не принадлежащих N, называется *дополнением* N и обозначается $\overline{N}$. Например, если M — множество натуральных, а N — множество четных чисел, то $\overline{N}$ — множество нечетных чисел. Если $N = M$, то $\overline{N} = \emptyset$.

Если N_1 и N_2 – два подмножества множества M (то есть $N_1 \subset M$ и $N_2 \subset M$), то множество элементов, принадлежащих и N_1, и N_2, называется их *пересечением* и обозначается $N_1 \bigcap N_2$. Например, если M – множество натуральных чисел, N_1 – подмножеству тех из них, которые делятся на 2, а N_2 – тех, которые делятся на 3, то $N_1 \bigcap N_2$ состоит из натуральных чисел, делящихся на 6.

Если N_1 и N_2 не имеют общих элементов, то по определению $N_1 \bigcap N_2 = \emptyset$ – пустому множеству. Так, если M и N_1 – те же, что в предшествующем примере, а N_2 – множество нечетных чисел, то $N_1 \bigcap N_2 = \emptyset$.

Множество, состоящее из элементов, принадлежащих или подмножеству N_1 или подмножеству N_2, называется их *объединением* и обозначается $N_1 \bigcup N_2$. Например, если, как в предыдущем примере, M есть множество натуральных чисел, N_1 состоит из четных чисел, а N_2 – из нечетных, то $N_1 \bigcup N_2 = M$.

Пересечения и объединения множеств представляют себе фигурами вроде изображенных на рис. 3. На рис. 3 а) $M_1 \bigcup M_2$ заштриховано горизонтальными ли-

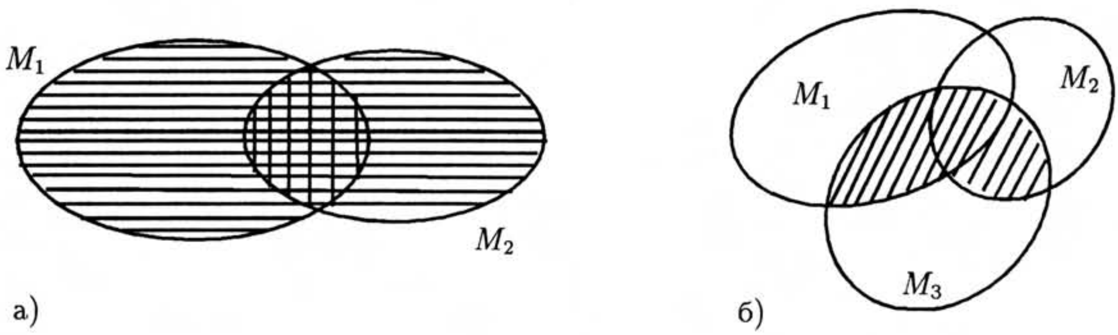


Рис. 3

ниями, а $M_1 \bigcap M_2$ – вертикальными. На рис. 3 б) заштриховано $(M_1 \bigcup M_2) \bigcap M_3$.

В этой главе мы рассмотрим подмножества некоторого конечного множества M, удовлетворяющие тем или иным условиям, и выведем формулы для числа всех таких подмножеств. Раздел математики, посвященный таким вопросам, называется *комбинаторикой.*

Таким образом, комбинаторика – это теория произвольного конечного множества. Мы не пользуемся в ней такими понятиями, как расстояние или величина угла, уравнение или его корни, а всего лишь понятием подмножества и числа его элементов. Тем более поразительно, что на таком скупом материале удается обнаружить много неочевидных закономерностей и связей с другими разделами математики.

Задачи

1. Пусть $M = M'$ есть множество натуральных чисел. Объединим в пары числа $a \in M$ и $b \in M$, если $b = 2a$. Будет ли это взаимно однозначным соответствием между M и M'?
2. Пусть N есть множество натуральных чисел, $M = N \times N$, а M' – множество положительных рациональных чисел. Объединим в пару $(n_1, n_2) \in M$ и $a \in M'$, если $a = \frac{n_1}{n_2}$. Будет ли это взаимно однозначным соответствием?
3. Сколько существует разных взаимно однозначных соответствий между двумя множествами M и M', если $n(M) = n(M') = 3$? Нарисуйте их все аналогично тому, как сделано на рис. 1.
4. Каждое взаимно однозначное соответствие между множествами M и M' определяет множество тех пар $(a, a'), a \in M, a' \in M'$, которые соответствуют друг другу, то есть некоторое подмножество $\Gamma \subset M \times M'$, называемое *графиком соответствия.* Пусть Γ_1 и Γ_2 – графики двух взаимно однозначных соответствий. Докажите, что $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ тогда и только тогда является графиком взаимно однозначного соответствия, когда $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и первоначальные два соответствия совпадают.
5. Пусть $n(M) = n(M') = n$ и Γ – график некоторого взаимно однозначного соответствия между M и M' (см. задачу 4). Чему равно $n(\Gamma)$?

6. Пусть M – множество всех натуральных чисел, $N_1 \subset M$ – подмножество всех чисел, делящихся на заданное число a_1, $N_2 \subset M$ – подмножество всех чисел, делящихся на заданное число a_2. Опишите подмножества $N_1 \bigcup N_2$ и $N_1 \bigcap N_2$.

7. Докажите, что $(\overline{\overline{N}}) = N$, то есть дополнение дополнения подмножества N совпадает с N.

Комбинаторика

Мы начнем с самой простой задачи: перечисления всех подмножеств конечного множества.

Перечислим подмножества множества M при малых значениях $n(M)$. Мы будем выписывать подмножества N множества M, записывая в одну строку подмножества N с одинаковым числом элементов (то есть значением $n(N)$) и располагать строки в порядке возрастания числа $n(N)$.

$$\begin{array}{lllll}
1. & n(M)=1, & M=\{a\} & & \\
 & n(N)=0; & N=\emptyset & & \\
 & n(N)=1; & N=M=\{a\} & & \\
2. & n(M)=2, & M=\{a,b\} & & \\
 & n(N)=0; & N=\emptyset & & \\
 & n(N)=1; & N=\{a\}, & N=\{b\} & \\
 & n(N)=2; & N=M=\{a,b\} & & \\
3. & n(M)=3, & M=\{a,b,c\} & & \\
 & n(N)=0; & N=\emptyset & & \\
 & n(N)=1; & N=\{a\}, & N=\{b\}, & N=\{c\} \\
 & n(N)=2; & N=\{a,b\}, & N=\{a,c\}, & N=\{b,c\} \\
 & n(M)=3; & N=M=\{a,b,c\} & &
\end{array}$$

Таблица 1

Общее число подмножеств при $n(M) = 1$ равно 2, при $n(M) = 2$ равно 4, при $n(M) = 3$ равно 8. Это подсказывает общее утверждение.

Теорема 2. *Число подмножеств конечного множества M равно $2^{n(M)}$.*

Существует общий прием, сводящий изучение произвольного конечного множества к изучению множеств с меньшим числом элементов. Множество M называется *суммой* двух своих подмножеств $M_1 \subset M$ и $M_2 \subset M$, если $M_1 \bigcup M_2 = M$, $M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$. Очевидно, это равносильно тому, что $M_2 = \overline{M_1}$, а $M_1 = \overline{M_2}$. Таким образом, каждый элемент множества M принадлежит к одному из множеств M_1 или M_2 (так как $M_1 \bigcup M_2 = M$) и только к одному (так как $M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$). Поэтому $n(M) = n(M_1) + n(M_2)$. То, что M является суммой M_1 и M_2, записывается так: $M = M_1 + M_2$. Такое представление называется также *разбиением* M на M_1 и M_2.

Пусть $M = M_1 + M_2$ и $N \subset M$ – любое подмножество. Тогда любой элемент $a \in N$ принадлежит или к M_1 (тогда $a \in N \bigcap M_1$) или к M_2 (тогда $a \in N \bigcap M_2$), причем может иметь место только один из этих двух случаев (так как $M_1 \bigcap M_2 = \emptyset$).

Поэтому $N = (N \bigcap M_1) + (N \bigcap M_2)$. Наоборот, если $N_1 \subset M_1$ и $N_2 \subset M_2$ – любые подмножества, то $N_1 \subset M$, $N_2 \subset M$ и $N = N_1 \bigcup N_2 \subset M$, причем $N \bigcap M_1 = N_1$ и $N \bigcap M_2 = N_2$. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между подмножествами N множества M и парами (N_1, N_2), где N_1 – любое подмножество множества M_1, а N_2 – множества M_2.

Сформулируем этот результат в терминах множеств. Обозначим через $U(M)$ множество всех подмножеств множества M. Не следует пугаться того, что здесь подмножества рассматриваются как элементы нового множества. Так, профсоюзы рабочих металлургической или швейной промышленности входят как элементы во Всероссийский Комитет профсоюзов. Мы привели описание множества $U(M)$, если $n(M) = 1, 2$ или 3, в таблице 1. Полученный выше результат мы можем сформулировать так: если есть разбиение множества $M : M = M_1 + M_2$, то множество $U(M)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $U(M_1) \times U(M_2)$. Обозначим число $n(U(M))$ через $v(M)$ – это и есть искомое число всех подмножеств. Применяя теорему 1, мы получаем из найденного нами утверждения, что

$$v(M_1 + M_2) = v(M_1)v(M_2) \tag{3}$$

Равенство (3) уже сводит вычисление величины $v(M)$ к вычислению величин $v(M_1)$ и $v(M_2)$ для множеств M_1 и M_2 с меньшим числом элементов. Для получения окончательного результата рассмотрим разбиение множества M не на два, а на произвольное число подмножеств. Мы можем определить это понятие по индукции, положив $M = M_1 + \ldots + M_r$, если $M = (M_1 + \ldots + M_{r-1}) + M_r$, где смысл выражения $M_1 + \ldots + M_{r-1}$ считается уже определенным. Попросту смысл этого определения заключается в том, что $M_1, \ldots, M_r$ – это подмножества множества M и каждый элемент этого множества принадлежит одному и только одному из подмножеств $M_1, \ldots, M_r$. Например, если M – это множество натуральных чисел, то $M = M_1 + M_2 + M_3$, где M_1 – подмножество чисел, делящихся на 3, M_2 – подмножество чисел вида $3r + 1$, а M_3 – подмножество чисел вида $3r + 2$.

Из равенства (3) мы сразу получаем для конечных множеств M_i по индукции:

$$v(M_1 + \ldots + M_r) = v(M_1) \ldots v(M_r) \tag{4}$$

Если $n(M) = n$, то существует самое "мелкое" разбиение множества M: на n множеств M_i из одного элемента каждое, $M = M_1 + \ldots + M_n$. Если $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то $M_i = \{a_i\}$. У множества M_i из одного элемента есть два подмножества: пустое множество $\emptyset$ и само M_i (см. таблицу 1, первую строку). Поэтому $v(M_i) = 2$ и применяя формулу (4) к разбиению $M = M_1 + \ldots + M_n$, мы получаем, что $v(M) = 2^n$, как и утверждалось теоремой 2.

Вопрос о числе всех подмножеств заданного множества встречается в связи с некоторыми задачами о числах. Выясним, например, сколькими способами заданное натуральное число n можно представить как произведение двух взаимно простых сомножителей. Пусть $n = ab$, a и b взаимно просты и пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение n на простые множители. Тогда a и b являются делителями n и, как мы видели в §3 главы I, каждое из них имеет вид $p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\beta_r}$, где $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$. Но так как a и b взаимно просты, то если некоторое p_i делит a, то оно не должно делить b и значит входит в a в степени α_i. Таким образом, чтобы получить желаемое разложение $n = ab$, надо в множестве $M = \{p_1, \ldots, p_r\}$ выбрать любое подмножество N и положить a равным произведению $p_i^{\alpha_i}$ для $p_i \in N$. Тогда a делит n и $n = ab$ дает нужное разложение. Согласно теореме 2 число разложений n на два взаимно простых сомножителя равно 2^r, где r – число различных простых делителей n.

Надо заметить, однако, что в нашем подсчете мы принимаем как различные разложения $n = ab$ и $n = ba$. Действительно, если a, а значит и разложение $n = ab$ соответствует подмножеству $N \subset \{p_1, \ldots, p_r\}$, то b соответствует подмножеству, состоящему из тех $p_i \in M$, которые не содержатся в N, то есть дополнению $\overline{N}$ множества N . Следовательно при нашем подсчете двум разложениям $n = ab$ и $n = ba$ соответствовали два разных подмножества: N и $\overline{N}$. Таким образом, если не различать разложений $n = ab$ и $n = ba$, то надо два подмножества N и $\overline{N}$ считать один раз. Тогда число разных в этом смысле разложений будет в 2 раза меньше, то есть будет равно 2^{r-1}.

Перейдем теперь к более тонкой задаче: найти число подмножеств заданного конечного множества M, состоящих из *заданного числа* m элементов. Для этого опять соберем все такие подмножества $N \subset M$, что $n(N) = m$, в одно множество, которое обозначим через $U(M, m)$. Положим $n(U(M, m)) = v(M, m)$ – это число мы и хотим вычислить. В таблице 1 мы выписывали множества, входящие в $U(M, m)$, в одну строку. Из нее мы получаем значения числа $v(M, m)$ для небольших значений $n(M)$:

$$\begin{aligned}
&n(M) = 1: \quad v(M,0) = 1, \quad v(M,1) = 1 \\
&n(M) = 2: \quad v(M,0) = 1, \quad v(M,1) = 2, \quad v(M,2) = 1 \\
&n(M) = 3: \quad v(M,0) = 1, \quad v(M,1) = 3, \quad v(M,2) = 3, \quad v(M,3) = 1
\end{aligned}$$

Таблица 2

Теорема 3. *Если $n(M) = n$, то число подмножеств $N \subset M$ множества M, состоящих из m элементов (то есть таких, что $n(N) = m$), равно биномиальному коэффициенту C_n^m. То есть, $v(M, m) = C_n^m$.*

При доказательстве мы будем основываться на той же идее, что и при доказательстве теоремы 2. А именно, предположим, что множество M является суммой двух подмножеств: $M = M_1 + M_2$ и выразим числа $v(M, m)$ через числа $v(M_1, m)$ и $v(M_2, m)$. Если $M = M_1 + M_2$, то каждое подмножество $N \subset M$ представляется в виде $N = N_1 + N_2$, где $N_1 = N \bigcap M_1, N_2 = N \bigcap M_2$. Если мы накладываем дополнительное ограничение $n(N) = m$, то должно быть $n(N_1) + n(N_2) = m$. Зафиксируем сначала некоторые натуральные или быть может равные 0 числа k и l, для которых $k + l = m$. Рассмотрим все такие подмножества $N \subset M$, что $n(N \bigcap M_1) = k, n(N \bigcap M_2) = l$, обозначим множество всех таких подмножеств через $U(k, l)$ и положим $n(U(k, l)) = v(M, k, l)$. Тогда, точно так же, как при доказательстве теоремы 2, мы видим, что

$$v(M, k, l) = v(M_1, k)v(M_2, l). \tag{5}$$

Само множество $U(M,m)$ очевидно разбивается на подмножества $U(M,k,l)$ для различных пар чисел k,l, для которых $k+l=m$. Поэтому число его элементов $v(M,m)$ равно сумме всех чисел $v(M,k,l)$ для всех k и l, для которых $k+l=m$, то есть возможны значения $k=0, l=m$; $k=1, l=m-1\ldots$, и т.д. до $k=m, l=0$. Из соотношения (5) мы получаем, что

$$\begin{aligned} v(M,m) = \; & v(M_1,m)v(M_2,0)+v(M_1,m-1)v(M_2,1)+\ldots \\ & +v(M_1,0)v(M_2,m). \end{aligned} \tag{6}$$

При этом, если в произведении $v(M_1,k)v(M_2,l)$ окажется, что $k>n(M_1)$, мы должны, естественно, полагать $v(M_1,k)=0$ и аналогично с $v(M_2,l)$.

Мы получили соотношение, аналогичное соотношению (3), хотя и более сложное.

Но соотношение (6) нам встречалось, хотя и в связи с совершенно другим вопросом. Так выражается коэффициент при x^m в произведении двух многочленов — $f(x)$ и $g(x)$, если в $f(x)$ коэффициент при x^k равен $v(M_1,k)$, а в $g(x)$ коэффициент при x^l равен $v(M_2,l)$: см. формулу (1) гл. II. Чтобы установить связь между этими двумя утверждениями, определим для любого конечного множества M многочлен $f_M(x)$, коэффициенты которого совпадают с числами $v(M,s)$:

$$f_M(x)=v(M,0)+v(M,1)x+\ldots+v(M,n)x^n, \tag{7}$$

где $n=n(M)$.

Например, согласно таблице 2 если $n(M)=1$, то $f_M(x)=1+x$, если $n(M)=2$, то $f_M(x)=1+2x+x^2$, если $n(M)=3$, то $f_M(x)=1+3x+3x^2+x^3$. Теперь, сравнивая соотношения (6) и (7) можно написать

$$f_M(x)=f_{M_1}(x)\cdot f_{M_2}(x), \text{ если } M=M_1+M_2. \tag{8}$$

Таким образом, за счет введения многочленов $f_M(x)$ вместо чисел $v(M)$ мы добились полного сходства с формулой (3). Мы видим, что многочлен $f_M(x)$ оказался правильной заменой числа $v(M)$ в нашей более сложной задаче. Такое явление встречается не раз. Если мы имеем дело не с одним числом, а с конечной последовательностью чисел $(a_0,\ldots,a_n)$, то часто ее свойства естественно отражает многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Мы увидим это позже и на других примерах.

Нам остается дословно повторить конец доказательства теоремы 2. Если $M=M_1+\ldots+M_r$, то по индукции мы сразу получаем из соотношения (8):

$$f_M(x)=f_{M_1}(x)\cdot\ldots\cdot f_{M_r}(x).$$

Теперь положим $n(M)=n$ и разобьем множество M на n подмножеств по одному элементу: $M=M_1+\ldots+M_n$, $n(M_i)=1$. У множества M_i из одного элемента существуют два подмножества: пустое множество $\emptyset$ с $n(\emptyset)=0$ и подмножество M_i с $n(M_i)=1$. Поэтому $v(M_i,0)=1$, $v(M_i,1)=1$, $v(M_i,k)=0$ при $k>1$, $f_{M_i}(x)=1+x$ и мы получаем, что для любого конечного множества M

$$f_M(x)=(1+x)^{n(M)}.$$

Представить выражение $(1+x)^{n(M)}$ в виде многочлена по степеням x можно по формуле бинома. Мы видели (формулы (20) и (24) главы II), что при $n = n(M)$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n,$$
$$\text{где} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Поэтому, вспоминая определение многочлена $f_M(x)$ (формула (**??**)) мы получаем:

$$v(M,m) = C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ при } \quad n = n(M). \tag{9}$$

Это и есть ответ на наш вопрос.

Пересчитывая подмножества из $0,1,2,\ldots,n$ элементов, где $n = n(M)$, мы пересчитываем **все** подмножества. Таким образом, $v(M,0) + v(M,1) + \ldots + v(M,m) = v(M)$ или, по формуле (9) и теореме 2, $C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m = 2^m$. Это соотношение между биномиальными коэффициентами легко получить и из формулы бинома. Мы его вывели в §3 гл. II.

Подмножество из m элементов множества $\{a_1,\ldots,a_n\}$ называется иногда *сочетанием* из n элементов по m. Соответственно биномиальный коэффициент C_n^m называется *числом сочетаний* из n по m.

Рассмотренный выше вопрос о числе подмножеств $N \subset M$, если $n(M) = n$, $n(N) = m$, связан с некоторыми вопросами о натуральных числах. Например, рассмотрим вопрос: сколькими способами можно представить натуральное число n в виде заданного числа r натуральных слагаемых? Иными словами, каково число решений уравнения $x_1 + \ldots + x_r = n$ в натуральных числах $x_1,\ldots,x_r$? При этом решения, отличающиеся порядком неизвестных, будут считаться *различными*. Например, при $n = 4, r = 2$ мы имеем представления $4 = 1+3 = 2+2 = 3+1$ и, значит, три решения: $(1,3)$, $(2,2)$ и $(3,1)$.

Рассмотрим отрезок AB длины n. Его точки, расстояния от которых до начальной точки A является целым числом, мы будем называть целыми. Ясно, что каждому решению уравнения $x_1 + \ldots + x_r = n$ соответствует разбиение отрезка AB на r отрезков с целыми концами длины $x_1, x_2, \ldots, x_r$ (рис. 4).

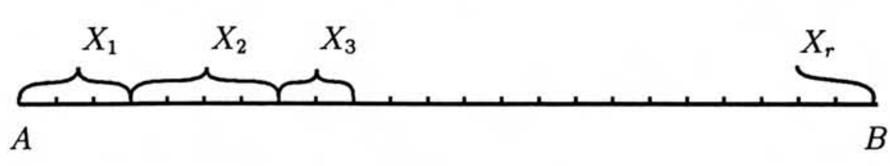


Рис. 4

В свою очередь, такое разбиение определяется правыми концами первых $r-1$ отрезков (конец последнего – точка B). Эти концы определяют подмножество N в множестве M целых точек отрезка, отличных от B. Ясно, что $n(N) = r-1$ и что таким образом мы определили взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений $x_1 + \ldots + x_r = n$ в натуральных числах и подмножествами $N \subset M$, где $n(N) = r-1$, $n(M) = n-1$. Значит, число таких решений равно числу таких подмножеств. Применяя формулу (9), мы получаем, что число этих решений равно C_{n-1}^{r-1}. Если мы не фиксируем число слагаемых, на которые разбивается число n, то число разбиений очевидно равно сумме разбиений на r слагаемых для $r = 1, \ldots, n$. Значит, число разбиений равно сумме всех биномиальных коэффициентов C_{n-1}^{r-1} при $r = 1, \ldots, n$. Мы знаем, что эта сумма равна 2^{n-1}. Иначе говоря, натуральное число n можно 2^{n-1} способами разбить на натуральные слагаемые (если допускать любое число слагаемых, причем учитывать и порядок слагаемых).

Вернемся теперь к выводу формулы (9). Использованный там прием – введение многочленов $f_M(x)$ – оказывается очень полезным и в других вопросах. К этому мы вернемся позже. Но саму формулу (9), вернее связь чисел $v(M, m)$ с биномиальными коэффициентами можно вывести и без этого приема. Рассмотрим выражение $(1 + x)^n$ как произведение n одинаковых множителей

$$(1 + x)^n = (1 + x)(1 + x) \cdot \ldots \cdot (1 + x). \tag{10}$$

Проанализируем процесс полного раскрытия всех скобок в выражении (10) Его множители мы занумеруем, то есть сопоставим им числа $1, 2, \ldots, n$, образующие множество $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Раскрывая скобки в произведении (10), мы должны перемножить каждый раз n членов 1 или x, беря их по одному из каждой скобки. Таким образом, каждый член развернутого выражения (10) определяется указанием того, из какой скобки мы взяли 1, а из какой x. Пусть x взято в данном члене из скобок с m номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Тогда из остальных $n - m$ скобок мы взяли 1 и в результате получили член x^m. Мы видим, что каждый член развернутого выражения (10) определяется подмножеством $N = \{i_1, \ldots, i_m\} \subset M$, которое указывает номера скобок, из которых взято слагаемое x. Из остальных скобок взято слагаемое 1. “Остальные” имеют номера, составляющие дополнение $\overline{N}$ множества N. Таким образом, мы получили член x^m столько раз, сколько существует подмножеств $N \subset M$ с числом элементов, равным m, то есть $v(M, m)$ раз. Следовательно, выражение (10) в развернутом виде есть сумма членов $v(M, m)x^m$:

$$(1 + x)^n = v(M, 0) + v(M, 1)x + \ldots + v(M, n)x^n.$$

Сопоставляя это с определением биноминальных коэффициентов (формула (20) главы II), мы получаем новое доказательство того, что $v(M, m) = C_n^m$.

Те же рассуждения можно применить и к более общему случаю. Рассмотрим произведение многочленов первой степени $x + a_i$, в которых за счет вынесения за скобку постоянного множителя мы предполагаем коэффициент при x равным 1. Попробуем представить произведение

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdot \ldots \cdot (x + a_n) \tag{11}$$

в виде многочлена относительно x. Как и раньше, перенумеруем n множителей. Тогда каждый член в развернутом произведении (11) получится за счет выбора тех сомножителей с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$, из которых мы выбираем слагаемые $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, в то время как из других $n - m$ сомножителей мы выбираем слагаемое x. Полученный член имеет вид $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m} x^{n-m}$, а после приведения подобных членов член степени $n - m$ будет иметь вид $\sigma_m(a_1, \ldots, a_n)x^{n-m}$, где

$\sigma_m(a_1,\ldots,a_n)$ – это сумма всех слагаемых вида $a_{i_1}\ldots a_{i_m}$, где $\{i_1,\ldots,i_m\}$ пробегает все наборы из m индексов из чисел $1,\ldots,n$. Многочлен $\sigma_m(a_1,\ldots,a_n)$ имеет следовательно C_n^m членов. Например, $\sigma_1(a_1,\ldots,a_n)=a_1+\ldots+a_n$, а $\sigma_2(a_1,\ldots,a_n)=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n$ – сумма всех произведений a_ia_j с $i<j$. Последний многочлен σ_n имеет вид $\sigma_n(a_1,\ldots,a_n)=a_1\cdot\ldots\cdot a_n$. Мы впервые столкнулись здесь с многочленами от произвольного числа – n – неизвестных. Многочлены $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ играют очень большую роль в алгебре. В частности, мы доказали формулу

$$(x+a_1)\cdot\ldots\cdot(x+a_n) \;= x^m+\sigma_1(a_1,\ldots,a_n)x^{n-1}+\sigma_2(a_1,\ldots,a_n)x^{n-2}+\ldots+\sigma_n(a_1,\ldots,a_n). \qquad (12)$$

Она называется формулой Виета.

Формула Виета выражает важное свойство многочленов. Предположим, что многочлен $f(x)$ степени n имеет n корней $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Тогда он, как мы уже не раз видели, делится на произведение $(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, а так как это произведение тоже имеет степень n, то $f(x)=c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$, где c — число. Предположим, что коэффициент при старшем члене многочлена $f(x)$ равен 1. Тогда и число c должно быть равным 1 и мы имеем равенство

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

К нему можно применить формулу Виета (12), полагая $a_i=-\alpha_i$. Так как все члены многочлена σ_k являются произведениями некоторых k неизвестных из числа неизвестных $a_1,\ldots,a_n$, то после подстановки вместо a_i чисел $-\alpha_i$ из многочлена σ_k вынесется множитель $(-1)^k$: $\sigma_k(-\alpha_1,\ldots,-\alpha_n)=(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Из формулы (12) мы получим тогда формулу

$$(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)=x^n-\sigma_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \qquad (13)$$

Она выражает коэффициенты многочлена $f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ через его корни и тоже называется формулой Виета. Вы знаете ее частный случай для квадратного уравнения: тогда есть только два многочлена σ_1 и σ_2, $\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\sigma_2=\alpha_1\alpha_2$.

В заключение обсудим еще раз формулу (9) для числа подмножеств (или числа сочетаний). Мы вывели ее из формулы бинома, которую, в свою очередь доказали в §3 гл. II, пользуясь свойствами производной. Это довольно длинный путь. Желательно иметь для нашей формулы и другое доказательство, основывающееся только на комбинаторных соображениях. Приведем такое доказательство, причем даже более общей формулы. Заметим, что каждое подмножество N множества M определяет разбиение $M=N+\overline{N}$, где $\overline{N}$ – дополнение множества N. Мы рассмотрим более общую ситуацию: произвольное разбиение $M=M_1+\ldots+M_r$ на подмножества с заданными числами элементов: $n(M_1)=n_1,\ \ldots,\ n(M_r)=n_r$. Последовательность чисел $(n_1,\ldots,n_r)$ будем называть *типом* разбиения $M=M_1+\ldots+M_r$. Мы будем считать, что ни одно из множеств M_i не пусто, а значит все $n_i>0$.

Рассматривая все время одно и то же множество M с $n(M)=n$, мы не будем отображать его в наших обозначениях. Число всевозможных разбиений нашего множества M, имеющих заданный тип $(n_1,\ldots,n_r)$, обозначим $C(n_1,\ldots,n_r)$.

Здесь, конечно, должно быть $n_1 + \ldots + n_r = n$. Заметим, что здесь учитывается и порядок множеств $M_1, \ldots, M_r$. Например, при $r = 2$ и заданных n_1 и n_2, $n_1 + n_2 = n$ мы считаем разными разбиения $M = M_1 + M_2$ и $M = M_2 + M_1$, если $n(M_1) = n_1, n(M_2) = n_2$. Если $n_1 \neq n_2$, эти разбиения имеют даже разные типы. Благодаря этому, каждое разбиение $M = M_1 + M_2$ определяет одно подмножество M_1 (первое), и мы имеем связь с рассмотренным ранее вопросом: $C(n_1, n_2) = v(M, n_1)$. Иначе говоря, для любого $m < n$, $v(M, m) = C(m, n - m)$. Выведем явную формулу для числа $C(n_1, \ldots, n_r)$. Рассмотрим произвольное разбиение $M = M_1 + \ldots + M_r$ типа $(n_1, \ldots, n_r)$. Предположим, что хоть одно из чисел $n_1, \ldots, n_r$ отлично от 1. Для конкретности предположим, что $n_1 > 1$ и выберем какой-то элемент $a \in M_1$. Обозначим через M_1' множество всех элементов из M_1, отличных от a (то есть дополнение множества $\{a\}$ как подмножества в множестве M_1). Тогда мы имеем разбиение $M_1 = M_1' + \{a\}$ и нашему разбиению $M = M_1 + \ldots + M_r$ соответствует новое разбиение $M = M_1' + \{a\} + M_2 + \ldots + M_r$, имеющее уже тип $(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$. Из всех разбиений типа $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ мы получаем таким образом **все** разбиения типа $(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$: разбиение $M = M_1' + \{a\} + M_2 + \ldots + M_r$ получается из разбиения $M = M_1 + \ldots + M_r$, где $M_1 = M_1' + \{a\}$. При этом одно разбиение типа $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ дает n_1 разных разбиений типа $(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$ за счет разных выборов элемента $a \in M_1$. Поэтому мы имеем соотношение

$$n_1 C(n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r). \tag{14}$$

Применяя это же соотношение к разбиениям типа $(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$, мы получим, что $(n_1 - 1)C(n_1 - 1, 1, n_2, \ldots, n_r) = C(n_1 - 2, 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$, то есть $n_1(n_1 - 1)C(n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(n_1 - 2, 1, 1, n_2, \ldots, n_r)$ и продолжая $n_1 - 1$ раз, придем к соотношению:

$$n_1! C(n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1 \text{ раз}}, n_2, \ldots, n_r).$$

Теперь то же рассуждение применим к параметру n_2 в $C(1, \ldots, 1, n_2, \ldots, n_r)$. Совершенно аналогично мы получаем соотношение $n_2! C(1, \ldots, 1, n_2, n_3, \ldots, n_r) = C(1, \ldots, 1, n_3, \ldots, n_r)$, где 1 занимает уже первые $n_1 + n_2$ мест и значит :

$$n_1! n_2! C(n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n_1 + n_2 \text{ раз}}, n_3, \ldots, n_r).$$

Поступая так со всеми параметрами $n_1, n_2, \ldots, n_r$ подряд мы получаем, наконец формулу:

$$n_1! n_2! \ldots n_r! C(n_1, n_2, \ldots, n_r) = C(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}}), \tag{15}$$

так как $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Нам остается найти значение выражения $C(1, \ldots, 1)$. Для этого заметим, что предшествующая формула доказана для разбиения всех типов $(n_1, \ldots, n_r)$. Применим ее к самому простому типу (n). Разбиение такого типа существует только одно: $M = M$, поэтому $C(n) = 1$. С другой стороны, по формуле (15)

$$n!C(n) = C(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n\,\text{раз}}).$$

Поэтому $C(1, \ldots, 1) = n!$ и подставляя это значение в формулу (15) получим окончательное выражение:

$$C(n_1, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}, \text{ где } \quad n = n_1 + \ldots + n_r. \tag{16}$$

При $r = 2$ вместо $(n_1, n_2), n_1 + n_2 = n$ привычнее писать $(m, n - m)$. Так как $C(m, n - m) = v(M, m)$, то формула (16) дает наше прежнее соотношение (9).

Замечание 1. Обратим внимание на выражение $C(1, \ldots, 1)$, с которым мы столкнулись в конце предшествующего рассуждения. Что значит разбиение типа $(1, \ldots, 1)$? Это разбиение множества M на одноэлементные подмножества. Но вспомните, что в разбиении $M = M_1 + \ldots + M_r$ играет роль и порядок множеств $M_1, \ldots, M_r$. Поэтому разбиение $M = \{a_1\} + \ldots + \{a_n\}$ приписывает определенные номера элементам множества M. Число $C(1, \ldots, 1)$ показывает, сколькими способами можно *занумеровать* элементы множества M. Если нагляднее представить себе нумерацию $a_1, \ldots, a_n$ этих элементов, записывая их в порядке роста номеров, то можно сказать, что $C(1, \ldots, 1)$ указывает, сколькими способами можно расположить элементы множества M в определенном порядке. Как мы видели, число таких расположений равно $n!$. Разные расположения называются также *перестановками*. Например, при $M = \{a, b, c\}$ и, значит, $n = 3$, мы имеем 6 перестановок:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Замечание 2. В случае $r = 2$ выражение $C(n_1, n_2)$ совпадает с биномиальным коэффициентом: мы привели даже два доказательства этого факта. Аналогичное истолкование имеет выражение $C(n_1, \ldots, n_r)$ при произвольном r. Можно доказать, что если $x_1, \ldots, x_r$ – неизвестные, то при полном развертывании выражения $(x_1 + \ldots + x_r)^n$ получаются члены вида $x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$ с $n_1 + \ldots + n_r = n$, n_i – целые, $n_i \geqslant 0$, причем член $x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$ войдет с коэффициентом $C(n_1, \ldots, n_r)$. Надо только вернуться к нашему первоначальному определению разбиения, допуская среди множеств M_i и пустое множество $\emptyset$, а среди чисел n_i – ноль. Легко убедиться, что формула (16) сохранится и в этом случае, если условиться полагать $0! = 1$. Доказательство этого обобщения формулы бинома на случай r слагаемых совершенно параллельно второму (комбинаторному) доказательству соотношения $v(M, m) = C_n^m$, (где $n = n(M)$), приведенному выше.

Например, эта формула даст, что $(x_1 + x_2 + x_3)^3$ равно сумме членов $C(n_1, n_2, n_3)x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$, где (n_1, n_2, n_3) пробегает все тройки неотрицательных чисел, для которых $n_1 + n_2 + n_3 = 3$, а $C(n_1, n_2, n_3)$ вычисляется по формуле (16) (с указанием условия $0! = 1$). Подстановка дает:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3.$$

Задачи

1. Пусть $I = \{p, q\}$ – множество из двух элементов, а M – множество из n элементов, которые как-то занумерованы: $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Сопоставим любому подмножеству $N \subset M$ элемент – "текст" из I^n, в котором на i-м месте стоит p, если $a_i \in N$ и q, если a_i не принадлежит N. Докажите, что таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами $U(M)$ и I^n. Выведите таким путем теорему 2 из теоремы 1.

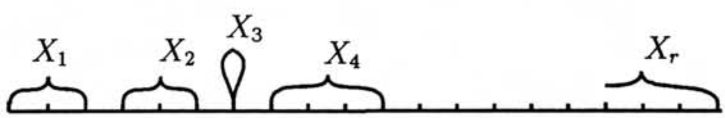
2. Как выражается пересечение и объединение подмножеств N_1 и N_2 множества M в терминах соответствующих им "текстов" из I^n (ср. задачу 1)?

3. Найти число всех разбиений $M_1 + \ldots + M_r$ всех типов, но с заданным числом r. Убедитесь, что при $r = 2$ ответ дает теорема 2.

4. Найти сумму всех чисел $C(n_1, \ldots, n_r)$ для всех $n_i \geqslant 0$, $n_1 + \ldots + n_r = n$ при заданных r и n. Дать два решения: исходя из задачи 3 и из утверждения, сформулированного в замечании 2.

5. Найти число разложений заданного натурального числа n в произведение r множителей: $n = a_1 \ldots a_r$, попарно взаимно простых.

6. Каково число решений уравнения $x_1 + \ldots + x_r = n$ при заданных n и r, если допускаются целые решения $x_i \geqslant 0$? Использовать следующее графическое представление решения, видоизменяющее то, которое представлено на рис. 4. Пусть AB – отрезок длины $n + r$. Сопоставим решению $(x_1, \ldots, x_r)$ разбиение этого отрезка, состоящее из отрезка длины x_1 с началом в точке A, отрезка длины x_2, начинающегося в следующей целой точке после конца первого отрезка и т.д., см. рисунок.



На рисунке $x_3 = 0$.

7. Найти число разных разбиений $M = M_1 + M_2$ типа (m, m), если $n(M) = 2m$ и разбиения $M = M_1 + M_2$ и $M = M_2 + M_1$ не считаются различными. Аналогичный вопрос для разбиений $M = M_1 + M_2 + M_3$ типа (m, m, m), если $n(M) = 3m$ и разбиения, отличающиеся порядком множеств M_1, M_2, M_3, не считаются различными. Наконец, тот же вопрос для разбиений типа (k, k, l, l, l), $n(M) = 2k + 3l$, и разбиения, отличающиеся порядком равномощных подмножеств, не считаются различными.

8. Из каких членов состоит многочлен $(x_1 + \ldots + x_n)^2$? Многочлен $(x_1 + \ldots + x_n)^3$?

9. Сколько членов содержится в многочлене $(x_1 + \ldots + x_r)^n$ после приведения подобных членов?

10. Выразить многочлен $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ через многочлены σ_1 и σ_2. Предположим, что многочлен $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ имеет n действительных корней. Доказать, что тогда $a^2 \geqslant 2b$. Когда имеет место равенство $a^2 = 2b$? Указание: воспользоваться теоремой Безу из §1 гл. II и тем, что сумма квадратов действительных чисел не может быть отрицательной.

11. Дать комбинаторное доказательство соотношения $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ между биномиальными коэффициентами (формула (26) гл. II), истолковывая C_n^k как $v(M,k)$, где $n(M) = n$. Найти обобщение этого соотношения на числа $C(n_1, \dots, n_r)$.
12. Дать комбинаторное доказательство соотношения $C_n^m = C_n^{n-m}$ между биномиальными коэффициентами.

Алгебра множеств

Если пересечение двух подмножеств $M_1 \subset M$ и $M_2 \subset M$ пусто (то есть $M_1 \cap M_2 = \emptyset$), то объединение $M_1 \cup M_2$ состоит из элементов, принадлежащих или M_1, или M_2, причем каждый элемент множества $M_1 \cup M_2$ может принадлежать только к одному из множеств M_1 или M_2. Поэтому $M_1 \cup M_2 = M_1 + M_2$ и, следовательно, $n(M_1 \cup M_2) = n(M_1) + n(M_2)$.

Случай, когда $M_1 \cap M_2$ не пусто, можно свести к уже рассмотренному. Обозначим через M_1' дополнение к $M_1 \cap M_2$ в M_1, то есть множество элементов из M_1, не принадлежащих $M_1 \cap M_2$. Тогда по предыдущему $M_1 = (M_1 \cap M_2) + M_1'$, и

$$n(M_1) = n(M_1 \cap M_2) + n(M_1'), \tag{17}$$

Аналогично

$$n(M_2) = n(M_1 \cap M_2) + n(M_2'), \tag{18}$$

где M_2' — дополнение к $M_1 \cap M_2$ в M_2. Складывая равенства (17) и (18), получим, что

$$n(M_1) + n(M_2) = 2n(M_1 \cap M_2) + n(M_1') + n(M_2'). \tag{19}$$

Но множества $M_1 \cap M_2$, M_1' и M_2' попарно не имеют общих элементов, а объединение их есть $M_1 \cup M_2$. Поэтому $M_1 \cup M_2 = M_1 \cap M_2 + M_1' + M_2'$ и, значит, $n(M_1 \cup M_2) = n(M_1 \cap M_2) + n(M_1') + n(M_2')$. Пользуясь этим, можно переписать равенство (19) так: $n(M_1) + n(M_2) = n(M_1 \cap M_2) + n(M_1 \cup M_2)$ или, иначе говоря,

$$n(M_1 \cup M_2) = n(M_1) + n(M_2) - n(M_1 \cap M_2). \tag{20}$$

Это и есть нужное нам соотношение. Наша дальнейшая цель — обобщить его, получив выражение для числа элементов объединения любого числа (а не только двух) подмножеств: $n(M_1 \cup \ldots \cup M_r)$. Для этого нужно сформулировать некоторые почти очевидные свойства пересечений и объединений нескольких подмножеств.

Прежде всего заметим, что объединение $M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_r$ нескольких подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_r$ можно определить, оперируя только с объединениями двух подмножеств. Например,

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (M_1 \cup M_2) \cup M_3,$$

и точно так же для любого числа k

$$M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_k = (M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_{k-1}) \cup M_k.$$

Другая необходимая нам формула имеет вид

$$(M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_k) \cap N = (M_1 \cap N) \cup (M_2 \cap N) \cup \ldots \cup (M_k \cap N).$$

Обе эти формулы очевидны, достаточно спросить себя: что означает, что элемент $a \in M$ принадлежит левой или правой части? Например, для последней формулы $a \in (M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_k) \cap N$ означает, что $a \in M_1 \cup M_2 \ldots \cup M_k$ и $a \in N$. Второе утверждение означает, что $a \in N$, а первое, что $a \in M_i$ для какого-то $i = 1, \ldots, k$. Но тогда $a \in M_i \cap N$ для того же i, а это и означает, что $a \in (M_1 \cap N) \cup (M_2 \cap N) \cup \ldots \cup (M_k \cap N)$. Заметим, что выведенное свойство похоже на свойство дистрибутивности для чисел: если бы вместо множеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$ и N мы имели числа $a_1, \ldots, a_k$ и b, вместо знака "$\cup$" писали "$+$", а вместо "$\cap$" – знак "$\cdot$", то получили бы равенство $(a_1 + \ldots + a_k)b = a_1 b + \ldots + a_k b$, означающее дистрибутивный (распределительный) закон для чисел. Есть и другие свойства, показывающие аналогию операций объединения и пересечения подмножеств со сложением и умножением чисел (см. задачу 1). Исследование системы подмножеств заданного множества M относительно операций $\cup$ и $\cap$ называется ***алгеброй множеств***.

Выведем теперь формулу для $n(M_1 \cup M_2 \cup M_3)$. Так как $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, то можно применить формулу (20). Мы получим:

$$n(M_1 \cup M_2 \cup M_3) = n((M_1 \cup M_2) \cup M_3) = n(M_1 \cup M_2) + n(M_3) - n((M_1 \cup M_2) \cap M_3)$$

Слагаемое $n(M_1 \bigcup M_2)$ мы можем прямо записать по формуле (20), а для преобразования последнего слагаемого заметим, что, как мы видели, $(M_1 \bigcup M_2) \bigcap M_3 = (M_1 \bigcap M_3) \bigcup (M_2 \bigcap M_3)$ и мы можем опять применить формулу (20). В результате мы получим:

$$\begin{aligned} n(M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3) &= n(M_1) + n(M_2) + n(M_3) \\ &\quad - n(M_1 \bigcap M_2) - n(M_1 \bigcap M_3) - n(M_2 \bigcap M_3) \\ &\quad + n((M_1 \bigcap M_3) \bigcap (M_2 \bigcap M_3)). \end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что $(M_1 \bigcap M_3) \bigcap (M_2 \bigcap M_3) = M_1 \bigcap M_2 \bigcap M_3$ и последнее слагаемое можно переписать как $n(M_1 \bigcap M_2 \bigcap M_3)$. Мы получаем формулу

$$\begin{aligned} n(M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3) &= n(M_1) + n(M_2) + n(M_3) \\ &\quad - n(M_1 \bigcap M_2) - n(M_1 \bigcap M_3) - n(M_2 \bigcap M_3) \\ &\quad + n(M_1 \bigcap M_2 \bigcap M_3). \end{aligned}$$

Теперь уже угадывается, как должна выглядеть формула для $n(M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r)$. В нее должны входить слагаемые $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$ для пересечений $M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k}$ любых k множеств из числа множеств $M_1, \ldots, M_r$ и для всех $k = 1, 2, \ldots, r$, причем слагаемые с четным k входят со знаком "$-$", а с нечетным – со знаком "$+$". То есть, член $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$ входит со знаком $(-1)^{k-1}$.

Эту формулу теперь можно доказать индукцией по числу r совершенно так же, как мы ее доказывали для $r = 3$. Базой индукции будет формула (20). Запишем

$M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_r$ в виде $(M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_{r-1}) \bigcup M_r$ и воспользуемся формулой (20):

$$\begin{aligned} n(M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_r) &= n(M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_{r-1}) + n(M_r) \\ &\quad -n((M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_{r-1}) \bigcap M_r) \end{aligned}$$

Для $n(M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_{r-1})$ формула верна по предположению индукции и дает как раз те слагаемые в формуле для $n(M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_r)$, в которые не входит M_r. Напишем теперь

$$(M_1 \bigcup M_2 \bigcup \ldots \bigcup M_{r-1}) \bigcap M_r = (M_1 \bigcap M_r) \bigcup (M_2 \bigcap M_r) \bigcup \ldots \bigcup (M_{r-1} \bigcap M_r).$$

К выражению $n((M_1 \bigcap M_r) \bigcup \ldots \bigcup (M_{r-1} \bigcap M_r))$ мы можем опять применить нашу формулу согласно индуктивному предположению. Пересечение

$$(M_{i_1} \bigcap M_r) \bigcap \ldots \bigcap (M_{i_k} \bigcap M_r)$$

равно, очевидно, просто $M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k} \bigcap M_r$, и так мы получаем все члены в формуле, в которые входит M_r, причем если соответствующий член входил в формулу для $n((M_1 \bigcap M_r) \bigcup \ldots \bigcup (M_{r-1} \bigcap M_r))$ со знаком $(-1)^{r-1}$, то в формулу для $n(M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r)$ он будет входить со знаком $(-1)^r$ и зависеть будет от $k+1$ множеств $M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k} \bigcap M_r$.

Выведенную формулу для $n(M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r)$ удобнее записать, если говорить о числе элементов дополнения $\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}$ множества $M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r$, то есть о числе элементов множества M, не принадлежащих ни одному из подмножеств M_i. Так как для любого подмножества $N \subset M$ всегда $M = N + \overline{N}$, то $n(\overline{N}) = n(M) - n(N)$. В нашем случае $n(\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r})$ будет суммой членов $(-1)^k n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$, где $M_{i_1}, \ldots, M_{i_k}$ являются любыми k подмножествами из числа $M_1, \ldots, M_r$, а при $k = 0$ мы полагаем соответствующий член равным $n(M)$. Иначе говоря,

$$\begin{aligned} n(\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}) &= n - n(M_1) - \ldots - n(M_r) \\ &\quad + n(M_1 \bigcap M_2) + \ldots \\ &\quad + (-1)^r n(M_1 \bigcap \ldots \bigcap M_r), \\ \text{где} \quad & n = n(M). \end{aligned} \tag{21}$$

В эту формулу входят выражения $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$, где $i_1, \ldots, i_k$ пробегают все наборы из k индексов из набора $1, 2, \ldots, n$. Такие выражения нам встречались в связи с формулой Виета (формула (12)). Поучительно сравнить эти две формулы. Формула (21) выглядит в точности так, как если бы мы положили в формуле (12) $x = 1$, $a_i = -x_i$, а потом заменили всюду член $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ на $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$. Иногда ее так и записывают (как говорят, "символически")

$$n(\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}) = n(1 - M_1) \cdot \ldots \cdot (1 - M_r), \tag{22}$$

где предполагается, что произведение справа раскрывается по формуле Виета как будто M_i – неизвестные, а потом выражение $n \cdot M_{i_1} \ldots M_{i_k}$ (смысл которого непонятен) заменяется на имеющее смысл выражение $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$ ($n \cdot 1$ заменяется на $n = n(M)$).

Такая запись может служить для лучшего запоминания соотношения (21), но в алгебре, если два соотношения, относящиеся к разным вопросам имеют совершенно одинаковый вид, то **всегда** удается придумать такие определения, чтобы одна формула в точности совпала со второй. Мы покажем это на примере формул (21), (22) и формулы Виета (13).

Для этого нам надо рассмотреть функции на множестве M. Понятие функции вам, безусловно, уже встречалось – в той или иной ситуации. Мы будем понимать под функцией любое сопоставление каждому элементу $a \in M$ множества M некоторого числа. Сам процесс сопоставления мы будем обозначать через f, а конкретное число, сопоставляемое элементу a в этом процессе, через $f(a)$. Оно называется также *значением* функции f в элементе a. Такое понятие имеет смысл для произвольного множества, но нас сейчас оно будет интересовать для случая, когда множество M конечно. Тогда функцию можно зафиксировать, записав над элементом a сопоставляемое ему число $f(a)$. Например, вот две функции f и g, определенные на множестве из трех элементов $M = \{a, b, c\}$ (рис. 12).

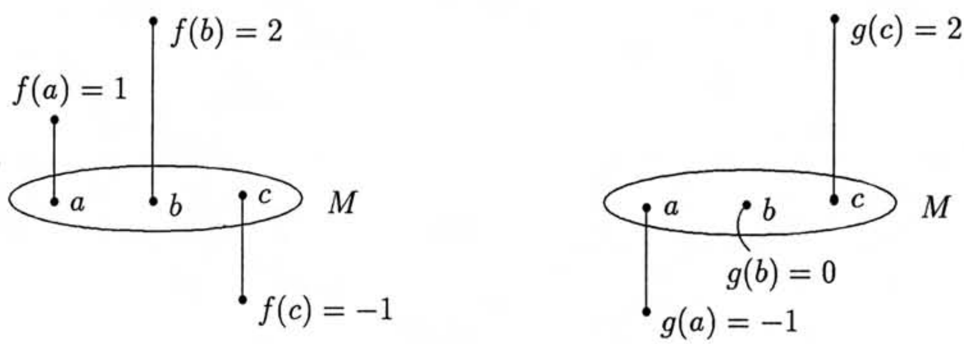


Рис. 12

Таким образом, если $M = \{a_1, \ldots, a_1\}$, то функция – это просто набор чисел $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Функции можно складывать и умножать, производя те же операции с их значениями. Другими словами, если f и g – две функции, то функции $f + g$ и fg определены тем, что $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ и $(fg)(a) = f(a)g(a)$ для любого элемента. Например, функции $f+g$ и fg для функций f и g, изображенных на рисунке 12, изображаются так (рис. 13):

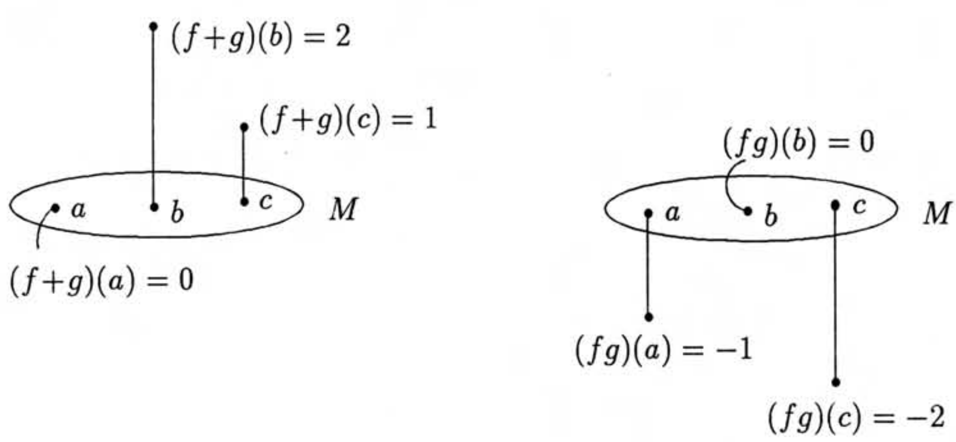


Рис. 13

Так как действия над функциями производятся на самом деле над их значениями, то они обладают теми же самыми свойствами, что и действия над числами: коммутативностью, ассоциативностью, дистрибутивностью и т.д. Мы можем применять любое тождество, доказанное для чисел, заменяя входящие в него величины произвольными функциями на заданном множестве M. Функция $f_M(a)$, сопоставляющая 1 любому элементу $a \in M$, обозначается $\mathbf{1}$. Очевидно, что $\mathbf{1} \cdot f = f$ для любой функции f.

Теперь свяжем понятие функции с понятием подмножества. Любому подмножеству $N \subset M$ соответствует определенная функция, сопоставляющая значение 1 элементам, принадлежащих подмножеству N и значение 0 элементам, ему не принадлежащим. Эта функция называется *характеристической функцией* подмножества N и обозначается f_N. Коротко $f_N(a) = 1$, если $a \in N$, и $f_N(a) = 0$, если $a \in \overline{N}$. Очевидно, что, обратно, функция $f_N(a)$ определяет множество N – это все $a \in M$, для которых $f_N(a) = 1$. (Таким образом мы получаем взаимно однозначное соответствие между подмножествами $N \subset M$ и функциями, принимающими значение 0 и 1. Это то же самое соответствие, которое дает возможность вывести теорему 1 из теоремы 2. См. задачу 1 к §2, где p и q надо заменить на 0 и 1.)

Некоторые свойства подмножеств просто выражаются через их характеристические функции. Например, характеристическая функция всего множества M имеет все значения равные 1 и, значит, $f_M = \mathbf{1}$. Если $\overline{N}$ – дополнение множества N, то $f_{\overline{N}} = \mathbf{1} - f_N$: действительно, для $a \in N \quad f_N(a) = 1$, тогда $(\mathbf{1} - f_N(a)) = 0$, как и должно быть для $f_{\overline{N}}$. Аналогично для $a \in \overline{N}$. Если N_1 и N_2 – любые подмножества, то $f_{N_1 \bigcap N_2} = f_{N_1} \cdot f_{N_2}$, так как если $a \in N_1$ и $a \in N_2$, то $f_{N_1} f_{N_2}(a) = 1 \cdot 1 = 1$, как и должно быть для $f_{N_1} f_{N_2}$, а если a не принадлежит к одному из множеств N_1 и N_2, то один из множителей f_{N_1} или f_{N_2} равен 0 и, значит, $f_{N_1} f_{N_2}(a) = 0$, как и $f_{N_1 \bigcap N_2}(a) = 0$. Ясно, что это верно и для большего числа подмножеств:

$$\text{если } N' = N_1 \bigcap \ldots \bigcap N_r, \text{ то } f_{N'} = f_{N_1} \ldots f_{N_r}. \tag{23}$$

Теперь мы можем переписать формулу (21) на языке характеристических функций. Прежде всего заметим, что интересующее нас множество $\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}$ равно $\overline{M_1} \bigcap \ldots \bigcap \overline{M_r}$. Это очевидно: элемент a не принадлежит множеству $M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r$, если он не принадлежит ни одному из множеств M_i, то есть принадлежит всем $\overline{M_i}$. Теперь мы можем записать характеристическую функцию искомого множества $\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}$ в таком виде:

$$f_{\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}} = f_{\overline{M_1} \bigcap \ldots \bigcap \overline{M_r}} = f_{\overline{M_1}} \cdot \ldots \cdot f_{\overline{M_r}},$$

используя формулу (23). Кроме того, мы знаем, что $f_{\overline{M_i}} = \mathbf{1} - f_{M_i}$, и в результате получаем:

$$f_{\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r}} = (\mathbf{1} - f_{M_1})(\mathbf{1} - f_{M_2}) \ldots (\mathbf{1} - f_{M_r}).$$

Теперь мы можем применить формулу Виета (13), положив в ней $x = \mathbf{1}$, $a_i = f_{M_i}$. Почему эту формулу можно применить к функциям, мы пояснили выше. В результате получим:

$$
\begin{aligned}
f_{\overline{M_1 \bigcup \dots \bigcup M_r}} &= \mathbf{1} - \sigma_1(f_{M_1}, \dots, f_{M_r}) + \sigma_2(f_{M_1}, \dots, f_{M_r}) \\
&\quad - \dots + (-1)^r \sigma_r(f_{M_1}, \dots, f_{M_r}).
\end{aligned}
$$

При этом $\sigma_k(f_{M_1}, \dots, f_{M_r})$ есть сумма всех произведений $f_{M_{i_1}} \dots f_{M_{i_k}}$ для всех наборов различных индексов $(i_1, \dots, i_k)$ из набора $(1, \dots, n)$. Мы знаем, что $f_{M_{i_1}} \dots f_{M_{i_k}} = f_{M_{i_1} \bigcap \dots \bigcap M_{i_k}}$ и получаем, что

$$
\begin{aligned}
f_{\overline{M_1 \bigcup \dots \bigcup M_r}} &= \mathbf{1} - f_{M_1} - \dots - f_{M_r} \\
&\quad + f_{M_1 \bigcap M_2} + \dots + (-1)^r f_{M_1 \bigcap \dots \bigcap M_r}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

то есть является суммой всех функций $f_{M_{i_1} \bigcap \dots \bigcap M_{i_k}}$, которые берутся со знаком "+" при четном k, и со знаком "−" при нечетном k.

Заметьте, что мы получили собственно нечто большее, чем формула (21): мы нашли выражение не для числа элементов $n(\overline{M_1 \bigcup \dots \bigcup M_r})$ подмножества $\overline{M_1 \bigcup \dots \bigcup M_r}$, но для его характеристической функции, которая определяет не только число элементов подмножества, но и все его. В частности, формула (21) имеет смысл, только когда объемлющее множество M конечно, а найденное нами соотношение (24) справедливо для конечного числа любых подмножеств любого множества M.

Чтобы вывести из него соотношение (21), надо вернуться от функций к числам. Здесь уже существенно, что множество M конечно. Для любой функции f определим число Sf как сумму всех значений $f(a)$ функции f для всех элементов $a \in M$: если $M = \{a_1, \dots, a_n\}$, то $Sf = f(a_1) + \dots + f(a_n)$. Например, для функций f и g на рис. 1 $Sf = 2$, $Sg = 1$. Очевидно, что $S(f+g) = Sf + Sg$ для любых двух функций f и g. Действительно, значение функции $f+g$ в элементе a_i равно $f(a_i) + g(a_i)$. Поэтому, $S(f+g) = (f(a_1) + g(a_1)) + \dots + (f(a_n) + g(a_n)) = (f(a_1) + \dots + f(a_n)) + (g(a_1) + \dots + g(a_n)) = Sf + Sg$. Если f_N – характеристическая функция подмножества N, то $f_N(a) = 1$ в точности для элементов $a \in N$, а для остальных элементов a она равна 0, поэтому $Sf_N = n(N)$.

Остается рассмотреть число Sf для функций, стоящих в левой и правой частях равенства (24). В силу указанных свойств мы в точности получим соотношение (21).

Рассмотрим теперь два приложения формулы (21). Первое – это вопрос, рассмотренный еще Эйлером. Он касается перестановок множества. Мы говорили в конце прошлого параграфа (замечание 1), что так называют расположение элементов множества M в определенном порядке. Число перестановок равно $n!$, если $n(M) = n$. В конце §2 выписаны, например, все 6 перестановок множества $M = \{a, b, c\}$ из трех элементов. В общем случае выпишем также все $n!$ перестановок множества M, первую из них обозначим $(a_1, \dots, a_n)$ и зададимся вопросом: сколько существует перестановок, в которых ни один элемент не занимает то же место, что и в первой? Это и есть вопрос Эйлера. Решите его в случае $n = 3$ и шести перестановок, выписанных в конце §2. Убедитесь, что нужному условию удовлетворяют только две перестановки: (c, a, b) и (b, c, a).

В общем случае мы имеем явное упражнение на формулу (21). Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех перестановок элементов множества $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Теперь $n(\mathcal{P}) = n!$. Рассмотрим перестановки, в которых элемент a_i стоит на том же месте, что и в первой перестановке, то есть на i-м. Множество таких перестановок обозначим через $\mathcal{P}_i$. Тогда смысл нашего вопроса таков: найти $n(\overline{\mathcal{P}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathcal{P}_n})$. (Осознайте, что это так, доказывать тут нечего.) Таким образом, мы имеем рассмотренную выше ситуацию с объемлющим множеством $\mathcal{P}$ и подмножествами $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ (в формуле (21) множество обозначалось M, а подмножества – M_i). Для применения формулы надо найти числа $n(\mathcal{P}_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{P}_{i_k})$. Но множество $\mathcal{P}_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{P}_{i_k}$ состоит в точности из перестановок, в которых $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ находятся на тех же местах, что и в первой перестановке, то есть соответственно на месте $i_1, \ldots, i_k$. Такая перестановка отличается от первой только расположением элементов на оставшихся местах. То есть, таких перестановок столько, сколько всего перестановок множества $\overline{\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}}$. Так как $n(\overline{\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}}) = n - k$, то по общей формуле $n(\mathcal{P}_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{P}_{i_k}) = (n-k)!$. Все множества $\mathcal{P}_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap \mathcal{P}_{i_k}$ с одним k, следовательно, дают одинаковый член в формуле (21), а число таких членов равно числу подмножеств $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \subset \{a_1, \ldots, a_n\}$ с заданным значением k, то есть, согласно теореме 3, C_n^k. Значит, вклад членов, соответствующих заданному значению k, равен $C_n^k(n-k)!$. Подставляя значение биномиального коэффициента, мы получим $\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$ и формула (21) дает в нашем случае

$$\begin{aligned} n(\overline{\mathcal{P}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathcal{P}_n}) &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \end{aligned}$$

Это и есть формула, найденная Эйлером. Его интересовала “доля” таких перестановок среди всех перестановок, то есть отношение этого числа к $n!$. Она равна числу $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$, которое с увеличением n, как можно доказать, приближается к определенному числу, а именно к $\frac{1}{e}$, где e – основание натуральных логарифмов (для тех, кто уже знает что это такое). Число $\frac{1}{e}$ иррационально и приблизительно равно 0,36787....

Второе приложение формулы (21) относится к свойствам натуральных чисел. Пусть сначала n – натуральное число, и $p_1, \ldots, p_r$ – некоторые его простые делители, различные между собой. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел p_i? Это опять упражнение на формулу (21). Обозначим через M – множество натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$, а через M_i – множество тех из них, которые делятся на p_i. Ясно, что наша задача равносильна вычислению $n(\overline{M_1 \bigcup \ldots \bigcup M_r})$. Найдем значение слагаемых $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k})$ в формуле (21). Множество $M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k}$ состоит из тех натуральных чисел $t \leqslant n$, которые делятся на простые числа $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$. Это равносильно тому, что t делится на их произведение $p_{i_1} \ldots p_{i_k}$. Пусть вообще m – некоторый делитель n. Сколько существует натуральных чисел $t \leqslant n$, делящихся на m? Такие числа имеют вид $t = mu$, где u – натуральное число, а условие $t \leqslant n$ равносильно тому, что $u \leqslant \frac{n}{m}$. Таким образом, для u возможны значения $1, 2, \ldots, \frac{n}{m}$ и число таких чисел равно $\frac{n}{m}$. Если $m = p_{i_1} \ldots p_{i_k}$, то это дает нам, что $n(M_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap M_{i_k}) = \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}$ и формула (21) приобретает вид

$$n(\overline{M_1 \cup \ldots \cup M_r}) = n - \frac{n}{p_1} - \ldots - \frac{n}{p_r} + \frac{n}{p_1 p_2} + \ldots + (-1)^r \frac{n}{p_1 \ldots p_r}.$$

Правую часть можно записать в виде

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \ldots + \frac{1}{p_1 p_2} + \ldots + (-1)^r \frac{n}{p_1 \ldots p_r}\right).$$

Выражение в скобках можно преобразовать по формуле Виета (теперь уже примененной просто к числам), в которой мы положим $x = 1$, $\alpha_i = -\frac{1}{p_i}$. Это выражение будет равно (по формуле (13))

$$(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Для общего числа натуральных чисел, не превосходящих n и не делящихся на $p_1, p_2, \ldots p_r$, мы получим выражение

$$n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r}). \tag{25}$$

Особенно часто встречается случай, когда $p_1, \ldots, p_r$ – это все простые делители числа n. Тогда t не делится ни на одно из p_i тогда и только тогда, когда оно взаимно просто с n: если бы оно имело общий делитель d с n, то этот делитель имел бы простой делитель p_i, который делил бы t и был бы делителем n. Таким образом, формула (25) дает число всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n – если за $p_1, \ldots, p_r$ в ней мы возьмем все простые делители числа n. Выражение (25) было в этом случае найдено Эйлером, оно обозначается через $\varphi(n)$ и называется *функцией Эйлера*. Например, при $n = 675 = 3^3 \cdot 5^2$ мы имеем $n(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 3^2 \cdot 5(3-1)(5-1) = 360$ чисел, не превосходящих 675 и взаимно простых с этим числом.

Предположим теперь, что $p_1, \ldots, p_r$ не обязательно делят n. Каково число натуральных чисел $t \leqslant n$, не делящихся на $p_1, \ldots, p_r$? Мы можем повторить предшествующее рассуждение, но с изменением в одном месте. Нам надо найти число натуральных чисел $t \leqslant n$, делящихся на $p_{i_1} \ldots p_{i_r}$. Пусть m – любое натуральное число. Сколько существует натуральных чисел $t \leqslant n$, делящихся на m? Опять полагаем $t = mu$ и записываем условие $mu \leqslant n$. Таким образом, нам надо взять все числа $u = 1, 2, \ldots$, такие, что $mu \leqslant n$. Пусть u – последнее из таких чисел. Тогда $r = n - mu < m$, иначе подходило бы еще и число $mu + m = m(u+1)$. Но тогда $n = mu + r$, где $0 \leqslant r < m$ — это и есть формула деления с остатком n на m (см.теорему 4 гл. I) Значит, искомое число u равно неполному частному от деления n на m. Это неполное частное обозначается через $[n/m]$. Таким образом, число натуральных чисел, не превосходящих n и делящихся на m, равно $[n/m]$. Теперь можно дословно повторить предшествующее рассуждение и применить формулу

(21). Для числа натуральных чисел, не превосходящих n и делящихся на $p_1, \dots, p_r$, мы получаем выражение:

$$n - \left[\frac{n}{p_1}\right] - \left[\frac{n}{p_2}\right] - \dots + \left[\frac{n}{p_1 p_2}\right] + \dots + (-1)^r \left[\frac{n}{p_1 \dots p_r}\right]. \qquad (26)$$

Оно не так изящно, как выражение (25), но его можно записать в таком же виде приближенно. Для этого вспомним формулу деления с остатком: $n = mu + r$, где $0 \leqslant r < m$, а $u = [n/m]$ – неполное частное. Разделив это равенство на n, получим: $\frac{n}{m} = u + \frac{r}{m}$ и так как $0 \leqslant r < m$, то $\frac{n}{m} - 1 < [\frac{n}{m}] < \frac{n}{m}$. То есть неполное частное можно заменить на частное, допустив ошибку, меньшую 1. Сделаем такую замену во всех членах выражения (26). Какая получится ошибка? Каждый член выражения (26) соответствует подмножеству $\{i_1, \dots, i_k\}$ множества $\{1, \dots, r\}$. Согласно теореме 2 число таких подмножеств равно 2^r. Значит, таково число членов в выражении (26). Если каждый из них при замене неполного частного на частное дает ошибку меньшую 1, то общая ошибка будет меньше 2^r. То есть выражение (26) отличается от

$$n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \dots + \frac{n}{p_1 p_2} + \dots + (-1)^r \frac{n}{p_1 \dots p_r} \qquad (27)$$

меньше, чем на 2^r. Последнее выражение нам уже встречалось и мы видели, что оно равно

$$n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Таким образом, мы получаем, что для числа N натуральных чисел не превосходящих n и не делящихся на заданные простые числа $p_1, \dots, p_r$, выполняется неравенство

$$|N - n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r})| < 2^r. \qquad (28)$$

Например, если мы имеем три простых числа p, q, r, то N равно $n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{r})$ с ошибкой, меньшей 8.

Задачи

1. Убедитесь в правильности соотношений $M_1 \bigcap \dots \bigcap M_k = (M_1 \bigcap \dots \bigcap M_{k-1}) \bigcap M_k$ и $(M_1 \bigcap \dots \bigcap M_k) \bigcup N = (M_1 \bigcup N) \bigcap \dots \bigcap (M_k \bigcup N)$. Второе из них опять является аналогом дистрибутивного закона для чисел $(a_1 + \dots + a_k)b = a_1 b + \dots + a_k b$, но теперь роль умножения играет операция $\bigcup$, а роль сложения – операция $\bigcap$.

2. Убедитесь, что вообще любому соотношению между подмножествами, в которые входят операции $\bigcup$ и $\bigcap$, соответствует другое, в котором эти операции поменялись местами. Для этого докажите, что $\overline{M_1 \bigcup M_2} = \overline{M_1} \bigcap \overline{M_2}$ и $\overline{M_1 \bigcap M_2} = \overline{M_1} \bigcup \overline{M_2}$.

3. Сколько раз обращается в 0 функция $\sin ax$ на отрезке от 0 до $2\pi b$, где $0 < a < b$, a и b – натуральные числа?

4. Для натуральных чисел $a_1, \dots, a_m$ выражение $\max(a_1, \dots, a_m)$ обозначает наибольшее из них, а $\min(a_1, \dots, a_m)$ – наименьшее. Пусть $N = \max(a_1, \dots, a_n)$. Для

множества $M = \{1, \ldots, N\}$ определим M_i как подмножество из тех j, для которых $a_j < a_i$. Применяя формулу (21) найти соотношение между $\max(a_1, \ldots, a_n)$ и $\min(a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})$, где $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$ - подмножество множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
5. Примените формулу (21), положив $M_i = \overline{\{a_i\}}$. Вычислив непосредственно все входящие в нее члены, получите соотношение

$$n - C_n^1(n-1) + C_n^2(n-2) + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \cdot 1 = 0$$

6. Пусть M — конечное множество, h - произвольная функция на M. Для подмножества $N \subset M$ введем число $S_h(N)$ как сумму всех значений $h(a)$ для всех $a \in N$. Докажите формулу, аналогичную (21), где $n(N)$ всюду заменено на $h(N)$. Указание: умножить соотношение (24) на функцию h.
7. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Указание: применить результат задачи 4, положив $h(k) = k$.
8. То же для суммы квадратов этих чисел.
9. Докажите, что в правой части неравенства (28) можно заменить 2^r на 2^{r-1}.

Язык вероятностей

Теория вероятностей, как и всякая область математики, имеет свои основополагающие понятия, которые не подлежат определению — подобно точке или числу. Первым таким понятием является *событие*. В этом параграфе мы рассмотрим ситуацию, когда число событий конечно. Обычно каждое событие есть результат наступления нескольких простейших событий, которые называются *элементарными*. Например, при бросании игральной кости возможны 6 элементарных событий: выпадание числа 1, числа 2, числа 3, числа 4, числа 5, числа 6. Событие, заключающееся в том, что выпало четное число, состоит из трех элементарных: либо выпало число 2, либо 4, либо 6. Множество элементарных событий — это просто множество (для настоящего параграфа — конечное), элементам которого присвоено новое название (элементарные события). Событие — это *подмножество* множества элементарных событий. Вторым основным понятием является понятие *вероятности*: это действительное число, сопоставляемое каждому элементарному событию. Таким образом, если $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ есть множество элементарных событий, то задание вероятности — это сопоставление каждому элементу $a_i \in M$ вещественного числа p_i, которое и называется вероятностью события a_i. Требуется, чтобы вероятности удовлетворяли двум условиям: они должны быть неотрицательны и сумма вероятностей всех элементарных событий должна быть равна 1:

$$p_i \geqslant 0, \quad p_i + \ldots + p_n = 1 \tag{28}$$

Другими словами, вероятность — это функция $p(a)$ на множестве элементарных событий M, с вещественными значениями, удовлетворяющая условиям: $p(a) \geqslant 0$ для $a \in M$ и сумма всех чисел $p(a)$ для $a \in M$ равна 1. Эти условия играют роль аксиом вероятности. Если N — произвольное событие (напомним, что событие — это подмножество множества M), то его *вероятностью* называется сумма чисел $p(a)$

для всех $a \in N$. Эта вероятность обозначается $p(N)$. В частном случае, когда $N = M$, соответствующее событие называется *достоверным*. Условие (28) показывает, что вероятность достоверного события равна 1. Условие $p(M) = 1$ не существенно, важно лишь, что $p(M) > 0$. Произвольный случай можно свести к случаю $p(M) = 1$, поделив все вероятности на $p(M)$. Мы просто выбираем вероятность достоверного события за единицу измерения вероятностей других событий. Подчеркнем, что объект, изучаемый теорией вероятностей — это множество (для нас — конечное) элементарных событий с заданными вероятностями. Это множество и вероятности берутся из конкретных условий той или иной задачи. После того, как они заданы, можно вычислять вероятности других событий. Поэтому специалисты по теории вероятности говорят, что ее задача – находить вероятности одних событий по вероятностям других.

Если заданы два события – а мы помним, что это означает просто два подмножества N_1 и N_2 множества M, – то их объединение $N_1 \cup N_2$ и пересечение $N_1 \cap N_2$ также являются событиями. Из определения следует, что $p(N_1 \cup N_2) \leqslant p(N_1) + p(N_2)$. Здесь может не иметь место равенство, так как в $p(N_1) + p(N_2)$ два раза встречается слагаемое $p(a)$, где $a \in N_1 \cap N_2$. Можно сказать точнее, что

$$p(N_1 \cup N_2) = p(N_1) + p(N_2) - p(N_1 \cap N_2).$$

С таким соотношением мы сталкивались раньше (см. задачу 6 к §3). В частности, если $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, то есть, N_1 и N_2 не пересекаются, то события N_1 и N_2 называются *несовместными*. Тогда $p(N_1 \cup N_2) = p(N_1) + p(N_2)$. Еще более частный случай, когда $N_1 = N$ есть произвольное подмножество, а $N_2 = \overline{N}$ – его дополнение. Мы получаем, что $p(N) + p(\overline{N}) = 1$ или $p(\overline{N}) = 1 - p(N)$. Событие $\overline{N}$ называется *противоположным* событию N.

Основной объект: множество M и заданная на нем функция p, удовлетворяющая аксиомам вероятности (28), называется *вероятностной схемой*. Она обозначается $(M; p)$.

Один важный случай задания вероятностной схемы заключается в том, что все элементы множества M равноправны (например, ввиду симметрии условий задачи). Тогда полагают все числа p_i равными друг другу. Из соотношения (28) вытекает, что все p_i равны $\frac{1}{n}$. Если $N \subset M$ – любое событие, то $p(N) = \frac{n(N)}{n}$. Так обстоит дело, например, при бросании кости, если кубик симметричен (шулеры смещали его центр тяжести). Таким образом, все 6 элементарных событий, соответствующих выпадению того или иного числа, имеют равную вероятность $\frac{1}{6}$, а событие – выпадение четного числа – имеет вероятность $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Если же кубик неоднородный, мы не имеем основания считать все элементарные события равноправными. Тогда их вероятности определяют экспериментально, бросая кубик много раз и фиксируя результат. Если после большого числа n бросаний число i выпало k_i раз, то вероятность элементарного события — выпадения числа i — полагается равной $\frac{k_i}{n}$. Очевидно, что условия (28) будут выполнены. Число n выбирается в зависимости от точности, которая нас интересует. Так получается другая вероятностная схема $(M; p)$.

Аналогично случаю бросания симметричного кубика (кости) обстоит дело с излюбленной в теории вероятности задачей о вытаскивании шаров из урны. Пусть в урне лежит n одинаковых шаров и из нее, не глядя, извлекают один из них. Извлечение того или иного шара является элементарным событием. Можно считать, что мы отождествляем элементарные события и шары. Словосочетание "одинаковые шары" математически формулируется как условие того, что вероятности этих событий равны. Значит, они все равны $\frac{1}{n}$. Пусть теперь в урне имеются шары разного цвета: a черных и b белых, $a+b=n$. Тогда событие "из урны вынут белый шар" есть подмножество $N \subset M$ белых шаров. Так как $n(N)=b$, то $p(N)=\frac{b}{n}$ — такова вероятность вынуть белый шар.

Несколько сложнее обстоит дело с задачей о бросании кости, если кость бросают два раза. Здесь элементарное событие будет задаваться двумя числами (a,b), где $1 \leqslant a \leqslant 6$, $1 \leqslant b \leqslant 6$, которые указывают, что при первом бросании выпало число a, а при втором — b. Всего число n элементарных событий равно 36. Их можно изобразить в виде таблицы,

1						
2						
3						
4		*				
5						
6						
	6	5	4	3	2	1

Таблица 1

где по горизонтали внизу записаны возможные исходы первого испытания, а по вертикали слева — второго. Например, элементарное событие, заключающееся в том, что в первом испытании выпало 5, а во втором — 4, соответствует клеточке, отмеченной звездочкой. Событие, заключающееся в том, что в первом испытании выпало 5, опять имеет вероятность $\frac{1}{6}$. Но оно теперь уже не является элементарным: оно состоит из шести элементарных событий, соответствующих клеточкам вертикального столбца, расположенного над числом 5. Они соответствуют выпаданию того или иного числа i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ во втором бросании, если в первом бросании выпало 5. Так как результат первого бросания не влияет на второе, а кубик по-прежнему симметричный, то мы заключаем, что все 6 элементарных событий имеют одинаковую вероятность, а так как вероятность состоящего из них события равна $\frac{1}{6}$, то вероятность каждого равна $\frac{1}{36}$. Так мы убеждаемся, что вероятность любого элементарного события равна $\frac{1}{36}$.

Рассмотрим событие N_k: "сумма чисел, выпавших при первом и втором бросании, равна k" ("общий выигрыш равен k"). Перепишем все пары (a,b), указав в каждой клетке сумму $a+b$:

a							
1	7	6	5	4	3	2	
2	8	7	6	5	4	3	
3	9	8	7	6	5	4	
4	10	9	8	7	6	5	
5	11	10	9	8	7	6	
6	12	11	10	9	8	7	
	6	5	4	3	2	1	b

Таблица 2

Мы видим, что 12 стоит в одной клетке, поэтому $n(N_{12}) = 1$, точно так же $n(N_{11}) = 2$, $n(N_{10}) = 3$, $n(N_9) = 4$, $n(N_8) = 5$, $n(N_7) = 6$, $n(N_6) = 5$, $n(N_5) = 4$, $n(N_4) = 3$, $n(N_3) = 2$, $n(N_2) = 1$. Наибольшее значение имеет $n(N_7)$, а так как $p(N_k) = \frac{n(N_k)}{36}$, то и $p(N_7)$ имеет наибольшее значение среди всех $p(N_k)$. Иначе говоря, наиболее вероятный общий выигрыш при двух бросаниях равен 7.

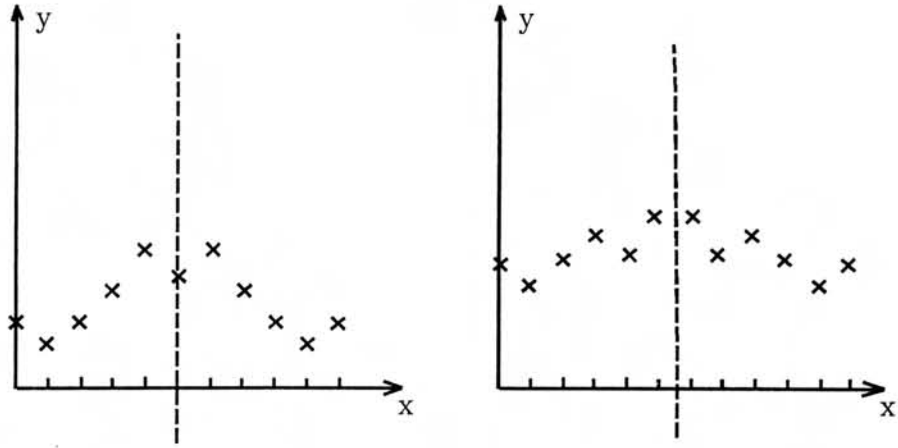
А каков ответ в случае n бросаний? Здесь элементарное событие задается последовательностью n чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, каждое из которых может принимать значения $1, 2, \ldots, 6$. Те же рассуждения показывают, что вероятности их равны $\frac{1}{6^n}$. Событие N_k: "сумма выигрышей при всех бросаниях равна k", состоит из всех таких последовательностей, для которых $a_1 + \ldots + a_n = k$. Таким образом, мы должны выяснить, какое число k имеет наибольшее число представлений в виде

$$k = a_1 + \ldots + a_n, \quad 1 \leqslant a_i \leqslant 6. \tag{29}$$

Для этого рассмотрим многочлен $F(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^n$. Перемножая скобки, мы из i-й скобки будем брать член x^{a_i} и в результате получим член $x^{a_1 + \ldots + a_n}$. Таких подобных членов будет несколько и мы их приведем. Поэтому число разных представлений (29) равно коэффициенту при x^k в многочлене $F(x)$, так что наша задача сводится к тому, чтобы выяснить, какой член имеет наибольший коэффициент. Так как $F(x) = x^n G(x)$, где $G(x) = (1 + x + \ldots + x^5)^n$, то коэффициент при x^k в $F(x)$ равен коэффициенту при x^{k-n} в $G(x)$ и нам достаточно определить член с наибольшим коэффициентом в $G(x)$.

Многочлен $G(x)$ обладает двумя свойствами, из которых ответ вытекает сам собой.

Произвольный многочлен $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ называется *возвратным*, если его члены, одинаково удаленные от концов, имеют одинаковые коэффициенты: $c_k = c_{n-k}$. Если изобразить коэффициенты c_i точками с координатами (i, c_i) на плоскости, то это свойство означает, что они будут расположены симметрично относительно середины: прямой $x = \frac{n}{2}$. На рис. 14 а) изображен случай четного n, на 14 б) — нечетного.



а) Рис. 14 б)

Многочлен $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ имеет те же коэффициенты, что и $f(x)$, но идущие в обратном порядке. Действительно, если $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, то $f(\frac{1}{x}) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n}$ и $x^n f(\frac{1}{x}) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Поэтому то, что $f(x)$ — возвратный многочлен, означает, что $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$. Отсюда следует, что произведение двух возвратных многочленов является возвратным. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ — возвратные многочлены степени n и m, то $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad x^m g\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$. Перемножая, получим, что $x^n f\left(\frac{1}{x}\right) x^m g\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)g(x)$, то есть $x^{n+m} f\left(\frac{1}{x}\right) g\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)g(x)$, а это и значит, что многочлен $f(x)g(x)$ — возвратный. По индукции заключаем, что произведение любого числа возвратных многочленов — возвратный многочлен. Наконец, так как многочлен $1 + x + \ldots + x^5$ возвратный, то то же верно и для $G(x) = (1 + x + \ldots + x^5)^n$.

Многочлен $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ называется *унимодальным*, если для некоторого $m \leqslant n$ выполнены неравенства $c_0 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_m \geqslant c_{m+1} \ldots \geqslant c_n$. То есть коэффициенты c_i сначала не убывают, а с какого-то места не возрастают. Если опять изобразить их точками (i, c_i), то они будут расположены "одним горбом" (рис. 15).

Например, многочлен $(1+x)^n$ является возвратным: это выражается в свойстве $C_n^m = C_n^{n-m}$ биномиальных коэффициентов (см. §3 гл. II). Он является унимодальным: это выражается в свойстве биномиальных коэффициентов, доказанном в §3 гл. II.

Можно доказать, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют неотрицательные коэффициенты, возвратны и унимодальны, то и $f(x)g(x)$ унимодален. Доказательство вполне элементарно, но несколько сложно. Из этой теоремы следует, что многочлен $G(x)$ унимодален. Однако конкретно для этого многочлена вы можете легко доказать это свойство сами (задача 3). Но для возвратного унимодального многочлена легко определить член с наибольшим коэффициентом. Именно, если наибольший коэффициент имеет член $c_k x^k$, то по свойству возвратности $c_{n-k} = c_k$, и мы имеем симметричный член $c_k x^{n-k}$. Мы можем считать, что $k \leqslant \frac{n}{2}$, а $n-k \geqslant \frac{n}{2}$. По свойству унимодальности ни один из членов $c_i x^i$ с $k \leqslant i \leqslant n-k$ не может иметь меньший коэффициент, иначе на графике было бы два "горба". Поэтому наибольшим обязан

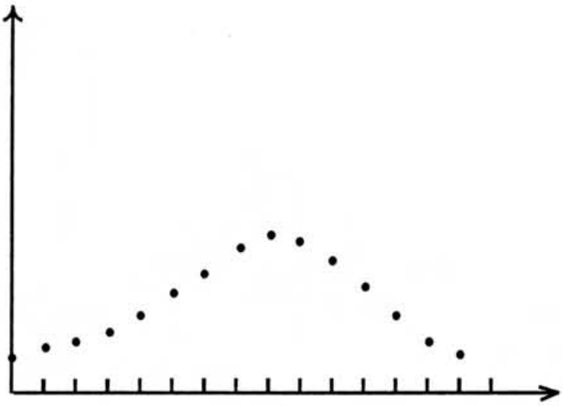


Рис. 15

быть средний коэффициент $c_{\frac{n}{2}}$ при n четном или два "самые средние" $c_{\frac{n-1}{2}} = c_{\frac{n+1}{2}}$ при n нечетном (хотя могут быть и другие, им равные). В частности, мы видим, что если n четно, то в многочлене $G(x)$ член с $x^{\frac{5n}{2}}$ имеет наибольший коэффициент, а если n нечетно, то в $G(x)$ члены с $x^{\frac{5n-1}{2}}$ и $x^{\frac{5n+1}{2}}$ имеют одинаковые коэффициенты, являющиеся наибольшими.

В многочлене $F(x)$ этот член умножается еще на x^n и поэтому имеет номер $\frac{5n}{2} + n = \frac{7n}{2}$ при n четном. При n нечетном — это два члена с равными коэффициентами и с номерами $\frac{5n-1}{2} + n = \frac{7n-1}{2}$ и $\frac{5n+1}{2} + n = \frac{7n+1}{2}$. Таким образом, при n бросаниях кости наиболее вероятный выигрыш равен $\frac{7n}{2}$ при n четном, а при n нечетном имеются два равновероятных выигрыша с наибольшей вероятностью выигрыша: $\frac{7n-1}{2}$ и $\frac{7n+1}{2}$.

Рассмотрим еще одну задачу такого же типа. Некоторое количество m физических частиц улавливается n приборами, так что всякая частица улавливается каким-то прибором и попадания частицы в тот или иной прибор можно считать равновероятными. Какова вероятность того, что все приборы зарегистрируют хотя бы одну частицу? Здесь элементарным событием является результат одного эксперимента, когда указано, какой прибор уловил какие частицы. Пусть приборы обозначены элементами a множества M. По условию $n(M) = n$. Пометим частицы номерами $1, 2, \ldots, m$. Тогда элементарное событие — это последовательность $(a_1, \ldots, a_m)$, где $a_i \in M$ и эта последовательность указывает, что i-я частица попала в прибор a_i. Иначе говоря, множество элементарных событий есть M^m в смысле определения, данного в §1. Условия задачи лишь по-другому говорят, что все элементарные события имеют одинаковую вероятность. Так как, согласно теореме 1, $n(M^m) = n^m$, то вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{n^m}$. Интересующее нас событие есть подмножество $N \subset M$, состоящее из последовательностей $(a_1, \ldots, a_m)$, где встречается каждый элемент множества M. Например, если $M = \{a, b, c\}$, $n = 4$, то $(a, b, c, a) \in N$, но последовательность (a, b, a, b) не содержится в N, так как в ней не содержится c. Наша задача — вычислить значение $n(N)$.

Обозначим через N_a подмножество множества M^m, состоящее из последовательностей $(a_1, \dots, a_m)$, в которых ни одно из a_i не равно a. Тогда очевидно $N = \overline{\cup N_a}$, дополнение к объединению всех множеств N_a для всех $a \in M$. Поэтому $n(N) = n(M^m) - n(\cup N_a)$, а значения числа $n(\cup M_a)$ дает формула (21). Найдем число $n(M_{a_1} \cap M_{a_2} \cap \ldots \cap M_{a_r})$, где $a_1, \dots, a_r$ — некоторые различные элементы множества M. Речь идет, следовательно, о последовательностях $(c_1, \dots, c_m)$, в которых ни один из элементов c_i не равен ни одному из $a_1, \dots, a_r$. Иными словами, c_i являются произвольными элементами множества $\overline{\{a_1, \dots, a_r\}}$, где $\overline{\{a_1, \dots, a_r\}}$ — дополнение подмножества $\{a_1, \dots, a_r\}$ в множестве M. Такие последовательности составляют множество $\left(\overline{\{a_1, \dots, a_r\}}\right)^m$, и число их по теореме 1 равно $\left(n(\overline{\{a_1, \dots, a_r\}})\right)^m$. Так как $n(\{a_1, \dots, a_r\}) = r$, $n(M) = n$, то $n\left(\overline{\{a_1, \dots, a_r\}}\right) = n - r$ и $n(M_{a_1} \cap M_{a_2} \cap \ldots \cap M_{a_r}) = (n-r)^m$. Следовательно, каждое слагаемое $n(M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_r})$ в формуле (21) в нашем случае равно $(n-r)^m$. Число слагаемых с заданным r равно, как мы видели, C_n^r. Таким образом, формула (21) дает

$$n(\cup N_a) = C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \cdot 1^m.$$

Для $N = \overline{\cup N_a}$ мы получаем

$$n(N) = n(M^m) - n(\cup N_a) = n^m - C_n^1(n-1)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \cdot 1^m.$$

Искомая вероятность равна

$$\frac{n(N)}{n^m} = 1 - C_n^1\left(\frac{n-1}{n}\right)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^m. \tag{30}$$

Во всех предшествующих примерах элементарные события имели одинаковую вероятность, равную, следовательно, $\frac{1}{n}$, где n — число элементарных событий. В результате вычисление вероятностей других событий сводилось к подсчету числа элементов подмножества — то есть к задаче комбинаторики. Теперь мы разберем примеры, более характерные для теории вероятности.

Пусть (M, p) и (N, q) — две вероятностные схемы. Предположим, что они определены путем многократного повторения некоторого опыта — своего для каждой из двух схем. Опыт, послуживший для определения вероятностной схемы (M, p) мы будем называть опытом A, в случае схемы (n, q) — опытом B. Рассмотрим теперь опыт, заключающийся в *последовательном выполнении* сначала опыта A, потом опыта B, и постараемся по нему определить некоторую новую вероятностную схему. Похожую ситуацию мы рассматриваем в связи с последовательным бросанием кости (см. таблицу 1). Пусть $n(M) = m$, $M = \{a_1, \dots, a_m\}$, $p(a_i) = p_i$, $n(N) = n$, $N = \{b_1, \dots, b_n\}$, $p(b_i) = q_i$. Тогда новый опыт определяет такие элементар ные события: в первом опыте наступило событие $a \in M$, во втором — событие $b \in N$. Таким образом, новые элементарные события соответствуют парам (a, b), где $a \in M$, $b \in N$ или элементам множества $X = M \times N$. Какие вероятности можно приписать этим событиям? Это можно разумным образом однозначно определить, если ввести одно новое допущение. Мы будем считать, что опыты A и B, при помощи которых определялись вероятностные схемы (M, p) и (N, q) — *независимы*. Это значит, что результат проведения второго опыта (то есть B) не зависит от того, какой результат дал первый опыт (то есть A). При таком условии вероятности $p(a,b)$ элементарных событий (a,b) можно определить. Наше рассуждение близко следует тому, которое изложено в связи с примером двукратного бросания кости (см. таблицу 1).

Как и там (и как мы делали в §1), мы изобразим элементы множества в виде прямоугольной таблицы

N					
b_1	(a_1,b_1)	(a_2,b_1)		(a_m,b_1)	
b_2	(a_1,b_2)	(a_2,b_2)		(a_m,b_2)	
b_n	(a_1,b_n)	(a_2,b_n)		(a_m,b_n)	
	a_1	a_2		a_m	M

Таблица 3

Событие, заключающееся в наступлении события a_i в первом эксперименте, по условию имеет вероятность p_i. Теперь оно уже не является элементарным событием, а состоит из элементарных событий (a_i,b_1), (a_i,b_2),…,(a_i,b_n), расположенных в i-м столбце таблицы 3. По нашему соглашению, вероятности этих событий должны быть такими же, как будто эксперимент A не производился, то есть такими, как у событий $b_1,\dots,b_n$ в вероятностной схеме (N,q). Но здесь возникает противоречие: сумма вероятностей событий $(a_i,b_1),(a_i,b_2),\dots,(a_i,b_n)$ равна p_i, а сумма вероятностей событий $b_1,\dots,b_n$ равна 1. Иными словами, столбец с номером i сам составляет вероятностную схему, которая должна быть "той же", что и схема (N,q). Но для этой "схемы" не выполнено условие (28) в определении вероятностной схемы. Мы должны произвести в ней "перенормировку", поделив вероятности всех элементарных событий на вероятность всего события p_i. Тогда мы получим настоящую вероятностную схему с вероятностями $\frac{p((a_i,b_j))}{p_i}$. Именно от нее разумно потребовать, чтобы она совпадала с вероятностной схемой (N,q). Это приводит к равенству $\frac{p((a_i,b_j))}{p_i}=q_j$, то есть $p((a_i,b_j))=p_iq_j$. Ввиду этого мы полагаем *по определению*

$$p(a_i,b_j)=p_iq_j. \tag{31}$$

Таким образом действительно получается новая вероятностная схема: сумма вероятностей элементарных событий, стоящих в i-м столбце таблицы 3, равна $p_iq_1 + \ldots + p_iq_n = p_i(q_1 + \ldots + q_n) = p_i$, а сумма вероятностей всех элементарных событий равна $p_1 + \ldots + p_m = 1$. Поэтому условие (28) выполнено.

Вновь полученная вероятностная схема (X, p) называется *произведением* вероятностных схем (M, p) и (N, q). Мы можем это записать иначе: если первоначальные схемы имели вид (M, p) и (N, q), то $X = M \times N$ и $p((a, b)) = p(a)p(b)$. Произведение вероятностных схем соответствует интуитивному представлению о вероятностной схеме, определенной при помощи двух последовательных опытов, *независимых* друг от друга. Предыдущее рассуждение нужно было лишь для того, чтобы *объяснить* разумность этого определения. Формально *определение* содержится в одной строчке равенства (31).

Теперь для нескольких вероятностных схем $(M_1, p_1), \ldots, (M_r, p_r)$ мы определим их произведение по индукции

$$M_1 \times \ldots \times M_r = (M_1 \times \ldots \times M_{r-1}) \times M_r, \tag{32}$$

где $M_1 \times \ldots \times M_{r-1}$ считается определенным по индукции, а произведение двух схем $(M_1 \times \ldots \times M_{r-1})$ и M_r мы только что определили. Расшифруем это определение. Как множество, $M_1 \times \ldots \times M_r$ есть произведение множеств $M_1, M_2, \ldots, M_r$, определенное в §1. Оно, следовательно, состоит из произвольных последовательностей $(a_1, \ldots, a_r)$, где a_i может быть любым элементом множества M_i. Вероятность элементарного события $(a_1, \ldots, a_r)$ равна

$$p((a_1, \ldots, a_r)) = p_1(a_1)p_2(a_2) \ldots p_r(a_r). \tag{33}$$

Это тоже проверяется сразу же индукцией по r. Действительно, согласно определению (32) и определению (31), $p((a_1, \ldots, a_r)) = p(((a_1, \ldots, a_{r-1}), a_r)) = p((a_1, \ldots, a_{r-1}))p(a_r)$, а по индуктивному предположению $p((a_1, \ldots, a_{r-1})) = p_1(a_1)p_2(a_2) \ldots p_{r-1}(a_{r-1})$, откуда подстановкой получается равенство (33). Это равенство можно выразить так: надо в последовательности $(a_1, \ldots, a_r)$ заменить каждый элемент его вероятностью и полученные числа перемножить. Это и будет вероятностью последовательности.

Мы теперь применим эту общую конструкцию к частному случаю вероятностной схемы I^n, где $I = \{a, b\}$ — вероятностная схема, состоящая из двух элементарных событий с вероятностями $p(a) = p$, $p(b) = q$, где, конечно, должны выполняться условия $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q = 1$. Мы уже обсуждали I^n как множество в §1. Оно состоит из всевозможных "текстов" типа (a, a, b, b, b, a, b) в "алфавите" из двух букв: a и b. Это, следовательно, и будут элементарные события. Их вероятность определяется, согласно только что сказанному, так: если в "тексте" буква a встречается k раз, а буква b встречается $(n - k)$ раз, то его вероятность равна p^kq^{n-k}. Такая вероятностная схема называется *схемой Бернулли.* Как мы видели, она отражает вероятность наступления события a или b при n-кратном повторении опыта, в котором каждый раз наступает событие a с вероятностью p и событие b с вероятностью q. При этом предполагается, что результаты каждого опыта не влияют на результаты последующих.

Например, при $n = 3$ мы имеем 8 элементарных событий: (a,a,a), (a,a,b), (a,b,a), (a,b,b), (b,a,a), (b,a,b), (b,b,a), (b,b,b). Их вероятности в той же последовательности равны $p^3, p^2q, p^2q, pq^2, p^2q, pq^2, pq^2, q^3$. Заметьте, что теперь буква p обозначает не вероятность а конкретное число, причем $0 < p < 1$. Вероятность же элементарного события, соответствующего последовательности с k знаками a и $n-k$ знаками b, равна p^kq^{n-k}. Оба обозначения слишком укоренились, чтобы их менять, но каждый раз будет понятно, что обозначает буква p.

Мы вычислим вероятность события A_k, которое заключается в том, что в серии из n опытов событие a наступило k раз. Это событие состоит из элементарных событий, которые задаются теми “текстами” $(b,a,b,b,b,a,a,\ldots)$, в которых a встречается ровно на k местах. Остальные $n-k$ мест, следовательно, заняты событием b. По общей формуле, такое элементарное событие имеет вероятность p^kq^{n-k}. А из какого числа элементарных событий состоит событие A_k? Это число равно числу способов выбрать k индексов среди n индексов $1,\ldots,n$. То есть, числу подмножеств из k элементов в множестве из n элементов. Согласно теореме 3 искомое число равно биномиальному коэффициенту C_n^k. Таким образом, мы нашли вероятность события A_k:

$$p(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k} \tag{34}$$

Пользуясь этим, можно найти наивероятнейшее число наступлений события a. Это то значение k, при котором выражение в формуле (34) принимает наибольшее значение. Выпишем эти числа подряд:

$$1q^n,\ npq^{n-1},\ \frac{n(n-1)}{2}p^2q^{n-2},\ldots,1p^n.$$

Рассмотрим отношение двух соседних чисел:

$$\frac{p(A_{k+1})}{p(A_k)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}q^{n-k-1} \Big/ \frac{n!}{(k)!(n-k)!}p^kq^{n-k} = \frac{(n-k)p}{(k+1)q}$$

(после всех сокращений, которые вы сами легко произведете).

Если это число больше 1, то $k+1$-е число больше k-го; если оно равно 1, то эти числа равны, а если оно меньше 1, то $k+1$-е число меньше k-го. Число будет больше 1, если $\frac{(n-k)p}{(k+1)q} > 1$, то есть $(n-k)p > (k+1)q$ или $np > k(p+q)+q$. Вспомнив, что $p+q=1$, мы можем записать это неравенство в виде $np > k+1-p$, $(n+1)p-1 > k$. Если же $k > (n+1)p-1$, то отношение последовательных $p(A_{k+1})/p(A_k)$ будет меньше 1. Наконец, если $k = (n+1)p-1$, то $p(A_{k+1}) = p(A_k)$. Таким образом, пока k принимает значения, меньшие $(n+1)p-1$, переходя от k-го числа к $k+1$-му, мы получаем все большие числа. Дальше могут встретиться два случая.

а) Число $(n+1)p-1$ — не целое. Тогда для максимального целого m, не превосходящего $(n+1)p$, мы получаем наибольшее число $p(A_m)$. При этом $m \neq (n+1)p-1$ и для бóльших значений k каждое число $p(A_k)$ меньше предыдущего — и так до последнего, n-го числа. Значит, здесь есть одно наивероятнейшее число наступления события a — это наибольшее целое число m, не превосходящее $(n+1)p-1$.

б) Число $(n+1)p-1$ — целое. Тогда числа $p(A_k)$ возрастают при $k < m = (n+1)p-1$. Дальше $p(A_{m+1}) = p(A_m)$, а при $i > m+1$ числа $p(A_k)$ убывают. Таким образом, числа $p(A_k)$ возрастают, пока не достигнут максимума, потом идут одно или два равных друг другу максимальных, а потом они убывают. Иными словами, они расположены "одним горбом", как на рис. 2. Это значит, что образованный при их помощи многочлен $q^n + np^{n-1}qt + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2t^2 + \ldots + p^nt^n$ — унимодален. Пользуясь формулой бинома, мы можем записать его в виде $(q+pt)^n$. Как усмотреть его унимодальность, пользуясь этой простой записью? Мне такой способ неизвестен.

В самом простом случае, когда $p = q = \frac{1}{2}$, мы получаем, что, если $(n+1)\frac{1}{2} - 1$ – не целое, то есть, если n четно, то $(n+1)\frac{1}{2} - 1 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ и $m = \frac{n}{2}$. Поэтому существует одно наивероятнейшее число наступлений события a – это $m = \frac{n}{2}$. То есть, вероятнее всего наступление n раз события a и n раз события b. В этом нет ничего удивительного, такой ответ подсказывают и соображения симметрии. Если n нечетно, то $m = (n+1)\frac{1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$ – целое, и имеется два наивероятнейших числа наступлений события a : $\frac{n-1}{2}$ (тогда событие b наступает $\frac{n+1}{2}$ раз) и $\frac{n+1}{2}$ (тогда событие b наступает $\frac{n-1}{2}$ раз) – что тоже вполне естественно. Но при других значениях p мы получаем ответ, до которого трудно было бы догадаться. Вот задача из учебника теории вероятностей.

В результате многолетних наблюдений для некоторой местности было выяснено, что вероятность того, что в течение 1 июля выпадет дождь, равна $\frac{4}{17}$. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 1 июля за ближайшие 50 лет. Здесь $n = 50$, $p = \frac{4}{17}$, $m = (n+1)p - 1 = 11$. Значит, наивероятнейшими значениями числа дождливых дней будут равновероятные числа 11 и 12.

Найденные нами значения вероятностей $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ обладают замечательными свойствами. На рисунке 16, взятом из одного курса теории вероятностей, они изображены для случая $p = 1/3$, $n = 4, 9, 16, 36$ и 100.

Вы видите, что с возрастанием n они располагаются не "вразброс", а приближаются к некоторой гладкой кривой. Чтобы это увидеть, надо каждый раз сдвигать рисунок таким образом, чтобы наибольшее число приходилось на ось y, кроме того, уменьшать расстояние между точками на оси x, над которыми откладываются числа (это изменение масштаба по оси x на рис. 16 осуществлено) и, наконец, пропорционально уменьшать все откладываемые числа так, чтобы наибольшее число оставалось примерно одним и тем же. После этого оказывается, что с ростом n наши точки будут все более приближаться к одной кривой — именно графику функции $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c^{x^2}$, где π — обычное отношение длины окружности к диаметру, а c (для тех, кто знает, что такое e — основание натуральных логарифмов) равно $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

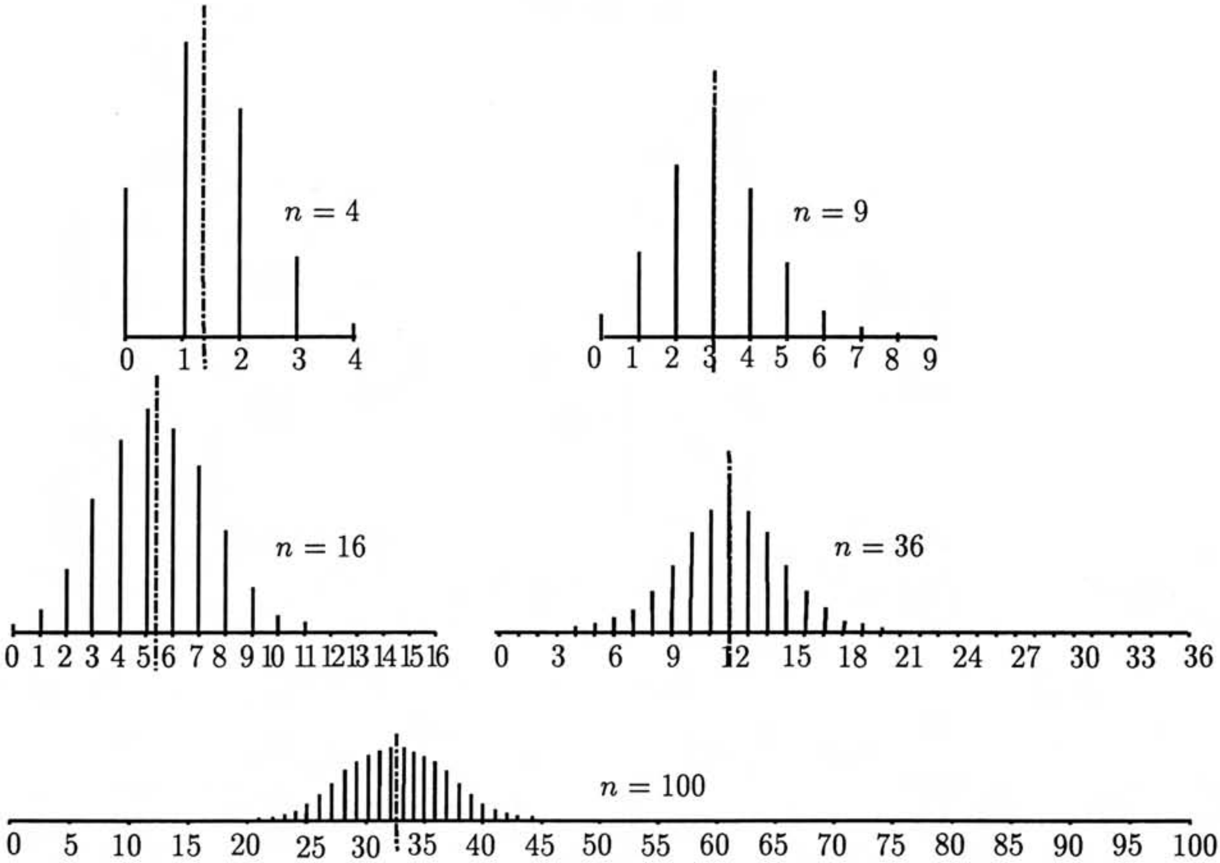


Рис. 16

Это утверждение, называемое *теоремой Лапласа*, является, собственно говоря, сложно выраженным свойством биномиальных коэффициентов. Но доказательство этой теоремы предполагает разъяснение слов "все более приближаются", то есть понятия предельного перехода, и мы его приводить не будем.

Задачи

1. В произвольной вероятностной схеме (M, p) даны k событий: $M_1 \subset M, \ldots, M_k \subset M$. Выразить вероятность $p(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k)$ события $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$ через вероятности $p(M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_r})$ событий $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_r}$.

2. Докажите, что если многочлен $f(x)$ — возвратный и унимодальный, то теми же свойствами обладает многочлен $f(x)(1+x)$.

3. Докажите, что если многочлен $f(x)$ — возвратный и унимодальный, то теми же свойствами обладает многочлен $f(x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$. Выведите отсюда, что многочлен $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n$ унимодален.

4. Убедитесь, что в задаче об m частицах и n приборах при $n = m$ ответ есть $\frac{n!}{n^n}$. Какое соотношение между биномиальными коэффициентами получается при сравнении с формулой (31)?

5. В урне находится n одинаковых шаров, из них m белых и $n - m$ черных. Из нее наугад извлекают r шаров. Какова вероятность того, что будет извлечено k

белых и $r-k$ черных шаров? *Указание:* слово "наугад" означает, что вероятности извлечения любых наборов по r шаров считаются равными.

6. Докажите, что если вероятность p в схеме Бернулли является иррациональным числом, то существует ровно одно наивероятнейшее число наступлений события a.

7. Отношение наивероятнейшего числа наступлений события a в схеме Бернулли к числу n называется *наивероятнейшей долей.* Докажите, что при неограниченном возрастании числа n наивероятнейшая доля становится все ближе к вероятности p события a.

Приложение.

Неравенства Чебышева.

Мы обсудим один вопрос, касающийся схем Бернулли, которые рассматривались в конце §4. Как там говорилось, схемы Бернулли практически возникают в ситуации, когда происходит многократное повторение опыта, который может иметь только два исхода. Например, имеется несимметричная монета и спрашивается, упадет ли она после подбрасывания "орлом" или "решкой". Для этого проводят большую серию испытаний – например, 1000, – и если k раз выпал "орел", то считают, что вероятность его выпадения есть $p = \frac{k}{1000}$. После этого мы можем применить наше определение схемы Бернулли (I^n, p) и вычислять в ней разные другие вероятности, например, заданные формулой (34). Но является ли наша абстракция удовлетворительной? Отображает ли она достаточно точно ту реальность, с которой мы в начале имели дело: длинную серию независимых экспериментов? В нашей абстракции – схеме Бернулли – мы не можем спросить: сколько раз действительно произошло событие a в схеме I^n? Ведь в нашем распоряжении только язык вероятностей, так что имеет смысл только задавать вопросы о некоторых вероятностях. Но понятие вероятности связано с реальностью на основании уверенности, что событие, имеющее очень малую вероятность, практически не наступит. Иными словами, если вероятность некоторого события достаточно мала, то мы можем на практике поступать так, как будто знаем, что оно не наступит. Разумеется, смысл слов "достаточно мала" должен быть уточнен в каждой конкретной ситуации. Исходя из сформулированного выше положения, мы можем зафиксировать некоторое число $\varepsilon > 0$ и рассмотреть событие A_ε, которое заключается в том, что в нашей схеме Бернулли (I^n, p) событие a наступит такое число раз k, что $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon$. Иначе говоря, наступление события A_ε заключается в том, что "частота" $\frac{k}{n}$ наступлений события a отклонилось от предполагаемой вероятности p больше, чем на ε. Естественно надеяться, что при любом фиксированном ε вероятность $p(A_\varepsilon)$ события A_ε будет становиться сколь угодно малой при неограниченном росте n. Это означало бы, что отклонением "частоты" $\frac{k}{n}$ от вероятности p при больших n

можно пренебречь. Еще в начале XVIII в. Яков Бернулли пришел к этому вопросу и понял, что исследование вероятности $p(A_\varepsilon)$ — чисто математический вопрос, связанный со свойствами биномиальных коэффициентов. Он доказал, что вероятность $p(A_\varepsilon)$ с ростом n действительно становится сколь угодно малой. В XIX в. Чебышев доказал не только качественное утверждение Бернулли, но и нашел простое явное неравенство, которому удовлетворяет интересующая нас вероятность $p(A_\varepsilon)$. Его теорему мы здесь и изложим. В этом месте нашей книги мы впервые встретимся с вкладом русского математика. П. Л. Чебышев жил с 1821 по 1894 г. и был создателем петербургской математической школы.

Запишем теперь в виде алгебраической формулы то выражение, которое хотим исследовать. В §4 мы рассмотрели схему Бернулли (I^n, p), событие A_k, заключающееся в том, что в серии опытов событие a, для которого $p(a) = p$, наступило k раз и вычислили его вероятность (формула (34)):

$$p(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1}$$

Теперь нам дано число ε, и нас интересует событие A_ε, заключающееся в том, что наступило одно из событий A_k с индексом k, удовлетворяющим неравенству $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon$. Нам надо найти вероятность $p(A_\varepsilon)$ события A_ε. Напомним, что событие (в частности, A_k и A_ε) – это подмножество множества I^n. Очевидно, что подмножества A_k с разными индексами k не пересекаются и A_ε есть объединение всех подмножеств A_k для таких k, что $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon$. Поэтому вероятность $p(A_\varepsilon)$ равна сумме вероятностей $p(A_k)$ с такими индексами k. Так как величина $p(A_k)$ задана формулой (1), то мы получаем явное, хотя и несколько сложное, выражение для вероятности $p(A_\varepsilon)$ события A_ε. Удобнее записать его, переписав условие, определяющее интересующие нас индексы k: $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon$, в равносильном виде:

$$|k - np| > \varepsilon n. \tag{2}$$

Таким образом, мы приходим к сумме:

$$\begin{aligned} &S_\varepsilon \text{ — \textit{сумма выражений} } C_n^k p^k q^{n-k} \text{ \textit{для всех} }\\ &k,\\ &1 \leqslant k \leqslant n, \text{ \textit{удовлетворяющих условию (2)}} \end{aligned} \tag{3}$$

Мы видим, что вероятность $p(A_\varepsilon)$ события A_ε равна S_ε.

Теперь можно сформулировать теорему Чебышева.

Теорема Чебышева. Для вероятности $p(A_\varepsilon)$ события A_ε, заключающегося в том, что число наступлений k события a в схеме Бернулли (I^n, p), удовлетворяет условию $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon$, выполнено неравенство

$$p(A_\varepsilon) < \frac{pq}{\varepsilon^2 n}. \tag{4}$$

Иногда неравенство (4) записывают в виде

$$p\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > \varepsilon\right) < \frac{pq}{\varepsilon^2 n}.$$

Очевидно, что при заданном p $(q = 1 - p)$ и ε правая часть неравенства (4) становится все меньше при возрастании n, что мы и стремились установить. Этот качественный результат называется *теоремой Бернулли.*

Как мы видели, вероятность $p(A_\varepsilon)$ равна сумме S_ε, определенной условием (3), и значит неравенство (4) равносильно неравенству

$$S_\varepsilon < \frac{pq}{\varepsilon^2 n}.$$

Доказательство теоремы Чебышева основано на явном вычислении некоторых сумм, которое мы выделим в виде леммы.

Лемма. Для вероятностей $p(A_k)$, определенных соотношением (1), выполнены равенства

$$p(A_0) + p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n) = 1 \tag{5}$$

$$p(A_1) + 2p(A_2) + 3p(A_3) + \cdots + np(A_n) = np \tag{6}$$

$$p(A_1) + 2^2 p(A_2) + 3^2 p(A_3) + \cdots + n^2 p(A_n) = n^2 p^2 + npq \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим выражение в левой части равенства (5) через σ_0, в равенстве (6) — через σ_1, а в равенстве (7) — через σ_2. Мы уже обратили внимание в §4 на то, что согласно формуле бинома вероятности $p(A_k)$ являются коэффициентами многочлена $(pt + q)^n$. То есть, если мы положим

$$p(A_0) + p(A_1)t + \cdots + p(A_n)t^n = f(t), \tag{8}$$

то

$$f(t) = (pt + q)^n. \tag{9}$$

Подставляя в равенства (8) и (9) значение $t = 1$ и используя, что $p + q = 1$, мы получаем, что $\sigma_0 = 1$, то есть равенство (5).

Рассмотрим производную $f'(t)$ многочлена $f(t)$. Из формулы (9), применяя правило дифференцирования (19) из §2 гл. II, мы получим, что

$$f'(t) = np(pt + q)^{n-1}. \tag{10}$$

так как $(pt + q)' = p$ по формуле (15) гл. II. С другой стороны, применяя к многочлену $f(t)$, заданному формулой (8), формулу (15) гл. II для $f'(t)$, мы получим

$$f'(t) = p(A_1) + 2p(A_2)t + 3p(A_3)t^2 + \cdots + np(A_n)t^{n-1}. \tag{11}$$

Формулы (10) и (11) дают вместе:

$$p(A_1) + 2p(A_2)t + 3p(A_3)t^2 + \cdots + np(A_n)t^{n-1} = np(pt + q)^{n-1}. \tag{12}$$

Подставим в обе части равенства (12) $t = 1$. Так как $p + q = 1$, то получим как раз соотношение (6).

Теперь умножим обе части равенства (12) на t. Мы получим:

$$p(A_1)t + 2p(A_2)t^2 + 3p(A_3)t^3 + \cdots + np(A_n)t^n = np(pt + q)^{n-1}t. \tag{13}$$

Рассмотрим производную от обеих частей равенства (13). Производную левой части найдем по формуле (15) гл. II. Мы получим многочлен

$$p(A_1) + 2^2 p(A_2)t + \cdots + n^2 p(A_n)t^{n-1}.$$

Производную правой части вычислим, используя правило г) дифференцирования произведения из §2 гл. II. Правую часть равенства (13) запишем в виде произведения двух множителей: $\left(np(tp+q)^{n-1}\right) \cdot t$. По правилу г) производная этого выражения равна $\left(np(tp+q)^{n-1}\right)' \cdot t + \left(np(tp+q)^{n-1}\right) \cdot t'$. По формуле (15) главы II $t' = 1$, по правилу в) §2 главы II $\left(np(tp+q)^{n-1}\right)' = np\left((tp+q)^{n-1}\right)'$, а по формуле (19) гл. II $\left((tp+q)^{n-1}\right)' = (n-1)(tp+q)^{n-2}p$ (так как $(tp+q)' = p$ по формуле (15) главы II). Приравнивая выражения, полученные от дифференцирования левой и правой части равенства (13),мы получим соотношение:

$$p(A_1) + 2^2 p(A_2)t + \cdots + n^2 p(A_n)t^{n-1} = np(pt+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(tp+q)^{n-2}. \quad (14)$$

В равенстве (14) положим $t = 1$. Слева стоит сумма σ_2. Справа (ввиду того, что $p+q=1$) получаем $np+n(n-1)p^2 = n^2p^2+np(1-p) = n^2p^2+npq$ (так как $1-p=q$).

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы Чебышева. Прием Чебышева заключается в том, что неравенство (2), характеризующее нужные нам индексы, он записывает в виде

$$\left|\frac{k-np}{\varepsilon n}\right| > 1,$$

то есть

$$\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2 > 1,$$

а потом каждое слагаемое $p(A_k)$ в сумме S_ε умножает на число $\left(\frac{k-pn}{\varepsilon n}\right)^2$, по условию большее единицы, чем только увеличивает сумму. После этого он рассматривает *полную* сумму $\bar{S}_\varepsilon$ *всех* слагаемых $\left(\frac{k-pn}{\varepsilon n}\right)^2 p(A_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, а не ограниченную только индексами k, удовлетворяющими условиям (2). Ясно, что эта полная сумма $\bar{S}_\varepsilon$ отличается от полученной раньше суммы положительными слагаемыми и поэтому может быть только больше.

В результате мы видим, что $S_\varepsilon < \bar{S}_\varepsilon$. А после этого, очень элементарным преобразованием (на основании леммы) показывается, что сумму $\bar{S}_\varepsilon$ можно вычислить точно, чем и доказывается нужное неравенство для суммы S_ε.

Таким образом, надо найти сумму $\bar{S}_\varepsilon$ всех слагаемых $\left(\frac{k-pn}{\varepsilon n}\right)^2 p(A_k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Общий знаменатель $(\varepsilon n)^2$ можно вынести за знак суммы, а выражение $(k-np)^2$ в каждом члене — раскрыть: $(k-np)^2 = k^2 - 2npk + p^2n^2$. Каждый член в сумме $\bar{S}_\varepsilon$ (после вынесения общего знаменателя $(\varepsilon n)^2$) даст три члена. Сумма всех первых членов — это сумма σ_2, стоящая слева в равенстве (7), сумма вторых членов, после вынесения одного множителя $-2pn$, совпадает с суммой σ_1, определенной равенством (6). Наконец, сумма третьих членов, после вынесения одного множителя p^2n^2, даст σ_0, определенную равенством (5). Собирая вместе все полученные равенства, мы найдем выражения для суммы $\bar{S}_\varepsilon$:

$$\bar{S}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(\sigma_2 - 2pn\sigma_1 + p^2n^2\sigma_0).$$

Подставляя выражения, полученные для σ_2 и σ_1 в лемме, находим:

$$\bar{S}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}(n^2p^2 + npq - 2p^2n^2 + p^2n^2) = \frac{pq}{\varepsilon^2 n}. \tag{15}$$

как мы видели, $S_\varepsilon < \bar{S}_\varepsilon$, поэтому $S_\varepsilon < \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$. Тем самым теорема Чебышева доказана.

Обратите внимание на прием, лежащий в основе доказательства. Слагаемые суммы S_ε, величину которой нам надо оценить, имеют довольно простой вид. Трудность, же оценки заключается в том, что в сумму включаются слагаемые, выбранные по довольно причудливому принципу (индексы k должны удовлетворять условию (2). Первым приходит в голову пренебречь этим условием и взять сумму *всех* слагаемых такого вида. Такая сумма может быть легко вычислима: согласно лемме она равна 1. Но она слишком велика и не дает интересующего нас неравенства. Находка Чебышева заключается в том, чтобы ввести дополнительные множители $\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2$, а уже *после* этого рассмотреть сумму всех слагаемых, отказавшись от "портящего жизнь" ограничения (2). При этом, те члены, которые входят в сумму S_ε даже увеличатся, но зато члены, в нее не входящие, так сильно уменьшатся, что теперь полная сумма $\bar{S}_\varepsilon$ будет достаточно мала (ведь именно для не входящих в сумму S_ε слагаемых будет $\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2 < 1$).

Мы столкнулись здесь с явлением, очень часто встречающимся в математике. А именно, важное, интересное неравенство обычно является следствием некоторого *тождества*, из которого оно получается вследствие очевидных оценок. Такой очевидной оценкой в нашем случае является неравенство $S_\varepsilon \leqslant \bar{S}_\varepsilon$, а тождество — это соотношение (15), дающее явный вид суммы $\bar{S}_\varepsilon$. Большей частью так и доказываются неравенства, играющие в математике принципиальную роль. Но иногда они выводятся иначе — тогда это может служить намеком на то, что за ними скрывается некоторое еще нам неизвестное тождественное соотношение.

Вернемся теперь еще раз к формулировке теоремы Чебышева. Как мы только что выяснили, там рассматривается событие, которое заключается в том, что в схеме Бернулли I^n событие a наступает k раз, причем либо $k > np + n\varepsilon$, либо $k < pn - n\varepsilon$. Иначе говоря, не наступает событие, заключающееся в том, что в схеме Бернулли событие a наступает k раз, где теперь $n - p\epsilon \leqslant k \leqslant n + p\epsilon$. Утверждается, что первое событие имеет малую (при больших n) вероятность, не превосходящую $\frac{pq}{\varepsilon^2 n}$, а значит второе — большую, не меньшую, чем $1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$. Рассмотрим, например, серию большого числа повторений одного и того же опыта в постоянных условиях. Предположим, что один опыт может иметь только два исхода — a и b, причем вероятность исхода a равна p. Эта ситуация (если число опытов равно

n) и описывается, как мы видели, схемой Бернулли (I^n, p). Опыты могут состоять, например, в проверке некоторой большой совокупности объектов (животных, технических деталей и т.д.) на наличие определенного признака, причем известно, что в нашей совокупности p-я часть объектов обладает этим признаком. Схема I^n описывает возможные результаты проверки на интересующий нас признак множества из n объектов. Согласно теореме Чебышева в серии из n опытов число наступлений исхода a будет содержаться между $np - n\varepsilon$ и $np + n\varepsilon$ с вероятностью, большей чем $1 - \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$. Здесь ε может быть любым числом, которое мы можем выбирать по произволу. Пусть, например, $p = \frac{3}{4}$. Выбрав $\varepsilon = \frac{1}{100}$ мы увидим, что в серии из n опытов число k наступлений исхода a будет удовлетворять неравенству $\frac{3}{4}n - \frac{n}{100} \leqslant k \leqslant \frac{3}{4}n + \frac{n}{100}$ с вероятностью, не меньшей, чем

$$1 - \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2 n}$$

Так как $\frac{3}{4^2} < \frac{2}{10}$, то эта вероятность не меньше, чем

$$1 - \frac{\frac{2}{10}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2 n} = 1 - \frac{2000}{n}.$$

Полагая $n = 200\,000$, мы сделаем эту вероятность не меньшей, чем $0,99$. С такой большой вероятностью число наступлений исхода a при $200\,000$ экспериментов будет заключаться между $148\,000$ и $152\,000$ (так как $\frac{3}{4}n = 150\,000$, $n \cdot \frac{1}{100} = 2000$, $np - n\varepsilon = 148\,000$, $np + n\varepsilon = 152\,000$).

Наоборот, мы можем при помощи теоремы Чебышева оценить число экспериментов, которые надо произвести, чтобы определить вероятность p с достаточной точностью. Предположим, что мы хотим определить ее с точностью до $1/10$ и чтобы она равнялась найденной величине с вероятностью, не меньшей $0,99$. Согласно теореме Чебышева, мы должны положить $\varepsilon = 1/10$ и удовлетворить неравенству

$$\frac{pq}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot n} < 0,01.$$

Заметим, что $q = 1 - p$ и при любом p, для которого $0 \leqslant p \leqslant 1$, $pq = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$. Это следует из того, что среднее геометрическое величин p и q не превосходит их среднего арифметического, которое равно $\frac{1}{2}$. Поэтому нам достаточно, чтобы n удовлетворяло неравенству

$$\frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot n} < 0,01$$

откуда $n > 2500$.

Задачи

1. В совокупности некоторых объектов определенным признаком обладают в среднем 5% от общего числа. Докажите, что среди 200 000 объектов число тех, которые обладают этим признаком, содержится между 189 000 и 191 000 с вероятностью не меньшей, чем $0,99$.

2. В ситуации задачи 1 доля объектов, обладающих заданным признаком, неизвестна. Какова вероятность того, что обследовав 100 объектов, мы определим ее с точностью до $0,1$?

3. Для любого натурального $r \leqslant n$ найдите сумму всех членов $k(k-1)\cdots(k-r+1)p(A_k)$ для $k = 1, \ldots, n$.

4. Для $r \leqslant 4$ вычислите суммы σ_r, состоящие из слагаемых $k^r p(A_k)$ для всех $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Проведите вычисления двумя способами и убедитесь, что результаты совпадают: а) повторяя рассуждение в доказательстве леммы и б) выражая суммы σ_r через суммы, вычисленные в задаче 3 при $r = 1, 2, 3, 4$.

5. Попытайтесь усовершенствовать неравенство (4) в теореме Чебышева, применяя вместо множителей $\left(\dfrac{k-np}{n\varepsilon}\right)^2$ множители $\left(\dfrac{k-np}{n\varepsilon}\right)^4$. Усовершенствование должно проявиться в том, что в знаменателе правой части неравенства будет стоять n^2 вместо n.

Интегральная геометрия и компьютерная томография

В.П. Паламодов

Специальный курс по интересному разделу современной математики – интегральной геометрии – и ее приложениям в компьютерной томографии был прочитан профессором Виктором Павловичем Паламодовым в Математическом Колледже Независимого Московского Университета в осеннем семестре 1995/96 г. Редакция продолжает публиковать избранные части этого курса. Лекции 1-2, представляющие логически связное введение в вопрос, были опубликованы в первом номере журнала. В настоящем выпуске публикуются лекции 3-6, излагающие основной математический аппарат.

Лекция 3

Преобразования Фурье на прямой и плоскости

Пусть G — группа, действующая на пространстве X. Рассмотрим случай, когда $X = \mathbf{R}$, $G \cong \mathbf{R}$, т.е. пространство, на котором действует группа, совпадает с действительной прямой, а сама группа является группой действительных чисел по сложению. Элемент $x \in X$ под действием элемента $y \in G$ переходит в элемент $x + y \in X$, рис. 1.

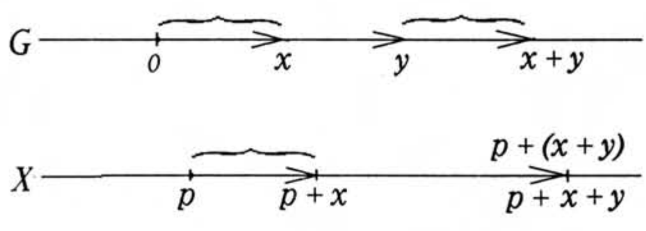


Рис. 1

Рассмотрим аналогичное действие на плоскости: $X = \mathbf{R}^2$, $\quad G \cong \mathbf{R}^2$ — группа с двумя образующими. G действует на “пассивном” пространстве X — аффинной плоскости $\mathbf{R}^2$, рис. 2.

Рис. 2

Под действием G прямые переходят в прямые, рис. 3. Евклидово расстояние сохраняется. Преобразование Радона действует на функции, заданные на плоскости, и переводит их в функции, заданные на множестве $\{L\}$ прямых этой плоскости:

$$f \mapsto Rf, \qquad Rf(L) = \int\limits_L f ds.$$

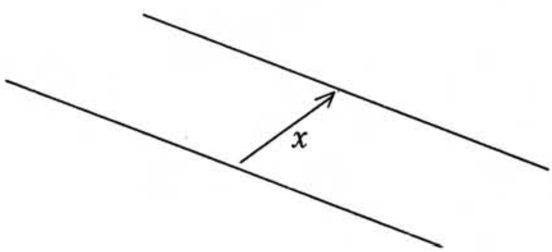


Рис. 3

Гармонический анализ занимается изучением свойств (функций, преобразований функций и т.д.), инвариантных или перестановочных с действием группы. Например, преобразования Фурье имеют дело с рассмотренной выше группой G сдвигов. Действующая на пространстве группа G действует и на определенные на этом пространстве функции. Например, пусть $g \in G$, обозначим T_g — действие g на функцию: $T_g f(p) = f(g(p))$. В нашем случае $T_x f(p) = f(p + x)$, $T_x L = L + x$. Справедливо соотношение

$$RT_x f = T_x Rf,$$

где $T_x Rf(L) = Rf(T_x L) = Rf(L + x)$. Оно означает, что преобразование Радона перестановочно с действием группы G.

Самые простые функции, инвариантные относительно группы сдвигов — константы. Рассмотрим также экспоненты: $e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x}, \quad \xi \in \mathbf{C}$.

$$T_y e_\xi(x) = e_\xi(x + y) = e^{2\pi i \xi (x+y)} = e^{2\pi i \xi x} e^{2\pi i \xi y} = \lambda e_\xi(x), \qquad \lambda = e^{2\pi i \xi y}.$$

Таким образом, экспоненты — собственные функции для операторов сдвига. Это свойство характеристическое: можно доказать, что любая непрерывная собственная функция является экспонентой. Параметр ξ называется частотой. Нарисуем график вещественной и мнимой частей функции

$$e_\xi(x) = \cos(2\pi\xi x) + i\sin(2\pi\xi x), \text{ рис. } 4.$$

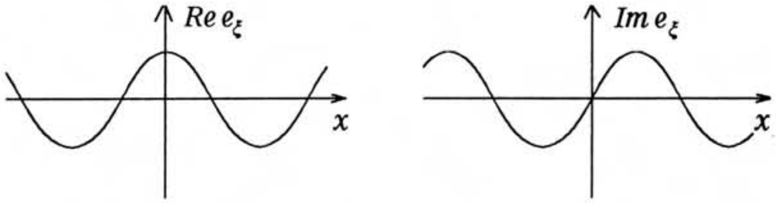


Рис. 4

Для вещественных ξ экспонента периодична. Период этих функций равен $\frac{1}{|\xi|}$, он называется **длиной волны**. Константы естественно включаются в класс экспонент (при $\xi = 0$). Вид графиков для большой и малой частоты показан на рис. 5.

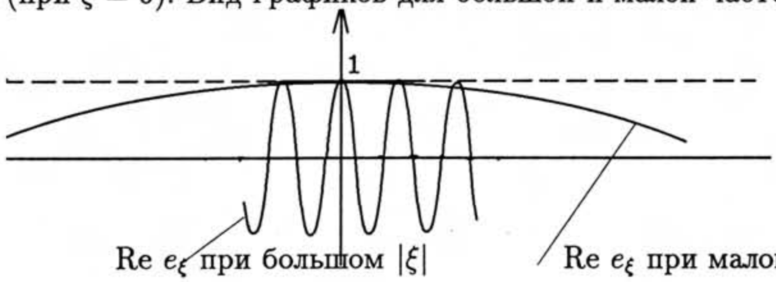


Рис. 5

В физике эти функции описывают простые синусоидальные колебания (на слух - звуки "без тембра"). Музыкальные звуки образованы наложением волн разных частот, как правило, соизмеримых. Таким образом, стоит рассмотреть линейные комбинации или "суперпозиции" экспонент $\sum\limits_1^N a_j e_{\xi_j}(x)$. Близкие к этим суперпозициям звуки генерируются синтезатором. Например, синтезатор в точности не повторяет звуки фортепьяно, которое воспроизводит бесконечную суперпозицию с непрерывным спектром (свойства резонирующего дерева). Математически переход к непрерывному спектру означает замену суммы интегралом.

Интеграл Фурье: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e_\xi(x) d\xi$. Функция $F(x)$ называется также "спектром сигнала $\varphi(x)$".

Итак, рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{\pi i \xi x} d\xi$. Это несобственный интеграл по параметру от комплекснозначной функции. Предполагается, что φ — интегрируемая функция, то есть $\int |\varphi| d\xi < \infty$. В этом случае интеграл Фурье существует (сходится абсолютно), так как $|\varphi(\xi) e_\xi| = |\varphi|$.

Воспринимаемый нами звук действительно хорошо моделируется интегралом Фурье. Спектр звукового сигнала можно демонстрировать при помощи специального прибора — гармонического анализатора. Реальный график спектра имеет вид (нажали клавишу “до”):

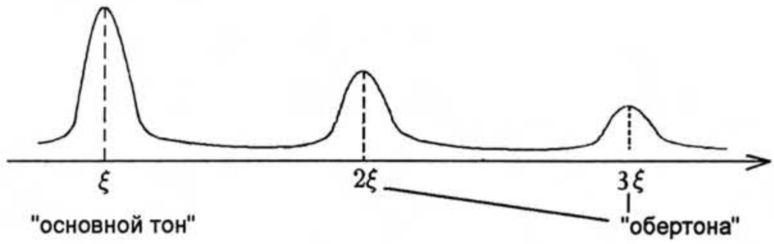


Рис. 6

Современный фортепьянный звукоряд получил распространение в начале 18 века (“хорошо темперированный клавир”). Он имеет 12 интервалов в октаве, причем октава соответствует удвоению частоты. Отношение частот соседних звуков постоянно, а значит, равно $\sqrt[12]{2}$. Таким образом, соседние графики спектров звуков “до” и “ре” имеют вид, как на рис. 7:

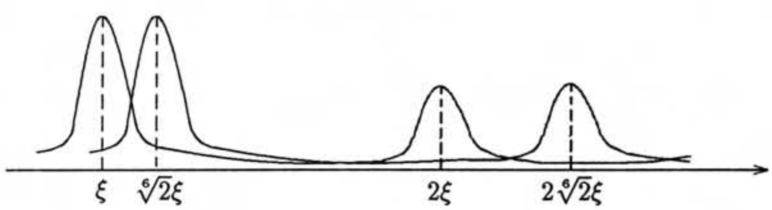


Рис. 7

Но исторически интеграл Фурье впервые применен в теории распространения тепла. Он оказался универсальным аналитическим средством математической физики.

Основная задача: преобразовать функцию f на X в функцию φ на двойственном множестве Ξ, так чтобы

$$f(x) = \int \varphi(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Такое представление важно и для преобразования Радона, и для томографии.

Оно представляет собой непрерывное разложение f по простым колебаниям. Эта задача хорошо исследована, имеет свое решение для каждого “разумного” класса функций. Например, “узкий” класс функций — пространство Шварца S — состоит из функций, имеющих производные всех порядков, которые убывают быстрее любой степени x:

$$S = \{f : \left| x^k f^{(j)}(x) \right| \leqslant C_{k,j} \forall k, j\}.$$

Пример: $|f| \leqslant C_{0,0}$, $\quad |x^2 f| \leqslant C_{2,0} \;\Rightarrow\; |(x^2+1)f| \leqslant C$, $|f| \leqslant \frac{C}{x^2+1}$, а значит, f суммируема на прямой, рис. 8.

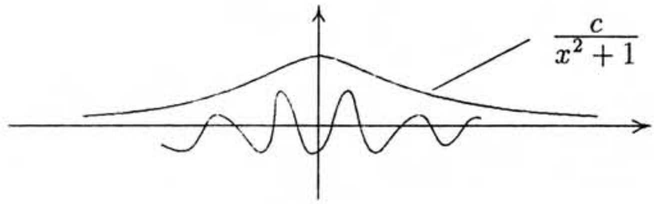


Рис. 8

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{N\to+\infty} \operatorname{arctg} x|_{-N}^{N} = \pi.$$

Теорема. $\forall f \in S(X) \quad f(x) = \int \varphi(\xi) e_\xi(x) d\xi$, где

$$\varphi(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \in S(\Xi)$$

и наоборот

$$\forall \varphi \in S(\Xi) \quad f \in S(X).$$

Тем самым устанавливается двойственность пространств Шварца на двойственных прямых X и Ξ.

Теорема Планшереля. $\int |\varphi|^2 d\xi = \int |f|^2 dx$.

В математической физике этот интеграл имеет смысл энергии. Если f — амплитуда колебания, то интеграл выражает энергию колебания. Заметим, что в формулах томографии интегралы стояли под знаком экспоненты, значит, это безразмерные величины. Для преобразования Радона тоже есть аналог теоремы Планшереля; все это частные случаи некоторого общего факта.

Свойства преобразования Фурье:

1. Теорема Планшереля.
2. $\frac{d\varphi}{d\xi} = \int f(x) \frac{de^{-2\pi i \xi x}}{d\xi} dx = \int f(x)(-2\pi i x) e^{-2\pi i \xi x} dx = F(-2\pi i x f(x))$.
3. $\frac{dg}{dx} = F^{-1}(2\pi i \varphi(\xi))$.
4. $F(T_y f) = \int f(x+y) e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{2\pi i y \xi} \int f(x+y) e^{-2\pi (x+y)\xi} d(x+y) = e^{2\pi i y \xi} F(f)$.
5. $F^{-1}(T_\eta \varphi) = e^{-2\pi i \eta x} F^{-1}(\varphi)$.

Эти свойства не удивительны, так как операции сдвига и дифференцирования взаимосвязаны, но и интеграл Фурье построен на основе группы сдвигов!

Примеры:

1. $f(x) = e^{-\pi x^2}$ (Гауссово распределение вероятности, рис. 9).

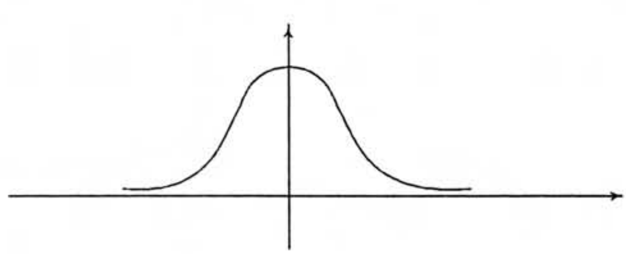


Рис. 9

$$\varphi(\xi) = \int e^{-\pi x - 2\pi i \xi x} dx = e^{-\pi \xi^2} \int e^{-\pi (x + i\xi)^2} dx =$$
$$= e^{-\pi\xi^2} \int\limits_{\operatorname{Im} z = \xi} e^{-\pi z^2} dz = e^{-\pi\xi^2} \int\limits_{\operatorname{Im} z = 0} e^{-\pi x^2} dx = e^{-\pi\xi^2},$$

так как последний Гауссов интеграл равен 1. При интегрировании мы перешли от интегрирования по прямой $\operatorname{Im} z = \xi$ к интегрированию по прямой $\operatorname{Im} z = 0$ на основании теоремы Коши, рис. 10.

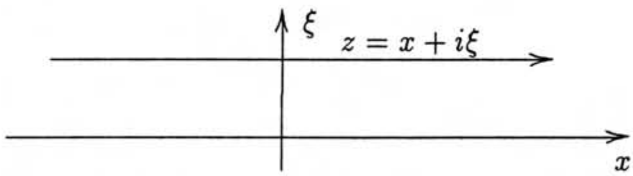


Рис. 10

2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

$$\varphi(\xi) = \int \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{x^2+1} dx = \int\limits_{\operatorname{Im} z = 0} \frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^2+1} dz$$

$$z = x + yi, \quad |e^{-2\pi i z \xi}| = e^{2\pi y \xi}.$$

Пусть $\xi > 0$. Будем сдвигать контур вниз; интеграл, очевидно, стремится к нулю и, следовательно, будет равен нулю ниже полюса. По пути контур зацепится за полюс и останется:

$$-2\pi \operatorname{Res} \frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^2+1} = -2\pi i (z+i) \left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z^2+1}\right)\Big|_{z=-i} = -2\pi i \frac{e^{-2\pi\xi}}{-2i} = \pi e^{-2\pi\xi}.$$

Аналогично при $\xi < 0$ получим $\pi e^{2\pi\xi}$. В итоге $\varphi(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$, рис. 11.

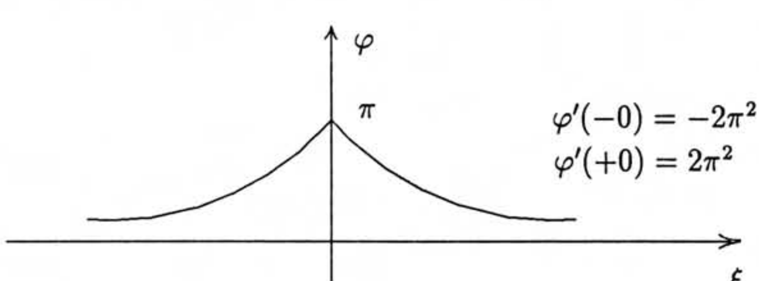


Рис. 11

Особенность полученной функции в нуле связана с конечным порядком убывания исходной функции. Свойства убывания связаны с гладкостью Фурье-образа.

Лекция 4

Преобразование Фурье и преобразование Радона

Напомним свойства преобразования Фурье на прямой:

Теорема 1. Если $\int\limits_{\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, то $\varphi \in C(\mathbf{R})$ и $\varphi \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Теорема 2. Если $f \in S$, то $\varphi \in S$.

Теорема 3 (Планшереля). $\int\limits_{\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx$.

Теорема 4 (Формула обращения). Пусть $f \in S$, тогда

$$f(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Упражнение. Докажите теоремы 1, 2.

Задача. Докажите теорему 3.

Указание. В среднем можно приблизить суммируемую функцию ступенчатыми функциями: $f_\varepsilon \sim f$, $f^2 \sim f_\varepsilon^2$, т.е. $\int |f|^2 dx \approx \int |f_\varepsilon|^2 dx$. У ступенчатой функции преобразование Фурье явно считается. В частности, для функции, представляющей собой одну ступеньку (см. рис. 1), преобразование Фурье равно

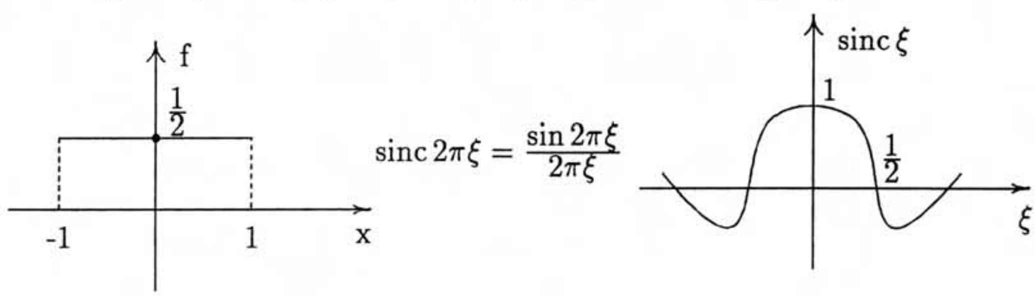


Рис. 1

Ступенчатая функция — линейная комбинация ступенек, значит преобразование Фурье тоже явно вычисляется.

Проверим равенство интегралов квадрата ступеньки и sinc. При сдвиге ступеньки интеграл квадрата не меняется, а преобразование Фурье умножается на экспоненту, модуль которой равен 1, т.е. интеграл квадрата модуля тоже не меняется.

В случае линейной комбинации ступенек в образе получится сумма функций sinc. Значит, в частности, должна быть верна формула:

$$\int |s_1(\xi) + s_2(\xi)|^2 d\xi = \int |s_1|^2 d\xi + \int |s_2|^2 d\xi.$$

Чтобы ее проверить, остается установить соотношение $\int \bar{s}_1 s_2 d\xi = 0$. Оно верно, если основания ступенек не пересекаются (проверьте!).

Следствие. Пусть $f_i \in S$ переходит при преобразовании Фурье в φ_i, $\quad i = 1, 2$. Тогда $\int f_1 \bar{f}_2 dx dx = \int \varphi_1 \bar{\varphi}_2 d\xi$, т.е. преобразование Фурье сохраняет L^2-скалярное произведение.

Преобразование Фурье на плоскости

Рассмотрим плоскость с евклидовой структурой E. Для всякой непрерывной функции A, равной нулю вне некоторого круга, можно определить интеграл Римана (см. рис. 2):

$$\sum f(p_i)|\pi_i| \to \int f dS,$$

где $\{\pi_i\}$ — разбиение E на мелкие прямоугольники, p_i — любая точка в π_i, $|\pi|$ — площадь прямоугольника π.

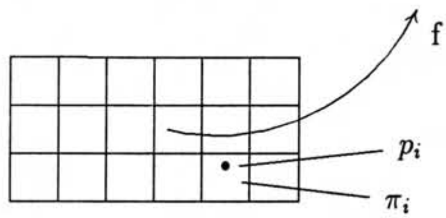


Рис. 2

Для корректности определения надо проверить независимость от выбора ортогональной системы координат.

На плоскости действует группа сдвигов $G \cong \mathbf{R}^2$. Она действует и на функции $T_g f(x) = f(x+g), g \in G$. Можно искать характеры G, т.е. одномерные инвариантные подпространства этого действия:

$$\forall g \in G \quad T_g e(x) = \lambda_g e(x) \text{ или } e(x+g) = \lambda_g e(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^2. \tag{16}$$

На прямой мы такие функции нашли — это экспоненты. В случае плоскости мы выбираем координаты $x = (x_1, x_2)$ на E и координаты $g = (g_1, g_2)$ на G. Используя соотношение (1) для $g = (g_1, 0)$, мы находим $T_g e(x_1, x_2) \equiv e(x_1+g_1, x_2) = \lambda_g e(x_1, x_2)$. Отсюда

$$e(x_1, x_2) = C(x_2) e^{2\pi i \xi_1 x_1}, \quad \xi_1 \in \mathbf{C}.$$

Аналогично, применяя (1) к $g = (0, g_2)$, получаем $e(x_1, x_2+g_2) = \lambda_g e(x_1, x_2)$, поэтому $C(x_2)$ тоже экспонента:

$$C(x_2) = C e^{2\pi i \xi_2 x_2}, \quad \xi_2 \in \mathbf{C}.$$

Итак, $e = C e^{2\pi i (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)}$.

$$e_\xi(x) = e^{2\pi i \xi x}, \quad \xi \in (\mathbf{C}^2)^*, \quad \xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2.$$

Предположим, что вектор ξ — вещественный, то есть $\xi \in (\mathbf{R}^2)^*$. Тогда характер e_ξ есть ограниченная функция. Уравнение $\xi x = \lambda$ определяет прямую, ортогональную вектору ξ, $\quad |p| = \frac{<x,\xi>}{|\xi|}$ (см. рис. 3).

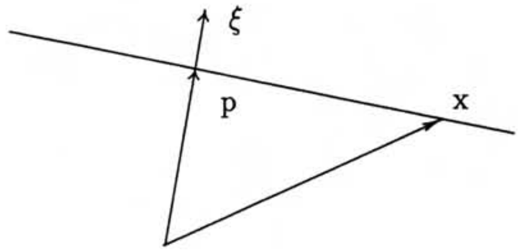


Рис. 3

Экспонента e_ξ постоянна на каждой такой прямой, т.е. по каждому ортогональному ξ направлению. Поэтому экспоненты являются плоскими волнами. При ограничении на прямую, идущую вдоль вектора ξ, получается обыкновенная экспонента — профиль плоской волны.

Пусть теперь $\int |f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2 < \infty$, положим

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = \int f(x_1, x_2) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

Все приведенные выше теоремы допускают обобщение на случай преобразования Фурье на плоскости:

Теорема 1. Если $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$, то $\varphi \in C((\mathbf{R}^2)^*)$, и $\varphi \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.

Теорема 2. $f \in S \Rightarrow \varphi \in S$.

Теорема 3. $\int\limits_{E^*} |\varphi|^2 d\xi = \int\limits_E |f|^2 dx$, причем евклидова структура переносится на E^* засчет отождествления E и E^* как векторных пространств.

Теорема 4. Если $f \in S$, то $f(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \varphi(\xi) d\xi$.

Пример. Представим в виде интеграла Фурье функцию f — индикатор единичного круга (“пудинг”), см. рис. 4.

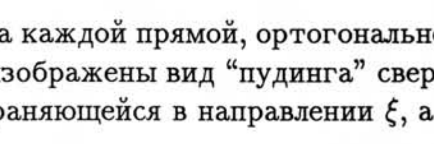


Рис. 4

Характер постоянен на каждой прямой, ортогональной вектору ξ, частота профиля равна $|\xi|$. На рис. 5 изображены вид “пудинга” сверху, вектор ξ, линии уровня плоской волны, распространяющейся в направлении ξ, а также график вещественной части функции e_ξ:

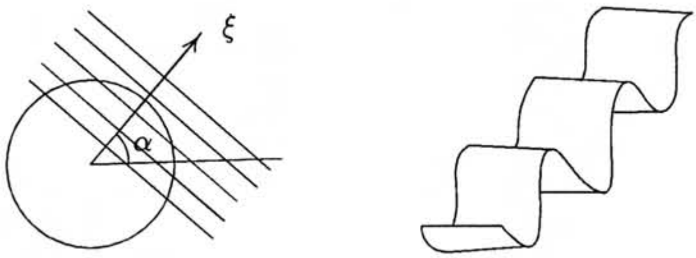


Рис. 5

Суперпозицией таких плоских волн можно получить наш круглый "пудинг"! Это получается так: при интегрировании по α получим "круговые волны" (рис. 6). При интегрировании по $|\xi|$ получим функцию f.

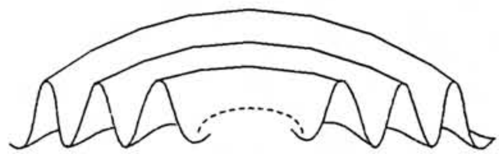


Рис. 6

Причем для φ есть явная формула!

$$\varphi(\xi) = \int\limits_{|x|\leqslant 1} e^{-2\pi i\xi x}dx = \int\limits_0^1 r dr \int\limits_{|x|=r} e^{-2\pi i\xi x}d\alpha,$$

где α — полярный угол.

Вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_{|x|=r} e^{-2\pi i\xi x}d\alpha = \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\pi i r|\xi|\cos\psi}d\psi,$$

где ψ — угол между x и ξ. Правая часть равна $2\pi J_0(2\pi r|\xi|)$, где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Следовательно,

$$\varphi(\xi) = 2\pi \int\limits_0^1 J_0(2\pi r|\xi|)r\, dr.$$

Эта же формула имеет отношение к обращению преобразования Радона.

Напомним преобразование Радона:

$$g(L) = \int\limits_L f ds.$$

Перепишем интеграл в указанной специальной системе координат (рис. 7):

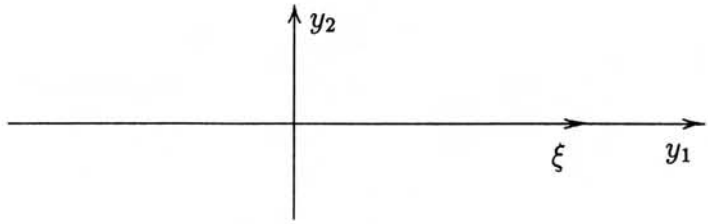


Рис. 7

Ввиду инвариантности интеграла Римана в евклидовом пространстве относительно вращений можно выполнить поворот системы координат в интеграле Фурье:

$$\varphi(\xi) = \int f(y) e^{-2\pi i \xi x} dy_1 dy_2,$$

положив

$$x = y_1 \frac{\xi}{|\xi|} + y_2 \Theta,$$

где Θ — единичный вектор, ортогональный ξ. Мы имеем:

$$\xi x = y_1 |\xi|.$$

Правую часть вычисляем сведением к повторному интегрированию:

$$\int f(y_1, y_2) e^{-2\pi i y_1 |\xi|} dy_1 dy_2 = \int \underbrace{\int f(y_1, y_2) dy_2}\, e^{-2\pi i y_1 |\xi|} dy_1.$$

Здесь внутри стоит преобразование Радона по прямой, зависящей от ξ и y_1 : $\lambda_{\xi, y_1} = \{x : \xi x = y_1 |\xi|\}$.

Итак, получаем в результате интеграл:

$$\int g(\lambda_{\xi,p}) e^{2\pi i p |\xi|} dp.$$

Но f можно восстановить по формуле обращения! Схема восстановления:

$Rf \xrightarrow{(*)} \varphi \xrightarrow{(**)} f$. Здесь **(**)** — обратное преобразование Фурье, а о преобразовании, помеченном **(*)**, сформулируем отдельное утверждение.

Следствие. **(Теорема проекций)** $\varphi(\xi) = \int g(\lambda(\psi, p)) e^{-2\pi i p |\xi|} dp$, где $\frac{\xi}{|\xi|} = (\cos\psi, \sin\psi)$, т.е. ψ — угол между осью x и ξ.

Лекция 5

Обращение преобразования Радона

Обращение преобразования Радона функции f осуществляется по плану:

$$g(\varphi, p) = \int\limits_{\lambda(\varphi,p)} f ds, \quad \lambda(\varphi, p) = \{x\cos\varphi + y\sin\varphi = p\}, \text{ рис.1.}$$

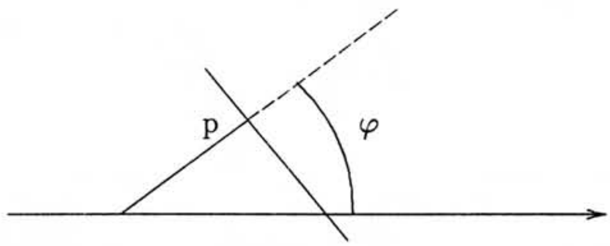


Рис.1

$$g \mapsto \tilde{g}, \quad \tilde{g}(\varphi, \sigma) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\sigma p} g(\varphi, p) dp$$

$$\tilde{g}(\varphi, \sigma) = \hat{f}(\sigma\cos\varphi, \sigma\sin\varphi).$$

Здесь волной обозначается одномерное, а крышкой — двумерное преобразование Фурье.

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \iint e^{-2\pi i(\xi x + \eta y)} f(x, y) dx dy$$

$$\hat{f} \mapsto f, f(x, y) = \iint e^{2\pi i(x\xi + y\eta)} \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Нельзя ли упростить эту композицию за счет того, что в ней использованы "прямые" и "обратные" преобразования? Это действительно можно сделать.

$$f(x, y) = \iint d\xi d\eta \int dp g(\varphi, p) e^{2\pi i(x\xi + y\eta - \sigma p)}, \quad \sigma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

$$\varphi = \arctan\frac{\eta}{\xi}, \quad \xi = \sigma\cos\varphi, \quad \eta = \sigma\sin\varphi, \text{ рис.2.}$$

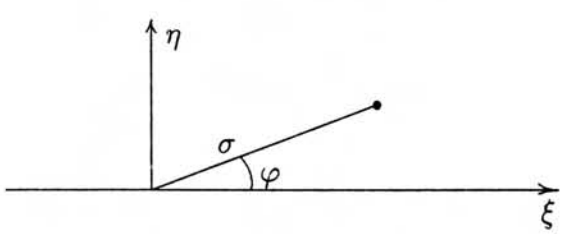


Рис.2

Формально σ может быть и отрицательным, но в силу четности: $g(\varphi+\pi,-p)=g(\varphi,p)$ можно считать σ положительным. Без ограничения общности можно считать, что $x=y=0$.

$$f(0,0)=\iiint d\xi d\eta g(\varphi,p)e^{-2\pi i\sigma p}dp.$$

Здесь g зависит только от полярного угла, а экспонента — только от радиуса на плоскости ξ,η, поэтому естественно во внутреннем интеграле перейти к полярным координатам:

$$\iint hd\xi d\eta=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}h\sigma d\sigma d\varphi,$$

то есть интегрирование происходит в плоскости σ,φ на полуполосе, рис. 3.

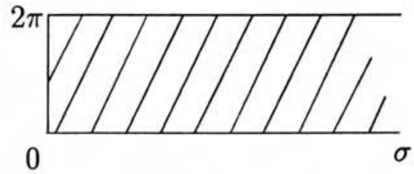


Рис.3

При отображении $(\sigma,\varphi)\mapsto(\xi,\eta)$ полуполоса разворачивается на всю плоскость, как "веер" с бесконечным числом "лепестков".

Итак,

$$f(0,0)=\int\int\sigma d\sigma d\varphi\int g(\varphi,p)e^{-2\pi i\sigma p}dp=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi,p)d\varphi\int\sigma d\sigma\int e^{2\pi i\sigma}pdp.$$

Первый интеграл есть $2\pi F(p)$, где F — среднее интегральное по прямым, находящимся на расстоянии p от рассматриваемой точки, рис. 4, эта функция встречалась уже в первой лекции (см. "Математическое образование", №1 за 1997 г.).

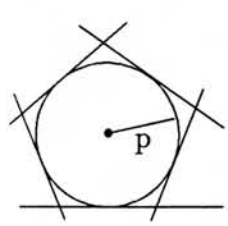


Рис.4

Теперь рассмотрим $\int\limits_0^{\infty}\sigma d\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi\sigma ip}dp$. Этот интеграл не существует с точки зрения классического анализа, но попробуем все же преобразовать его формально. Получим:

$$\int dp \int\limits_0^\infty \sigma e^{-2\pi i\sigma p} d\sigma.$$

Внутри стоит формально преобразование Фурье от функции σ_+, рис. 5.

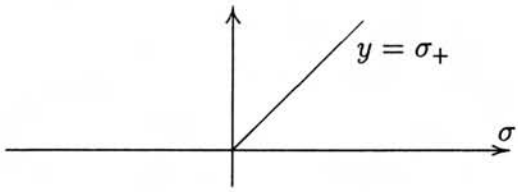


Рис.5

Обозначим его $S(p)$. Окончательно получилось:

$$f(0,0) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p)S(p)dp.$$

Ввиду четности, его можно свести к $\int\limits_0^{+\infty}$. Какой может быть функция S? Попробуем "угадать". Это можно сделать, применив свойства преобразования Фурье.

$$\frac{d}{d\sigma}\sigma_+ = \begin{cases} 0, & \sigma < 0 \\ 1, & \sigma > 0, \end{cases}$$

см. рис. 6. Это функция Хевисайда[1] $\Theta(\sigma)$.

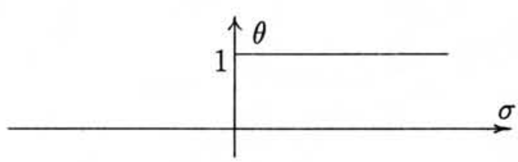


Рис.6

Производная функции Хевисайда равна 0 всюду, кроме 0, но при интегрировании должна дать 1. Это δ-функция.

Таким образом, $\frac{d^2}{d\sigma^2}\sigma_+ = \frac{d\Theta}{d\sigma} = \delta$. Приближением δ-функции служит "столбик", рис 7.

[1]Хевисайд занимался проблемой передачи сигнала по проводам. Искажения сигнала возникают из-за различия скоростей распространения разных гармоник. Для этого и надо сложное колебание разложить на гармоники, то есть фактически совершить преобразование Фурье. Затем изучить распространение гармоник, с переданными гармониками выполнить обратное преобразование Фурье. Все это нашло обоснование в рамках теории обобщенных функций.

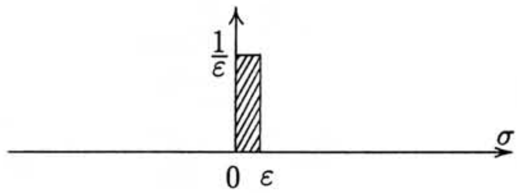


Рис. 7

Попробуем вычислить ее преобразование Фурье.

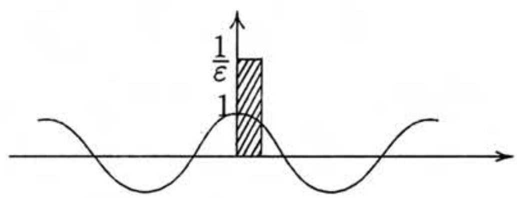


Рис. 8. Изображение вещественной части экспоненты

$\int \delta(\sigma) e^{-2\pi i \sigma p} dp = 1$, так как при умножении, интегрировании и переходе к пределу при $\varepsilon \to 0$ получим просто значение экспоненты в 1. Итак, мы знаем преобразование Фурье от второй производной нужной нам функции.

По свойствам преобразования Фурье $S(p) = -\frac{1}{4\pi^2 p^2}$, так как преобразование Фурье от δ равно $-4\pi^2 p^2$, умноженное на преобразование Фурье от σ_+.

Итак,

$$f(0,0) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(p) \frac{-dp}{4\pi^2 p^2} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{F(p)dp}{p^2} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dF}{p},$$

здесь первый переход сделан на основании четности, а второй — интегрированием по частям.

Мы получили формулу Радона в виде расходящегося (!) интеграла, то есть классически неприемлемым способом. Его можно обосновать в рамках теории обобщенных функций. Поскольку все операции не зависели от выбора начала координат, получаем:

$$f(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dF}{p},$$

где $F(p)$ — усреднение интегралов по прямым, находящимся на расстоянии p от точки (x,y).

В реальной ситуации детекторы учитывают конечное число не настоящих лучей, а полос, рис. 9.

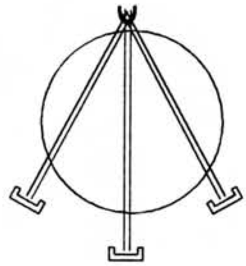


Рис. 9

Следовательно, у нас имеется лишь конечный набор $g(\varphi_i, p_j)$, $i, j = 1, \dots, N$; $F(p_j)$ $j = 1, \dots, N$. В этом случае уже задача численного нахождения производной становится затруднительной. Не накопятся ли искажения так, что пропадет диагностическая ценность? Кроме того, для некоторых точек в области восстановления получится очень мало лучей, проходящих около точек на данном расстоянии.

Мы сталкиваемся с так называемой задачей о дискретизации — задачей восстановления функции по значениям в отдельных точках. Эта задача давно известна в теории сигналов. Ее цели: запись, преобразование, восстановление сигналов. Восстановление: по значениям в точках восстановить исходный сигнал, рис. 10.

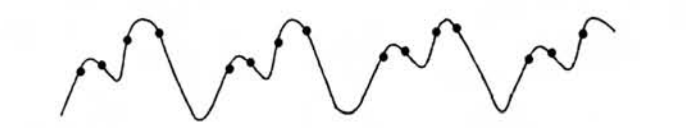


Рис. 10

В принципе, если о сигнале ничего неизвестно, то надо знать значения во всех точках. Но в реальной технической практике встречаются сигналы определенных классов. Например, у голоса спектр частот ограничен. Ухо воспринимает от 16 Гц до 20 тысяч Гц, сам голос создает колебание в еще более узком спектре. Возникает сигнал, "ограниченный полосой", если буквально переводить английское выражение "band-limited". Это означает, что его преобразование Фурье является финитной функцией, рис. 11.

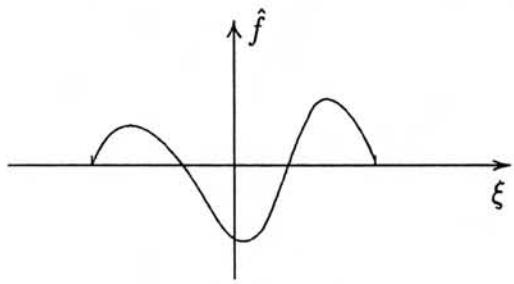


Рис. 11

Тем самым, значения в самом сигнале связаны.

$$f(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Мы называем f сигналом с ограниченным спектром. Для таких сигналов развита теория восстановления.

Лекция 6

Функции с ограниченным спектром

Функции с ограниченным спектром f, такие что: $f \in L_2(\mathbf{R})$, $\tilde{f}(\xi) = 0$ почти всюду, если $\xi \in \mathbf{R} \backslash [\alpha, \beta]$ ($\tilde{f}(\xi)$ — преобразование Фурье для функции f), см. рис. 1.

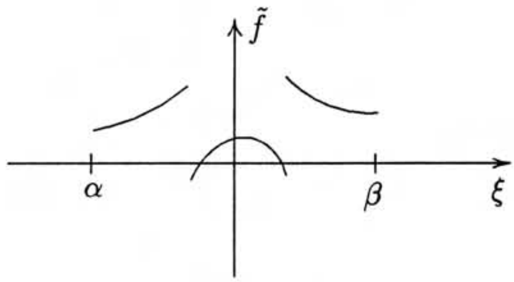


Рис. 1

Такие функции f образуют линейное пространство, так как если f_1, f_2 — функции с ограниченным спектром, то и функция $(c_1 f_1 + c_2 f_2)$ — функция с ограниченным спектром в силу свойства преобразования Фурье: $(\widetilde{c_1 f_1 + c_2 f_2}) = (c_1 \tilde{f}_1 + c_2 \tilde{f}_2)$. Если имеются две функции f_1 и f_2, такие, что $\tilde{f}_1(\xi) = 0$, где $\xi \in \mathbf{R} \backslash [\alpha_1, \beta_1]$, и $\tilde{f}_2(\xi) = 0$, где $\xi \in \mathbf{R} \backslash [\alpha_2, \beta_2]$, то заведомо $(\widetilde{c_1 f_1 + c_2 f_2})(\xi) = 0$, где $\xi \in \mathbf{R} \backslash ([\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2])$.

Теорема Пэли–Винера (Paley–Wiener). Пусть f — функция с ограниченным спектром: $f \in L_2(\mathbf{R}), \tilde{f}(\xi) = 0, \quad |\xi| > \alpha$. Тогда f имеет целое аналитическое продолжение $f(z)$ на плоскость $\mathbf{C}$ и $|f(z)| \leqslant c e^{2\pi\alpha|y|}$, где $z = x + iy$.

Обратное утверждение. Если есть функция $g \in L_2(\mathbf{R})$, имеющая целое аналитическое продолжение на $\mathbf{C}$ с оценкой $|g(z)| \leqslant c' e^{2\pi\alpha|y|}$, то g — функция с ограниченным спектром: $\tilde{g}(\xi) = 0$ почти всюду при $|\xi| > \alpha$.

Доказательство.

I. (Прямое утверждение) Сначала докажем, что функция f имеет целое аналитическое продолжение.

$$f(x) = \int e^{2\pi i x\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi = (\text{в силу того, что } \tilde{f}(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| > \alpha)$$
$$= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i x\xi} \tilde{f}(\xi) d\xi$$

— интеграл с конечным пределом. $\tilde{f} \in L_2(\mathbf{R})$ в силу теоремы Планшереля.

В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|d\xi = \int_{-\alpha}^{\alpha} 1 \cdot |\tilde{f}|d\xi \leqslant [\int_{-\alpha}^{\alpha} d\xi \int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|^2 d\xi]^{1/2} =$$
$$= (2\alpha)^{1/2} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|^2 d\xi\right)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, $\tilde{f} \in L_1(\mathbf{R})$.

Заметим, что

1) ядро интеграла $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ — это $e^{2\pi i z\xi}$ — голоморфная функция ($z \in \mathbf{C}$) ($e^{2\pi i z\xi}$ — разлагается в ряд);

2) интеграл $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ сходится для любого $z \in \mathbf{C}$ и

3) он сходится равномерно в круге $|z| \leqslant R$, где R — произвольно. Из утверждений 1), 2), 3) следует голоморфность интеграла в любом круге, то есть на всей плоскости.

Положим, пользуясь всем сказанным выше, $f(z) := \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ — целое аналитическое продолжение f.

Оценим $|f(z)|$:

$$|f(z)| = |\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{2\pi i z\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |e^{2\pi i z\xi}||\tilde{f}(\xi)|d\xi.$$

Так как $|\xi| \leqslant \alpha$, то $-\xi y \leqslant \alpha|y|$. Имеем:

$$|e^{2\pi i z\xi}| = e^{2\pi(-y)\xi} \leqslant e^{2\pi i\alpha|y|} \text{ и } |f(z)| \leqslant e^{2\pi\alpha|y|}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|d\xi.$$

Здесь $\int_{-\alpha}^{\alpha} |\tilde{f}|d\xi$ — конечная величина. Мы доказали первую часть теоремы.

II. (Обратное утверждение) У нас имеется целая аналитическая функция с оценкой $|g(z)| \leqslant ce^{2\pi\alpha|y|}$. Надо доказать, что $\tilde{g}(x)$ — функция с ограниченным спектром, то есть для $|\xi| > \alpha$: $\tilde{g}(\xi) = 0$. Предположим, что $|g(z)| \leqslant \frac{e^{2\pi\alpha|y|}}{|z|^2+1}$. Благодаря этому условию на всякой прямой $y = \mathrm{const}$ в $\mathbf{C}$ наша функция суммируема, поскольку $|g| \leqslant \frac{c}{|x^2|+1}$. Поэтому функция $\tilde{g}$ непрерывна на всей оси и стремится к нулю на бесконечности (см. Лекция 4, Теорема 1).

Найдем преобразование Фурье.

$$\tilde{g}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i\xi x}g(x)dx = \int_{y=\eta} e^{2\pi i\xi z}g(z)dz. \tag{17}$$

Докажем обоснованность перехода (1). Рассмотрим полосу на плоскости переменной z, см. рис. 2.

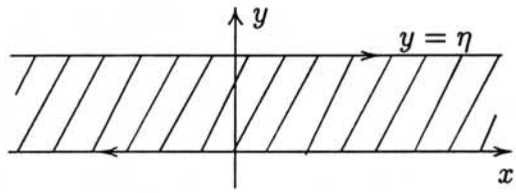


Рис. 2

Посчитаем интеграл:

$$\int\limits_{\partial U} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz = -\int\limits_{y=\eta>0} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz + \int\limits_{y=0} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz + \int\limits_{a} + \int\limits_{b}$$

Заметим, что интегралы по вертикальным отрезкам a и b, равным по длине $|\eta|$, при стремлении $x \to \infty$ стремятся к нулю.

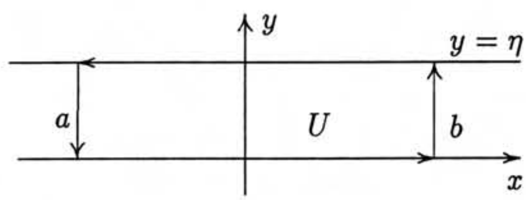


Рис. 3

Применим теорему Коши к голоморфной форме $e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz$. Оценим ее:

$$|e^{-2\pi i\xi z} g(z)| \leqslant \frac{e^{2\pi\xi|y|} e^{2\pi\alpha|y|} \cdot c}{|z|^2+1},$$

отсюда следует, что при любом ξ, $|\xi| \leqslant \alpha$ и $y = \eta$:

$$|e^{-2\pi i\xi z} g(z)| \leqslant \frac{ce^{4\pi\alpha|\eta|}}{|z|^2+1} \leqslant \frac{c'}{x^2+1}.$$

Это обеспечивает сходимость интеграла по любой горизонтальной прямой. Отсюда же следует, что интеграл по боковым сторонам стремится к нулю при "раздвигании" боковых сторон.

Согласно теореме Коши $\int\limits_{\partial U} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz = 0$ и, следовательно, переход (1) верен. Оценим $\tilde{g}(\xi)$:

$$\Big|\int\limits_{y=\eta} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz\Big| \leqslant ce^{2\pi(\xi\eta+\alpha|\eta|)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|z|^2+1},$$

последний интеграл конечен, η — произвольно. Покажем, что $\tilde{g}(\xi)$ обращается в 0 при $|\xi| > \alpha$.

1) Пусть $\xi > \alpha$, тогда $(\xi\eta + \alpha|\eta|) \to -\infty$ при $\eta \to -\infty$ и $|\int\limits_{y=\eta} e^{-2\pi i\xi z} g(z)dz|$ при $\eta \to -\infty$. Но $\tilde{g}(\xi)$ от η не зависит, поэтому $\tilde{g}(\xi) = 0$ при $\xi > \alpha$.

2) Пусть теперь $\xi < -\alpha$, тогда аналогично при $\eta \to +\infty$; отсюда следует, что $\tilde{g}(\xi) = 0$, поскольку $\tilde{g}(\xi)$ от η не зависит.

Общий случай.

1. Рассмотрим функцию $\chi(\xi)$, которая имеет вид, как на рис. 4 и рассмотрим обратное преобразование Фурье от функции $\chi_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\chi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$.

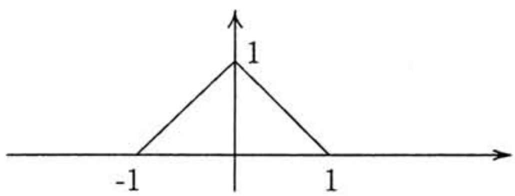


Рис. 4

$h_\varepsilon(z) = \int e^{2\pi i z\xi}\chi_\varepsilon(\xi)d\xi$ — это целая аналитическая функция на $\mathbf{C}$ (согласно утверждению, доказанному в первой части) и $|h(z)| \leqslant \frac{ce^{2\pi\varepsilon|y|}}{|z|^2+1}$.

2. Вместо g рассмотрим $g_\varepsilon = h_\varepsilon g$, тогда оценка для g_ε будет следующая:

$$|g_\varepsilon(z)| \leqslant \frac{ce^{2\pi\alpha|y|}e^{2\pi\varepsilon|y|}}{|z|^2+1} = \frac{e^{2\pi(\alpha+\varepsilon)|y|}}{|z|^2+1}.$$

Из предыдущих рассуждений следует: $\tilde{g}_\varepsilon(\xi) = 0$ для любого ξ, $\quad |\xi| > \alpha + \varepsilon$ и $\tilde{g}_\varepsilon = \tilde{h}_\varepsilon * \tilde{g}$ — свертка функций $\tilde{h}_\varepsilon$ и $\tilde{g}$, причем $\tilde{h}_\varepsilon = \chi_\varepsilon$. Следовательно, $\tilde{h_\varepsilon} * \tilde{\tilde{g}} \to \tilde{g}$ в $L_2(\mathbf{R})$, и поэтому $\tilde{g} = 0$ почти всюду при $|\xi| > \alpha + \varepsilon$, но ε — любое, значит, $\tilde{g} = 0$ почти всюду для $|\xi| > \alpha$. Теорема доказана.

Свойства функций с ограниченным спектром

1. Если f — функция с ограниченным спектром и имеется последовательность точек такая, что $f(x_k) = 0$ и $x_k \to x_0 \in \mathbf{R} \quad (x_k \neq x_j)$, то $f \equiv 0$.

2. Если f — функция с ограниченным спектром, то f' — также функция с ограниченным спектром и, следовательно, ограничена на $\mathbf{R}$. В самом деле $f'(x) = F^{-1}(2\pi i\xi\tilde{f}(\xi)) = 2\pi i\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\xi\tilde{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi$ и

$$|f'| \leqslant 2\pi\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}|\xi\tilde{f}(\xi)|d\xi = 2\pi\alpha\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}|\tilde{f}(\xi)|d\xi \leqslant C_\alpha\|f\|_{L_2}$$

Поэтому функция f с ограниченным спектром не может вести себя произвольно на отрезке $[a, b]$, если значения $f(a)$ и $f(b)$ фиксированы.

Материалы из старых выпусков журнала

Редакция продолжает публикацию материалов из старых номеров журнала "Математическое образование". Напомним, что в №1 за 1997 год была опубликована подборка задач из выпусков 1912-1917 гг. В настоящем номере мы публикуем материалы из №1 за 1914 год и №№1, 2 за 1928 год.

Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования?[1]

Проф. А. К. Власов.

Милостивые государи! Мысль о реформе преподавания математики сделалась в настоящее время всеобщей, и широкой волной захватила не только педагогические круги, непосредственно заинтересованные в деле и предмете преподавания, но и административные сферы, заинтересованные в деле народного просвещения. В различных странах вырабатываются или уже введены новые учебные планы с новыми тенденциями. С другой стороны замечается всюду значительное оживление и в учебной литературе.

Работы Международной Комиссии по преподаванию математики, о которых мы только что выслушали с большим интересом доклад высокоуважаемого проф. Д. М. Синцова, направляют это могучее движение в одно общее русло. Этим работам поставлена задача прежде всего дать обзор существующей организации преподавания математики в школах различных типов, различных стран; подвергнуть тщательной разработке и критике все возможные здесь направления и принципы, чтобы выяснить, какая реформа могла бы привести к действительному прогрессу.

Несомненно, те заключения, к которым придет Международная Комиссия, будут иметь значительный авторитет. Но, мне думается, и раньше, чем будет вынесено такое заключение, было бы интересно подвергнуть обсуждению поставленные вопросы, хотя бы и не во всей их общности и жгучести, обсудить, хотя бы и не располагая тем материалом, который собирает Международная Комиссия.

Один из таких вопросов я и ставлю темой своего доклада первому собранию членов 2-го Всероссийского Съезда преподавателей математики. Я хотел бы выяснить, *какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования.*

Я не сомневаюсь, каждый преподаватель имеет свое собственное мнение в этой оценке, основанное на его знаниях и опыте. Мысли, которые я предлагаю развить

[1]Речь, произнесенная 27 дек. 1913 г. в 1-м общем собрании Съезда (2-й Всероссийский съезд преподавателей математики).

в своем докладе, подвергались обсуждению и критике в небольшом кружке моих друзей, в течение последних пяти лет поочередно собиравшихся друг у друга. В этих обсуждениях участвовали М. Ф. Берг, преподаватель Высших Женских Курсов и директор гимназии при Реформатской церкви; С. П. Виноградов, доцент Коммерческого Института и преподаватель Высших Женских Курсов; ваш покорнейший слуга; А. А. Волков, преподаватель Московского Института Путей Сообщения и Высших Женских Курсов; А. А. Дмитровский, прив.-доц. Московского Университета и преподаватель некоторых женских гимназий г. Москвы и уже отошедший в тот мир к глубокому прискорбию всех нас и всех его знавших А. Ф. Гатлих, который беззаветно был предан делу любовного преподавания математики.

Я должен признать, что наша общая дружеская работа наложила и должна была наложить свою печать на те мысли, которые теперь мне выпала честь за собственною ответственностью изложить перед высокоуважаемым собранием.

Переходя к теме моего доклада, я прежде всего ставлю вопрос, да нужна ли математика всякому образованному человеку и просто человеку? Вопрос этот помоему не праздный. На него давались в различные эпохи или в различных обществах и различные ответы. Вспомнить только гордую надпись при входе в академию Платона: *μηδεὶζ ἀγεωμὲτϱητοξ εἰσὶτω μοῦ τὴν στὲγην* (никто не знающий геометрии да не войдет под мой кров), или совсем противоположного характера мнение нашей русской старины: богомерзостен перед Богом всяк, любящий геометрию. Да и в одном и том же обществе различные члены его держатся часто различного мнения в этом суждении.

Мне вспоминается парадокс, высказанный одним теперь уже давно покойным художником, который защищал свою профессию, нападая на профессию преподавателя научных предметов: мы, художники, учим своих учеников, как писать картины, которые будут рассматривать все, кто интересуется искусством, наслаждаясь ими или критикуя их; а вы, преподаватели научных предметов, чему и для чего учите? чтобы ваши ученики сделались учителями и стали учить тому же, чему и вы? чтобы ученики учеников ваших в свою очередь сделались учителями и стали учить тому же, чему учили вы? чтобы ученики учеников учеников ваших в свою очередь сделались учителями и стали учить тому же, чему и вы, и так до бесконечности. Есть ли смысл в таком направлении преподавания?

Я имею свидетельства острого ума этого художника; несомненно, он высказывал это мнение как парадокс, быть может с горечью подчеркивая, что иногда этот парадокс недалек от правды. Выяснить, какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования, и значит найти выход из этого заколдованного круга.

Уже в официальных объяснительных записках к различным программам дается решение поставленного вопроса примерно в таком виде: задача средней школы — дать учащимся *общее научное образование.* Из этого положения выводится, что цель преподавания математики — *развитие строго логического мышления.* Средством достижения этой цели является *изучение способов доказательств математических истин* и *систематическое* изложение предмета.

Но что значит дать общее научное образование? энциклопедическое? или верхи знания? Я думаю ни то, ни другое. Часто, хотя и невольно, злоупотребляют этим словом "общее образование", и я не берусь точно определить это понятие; но можно свести его к другому, которое, быть может, вызовет более определенное представление. Я думаю, все согласятся, что нельзя считать имеющим общее образование того, у кого ограниченный кругозор. Одними простыми сведениями, как бы ни были они обширны, нельзя расширить своего кругозора, нельзя достичь общего образования. Надо эти сведения *пережить*, надо, чтобы в этом переживании что-то в прежнем кругозоре *уступило после борьбы* место чему-то новому, приводящему уже приобретенное в бо́льшую гармонию. Общее образование в целом не может быть получено в средней школе; средняя школа лишь закладывает основание ему, подготавливает восприимчивость ученика к расширению кругозора.

Задачу средней школы, таким образом, можно было бы определить так — дать образование, возбуждающее работу мысли и интерес к знанию в различных областях наук, результаты которых сделались общим достоянием.

По вышеизложенной официальной точке зрения преподавание математики является *средством развития строго логического мышления*. Говорить о строго логическом мышлении как цели независимо от содержания этого мышления, по-моему, едва ли возможно. Человек, привыкший делать правильные заключения в области математики, едва ли сделает правильный вывод в непривычной ему области, напр., в юридических или общественных науках, а ведь и там тоже говорят о строгой логике. Можно изучить в совершенстве формальную логику и все-таки не уметь сделать правильного вывода в той области, содержание и характер которой не передуманы, не пережиты, не усвоены. Поэтому не изучение способов доказательств математических истин составляет главную задачу изучения математики, само содержание ее, содержание того, что доказывается, представляет большую ценность. Перри, известный автор книг по математике одного из новых направлений, тенденции которого я далеко не разделяю, рассказывает, что он знавал многих молодых людей, которые хорошо умели доказывать, но только не знали, что они доказывали.

Наконец, вызывает у меня сомнение и последний тезис изложенной точки зрения — систематичность изложения предмета. Под систематичностью, может быть, и не разумеется здесь система самого предмета, которую можно усмотреть лишь в целом, лишь в конце изучения, и которая может быть различно построена. Но, при некоторых условиях, и систематичность изложения отдельных частей предмета, ведущая по строго определенной тропе, не сбивающейся в стороны, может совершенно убить самостоятельность мысли, может обратиться в шаблон. Приучаясь идти по проторенной дороге, едва ли мы приобретаем навык не сбиваться вообще с дороги. Нечего бояться скачков мысли или даже ошибок ее: в самих ошибках мысли, если только не утрачена привычка самостоятельно мыслить, заключается ценный момент, обостряющий само мышление, настораживающий внимание, если вовремя и критически или в виде сомнения указана ошибка.

Другое мнение о преподавании математики высказывается в учебниках нового направления.

"Мы дожили до того, что *уменье* применять выводы наук стало *нужно* всякому *образованному* человеку. Надо начинать изучение наук с *сообщения самых нужных умений*, на науках основанных", так высказывается Перри, о котором было упомянуто раньше. "Учить надо только *полезному*, но слово это надо понимать не в узком смысле, а в смысле всего, что увеличивает *работоспособность* ученика", говорит автор другого учебника О. Лодж. Ближайшею целью элементарного обучения математике Перри считает сообщение *уменья* делать *нужные расчеты*. В другом месте к такому утилитарному направлению преподавания вносится поправка: "ученик должен *переоткрыть* для себя всякий преподаваемый ему научный факт".

И эта точка зрения, кроме разве только последнего пункта, возбуждает целый ряд вопросов. Можно ли сообщить умение делать нужные расчеты без понимания того, над чем делаются расчеты? Простое умение применять не всегда обуславливает понимание применяемого. Может быть иногда в этом и нет большой беды. Возьмем для примера московского обывателя, стоящего в стороне от научных интересов. Что сделалось с представлением и речью его с введением электрического освещения и трамвайного движения? Он освоился с этими прежде для него чуждыми фактами, понимает их по-своему и сообразует с ними свое поведение. Мне как-то пришлось слышать в трамвае разговор мальчика лет пяти со своей матерью, который рассказывал ей, как накануне он в трамвае ехал с тетей и вагон их около Никитских ворот вдруг остановился, — и знаешь почему? — прибавил он, — прекратился ток. Пожалуй скажут, что он говорил совсем без понимания. Ну, а если бы он рассказывал про своего товарища Колю, который играя с ним упал, потому что споткнулся, — то разве тоже нужно сказать, что он не знает законов тяготения и равновесия?

Непонимание тех или иных моментов в сложной логической схеме не всегда и не совсем исключает понимание целого. Я даже готов признать возможность логики и в неполном понимании.

Умение и навык могут представлять практическую ценность. Но, конечно, есть разница между умением механическим, умением рутинным, ремесленным и умением с пониманием. Логическое усвоение предмета не всегда обеспечивает приобретение навыка или умения. С другой стороны, предварительно приобретенное умение может при известных условиях способствовать логическому усвоению — это правда; но, если навык обратился уже в рутину, он может явиться и препятствием к логическому усвоению, так как при таком условии может отсутствовать сама потребность в логическом обосновании, отсутствовать скепсис.

Понять — первая стадия усвоения; формальная логика есть средство привести в порядок понятое, а умение и навык — необходимое завершение процесса усвоения, закрепление прав на неотъемлемость усвоенного.

Сравнивая обе рассмотренные точки зрения, я бы сказал: ценность для общего образования представляет не просто хорошо подготовленный логический аппарат и не простое умение или навык, а содержание логически обработанное и приобретенные при этой обработке умение и навык. Ложно будет поставлена задача образования, если тот или иной предмет преподавания рассматривать только как средство формального развития, не обращая особого внимания на жизненную ценность самого содержания. Если такова будет главная задача, то содержание постепенно может быть видоизменено, подменено другим малоценным или даже не имеющим никакой цены. Такое явление наблюдается, например, в эволюции содержания задач по математике. Я не говорю уже о так называемых шитых задачах, но то же можно сказать и о многих других, которые не продуманы до конца в своем содержании, в которых выдвигается лишь математический скелет их, которые отвечают лишь на задание формального развития ума учащихся, а между тем задача должна быть жизнью, как и жизнь является задачей.

Критика рассмотренных точек зрения не дает, конечно, положительного и полного ответа на поставленный вопрос, какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования. Для такого ответа нужно было бы определить предварительно задачи математики как науки, проследить их генезис и историю их развития. Конечно нет возможности при данных условиях сделать полный анализ этих новых вопросов, но, может быть, и нет настоятельной нужды в таком полном анализе. Достаточно отметить, что математическое мышление является средством познания мира со стороны, во-первых, множественности и величины, и, во-вторых, со стороны формы, строения сложного, пространственных представлений. Это раздвоение математической мысли, которое можно характеризовать как аналитическое и геометрическое мышление, всегда сопровождало ее. Этот дуализм коренится в наших первоначальных навыках, являющихся первоисточником всякого математического знания — в нашем уменьи считать и в нашей потребности представлять, изображать, строить из элементарных представлений более сложные. По выражению Пуанкаре, число и вычисление с одной стороны, пространственная интуиция и построение с другой — это два прожектора, направленных на два чуждых друг другу мира, но я бы сказал иначе — два различных прожектора, освещающих различно один и тот же мир. Тенденцию современного критического и аксиоматического направления в математике вытеснить интуицию элементарных понятий и навыков, свести ее на нет, заковывая ее содержание в определения и аксиомы, можно охарактеризовать не только как стремление к строгости, но и как стремление уничтожить дуализм математической мысли, установить монизм, сведя аналитическое и геометрическое мышление к одному — логическому.

Но в такой тенденции мы не можем видеть ответа на поставленный вопрос о ценных сторонах элементарной математики для общего образования. Здесь одна из новейших поставленных проблем математики, математики как научной конструирующейся дисциплины, проблема для математиков и философов, но не задача математики как конструированной системы в целом, математики как предмета преподавания. Тенденция эта необходимо, неизбежно должна предполагать наличность дифференцированного математического мышления, как аналитического, так и геометрического, между тем как цели преподавания такой наличности не предполагают, а наоборот в том и заключаются, чтобы *вызвать в изучающем такое мышление.*

Я и предполагаю, что цель преподавания такой математики, хотя бы и элементарной, заключается в том, чтобы вызвать в учащемся математическое мышление соответственно корням этого мышления, как аналитическое так и геометрическое, как относящееся к числу и вычислению, так и относящееся к пространственному представлению и построению, мышление, которое могло бы служить для него орудием познания мира как со стороны множественности и величины, так и со стороны формы, строения сложного, пространственных представлений. Такое мышление может быть различных степеней, начиная от элементарных, интуитивных навыков и восходя до сложных математических концепций. Где бы оно для данного лица ни кончалось, оно представляет для него ценность. Поэтому возражение, что такое мышление доступно только математикам, а не всем, отпадает.

С этим критерием я и перейду к обзору различных отделов математики.

Число и вычисление — вот что является лозунгом, основой одной стороны математического дуализма. Арифметика, алгебра и математический анализ постепенно и соответственным образом развивают эти понятия, воспитывая в изучающем способность к аналитическому, в смысле математическом, мышлению. Главная задача арифметики и состоит в том, чтобы научить отчетливому и сознательному счету, довести до сознания основные свойства действий в целях достижения отчетливости в образовании понятий числа и вычисления. Вычисление на этой ступени является лишь комбинированным счетом. Здесь я становлюсь явно на сторону так называемых счетчиков среди методистов арифметики: счет является прототипом всякого вычисления. Так называемые интуитивисты, монографисты, выдвигающие понятие числа как образ и из свойств этого образа выводящие понятие о действии, о вычислении, преследуют, по-моему, и достигают иной цели, нисколько не противоречащей цели счетчиков, развивают быстроту, сметливость, живость числового воображения; все это также обогащает математическое мышление, но все это скорее относится к другой его стороне, скорее к пространственному представлению, и не является нервом, проводящим идею вычисления по всем стадиям ее развития.

Но задача арифметики не заключается, конечно, в одном только искусстве вычисления, а и в применении этого искусства к величинам, их измерению и изучению хотя бы простейших зависимостей между ними. Это применение вносит новый момент в вычисление: вычисление должно соответствовать условиям применения, давать ни больше, ни меньше того, что требуется характером данных. Поэтому приближенное измерение, приближенное вычисление, оценка точности измерения и вычисления, понятие об абсолютной и относительной погрешности — все это должно входить в задачу арифметики, и все это ценные стороны ее для общего образования.

Во многих случаях, например, в низших школах, ограничиваются и можно ограничиться этими пределами математического мышления, относящегося к числу и вычислению. Но если математическое мышление должно развиваться дальше, то в арифметике можно усмотреть два пункта, которые связывают ее с алгеброй и высшим анализом. Первое — различение конечного процесса и бесконечного. Вычисление в первоначальном смысле слова обозначает, как уже было мною отмечено, просто комбинированный счет. Но и на этой стадии могут быть поставлены такого рода задачи — как, например, обращение простой дроби в десятичную или нахождение чисел, квадраты которых близко подходят с той или другой стороны к данному числу, — которые приводят к бесконечному процессу, к понятию предела, к расширению понятия числа, к иррациональному числу, расширяют понятие вычисления. Сам факт различения конечного и бесконечного процесса я считаю очень ценною стороной математического мышления и расширяющим кругозор, если он, этот факт, правильно понят.

Второе, — что ведет из арифметики в алгебру и дальше — это комплекс действий как объект мысли. Отсюда буквенное вычисление, в котором больше внимания обращается не на число, а на зависимость чисел между собою. Число как бы отступает на второй план, часто дается неявным, то есть обозначенным буквой или кредитованным в результате невыполненных действий. Отсюда деление чисел на известные и неизвестные, уравнения и неравенства, определяющие неизвестные числа, связанное с этим понятие числа и вычисления. Неполная система уравнений приводит к делению чисел или соответствующих величин на постоянные и переменные, к идее соответствия, зависимости переменных величин, к понятию функции, к функциональному, по выражению проф. Клейна, мышлению. Функциональное мышление становится необходимым орудием познания мира, как только жизнь и потребности жизни, поскольку дело идет о вычислении, становятся сложнее, запутаннее, требующими для своего выяснения не простой только пропорциональности.

Идея бесконечного процесса, комплекс невыполненных действий как объект мысли и функциональное мышление — все это ценные стороны математики, как образовательного предмета. Развитие этих понятий может быть остановлено на любой стадии: от этого они не перестают быть ценными. Не нужно смотреть на установление их как на подготовку к чему-то дальнейшему: сам факт их образования и усвоения расширяет кругозор, представляет ценность.

Другая сторона математического дуализма имеет своей основой пространственное представление и построение, построение из элементарных представлений более сложных. Таким образом, естественной школой развития такого мышления является геометрия. Я не хочу здесь сказать, что аналитическое мышление не имеет отношения к геометрии. Поскольку дело идет об измерении, величинах и зависимостях между ними, аналитическое мышление, в частности и функциональное, распространяется и на геометрию. Но характерным для чисто геометрического является все-таки построение. Этот другой путь математического познания стремится ту или иную математическую мысль воплотить в какой либо геометрической форме, созидаемой путем построения соответственно взаимоотношениям различных сторон воплощаемой мысли.

Пространство является объектом геометрии. Слово "пространство" означает в сущности три различных вещи[2]:

1. Обычно понимаемое интуитивное пространство, свойства его даются нам, как принято думать, интуицией (intueor — смотрю на), воззрением, представлением; другими словами, мы *видим* эти свойства, конечно, внутренним взором.

2. Физическое или эмпирическое пространство, свойства которого познаются нами из опыта, наблюдения путем *восприятия* их нашими внешними чувствами.

3. Геометрическое или абстрактное пространство — понятие, возникающее из

[2]Encyklop. III. A. B. 1.

понятия интуитивного пространства путем отвлечения, идеализирования, обобщения; основные свойства этого пространства *постулируются*, а остальные доказываются.

Только третье понятие — абстрактное пространство — составляет объект геометрии как науки, объект применения логических операций с целью извлечения свойств этого пространства, которые дают возможность отраженно судить до опыта и о свойствах физического, а при некотором просторе представлять их и интуитивно. Сложные свойства едва ли могут уместиться в нашей интуиции как таковой: они превосходят физиологические и психологические данные интуиции. Интуиция как таковая без помощи геометрии, без помощи *сознательного рассуждения* бессильна охватить ту совокупность образов, которые в отдельности, быть может, и воспринимаются интуитивно. Но в чем же состоят рассуждения в геометрии, к чему сводятся эти рассуждения? Ссылка просто на логические схемы едва ли даст ответ на этот вопрос.

Чтобы дать начало, базис рассуждениям, геометрия исходит из определений, аксиом и постулатов. Еще Прокл в своих комментариях к "Элементам" Евклида пытается выяснить разницу между аксиомами и постулатами. Из этих объяснений интересны следующие два[3]: a) Постулаты утверждают возможность *построения*, которое не может быть сведено к другому, принятому как выполнимое; аксиомы выражают свойство, которое без доказательства приписывается фигуре, построимость которой уже постулирована или доказана. b) Аксиомы имеют значения сами по себе, то есть на основании значения, встречающихся в них выражений; постулаты не выявляются с необходимостью из определений входящих в них выражений. Новейшая критика показала, что и аксиомы выражают требования, которые должны быть выполнены и потому в некотором смысле тоже могут быть рассматриваемы как постулаты, а в абстрактно логическом своем направлении эта критика имеет тенденцию рассматривать всю совокупность логических отношений, выражаемых в постулатах, как скрытые неявные определения основных понятий. Эти новейшие тенденции, как я уже сказал, не могут иметь определяющего значения для ценности элементарного преподавания; они суть проблемы математики как конструирующейся науки, проблемы для математиков и философов. Для образования элементарного геометрического мышления имеет бóльшее значение мнение Прокла. В постулатах Евклида отмечены элементарные построения, которые в то же время неотделимы от интуиции. В дальнейшем геометрическое мышление сводится к построению и созиданию новых более сложных образов. Сложный образ представляет совокупность элементарных, связанных построением и рассуждением, объединенных каким-либо рассматриваемым свойством. Если эту познанную совокупность образов, совокупность сцементированную, так сказать, рассуждением, мы будем рассматривать как образ, и этот сложный образ поставим на одну доску с интуитивно представляемым элементарным образом, то тем самым мы расширяем понимание слова "интуиция".

Таким образом, можно будет сказать, что геометрия как деятельность построения обостряет интуицию, обостряет наш внутренний взор, увеличивает емкость

[3] Encykl. III. AB 1.

представления. Представление в этом расширенном смысле есть сокращенное рассуждение и построение, рассуждение, сделавшееся образом.

В этом и заключается ценная сторона изучения геометрии. Помимо практического значения тех образов, которыми обогащается представление, само расширение способности представления увеличивает в то же время способность суждения, и, если деятельный момент построения введен в элементарное представление изучающего, то цель обучения достигнута, независимо от объема геометрического материала.

Милостивые государи, сегодня же в наших секционных собраниях начнется кипучая работа обсуждения и освещения различных сторон математики, как тех, которые имеют ценность для общего образования, так и тех, которые преследуют более специальные темы; будут высказаны разнообразные взгляды соответственно разнообразию опыта участников обсуждения. Но я не сомневаюсь — одна мысль будет звучать во всем разнообразии мнений: мы должны научить идущие нам на смену поколения *мыслить* такими понятиями и образами, которые составляют математические сведения и которые независимо от их объема ценны на всех ступенях знания; мы должны воспитать в молодых умах математическое мышление и тем самым подготовить работников на различных поприщах русской жизни и русской науки.

Математика за последние пятьдесят лет

Проф. А. В. Васильев (Москва)

(Речь, произнесенная в день празднования в Московском математическом кружке 50-летнего юбилея академической деятельности А. В. Васильева 1 февраля 1925 г. В тексте сохранена орфография оригинала.)

За пять лет до своей кончины princeps mathematicorum Гаусс в письме к Шумахеру от 1 сентября 1850 года, опубликованном только в 1917 году в X томе полного собрания его сочинений, высказал по поводу присланной ему работы, основанной на употреблении или, точнее говоря, злоупотреблении расходящимися строками, свои мысли о математике, которые можно рассматривать как его завещание будущим поколениям математиков.

"Характер математики нового времени, - писал он, - противоположен математике древних; наш язык символов и обозначений дает нам могучий рычаг, с помощью которого запутаннейшие рассуждения производятся механически, причем не обращается внимания на те скрытые предположения, на которых основывается его употребление... Математический символизм может быть уподоблен бумажным деньгам. Как бумажные деньги, он может быть употребляем с большой пользой и в больших работах, но как пользование ассигнациями солидно только тогда, когда они каждую минуту могут быть обращены в золотую монету, так и к пользованию временными математическими приемами необходимо предъявить известные требования. Мое требование - строгости и ясности (Strenge und Klarheit) заключается в том, чтобы при всяком употреблении вычисления, при всяком пользовании какими-либо понятиями математик ясно сознавал все условности, им допущенные, и не считал бы без достаточно твердых оснований верными найденные им результаты."[1]

Но еще раньше Гаусса подобные же мысли о необходимости строгости и ясности высказал Лобачевский в предислови к рукописи алгебры, которую он в 1823 году написал для руководства в гимназиях; рукопись осталась ненапечатанной, но сохранилась в библиотеке Казанского физико-математического общества.

Гаусс и Лобачевский имели полное основание и полное право предъявлять к современной им математике такие требования.

Они имели основание, потому что почти ко всем отраслям математики в начале XIX века и много позже были применяемы слова, сказанные д'Аламбертом молодому человеку, смущенному неясностью оснований анализа бесконечно-малых: "Allez en avant lafoi vous viendra". (Идите вперед, потом поверите.) Эти слова могли быть применяемы действительно не только к анализу бесконечно-малых, который был построен на геометрической интуиции. В геометрии Евклида тот же д'Аламберт

[1]Gausi Werke. Zehnten Bandes ersfe Abteilung Leipzig, 1917. S. 434.

называл "скандалом" теорию параллельных линий; другим пятном являлась теория пропорций и, следовательно, теория измерений. Как в алгебре, так и в анализе употреблялись мнимые числа, причем употребление их ничем не было оправдано. В "Introductio in Analysin" Эйлера громадное количество важнейших формул было основано или на введении мнимых выражений, или на употреблении строк без различия – сходящиеся ли они или нет. Известен рассказ о Лапласе, который после исследования копии о сходимости строк поспешил проверить с этой точки зрения все строки "Небесной механики".

Гаусс и Лобачевский имели вместе с тем и полное право требовать от математических работ строгости, так как они сами многое сделали для внесения в математику как строгости понятий, так и строгости выводов. Они оба своими работами по теории параллельных линий, выяснившими независимость одной из аксиом геометрии от других, положили начало тому направлению работ, которого цель заключается в установлении для каждой науки тех основных положений, независимых между собой и непротиворечивых, на которых эта наука должна и может быть построена; такое направление исследований носит теперь название аксиоматического.

Лобачевский (и здесь рядом с ним нужно поставить чешского математика Бернгарда Больцано) понимал, что теоремы анализа не могут считаться строго обоснованными, если они доказываются с помощью геометрической интуиции.

Bolzano дал первое аналитическое строгое доказательство одной из таких основных теорем анализа, и в этом доказательстве уже вводятся те основные рассуждения, на которых основывается современная теория функций от вещественной переменной. Лобачевский и Больцано не считали возможным в геометрическом факте, что непрерывная кривая имеет во всякой точке определенную касательную, видеть доказательство того, что всякая непрерывная функция есть в то же время и функция дифференцируемая. Лобачевский настаивает на отличии между постепенностью (непрерывностью) и непрерывностью (дифференцируемостью). Больцано, как недавно найдено при разборке его рукописей, еще до 1831 г. дал пример непрерывной функции, не имеющей производной. До сих пор считалось, что первый пример такой функции, опубликованный П.Дюбуа Реймондом в 1874 г.[2], был дан Вейерштрассом.

Но, конечно, не один Лобачевский, Больцано, Гаусс, понимали важность и необходимость строгого обоснования начал точности доказательств, теорем анализа и учения о числах от обращения к геометрической наглядности.

В числе ученых, которым много обязана в этом отношении математическая наука, нельзя не отметить Абеля, Коши во Франции, Ohm'а в Германии, Пикока в Англии[3].

В стремлении к выполнению заветов о внесении строгости и ясности в математическую науку, в критическом отношении к началам науки и к способам доказа-

[2] "Crelle Journal". Vol. 79, p. 29. О взглядах Лобачевского на этот вопрос см. мою биографию Лобачевского.

[3] Ohm написал "Versuch eines vollkommen con. Systems der Mathematik", Nurenberg, 1822-1832. "Алгебра" Пикока (1791-1838) вышла в 1830 и в 1842.

тельств и заключается, по моему мнению, первая характеристическая черта того периода, из его наибольших и наиважнейших достижений.

И с этой первой характеристичской чертой периода – со стремлением к углублению и выяснению начал – находится в связи и вторая его черта – развитие новых отраслей математических дисциплин и тех идей, которые брошены были раньше: одни даже в XVII столетии (идея Лейбница о создании геометрического метода независимого от употребления координат и о связи математики с логикой), другие в первой половине XIX столетия (не-Евклидова геометрия, введение мнимых и бесконечных элементов в геометрию, кватернионы Гамильтона и алгебраические ключи Коши, парадоксы бесконечного Больцано, идея группы у Галуа и прочие тонкости у Грассмана). Можно найти в земледелии аналогию этой связи между углублением начал науки и расцветом новых ее ветвей. Поверхностная пашня не дает таких урожаев, как пашня глубокая. "Новь надобно поднимать не скользящей сохой, но глубоко забирающим плугом."

С углублением вначале связана и третья черта этого периода - философское настроение, сознание связи вопросов математики с важнейшими отраслями философии, с теорией познания (гносеологией) и с логикой. Но понимание основных вопросов познания невозможно без ознакомления с их генезисом. Отсюда тот интерес к истории математики, которым отмечено последнее пятидесятилетие. В это время появилось и большое четырхтомное сочинение по истории математики Морица Кантора, появились специальные периодические издания, посвященные истории математической науки, и многочисленные исторические монографии Таннери, Энестрема, Лориа, Цейтена, Ганкеля, В.В.Бобынина и мн. др.

Это философское и историческое направление, отличающее современную высшую математику, имеет громадное педагогическое значение. На его значении для средней школы не раз останавливалось внимание Московского математического кружка. Я с величайшим удовольствием вспоминаю наш второй всероссийский съезд преподавателей-математиков в Москве одиннадцать лет тому назад и прекрасные слова незабвенных Б.К.Млодзеевского и А.К.Власова. В докладе последнего была прекрасно сформулирована цель математического преподавания в средней школе – вызвать в учащемся математическое мышление, как аналитическое, так и геометрическое мышление, которое могло бы служить для него орудием познания мира как со стороны множественности и величин, так и со стороны пространственных представлений[4]. Тогда можно было бы мечтать и о большем – о введении в среднюю русскую школу тех основных понятий высшей математики, которые должны стать достоянием общей культуры, и об ознакомлении учеников средней школы в последний год их пребывания в ней с пограничными вопросами математики и философии и с историей математической мысли[5]. Этими вопросами являются вопросы об основании геометрии, арифметики, анализа, и я перейду теперь к очерку работы последнего пятидесятилетия над этими вопросами в связи с те-

[4]Доклады, читанные на II всероссийском съезде в Москве. 1915, стр.20. (Этот доклад напечатан в настоящем выпуске журнала - Ред.)

[5]А. В. Васильев. "Математическое и философское преподавание в средней школе." Речь, произнесенная при открытии Первого всероссийского съезда преподавателей-математиков 24 декабря 1911 г. Труды Первого съезда. Петербург, 1912 г.

ми новыми отделами математической науки, которые создались и развивались в результате этой работы, и с выяснением значения этих вопросов математики для решения коренных проблем человеческого познания. Я начну с вопроса о началах геометрии и с не-Евклидовой геометрии, этой гордости русской науки.

Заменить ту теорию параллельных линий, которая д'Аламберту представлялась "скандалом" математики, и разрешить таким образом ту загадку, над которой бились математики в течение двух тысяч лет и разрешение которой, как писал всю жизнь мучившийся над ней Вольфганг Болиаи своему сыну Иоганну, "заслуживает награждения алмазом величиной с земной шар", удалось только после продолжительной и настойчивой работы мысли Лобачевскому, удалось также и Иоганну Болиаи. Открытая ими и Риманном не-Евклидова геометрия, с одной стороны, внесла свет в вопрос о началах геометрии и явилась толчком для создания аксиоматического направления, значение которого выходит далеко за пределы чистой математики, с другой стороны, не-Евклидова геометрия послужила исходным пунктом для развития новых отраслей математической науки (теории многообразий n измерений, теории непрерывных групп). Но и для того и для другого необходимо было сопоставить не-Евклидову геометрию с другими парадоксальными открытиями, – с открытием значения для планиметрии мнимых точек на бесконечно удаленной прямой, через которые проходят все круги плоскости, и для стереометрии – мнимого круга на бесконечно удаленной плоскости, через который проходят все шары пространства. Это открытие было сделано молодым французским офицером, взятым в плен в одном из сражений Отечественной войны 1812 г. и интернированным в Саратове. Там, лишенный книг и помощи, поглощенный горем своей родины и своими собственными бедствиями, Понселе имел тем не менее силу духа для занятий наукой и разработал те блестящие идеи, которые и изложил потом в своем "Traite des proprietes projectives" (1822). Но должно было пройти полвека, прежде чем эти идеи были вполне оценены и сопоставлены с идеями не-Евклидовой геометрии. Феликсу Клейну (1849) принадлежит заслуга выяснения как связи проективной геометрии и не-Евклидовой геометрии, так и громадного значения для геометрии теории групп преобразований. В его знаменитой Эрлангенской программе (1872)[6] различные геометрические дисциплины – Евклидова и не-Евклидова геометрия, проективная и конформная геометрии, геометрия кругов и шаров, анализ положения (топология) – рассматривались как частные случаи общего учении о группах преобразований, и Клейн выставил в этой программе общее положение – принцип Клейна, как его справедливо называет голландский математик Скоутен (Schouten), по которому для всех геометрических исследований характерны не рассматриваемые в них элементы (точки, прямая, плоскость или круг, шар), но группа преобразований и связанные с этой группой инвариантные свойства. Так, например, для элементарной планиметрии, которая изучает свойства, не изменяющиеся при всех движениях (в плоскости), перекладываниях, отражениях и подобных преобразованиях, характерна соответствующая группа непрерывных преобразований, не меняющих ни расстояний между точками, ни углов между прямыми. Напротив,

[6]Русский перевод этой программы, принадлежащий проф. Д.М.Синцову, напечатан в Казани Физико-математическим обществом.

проективная геометрия изучает те свойства геометрических функций, которые остаются неизменными при проектировании и сечении, и ей соответствует более общая группа проективных преобразований, подгруппой которой является группа преобразований элементарной геометрии. Исследования Софуса Ли (1842-1899), основанные на создании этим норвежским математиком теории групп непрерывных преобразований, дали ему возможность выделить группы преобразований, соответствующие геометриям Евклида, Лобачевского и Римана[7]. Понятна поэтому с первого взгляда фраза Пуанкарэ: "То, что мы называем геометрией, есть не что иное, как изучение формальных свойств некоторой группы, так что можем сказать: пространство есть группа".

Не-Евклидова геометрия привела не только к изучению теории групп непрерывных преобразований. Основная идея мемуара Риманна заключается в том, что он рассматривает геометрию как частный случай более общего понятия непрерывного многообразия, системы элементов, каждый из которых определяется числами и делает это более общее понятие предметом математического исследования. Он изучает те математические соотношения, которые характеризуют многообразие, и делает в этом исследование два весьма важные допущения. Первое допущение, на которое обратил в последнее время внимание талантливый немецкий математик Вейль, заключается в независимости длины отрезка от его положения. Второе допущение заключается в том, что Риманн принял для линейного элемента в теории многообразий выражение, составляющее обобщение выражения элемента дуги кривой линии на поверхности, из которой Гаусс вывел многие важные результаты внутренней теории поверхностей. Исходя из своих допущений, Риманн пришел к понятию о кривизне многообразий. Все эти исследования Риманна, несколько упрощенные и пополненные в работах Христофелля, Липшица, Ф.М.Суворова, тем не менее представлялись и слишком сложными и недостаточно ясными. Сложность его вычислений привела Риччи к созданию особого исчисления, которое он называл абсолютным дифференциальным исчислением, в котором изучаются аналитические образы – тензоры. Большую ясность внесло в понимание исследований Риманна введенное Леви-Чивита понятие о псевдопараллелизме. Особенное значение приобрели исследования Риманна и абсолютное дифференциальное исчисление, когда гениальные идеи Эйнштейна привели его к заключению о необходимости предположить, что мир событий – многообразие четырех измерений – есть не-Евклидово многообразие, линейные элементы которого представляются той общей формулой, которая была положена Риманном в основу его исследований по дифференциальной геометрии линейных измерений. Но затем Вейль, Эддингстон, Эйнштейн, Скоутен в своих исследованиях пошли уже дальше Риманна, отказавшись от некоторых тех допущений, которые он считал нужным ввести в свои исследования. Так математический анализ ведет к созданию геометрии мира, его гармоничной физической картины.

Нужно ли говорить о том, какое громадное философское значение будут иметь эти математические исследования, имеющие целью в одном синтезе объять все

[7]Эти исследования изложены в третьем томе его большого сочинения "Theorie der Tfansformationsgruppen" – первом сочинении, удостоенном премии имени Лобачевского.

явления, если уже и открытие не-Евклидовой геометрии поставило на очередь пересмотр коренных вопросов гносеологии (теории познания). Напомню те оживленные споры, которые велись и продолжаются и теперь по вопросу об отношении не-Евклидовой геометрии к учению Канта о пространстве как трансцендентальной, не зависимой от опыта форме воззрения. В то время как, например, Кассирер в своей книге, посвященной теории относительности, считает, что как не-Евклидова геометрия, так и теория относительности могут быть согласованы с философией Канта, философы-позитивисты (Пецольд, Энрикес) считают, что то слияние геометрии с физикой, которое является одним из следствий общей теории относительности, подтверждает ту эмпирическую точку зрения Лобачевского, по которой основные понятия геометрии могут "подобно другим физическим законам быть поверяемы опытом, например, астрономическими наблюдениями". Эта эмпирическая точка зрения разделялась и разделяется многими выдающимися астрономами (Болль, Ньюкомб, Гарцер, Шварцшильд).

В той же Эрлангенской программе Клейн указал, что, в виду данного не-Евклидовой геометрией доказательства независимости аксиомы о параллельных линиях от других аксиом геометрии, необходимо провести подобные же исследования по отношению к каждой аксиоме и не только геометрии. Таким путем уже тогда, в 1872 г., была поставлена, в частности, для геометрии цель - дать те основные положения, из которых исключительно логическим путем могла бы быть выведена вся совокупность геометрических задач. "Начала" Евклида в свое время дали решение этой задаче, но это решение уже не могло удовлетворить критическую математическую мысль, пробужденную работами Лобачевского и Риманна. В восьмидесятых годах появились выдающиеся работы Паша, Пеано и его школы. Итальянская школа математиков (Пеано, Пиери, Падоа, Вайлати и др.) обратила особенное внимание на вопрос о полноте и независимости аксиом и первоначальных понятий и о совместимости аксиом между собой, причем преследовала главным образом цель ограничить число первоначальных понятий, принимаемых без определения при логическом построении геометрии. В 1891 г. появилось сочинение Веронезе "Fondamenti di geometria" - обширное сочинение, в котором была впервые построена система не-Архимедовых чисел и таким образом введен в геометрию континуум высшего порядка сравнительно с континуумом всех вещественных чисел. Таковы были главнейшие работы по вопросу об основаниях геометрии, появившиеся в свет до 1899 г., когда Гильберт (1862) в небольшом сочинении дал свою систему аксиом, новое построение теории пропорций и теории измерений и выяснил многие другие основные вопросы геометрии. Та постановка вопроса, которую Гильберт придал задаче обоснования Евклидовой геометрии, резко отличает систему Гильберта от других систем, первоначальные понятия которых имеют эмпирическое происхождение. Основные понятия – "вещи", которым Гильберт придает название точек, прямых, плоскостей, – не суть какие-либо специально определенные вещи и тем менее те геометрические образы, которые мы соединяем с этими названиями. Они определяются исключительно аксиомами, устанавливающими отношения между ними и производными из них. Только совокупность всех девятнадцати аксиом определяет геометрические образы Евклидовой геометрии и позволяет вместе с тем построить геометрию Декарта.

Система Гильберта должна быть, таким образом, рассматриваема как часть общего учения об отношениях. Новая постановка вопроса приобретает вместе с тем большое значение, так как дает новый метод для решения вопроса о совместимости и независимости аксиом геометрии, сводя вопросы геометрии на вопросы учения о числах. Так, например, наиболее важный для аксиоматического построения геометрии вопрос об отсутствии противоречия между аксиомами сводится к вопросу об отсутствии противоречия в аксиомах арифметики[8]. В докладе, прочитанном на II международном парижском конгрессе 1900 г. под заглавием "Математические проблемы", Гильберт поставил эту задачу об аксиомах арифметики в число важнейших задач, на которые должно быть обращено внимание математиков. Позже эта задача была обобщена в задачу об отсутствии противоречия в системе аксиом анализа, т.е. учения о числах в более общем смысле этого слова. Эти исследования аксиом геометрии и анализа привели затем Гильберта к исследованию аксиом других наук. Из числа разнообразных, обнимающих почти все области человеческой мысли аксиоматических вопросов внимание Гильберта привлекали особенно два вопроса: 1) вопрос об аксиомах физики и 2) общий вопрос об аксиоматическом мышлении, тесно связанный с вопросом об аксиомах логики. Первый из этих вопросов связан с интересом Гильберта к общей теории относительности и к теории Ми, в которой материя рассматривается как электрический феномен. Второй вопрос привел его к следующему, имеющему громадное значение для методологии всех наук, заключению: "Все, что может быть предметом научного мышления, подлежит, если только оно созрело для образования теории, аксиоматической методе и вместе с тем математике"[9].

Перейдем теперь к вопросу о началах учения о числах, о выяснении понятий о целом, отрицательном, комплексном, иррациональцом числе. И по этому вопросу, как и по вопросу о началах геометрии, уже в первой половине XIX столетия были высказаны взгляды, развитие которых было осуществлено только в истекшее пятидесятилетие.

Уже в 1835 году Уильям Роан Гамильтон (1805-1865) опубликовал теорию алгебраических пар, которая так много выясняет и теорию отрицательных, и теорию комплексных чисел[10] . В 1843 г. после продолжительной работы он пришел к теории кватернионов и тем положил основание теории гиперкомплексных чисел. В кватернионах Гамильтона был дан первый пример системы чисел, над которыми производятся операции сложения и умножения по тем же законам, по которым слагаются и перемножаются целые числа, но с одним существенным различием: операция умножения не есть уже операция коммутативная ($a \times b$ не равно $b \times a$). Но именно благодаря этому отступлению новая система чисел дает возможность символически изобразить геометрию пространственных векторов (линий, направленных в пространстве). К этому открытию кватернионов и относятся слова Пу-

[8]В 1923 году издан мой перевод "Оснований геометрии" в издательстве "Сеятель", Петроград.

[9]Лекция прочитана в Цюрихе под заглавием "Аксиоматическое мышление" ("Math. Annalen" Bd. 78).

[10]Она изложена в моем курсе "Введение в анализ".

анкарэ: "Здесь в арифметике мы имели революцию, подобную той, которую Лобачевский произвел в геометрии"[11].

Наконец, в 1844 г. Грассман издал свое сочинение "Ausdehnungslehre" ("Учение о протяженности"); целью этого сочинения является развитие учения о протяженности произвольного числа измерений, т.е. протяженности, происходящей от одного и того же элемента по нескольким законам изменения. Частным случаем этого общего учения о протяженности является геометрия, или наука о пространстве; другим частным случаем является учение о гиперкомплексных числах. Судьба глубоких мыслей Грассмана во многом напоминает судьбу "воображаемой геометрии" Лобачевского. Через девять лет после издания книги Грассмана Мебиус писал, что он знает только одного математика, который ее прочел. В рассматриваемый нами период позабытое сочинение Грассмана было перепечатано, вполне оценено его значение и создана новая дисциплина – учение о гиперкомплексных числах; работа Пуанкарэ, Ли, Картана связала это учение с теорией непрерывных групп.

Алгебра гиперкомплексных чисел является обобщением алгебры вещественных и комплексных чисел (произведение двух гиперкомплексных чисел может равняться нулю, хотя ни один из множителей не равен нулю) и привлекла к себе особенное внимание американских математиков (B.Peirce, Shaw, Dickson и мн. др.).

Теория пар, обобщением которой явилось учение о гиперкомплексных числах, внесла большую ясность и определенность в вычисления и доказательства, связанные с употреблением комплексных чисел вида $a + bi$. В начале семидесятых годов, благодаря влиянию Вейерштрасса, было обращено внимание и на теорию иррациональных чисел. Здесь также мы встречаемся с мыслью, которая, по-видимому, не была чужда мышлению Греции. На это указывает парадокс, известный под именем "Колеса Аристотеля". В эпоху Возрождения вопросы, связанные с бесконечным и непрерывным, занимали и Джиордано Бруно и Николая Кузанского. В диалоге Галилея "Discorsi e dimostrazioni mathematiche" (1638) Сальвиати говорит: "Число всех чисел бесконечно, и число их квадратов бесконечно, но число квадратов не меньше, чем число самих чисел... Атрибуты "равный", "больше и меньше" не применимы к бесконечным величинам... Один отрезок линии не содержит больше или меньше или столько же точек, сколько другой, но каждый отрезок содержит бесконечное число". Но никто до Больцано (1781-1848) не вникал так глубоко в "Парадоксы бесконечного". Однако его брошюра под этим заглавием, в которой он развивает следствия, вытекающие из парадокса, что целое равно своей части, была опубликована только после его смерти в 1850 г. Несколько лет тому назад изучение оставшихся после него рукописей показало, как мы уже упоминали выше, что он, подобно Лобачевскому, утверждал, что дифференцируемость не есть необходимое следствие непрерывности, и ранее Вейерштрасса нашел пример функции непрерывной, но не дифференцируемой. Больцано можно считать предшественником Вейерштрасса в его требованиях строгости в началах анализа и Георга Кантора (1845-1918) в создании теории множеств и теории функций от вещественной переменной. Кантор начал печатать свои исследования в 1878 г., и в 1883 г. опубли-

[11]См. его отчет о работах Гильберта, в переводе на русский язык приложенный к моему переводу "Оснований геометрии" Гильберта.

ковал "Основы общего учения о множествах"[12]. Вместо понятия о числе Кантор вводит новое понятие мощности. Для конечных множеств, т.е. агрегатов конечного числа элементов, мощность совпадает с кардинальным числом; для множеств бесконечных замена понятия кардинального числа понятием мощности устраняет парадоксы бесконечного. Не только мощность ряда квадратов целых чисел равна мощности ряда целых чисел, но и все рациональные числа и даже все алгебраические числа могут быть расположены в ряд $u_0, u_1, u_2 \ldots$ и поэтому мощность совокупности всех алгебраических чисел равна мощности ряда чисел (так называемой алеф-нуль)[13]. Напротив, мощность континуума – совокупность не только алгебраических чисел, но и трансцендентных чисел – есть мощность, отличная от мощности перечислимых рядов.

Изучение природы континуума и множеств, отличных по своей природе и от континуума и от перечислимых множеств,. составляет теперь новую ветвь математики, находящуюся в тесной связи с теорией функций от вещественной переменной. Но прежде чем перейти к этой теории, нельзя не остановиться на вопросе о трансцендентных числах. Лиувилль еще в 1851 г. первый доказал существование трансцендентных чисел и показал, как можно составлять примеры таких чисел. Но до сих пор не найден общий критериум, по которому можно было бы решать, есть ли данное число, встречающееся в решении того или другого аналитического вопроса (напр., $2^{\sqrt{2}}$), число алгебраическое или трансцендентное. В 1873 г. Эрмит нашел путь к доказательству теоремы, что e есть число трансцендентное, т.е. что не может существовать равенство $ae^m + be^n + ce^r + \ldots = 0$, где a, b, $c \ldots m$, n, $r \ldots$ суть целые числа. В 1882 г. Линдеманн обобщил доказательство Эрмита и показал, что такое тождество не может существовать и в том случае, если a, b, $c \ldots m$, n, r суть числа алгебраические. Но между числами e и π существует связь $e^{i\pi} + 1 = 0$, и, следовательно, π не есть алгебраическое число. Этот результат положил конец вопросу о квадратуре круга, который в течение двух тысяч лет интересовал и выдающихся математиков, и почти невежественных дилетантов. Линдеманн показал также, что уравнение $e^x = y$ не может иметь места, если x и y суть оба алгебраические числа (за исключением $x = 0$, $y = 1$). В 1923 и 1924 г. наш соотечественник, профессор Д. Д. Мордухай-Болтовской, поставил вопрос о характере чисел e^e, e^{e^e}, $\ldots$, $\lg\pi$, $\lg\lg\pi, \ldots$

Теория функций от вещественной переменной, одним из первых результатов которой является возможность существования непрерывных, но не дифференцируемых функций, указанная Лобачевским, ведет свое начало от мемуара Римана о представлении функций тригонометрическими строками (1854, опубликован в 1867) и от мемуара Ганкеля (1839-1873) о бесконечно часто осциллирующей и непрерывной функции, напечатанного в 1870 г. Все развитие этой интересной области математической науки, которая, несмотря на кажущуюся причудливость исследований, является теперь необходимым основанием вариационного исчисления, произошло в рассматриваемое нами пятидесятилетие.

---

[12]Выпуск №6 "Новых идей в математике", 1914 г.

[13]Читатель может найти подробное рассмотрение этого вопроса, например, в моем "Введении в анализ".

Но не только теории комплексных и иррациональных чисел подверглись новому обоснованию – первая благодаря работам Гамильтона и Грассмана, вторая благодаря Вейерштрассу, Кантору и Дедекинду – и послужили поводом к созданию новых математических дисциплин; основания арифметики целых натуральных чисел были за истекшие полвека также предметом весьма важных исследований.

Теории иррациональных чисел, данные в начале семидесятых годов, подверглись критике со стороны Кронекера. Я помню, как на своих лекциях в 1879 г. он возмущался результатом Кантора, по которому мощность отрезка прямой одинакова с мощностью квадрата или куба. Когда Линдеманн доказал трансцендентность числа π, Кронекер сказал ему, что, по его мнению, этот результат не интересен, так как нет ни трансцендентных, ни алгебраических чисел, существуют только целые числа[14]. Кронекер считал возможным обойтись без введения иррациональных и комплексных чисел, заменяя действия над ними теорией функциональных сравнений по модулю $x^2 - 2$ или $x^2 + 1$. Так, равенство $\chi(\sqrt{2}) = \varphi(\sqrt{2})$ заменялось равенством $\chi(x) = \varphi(x) + F(x)(x^2 - 2)$ или сравнением $\chi(x) \equiv \varphi(x)$ (мод. $x^2 - 2$).

Но эта парадоксальная мысль Кронекера не нашла последователей. Без введения обобщенного понятия о числе современная высшая математика не могла бы достигнуть тех результатов, которые составляют ее славу. Но тем не менее ряд целых натуральных чисел составляет основное понятие математики. Поэтому обоснование теории целых чисел, т.е. сведение ее на наименьшее возможное число основных идей и основных положений, было предметом большого числа исследований; в связи с этим был поставлен и вопрос о том, что такое число. Исследования в области этих вопросов Грассмана, Гельмгольца, Кронекера, Пеано, Фреге, Ресселя, Уайтхеда, Дедекинда, Христофеля, Гильберта и мн. др. – все, за единственным исключением работ Грассмана, относятся к последнему полвеку и составляют, несомненно, одну из его характеристических особенностей. Если не-Евклидова геометрия и теория относительности не может не иметь громадного значения для дальнейшего развития гносеологии, то все исследования в области теории целого числа находились в теснейшей связи с логикой. Гильберт еще в 1904 г. указал, что необходимо "одновременное развитие законов логики и арифметики" и в работах последних лет обосновывает вместе и аксиомы логики и аксиомы арифметики. Бертран Рессель в своей, к сожалению, не переведенной на русский язык, прекрасной книге "Введение в математическую философию"[15] говорит: "Математика и логика развивались в последнее время параллельно; логика стала более математической, а математика более логической. В результате стало теперь вполне невозможным провести линии раздела между ними; фактически они стали одним целым. Они отличаются, как мальчик и взрослый человек: логика есть юность математики, а математика есть зрелый возраст логики... Так много математической работы производится на границе логики, так много в современной логике символического и формального, что тесная связь логики и математики очевидна теперь для каждого, изучающего эти отрасли".

---

[14]Эта же мысль была выражена им в афоризме: "Der liebe Gott schuf nur die ganzen Zahlen, aller Andere ist Menschsnwerk" ("Бог сотворил только целое число, все остальное – дело людей").

[15]"Introduction to Mathematical Philosohy", London, 1919. Существует и немецкий перевод.

Я имел уже случай упомянуть в предыдущем несколько раз о значении теории групп. Эта прекрасная дисциплина, в которой мы имеем и вопросы, доступные для понимания и способные заинтересовать и ученика трудовой школы первой ступени (группа движений, совмещающих правильные многоугольники), и ученика второй ступени (решение в целых числах неравенства $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1$, группа движений, совмещающих правильные многогранники, связь теоремы Фермата с теорией коммутативных групп) и которая в то же самое время является, как было выше сказано, необходимой основой математической теории относительности, развилась и приобрела особое значение также только в рассматриваемый нами период. Можно, правда, вместе с Пуанкарэ видеть намеки на нее даже в работах древних геометров; несомненно, что некоторые основные теоремы ее были найдены Лагранжем при изучении вопроса об алгебраическом решении уравнений, Эйлером и Гауссом – при решении вопросов теории чисел, что еще более было выяснено значение группы для высшей алгебры и введено самое слово – группа – безвременно погибшим французским математиком Эваристом Галуа в 1831 г. и что позже Галуа, до 1870 г., Гамильтон, Коши, Кэли, Серре, Матье, Жордан и др. нашли некоторые важные результаты и теоремы этой теории. Но только в 1870 г. Жордан издал свой большой трактат "Traite de substitutions", в котором найденные ранее результаты теории групп перемещений были изложены в виде стройной системы. В том же году Зилов и Кронекер нашли весьма важные теоремы теории групп. Зиму 1869/70 г. накануне войны, надолго порвавшей завязывавшиеся связи между французскими и немецкими учеными, Клейн и Софус Ли провели в Париже в дружеском единении с Жорданом и Дарбу. Тогда для Клейна и Ли выяснилось значение теории групп, и оба выдающиеся ученые прошлого пятидесятилетия дали могучий толчок развитию этой теории. Клейн в начале семидесятых годов, как мы уже говорили, показал значение теории групп преобразований для геометрии и тогда же начал свои исследования по теории правильных многогранников, т.е. по теории конечных групп линейных преобразований, соответствующих группам движений, совмещающих правильный многогранник с самим собой. Эти исследования, которые в случае икосаэдра совпадают с вопросом о решении общего уравнения 5-й степени, были им потом изложены систематически в сочинении "Лекции об икосаэдре" (1884). Как продолжение этих исследований является, с одной стороны, сведение математической кристаллографии на изучение групп линейных тернарных преобразований, которое и приводит к тридцати двум системам кристаллографии. С другой стороны, рациональные аутоморфные функции теории правильных многогранников естественно вели к изучению тех трансцендентных аутоморфных функций, которые фигурируют в задаче об обращении интегралов линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Эти функции под названием Фуксовых и Клейновых и были изучены Пуанкарэ в его классических мемуарах, напечатанных в "Acta Mathematica" (1882-1884).

Группы Клейна и Пуанкарэ, группы математической кристаллографии суть группы прерывные. Напротив, Софус Ли обратил свое внимание на изучение непрерывных групп и применил их теорию, изложенную им при помощи Фр. Энгеля в сочинении "Theorie der Transformationsgruppen" (1888-1893), к решению задачи

Риманна-Гельмгольца, связанной с вопросом об основаниях геометрии, к многим весьма важным вопросам геометрии и к теории интегрирования дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Несмотря на существенное различие методов теории прерывных и непрерывных преобразований, в основе и той и другой стоят некоторые общие понятия, развитие которых составляет цель абстрактной теории групп, т.е. замкнутых областей операций. Абстрактная теория той или другой группы имеет целью вывести логическое следствие законов сочетания символов, входящих в состав группы. Символы могут обозначать объекты различной индивидуальности: числа, множества, перестановки, движения, симметрии и т.д., но группа характеризуется законами комбинации символов, и поэтому теории групп, относящихся к совершенно различным объектам, вполне тожественны, если группы изоморфны, т.е. законы комбинации их символов тожественны. В абстрактной теории групп получает, таким образом, общее и важное для всей высшей математики применение тот принцип "экономии мысли", на котором так настаивал в своих ученых и философских работах Эрнест Мах[16]. "Весь математический анализ, – говорит Пуанкарэ в своем докладе о работах Картана, – есть в конце-концов только изучение свойств группы операций, т.е. системы, составленной из нескольких основных операций и всех возможных их комбинаций. Если мы извлечем из математической теории все, что является в ней только случайным, т.е. ее материал, то останется существенное, т.е. форма, и вот эта-то форма, составляющая, так сказать, костяк теории, и будет структура группы"[17].

Новые дисциплины, частью вновь возникшие, частью развитые подробно в рассматриваемый нами период, не могли не отразиться и на понимании сущности математики и на самом ее определении. Старое определение математики как науки, имеющей своей целью изучение свойств величин, поскольку они могут быть перечисляемы и измеряемы, определение, данное д'Аламбером и развитое подробно Огюстом Кантом в его курсе "Положительной философии", совершенно не согласуется с большинством этих дисциплин; в них, как, например, в теории групп и в дескриптивной части теории множеств, имеет особенное значение идея порядка. Поэтому в последнее время было предложено несколько определений, выдвигающих на первое место идею порядка и определяющих математику как учение о порядке в многообразии. В "Началах геометрии" Гильберта основные понятия "вещи", которым Гильберт придает название точек, прямых, плоскостей, определяются исключительно аксиомами, устанавливающими отношения между ними и производными из них понятиями. Математика является той общей наукой об абстрактных отношениях, о которой говорил еще Лейбниц, когда он мечтал о возможности свести всякое рассуждение к вычислению и о том времени, когда спорящие вместо шума прений будут говорить друг другу: "сядем за стол и займемся вычислениями".

Мало-по-малу выяснилось, что идея, объединяющая разнообразные математи-

[16]"Принципу экономии в математике" посвящен мой доклад, сделанный на II съезде преподавателей математики в Москве (дек. 1913).

[17]"Acta Mathematica", vol. 38.

ческие дисциплины, идея, наиболее характеризующая истинную сущность математики, есть именно идея вывода следствий, вытекающих из формальных отношений, существующих между элементами многообразия и устанавливающихся аксиомами или, точнее, постулатумами или гипотезами. Отсюда тот ряд определений математики, которые с первого взгляда поражают своей парадоксальностью, как, напр., определение американского ученого Ресселя: "математика есть наука, выводящая необходимые следствия", или юмористическое определение Ресселя: "математика – это такая наука, в которой никогда не знают, о чем говорят, а также не знают, истинно ли то, о чем говорят".

Я ограничусь только сказанным по интересному вопросу о сущности и определении математики, насколько он выяснился из развития математики в последние пятьдесят лет; несколько лет тому назад мною была посвящена особая статья этому вопросу в "Известиях Казанского физико-математического общества".

Углубление в начала, развитие и философское направление, а также значение для философии многих дисциплин чистой математики, связанных с ее основными вопросами и понятиями, не мешало, однако, развитию и других отделов чистой математики и развитию ее приложений, т.е. развитию прикладной математики. И здесь позвольте ограничиться только несколькими указаниями. Так, за это время, с одной стороны, не переставала развиваться и та теория чисел, которая в настоящее время часто подвергается нападкам за ее отрешенность от практических приложений, но которая по этому самому привлекала тех, кому дорога человеческая мысль сама по себе, вне зависимости от ее приложений. Английский математик Стефен Смит провозгласил на одном математическом банкете тост за теорию чисел именно потому, что она не имеет и не будет иметь никаких приложений. Но это предсказание, как и многие другие, не оправдалось: теория квант, роль атомного нумера в периодической системе Д.И.Менделеева заставляют нас думать, что и теория чисел в ближайшем будущем будет иметь громадное значение для математического естествознания.

С другой стороны, не только все отрасли математического естествознания, которые были созданы работой предыдущих веков, – аналитическая механика, небесная механика, математическая физика, – в протекшие 50 лет могут указать на громадные достижения (укажу для примера хотя бы на работы А.М.Ляпунова об устойчивости, на успех задачи о трех телах, развитие кинетической теории, электромагнитной теории света, теории квант и т.д.). Создались именно в эти 50 лет новые отрасли математического естествознания. Создалась трудами Федорова и Шенфлиса математическая кристаллография – это замечательное приложение теории групп, развивается все более и более математическая химия, начало которой было положено знаменитым мемуаром американского ученого Willard'a Gibbs'a. Приложение математического метода к биологии (биометрика), к изучению массовых явлений (математическая статистика) сделало за это время также громадные успехи. Ранее я имел уже случай говорить о грандиозном синтезе общей теории относительности, ставшем возможным только благодаря развитию дифференциальной геометрии n-измерений.

Сказанного, конечно, достаточно для того, чтобы составить представление о громадной работе математической мысли в пятидесятилетие, предшествовавшее мировой войне; эта работа, давшая такие большие и разработанные результаты, является беспримерной в истории математики. В истории человеческой мысли была, впрочем, одна эпоха, которая, насколько можно судить по скудным источникам, дошедшим до нас, несколько походила на наше время по интересу к основным вопросам математики и по пониманию тесной связи, существующей между математикой и философией. Такою была эпоха, когда в греческой науке от VI до III столетия до нашей эры вырабатывались основные геометрические понятия, вопросы о прерывном и непрерывном, о конечном и бесконечном, создавалась и в то же время подвергалась строгой критике атомистическая теория. Но вся эта утонченная работа мысли Зенонов, Протагоров, Демокритов могла почти катастрофически погибнуть, быть смытой, до такой степени, что через несколько столетий один из отцов мог с торжеством воскликнуть: "кто теперь читает Платона и Аристотеля!" Невольно является вопрос, не может ли повториться нечто и теперь по отношению к тем утонченным и близким к вопросам, беспокоившим уже и греческую мысль, теориям, которые занимают такое большое место в современной чистой математике, не заботящейся о непосредственном приложении к жизни, даже подчас пренебрегающей этим приложением (напоминаю тост Стефена Смита). Вопрос этот является особенно жгучим в виду того переворота, который вносится в жизнь человечества увеличением значения физического труда, выступлением на историческую арену народных масс Азии и Африки. Но, думается, можно не бояться. С одной стороны, современная чистая математика может представить много примеров тесной связи между наиболее абстрактными теориями и успехами естествознания и техники[18]. С другой стороны, наука перестает уже быть достоянием небольшого числа народов, как это было во время Архимеда и Аполлония Пергского. Она становится мировой, и четвертой характеристической особенностью пережитого периода является интернационализация математической науки. К очерку этого процесса интернационализации я и перейду теперь.

В конце шестидесятых годов только в трех странах шла интенсивная работа в области математических наук – в Германии, Франции, Англии. В России, в Италии, в Америке работали отдельные крупные ученые (Чебышев (1821-1894), Beltrami (1835-1900), Кремона (1830-1901), B.Peirce (1809-1880)), но математической литературы в этих странах почти не существовало. Что касается Германии, Франции, Англии, то в них существовали обособленные национальные школы; ученые этих стран жили отдельной научной жизнью. В особенности обособлена была английская математическая школа. Английские математики в течение всего XVIII столетия и значительной части XIX столетия, как известно, не употребляли в анализе бесконечно малых ни терминов, ни символов Лейбница и заменяли их флюксиями и точками Ньютона. Это в особенности способствовало их обособлению от математиков континента. Обособлены были и французские и немецкие ученые. Французским математикам не были в семидесятых годах известны исследования Вейерштрасса, которые излагались германским ученым в его лекциях и в

[18]См. об этом мою статью: "Чистая математика на службе естествознания и техники" ("Вестник инженеров", 1925 г., №1, Москва).

его математических семинариях. Только в конце семидесятых годов Эрмит оценил важность работ Вейерштрасса и того стремления к строгости и независимости от интуиции, которое преследовал Вейерштрасс в своих исследованиях. Большое влияние имел в этом отношении тогда еще молодой шведский ученый Миттаг-Леффлер (1846-1927), один из старых учеников Вейерштрасса, друг Софьи Васильевны Ковалевской, уже в самом начале своей научной деятельности поставивший себе целью сблизить математиков различных стран и много способствовавший этому сближению своим журналом "Acta Mathematica"[19]. Эрмит предложил французскому правительству послать молодых французских математиков в Берлин слушать лекции Вейерштрасса, Кронекера, Куммера. В 1879 г. я встретил на этих лекциях покойного Молька, Анри Фогта, итальянского ученого Пимкерле. В том же 1879 году Эрмит начал читать в Сорбонне свой замечательный курс теории функции комплексной переменной, в котором большое место занимают теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера о разложении функций на первичные множители и на частные дроби. Молодая группа французских ученых, в течение последнего пятидесятилетия занявшая такое видное место в математической науке – Пуанкарэ, Пикар, Аппель, – уже прекрасно ознакомились с работами Вейерштрасса, Кантора и Клейна, и мы знаем, как изящно были изложены теории, получившие свое начало в Германии, в коллекции монографий, издаваемой Борелем.

Большое влияние на взаимное ознакомление с работами математиков различных стран имело немецкое издание, мысль которого принадлежала Ортманну, но которое в течение весьма долгого времени велось неутомимым почтенным берлинским математиком Лампе: "Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik". Оно начало издаваться в 1871 г. и его все более и более разрастающийся объем свидетельствует о росте и повсеместном распространении математической работы. Трудно, думаю, оценить ту громадную пользу, которую оно принесло; в частности, конечно, особенно обязана ему русская наука. При поразительном незнании нашего языка иностранцами (и теперь, например, в Германии можно назвать только двух, трех ученых математиков, его знающих, в Италии - только одного, в Англии, я думаю, ни одного), только благодаря Jahrbuch'у русская математическая литература могла сделаться известной математикам других стран.

Как я уже сказал выше, много способствовал сближению математиков разных стран журнал "Acta Mathematica", в первых томах которого появились классические работы Пуанкарэ о Фуксовых и Клейновых функциях, работы Г.Кантора и работы С.В.Ковалевской. Для меня лично приятно вспомнить лето 1882 г., проведенное в Париже, когда мне часто приходилось бывать у этой замечательной русской женщины, видеть в ее квартире корректуры статьи Пуанкарэ, которые через нее пересылались в Стокгольм, и познакомиться с гениальным французким математиком.

Во время войны Mittag-Leffler издал 40-й том своего журнала, посвященный им трем ученым трех стран: его учителю Вейерштрассу, Пуанкарэ и С.В.Ковалевской.

---

[19]Журнал этот начал издаваться в 1832 г. и продолжает издаваться до настоящего времени. В 1924 г вышел уже 45-й том журнала; в 1927 г. вышли тома 50 и 51-й. После смерти Миттаг-Леффлера журнал издается под редакцией проф. Норлунда и Карлемана.

Том этот заключает в себе и драгоценные биографические сведения об этих трех ученых, и материалы громадной важности для истории математики в конце прошлого столетия.

Параллельно с сближением математиков разных стран шло сближение национальное, образование математических обществ, группирующих математиков одной страны. Старейшими из таких доныне существующих обществ является Лондонское математическое общество (1865) и Московское математическое общество, основанное по мысли А.Ю.Давида и Н.Д.Брашмана и имевшее свое первое заседание 23 января (5 февраля) 1867 г.

Вслед за английскими и русскими математиками образовали свои национальные объединения французские математики (Societe mathematique de France, – 1872), итальянские (Circolo matematico di Palermo, – 1883), американские (New-York Mathematical Society, 1881, преобразовавшееся в American Mathematical Society, 1894). Германские ученые, в стране которых существовало значительное число академий и научных обществ и между университетами которых существовала живая связь, сравнительно позже почувствовали нужду в таком объединении. Но в 1890 г. по мысли Г.Кантора, образовалось такое объединение – Deutsche Mathematische Vereinigung – и одною из своих задач поставило составление отчетов о состоянии различных отраслей математической науки. Эти отчеты принесли громадную пользу, и польза, принесенная ими, послужила побудительной причиной к изданию, по мысли и инициативе Ф.Клейна, "Энциклопедии математики", первый том которой появился в 1898 г. Но для того, чтобы это издание давало бы полное представление об успехах, достигнутых математикой в различных странах, необходимо было более близкое общение между математиками различных стран. К тому времени уже имели место многие интернациональные конгрессы (напр., зоологов), принесшие большую пользу науке. Естественно было появление идеи интернационального математического конгресса. Успех конгресса в Нью-Йорке, собравшего уже математиков различных стран (Ф.Клейн[20]), позволял надеяться на успех более тщательно организованных международных математических конгрессов. Инициаторами этих конгрессов были Георг Кантор, гениальный создатель теории множеств и теории трансцендентных чисел, и французский математик и политический деятель Лезан, которого труды по педагогике математики вам известны, инициатор журнала "Enseignement mathematiquo". Но я не могу в этот день не вспомнить с горячей благодарностью к их памяти, что они позволили и мне принять участие в этом деле, а также и то сочувствие, которое это дело встретило у Эрмита и у Пуанкарэ, которых не остановила память о войне 1870 г.

Первый международный конгресс состоялся на нейтральной почве в Цюрихе 9-11 августа 1897 г. Следующий, на котором Hilbert поставил свои 22 проблемы, в Париже в 1900 г., затем следовали конгрессы в Гейдельберге (1904), Риме (1908) и Кембридже (1912). На Кембриджском конгрессе было постановлено собрать следующий конгресс в Стокгольме в 1916 г., причем имелась в виду возможность более широкого участия русских математиков. Катастрофа 1914 г. прервала это дело.

[20]По просьбе покойного священника И.М.Первушина, я послал туда сообщение об одной из его работ по теории чисел.

После окончания мировой войны под эгидой образованного Лигой Наций научного комитета были созваны два "международные конгресса" – один в Страсбурге в 1920 г., другой в прошлом году в Торонто. Но неприглашение немецких ученых вызвало большое неудовольствие среди американских и английских ученых (National Science Workers Association Англии, председателем которого состоял Hardy), и нужно надеяться, что в ближайшем будущем уже соберется шестой, действительно международный конгресс. Но и те пять конгрессов, которые имели место до войны, оставили после себя светлое воспоминание в их участниках, и многие крупные научные и педагогические предприятия обязаны им своим началом. Таковы, напр., издание сочинений Эйлера, образование особой ассоциации для изучения кватернионов и сродственных математических орудий, премия имени Guccia. Но особенное значение имела образованная на конгрессе в Риме в 1904 г. Интернациональная комиссия по вопросам математического образования (J.M.U.K.), о которой нам делал в 1912 г. подробный доклад проф. Д.М.Синцов. По отчету секретаря от 1 апреля 1914 г. 26 стран принимали участие в работе этой комиссии, и все издания ее заключали в себе более 10.000 стр. Одни немецкие отчеты и доклады были напечатаны на 3.822 страницах.

Мировая война прекратила эту работу, которая уже имела большое влияние на подъем во всем культурном мире математического образования, как высшего, так в особенности среднего. Война разрушила уже образовавшиеся мировые связи, она отрезала ученых многих стран на долгое время от общения с товарищами по науке, она почти лишила их в некоторых странах возможности печатать свои работы; она и последовавшие за ней социальные перевороты отразились вообще крайне неблагоприятно на жизни умственных работников, и математики пострадали в этом отношении больше, чем ученые других специальностей, работа которых – нахождение фосфоритов или устройство лучших тепловозов или радиоприемников – или приносит непосредственную пользу, или больше бросается в глаза.

Но мировая война не могла ни прервать развития даже наиболее отвлеченных доктрин математической науки, ни ослабить энергию ученых. Под грохот пушек было сделано первое сообщение Эйнштейна в берлинской академии об общей теории относительности (19 ноября 1914 г.). Через год (20 ноября 1915 г.) Гильберт прочел свой доклад об основах физики. Весной 1918 г., когда для всей Германии стала очевидной предстоящая военная катастрофа, появилось первое издание книги Вейля: "Пространство, время, вещество". Тот X том сочинений Гаусса, о котором я говорил в начале доклада, был издан в 1917 г. с такой же тщательностью, как и предыдущие тома; к нему приложено fac-simile дневника, который вел в юности (с 1796 по 1814 г.) Гаусс. Последние слова этого дневника – "Nil desperari!" ("Не отчаивайся!").

Словами: "Не будем отчаиваться и мы ни в дальнейшем победоносном шествии математической мысли, ни в судьбе русского математического просвещения", позвольте мне, дорогие товарищи, заключить мой затянувшийся доклад.

Турнир Городов

В статье рассказывается о популярном и престижном, ставшем уже традиционным, международном математическом соревновании – Турнире Городов. Приводится краткий очерк истории Турнира, рассказ председателя Оргкомитета Турнира Н. Н. Константинова о текущем состоянии Турнира, итоги 18-го Турнира Городов 1996/97 учебного года, а также задачи осеннего тура 19-го Турнира Городов 1997/98 учебного года и 5-я задача 9-й летней Конференции Турнира Городов.

Из истории Турнира

Подготовлено по изданию "International Mathematics Tournament of the Towns", 1984-1989, P. J. Taylor, Australia

Международный математический Турнир Городов возник в Советском Союзе в 1980 году. В предшествующее этому году время возникла проблема более широкого участия школьников из больших городов (Москва, Ленинград, Киев и т.п.) во Всесоюзной Математической Олимпиаде. В этих городах было много математически одаренных школьников, а положение об Олимпиаде позволяло выставлять для участия лишь очень маленькие команды. Когда оргкомитет Олимпиады под руководством академика А. Н. Колмогорова попытался изменить это положение, то встретился с большими административными препятствиями. Тогда с целью более широко привлечь городских ребят к математическому творчеству было организовано новое соревнование.

В 1980 году Турнир прошел в форме "Олимпиады трех городов" (Москва, Ленинград, Киев). В следующем году добавились новые города-участники, и соревнование приобрело свое нынешнее имя – "Турнир Городов". Сначала Турнир не имел официального статуса, но в 1984 г. был официально признан, а оргкомитет Турнира стал подкомитетом Академии Наук СССР.

В это время были приглашены для участия зарубежные города. Начиная с 6-го Турнира, участниками стали некоторые города Болгарии. Вообще, в Болгарии была очень хорошо развита система математических соревнований, к Турниру быстро присоединились важнейшие города, и для координации болгарских участников был образован национальный оргкомитет Турнира Городов. Болгарские города-участники стабильно показывают высокие результаты в Турнире. Вслед за Болгарией начали принимать участие также города Польши и Румынии.

В 1988 г. Австралия, в которой в то время математические соревнования приобрели большую популярность (в частности, там прошла Международная математическая Олимпиада 1988 года), приняла приглашение участвовать в Турнире. В это же время образовалась Всемирная Федерация Национальных Математических Соревнований (WFNMC). В 10-м Турнире 1988/89 учебного года приняли участие австралийские школьники – первые западные участники Турнира. В следующем, 11-м Турнире, приняло участие уже несколько австралийских городов, а также Гамбург (ФРГ – тогда еще Западная Германия) и Колорадо Спрингс (США).

К 12-му Турниру присоединились или подали заявки на участие города из Канады, Испании, Чехословакии, Ирана, Югославии, Новой Зеландии, Великобритании, Зимбабве, Французской Полинезии, Индии, Индонезии, Сингапура, Израиля, Колумбии, Гонконга и Филиппин.

В августе 1990 года, на первой конференции Всемирной Федерации Национальных Математических Соревнований, проходившей в университете Ватерлоо (Канада), Турнир был официально зарегистрирован как Международный Математический Турнир Городов. Избран международный оргкомитет в составе:

Патрон	Людвиг Фаддеев	Москва
Президент	Николай Константинов	Москва
Вице-президенты	Агнис Анджанс	Рига
	Гельмут Мюллер	Гамбург
	Йордан Табов	София
	Питер Тэйлор	Канберра
	Алексей Толпыго	Киев
Члены	Кирил Банков	София
	Любомир Любенов	Стара Загора
	Алексей Сосинский	Москва
Задачный комитет	Николай Васильев (председатель)	Москва
	Дмитрий Фомин	Ленинград
	Сергей Фомин	Ленинград

Наибольший вклад в Турнир внес Московский оргкомитет под руководством президента – вдохновителя и, фактически, создателя Турнира Н. Н. Константинова. Еще задолго до возникновения Турнира, в 1969-79 годах, Константинов был постоянным членом жюри Всесоюзной Математической Олимпиады.

Турнир Городов: участие, современное состояние перспективы, цели

Н. Н. Константинов, Президент Международного оргкомитета математического Турнира Городов

В Турнире может принять участие любой старшеклассник при единственном условии: в его городе должен существовать местный оргкомитет по проведению Турнира. Таких городов сейчас около сотни, а учитывая, что некоторые большие города организуют турнир для учащихся близлежащих небольших населенных пунктов, несколько больше.

Конечно, мы хотели бы, чтобы любой старшеклассник, где бы он ни жил, мог принять участие в Турнире городов. Но до этого нам пока еще далеко. Общее население городов — участников Турнира сейчас около 70 млн. чел., что составляет примерно один процент населения Земли. Это значит, что примерно один процент старшеклассников имеет возможность принять участие в Турнире городов. Но эти города разбросаны по земному шару очень неравномерно. В офисе Турнира городов в Москве есть глобус, на котором отмечены красными кружочками города — участники турнира. Этих кружочков много в европейской России, включая Урал и Северный Кавказ, на Украине и на Балканах. Несколько меньше — в Австралии и Южной Америке. Еще меньше — в Западной Европе и Северной Америке.

Население российских городов — участников Турнира — около 37 млн. чел., то есть около 25 процентов населения всей России. Для большинства же школьников Земли, живущих вне названных регионов, Турнир пока недоступен.

Работы школьников, написанные в разных городах и странах, попадают для проверки и контрольной перепроверки к нам, в Москву, в Центральное Жюри. Эти работы, а также приходящие с мест отчеты и письма, создают картину мира, которую, к сожалению, видим только мы. Предлагаемый Вашему вниманию беглый обзор не дает возможности увидеть эту картину во всем ее богатстве. Я решил воспользоваться предоставленными мне страницами, чтобы прояснить некоторые детали этой картины.

Прежде всего отмечу, что успехи многих городов и регионов достигнуты благодаря усилиям небольшой группы людей, а иногда всего одного человека. Это, конечно, не любой человек. Требуется талант, квалификация и воля. Но требуется и желание школьников. Без него даже самые энергичные усилия сверху могли бы привести лишь к средненькому результату. И если различия в рейтинге соседних российских городов, живущих примерно в одинаковых условиях, объясняются скорее всего наличием или отсутствием такого человека, то систематические различия между странами имеют более глубокие корни. Может быть, мои пророчества слишком смелые, но я думаю, что если молодые люди рвутся к образованию и соревнуются в дерзости решать неизвестные задачи, то их страна сыграет заметную роль в следующем столетии, так что если хотите узнать будущее, изучайте наш глобус.

Далее хочу отметить, что школьники разных стран, разных культурных традиций и изучающие математику по разным программам, оказываются похожими, даже внешне, если они участники Турнира городов. Это хорошо видно на летней конференции. На ней разрешается сдавать совместные работы, при этом не раз бывало, что творческая группа составляется из школьников разных стран, говорящих на разных языках. Так, школьник из Гамбурга Айке Лау объединился для решения задач с школьниками г. Кирова, школьник из Новой Зеландии Бен Хандли — с москвичом Владимиром Слепневым и т.д. Учтите, что конференция длится всего 8 дней, и на предварительное знакомство для создание такой творческой группы времени нет. Эта легкость преодоления барьеров дает надежду на то, что интеллектуальная элита 21 века, перед которой век наверняка поставит тяжелейшие задачи, будет работать как единая созидающая сила, не разделенная национальными барьерами.

Что, по-моему, следует понимать под элитой? Строгое определение не нужно, да и вредно. Но ориентировочную границу я бы провел, отнеся к элите одного лучшего ученика по данному направлению из одной школы, средней по всем понятиям. При таком подходе получается, что, например, среди старшеклассников Москвы должно набраться около 1000 чел. (в Москве более 1000 школ), то есть один школьник на 10000 населения, по всему же миру, учитывая все трудоспособные возрасты и все направления деятельности, а не только связанные с математикой, набираются миллионы человек. Такая элита могла бы быть общественно значимой, если бы она действительно выполняла свою роль. Задача старшего поколения — помочь ей стать на ноги, не навязывая ей при этом свои идеалы и представления. Я надеюсь, что Турнир городов выполняет часть этой работы (по приблизительной прикидке — одну тысячную часть).

И, наконец, чем можно оправдать принятые в Турнире правила определения рейтинга городов. Они соответствовали бы приведенному пониманию элиты, если бы рейтинг определялся по группе лучших учащихся, в которую входит каждый десятитысячный житель города, а не каждый стотысячный, как у нас принято. И эта повышенная норма вполне реальна для некоторых небольших городов, в которых хорошо поставлена работа со школьниками. Но жизнь требует компромиссов, поэтому пришлось принять норму — один к ста тысячам. Аналогичные прикидки подсказывают желательное число участников городских олимпиад и число победителей в них. Поощряться должен каждый учащийся, который сделал нечто нетривиальное, и таких бывает несколько сот по каждому предмету в больших городах. Стремление выделить одного победителя или небольшую группу может привести к последствиям, противоположным желательным, так как вместо поощрения может получиться отталкивание.

В заключение отмечу, что Турнир городов — это школа. Конечно, он дает лишь дополнение к основному образованию, однако это дополнение может оказаться для продвинутых школьников существенным. Учителя этой школы — руководители Турнира в Центре и на местах. Замечательным достоинством этой школы является то, что мерой успеха учителей служат энтузиазм и успехи школьников, а не число прочитанных теорем, что случается иной раз у молодых профессоров, которых спускают с цепи без намордников на студентов и которые душат их из лучших побуждений. Мы планируем постепенно разнообразить виды работы этой школы, делая ее в большей степени основной.

ИТОГИ 18-го ТУРНИРА ГОРОДОВ (1996 — 97 уч. г.)

Турнир 1996-97 учебного года проходил в два тура: 20 октября 1996 г. и 2 марта 1997 г.

В итоговую таблицу вошли те города, в которых соревнование было проведено без нарушения правил или с отклонениями, которые были признаны несущественными. В таблице 99 строчек, из них две относятся не к городам, а к физико-математическим интернатам — Московскому и Новосибирскому.

Из 97 городов, вошедших в итоговую таблицу, 79 принимали участие в осеннем туре, 88 в весеннем, 70 и в осеннем и в весеннем. Общее население городов-участников Турнира – 77.3 млн. чел. Соответствующие цифры 17-го Турнира: общее число городов – 93, в осеннем туре приняло участие 88 города, в весеннем – 82, в обоих – 77, общее население городов-участников – 79.7 млн. чел.

В российских, украинских и других школах, работающих в такой же системе, что и российские, выпускной класс — одиннадцатый. Учащиеся N-ого класса северо-американских, австралийских, германских, австрийских и некоторых других школ при выборе варианта и подсчете баллов приравниваются к $(N-1)$-ому классу российских школ.

Итоговый балл учащегося в каждом туре, в котором он принял участие, вычислялся как сумма баллов трех лучших задач (тех, по которым он получил наивысшую оценку), умноженная для десятиклассников на 5/4, для восьмиклассников – на 4/3, для семиклассников – на 3/2, для шестиклассников и младше – на 2. Если ученик участвовал в нескольких турах (максимальное возможное число – четыре – два тренировочных и два основных – осенний и весенний), то итог ученика равен максимуму из всех итогов этих туров. Если между осенним и весенним туром ученик перешел в следующий класс (такие случаи бывают не только в южном полушарии, где являются правилом), то затруднений не возникает, так как в этом случае баллы вычисляются осенью и весной по разным формулам. Правила соответствия классов в разных странах определяются по договоренности Центрального и местных оргкомитетов Турнира. В списке победителей указан российский эквивалент номера класса на момент написания учеником последнего по времени варианта.

Итоговый балл города вычисляется как средний балл N лучших работ (N указано в таблице). N всегда не меньше 5, но для городов с населением до 500 тыс, результат умножается на коэффициент K, монотонно зависящий от населения города (коэффициент указан в таблице). Принята формула: $K = 1 + (500-n)/800$, где n — населения города в тысячах.

К сожалению, число участников Турнира не всегда аккуратно сообщается Центральному жюри, поэтому сведения об общем числе участников неполны. По отчетам и присланным работам устанавливается, что число участников не меньше 7700, фактически же, вероятно, не меньше восьми – восьми с половиной тысяч.

Во время турнира учащимися были решены все предложенные задачи.

Хорошими можно считать итоги городов, набравших не меньше 11 баллов в командном зачете. Дипломами победителей Турнира (от имени Центрального и местного оргкомитетов, Центрального и местного жюри) награждаются учащиеся, набравшие не меньше 11 баллов (после умножений). Таких учащихся 706.

В некоторых городах учащиеся решали задачи не в тех условиях, которые регламентируются правилами. Так в Белграде, впервые включившемся в Турнир городов, задачи основного варианта были даны на дом на неделю. Учащиеся показали очень хорошие результаты, однако их нельзя принять как результаты правильного участия в Турнире. Отклонения от регламента зафиксированы также в Сарове, где результаты школьников также очень хорошие. Центральное жюри рекомендует наградить группу школьников этих городов дипломами от имени оргкомитетов и жюри этих городов.

Население городов приводится главным образом по данным местных жюри. В случае отсутствия данных местных жюри Центральное жюри использовало сведения из справочников.

Как и в прошлые годы, с 1-го по 8-е августа проходила Летняя конференция Турнира городов (девятая по счету). На этот раз конференцию принимал г. Переславль-Залесский (Ярославская область). На конференцию были приглашены учащиеся 9 и 10 классов, набравшие больше 17 баллов в прошедшем Турнире, а также, по представлению местных жюри, и те, кто показал результаты соответствующего уровня на других математических соревнованиях. Отчет о Конференции готовится к печати. Частично он опубликован в журнале "Математическое образование", №2 за 1997 г.

(По просьбе организаторов Конференции вносим уточнение: задача №6 представлялась также А. Манистовым и И. Ивановым. Они же являются авторами некоторых ее пунктов.)

Одну из задач 9-й Конференции, которая не была опубликована в указанном выпуске по техническим причинам, мы приводим в настоящей статье.

ИТОГОВАЯ ТАБЛИЦА 18-го ТУРНИРА ГОРОДОВ (1996/97 уч. г.)

город	нас	R	N	K	O	B	A	П	T	D
Акмола	280	Кз	5	1.27	96	96	21	8.75	11.79	1
Алматы	1200	Кз	12	1	—	83	13	6	8.6	1
Ангарск	300	C	5	1.25	(4)	7	5	2	17.38	3
Армавир	180	P	5	1.4	56	39	16	12	19.13	7
Баия Бланка	200	Ar	5	1.38	24	32	8	5	14.67	2
Беер-Шеба	200	Is	5	1.38	52	34	5	8.5	9.93	2
Белорецк	75	Бш	5	1.53	73	81	24	17	30.47	21
Битола	100	Mc	5	1.5	9	10	9	7	14.7	1
Богота	5000	Cl	50	1	(50)	59	90	3	6.4	3
Брянск	480	P	5	1.02	—	13	3	0	10.71	3
Букараманга	500	Cl	5	1	(6)	7	12	3	4.27	—
Буэнос Айрес	3000	Ar	30	1	145	120	47	5	9.8	10
Велико Търново	75	Бл	5	1.53	—	(4)	4	0	15.6	2
Верхняя Салда	80	C	5	1.52	50	(1)	15	4	9.76	—
Винница	450	У	5	1.06	(11)	(9)	16	14.67	18.92	9
Волгоград	1000	P	10	1	700	80	34	11	12.47	13
Волжский	300	P	5	1.25	90	40	17	11.25	16.44	7
Вологда	250	P	5	1.31	40	(50)	77	12.5	21.57	8
Воткинск	100	P	5	1.5	(7)	—	7	4	9.4	—
Гамбург	1800	D	18	1	52	64	25	5.33	8.13	—
Горячий ключ	30	P	5	1.59	15	18	9	4	9.21	—
Грац	400	Ös	5	1.12	33	33	19	7.5	12.13	2
Данидин	100	Nz	5	1.5	(1)	(1)	1	0	—	1
Днепропетровск	1100	У	11	1	49	—	7	0	4.68	—
Долгопрудный	80	P	5	1.52	—	43	43	14	23.03	18
Донецк	1200	У	12	1	70	—	11	0	5.56	1
Ереван	1200	Ap	12	1	132	207	22	14	16.24	19
Жуковский	107	P	5	1.49	42	(9)	13	19.5	32.11	6
Зелена Гура	110	Po	5	1.49	—	38	6	6.25	12.12	—
Иваново	480	P	5	1.02	79	90	14	11	13.38	5
Иерусалим	500	Is	5	1	10	6	2	0	4.1	1
Ижевск	650	Уд	7	1	92	80	14	14.67	15.69	10
Кавадарци	40	Mc	5	1.57	6	8	7	9	16.04	2
Казань	1100	T	11	1	150	100	20	10	12.86	7
Калуга	300	P	5	1.25	32	(22)	22	9	17.6	3
Канберра	274	Au	5	1.28	52	34	11	13.33	17.95	7
Киев	2600	У	26	1	132	41	48	12	17.23	33
Кинешма	110	P	5	1.49	—	25	8	4	8.83	—
Киров	500	P	5	1	263	154	55	16.25	24.05	27
Кирово-Чепецк	100	P	5	1.5	85	56	17	13	21.65	9

город	нас	R	N	K	O	B	A	П	T	D
Коростелево	1	P	5	1.62	6	(6)	9	9	17.05	2
Кострома	300	P	5	1.25	—	(10)	10	11.25	15.48	6
Крайстчерч	308	Nz	5	1.24	(6)	7	12	5.33	10.62	1
Краснодар	780	P	8	1	210	210	35	14	15.36	16
Красноярск	1000	C	10	1	—	41	18	6.25	8.33	1
Кропоткин	90	P	5	1.51	10	9	5	9	18.45	2
Курганинск	50	P	5	1.56	—	72	7	10	18.1	4
Львов	900	У	9	1	—	30	9	10	13.73	8
Любляна	341	Sl	5	1.2	2.1*	25*	6	7	14.38	4
Майкоп	170	Ад	5	1.41	30	25	12	9.33	15.73	2
Марибор	130	Sl	5	1.46	*	*	1	0	2.92	—
Москва	9000	P	90	1	358	—	358	6.67	11.40	40
Москва-СУНЦ	—	P	—	—	20	—	20	—	—	4
Набер. Челны	600	T	6	1	97	127	13	15	16.17	9
Нарва	80	Ee	5	1.52	23	12	20	11.25	18.62	7
Нефтекамск	100	Бш	5	1.5	—	(6)	6	0	3.87	—
Н.Новгород	1500	P	15	1	—	(32)	32	11	13.23	17
Н.Тагил	450	C	5	1.06	12	12	3	0	9.14	2
Новосибирск	1400	C	14	1	136	95	25	10	12.91	12
Новосибирск-СУНЦ	—	C	—	—	(1)	—	1	—	—	—
Новочебоксарск	100	Чу	5	1.5	*	—	1	0	1.35	—
Новый Сад	200	Ю	5	1.38	(9)	(7)	10	21	33.73	10
Норильск	300	C	5	1.25	(121)	(103)	202	8	10.25	—
Одесса	1100	У	11	1	43	—	15	5.33	9.76	4
Омск	1100	C	11	1	83	75	51	14.67	16.77	30
Первоуральск	200	C	5	1.38	42	(4)	14	10	18.15	3
Пермь	1000	P	10	1	32	42	12	9	11.43	8
Перт	1200	Au	12	1	28	29	20	8	9.83	3
Раменское	100	P	5	1.5	11	—	7	5	12.9	1
Ростов-на-Дону	1200	P	12	1	30	34	19	6.25	10	5
Русе	300	Бл	5	1.25	—	40	16	13.33	18.33	8
Рязань	560	P	6	1	61	44	17	12	14.94	8
Самара	1100	P	11	1	—	34	25	0	0.91	—
С.-Петербург	4700	P	47	1	50	69	77	10.5	16.3	42
Симферополь	450	У	5	1.06	18	—	6	3	9.14	3
Скопье	500	Sl	5	1	16	9	11	11	14.73	5
Сосновый Бор	80	P	5	1.52	120	102	30	11	17.23	5
София	1000	Бл	10	1	(78)	(58)	88	16	18.5	32
Стерлитамак	100	Бш	5	1.5	—	(9)	9	6.25	12.38	1
Стокгольм	700	Sv	7	1	—	31	11	10	11.64	6
Суботица	96	Ю	5	1.5	(3)	(1)	3	0	8.83	1
Ташкент	2285	Уз	23	1	259	249	50	6	8.8	7
Тель-Авив	1500	Is	15	1	62	53	30	11.5	15.65	21
Тихвин	80	P	5	1.52	—	50	5	6	11.82	—
Тобольск	110	C	5	1.49	19	16	21	8	15.1	1

город	нас	R	N	K	O	B	A	П	T	D
Торонто	3600	Cn	36	1	(40)	100	59	5.33	9.61	12
Трой	500	US	5	1	(2)	4	4	0	4.7	1
Тула	600	Р	6	1	82	49	13	8	11.03	4
Уфа	1000	Бш	10	1	812	512	31	10.67	11.25	9
Хабаровск	800	С	8	1	—	50	7	0	6.97	—
Хайфа	600	Is	6	1	88	75	26	15.5	16.96	22
Харьков	1500	У	15	1	42	35	47	17	24.16	28
Хобарт	133	Au	5	1.46	5	12	9	6.67	12.35	1
Целе	39	Sl	5	1.58	*		2	0	5.36	1
Чебоксары	500	Чу	5	1	484*	110	47	13.75	15.1	16
Челябинск	1200	С	12	1	123	60	34	12.5	16.95	20
Череповец	350	Р	5	1.19	34	146	19	9	13.12	2
Шарлот	500	US	5	1	(4)	4	7	2.67	5.63	—
Эдмонтон	650	Cn	7	1	23	13	9	9.33	12.08	6

* Число участников в Любляне дано в сумме с числом участников в Мариборе и Целе, число участников осеннего тура в Чебоксарах дано в сумме с числом участников в Новочебоксарске.

Города, в которых Турнир проведен с отклонениями от регламента.

Белград	1000	Ю	10	1	(9)	—	(9)	10	9	9
Саров	500	Р	5	1	39	(6)	39	45	18	15

Обозначения:

нас — население города (в тысячах);
R — регион (см. обозначения регионов);
N — число работ, идущих в зачет города;
K — коэффициент, льготный для небольших городов;
O — число участников осеннего турнира, если оно было сообщено центральному жюри (черточка означает, что город, по нашим сведениям, в данном туре участия не принимал, число в скобках — это число авторов работ, которые (или сведения о которых) были присланы в Центральное жюри);
B — число участников весеннего тура (аналогично);
A — число авторов, рассмотренных жюри (как правило Центральным);
П — балл последнего из N учащихся в зачетном списке;
T — итоговый балл города;
D — число дипломов.

Обозначения регионов:

Au	—	Австралия,	Cn	—	Канада,	US	—	США,
Os	—	Австрия,	Cl	—	Колумбия,	Т	—	Татарстан,
Ад	—	Адыгея,	Mc	—	Македония,	Уд	—	Удмуртия,
Ar	—	Аргентина,	Nz	—	Новая Зеландия,	Уз	—	Узбекистан,
Ар	—	Армения,	Po	—	Польша,	У	—	Украина,
Бш	—	Башкирия,	Р	—	Россия, кроме Сибири и нац. республик,	Чу	—	Чувашия,
Бл	—	Болгария,				Ee	—	Эстония,
D	—	Германия,	С	—	Сибирь, (зауральская Россия),	Ю	—	Югославия,
Is	—	Израиль,						
Кз	—	Казахстан,	Sl	—	Словения,			

19-й ТУРНИР ГОРОДОВ:

Осенний тур, основной вариант прошел в воскресенье 26 октября 1997 г. Ниже публикуются задачи этого тура.

Осенний тур 1997 г.

(Очки за решение задач указаны в скобках [ ]. Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются.)

8-9 кл., тренировочный вариант.

1. [3] По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причем скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)

   (Из математического фольклора; в дальнейшем в аналогичных случаях автор задачи не указывается.)

2. [3] Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1997$$

   имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z. (Н. Васильев)

3. [4] В квадрате $ABCD$ точки K и M принадлежат сторонам BC и CD соответственно, причем AM — биссектриса угла KAD. Докажите, что отрезок AK равен сумме отрезков DM и BK.

4. а) [2] Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3×3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б) [4] Та же задача для доски 4×4. (М. Вялый)

10-11 кл., тренировочный вариант.

1. а) [2] Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3×3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б) [3] Та же задача для доски 4×4. (М. Вялый)

2. [3] Пусть a и b — две данные стороны треугольника. Как подобрать третью сторону c так, чтобы точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной c делили эту сторону на три равных отрезка? При каких a и b такая сторона существует? (Рассматривается вневписанная окружность, касающаяся стороны c и продолжений сторон a и b.)

3. [4] Докажите, что уравнение $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$ имеет бесконечно много решений в целых числах x, y, z. (Н. Васильев)

3. [4] На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная. (А. Канель)

8-9 кл., основной вариант.

1. [3] Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями:

$$x_1 = 19;\ x_2 = 97;\ x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Докажите, что среди членов этой последовательности найдется ноль. Найдите номер этого члена. (А. Берзиньш)

2. [3] Пусть M — середина основания BC треугольника ABC. Постройте прямую L, пересекающую треугольник и параллельную его основанию, такую, что ее отрезок, заключенный между сторонами, виден из точки M под прямым углом.

3. [5] Первоначально на каждом поле доски $1 \times n$ стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нем шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на верх стоящего там столбика и объединяется с ним. Докажите, что за $n-1$ ход можно собрать все шашки на одной клетке. (А. Шаповалов)

4. [5] Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй — в точке D. Пусть B — ближайшая точка к прямой CD. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E. Докажите, что AD — биссектриса угла CAE. (П. Кожевников)

5. [8] Раскрашенный в черный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по разу. Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпали? (А. Шаповалов)

6. [9] Каждая сторона правильного треугольника разбита на 10 равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на 100 маленьких треугольников — клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску. Какое максимальное число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трех направлений? (Р. Женодаров)

10-11 кл., основной вариант.

1. [4] В треугольнике ABC отрезки CM и BN — медианы, P и Q — такие точки соответственно на AB и AC, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B — биссектрисой угла NBQ. Оказалось, что $AP = AQ$. Следует ли из этого, что треугольник ABC равнобедренный? (В. Сендеров)

2. Верны ли теоремы:
   а) [1] Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
   б) [2] Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
   в) [4] Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных

многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию (то есть с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию. (С. Маркелов)

3. Перемножаются все выражения вида $(\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\ldots\pm\sqrt{100})$ (при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат
а) [3] целое число,
б) [3] квадрат целого числа. (А. Канель)

4. а) [4] На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного 6-угольника, причем у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая только одним гвоздем?
б) [4] тот же вопрос про правильные 5-угольники. (А. Канель)

5. [8] Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Сережа убедился (с помощью компьютера), что все возможные слова, в которых не больше 10000 букв, расшифровываются однозначно. Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под "словом" мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.) (Д. Пионтковский, С. Шалунов)

6. Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников — клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
а) [7] Какое наибольшее число клеток можно отметить так, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трех направлений, если $n = 10$?
б) [7] Тот же вопрос для $n = 9$. (Р. Женодаров)

Весенний тур, основной вариант состоится в воскресенье, 1 марта 1998 г.

Местные оргкомитеты назначают тренировочные туры за несколько дней до основных.

9-я летняя Конференция Турнира Городов

Задача 5. Базисные вложения графов

Предложена на конференцию В. Курлиным и А. Скопенковым, представлялась А. Скопенковым. (Задачи 9-й летней Конференции Турнира Городов были опубликованы в журнале "Математическое образование", №2 за 1997 г. 5-я задача не вошла в публикацию по техническим причинам. Приводим ее в настоящем выпуске.

Вводные задачи

Определение 1.1 Обозначим через $\mathbb{R}^2$ плоскость с фиксированной прямоугольной системой координат. Пусть K — подмножество $\mathbb{R}^2$. Вложение $K \subset \mathbb{R}^2$ называется *базисным* (обозначается $K \subset_b \mathbb{R}^2$), если для каждой непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ существуют непрерывные функции $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

Через $[a, b]$ мы обозначим отрезок, соединяющий точки a и b.

Пример 1.2 Отрезок $[(0,0),(0,1)]$ базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.

Пример 1.3 Множество $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ не базисно вложено в $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.4 Крест $K = [(0,-1),(0,1)] \cup [(-1,0),(1,0)]$ базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.

Обозначим через p_x и p_y проекции на координатные оси x и y соответственно. Последовательность $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *массивом*, если для каждого i $a_i \neq a_{i+1}$ и $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$ для четных i и $p_y(a_i) = p_y(a_{i+1})$ для нечетных i. При этом не обязательно все точки массива должны быть различны.

Задача 1.5 Если $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ - массив, такой что $a_1 = a_n$, то A не базисно вложено в $\mathbb{R}^2$.

Задача 1.6* Крест $K = [(-1,-2),(1,2)] \cup [(-1,1),(1,-1)]$ не базисно вложен в $\mathbb{R}^2$.

Отображение графа K в плоскость $\mathbb{R}^2$ называется *вложением*, если оно отображает вершины графа K в различные точки $\mathbb{R}^2$ и ребра графа K в непересекающиеся ломаные линии, соединяющие эти точки. Главная задача этого параграфа состоит в том, чтобы описать графы для которых существует вложение в плоскость, являющееся базисным. Заметим, что существует разница между словами «базисно вложимый» и «базисно вложенный». Из задач 1.4 и 1.6 видно, что мы можем вложить граф двумя разными способами и в одном случае вложение будет базисным, а в другом нет. В дальнейшем мы будем использовать другое, геометрическое определение базисного вложения – см. теорему 1.7 ниже. Его равносильность первоначальному функциональному определению доказал израильский математик Sternfeld. Задачи 1.5 и 1.6 иллюстрируют эту равносильность. Мы, однако, не знаем элементарного доказательства этого факта (будьте осторожны при решении задачи 1.9.b!). Итак, мы будем использовать геометрическое определение базисного вложения без доказательства его равносильности функциональному.

Дадим несколько определений. Пусть Z – подмножество $\mathbb{R}^2$. Для каждой точки $z \in Z$ нарисуем две прямые, проходящие через z параллельно координатным осям.

Если хотя бы одна из этих прямых пересекает Z только в точке z, покрасим z в белый цвет. Обозначим через $E(Z)$ множество всех точек Z, не являющихся белыми. Пусть $E^2(Z) = E(E(Z))$, $E^3(Z) = E(E(E(Z)))$ и т.д.

Теорема 1.7 Вложение $K \subset \mathbb{R}^2$ *базисно* тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

a) для некоторого натурального n не существует массива из n точек в K;

b) $E^n(K) = \emptyset$ для некоторого n.

Задача 1.8 a) Решите задачи 1.2–1.6 с определением базисного вложения из 1.7.a;

b) Решите задачи 1.2–1.6 с определением базисного вложения из 1.7.b.

Задача 1.9 a) Докажите, что условия 1.7.a и 1.7.b равносильны;

b)* Докажите теорему 1.7 для кусочно-линейного подмножества K плоскости $\mathbb{R}^2$ (т.е. подмножества, являющегося объединением конечного числа отрезков).

Задача 1.10 Граница любого многоугольника на плоскости (не обязательно выпуклого) не базисно вложена в плоскость.

Основные задачи. Плоский случай

Напомним, что с этого момента мы пользуемся эквивалентными определениями 1.7.a и 1.7.b базисного вложения. Окружность S – это граф, состоящий из одной вершины и одного ребра (петли), соединяющего эту вершину саму с собой. Обозначим через T_i i-од (или звезду с i лучами). Обозначим через d центр i-ода T_i.

Задача 2.1 Окружность S (см. рис.1) не является базисно вложимой в $\mathbb{R}^2$.

S P C

Рис. 1

Задача 2.2 a) Если $T_5 \subset_b \mathbb{R}^2$, то некоторый крест $T_4 \subset T_5$ с центром d базисно вложим в одну из полуплоскостей $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$, $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$ так, что $d = (0, 0)$;

b) Если крест T_4 базисно вложим в полуплоскость $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ так, что $d = (0, 0)$, то некоторый триод $T_3 \subset T_4$ базисно вложим в одну из четвертьплоскостей $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $[0, +\infty) \times (-\infty, 0]$ так, что $d = (0, 0)$;

c) Если триод T_3 базисно вложим в четвертьплоскость $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ так, что $d = (0, 0)$, то некоторый диод $T_2 \subset T_3$ базисно вложим в один из лучей $[0, +\infty) \times 0$, $0 \times [0, +\infty)$ так, что $d = (0, 0)$;

d) Пентод T_5 не является базисно вложимым в $\mathbb{R}^2$.

Задача 2.3 Если $T_4 \subset_b \mathbb{R}^2$, то одна из ветвей T_4 содержит прямолинейный отрезок с концом в d, параллельный одной из координатных осей;

Подсказка: задача 2.3 может быть решена аналогично задаче 2.2. Базисная невложимость креста C (см. рис. 1) в плоскость $\mathbb{R}^2$ доказывается, используя задачу 2.3 и следующие соображения.

Определение 2.4 Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ и отрезок $I = [(a,c),(b,c)] \subset K$ параллелен оси x. Горизонтальное *схлопывание*, порождаемое отрезком I, – это отображение $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенное формулой

$$q(x,y) = \begin{cases} (x,y), & \text{если } x < a \\ (a,y), & \text{если } a \leqslant x \leqslant b \\ (x-(b-a),y), & \text{если } x > b \end{cases}$$

Задача 2.5 Пусть K — конечный граф, $K \subset_b \mathbb{R}^2$ и I, q те же, что и в определении 2.4. Тогда

a) $q(K) \subset_b \mathbb{R}^2$;

b) $q|_{K-I}$ – это инъекция.

Задача 2.6 Решите задачу 2.5 с первоначальным (функциональным) определением базисного вложения.

Задача 2.7 Граф C (см. рис.1) не является базисно вложимым в $\mathbb{R}^2$.

Пусть U_1 – триод, и граф U_{n+1} получается из U_n разветвлением каждого висячего ребра. Обозначим через R_n граф, получаемый из U_n приклеиванием одного нового висячего ребра к каждой невисячей вершине U_n (рис. 2).

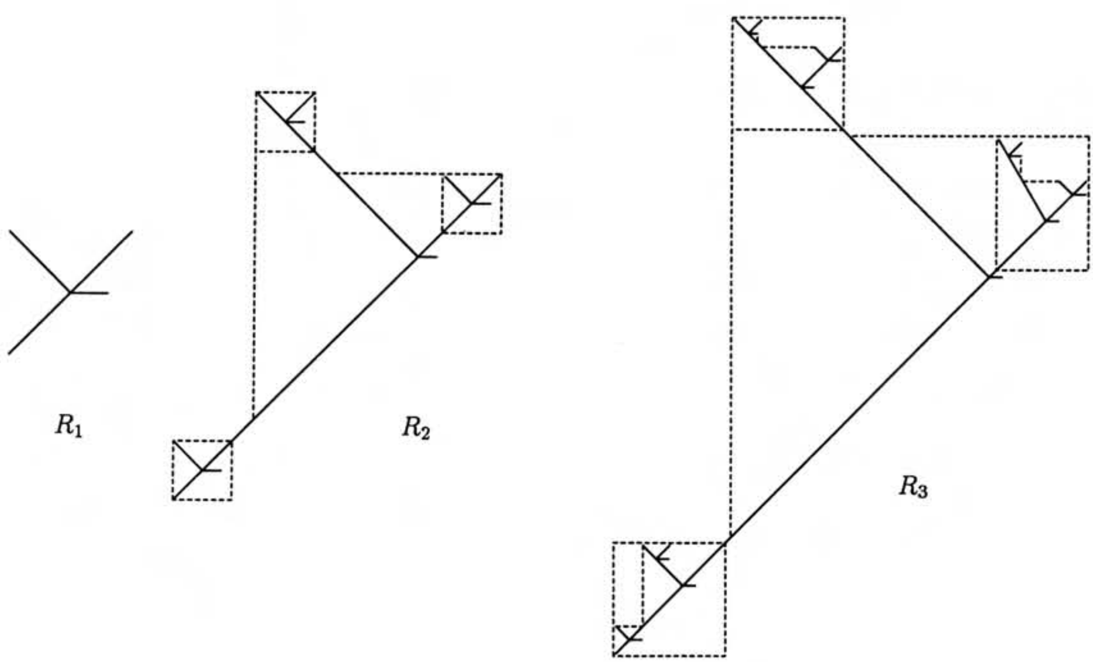


Рис. 2

Задача 2.8 Если конечный граф K не содержит ни одного графа, изображенного на рис.1, то K содержится в R_n для некоторого натурального n.

По задаче 1.4 R_1 базисно вложим в $\mathbb{R}^2$.

Задача 2.9 a) R_2 базисно вложим в $\mathbb{R}^2$;

b) R_n базисно вложим в $\mathbb{R}^2$ для каждого натурального n.

Основные задачи. Обобщения

Декартовым произведением $X \times Y$ двух множеств X, Y называется множество всех пар (a, b) таких что $a \in X$ и $b \in Y$. Если X и Y графы, то мы можем представлять себе произведение $X \times Y$ как двумерный объект (в некоторых случаях можно считать, что этот объект расположен в 3-мерном пространстве). Например, $T_3 \times I$ является «книжкой с тремя страницами», $S \times I$ — цилиндром, $S \times S$ — тором. Определим отображения $p_x : X \times Y \to X$ и $p_y : X \times Y \to Y$ формулами $p_x(a, b) = a$ и $p_y(a, b) = b$, соответственно.

Каждое из определений базисного вложения может очевидно быть обобщено на произвольное декартово произведение $A \times B$. Эквивалентность этих определений также была доказана Штернфельдом. Мы приводим здесь обобщение только геометрического определения.

Определение 3.1 Пусть Z — подмножество произведения $A \times B$. Для каждой точки $(a, b) \in Z$ рассмотрим два подмножества $a \times B$ и $A \times b$ произведения $A \times B$ (аналогичных прямым из определения E для плоскости). Если одно из этих множеств пересекает Z только в точке (a, b), то покрасим (a, b) в белый цвет. Пусть $E(Z)$ — множество всех не белых точек из Z. Пусть $E^2(Z) = E(E(Z))$, $E^3(Z) = E(E(E(Z)))$ и т.д. Вложение $K \subset A \times B$ называется *базисным*, если $E^n(K) = \emptyset$ для некоторого n.

Задача 3.2 a) Докажите, что подмножество $d \times S$ является базисно вложенным в $T_2 \times S$;

b) Докажите что T_5 является базисно вложимым в $T_3 \times \mathbb{R}$.

Хотя следующая задача является нерешенной, мы думаем, что она простая.

Гипотеза-задача 3.3* a) Конечный граф K является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times S$ тогда и только тогда, когда K не содержит ни одного из графов на рис. 3;

b) Конечный граф K является базисно вложимым в $S \times S$ тогда и только тогда, когда K не содержит ни одного из графов на рис. 4;

Задача 3.4 a) S не является базисно вложимой в $T_2 \times T_3$.

b) S не является базисно вложимой в $T_m \times T_n$.

Следующая задача аналогична задаче 2.2.

Задача 3.5 a) Граф T_6 с рис. 5, б не является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_3$;

b) Граф $T_5 \sqcup T_5$ с рис. 5, д не является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_3$.

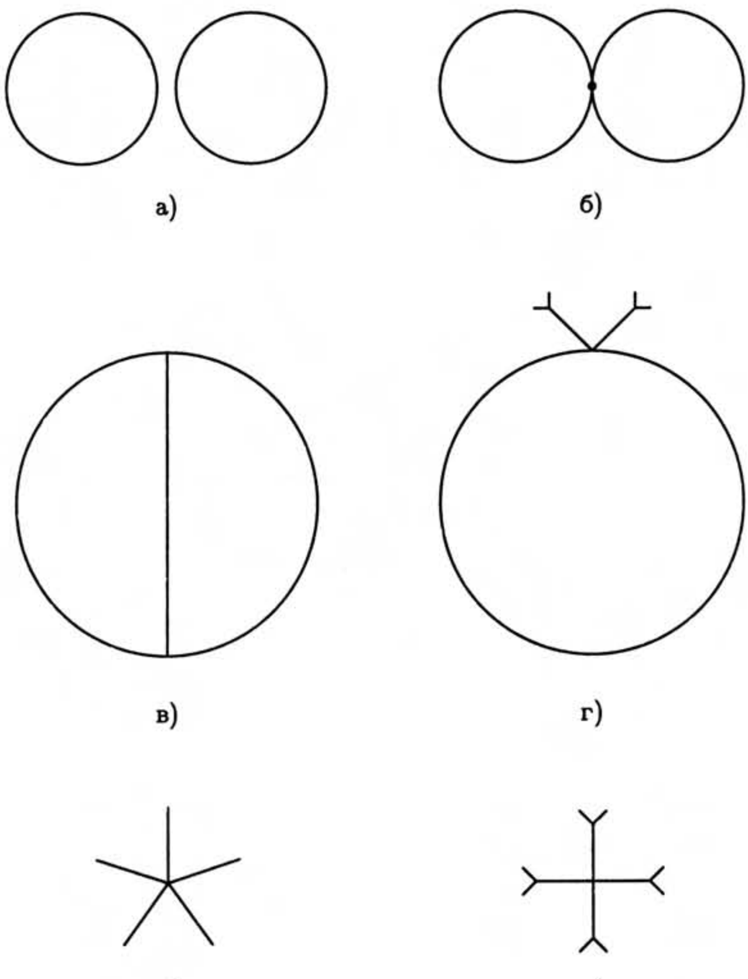


Рис. 3

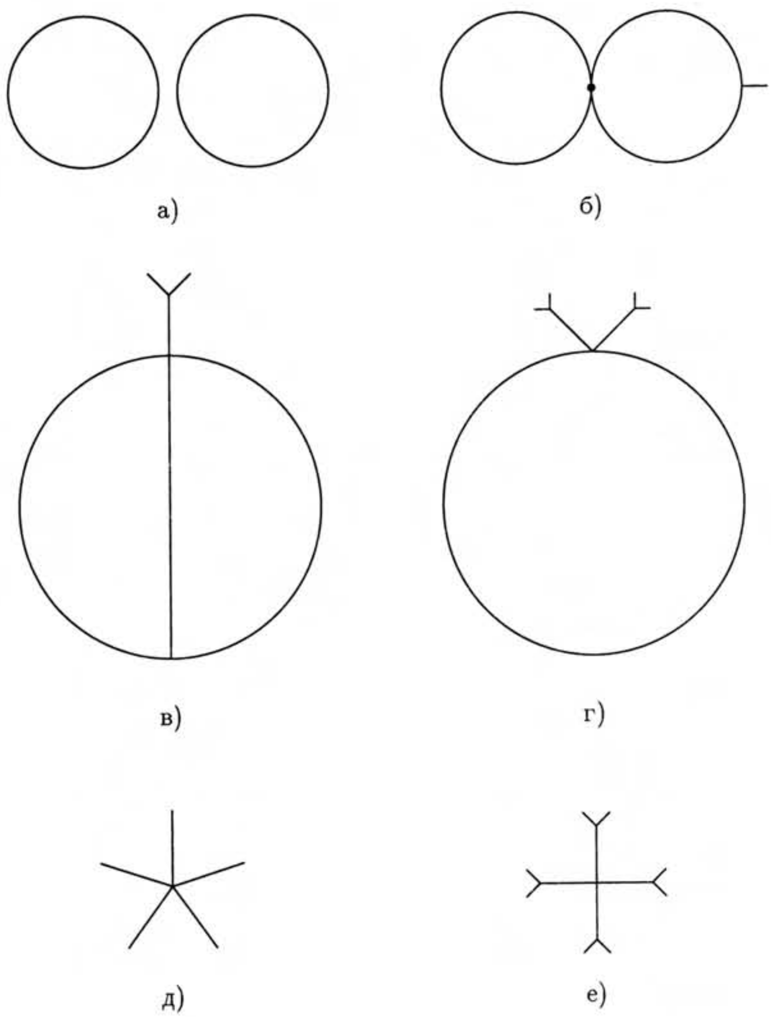


Рис. 4

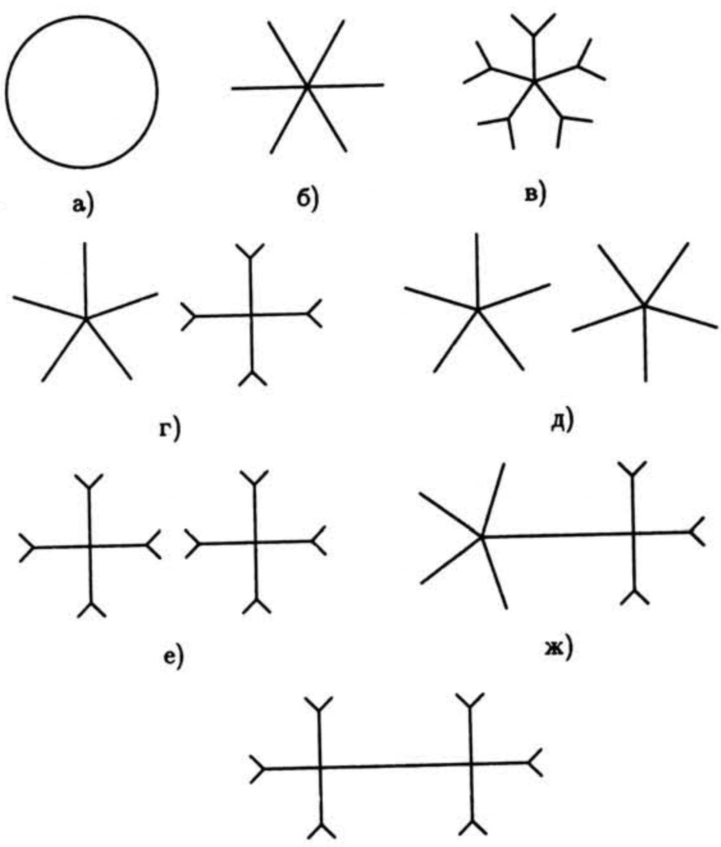


Рис. 5

Задача 3.6 Если T_5 базисно вложен в $\mathbb{R} \times T_3$, так что $d \in \mathbb{R} \times$ (центр триода T_3), то существует дуга A в T_5, содержащая d и такая, что либо $p_x A$, либо $p_y A$ является точкой.

Задача 3.7 Граф C_5 с рис. 5, в не является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_3$.

Подсказка: для решения задачи 3.7 полезны обобщения понятия схлопывания и задачи 2.5.

Определим графы W_n (см. рис. 6). Пусть $U_1 = T_3$, A — висячее ребро графа U_1, a — висячая вершина ребра A. Граф U_{n+1} получается из U_n разветвлением каждого висячего ребра, кроме A. Пусть V_n — граф, полученный приклеиванием одного нового висячего ребра к каждой не висячей вершине графа U_n. Вершина a называется *корнем* графа V_n. Пусть W_n — букет четырех копий V_n и дуги, такой что корни графов V_n приклеиваются к одной из вершин дуги.

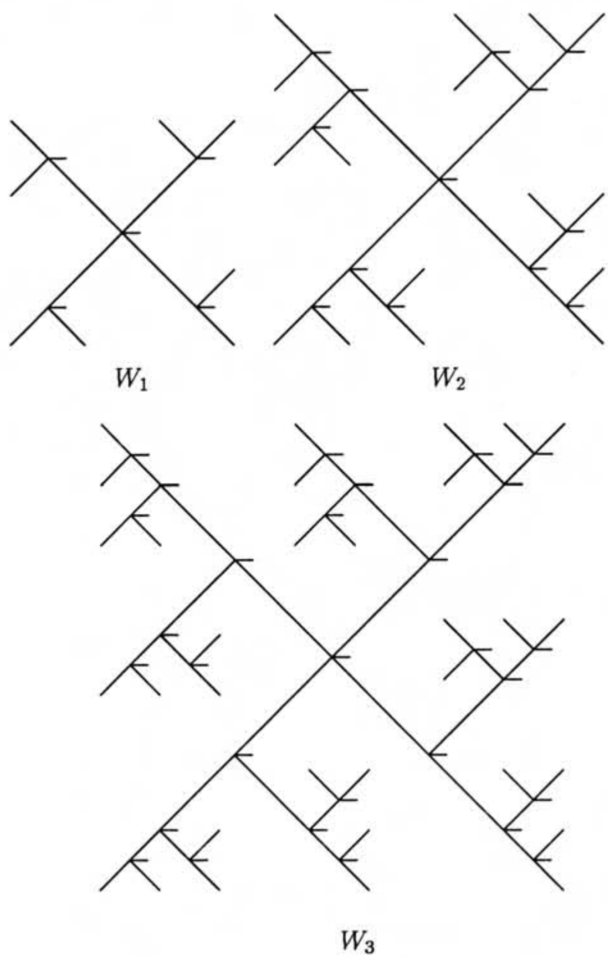


Рис. 6

Задача 3.8 Если конечный граф K не содержит ни одного из графов на рис. 5, то K содержится в W_n для некоторого n.

Задача 3.9 W_n базисно вложим в $\mathbb{R} \times T_3$ для любого натурального n.

Задача 3.10 Конечный граф K является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_3$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух следующих эквивалентных условий:

а) K не содержит ни одного из графов на рис. 5;

b) K содержится в W_n для некоторого n.

Назовем вершину (т.е. либо конец висячего ребра, либо точку ветвления) конечного графа K *ужасной*, если ее степень больше четырех. Назовем вершину конечного графа K *страшной*, если ее степень равна четырем, и она не является концом ни одного висячего ребра. *Дефектом* K называется сумма $\delta(K) = (degA_1 - 2) + \ldots + (degA_k - 2)$, где $A_1, \ldots, A_k$ — все страшные и ужасные вершины графа K.

Задача 3.11** Конечное дерево K является базисно вложимым в $\mathbb{R} \times T_n$ тогда и только тогда, когда либо $\delta(K) < n$, либо $\delta(K) = n$, и K содержит ужасную вершину, имеющую висячее ребро.

Задача 3.12** Для конечного графа K:

a) Существует лишь конечное число "запрещенных" подграфов для базисной вложимости в $T_m \times T_n$.

b) Существует алгоритм проверки базисной вложимости K в $T_m \times T_n$.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Подписаться на журнал можно в редакции по адресу: 117419, Москва, ул. Донская, д. 37, комн. 333.

Стоимость подписки на первое полугодие 1998 года (включая стоимость пересылки) – 40 рублей (новых).

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается **для журнала “Математическое образование”, январь – июнь 1998 г.**

Реквизиты для перечисления (с 1 января 1998 г.):

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Лефортовском ОСБ 6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044583342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 20 руб. (новых).

Контактные телефоны: (095) 237-36-09, (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents