Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год второй

№ 2

Апрель - Июнь 1998 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 2(5), 1998 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№2(5), апрель – июнь 1998 г.

Содержание

С. М. Никольский. Памяти Л.С.Понтрягина 3

Из воспоминаний А. И. Понтрягиной. 7

Е. Дугин, Г. Карапетян. Интервью академика Понтрягина 15

Л. С. Понтрягин. Этика и арифметика 19

Л. С. Понтрягин. Мое признание истории математики 22

И. Р. Шафаревич. Избранные главы алгебры (продолжение) 31

И. Р. Шафаревич. Математическое мышление и природа 67

А. Корзняков, В. Малыгина. Смотря в каком пространстве 75

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1998 г.
"Математическое образование", периодическое издание
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 12.07.98 г. Корректура: С.И.Комаров, А.Е.Коршунов
Объем **10,5** п.л. Тираж 1500 экз. Цена свободная.

От Издателя

1998 год - юбилейный для двух выдающихся русских математиков XX века Льва Семеновича Понтрягина, которому в этом году исполнилось бы 90 лет, и Игоря Ростиславовича Шафаревича, которому в этом году исполнилось 75 лет.

Международная конференция, посвященная 90-летию Л. С. Понтрягина (31 августа - 6 сентября 1998 г.), принять участие в которой выразили желание более 500 математиков, подтверждает тот огромный авторитет, которым пользуется имя Л. С. Понтрягина. Программа конференции показывает, какой глубокий след оставила его научная деятельность.

Вокруг знаменитого семинара в Стекловке[1] *под руководством И. Р. Шафаревича*[2]*, через который прошли десятки известных своими результатами математиков из многих стран, сложилась целая научная школа.*

Развивая традиции российского образования, Лев Семенович и Игорь Ростиславович на определенном этапе обращаются к школьной математике. Широко известна деятельность Л. С. Понтрягина по улучшению преподавания в средней школе, им написана серия книг для школьников по различным разделам математики. И вот теперь появляется книга для школьников по алгебре, написанная И. Р. Шафаревичем.[3]

Этих двух знаменитых математиков объединяет не только значительный вклад в науку, но и личное мужество, последовательность в отстаивании своей позиции, искренняя любовь к России и активная деятельность по защите ее глубинных интересов.

[1] Математический институт Российской Академии Наук

[2] Сборник “Труды семинара под руководством И. Р. Шафаревича” выходит в этом году, его можно приобрести через редакцию журнала.

[3] Главы из этой книги публикуются в журнале “Математическое образование”, см. №№1-3 за 1997 г., №№1,2 за 1998 г.

Памяти Льва Семеновича Понтрягина

С.М.Никольский

Я впервые узнал Льва Семеновича в 1930 году — в Харькове на Всесоюзном Математическом съезде. Я был просто посетитель съезда, состоя в делегации на этот съезд от Днепропетровского университета, где я только начал работать. Лев же Семенович блистал на съезде, рассказывал свои очередные блестящие достижения в топологии, сделавшие его выдающимся математиком мирового класса.

Результат этого молодого проникновенного математика, к тому же слепца, обсуждались с большим восхищением непосредственно в связи с его докладом и в кулуарах съезда.

Но мы не были тогда знакомы. Его руководителя Павла Сергеевича Александрова я тогда тоже не знал. Теперь я знаю от самого Льва Семеновича, что он в то время очень сильно уважал Павла Сергеевича и боготворил. Такие отношения между учителем и учеником продолжались долго. Лев Семенович в 1939г. стал членом-корреспондентом АН СССР при решающей поддержке Павла Сергеевича, который в это время уже был членом-корреспондентом.

В 1934-35гг. я жил в Москве, прикомандированный из Днепропетровска в МГУ для работы над кандидатской диссертацией. Большую часть времени я проводил в читальне Математического кабинета МГУ, где можно было в то время заниматься с 9 часов утра до 9 часов вечера, пользуясь любыми книгами, которые посетитель мог брать непосредственно с полки. Там я познакомился с Анатолием Ивановичем Мальцевым, моим другом на всю жизнь, и с некоторыми другими математиками. Среди них с аспирантом Льва Семеновича — Гордоном, работавшим после аспирантуры в Горьковском университете. У него как-то было все в порядке. Совершенно определенная тема, которую он без задержки выполнил. Статья была отдана в печать в хороший журнал. При мне он, не спеша, проверял ее корректуру. У меня в это время было совсем другое дело. Теорема, которую я хотел доказать, не доказывалась, а осколки, которые при этом получались, мне казались недостойными корректур. Но дело не в этом. Из разговоров с Гордоном я понял, что он как аспирант, пользовался повседневным очень заботливым и доброжелательным отношением к нему со стороны его руководителя Льва Семеновича Понтрягина. Простые человеческие отношения входили сюда тоже. Гордон рассказал, как они с Львом Семеновичем собрались кататься на коньках. И вот они выходят на лед. Тут же Гордон упал. Лев Семенович его поднял. Но Гордон тут же снова упал и Лев Семенович должен был снова его поднять. Выяснилось, что Лев Семенович с детства, когда он был зрячим, был научен кататься на коньках, а Гордон — нет. Так что Льву Семеновичу пришлось учить его не только топологии, но и бегать на коньках.

С конца 1940г. я стал докторантом Математического института имени В.А.Стеклова и с тех пор связал свою жизнь, прежде всего научную жизнь, со Стекловкой. Лев Семенович работал в институте Стеклова со дня его основания в

Москве (1934г.). А.И.Мальцев уже год к этому времени был докторантом. Он дружил с Львом Семеновичем — постоянно бывал у него дома. Тем самым и у меня с Львом Семеновичем постепенно зарождалось тесное знакомство. Но не на почве личных математических исследований, а на почве отношения к математическим вопросам вообще, в частности, к судьбе нашего Института.

Через месяц после начала войны Институт переехал в Казань, где был размещен в кабинете имени Лобачевского Казанского университета, куда переехало также из Ленинграда ЛОМИ во главе с зам. директора А.А.Марковым.

С начала войны директором Института вместо И.М.Виноградова стал академик С.Л.Соболев, прежде занимавший должность зам. директора.

В Казани, таким образом, Институт был под начальством академика С.Л.Соболева и его заместителя доктора наук А.А.Маркова. В Казани личные связи между сотрудниками Института сильно возросли. Например, большим стимулом для такой связи было то обстоятельство, что каждый день в определенный час сотрудники приходили в Институт получать полагающийся их семье по карточкам хлеб. Как правило, сотрудники не поручали это дело членам своих семейств, а сами приходили и задерживались для различных обсуждений — в том числе и математических.

У С.Л.Соболева в связи с его научными изысканиями, которые рассматривались как оборонные, возникла задача, относящаяся к спектральной теории оператора в пространстве с индефинитной метрикой. Эту задачу решил Лев Семенович, которого давно уже привлекали конкретные вопросы математического анализа, (см. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР, серия математ., 8(1944), 243-250).

В 1943 году Институт вернулся в Москву. Сразу же по приезде сотрудники Института организовали коллективную посадку картофеля. Каждый получил урожай пропорционально вложенному труду. Лев Семенович вместе со своей семьей (женой и матерью) тоже участвовал в этой работе — копал и т.д.

В академики Лев Семенович был избран в 1958 году. В это время я был зам. директора института Стеклова. Инициатива в этом вопросе принадлежала Ивану Матвеевичу Виноградову, секретарю Парторганизации, ученику Льва Семеновича — Евгению Фроловичу Мищенко и мне. Перед выборами мы с Евгением Фроловичем были позваны в Отдел науки ЦК. Зав. Отделом Николай Иванович Глаголев нам сказал, что в ЦК даже не к нему, а на уровне Секретарей приходили наши математические лидеры: М.В.Келдыш и М.А.Лаврентьев с предложением своего кандидата. "Вот ребята, — говорит Николай Иванович, придется с этими предложением согласиться". "У нас есть лучший", — отвечаем. Лев Семенович Понтрягин? Как Понтрягин? Какой Понтрягин? Никто о нем не говорит. Мстислав Всеволодович и Михаил Алексеевич нам о нем даже не упоминали. Да он же слепой, наконец. Куда ему в академики? Ладно, что он корреспондент.

Вы ничего не пожалеете, мы с Евгением Фроловичем сказали: Лев Семенович имеет личные математические результаты высшего мирового ранга. А что он слепой, то все равно стоит десяти зрячих. Мы еще добавили, что вызывает возмущение, что "Органы" отказывают Понтрягину в заграничных командировках, видимо, считают, что слепому нечего показываться за границей. Между тем заграничные ученые посчитают только за честь принять у себя такого высококлассного знаменитого ученого. "Как знаете", — сказал Николай Иванович. "Желаю вам успехов" в Ваших начинаниях.

В институте Стеклова без всяких Лев Семенович был выдвинут и поддержан мехматом МГУ и собранием Московского Математического Общества.

Вторую половину своей жизни Л.С. посвятил дифференциальным уравнениям и оптимальным методам. Здесь, как мы знаем, он сделался крупнейшим ведущим специалистом. Все же на этой стороне деятельности Л.С. я здесь останавливаться не буду. Но есть еще и другие стороны, которые Льва Семеновича после того, как он стал академиком все больше и больше увлекали — организация математической науки, математика в школе, реагирование на судьбы родной страны. При этом надо учитывать, что этот страстный человек был большой прагматик.

Возникшие у него идеи он старался непременно провести в жизнь. В свободное после науки часы, когда обыкновенный человек отдыхает, он интенсивно занят заседаниями, аудиенциями, журнальными статьями, телефонными звонками преимущественно в центральные государственные и партийные учреждения.

Лев Семенович ряд лет был членом Президиума IMU (International Mfthematical Union), а затем его вице-президентом и постоянно находился в руководстве Национального Комитета математиков СССР. Его активное инициативное участие в этих организациях успешно повышало положение советской математики в мировой математической науке.

Лев Семенович ряд лет возглавлял Школьную Комиссию Академии наук. Эта Комиссия вместе с министерскими методистами подготовила улучшенную единую для СССР школьную программу по математике. По этим программам было организовано написание новых учебников. В настоящее время единой программы для всех российских школ нет. Однако, на самом деле в большинстве наших школ при преподавании математических предметов исходят именно из сказанной выше единой программы СССР.

Я тоже участвовал в школьной комиссии и это было полезно для меня. Я давно уже интересовался преподаванием школьной математики. Теперь уже я с моими коллегами имею собственные учебники по арифметике и алгебре, утвержденные Министерством Просвещения РФ.

Все же мне придется отметить, что я категорически всегда не был согласен с той жесткой критикой, которая велась по этим вопросам против Колмогорова лично ведущими нашими математиками, в числе которых был и Лев Семенович. У меня был случай выразить официально это мое несогласие перед ними — я отказался подписать документы в ЦК, которые они все при мне подписали. Но интересно, что мы с Львом Семеновичем после таких "потасовок" оставались во взаимном уважении.

Между прочим, Лев Семенович был очень прямой человек — лишенный всякой хитрости. Он мне рассказывал, что в прежнем он ради блага математики пытался "помирить" Колмогорова с Виноградовым. Но ничего у него не вышло. Я ему сказал, что я тоже пытался это сделать и у меня тоже ничего не вышло. В Брежневские времена Лев Семенович мужественно вместе с некоторыми патриотами — геологами боролся против планов поворота наших северных рек. И борьба закончилась победой. При жизни Лев Семенович в его Отделе постоянно работал (под руководством Александра Сергеевича Мищенко) семинар по проблемам Каспия.

На сколько это оправдалось — это уже другое дело. Можно было бы перечислить много других мероприятий, которые произошли на почве недюжинной инициативы и напористости Льва Семеновича. Безусловная полезность многих из них несомненна.

В один из дней начала сентября 1983 года на даче Понтрягиных собралось немало народу. Тут был президент АН СССР академик Г.И.Марчук. Члены Академии И.Р.Шафаревич, Ю.В.Прохоров, С.П.Новиков, В.А.Мельников, доктора наук А.С.Мищенко, Д.В.Аносов, М.С.Никольский, Л.И. Зеликин, В.И.Благодатских, М.М.Постников, С.Овсеев, К.И.Оскопков и многие молодые ученые и аспиранты — ученики Льва Семеновича. Всего около 60 человек.

Мы собрались на лужайке перед дачей в этой прекрасной сентябрьский день, чтобы почтить своего коллегу и Учителя и порадоваться его славному юбилею, который он встречают на полном ходу своего неустанного творческого труда. Я тоже там был и признаюсь, радовался и за себя, что судьбе удалось меня приобщить к этому знаменитому мыслителю.

Нас гостеприимно принимала Александра Игнатьевна — супруга Льва Семеновича. Мы пили за здоровье их обоих, за научные успехи школы Льва Семеновича, за математику. Незабываемый день, незабываемое торжество.

Но это было уже последнее радостное торжество, когда мы в такой большой единой совокупности общались с Львом Семеновичем. Через пять лет были уже печальные проводы его души к Богу. Лев Семенович — крупная историческая личность. Его следует изучать всесторонне.

Мне еще хочется закончить эту статью словами благодарности Александре Игнатьевне от имени всех нас почитателей Льва Семеновича за то, что она неуклонно и постоянно печется об укреплении памяти Льва Семеновича. Проявлением его деятельности является барельеф Льва Семеновича на стене МГУ. Очень удачно схваченное скульптурное изображение его лица. Другое проявление — это памятник на могиле Льва Семеновича — очень удачный, хорошо отражающий и научную и христианскую сущность Льва Семеновича. Хочется отметить с восхищением работу скульптура В.И.Клыкова.

Пойдите и посмотрите еще раз; почтите память этого великого человека - Льва Семеновича Понтрягина.

Декабрь 1997 г.

Из воспоминаний А.И.ПОНТРЯГИНОЙ

В этом номере журнала впервые публикуются отрывки из воспоминаний вдовы академика Л.С.Понтрягина – Александры Игнатьевны Понтрягиной.

Не вокруг творцов нового шума
- вокруг творцов новых ценностей
вращается мир;
он вращается неслышно.

Ницше

Мой муж, известный в мире математик. Лауреат Сталинской премии, Лауреат Ленинской премии, Лауреат Государственных премий, Международной премии имени Лобачевского, кавалер 4-х орденов Ленина, Ордена Октябрьской Революции, Ордена Трудового Красного Знамени, Герой Социалистического Труда, академик Академии Наук Советского Союза, почетный член Международной ассоциации Астронавтов и некоторых других зарубежных Академий.

Я не стала бы столь нескромно начинать свои воспоминания о дорогом мне человеке, не будь на то особые, я бы сказала, чрезвычайные, обстоятельства.

Лев Семенович Понтрягин родился 3 сентября 1908 г. в г.Москве. Родители его принадлежали к мещанскому сословию. Отец - Семен Акимович работал счетоводом на заводе Гужона, который после революции стал называться заводом "Серп и молот". Мать Татьяна Андреевна - портниха высокого класса. Она обслуживала московскую интеллигенцию у них на дому. Оба они крестьяне: Семен Акимович Орловской губернии, Татьяна Андреевна - Ярославской. Он у них был единственный сын. Отец Льва Семеновича по убеждению был толстовец. В 1908 г., когда чуть ли не весь мир отмечал восьмидесятилетие Льва Николаевича Толстого, у них родился сын. Вот сына своего Семен Акимович и назвал в честь своего кумира - Львом. Мальчику не было еще 6-й лет, когда отца забрали на войну в 1914 г. с первых дней начала ее. И в первые же дни, армия генерала Самсонова была разгромлена, он попал в плен к немцам, где провел 4 года. Из плена отец вернулся больным - после ранения в голову он страдал травматической эпилепсией.

И вот среди голода, разрухи, кровавой Революции и последующей Гражданской войны на семью Понтрягиных обрушилось страшное несчастье. Сын, единственный сын! потерял зрение!... Полностью. Навсегда. Казалось гибнет Россия; гибнет мечта дать сыну высшее образование.

Способный к всяким техническим поделкам Лева взялся починить примус в присутствии матери. Судьба вмиг изменила все! Взрыв и колоссальные ожоги груди, левой руки, обгорели брови. Лицо не пострадало. Полгода в больнице... Врачи боролись за жизнь. На глаза не обратили должного внимания.

Перед мальчиком встали тысячи роковых вопросов, тысячи задач сиюминутных, мелких и больших: как жить, что делать, какую профессию выбрать, как преодолеть то страшное, что его постигло. Надо принять решение, сделать выбор: школа, которую он любил и был лучшим учеником, где его друзья, товарищи, его учителя или жизнь слепого с его жалкой участью... А мечта о высшем образовании?! После 2-х недель в школе для слепых он сказал родителям - здесь Я не останусь!

- Пойду в свою школу!, в свой класс!

И пошел; заново завоевал свое место. До этого он 5 лет проучился здоровым мальчиком, был всегда вожаком и кумиром среди товарищей и лучшим учеником в классе. Однажды учитель по математике Горохов А. А. поставил ему пятерку с крестом, причем крест красиво нарисовал в виде Георгиевского креста. Отчетливо проявлялись и другие черты у этого мальчика.

Как-то на прогулке в Коктебеле в 70-х годах Лева рассказал мне эпизод из своего детства. В школе (до Рокового часа) он слыл атаманом среди ребят. И "в сражениях" всегда побеждал. Это ему нравилось. Противники всегда были биты. Он всех держал в страхе.

- Я спросила: - Долго ли это продолжалось?
- Он подумав, сказал - года два, может быть дольше.
- А потом?
- Потом ребята собрались все вместе и здорово меня отколотили.
- Ну а дальше?
- Дальше все мы стали на равных.

Помню, я ему тогда сказала: - когда-нибудь тебя тоже отколотят. Соберутся вместе и отколотят! Так оно и произошло...

Мне пришлось встречаться и, в той или иной степени общаться с замечательными людьми. В моей роли я испытывала большие трудности при общении, но как-то справлялась. Мстислав Всеволодович Келдыш, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Игорь Ростиславович Шафаревич, Николай Николаевич Боголюбов, Андрей Николаевич Тихонов, Андрей Николаевич Колмогоров, Павел Сергеевич Александров, - какие имена! Какие люди! Они любили свое дело, любили Родину, служили ей. Гордость и слава русской математики. Гордость и слава русской культуры. И все это было недавно. Была Великая Наука, Великая страна и ...

В заграничных поездках с Львом Семеновичем на протяжении 20 лет в разных странах Европы и Америки я часто могла слышать такие слова: "русская математика - лучшая математика в мире!" Говорили это не только друзья, но и политические противники советских математиков. Например, профессор Липман Берс и др.

О том, что русская математическая школа высоко ценится в мире, я убедилась не только слыша лестные слова зарубежных математиков. Прием моего мужа в США в 1964 и 1969 гг. я бы назвала (прошу прощения за высокое слово) триумфальным. В аэропорту нас встречал кто-нибудь обычно у трапа. Не помню, в каком году, мы прилетели в Нью-Йорк, и профессор Ласаль тут же сразу нас повез (самолетом) в Детройт, где в аэропорту нас радостно встретила сразу целая группа математиков и какие-то другие лица с поцелуями, цветами и пр. и на нескольких автомобилях все мы эскортом отправились в небольшой городок Эн-Арбор на конференцию. Для меня особенно было радостно то, что Евгения Фроловича Мищенко и Реваза Валериановича Гамкрелидзе я увидела среди встречающих нас. Они были уже там, конференция уже началась до нашего приезда.

Приглашений на доклады в различные научные центры, университеты было так много, что невозможно было физически всех удовлетворить. Особенно непривычны и утомительны для нас были ежедневные, а то и два раза в день приглашения на обеды, парти и т.д. На несколько дней (2-3) отдохнуть от столь непривычного темпа жизни мы были приглашены в Рокфеллер- Центр, где я была потрясена роскошью апартаментов и всего интерьера.

Отказаться от приглашения посетить дом профессора Морса, профессора Лефшеца, профессора Куранта было невозможно. Морс и Лефшец жили в Принстоне. У профессора Морса большой хороший дом, садик, большая семья, много детей, все они взрослые. Сам Морс был уже глубоко в преклонном возрасте, однако подвижен и очень был любезен. Жена намного моложе его. Меня в доме Морса постигли две неудачи. Главная - кто-то из гостей нечаянно сломал мои очки, которые я по небрежности положила на стул. Эта беда была быстро исправлена. Сам Морс на своем автомобиле отвез меня в аптеку, где я купила новые очки. А вторая - после обеда в русском стиле (как нам специально было подчеркнуто) был подан кофе в гостиную, и профессор Морс, подавая мне чашку кофе со сливками нетвердой рукой пролил его на мой единственный выходной костюм (причем очень хороший). Американская химчистка на следующий день все исправила. Все эти мелочи были ничто - они только развлекли нас - по сравнению с тем теплом, которое было проявлено к нам в доме Морса. На этот обед, данный в нашу честь, были приглашены ученики Льва Семеновича Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, а также профессор С. А. Лефшец с женой; насколько мы могли понять у Морса с Лефшецем были сложные отношения. И появление Лефшеца в доме Морса было возможно только благодаря присутствию Льва Семеновича.

У Понтрягина с Лефшецем была старинная дружба с начала 30-х годов, с первого приезда Лефшеца в Москву. Тогда Лев Семенович был еще аспирантом, а Соломон Александрович Лефшец - известным математиком. Однако работы Понтрягина он уже знал и высоко ценил. Он ровно на 20 лет старше Льва Семеновича. У них даже дни рождения совпадали - 3 сентября. Левшец несколько раз приезжал в Москву и всякий раз тепло встречался с Львом Семеновичем. Он хорошо говорил по русски. Он родился в России; его родители покинули Россию, когда он был грудным ребенком, а потому русский язык он изучал, как иностранный. Лефшец тоже в жизни пережил большую трагедию. Он по образованию инженер. На заводе ему в аварии оторвало обе кисти рук. Он пользовался протезами весьма успешно; мог писать. Всегда носил перчатки. У меня хранится конверт с нашим московским адресом, написанный рукой Лефшеца. Математикой стал заниматься после этого несчастья. Встречи с С. А. Левшецом при поездках в США очень согревали душу Льва Семеновича. Однажды в отеле на 5-ой Авеню, где мы жили в Нью-Йорке, он увидел в моей сумочке 100 долларов и с ужасом сказал:

- Шурочка, этого делать нельзя! Вы не в России. Вас могут убить. - Мы с мужем были удивлены.

- Как же мне быть? - спросила я.

- Надо открыть счет в банке и расплачиваться чеками. С собой носить только несколько долларов на обед, продукты и т.д.

Что поделаешь - Америка! Счет был открыт. Однажды я брала в банке очередную порцию денег, и очень старый человек с красивой сединой, высоко роста, крепкого сложения - типичный аристократ - обратился ко мне с особым чувством почтения и интереса, сказал по русски:

- У Вас Советский паспорт! Разрешите мне хотя бы подержать в руках русский паспорт. Я никогда его не видел.

И он трепетно взял в свои руки мой паспорт. Оказалось, он русский эмигрант первой волны. Мне трудно передать его чувства, но они были очень сильные и доброжелательные ко мне. Беседа была краткой. Я спешила домой. На прощание он крепко пожал мою руку. Встреча эта была в Пало-Алто, штат Калифорния, где Лев Семенович читал лекции в течение 2-х месяцев в Стэнфордском университете...

Труды Л. С. Понтрягина опередили свое время как минимум на полвека. Это видно из того, как лавинообразно нарастает количество работ, посвященных изучению математических объектов, введенных в работах Л. С. Понтрягина. На рис.1 приведен график, использующий анализ рефератов, помещенных в журнале "Mathematical Revue" за 1940-1997 гг.[1]). Из этого графика видно, что количество публикаций, использующих идеи и математические конструкции Понтрягина, сначала росло не слишком быстро и составляло несколько десятков за пятилетие. И вдруг,

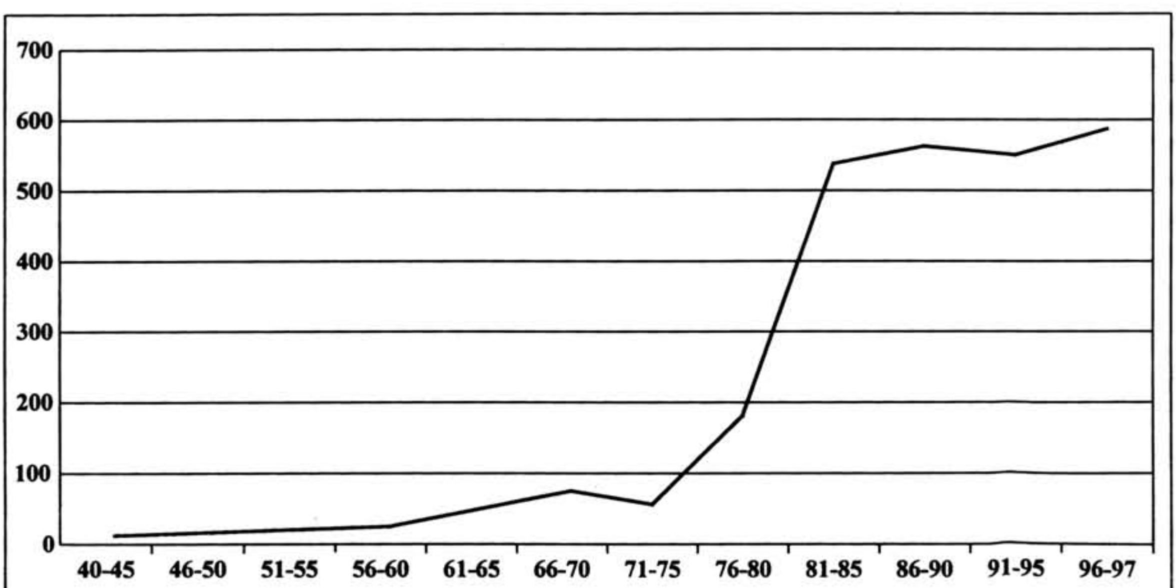


Рис. 1

[1]Данные до 1940 г. в реферативном журнале "Mathematical Revue" отсутствуют

начиная с 80-х годов, происходит взрывное увеличение числа таких работ, достигая пятисот работ за пятилетие. Этот рост продолжается до сих пор. Следует отметить, что Понтрягин уже в 1940 году получил Сталинскую премию за работу в области топологии...

Л. С. Понтрягину были очень близки слова: "... Я убежденный пацифист, но я люблю Армию; даже если бы на свете уже не было войн, не станут лишними две основные воинские добродетели любого мужчины: дисциплина и мужество. И если я желаю мира, это не значит, что я, не обороняясь, сдаюсь; как раз наоборот ...чтобы удержать мир, я употреблю всю мощь сообразительности и любви к народу, к человечеству, а если необходимо - всю мощь защиты. Поэтому необходимо быть безбоязненным, мужественным, самым что ни на есть сильным! Нет, и никогда не было ни малейшего противоречия между моим гуманизмом и моими усилиями крепить мощь и оборону страны... Армия, хотя и в измененной форме, наверное будет всегда, наверняка еще очень долго; я хочу сказать: народ требует обученных и готовых к обороне молодых, дельных, закаленных людей, которые в любой момент могут быть направлены на работу во время грозных катастроф и, конечно, - на защиту страны". (К. Чапек, Беседы с Т. Г. Масариком)

Эту выписку Лев Семенович попросил меня сделать, и я ее помещаю здесь.

Сила, мужество, дисциплина - эти прекрасные качества мужчины - мало кому присущи в той степени, в которой ими обладал Л. С. Понтрягин.

По своим политическим взглядам и убеждениям Лев Семенович был консерватор, резким противником всяких революций, которые всегда несут кровь и разруху. Он оставался сторонником постепенных, медлительных перемен общественной жизни, страшился переворотов. Он всем сердцем любил Россию. Своим поведением, своими достижениями он старался возвысить свою страну, защитить ее, показать ее с лучшей стороны, хотя это порой было не легко. Он страдал не только нравственно, но физически, когда были нападки на наше государственное устройство со стороны западных ученых при поездках за границу во время его работы в Международном Союзе Математиков. Помню, кажется в Париже, он чуть ли не с криком сказал им: "Я не хочу больше 17 года!" Он видел всю гниль, застой, болото, в котором живет Россия и все же ему казалось, что УСТОЙЧИВОСТЬ государственного устройства гораздо ценнее, чем свобода, которой хотят от нас западники. Свобода опасный спутник всякой устойчивости.

Лев Семенович не любил и почти не общался с корреспондентами газет, радио и т.д. Однажды все же корреспонденту по фамилии Балагур на его вопрос, каково кредо Понтрягина на государственную политику, Лев Семенович сказал, цитирую по памяти: "только мощное, сильное в военном отношении государство может быть независимым в политическом отношении и устойчивым в экономическом".

Он ненавидел лень, разгильдяйство. Труд, только труд приносит и радость, и благосостояние...

Я никогда не интересовалась математической тематикой С. П. Новикова. Он не был непосредственным учеником Льва Семеновича. Совсем на днях мне попался Отзыв на цикл работ Л. С. Понтрягина, представленный на соискание международной премии им. Лобачевского. Там я читаю в конце 6-ой страницы: “Работы Понтрягина, понимавшиеся тогда лишь выдающимися топологами, входят теперь в обязательный минимум знаний довольно широкого круга математиков”. Подписано член- корреспондентом АН СССР С.П.Новиковым. И в той же папочке рядом с Отзывом, лежала другая бумага. Член-корреспондент АН СССР С. П. Новиков “О проблеме Понтрягина”. Это научное сообщение на заседании Президиума АН СССР 17 января 1969 г. Новиков доложил членам Президиума о своих исследованиях “проблемы Понтрягина”, употребляя термины “характеристические классы Понтрягина”, “вектор Понтрягина”, и т.д. Доклад этот изложен С. П. Новиковым на 20 страницах машинописи. Содержание обнаруженного материала меня не удивило. Понтрягин снабдил математической тематикой не только топологов. Его работы по алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям, также основательны и имеют много последователей.

Я уже не говорю о работах по оптимизации и дифференциальным играм. Открытый им знаменитый “Принцип максимума Понтрягина” с 1958 г. является до сих пор кладом и не только для математиков и инженеров. По сведениям, имеющимся у меня от ученых, “Принцип максимума Понтрягина” применяется в аэродинамике, астронавтике, в механике, физике, химии, космонавтике, управлении химическими и ядерными реакторами, их проектировании, в вычислительной технике, даже в биологии и медицине. Экономика и экология, как выясняется, также не обходится без применения принципа максимума.

Центральный Аэрогидродинамический институт имени профессора Н. Е. Жуковского - ЦАГИ - город Жуковский Московской области дает Президиуму Академии наук СССР следующую справку (N 10-4-339 от 27.09.79 г.) о применении принципа максимума Понтрягина и его теории дифференциальных игр в исследованиях, проведенных в ЦАГИ в области механики и процессов управления полетом летательных аппаратов. Перечисление занимает три страницы, подписано заместителем начальника ЦАГИ членом-корреспондентом АН СССР Г. С. Бюшгенсом.

Приведем здесь эту справку полностью:

“ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКЕ ПОЛЕТА

Принцип максимума и теория дифференциальных игр Л. С. Понтрягина нашли широкое и важное применение в следующих работах, проведенных в ЦАГИ:

1. Исследование и выбор оптимальных траекторий, оптимальных параметров и разработка методов оптимизации характеристик летательных аппаратов (ЛА) различного назначения:

- оптимальное пространственное выведение;
- оптимальное выведение на орбиту искусственных спутников Земли, Луны и планет;

- оптимальное маневрирование ЛА, в том числе, их стыковка;

- стабилизация и оптимальное управление ориентацией ЛА;

- оптимальные межпланетные перелеты, в том числе, с двигателями малой тяги.

2. Решение задач динамики полета и управления входом в атмосферу;

- исследование возможности полета ЛА со скоростями входа, превышающими вторую космическую (обеспечение коридора входа, выдерживание ограничений по перегрузке, тепловым и температурным режимам);

- оптимальное выведение на орбиту искусственного спутника планеты (в том числе Марса) с использованием аэродинамического торможения в атмосфере;

- оптимальное управление боковой дальностью;

- построение зон достижимости и оптимальное пространственное движение в заданную точку земной поверхности.

3. Исследование оптимальных траекторий и оптимальных режимов полета самолета:

- построение оптимальных траекторий и режимов набора высоты, в том числе, для рекордных полетов по высоте и скороподъемности;

- исследование оптимальных пространственных траекторий высоко маневренных самолетов;

- исследование оптимальных взлетно-посадочных режимов, в том числе, с минимизацией шума, создаваемого самолетом на местности.

4. Разработка методов исследования игровых задач механики полета самолетов:

- игровые задачи преследования-уклонения;

- задачи управления в условиях неполной информации;

- задачи идентификации и наблюдения в механике полета на основе минимаксных критериев точности.

Кроме того, идеи принципа максимума проникли в ряд нетрадиционных областей управления и стимулировали развитие следующих научно-технических направлений:

- численные методы оптимизации (методы поиска экстремума функции многих переменных на основе различной информации о функции);

- методы аппроксимации, интерполяции и сглаживания функции и их приложения к задачам аналитического описания геометрии внешних форм летательных аппаратов, автоматизации изготовления аэродинамических моделей на станках с ЧПУ (числовым программным управлением) и др. актуальным и перспективным задачам разработки систем автоматизации проектирования летательных аппаратов (САПР ЛА);

- разработка методов построения законов и систем управления, позволяющих реализовать преимущества оптимальных режимов и оптимальных траекторий;

- методы оптимального управления аэродинамическими трубами и др.

Многие из рассмотренных выше вопросов входят в программы спецкурсов, читаемых на кафедре механики полета в МФТИ.

Заместитель начальника ЦАГИ
член-корреспондент АН СССР Г.С.Бюшгенс".

...Пожалуй, не единственный ли случай, когда эта пламенная душа не могла не вмешаться в нематематическую тематику это переброска рек с севера на юг. Впервые о переброске рек мы услышали от А. Б. Жижченко. Сама идея столь вздорная, что Лев Семенович сначала не поверил в такое. В дальнейшем жизнь показала - работа уже развернута во всю мощь и основательно финансируется созданным Министерством Водного хозяйства. И мужу стало страшно. Он не знал, что можно сделать. К тому же здоровья нет. Но когда ему позвонил Игорь Ростиславович Шафаревич, подробно описал, что делается и просил принять участие в борьбе против этого гнусного дела, Лев Семенович не мог остаться безучастным. Я до сих пор помню его горестный тон и с какой грустью в голосе он сказал ему

- Я ведь нездоров и сил у меня уже мало.

- Левочка, может быть, для пользы дела достаточно будет хотя бы твоего имени? - осторожно сказала я. Я знала - это не для Понтрягина, а все же сказала.

- Разоряется Русская Земля, а ты мне говоришь, достаточно твоего имени! - ответил он мне...

Этический уровень ученого всегда волновал Льва Семеновича. В своей статье "Об этике ученого" в журнале "Наш Современник" Л. С. Понтрягин писал: "... Не сомневаясь в том, что переброска рек могла бы принести только вред стране, подумаем о том, какими же побуждениями руководствуются сторонники переброски. Являются ли эти побуждения вполне бескорыстным результатом заблуждения или они вызваны корыстным интересом"... И далее: "... От ученых, особенно теперь, требуется высокий моральный уровень и чувство ответственности за совершаемые действия. Безответственные действия, прикрывающиеся наукой, могут принести и уже приносят нашей стране огромный вред. Люди, использующие науку в корыстных целях, должны быть морально осуждены".

Интервью академика Понтрягина

Из газеты "Неделя" №24 (1264) выпуск 303-й. "Гость 13-й страницы". Интервью взяли корреспонденты Евгений Дугин, Гагик Карапетян.

— Лев Семенович, есть у вас любимое изречение или пословица? И следуете ли вы им?

— Фраза великого немецкого математика Давида Гильберта, жившего на стыке прошлого и нынешнего веков: "Великие открытия рождаются парадоксами, а умирают тривиальностями". Типичный пример, подтверждающий это, — десятичная система записи чисел, которая появилась в V столетии нашей эры в Индии и стала обыденной в наши дни... Еще очень люблю народный рассказ про лягушку, которая упала в кувшин со сливками; в безнадежном положении она хлопала лапами, пока не взбился комок масла, и, опираясь на него, выбралась из кувшина. Мой принцип — подражать этой лягушке.

— Возникало у вас когда-нибудь прервать работу и несколько дней не возвращаться к расчетам?

— Перефразирую Маяковского: "Математика — та же добыча радия; в грамм добыча, в год труды". Мне занятия математикой даются очень трудно и в физическом, и в эмоциональном плане. Бывает, после работы чувствуешь себя опустошенным. Естественно, следовало бы отдохнуть. Но сразу прекратить поиски редко удается, невольно продолжаешь размышлять над проблемой — пока не становится ясным полученный результат. И после удачного решения какой- либо задачи я бываю так измучен, что даже не радуюсь достижению цели. Много позже приходит эта радость. А начало любой работы вызывает тревогу: справлюсь ли?.. Однажды я завершил сложную работу и с полученным результатом отправился в США для чтения лекций в Стэнфордском университете. Вернувшись в Москву, стал готовиться к докладу на международном конгрессе математиков в Ницце. Включил в доклад результат, о котором рассказывал в Стэнфорде. И когда перепроверял, вдруг обнаружил ошибку! Представляете мое настроение в тот миг? До сих пор помню, было это 16 марта 1970 года, гулял по бетонной дорожке подмосковной дачи. Попытки исправить ошибку продолжал в состоянии близком к полному отчаянию. Лишь полтора месяца спустя, все еще терзаемый сомнениями, нашел верное решение. И на конгрессе выступил с полноценным докладом.

— Что дает вам силы для столь тяжкой работы?

— Внутренние "пружины" тут совершенно земные. Не разумею под этим материальную заинтересованность, вовсе нет, хотя она и немаловажна *(улыбается)*. Люди, посвятившие себя науке, неустанно ищут потому, что в них бьется, не давая покоя, пламенная мысль: что сделать ради лучшей жизни на Земле? Так могут ли быть передышки в этой деятельности?

— Наверное, у ученого, как и у поэта, есть свое Болдино, свое "лукоморье", где лучше всего работается. У вас это...?

— Представьте, трудиться могу везде. В годы войны математикой занимался непрерывно в любых условиях: в очередях за хлебом или в пути, на подножке трамвая, держась за поручни... Сейчас это происходит и дома, и в автомобиле, и на даче, и, разумеется, в институте.

— Интересно, кем вы мечтали стать в детстве?

— Мои игрушки были техническими, чаще всего сделанными мной самим. Сложись обстоятельства по-иному, стал бы, наверное, инженером. Мальчишкой любил наведываться на завод "Серп и молот", где служил счетоводом отец. Бывал в гвоздильном цехе; с трепетом наблюдал за работой прокатного стана — как из вращающихся валов вылетает огненная железная змея, а рабочий клещами ловит ее конец и, обведя вокруг себя, направляет в следующие прокатные валы. Завораживающая картина!

После полной потери зрения вопрос о выборе профессии, как вы понимаете, усложнился. Пробовал выучиться музыке, по нескольку часов в день упражнялся на пианино, но безуспешно. Думал: не стать ли историком? Математика давалась мне трудно, и мысль о ней как о профессии пришла не сразу. Но в 8-м и особенно в 9-м классе всерьез ею заинтересовался. Познания черпал из популярных книжечек. Уже не мыслил иной профессии. Поступил на физмат МГУ. Слушая лекции, запоминал и понимал все сразу, никогда ничего не записывал. Повторял лекцию дома в уме. К моменту сдачи экзаменов твердо знал почти весь курс.

— Какие чувства вы испытываете, получив долгожданный результат исследования?

— Из десяти задач, за которые берешься, пожалуй, лишь одна решается успешно. Незаконченная работа вызывает некоторый страх: а вдруг я вообще не сумею ее завершить и несколько лет упорного труда пропадут даром? Законченное исследование тоже тревожит: вдруг обнаружится ошибка? Все эти переживания — своеобразный стимул к тщательному выполнению работы... Слышали рассказ о художнике, который всякий раз, берясь за новую работу, забывает о всех своих предыдущих картинах, они как бы перестают существовать для него, остается лишь одна, главная, которую предстоит написать? Опытному мастеру страшно перед этой дорогой в неизведанное. Так же и у математиков: очередная задача — главная.

— Какой период или ситуацию в пашей практике можно считать вашим "звездным часом"?

— Целый год, знаменательный для меня: 1958-й. Оргкомитет очередного всемирного конгресса математиков, проходящего раз в четыре года, пригласил меня тогда выступать с основным докладом в Эдинбурге. В том же году я был избран действительным членом Академии Наук СССР. Произошло и еще одно событие: познакомился с Александрой Игнатьевной, врачем Института имени Склифосовского. Два года спустя она стала моей женой, другом и советником во всех делах. Нам никогда не бывает скучно вместе.

— Происходили ли у вас изменения устоявшихся научных принципов, взглядов?

— Увлечение "чистой" математикой продолжалось долго. Но все чаще и упорнее передо мной вставал вопрос: для чего нужна отвлеченная математика, без практических приложений? Однажды — это было в 1932 году — ко мне домой без всякого предупреждения пришел молодой физик Александр Александрович Андронов. Сказал, что слышал о моем желании заниматься прикладными аспектами математики. Знакомство с этим ученым, человеком просто-таки выдающимся, переросло в дружбу, которая продолжалась 20 лет, до его кончины. Она положила начало новому направлению моих научных интересов.

Особенно остро чувствовал необходимость использовать свои знания для решения практических задач во время Великой Отечественной войны. Как ни странно звучит, отличные условия для занятия математикой предоставила мне эвакуация: там не пришлось преподавать, участвовать в многочисленных заседаниях. Поэтому в 1942 году в Казани мне удалось выполнить две важные работы, имевшие прикладное значение.

Но лишь через 10 лет характер моей работы совсем изменился. Осенью 1952 года я стал вести в стекловском институте семинар по теории колебаний и теории регулирования. На каждом занятии соблюдалось правило: доклад любого участника начинается с рассказа о техническом приборе, а затем следует его описание при помощи дифференциальных уравнений; завершается это математическим анализом работы прибора. Семинар не вызвал одобрения близких мне тогда коллег старшего поколения. Даже мой учитель, Павел Сергеевич Александров, не принял новых устремлений, считая их своего рода изменой основной деятельности в области топологии. Но наша группа продолжала увлеченно работать. И в 1961 году вместе с тремя моими учениками опубликовал книгу "Математическая теория оптимальных процессов"; в следующем году она была удостоена Ленинской премии.

— Какими, по вашему мнению, должны быть отношения учителя и ученика в науке?

— Думаю, их естественное развитие приводит к тому, что ученик становится независимым от учителя. Сошлюсь на собственный пример. В моем становлении как ученого решающую роль сыграл, повторяю, академик П.С. Александров. Он ввел меня в круг вопросов самой передовой по тем временам науки. Но в 1936 году я "взбунтовался" против него. Выступая на расширенном собрании ведущих математиков страны, указал на недостатки некоторых действий Павла Сергеевича. После моего выступления он подсел ко мне и поблагодарил за справедливую критику. С тех пор я почувствовал себя вполне самостоятельным... Что касается своих учеников, то стараюсь внушить им добросовестное отношение к труду, при котором человек считает первоочередными общественные интересы и второстепенными — личные. С некоторыми учениками поддерживаю дружеские отношения. С другими произошел острый конфликт и даже полный разрыв (полагаю — на пользу делу).

— Вы и сейчас продолжаете работать над прикладными исследованиями?

— Да, пытаюсь решить одну задачу из теории дифференциальных игр, которой начал заниматься еще в 1964 году. Другое, что меня беспокоит, это преподавание математики в средней школе. В последнее десятилетие этот предмет в школе стал малосодержательным, отошел от практических проблем. Уверен, читателям “Недели” хорошо знакомо, как их дети или внуки, приходя домой из школы, “жалуются” на математику. Причина видится в том, что ее изложение давалось абстрактно, в отрыве от реальных потребностей. Резонанс посредственных (мягко говоря) учебников по математике и ее преподавания в школе ощущается потом в вузовских аудиториях. Все чаще встречаются слабо подготовленные студенты и даже аспиранты. Исправление положения в школе уже началось.

— Не поделитесь ли вы мыслями о реформе системы среднего образования?

— Одним из важнейших пунктов реформы я считаю порицание “процентомании”, то есть искусственного завышения отметок. Школьник привыкает к тому, что, даже ничего не делая, может получить тройки и окончить школу. Первостепенная задача школы: приучить ученика честно относиться к своему главному труду — к учебе. Начать надо с создания хороших учебников. Несколько лет назад в качестве члена редакционно-издательского совета Академии паук СССР я ознакомился с книгой по высшей математике, написанной просто отвратительно, и, что самое печальное, предназначенной для начинающих. Поэтому, вероятно, у меня и возникло желание изложить основы высшей математики в том виде, в котором они были бы понятны школьнику, увлеченному этой наукой. Задумал написать четыре книжечки под общим названием “Знакомство с высшей математикой”. Написал две. Замечу: чем тщательнее пишется книжка, тем тоньше получается. Можно сказать: краткость — следствие тщательности, но враг гонорара (смеется). Получается, чем тщательнее пишет автор, тем меньше получает за кропотливый труд. То есть оплата обратно пропорциональна квадрату качества выполненной работы. Этой любопытной закономерностью, возможно, объясняется появление толстых и скучных книг.

— Лев Семенович, что в человеке вам совершенно чуждо?

— Лживость. Стремление к почестям.

— Ваше отношение к собственной известности?

— Ценю известность за то, что она дает большую возможность совершать полезные для общества действия.

— Что вы считаете самым главным в жизни?

— Профессиональную деятельность. Правда, занятия математикой Петр Сергеевич Новиков сравнивал с работой в каменоломне. Но эта “каменоломня” доставляет мне радость!

Этика и арифметика

Л. С. Понтрягин

Эта статья была опубликована в газете "Социалистическая индустрия", №68 (2960), 21 марта 1979 г.

Наверное, ни один человек, оглядываясь на свой трудовой путь, не может сказать, что каждый отрезок этого пути пройден им с равным успехом, что не было на нем остановок, замедленных переходов, а то и явных провалов. Это понятно. Иначе и быть не может. Тем более у человека, занятого творческим трудом. И нет ничего зазорного в поражениях и неудачах, если при этом ты жил и действовал в том высоком напряжении, какое только можешь потребовать от себя. Если... Вот оно, это "если"! Не всякую работу можно выполнить с блестящим результатом, или, как теперь говорят, "на Знак качества". Но всякую работу нужно делать, стремясь к этому Знаку! Не может ученый сказать себе: "А вот эту задачу я буду решать вполсилы, как получится!" Или: "Не все же добиваться верного результата, пускай разок решение будет приблизительным!" И точно так же не может, не должен он вполсилы, "приблизительно" участвовать во всяком другом деле, требующем его таланта и энергии. Непростительно, когда известное имя — лишь вывеска, щит, прикрывающие собой недоброкачественную, недобросовестную работу. Звание ученого, авторитет ученого обязывает к работе только высшего качества, к максимальной отдаче. Иначе действия его могут оказаться не только безуспешными, но и безнравственными.

Да, я употребляю это резкое слово, ибо твердо убежден: основная нравственная ценность всякого человека, его моральный облик определяются его отношением к труду. Тот, кто недобросовестно трудится на своем рабочем месте — независимо от того, станок ли это, чертежная доска или письменный стол, не может считать себя человеком высоких нравственных достоинств, человеком чести, как говорили в старину. Не можешь держаться на уровне, достойном звания ученого? Не получается? Сумей уйти, найти себе дело, которое тебе по плечу.

Уверен: человек чувствует удовлетворение только от той работы, которую он выполняет хорошо. Есть много определений понятия "счастье" и много причин, способствующих или мешающих ему. Но есть в жизни счастье, которое зависит только от тебя, оно может светить тебе каждый день, вызванное по твоей воле и старанию: счастье отлично выполненной работы. Мы много говорим о возможностях, которые предоставляются у нас каждому гражданину для раскрытия всех его способностей, о праве на творчество, о поддержке государством научных работников. Все это так. Но, воспитывая нашу молодежь, мы подчас забываем передать ей то главное, что уже поняли, глубоко прочувствовали сами: ты идешь в науку, ты чувствуешь призвание к ней — хорошо. У тебя есть данные для научной деятельности — прекрасно. Но достаточно ли у -тебя моральных сил, готов ли ты к науке в нравственном отношении? Знай: раз достигнув определенной высоты, ты уже будешь обязан никогда не опускаться ниже этого уровня, завоевав признание, не пользоваться им, как вечным чеком, а каждый раз заново подтверждать свое право на него. В нашей работе недопустимы инерция, холостой ход. Иначе человек становится глубоко несчастлив сам и причиняет огромный ущерб другим — тем, кто идет за ним, учится по его книгам, верит его авторитету.

Или ты хороший ученый — или ты не ученый вовсе. Подобный нравственный максимализм присущ подавляющему большинству деятелей советской науки. Однако, к сожалению, еще не всем и не всегда. Лет десять назад, заинтересовавшись издательской работой, а именно, работой главной редакции физико-математической литературы издательства "Наука", я обратил внимание на однообразие имен в списке авторов, невысокое качество некоторых книг. Я решил обратиться в редакционно-издательский совет АН СССР (РИСО) с предложением создать специальный орган, контролирующий издание книг по математике. Тогдашний президент Академии наук М. В. Келдыш поддержал это предложение, и такая контрольная группа при РИСО была создана. Не буду говорить о том, какой вклад внесла она в дело улучшения математической литературы, но скажу, что считаю эту работу, весьма хлопотливую, чреватую нелицеприятными объяснениями и даже конфликтами, не менее важной и интересной для себя чем непосредственная научная деятельность.

Вот в моих руках толстая книжка, выдержавшая несколько изданий, — пособие по высшей математике для начинающих. Скольких трудов стоило доказать нецелесообразность ее очередного издания! В конце концов один из моих коллег прямо спросил меня:

— Зачем вам это нужно — все эти споры, обличения, конфликты? Вам ведь никто не мешает писать и издавать хорошие книги. Плохим же, написанным недобросовестной рукой, время само вынесет приговор.

Нет, с подобной позицией, по моему убеждению, настоящий ученый согласиться не может. Настоящий ученый должен не просто сам хорошо делать свое дело, он должен активно и настойчиво бороться с недобросовестностью или бездарностью, в каком бы уголке научной деятельности они ни свили себе гнездо! Кстати, бездарность обличить легче. И рассуждать тут особо не о чем. Меня куда больше тревожит другое... Мне трудно понять, как может уважающий себя ученый, ученый талантливый, выпустить слабую книгу. Искреннее заблуждение в том, что книга получилась хорошая? Вряд ли. Умный человек всегда лучше, чем кто бы то ни было, знает подлинную цену своему труду. Какие-то побочные соображения? Видимо. Поразмышляв, я пришел к такому выводу: объем научного математического труда обратно пропорционален его качеству. Чем толще книга, тем она хуже, слабее, запутаннее и противоречивее. Но чем толще книга, тем больше гонорар!

Мало быть способным и даже очень способным ученым. Надо воспитывать себя в нравственном плане, уметь четко определять и регулировать свои побуждения, ограждая себя от тех, за которые потом самому будет мучительно стыдно. Когда мы говорим о ком-нибудь из своих коллег: "Блестящий ученый и прекрасный человек", — не думаю, чтобы он вступил в жизнь уже в таком совершенном виде. Нет, он растил себя, он дисциплинировал не только свой мозг и свою волю, но и свои склонности, привычки, взаимоотношения с миром и людьми. Он боролся за себя — нынешнего. Нужно бояться — да, именно бояться — малейшей фальши, грязи, халтуры, нужно тщательно ограждать себя от них, отбрасывать их прочь, как отбрасываем мы в ходе своих рассуждений неверные, уводящие в сторону мысли, нужно бороться за себя, если хочешь, чтобы твое имя, звание советского ученого осталось незапятнанным, достойным современников и потомков.

Резонанс ошибок, слабостей, неверных шагов (даже в самом обычном житейском плане), совершенных известным ученым, столь же силен, как и резонанс его научных достижений. Не надо считать себя застрахованным от изъянов, но надо уметь бороться с ними, не прячась за обывательское утешение: я столько сделал для общества — мне должны простить какую-то малость. Мне известны, к сожалению, отдельные факты, когда видный ученый под давлением ли близких, в силу ли собственной нравственной мягкотелости совершает шаги, которые трудно совместить с его блестящим именем и талантом. Например, начинает всячески способствовать научной карьере сына. Нет, я не против помощи старшего младшему. Учеником крупного ученого может быть и его близкий родственник. Но это должна быть научная помощь, а не обывательская услуга, которая, к тому же часто оказывается медвежьей: наука не терпит примазавшихся, рано или поздно она беспощадно разоблачает бездарность. Да и что может быть страшнее для человека, как не сознание своей беспомощности, неуместности в деле, выбранном на всю жизнь? А это горькое сознание, я уверен, всегда прячется под маской преуспевания и самодовольства. Мне жаль таких людей, случайных лицедеев в великом храме науки.

Меня тревожит, когда появляются хотя бы самые малые намеки к искусственному созданию, так сказать, “сословия ученых”: по моим наблюдениям, в семьях иных математиков становится модным определять своих детей непременно в спецшколы с математическим уклоном, даже если чадо явно не тяготеет к тому. А отсюда становится затруднительным попасть в такую школу ребенку из “нематематической” семьи, даже способному. С другой стороны, серьезные недостатки в программе средней школы поставили определенный заслон на пути к высшему математическому образованию, создали ажиотаж вокруг репетиторов и опять-таки искусственное выделение групп молодежи, идущей в математику. Этого быть не должно! С этим необходимо бороться. И здесь немаловажное слово принадлежит нам самим: мы должны быть требовательнее к себе, помнить, что объективность и беспристрастность необходимы ученому не только в ходе его научных изысканий.

Ученый не может стоять в стороне от проблем общественного бытия, интересов своих сограждан.

Ответственность ученого — она и в том, чтобы отдать Родине все силы своего ума и таланта, служить ей самоотверженно и преданно. Но она и в том, чтобы высоко держать звание советского ученого, наполняя его содержанием безупречной моральной чистоты, общественного горения, лучшими из нравственных качеств, выработанных человечеством.

Мое признание истории математики

Л. С. Понтрягин

Этот материал из архива академика Л.С.Понтрягина был предоставлен редакции журнала вдовой Льва Семеновича — Александрой Игнатьевной ***Понтрягиной.***

Начав писать относительно популярную книжечку "Метод координат", я был потрясен грандиозностью открытия Декарта. Исходя из названия, я возымел наивную мысль, что Декарт открыл декартовы координаты, но потом меня взяло сомнение, ведь географические координаты существовали еще до Декарта. Я начал рыться в справочниках и словарях и обнаружил, что прямоугольные координаты употреблялись еще до начала нашей эры, а Декарт только усовершенствовал их, введя правило знаков. Ликвидировав до некоторой степени свою безграмотность в области истории математики, я понял, до какой степени медленно складывались основные определения и понятия, и это вызвало у меня представление о том, насколько грандиозно здание математики. Желая поделиться своим новым ощущением, я написал статью с кратким историческим обзором развития математики, но никто не захотел ее напечатать, так как все, что я написал, было хорошо известно и без меня. Однако, восприняв математику в ее историческом развитии, я возымел некоторое понятие об ее структуре и проникся уважением к ее истории. Это дало мне возможность оценить по-новому, в частности, теорию множеств, которая так зловредно подействовала на преподавание математики в средней школе.

Я уже много раз говорил о том, насколько не приемлема с педагогической точки зрения была модернизация преподавания в средней школе, начатая в середине 60-х годов. Но, может быть, это была неудавшаяся попытка ознакомить школьников с важными достижениями математики? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, я приведу здесь краткий исторический обзор главной линии развития математики за четыре тысячелетия ее существования и выскажу некоторые свои соображения о структуре математики.

Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей и развивалась очень медленно. Многие вошедшие теперь в быт общеизвестные математические понятия слагались в течение столетий и даже тысячелетий. Примером может служить десятичная запись целых чисел, общепринятая теперь. До ее появления существовало много различных систем для записи чисел настолько сложных, что теперь это трудно себе вообразить. Упомяну лишь об одной, которая и теперь всем известна. Речь идет о римских цифрах.

Ныне действующая десятичная запись чисел появилась в Индии около пятого века нашей эры. Важнейшую роль в этой системе играет цифра 0 (ноль). Ноль является важнейшим открытием математики.

Десятичная запись чисел называется теперь арабской, так как она проникла в Европу через арабов. Она появилась в Испании около X века, а до того в Европе пользовались римскими цифрами. Дальнейшее распространение десятичной записи чисел в Европе происходило медленно. Только к XIV или XV веку эта запись получила всеобщее признание. В России десятичная запись установилась только в самом начале XVIII века в арифметике Магницкого. Таков был сложный путь внедрения в жизнь одного из важнейших практических открытий математики.

Первое из известных теперь математических сочинений появилось почти за 2000 лет до нашей эры в Египте. Это папирус Ахмеса. В нем даются отрывочные, но важные для применения сведения из алгебры и геометрии. Одной из важных для египтян задач было измерение сельскохозяйственных площадей. В папирусе Ахмеса дается правило вычисления площади равнобедренного треугольника. Согласно этому правилу, площадь равнобедренного треугольника равна произведению основания на половину боковой стороны. Оно возникло, надо думать, из непосредственного чувственного восприятия окружающего мира. Это не вызывавший тогда сомнений, но неверное правило, указывает на то, что на очевидность в математике полагаться нельзя. Получение даже простых, верных правил требует теории, т.е. систематического изложения фактов и их доказательств.

Примерно за три века до нашей эры была построена стройная геометрическая теория — евклидова геометрия, излагающая основные важные для применений геометрические факты и дающая их доказательства. Несколько позже были получены важные геометрические результаты, нашедшие свои приложения лишь много столетий спустя. Были фактически введены в употребление прямоугольные координаты, отличающиеся от декартовых лишь тем, что за отсутствием отрицательных величин рассматривались лишь положительные координаты точек. При помощи этих координат еще до начала нашей эры были записаны уравнения кривых второго порядка — параболы, гиперболы и эллипса. Это сделал древний математик Александрийской школы Аполлоний (живший в III—II веке до н. э.). Он записал уравнения этих кривых в следующей форме:

$$\begin{aligned} &y^2 = px && \text{(парабола);}\\ &y^2 = px + \tfrac{p}{a}x^2 && \text{(гипербола);}\\ &y^2 = px - \tfrac{p}{a}x^2 && \text{(эллипс);} \end{aligned}$$

Аполлоний, конечно, не выписывал уравнений в этой алгебраической форме, так как в те времена не существовало еще алгебраической символики. Он описывает уравнения, пользуясь геометрическими понятиями. Под буквами, входящими в уравнение, подразумевались не числа, а прямолинейные отрезки. Величина y^2 в его терминологии есть площадь квадрата со стороной y; px есть площадь прямоугольника со сторонами p и x и т.д. Таким образом, все три уравнения означали равенство некоторых площадей. С этими уравнениями связаны и названия кривых.

Парабола, по-гречески, означает равенство: площадь квадрата y^2 равна площади прямоугольника px. Гипербола, по-гречески, означает избыток: площадь квадрата y^2 превосходит площадь прямоугольника px. Эллипс, по-гречески, означает недостаток: площадь квадрата y^2 меньше площади прямоугольника px.

Алгебра развивалась медленнее, чем геометрия. Впервые ее признаки мы находим в папирусе Ахмеса. В нем (если применить современную терминологию) решается уравнение первой степени с одним неизвестным, причем имеется специальное иероглифическое обозначение неизвестной величины и специальные символы для обозначения действий: сложение и вычитание, а также для обозначения равенства. Дальнейшие, выдающиеся достижения в области алгебры принадлежат арабам IX—XV вв., которые уже решали уравнения первой и второй степени, но не употребляли символики, а пользовались словесными описаниями.

В конце XV века в Италии появляются современные знаки плюс (+) и минус (–). Быстро появляются и дальнейшие современные знаки: степень, корень, скобки и т.д.

Далее в работах французского математика Виета (1540—1603) вводится буквенное обозначение величин, как известных, так и неизвестных. Таким образом, к началу XVII века был готов современный аппарат символической алгебры, но не было еще отрицательных чисел, хотя ими пользовались, но они не были узаконены.

В начале XVII века Декарт построил свою систему координат и тем самым узаконил отрицательные числа. Таким образом, к началу XVII века уже были хорошо развиты как алгебра, так и геометрия, но они не были связаны между собой. На этой основе Декарт построил аналитическую геометрию, а в ней, как в фокусе, сошлись математические открытия, медленно, с трудом слагавшиеся в течение тысячелетий.

Работа Декарта "La Géometrie", в которой излагались основные идеи аналитической геометрии на плоскости, была опубликована в 1637 году. Следует отметить, что к этим идеям одновременно пришел другой французский математик Ферма (1601—1655), но соответствующая его работа была опубликована только в 1679 году. К 1639 году идеи Ферма становятся известными его современникам по обычаям того времени только благодаря обмену письмами.

Значение аналитической геометрии состоит прежде всего в том, что она установила тесную связь между алгеброй и геометрией. Эти две ветви математики во времена Декарта достигли уже высокой степени совершенства, но развитие их в течение тысячелетий шло независимо друг от друга, и ко времени появления аналитической геометрии между ними намечалась лишь довольно слабая связь. Отсюда видно, какое огромное внутриматематическое и теоретическое значение имеет аналитическая геометрия, синтезировавшаяся две главные, раздельно развивавшиеся в течение тысячелетий ветви математики.

С другой стороны, не менее велико и прикладное значение аналитической геометрии. В настоящее время трудно представить себе какое-либо применение математики без аналитической геометрии.

Важную роль аналитическая геометрия сыграла в развитии понятия числа. Отрицательные числа, известные еще индусам в VI—XI в., европейскими математиками долгое время не признавались, считались абсурдными. Даже Виета не признавал их. Только благодаря аналитической геометрии Декарта (правило выбора знаков координат) они полностью утвердились в математике.

Точно так же комплексные числа обрели свою реальность благодаря декартовым координатам, но уже много позже Декарта. Первоначально считалось, что квадратное уравнение, не имеющее действительных решений, вовсе их не имеет. Только в XVI веке, благодаря формуле Кардана решений кубического уравнения, комплексные числа стали фактически употребляться. Оказалось, что в формуле Кардана в случае трех действительных корней при промежуточных вычислениях появляются комплексные числа. Однако и после этого комплексные числа оставались мало понятными до Гаусса (1777—1855), который на грани XVIII и XIX столетий дал при помощи декартовых координат геометрическое изображение комплексных чисел и доказал основную теорему алгебры о том, что многочлен n-й степени имеет n корней. В настоящее время комплексные числа и комплексные функции комплексного переменного играют огромную роль в теоретической и прикладной математике.

Основополагающие результаты в этой области математики принадлежат французскому математику Коши (1789—1857). Следующим по времени и важнейшим этапом в развитии математики является открытие математического анализа.

Математический анализ, основными понятиями которого являются производные и интеграл, прежде чем принять современную форму складывался и развивался в течение очень длительного времени. Во всяком случае, в сочинениях Архимеда (287—212 гг. до н.э.) уже встречаются построения, которые можно теперь рассматривать как зачаточные формы интеграла и производной. Архимед вычислял площадь, ограниченную дугой параболы и куском ее прямолинейной секущей, методом исчерпывания, т.е. путем вписывания в эту фигуру последовательности прямолинейных многоугольников, постепенно исчерпывающих всю площадь фигуры. Это построение с современной точки зрения можно считать зачаточной формой интегрирования. Следует заметить, что в методе исчерпывания Архимед имел предшественников. Архимедом также было произведено построение касательной к спирали, что с современной точки зрения может рассматриваться как зачаточная форма дифференцирования, т.е. нахождения производной.

В форме, уже содержащей основные алгоритмические методы, дифференциальное и интегральное исчисления были созданы в XVII— начале XVIII столетия Лейбницем (1646—1716) и Ньютоном (1643— 1727). Лейбниц и Ньютон сделали эти открытия почти одновременно, независимо друг от друга. Но оба не спешили с публикациями, так как сами не умели с достаточной четкостью осознать полученные ими результаты. Созданные ими алгоритмы действовали хорошо и давали правильные результаты, важные для приложений, но не было ясного понимания того, на чем основаны алгоритмы.

Здесь имелся как бы некоторый налет мистики. Кажется, в те времена бытовало следующее высказывание: “Делай, вера придет потом”. Дело в том, что при определении скорости, т.е. производной по времени, использовалась такая непонятная вещь, как мгновенный отрезок времени.

Этот таинственный мгновенный отрезок времени был совершенно мал, именно, при некоторых вычислениях его следовало заменять нулем, а при других вычислениях такая замена недопустима. Скорость определялась как отношение длины пути, пройденного за одно мгновение времени к протяженности этого мгновения.

Ясно, что при таком описании скорости протяженность одного мгновения времени нельзя было считать равной нулю, так как тогда скорость записалась бы в виде бессмысленного выражения $\frac{0}{0}$. Но если при вычислении скорости длительность мгновения времени обозначить буквой O, как это делал Ньютон, то проводя в этих обозначениях вычисление отношения пройденного пути к длительности мгновения времени, в полученном результате следовало заменить букву O, обозначающую длительность мгновения времени, нулем, и получался правильный результат. Аналогичные трудности имелись и у Лейбница.

Выход из этих затруднений был найден Коши (1789—1857), который ввел понятие предела. Сущность его заключается в следующем. Рассматриваемый отрезок времени не считается мгновенным, а имеет вполне конечную величину. Составляется отношение длины пути, пройденного за это конечное время, к конечному отрезку времени, и в полученном выражении длина отрезка времени начинает меняться, стремиться к нулю. При этом смотрят, к какому пределу стремится полученное выражение. Этот предел и является скоростью, т.е. производной.

По мере того, как развивались дифференциальное и интегральное исчисления, возникло и стало играть очень большую роль еще одно новое понятие. Это бесконечный ряд, т.е. сумма бесконечного числа слагаемых, которую мы запишем в виде:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{1}$$

Употребление таких сумм приводило большей частью к правильным важным результатам, но иногда давало и ошибочные результаты. Нужно было понять, при каких условиях можно было спокойно пользоваться бесконечными суммами и какова числовая величина бесконечной суммы. В качестве конкретной суммы, вызывающей недоумение, можно привести следующий пример:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{2}$$

Если подходить к этой сумме способом, привычным для обычных сумм, то можно группировать члены, а именно, можно объединить каждый член нечетного номера со следующим за ним членом четного номера. Каждая такая пара дает в сумме нуль, и, следовательно, в результате сложения всех членов суммы (2) мы получим нуль. Но можно выделить сперва первый член, т.е. единицу, а затем группировать каждый член четного номера с каждым членом нечетного номера, следующего за ним. Тогда в результате этих комбинаций получатся нули. Таким образом, оказывается, что сумма (2) равна единице. Существовала и такая точка зрения, согласно которой сумма (2) равна 1/2. К этому можно прийти из следующих соображений. Если считать, что сумма (2) существует и равна S, то имеет место очевидное равенство $S = 1 - S$, откуда вытекает $S = 1/2$. Вопрос с бесконечными рядами также разрешил Коши. Он точно определил, при каких условиях сумму (1) можно рассматривать и чему равно ее числовое значение. Именно, он составил предварительные суммы, положив

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n. \tag{3}$$

Таким образом, мы получаем бесконечную последовательность предварительных сумм

$$S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots \tag{4}$$

Если эта последовательность чисел стремится к некоторому пределу S, то ряд (1) считается сходящимся и сумма его считается равной числу S.

Прикладное значение математического анализа огромно. При описании физического процесса мы обычно рассматриваем несколько физических величин, изменяющихся во времени. Скорости изменения этих величин, имеющих важное физическое значение, являются производными их по времени. При этом физические законы обычно записываются в виде уравнений, связывающих сами величины и скорости их изменения, т.е. производные. Такие уравнения называются дифференциальными уравнениями. Таким образом, физические законы записываются при помощи дифференциальных уравнений. Простейшим примером может служить закон движения материальной точки под действием силы. Словами он формулируется так: произведение массы точки на ускорение точки равно силе, действующей на точку. В виде дифференциального уравнения это записывается так:

$$m\ddot{x} = f(x) \tag{5}$$

Здесь m — масса материальной точки, x — вектор, определяющий положение точки в пространстве, $\ddot{x}$ — ускорение точки, которое является второй производной вектора x по времени, $f(x)$ — вектор силы, действующий на точку, который зависит в данном случае от вектора x. Закономерности работы технических объектов также записываются при помощи дифференциальных уравнений.

Электронно-вычислительные машины (ЭВМ) или компьютеры открыли перед математикой новые возможности ее применения. Компьютер способен с фантастической быстротой осуществлять сложнейшие арифметические вычисления. Нужно только дать ему задание в виде программы. За математикой остается обязанность поставить перед компьютером задачу, сформулированную в виде программы вычислений. Таким образом, компьютер, нисколько не заменяя математику, в огромной степени расширяет возможности ее применения к решению практических задач.

Я предлагаю следующее грубо-схематическое описание структуры и развития математики.

Из сказанного ранее видно, что истоками математики являются решения практически важных задач. В то же время математическая теория отнюдь не представляет собой сборник рецептов решения таких задач. Она систематизирует их, устанавливает между ними внутренние связи и дает доказательство правильности высказанных утверждений. Такую теорию, непосредственно возникающую из решений практических задач, мы условно назовем первым базисным слоем математической дисциплины.

В этом первом базисном слое обычно возникают новые задачи, непосредственно не связанные с приложениями, но представляющие большой математический интерес. Этими задачами математики обычно также занимаются. Систематизированное изложение таких задач мы условно назовем вторым слоем. Над вторым слоем обычно наслаивается третий слой, над ним четвертый и т.д. Конечно, такое расслоение математической теории носит весьма неопределенный условный характер, однако дает некоторые представления о том, как развивается математика. Вопрос о том, когда надо прекратить дальнейшее наслоение, представляется весьма сложным методологическим вопросом. Прежде всего, результаты, содержащиеся в слоях высоких номеров, первоначально не имевшие никакого прикладного значения, в дальнейшем могут оказаться полезными. Примером служат возникшие еще в древности прямоугольные координаты и кривые второго порядка, о чем уже было сказано раньше. Кроме того, слои высоких номеров, не имеющие никакого прикладного значения, могут оказаться очень важными с внутренней математической точки зрения. С другой стороны, чрезмерно далеко идущие наслоения часто приводят к теориям, лишенным всякого практического и теоретического значения. Приведу здесь один пример лишенной практических применений математической теории, важной не только с точки зрения внутриматематической, но и оказавшей большое влияние на человеческое мировоззрение. Это геометрия Лобачевского.

Тщательно систематизированная геометрия, так называемая евклидова геометрия, построена на основе ряда аксиом, которые принимаются без доказательств, в то время, как другие утверждения выводятся из них логически. Пятая аксиома Евклида или, иначе, пятый постулат Евклида, утверждает, что через точку a на плоскости, не лежащую на прямой P, можно привести только одну прямую Q, не пересекающуюся с прямой P. Эта прямая Q называется параллельной к прямой P. Многие выдающиеся математики пытались вывести эту аксиому логически из других аксиом Евклида. Попытки доказательства обычно велись от противного. Предполагалось, что через точку a можно провести две различные прямые Q_1 и Q_2, не пересекающиеся с прямой P.

Исходя из этого предположения, пытались прийти к противоречию. При этих построениях возникали очень странные с точки зрения евклидовой геометрии утверждения, однако обнаружить в них противоречие не удавалось. К тому времени, как Лобачевский занялся этим вопросом, был уже накоплен значительный запас фактов. Развивая их дальше, Лобачевский построил стройную, не содержащую противоречий новую геометрию, совершенно отличную от евклидовой. Лобачевский не был единственным математиком, который пришел к неевклидовой геометрии, но он был первым, кто опубликовал новую теорию в начале 20-х годов прошлого века, признав ее новой геометрией. Получив свои результаты, Лобачевский сделал не только великое открытие, но, публикуя их, совершил акт огромного мужества. Новая построенная им геометрия настолько противоречила сложившимся представлениям, что автор ее представлялся чудаком, ведущим бессмысленную деятельность. Математики, современники Лобачевского, не понимали и не признавали его открытия, и даже Гаусс, который понимал его, не посмел выступить открыто в поддержку Лобачевского.

Хотя Лобачевский занимал высокое общественное положение, будучи ректором Казанского университета, он испытывал огромные моральные мучения от того, что главное дело его жизни оставалось не признанным. Для того, чтобы показать насколько велико было это непризнание, приведу одну фразу Чернышевского, написанную им в письме к своему сыну: “Известный всей Казани дурак Лобачевский”. Лобачевский ясно понимал и утверждал в своих сочинениях, что пространство, в котором мы живем, может быть и неевклидовым. Это высказывание Лобачевского радикально переменило точку зрения на структуру физического пространства и тем самым изменило человеческое мировоззрение. Таким образом, открытие Лобачевского имеет значение далеко выходящее за пределы математики.

Этот беглый обзор развития математики очень не полон. Я хотел только выявить глубокую связь математики с практикой, не оставив при этом в стороне и значение внутриматематических проблем.

Одним из наслоений математики и при том весьма высокого номера, является так называемая теория множеств, возникшая во второй половине прошлого столетия. Считая понятие множества первоначальным, т.е. не подлежащим определению, теория множеств занимается изучением свойств множеств. Первая и притом довольно любопытная задача теории множеств заключается в том, чтобы сравнить два множества по количеству входящих в него элементов. Если множество конечно, то количество его элементов определяется целым числом. Таким образом, сравнение количества элементов двух конечных множеств сводится к сравнению величин двух целых чисел. Количество элементов бесконечного множества оценивается его мощностью. Замечательным результатом теории множеств является то, что мощность множества целых чисел меньше мощности множества действительных чисел. Мощности множеств сравниваются по их величинам и располагаются в порядке возрастания. Это приводит к теории трансфинитных чисел, изучение которых не только не имеет практического значения, но и ведет к бессмысленным неразрешимым задачам. Некоторое положительное значение теории множеств заключается в том, что она используется в качестве языка некоторых разделов математики, но это не является важным достижением.

Теория множеств не является ни слишком новым, ни слишком важным достижением математики. К сожалению, при модернизации преподавания математики в средней школе, в основе этой модернизации в школах Франции, Англии, США и Советского Союза положили теоретико-множественную идеологию, что привело к грубой ломке всего преподавания математики.

До модернизации середины 60-х годов программа математики в средней школе существенно отражала все основные достижения математики до XVI века включительно, т.е. все то, что было создано за 3 — 5 тысячелетий. Присоединение к этой программе знакомства с такими двумя разделами математики как аналитическая геометрия и математический анализ можно считать весьма существенной и реальной модернизацией преподавания, тем более, что разделы эти созданы сравнительно недавно, считая с общей протяженностью существования математики в четыре тысячелетия.

Теория множеств, по сравнению со всем грандиозным зданием математики, является весьма незначительным достижением. Ознакомление с ней не является существенным прогрессом преподавания. И включение понятия множества как основного, на которое опираются все определения математики средней школы, является совершенно необоснованным и вредным.

Литература

1. Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им самим.[1] Успехи математических наук, 1978, т. 33, вып. 6, стр. 7—21.

2. Александров П. С. Страницы автобиографии. Успехи математических наук, 1979, т. 34, вып. 6, стр. 219—249; ч. II, 1980, т. 35, №.3, стр. 241—278.

3. A. Haar. Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuieerlichen gruppen. Ann. of Math., 1933, vol. 34, №. I, p. 147—169.

4. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М., Изд-во АН СССР, 1955, (Труды математического института, т. 45).

5. Оптимальные процессы регулирования. Успехи математических наук, 1959, т. 14, вып. 1, стр. 3—20.

6. The mathematical theory of optimal processes. New York, London, Intern, publ., 1962.

7. The mathematical theory of optimal processes. New York, Paris, Pergamon press, 1964.

8. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебное пособие для госуниверситетов, М., Физматгиз, 1958, XI.

9. Topological groups. Princeton, Univ. press., 1958, XI.

10. Этика и арифметика: человек, труд, мораль. Социалистическая индустрия, 1979,21 марта.[2]

[1]К 90-летию Л.С.Понтрягина издана книга "Жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им самим", содержащая более полную автобиографию автора. Приобрести книгу можно через редакцию журнала.

[2]См. так же этот номер журнала, стр.19.

Избранные главы алгебры (продолжение)

И. Р. Шафаревич

В российском (и ранее советском) математическом образовании существует замечательная традиция: крупные ученые, внесшие существенный вклад в развитие математики, создают произведения, рассчитанные на школьников, заинтересованных этой наукой. Мы продолжаем публикацию журнального варианта "Избранных глав алгебры", написанных выдающимся русским математиком академиком РАН И. Р. Шафаревичем. Надеемся, что материал заинтересует старших школьников и учителей, работающих по углубленной программе. Главы I, II, III, IV были опубликованы в первых четырех номерах журнала.

Темы: Число и Многочлен

Глава V. Действительные числа и многочлены

§1. Аксиомы действительных чисел.

В этой главе мы постараемся уточнить наши представления о действительных числах. Мы не будем стремиться к какой-то особенной строгости рассуждений, но постараемся лишь придать нашим понятиям и рассуждениям в этой области достаточную точность, чтобы можно было *доказывать* утверждения о действительных числах.

Выбрав на прямой начало отсчета и единицу измерения, мы можем изображать действительные числа точками на прямой. Поэтому, уточняя наше представление о действительных числах, мы в то же время предлагаем и более точное описание прямой и лежащих на ней точек. Дальше мы часто будем пользоваться, в целях иллюстрации, взаимно однозначным соответствием между действительными числами и точками прямой.

Попробуем взять пример с геометрии и довести точность определений и рассуждений до того уровня, который есть в школьном курсе геометрии. Там, в основе всего построения лежат некоторые аксиомы, исходя из которых уже доказываются все остальные утверждения. Аксиомы же не доказываются: мы принимаем их, исходя из опыта или интуиции.

Для определенности возьмем за образец построение *планиметрии* на основе аксиом. В этом построении можно различить три типа логических понятий. Во-первых — основные понятия геометрии: точки, прямые. Во-вторых, основные отношения между ними: точка лежит на прямой, точка на прямой находится между двумя заданными точками. Ни те, ни другие не определяются. Мы представляем себе дело так, что где-то имеется "список" всех точек и всех прямых и известно, какие точки лежат на каких прямых или какие тройки точек A, B, C на прямой l расположены так, что B лежит между A и C. И только в-третьих имеются аксиомы, то есть утверждения об основных понятиях и отношениях между ними. Например: каждые две различные точки принадлежат одной и только одной прямой. Или: среди трех различных точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Совершенно аналогично обстоит дело с действительными числами. Основными понятиями здесь являются сами действительные числа. Таким образом, в этот момент мы не предполагаем ничего большего, как только то, что действительные числа образуют некоторое множество. Основные отношения между действительными числами имеются двух типов: действия над ними и неравенства. Опишем их подробнее.

1) Действия над действительными числами.

Для каждых двух действительных числе a и b определено третье число c, называемое их *суммой.* Это записывается так: $a + b = c$.

Для каждых двух действительных числе a и b определено третье число d, называемое их *произведением.* Это записывается так: $ab = d$.

2) Неравенства между действительными числами.

Для некоторых пар действительных чисел a и b определено, что a меньше b. Это записывается так: $a < b$. Тоже самое свойство записывается как $b > a$. Если хотят высказать, что или $a < b$ или $a = b$, то пишут $a \leq b$ (или $b \geq a$).

Прежде чем перейти к формулировке аксиом, связывающих основные понятия и основные отношения между ними, подчеркнем еще раз аналогию с тем, что известно из геометрии. Сведем аналогичные понятия в таблицу:

Алгебра	Геометрия
Основные понятия	
Действительные числа	Точка, прямая, ...
Основные отношения	
сумма: $a + b = c$ произведение: $ab = d$ неравенства: $a < b$	Точка лежит на прямой. Точка C лежит между точками A и B . ...
Аксиомы	
......	......

Аксиомы геометрии нам нет надобности напоминать, а аксиомы действительных чисел мы сейчас перечислим. Они формулируются в терминах основных понятий и отношений между ними, которые перечислены в таблице. Мы постараемся сгруппировать аксиомы по признаку того, к каким основным отношениям они относятся.

I (аксиомы сложения)

I_1. Переместительный закон: $a + b = b + a$ для любых действительных чисел a и b.

I_2. Сочетательный закон: $a + (b + c) = (a + b) + c$ для любых действительных

I_3. Существует такое число, обозначаемое 0 и называемое *нулем*, что $a + 0 = a$ для любого действительного числа a.

(**Замечание.** Такое число существует только одно. Если бы $0'$ было другим числом с тем же свойством, то мы имели бы $0' + 0 = 0'$ по определению 0 , $0' + 0 = 0 + 0'$ по переместительному закону и $0 + 0' = 0$ по определению $0'$. Окончательно мы получаем $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$, то есть $0' = 0$).

I_4. Для любого действительного числа a существует такое число, обозначаемое $-a$ и называемое противоположным a, что $a + (-a) = 0$.

(**Замечание.** Для заданного числа a такое число существует только одно. Если бы a' было другим числом с тем же свойством: $a+a' = 0$, то мы имели бы $(a+(-a))+a' = 0 + a' = a'$. Кроме того, $(a + (-a)) + a' = ((-a) + a) + a'$, а по сочетательному закону $((-a)+a)+a' = (-a)+(a+a')$. По свойству числа a', $a+a' = 0$ и $(-a)+0 = -a$. Соединяя эти равенства, получаем, что $a' = -a$).

II (аксиомы умножения)

II_1. Переместительный закон: $ab = ba$ для любых действительных чисел a и b.

II_2. Сочетательный закон: $a(bc) = (ab)c$ для любых действительных чисел a, b и c.

II_3. Существует такое число, обозначаемое 1 и называемое единицей, что $a \cdot 1 = a$ для любого действительного числа a.

(**Замечание.** Такое число существует только одно. Это доказывается так же, как в замечании к аксиоме I_3 — надо только всюду заменить сложение умножением, а 0 на 1.)

II_4. Для любого действительного числа a, отличного от 0, существует такое число, обозначаемое a^{-1} и называемое обратным, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

(**Замечание.** Для каждого отличного от 0 действительного числа a такое число существует только одно. Доказательство в точности такое же, как в замечании к аксиоме I_4).

III (аксиома сложения и умножения)

III_1. Распределительный закон: $(a + b)c = ac + bc$ для любых трех действительных чисел a, b и c.

IV (аксиомы порядка)

IV_1. Для любых двух действительных чисел a и b имеет место одно и только одно из отношений: либо $a = b$, либо $a < b$, либо $b < a$.

IV_2. Если для некоторых трех действительных чисел a, b и c $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

IV_3. Если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любых трех действительных чисел a, b и c.

IV_3. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ для любых трех действительных чисел a, b и c.

V (действительные и рациональные числа)

Рациональные числа содержатся среди действительных, а действия и неравенства, определенные для действительных чисел, в применении к рациональным числам дают обычные действия и неравенства.

VI (аксиома Архимеда)

Для любого действительного числа a существует такое натуральное число n, что $a < n$.

VII (аксиома вложенных отрезков)

Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ и $b_0, b_1, b_2, \ldots$ — две последовательности действительных чисел, обладающие тем свойством, что $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots$ $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \ldots$ и $b_n \geq a_n$ для всех n. Тогда существует такое действительное число c, что $b_m \geq c$ и $c \geq a_n$ для всех m и n.

Если пользоваться изображением действительных чисел на прямой, то числа x, удовлетворяющие условиям $a \leq x$ и $x \leq b$ (коротко $a \leq x \leq b$), изображаются множеством, которое называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$. Поэтому предпосылки этой аксиомы утверждают, что отрезки $I_n = [a_n, b_n]$ вложены друг в друга: $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \cdots$. Аксиома утверждает, что существует точка (или число) общая всем этим вложенным друг в друга отрезкам (откуда и название аксиомы).

Из приведенных аксиом уже легко выводятся привычные свойства действительных чисел. Было бы скучно посвятить несколько страниц этим совершенно очевидным рассуждениям. Поэтому мы только сформулируем некоторые утверждения, которые будут необходимы в будущем — и ограничимся лишь отдельными замечаниями по поводу доказательств (см. также задачи 2, 3, 4)

Из аксиом II группы следует, что для любого отличного от 0 числа a и любого числа b, число $c = a^{-1}b$ является единственным решением уравнения $ax = b$. Оно называется *отношением* b к a и записывается как $\frac{b}{a}$. Все привычные правила раскрытия скобок и действий с дробями выводятся из аксиом.

Так как для натурального числа n верно равенство $n = 1 + \cdots + 1$ (n слагаемых), то из III аксиомы вытекает, что для любого числа a число na (произведение n и a) равно сумме $a + \cdots + a$ (n слагаемых).

Из аксиомы IV_3 следует, что если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < a + d < b + d$. Если $a < 0$, то $-a > 0$ (так как из $-a < 0$ следовало бы $0 < 0$). В результате мы видим, что любое действительное число либо положительно ($a > 0$), либо имеет вид $-b$, где $b > 0$, тогда говорят, что a отрицательно, либо равно 0. Умножение подчиняется обычному "правилу знаков". Как обычно, мы полагаем $|x| = x$ если $x \geq 0$ и $|x| = -x$ если $x < 0$.

Аксиома вложенных отрезков (аксиома VII) особенно полезна, когда длины отрезков I_n (то есть, разности $b_n - a_n$) становятся неограниченно малыми с возрастанием n. Иными словами, если для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой индекс N, что $b_n - a_n < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. В таком случае можно утверждать больше, чем дает аксиома:

Лемма. Если разности $b_n - a_n$ становятся неограниченно малыми с возрастанием индекса n, то число c, существование которого гарантирует аксиома VII, единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два таких числа: c и c' и, например, $c < c'$. Тогда $a_n < c < c' < b_n$ и $c' - c = b_n - a_n - (c - a_n) - (b_n - c') \leq b_n - a_n$. Мы получаем (при достаточно большом n), что $c' - c < \varepsilon$ для любого заданного числа $\varepsilon > 0$. Например, такое соотношение должно быть верно при $\varepsilon = \frac{c' - c}{2}$, откуда

$\frac{1}{2}(c' - c) < 0$, а это противоречит тому, что $c' - c > 0$, $\frac{1}{2} > 0$.

Именно с такой ситуацией мы встречаемся, когда приближенно измеряем действительное число с недостатком и с избытком при помощи рациональных чисел. Тогда a_n и b_n — рациональные числа. Примером является построение $\sqrt{2}$, о котором мы говорили в §1 гл. I. Таким образом, аксиома VII формулирует то, что мы интуитивно имеем в виду, когда говорим о "все более точном измерении". Вместе с предшествующей леммой она дает нам возможность *конструировать* действительные числа с нужными свойствами. Позже мы будем часто этим пользоваться.

По поводу аксиом V и VI следует заметить, что здесь мы предполагаем известными натуральные и, более общо, рациональные числа. Эти понятия мы более подробно анализировать не будем.

В заключение заметим, что приведенные выше аксиомы не являются *независимыми*. Это значит, что некоторые из них можно было бы доказать в качестве теорем, опираясь на остальные аксиомы (пример см. в задаче 6). Мы собрали те свойства действительных чисел, которые вам уже привычны и интуитивно убедительны. За счет увеличения числа аксиом мы получили право пропустить неинтересные доказательства ряда интуитивно очевидных фактов.

Задачи.

1. Какие из аксиом I – VII верны также и для совокупности рациональных чисел, а какие специфичны именно для действительных чисел?

2. Докажите на основании аксиом I– III, что для любого действительного числа a $0a = 0$.

3. Докажите, что для любых действительных чисел a и b уравнение $a + x = b$ имеет решение и только одно.

4. Докажите, что для любых действительных чисел $a \neq 0$ и b уравнение $ax = b$ имеет решение и только одно.

5. Рассмотрим множество рациональных чисел как часть множества действительных чисел – на основании аксиомы V. Докажите, что рациональное число 0 совпадает с тем действительным числом 0, существование которого гарантирует аксиома I_3. То же для рационального числа 1 и действительного числа 1, существование которого гарантирует аксиома II_3.

6. Докажите, не используя аксиому V, что числа $0, 1, 1+1, ..., 1+1+\cdots+1$ (n слагаемых) различны при всех натуральных n. Здесь 1 означает число, существование которого гарантирует аксиома II_3. Докажите, исходя из этого, что натуральные числа содержатся среди действительных, причем действия и неравенства, определенные для действительных чисел, в применении к натуральным числам дают обычные действия и неравенства. После этого докажите утверждение аксиомы V. Таким образом, эту аксиому можно было бы не вводить, а доказать как теорему на основании остальных аксиом.

7. Вместо действия умножения, заданного по определению для действительных чисел, определим новое действие, которое обозначим $\odot$ и зададим формулой $a \odot b = a + b + ab$. Выполняются ли для него аксиомы II группы?

§2. Пределы и бесконечные суммы.

Чтобы иллюстрировать роль аксиомы о вложенных отрезках как метода конструкции новых действительных чисел, введем несколько понятий, которые и позже будут полезны.

В гл. IV мы встречались с последовательностями ограниченными и неограниченно возрастающими. Сейчас мы рассмотрим последовательности не с точки зрения возрастания, а с точки зрения убывания. Для простоты будем сначала говорить о последовательностях положительных чисел и под неограниченным убыванием будем понимать неограниченное приближение к нулю. Точное определение построено в точности по аналогии с определением неограниченно возрастающей последовательности, данным в §2 гл. IV.

Последовательность a_n неотрицательных действительных чисел называется *неограниченно приближающейся к нулю*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что $a_n < \varepsilon$ при всех $n > N$. В этом случае говорят также, что последовательность a_n *стремится* к 0, и обозначают это так: $a_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$ (читается: при n стремящемся к бесконечности).

Типичный пример неограниченно приближающейся к 0 последовательности дает последовательность $a_n = \frac{1}{n}$.

Рассмотрим немного менее очевидный пример.

Лемма 2. Если a — любое положительное число, меньшее 1, то последовательность $a_n = a^n$ неограниченно приближается к 0, то есть $a^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Действительно, положим $a = \frac{1}{A}$. Тогда $A > 1$ и его можно записать в виде $A = 1 + x$ с $x > 0$. По формуле бинома $A^n = (1+x)^n = 1 + nx + y$, где y — сумма положительных членов, то есть $y > 0$. Значит $A^n > 1 + nx$ и следовательно для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что $A^n > \frac{1}{\varepsilon}$ для всех $n \geq N$ (вы можете точно вычислить это N). Поэтому $a^n < \varepsilon$ и значит $a^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Обобщим данное выше определение на последовательности $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, числа которых могут быть и отрицательными. Тогда числа $|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|, ...$ — неотрицательны, и к ним уже можно применить предшествующее определение. Последовательность чисел a_n называется неограниченно приближающейся к 0, если последовательность чисел $|a_n|$ неограниченно приближается к 0. В этом случае тоже пишут $a_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

Теперь мы подошли к нашему главному определению. Если для последовательности $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ существует такое действительное число α, что $a_n - \alpha \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то α называется *пределом* последовательности a. Говорят также, что последовательность a *стремится* к α и пишут $a^n \longrightarrow \alpha$ при $n \longrightarrow \infty$.

Не всякая последовательность обязана иметь предел. Например, если последовательность имеет предел, то она ограничена. Действительно, пусть $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Тогда существует такое n, что $|\alpha_n - \alpha| < 1$ при $n > N$. Так как $\alpha_n = \alpha + (\alpha_n - \alpha)$, то отсюда $|\alpha_n| \leq |\alpha| + 1$ при $n > N$ и значит $|\alpha_n| \leq C$ при всех n, где C – наибольшее из чисел $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_N|, |\alpha| + 1$. Но даже если последовательность ограничена, она может не иметь никакого предела. Такой является последовательность $(0,1,0,1,\dots)$, в которой 0 и 1 чередуются. Если бы она имела предел α, то в определении предела мы могли бы взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и имели бы, что $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ при всех $n > N$. Но среди a_n с $n > N$ встречается и 0 и 1. Поэтому мы имели бы $|\alpha| < \frac{1}{2}$ и $|1-\alpha| < \frac{1}{2}$. Ясно, что такого числа α не существует.

Но если последовательность имеет предел, то только один. Действительно, предположим, что последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ имеет два предела: α и β, $\alpha \neq \beta$. Тогда для всякого ε существует такое N и такое N', что для $n > N$ $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ и для $n > N'$ $|a_n - \beta| < \varepsilon$. Пусть $n > N$ и $n > N'$, тогда $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ и $|a_n - \beta| < \varepsilon$, откуда $|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$. Но ε в нашем рассуждении было произвольным положительным числом, мы можем выбрать $\varepsilon < \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$ и тем самым получить противоречие.

Так как не всякая ограниченная последовательность имеет предел, то рассмотрение таких последовательностей еще не приводит нас автоматически к построению новых действительных чисел. Наш основной результат укажет один простой тип последовательностей, которые всегда имеют предел и поэтому дадут метод построения новых чисел.

Последовательность $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ называется *возрастающей,* если $a_n \le a_{n+1}$ для всех n, то есть $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \cdots$

Теорема 1. *Возрастающая ограниченная последовательность положительных чисел имеет предел.*

Доказательство следует логике одного анекдота, бывшего популярным, когда я был студентом (то есть еще до войны). Речь шла, собственно, о серии острот на тему о том, кто каким методом предлагает ловить льва в пустыне. Был метод француза, метод следователя НКВД, метод математика... Метод математика заключался в следующем. Он делит пустыню на две равные части. Лев находится в одной из них. Эту часть опять надо разделить на две части — и так продолжать, пока лев не окажется в части пустыни, размер которой не превосходит размера клетки. Остается окружить ее клеткой. Это была пародия на некоторый тип доказательств теорем существования, один пример которого мы сейчас изложим.

Пусть $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ — возрастающая последовательность положительных чисел. По условию она ограничена, то есть существует такое число C, что все $a_n < C$. Разделим отрезок $I_1 = [0, C]$ на две равные части числом $\frac{C}{2}$. Тогда верно одно из двух. Или существует такое m, что $a_m \ge \frac{C}{2}$, и тогда все a_n с $n \ge m$ содержатся в отрезке $\left[\frac{C}{2}, C\right]$ (ввиду того, что последовательность возрастающая). Либо $a_n \le \frac{C}{2}$ для всех n, и тогда все члены последовательности содержатся в отрезке $\left[0, \frac{C}{2}\right]$. Обозначим через I_2 тот из отрезков $\left[0, \frac{C}{2}\right]$ и $\left[\frac{C}{2}, C\right]$, в котором содержатся все члены последовательности a, начиная с некоторого места. Потом разделим его опять пополам. Очевидно, что так мы можем продолжить неограниченно и получим последовательность вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_m \supset \cdots$, в которой отрезок I_k имеет длину $C/2^k$ и обладающую тем свойством, что любой отрезок I_k содержит все члены последовательности a, начиная с некоторого. Согласно аксиоме о вложенных отрезках (аксиоме VII) существует действительное число α, принадлежащее всем отрезкам I_k. Оно и является пределом последовательности a. Действительно, как мы видели, все члены последовательности a, начиная с некоторого, содержатся в отрезке I_k. Это значит, что для любого натурального числа k существует такое N, что $a_n \in I_k$ для всех $n > N$. Но так же и $\alpha \in I_k$. Так как длина отрезка I_k равна $\frac{C}{2^k}$, то отсюда $|a_n - \alpha| < \frac{C}{2^k}$ для $n > N$. Это и дает нам свойство, фигурирующее в определении предела, если мы выберем k таким, что $\frac{C}{2^k} < \varepsilon$. Мы специально отмечаем, что такой выбор всегда возможен (последовательность $(1, \frac{C}{2}, \frac{C}{4}, \frac{C}{8}, ...)$ неограниченно приближается к 0).

Теорема 1 особенно полезна, когда последовательность $a = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ является последовательностью сумм некоторой последовательности неотрицательных чисел $c = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ $(c_n \geq 0)$, то есть, когда $a_1 = c_1$, $a_2 = c_1 + c_2$, ..., $a_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$. Тогда, очевидно, последовательность a является возрастающей. Но проверки (не всегда простой) требует то, что она ограничена. Например, если в последовательности c все $c_n = 1$, то $a_n = n$ и последовательность a не ограничена. Менее тривиальный пример мы рассмотрели в §2 гл. IV: в последовательности c все $c_n = \frac{1}{n}$. Мы видели, что тогда последовательность a не ограничена. Но если проверено, что последовательность сумм a ограничена, то согласно теореме 1 она имеет единственный предел α. Этот предел называется *суммой* последовательности $(c_1, c_2, ..., c_n, ...)$, что записывается в виде

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots = \alpha.$$

Иногда бесконечную последовательность c называют так же *рядом*, а ее сумму — *суммой* ряда.

Если последовательность сумм a_n ограничена, то, как мы видели, сумма ряда $c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$ существует. Если она не ограничена, то говорят, что у ряда суммы не существует. Так лемма 1 в §2 гл. IV утверждает, что сумма ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ не существует.

Рассмотрим пример. Пусть задано неотрицательное число a, меньшее 1 и последовательность $c = (1, a, a^2, ..., a^n, ...)$. Тогда $a_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$ (на n-м месте последовательности c стоит a^{n-1}). Сумму $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$ мы можем вычислить по формуле для суммы геометрической прогрессии – формуле (12) гл. I:

$$a_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} - \frac{a^n}{1 - a} \tag{1}$$

Мы видели, что $a^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. отсюда сразу следует, что $\frac{a^n}{1 - a} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Потому формула (1) дает нам, что $a_n \longrightarrow \frac{1}{1 - a}$. Мы можем это записать иначе так:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots = \frac{1}{1 - a} \qquad \text{при} \quad a < 1 \tag{2}$$

Ряд в левой части равенства (2) называется *бесконечной геометрической прогрессией*, а формула (2) — формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Но есть примеры рядов, для которых существование суммы нетрудно установить, хотя явно вычислить эту суму гораздо труднее. Например, в §2 гл. IV мы доказали, что суммы $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ ограничены. Это значит, что существует сумма ряда $1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$. Но чему она равна? Этот вопрос очень привлекал математиков в середине XVIII века. Эйлер решил его, установив поразителное равенство

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \tag{3}$$

Это было одно из самых сенсационных открытий Эйлера. Весть о нем быстро распространилась среди математиков и большинство корреспондентов Эйлера просили его объяснить, как он это равенство доказал. Но Эйлер пошел дальше, вычислив сумму ряда $1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots$ при любом *четном* k. Оказалось, что эти суммы связаны с числами Бернулли, о которых было сказано в приложении к гл. II. Именно, имеет место формула

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots=\pi^k(-1)^{\frac{k}{2}-1}B_k/2\cdot k! \tag{4}$$

для любого четного k. Об аналогичных суммах для нечетного k до сих пор почти ничего не известно. Лишь недавно (в 1978 г.) было доказано, что сумма $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots$ — число иррациональное. Это и остается, видимо, единственным известным до сих пор фактом о таких суммах при нечетном значении k.

Заметим, что из существования суммы у ряда $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$ можно вывести некоторые полезные следствия, даже если значение суммы нам не известно.

Лемма. Если сумма ряда $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$ существует, то последовательность чисел $d_n=c_n+c_{n+1}+\cdots$ неограниченно приближается к 0.

Воспользуемся простым свойством предела. Пусть некоторая последовательность $a_1,a_2,...,a_n,...$ имеет предел α, то есть $a_n\longrightarrow\alpha$ при $n\longrightarrow\infty$. Тогда для любого числа β последовательность $\beta-a_1,\beta-a_2,...,\beta-a_n,...$ имеет предел $\beta-\alpha$. Действительно, разность $\beta-\alpha-(\beta-a_n)=a_n-\alpha$, и разность $a_n-\alpha\longrightarrow 0$, то $\beta-\alpha-(\beta-a_n)\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. Обозначим через α сумму ряда $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$, а через a_m — число $c_1+c_2+\cdots+c_m$ при любом m. По определению суммы бесконечного ряда, сумма α ряда $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$ равна пределу последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_m\ldots$. Точно так же сумма d_n ряда $c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots$ равна пределу последовательности $a_{n+1}-a_n,a_{n+2}-a_n,\ldots,a_{n+k}-a_n,\ldots$. По сделанному в начале доказательства замечанию последний предел равен $\alpha'-a_n$, где α' – предел последовательности $a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_{n+k},\ldots$ (при фиксированном n). Но предел последовательности $a_{n+1},a_{n+2},\ldots$ – это то же самое, что предел последовательности $a_1,a_2,\ldots$, то есть $\alpha'=\alpha$. Мы видим, что $d_n=\alpha-a_n$. А по определению предела $\alpha-a_n\longrightarrow 0$, то есть $d_n\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$.

Например, положим $d_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$. Мы видим, что $d_n\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$.

Рассмотрение пределов и бесконечных сумм уводит нас от алгебры, которая по своему духу связана с конечными выражениями. Эти вопросы ближе к тому разделу математики, который называется анализом. Поэтому мы в них углубляться не будем. Хотя заметим, что наиболее поразительные результаты — такого типа, как равенства (3) и (4) — возникают на стыке этих областей.

Задачи.

1. Докажите, что если сумма ряда $c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$ существует, то $c_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

2. Докажите, что если $a_n < C$ при любом n и $a_n \longrightarrow \alpha$ при $n \longrightarrow \infty$, то $\alpha \le C$. Приведите пример, когда равенство достигается.

3. Дано, что $a_n \to \alpha$ при $n \longrightarrow \infty$. Полагаем $b_n = a_{2n}$. Имеет ли последовательность $b_1, b_2, \dots$ предел и чему он равен? Можно ли из существования предела у этой последовательности заключить, что последовательность $a_1, a_2, \dots$ имеет предел? Если она имеет предел, то чему он равен?

4. Имеет ли предел последовательность $a_1, a_2, \dots$, в которой $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$? Указание. Сгруппировать в пары соседние члены.

5. Пусть $f(x)$ — многочлен степени d. Докажите, что $a_n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, если $a_n = \frac{f(n)}{n^{d+1}}$.

6. Найдите сумму ряда $b + ba + ba^2 + \cdots + ba^n + \cdots$, где $|a| < 1$, b — любое. Обычно последовательность $(b, ba, ba^2, \dots)$ тоже называют бесконечной геометрической прогрессией.

7. В квадрате со стороной b середины сторон соединены отрезками. С полученным квадратом производится та же операция и т.д. Найдите сумму площадей всех получающихся квадратов.

8. Найдите сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$

9. Постройте последовательность рациональных положительных чисел, меньших единицы, у которой a_n имеет знаменатель n и которая не имеет предела.

10. Докажите, что если последовательность $a_1, a_2, \ldots$ имеет предел α, а последовательность $b_1, b_2, \ldots$ - предел β, то последовательность сумм $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ имеет предел $\alpha + \beta$.

§3 Задание действительных чисел десятичными дробями

В §1 мы описали действительные числа при помощи системы аксиом. Теперь мы покажем, каким образом можно конкретно задавать действительные числа. Здесь мы не скажем ничего нового — речь будет идти об обосновании хорошо известной записи действительных чисел при помощи бесконечных десятичных дробей. Но теперь мы покажем, как существование такой записи выводится из аксиом, перечисленных в §1.

Мы будем иметь в виду привычную запись, в которой целая часть может быть как положительной, так и отрицательной, а дробная часть (ее иногда называют мантиссой) будет всегда положительной.

Пусть A — произвольное целое число (любого знака) и $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ бесконечная последовательность чисел, каждое из которых может принимать только 10 значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Все это вместе мы будем записывать как $A, a_1a_2a_3\dots$ и называть бесконечной десятичной дробью. Пока это всего лишь иначе записанная бесконечная последовательность. Теперь мы покажем, как ей можно сопоставить действительное число. Для этого определим для любого индекса n числа

$$\alpha_n = A + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}. \tag{5}$$

Очевидно, что последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ – возрастающая. Докажем, что она ограничена. Действительно, так как все $a_i \leq 9$, то

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right).$$

К сумме в скобке можно применить формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{1}{\frac{9}{10}}$$

и в результате мы получаем, что

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots \frac{a_n}{10^n} < 1 \tag{6}$$

так что $\alpha_n < A + 1$.

Согласно теореме 1 последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ имеет предел α. Действительное число α мы будем называть числом, *соответствующим* бесконечной десятичной дроби, и будем записывать это так:

$$\alpha = A, a_1a_2 \dots a_n \dots \qquad (7).$$

Иногда говорят, что α *равно* десятичной дроби $A, a_1a_2\dots a_n\dots$. Таким образом, это означает просто, что α равно сумме бесконечного ряда $A + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$.

Нашей дальнейшей целью является исследование этого соответствия между бесконечными десятичными дробями и действительными числами. Будет ли оно взаимно однозначным? Это подразумевает два вопроса: может ли двум разным десятичным дробям соответствовать одно и то же действительное число? Всякое ли действительное число соответствует некоторой десятичной дроби?

Рассмотрим первый вопрос. Прежде всего заметим, что ответ на него иногда оказывается положительным. Возьмем, например, бесконечную десятичную дробь 0,9999... , у которой после запятой стоят одни девятки. Какое действительное число ей соответствует? Согласно с общим определением мы должны рассмотреть последовательность $\alpha_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n}$. Эту сумму просто вычислить: согласно формуле для суммы геометрической прогрессии (формула (12) гл. I) она равна

$$\frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Очевидно, что предел последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$ равен 1, так что $1 = 0,9999\ldots$. Но с другой стороны, конечно так же $1 = 1,00\ldots$, где перед запятой стоит 1, а после запятой – одни нули. Таким образом, двум разным бесконечным десятичным дробям соответствует одно и то же действительное число 1.

Ясно, что можно построить много примеров такого рода. В самом общем виде такой пример имеет следующий вид. Пусть бесконечная десятичная дробь имеет вид $A, a_1 \ldots a_k 99\ldots$, то есть мы предполагаем, что начиная с некоторого знака (у нас с $k+1$-го) в ней стоят одни девятки. При этом мы можем предполагать, что $a_k \neq 9$, то есть, что k — это первое место, после которого идут одни девятки. Тогда дословно повторяя предшествующее рассуждение, можно проверить, что эта дробь равна тому же самому числу, что и дробь $A, a_1 \ldots a_{k-1}(a_k+1)000\ldots$, у которой после k-го знака стоят одни нули. Про дробь, у которой начиная с некоторого знака, всюду стоит 9, говорят, что она имеет 9 в периоде. Мы видели, что для таких дробей нарушается взаимная однозначность соответствия между дробями и действительными числами.

Несколько неожиданно, что нарушение происходит только в этих случаях.

Теорема 2. *Двум разным бесконечным десятичным дробям, ни одна из которых не имеет 9 в периоде, соответствуют разные действительные числа.*

Доказательство теоремы получается само собой, если связать нашу конструкцию действительного числа, определенного десятичной дробью, с привычным измерением числа с точностью до $\frac{1}{10^m}$ с избытком и недостатком. Надо разделить прямую на отрезки длины $\frac{1}{10^m}$, концы которых – рациональные числа со знаменателем 10^m. Тогда каждая точка прямой, то есть каждое действительное число попадет в один отрезок. Его начало и конец и дают измерение нашего числа с недостатком и избытком с точностью до $\frac{1}{10^m}$. Однако, неоднозначность возникает с самими точками деления, то есть с рациональными числами, имеющими знаменатель вида 10^m. Они примыкают к двум отрезкам. К какому их относить – левому или правому? Это та же трудность, которая возникает в связи с девятками в периоде. Мы покажем, что наш выбор (без девятки в периоде) соответствует тому, чтобы точку деления относить к правому примыкающему к ней отрезку. Иначе говоря, построенные нами числа α_m и определенное ими число α связаны соотношением

$$\alpha_m \leq \alpha < \alpha_m + \frac{1}{10^m} \qquad (8).$$

(То, что числа α_m являются рациональными числами со знаменателем вида 10^m, видно из их записи (5).)

Вспомним, что число α определено как предел последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$. Все числа α_n с $n \geq m$, очевидно, удовлетворяют условию $\alpha_n \geq \alpha_m$. Отсюда такое же неравенство вытекает и для их предела α. Действительно, из предположения $\alpha < \alpha_m$ мы могли бы заключить, что $\alpha_n - \alpha = (\alpha_n - \alpha_m) + (\alpha_m - \alpha) \geq \alpha_m - \alpha$ для всех $n \geq m$. Но по определению предела число $\alpha_n - \alpha$ по абсолютной величине становится меньше любого наперед заданного положительного числа при достаточно большом n. Это противоречит тому, что оно не меньше фиксированного положительного числа $\alpha_m - \alpha$. (Ср. задачу 2 к §2.)

Тем самым доказано левое неравенство в соотношении (8). Правое неравенство можно было бы доказать точно так же, если бы мы согласились поставить в нем знак "$\le$" вместо "$<$". Именно, для любого $n > m$ мы имеем

$$\alpha_n = \alpha_m + \frac{a_{m+1}}{10^{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha_m + \frac{1}{10^m}\left(\frac{a_{m+1}}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^{n-m}}\right) \qquad (9)$$

и применяя неравенство (6) можем заключить, что $\alpha_n < \alpha_m + \frac{1}{10^m}$. Отсюда, повторяя предшествующее рассуждение, мы получим, что $\alpha \le \alpha_m + \frac{1}{10^m}$.

Но если мы хотим получить правое неравенство в соотношении (8) со знаком "$<$", мы должны воспользоваться тем, что дробь $A, a_1a_2\ldots$ не имеет 9 в периоде. Доказательство становится немного сложнее. Докажем левое неравенство в (8) для некоторого фиксированного индекса m. Воспользуемся тем, что десятичная дробь α не имеет 9 в периоде. Поэтому вслед за a_m должна где-то встретиться цифра a_k, отличная от 9. Для любого $n > k$ запишем

$$\alpha_n = \alpha_m + (a_{m+1}/10^{m+1} + \ldots + a_k/10^k) + (a_{k+1}/10^{k+1} + \ldots a_n/10^n)$$

Как и выше мы видим, что

$$a_{k+1}/10^{k+1} + \ldots a_n/10^n \le 1/10^k$$

и поэтому

$$\alpha_n \le \alpha_m + (a_{m+1}/10^{m+1} + \ldots + (a_k + 1)/10^k)$$

Так как $a_k \ne 9$,то $a_k + 1$ есть одна из цифр $0, 1, \ldots\ldots 9$.

Положим

$$c = a_{m+1}/10 + \ldots\ldots\ldots (a_k + 1)/10^{k-m}$$

Мы можем еще раз повторить уже проведенное рассуждение и получим что $c < 1$. Число c зависит только от выбора m и k, но не от n. Поэтому, заменяя α_n его пределом α, мы получим, как и раньше $\alpha \le \alpha_m + c/10^m < \alpha_m + 1/10^m$

Тем самым неравенство (8) доказано.

Из соотношения (8) сразу следует, что двум разным десятичным дробям, не имеющим 9 в периоде, не может соответствовать одно и то же действительное число. Пусть дробям $A, a_1a_2\ldots$ и $A', a'_1a'_2\ldots$ соответствует одно и то же число α. Тогда, наряду с соотношениями (8), мы имеем соотношения

$$\alpha'_m \le \alpha < \alpha'_m + \frac{1}{10^m},$$

где $\alpha'_m = A' + \frac{a'_1}{10} + \ldots + \frac{a'_m}{10^m}$. Пусть $\alpha'_m \ne \alpha_m$ и $\alpha'_m > \alpha_m$. Из этих соотношений следует, что $\alpha'_m < \alpha_m + \frac{1}{10^m}$, то есть $\alpha'_m - \alpha_m < \frac{1}{10^m}$. Но это противоречит тому, что α_m и α'_m – различные рациональные числа, имеющие знаменатель вида 10^m. Таким образом, $\alpha'_m = \alpha_m$ для всех m. Но числа a_m однозначно определяются числами α_m, так как $\alpha_m - \alpha_{m-1} = \frac{a_m}{10^m}$. Поэтому и они у обеих дробей должны совпадать.

Теперь перейдем ко второму вопросу: всякое ли действительное число соответствует некоторой бесконечной десятичной дроби. Как ответ на этот вопрос, так и метод доказательства вам несомненно уже знаком. Мы хотим только убедиться, что эти привычные рассуждения опираются на сформулированные нами аксиомы.

Прежде всего заметим, что всякое действительное число α расположено между двумя последовательными целыми числами, то есть существует такое целое число A, что $A \le \alpha < A+1$. Пусть сначала α положительно. Согласно аксиоме Архимеда существует такое целое число n, что $\alpha < n$. Очевидно, что $n > 0$ и так как существует только конечное число натуральных чисел не превосходящих n, то существует последнее (самое маленькое) число с этим свойством. Мы будем обозначать его через m. Тогда $\alpha < m$, но $m-1$ уже таким свойством не обладает; значит, $m-1 \le \alpha < m$ и $A = m-1$ обладает нужным нам свойством. Если же α отрицательно, то положим $\alpha' = -\alpha$. Тогда $\alpha' > 0$ и мы можем применить к нему доказанное утверждение : существует такое n, что $n \le \alpha' < n+1$. Из аксиомы IV_3 легко следует, что тогда $-(n+1) < \alpha \le -n$. Если $\alpha' \ne n$, то мы можем положить $A = -(n+1)$ и $A < \alpha < A+1$. Если же $\alpha' = -n$, то надо положить $A = -n$. Итак, для любого действительного числа α существует такое целое A, что $A \le \alpha < A+1$, и значит α может быть представлено в виде $\alpha = A + \varepsilon$, где $0 \le \varepsilon < 1$.

Теперь заметим, что если для трех чисел $a_1, a_2, a_3\, a_1 < a_2,\ a_2 < a_3$,, то для любого α, удовлетворяющего условиям $a_1 \le \alpha < a_3$, выполняется одно из условий $a_1 \le \alpha < a_2$ или $a_2 \le \alpha < a_3$. На чертеже это просто значит, что интервал (a_1, a_3) составлен из интервалов (a_1, a_2) и (a_2, a_3) (рис.1).

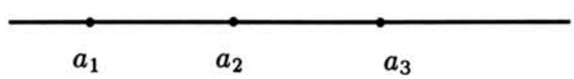


рис. 1

А формально это является следствием того, что для любого α выполняется одно из соотношений $a < a_2$, или $a_2 < \alpha$ или $a_2 = \alpha$.

Рассмотрим более общий случай : пусть для n чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ выполняются условия $\alpha_1 < \alpha_2,\ \alpha_2 < \alpha_3, ...,\ \alpha_{n-1} < \alpha_n$. Тогда для любого числа α, для которого $\alpha_1 \le \alpha < \alpha_n$ выполнено условие $\alpha_{i-1} \le \alpha < \alpha_i$ для некоторого $i = 2,\ 3, ...,\ n$. Для доказательства надо применить предшествующее утверждение к трем числам: $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_n$. Тогда либо $\alpha_1 \le \alpha < \alpha_2$ (и наше утверждение верно при $i = 2$), либо $\alpha_2 \le \alpha < \alpha_n$. После этого надо рассмотреть числа $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_n$ и т.д. При некотором i мы прийдем к нужному соотношению $\alpha_{i-1} \le \alpha < \alpha_i$.

После этого небольшого отступления мы можем вернуться к нашему основному вопросу. Мы уже доказали, что любое действительное число α может быть представлено в виде $A + \varepsilon$, где A — целое число и $0 \le \varepsilon < 1$. Теперь мы рассмотрим числа $\frac{k}{10}$, $k = 0, 1, ..., 10$. Согласно предшествующему результату можно утверждать, что $\frac{k}{10} \le \varepsilon < \frac{k+1}{10}$ для некоторого k, $0 \le k < 10$. Обозначив это число k через a_1, мы можем написать $\varepsilon = \frac{a_1}{10} + \varepsilon_1$, где $0 \le \varepsilon_1 < \frac{1}{10}$. Отсюда $\alpha = A + \frac{a_1}{10} + \varepsilon_1$. Продолжая этот процесс, мы получим числа $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, где всегда $0 \le a_i \le 9$ и для любого n $\alpha = A + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \varepsilon_n$, $0 \le \varepsilon_n < \frac{1}{10^n}$. Но это и означает, что последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$, где $\alpha_n = A + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}$ имеет пределом α, то есть, что бесконечной десятичной дроби $A, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ соответствует число α.

Суммируя все доказанное, мы можем сказать, что *сопоставление бесконечной десятичной дроби действительного числа не устанавливает взаимно однозначного соответствия между бесконечными десятичными дробями и действительными числами, но это соответствие станет взаимно однозначным, если из множества бесконечных десятичных дробей исключить дроби, имеющие 9 в периоде.*

Задачи.

1. Докажите, что действительное число α соответствует бесконечной десятичной дроби, имеющей 0 в периоде в том и только том случае, когда α является рациональным числом $\frac{a}{b}$, где a и b целые, причем b делится только на простые числа 2 и 5.

2. При сопоставлении рациональному числу $\frac{a}{b}$ бесконечной десятичной дроби достаточно вычислить мантису и поэтому можно считать, что $0 < a < b$. Пусть $\alpha_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, где $0, a_1 a_2 ....$ — бесконечная десятичная дробь, соответствующая числу $\frac{a}{b}$. Докажите, что $\frac{a}{b} - \alpha_n = \frac{r_n}{10^n b}$, где $0 \le r_n < b$ и числа r_n связаны соотношением $10 r_{n-1} = b a_n + r_n$, то есть a_n — неполное частное, а r_n — остаток от деления $10 r_{n-1}$ на b. Убедитесь, что этот последовательный способ вычисления знаков a_n десятичной дроби совпадает с обычным способом "деления уголком".

3. Докажите, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая рациональному числу, периодична, то есть имеет вид $(**\cdots)(\mathcal{P})(\mathcal{P})\cdots$, где $(**\cdots)$ обозначает некоторую конечную группу знаков, после которой повторяется одна и та же группа знаков $(\mathcal{P})$, называемая *периодом*. Указание. Воспользуйтесь задачей 2 (то есть, "делением уголком") и заметьте, что число остатков при делении $10 r_{n-1}$ на b, конечно (не больше, чем b).

4. Докажите, что если знаменатель b дроби $\frac{a}{b}$ взаимно прост с 10, то период начинается сразу после запятой.

5. В предположениях задачи 4 докажите, что число цифр в периоде равно наименьшему числу k, для которого $10^k - 1$ делится на b.

6. В предположениях задач 4 и 5 докажите, что число цифр в периоде не превосходит числа натуральных чисел, не превосходящих числа b и взаимно простых с b. Это число задается формулой (25) главы III.

7. Докажите, что любой периодической бесконечной десятичной дроби соответствует рациональное число. А именно, если перед периодом дроби стоит $A, a_1 a_2 \ldots a_n$, в периоде группа цифр $(p_0, p_1 \ldots p_{m-1})$, $A + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = Q$ и $p_0 10^{m-1} + p_1 10^{m-2} + \cdots + p_{m-1} = \mathcal{P}$, то дроби соответствует рациональное число $Q + \frac{\mathcal{P}}{10^n(10^m - 1)}$.

8. Докажите, что бесконечная десятичная дробь $0,1001000100001...$, где число нулей между двумя единицами каждый раз увеличивается на 1, соответствует иррациональному числу.

§4. Действительные корни многочленов.

Создав более прочную основу для теории действительных чисел, мы можем теперь получить несколько новых результатов о действительных корнях многочленов с действительными коэффициентами. Для этого сначала нам надо исследовать поведение многочлена $f(x)$ вблизи одного значения $x = a$.

Теорема 3. *Для любого многочлена $f(x)$ и любого числа a существует такая положительная постоянная M, что выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a| \tag{10}$$

для всех x, для которых $|x - a| \leq 1$.

Напомним, что $|A|$ (читается как "абсолютная величина числа A") по определению равно A , если $A \geq 0$ и $-A$, если $A < 0$. Таким образом, $|A|$ — всегда неотрицательное число. Известны из школьного курса свойства $|A|$:

$$|A + B| \leq |A| + |B| \tag{11}$$

$$|A + B| \geq |A| - |B| \tag{12}$$

$$|AB| = |A| \cdot |B| \tag{13}$$

Теорема 3 оценивает количественно, насколько мало отличается $f(x)$ от $f(a)$ если x мало отличается от a. Для доказательства теоремы положим $y = x - a$, то есть $x = a + y$ и подставим это значение в многочлен $f(x)$. Каждый член $a_k x^k$ многочлена $f(x)$ после подстановки дает выражение $a_k(a + y)^k$, которое мы можем развернуть по степеням y, а потом привести в $f(a + y)$ подобные члены. В результате мы получим, что $f(a + y)$ является многочленом относительно y, который мы обозначим через $g(y) = c_0 + c_1 y + \cdots + c_n y^n$. Тогда $f(x) = f(a + y) = g(y)$, $f(a) = f(a + 0) = g(o) = c_0$, $x - a = y$ и неравенство (5), которое мы хотим доказать приобретает вид:

$$|g(y) - g(0)| \leq M|y| \tag{14}$$

для всех y, для которых $|y| \leq 1$.

В преобразованном виде выражение $g(y) - g(0)$ приобретает простой вид $c_1 y + \cdots + c_n y^n$ (так как $g(0) = c_0$). Неравенство (11) можно применить и к сумме любого числа слагаемых (что сразу же проверяется по индукции) и, в частности, к нашей сумме $c_1 y + \cdots + c_n y^n$. Мы получим, что

$$|g(y) - g(0)| = |c_1 y + \cdots + c_n y^n| \leq |c_1 y| + \cdots + |c_n y^n|$$

Ввиду равенства (13) (тоже примененного к произвольному числу сомножителей) $|c_k y^k| = |c_k| \cdot |y|^k$, так что

$$|g(y) - g(0)| \leq |c_1||y| + \cdots + |c_n||y|^n.$$

Так как по предположению $|y| \leq 1$, то $|y|^k \leq |y|$ и мы имеем:

$$|g(y) - g(0)| \leq (|c_1| + \cdots + |c_n|)|y|$$

при $|y| \leq 1$.

Достаточно положить $M = |c_1| + \cdots + |c_n|$, и мы получим неравенство (14), а значит и (10).

Теперь мы можем доказать важное свойство многочленов:

Теорема 4. (теорема Больцано.) *Если многочлен принимает при $x = a$ и $x = b$ значения разных знаков, то между ними он обращается в* 0.

То есть если для некоторого многочлена $f(x)$ значения $f(a)$ и $f(b)$ — числа разных знаков и $a < b$, то существует такое c, что $a < c < b$ и $f(c) = 0$.

Теорема 2 кажется очевидной наглядно, если взглянуть на график многочлена $f(x)$ (рис. 2).

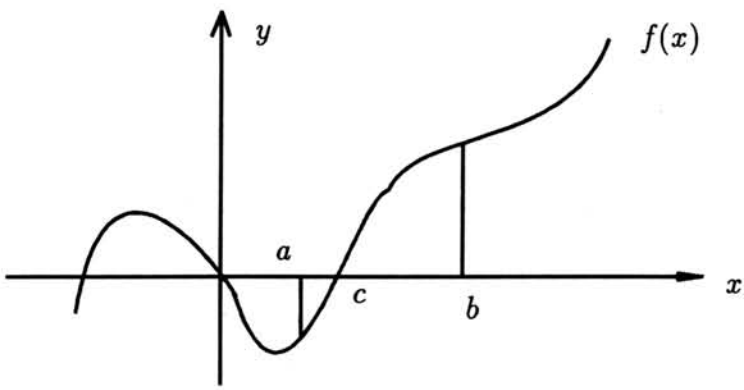


рис. 2

Она утверждает, что график не может “перескочить” через ось x, не пересекая ее. Но как раз *нарисовать* такой график вполне можно (рис. 3).

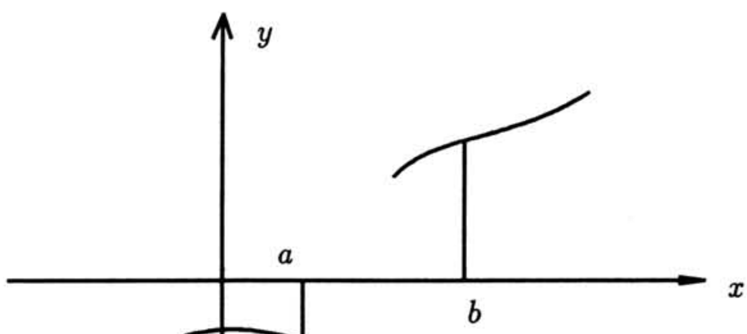


рис. 3

Нам надо доказать, что такой график не может быть графиком многочлена. Для более общих функций это связано с довольно тонким свойством, называемым *непрерывностью.* В случае же многочленов достаточно простого неравенства (10), установленного в теореме 3.

Доказательство основывается на том же принципе "ловли льва в пустыне", при помощи которого мы доказали теорему 1.

Предположим для определенности, что $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Рассмотрим отрезок $[a, b]$ (то есть множество действительных чисел x, для которых $a \le x$ и $x \le b$). Обозначим этот отрезок через I_1 и разделим его на два равных по длине отрезка точкой $r = \frac{a+b}{2}$. Если $f(r) = 0$, то теорема доказана ($c = r$). Если же $f(r) \neq 0$ и $f(r) > 0$, то многочлен $f(x)$ принимает значения разных знаков при $x = r$ и $x = b$. Тогда обозначим через I_2 отрезок $[r, b]$. Если окажется, что $f(r) < 0$, то через I_2 обозначим отрезок $[a, r]$. В обоих случаях мы получим отрезок I_2, содержащийся в I_1, в два раза меньшей длины, чем I_1, в концах которого многочлен $f(x)$ принимает значения противоположных знаков, а именно — положительное в левом конце и отрицательное — в правом.

Этот процесс можно продолжать дальше. Либо мы когда-то столкнемся с корнем многочлена $f(x)$ (и теорема будет доказана), либо процесс будет продолжаться неограничено. Остается рассмотреть этот последний случай. Мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков: $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, $I_n = [a_n, b_n]$, так что следующий составляет половину предшествующего ему и многочлен $f(x)$ принимает значения противоположных знаков в концах a_n и b_n каждого отрезка I_n, причем $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$. Вот тут мы и воспользуемся более строгим анализом понятия действительного числа, приведенном в §1. Отрезки I_n удовлетворяют условиям аксиомы VII (аксиомы о вложенных отрезках) и леммы, доказанной в §1. Действительно, отрезки I_n вложены друг в друга по построению, а так как I_n есть половина отрезка I_{n-1}, то длина отрезка I_n равна $\frac{b-a}{2^{n-1}}$, то есть становится неограниченно малой с ростом n. Поэтому согласно аксиоме VII и лемме существует единственное число c, принадлежащее всем отрезкам I_n, то есть такое, что

$$a_n \le c \le b_n \tag{15}$$

На этом построение нужного нам числа закончено. Именно, мы утверждаем, что $f(c) = 0$, в соответствии с утверждением теоремы. Но остается это доказать.

Рассмотрим значения $f(a_n)$ многочлена $f(x)$ в левых концах отрезков I_n. По условию все $f(a_n) > 0$. Из неравенств (11) следует, что последовательность $a_1, a_2, \ldots$ неограниченно приближается к числу c: действительно, $a_n \le c \le b_n$ и $0 \le c - a_n \le b_n - a_n$, причем по условию $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$. Поэтому мы можем удовлетворить неравенству $|a_n - c| < \varepsilon$, если $\frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon$, а это будет верно при любом $\varepsilon > 0$, если выбрать n достаточно большим. Докажем, исходя из этого, что и значения $f(a_n)$ неограниченно приближаются к значению $f(c)$. Действительно, чтобы доказать, что $|f(a_m) - f(c)| \le \varepsilon$ при достаточно большом m, мы можем воспользоваться неравенством (10) в теореме 3. Так как a_m неограниченно приближается к c, то $|a_m - c| < 1$ при достаточно большом m и мы можем применить неравенство (10). Мы видим, что $|f(a_m) - f(c)| < M|a_m - c|$ и значит $|f(a_m) - f(c)| < \varepsilon$, если $M|a_m - c| < \varepsilon$, то есть $|a_m - c| < \frac{\varepsilon}{M}$. Но мы убедились, что такое неравенство выполнено для достаточно большого m (ведь $\frac{\varepsilon}{M}$ можно опять обозначить через ε!)

Что же мы можем сказать о числе $f(c)$, про которое мы знаем, что к нему неограниченно приближается последовательность положительных чисел $f(a_n)$? Ясно, что $f(c) \geq 0$. Действительно, если бы $f(c)$ было отрицательным, то при положительных $f(a_n)$ мы имели бы $f(a_n) - f(c) \geq -f(c)$, поэтому $|f(a_n) - f(c)| \geq -f(c)$ и это противоречило бы тому, что $|f(a_n) - f(c)| < \varepsilon$, если $\varepsilon < -f(c)$.

Таким образом, мы доказали, что $f(c) \geq 0$. Совершенно так же, рассматривая числа b_n, для которых $f(b_n) < 0$, мы докажем, что $f(c) \leq 0$. Поэтому для $f(c)$ остается одна возможность: $f(c) = 0$. Тем самым теорема доказана.

Обратите внимание на совершенно новый тип рассуждения, при помощи которого мы доказали теорему. Мы собственно доказали (при некоторых условиях) существование корня c у многочлена $f(x)$. Но сделали это мы не при помощи формулы (как, например, при решении квадратного уравнения), а при помощи применения аксиомы о вложенных отрезках. В то же время, это далеко не чистая "теорема существования", когда мы узнаем только то, что некоторая величина существует — и ничего больше. Например, мы можем в действительности найти корень c с недостатком и с избытком с любой желаемой степенью точности, строя числа a_n и b_n, между которыми c содержится (неравенство (15)) и которые становятся все ближе друг к другу.

Теорема Больцано дает возможность узнать довольно много о конкретных многочленах. Рассмотрим, например, многочлен $f(x) = x^3 - 7x + 5$ и составим таблицу его значений при небольших по абсолютной величине целых значениях x (табл. 1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	11	11	5	-1	-1	11

таблица 1.

Из таблицы видно, что многочлен $f(x)$ принимает значения противоположных знаков в концах отрезков: $[2, 3]$, $[0, 1]$ и $[-3, -2]$. По теореме Больцано он имеет корень в каждом из этих отрезков. Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет по крайней мере 3 корня. Но степень его равна 3 и согласно теореме 3 гл. II он не может иметь больше, чем 3 корня. Мы доказали, следовательно, что многочлен $f(x)$ имеет ровно 3 корня и содержатся они в отрезках $[2, 3]$, $[0, 1]$ и $[-3, -2]$.

И для некоторых других многочленов теорема Больцано дает точный ответ. Важный случай — это многочлены $x^n - a$, корни которых называют корнями степени n из a (обозначение: $\sqrt[n]{a}$). Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Тогда при $x = 0$ многочлен $f(x) = x^n - a$ принимает отрицательное значение $-a$. С другой стороны, легко указать такое значение $x = c$, что $f(c) > 0$. Именно, по аксиоме Архимеда (аксиома VI) существует такое натуральное число m, что $m > a$. Тогда $m^n > m$ и $m^n - a > m - a > 0$. По теореме Больцано мы можем сказать, что в отрезке $[0, m]$ у многочлена имеется корень. Если же $a < 0$ и n четно, то многочлен очевидно не имеет корней: $x^n \geq 0$ как четная степень действительного числа и $x^n - a > 0$. Если n нечетно, то полагая $x = -y$ получим, что $x^n - a = -y^n - a = -(y^n + a)$. Многочлен

$y^n + a$ (при $a < 0$) имеет, как мы показали, корень, значит и многочлен $x^n - a$. В школе обычно все эти рассуждения опускают (из-за отсутствия надежной теории действительного числа), однако доказывают (очень просто), что при n нечетном многочлен $x^n - a$ имеет не более одного корня (как мы видели — в точности один), а при n четном и $a > 0$ — не более двух корней, отличающихся знаком (и, значит, ровно два).

Однако в случае других многочленов теорема Больцано может ничего не дать. Например, в случае многочлена $x^2 - x + 2$. Из анализа формулы для решения квадратного уравнения можно заключить, что этот многочлен корней не имеет. Но если бы мы придавали x значения: $0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$ то получили бы положительные значения и теорема Больцано ничего бы не дала. Ввиду этого мы займемся дальнейшим исследованием многочленов.

Теорема 3 уточняет значения многочлена при значениях x, близких к некоторому значению a. Теперь мы докажем похожее утверждение относительно значений многочлена при больших (по абсолютной величине) значениях x.

Теорема 5. *Для многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ существует такая постоянная $N > 0$, что*

$$|a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}| < |a_nx^n| \tag{16}$$

при всех значениях x, для которых $|x| > N$.

Теорема утверждает, что при достаточно больших значениях x абсолютная величина старшего члена превосходит абсолютную величину суммы всех других. Для доказательства мы воспользуемся неравенством (11) (для произвольного числа слагаемых) и равенством (13). Из них следует, что $|a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}| \le |a_0| + |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1}$, а $|a_nx^n| = |a_n||x|^n$. Для доказательства неравенства (16) достаточно убедиться, что $|a_0| + |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} \le |a_n||x|^n$, а это будет доказано, если мы покажем, что

$$|a_k||x|^k < \frac{1}{n}|a_n||x|^n \tag{17}$$

для каждого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и $|x| > N$ при достаточно большом N. Тогда, складывая все неравенства (17) для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, мы и получим нужное неравенство.

Неравенство же (17) решается самым обычным способом. Неравенство (17) равносильно тому, что $|x|^{n-k} > \dfrac{n|a_k|}{|a_n|}$ или

$$|x| > \sqrt[n-k]{n\frac{|a_k|}{|a_n|}} \tag{18}$$

Таким образом, нам достаточно выбрать за N любое число, большее всех чисел $\sqrt[n-k]{n\dfrac{|a_k|}{|a_n|}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и для него будет верно утверждение теоремы 5.

Из теоремы 5 вытекает ряд полезных следствий. Заметим, что в условиях теоремы (то есть, при $|x| > N$) обязательно $|f(x)| > 0$, это сразу следует из неравенства (12)

$$|f(x)| = |a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n| \le |a_nx^n| - |a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}|$$

. Но это означает, что многочлен $f(x)$ не имеет корней x с $|x| > N$. Иными словами, корни многочлена (если они существуют) должны содержаться в отрезке $|x| \le N$, причем, как мы показали (неравенство (18)), за N можно взять наибольшее из чисел $\sqrt[n-k]{n\frac{|a_k|}{|a_n|}}$. Говорят, что такое число N является *границей корней* многочлена. Так для многочлена $x^3 - 7x + 5$ мы можем взять за N любое число, большее $\sqrt[3]{3 \cdot 5}$ и $\sqrt{3 \cdot 7}$. Например, подходит $N = 4,6$. Значит, корни многочлена расположены между $-4,6$ и $4,6$. Раньше мы убедились, что они действительно содержатся даже между -3 и $+3$ (таблица 1).

Из теоремы 5 можно однако вывести и больше, чем только утверждение, что $f(x) \neq 0$, если $|x| > N$ при найденном там значении N. Вычисляя значения $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, мы складываем два действительных числа $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ и a_nx^n, из которого первое по абсолютной величине меньше второго (при $|x| > N$). Но тогда знак суммы определяется знаком второго слагаемого. Мы приходим к следующему утверждению:

Следствие 1. При $|x| > N$, где N — граница корней, определенная в теореме 5, значение многочлена $f(x)$ имеет тот же знак, что и старший член a_nx^n.

Предположим, что степень n многочлена — нечетное число. Тогда знак старшего члена a_nx^n при $x > 0$ совпадает со знаком коэффициента a_n, а при $x < 0$ — противоположен ему. Следствие 1 показывает, что при $x > N$ и $x < -N$ и сам многочлен принимает значения противоположных знаков (именно знака a_n и знака $-a_n$). Теорема Больцано дает, что между этими значениями содержится хотя бы один корень многочлена. Мы получаем следующее утверждение:

Следствие 2. Многочлен нечетной степени имеет хотя бы один корень.

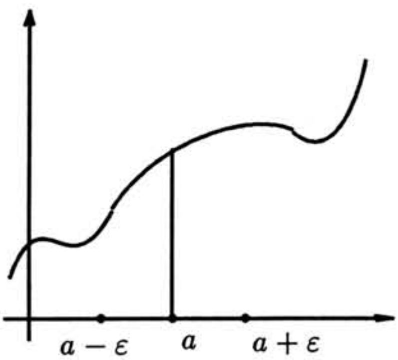
Это очень неожиданное утверждение. Ведь вы знаете, что многочлен второй степени может не иметь корней (например многочлен $x^2 + 1$). Казалось бы, такое явление тем более может встретиться среди многочленов большей степени: 3 и т.д. Но вот, например, согласно следствию, многочлен степени 3 обязательно имеет корень. Положение здесь оказывается более сложным: оно зависит не только от величины степени уравнения, но и от ее четности.

Наконец, рассмотрим еще одно свойство многочленов, которое сильно облегчит исследование в конкретных случаях. Теорема 3 дала нам сведения об абсолютной величине разности $f(x) - f(a)$, когда разность $x - a$ мала. Теперь мы исследуем *знак* разности $f(x) - f(a)$. При этом мы исключим те случаи, когда значение $x = a$ является корнем производной $f'(x)$ многочлена $f(x)$. Эти исключительные значения a можно было бы легко исследовать таким же способом, но это сейчас нам не понадобится.

Теорема 6. *Пусть задан многочлен $f(x)$ и значение $x = a$, не являющееся корнем его производной $f'(x)$ (то есть, $f'(a) \neq 0$). Если $f'(a) > 0$, то значения $f(x)$ вблизи слева от a меньше, чем $f(a)$, а вблизи справа — больше. Если же $f'(a) < 0$, то значения $f(x)$ вблизи слева от a больше, чем $f(a)$, а вблизи справа — меньше.*

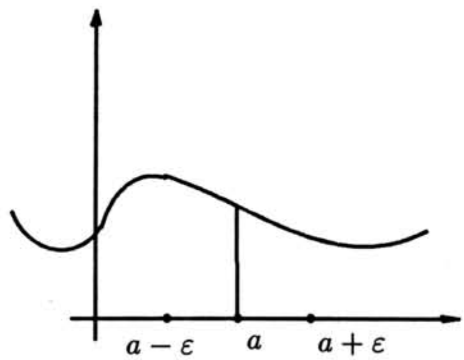
Это значит, что существует такое достаточно малое число $\varepsilon > 0$ (зависящее от $f(x)$ и от a), что при $f'(a) > 0$ для $a - \varepsilon < x < a$ будет $f(x) < f(a)$, а для $a < x < a + \varepsilon$ будет $f(x) > f(a)$. Если же $f'(a) < 0$, то для $a - \varepsilon < x < a$ будет

$f(x) > f(a)$ а для $a < x < a + \varepsilon$ будет $f(x) < f(a)$ (см. расположение графика $f(x)$ на рис. 4 и 5)



$f'(a) > 0$

рис. 4



$f'(a) < 0$

рис. 5

Доказательство очень просто. Мы знаем по теореме Безу, что многочлен $f(x) - f(a)$ делится на $x - a$. Поэтому

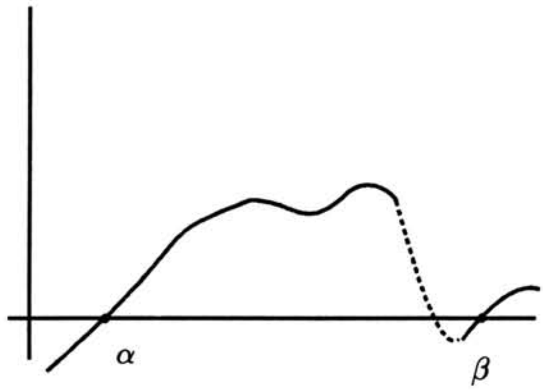
$$f(x) - f(a) = (x - a)g(x, a) \tag{19}$$

где коэффициенты многочлена $g(x, a)$ зависят от a. При $x = a$ многочлен $g(x, a)$ принимает значение $f'(a)$ (это и было наше определение производной многочлена, см. формулу (13) гл. II). Так как по условию $f'(a) \neq 0$, то и $g(a, a) = f'(a) \neq 0$. Обозначим через ε любое число, меньшее расстояния от a до ближайшего корня многочлена $g(x, a)$ (здесь a у нас фиксировано, а x является неизвестной), так что многочлен $g(x, a)$ не обращается в 0 в отрезке $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Тогда он сохраняет в этом отрезке тот же знак, что и при $x = a$: если бы он принимал два значения разных знаков, то по теореме Больцано обращался бы в 0 в том же отрезке, что противоречит выбору числа ε. Это собственно и содержит уже утверждение теоремы 6. Пусть, например, $f'(a) > 0$. Тогда и $g(a, a) = f'(a) > 0$ и по сказанному $g(x, a) > 0$ при $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Другой множитель $x - a$ в формуле (19) тоже ведет себя известным нам образом: $x - a < 0$ при $a - \varepsilon < x < a$ и $x - a > 0$ при $a < x < a + \varepsilon$. Перемножая, получаем из формулы (19), что $f(x) - f(a) < 0$ при $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ и $f(x) - f(a) > 0$ при $a < x < a + \varepsilon$. Это и есть утверждение теоремы. Случай $f'(a) < 0$ разбирается дословно так же.

Из доказанной теоремы вытекает интересное следствие.

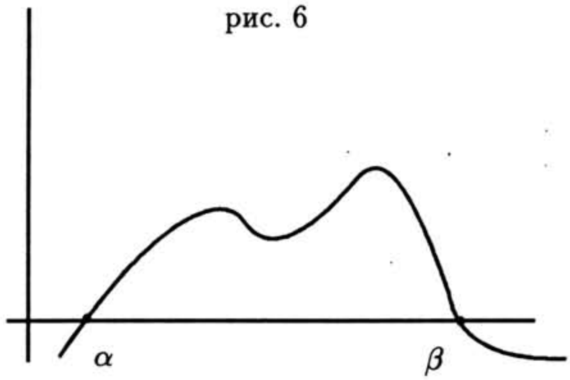
Теорема 7 (теорема Ролля). *Между двумя соседними корнями многочлена без кратных корней находится корень производной.*

Мы предполагаем, что многочлен не имеет кратных корней — лишь чтобы сократить рассуждения. Только этот случай и будет нам дальше встречаться.



$f'(\alpha) > 0,\ f'(\beta) > 0$ невозможны

рис. 6



$f'(\alpha) > 0,\ f'(\beta) < 0$ возможны

рис. 7

Пусть α и β, $\alpha < \beta$ — два соседние корня многочлена $f(x)$, так что он не имеет корней, лежащих между ними. Так как мы предположили, что многочлен не имеет кратных корней, то α и β не являются кратными корнями, и согласно теореме 5 гл. II $f'(\alpha) \neq 0$, $f'(\beta) \neq 0$. Пусть, например, $f'(\alpha) > 0$. Докажем, что тогда $f'(\beta) < 0$. Действительно, если бы было $f'(\beta) > 0$, то по предшествующей теореме мы имели бы $f(x) > f(\alpha) = 0$ при $\alpha + \varepsilon > x > \alpha$ и $f(y) < f(\beta) = 0$ при $\beta - \varepsilon < y < \beta$. Таким образом, при любом x, для которого $\alpha + \varepsilon > x > \alpha$, и для любого y, для которого $\beta - \varepsilon < y < \beta$, мы имеем $f(x) > 0$ и $f(y) < 0$. Тогда по теореме Больцано многочлен f должен иметь корень, расположенный между x и y, то есть в отрезке $[\alpha, \beta]$. Это противоречит тому, что α и β, как мы предположили, являются соседними корнями многочлена $f(x)$. Мы видим, что остается одна возможность $f'(\beta) < 0$, но тогда по теореме Больцано многочлен $f'(x)$ имеет корень между α и β. На рисунке 6 и 7 указаны невозможный и возможный случаи знаков $f'(\alpha)$ и $f'(\beta)$ (при $f'(\alpha) > 0$). Случай, когда $f'(\alpha) < 0$ рассматривается дословно так же.

В заключение параграфа покажем, что доказанные нами теоремы уже достаточны, чтобы полностью решить вопрос о числе корней многочлена третьей степени. В §3 гл. II мы видели, что любое уравнение третьей степени можно заменить равносильным ему уравнением вида $x^3 + ax + b = 0$. В таком виде мы и будем его дальше рассматривать.

Прежде всего решим вопрос о кратных корнях. Мы доказали в §2 гл. II, что кратные корни многочлена — это общие корни многочлена и его производной. По формуле (15) гл. II для многочлена $f(x) = x^3 + ax + b$ производная равна $f'(x) = 3x^2 + a$. Если $a > 0$, то производная не имеет корней и значит многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней. Если же $a < 0$, то обозначим через δ положительный корень многочлена $3x^2 + a$ (то есть, $\delta = +\sqrt{-\frac{a}{3}}$.) Тогда многочлен $f(x)$ может иметь кратным корнем только δ или $-\delta$. Так как многочлен $f(x)$ можно записать в виде $f(x) = (x^2+a)x+b$, а для $x = \pm\delta$, $x^2 = -\frac{a}{3}$ и $x^2+a = \frac{2a}{3}$, то условие того, что $f(x)$ имеет кратный корень, приобретает вид $\pm\delta\frac{2a}{3} = -b$ или $\delta^2\frac{4a}{9} = b^2$, а так как $\delta^2 = -\frac{a}{3}$, то условие приобретает вид $-\frac{4a^3}{27} = b^2$ или $4a^3+27b^2 = 0$. При выполнении этого условия многочлен $f(x)$ имеет кратный корень α и представляется в виде $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$. Здесь многочлен $g(x)$ должен быть многочленом первой степени и значит иметь один корень β. Таким образом, многочлен имеет два корня, равных α, и один корень, равный β.

Теперь рассмотрим оставшийся случай, когда многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней, то есть $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Согласно следствию 2 теоремы 5 многочлен $f(x)$ имеет по крайней мере один корень α. Если у него есть другой корень β, то он должен делиться на $(x - \alpha)(x - \beta)$, то есть представляться в виде $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен первой степени и следовательно имеет корень γ. Таким образом многочлен $f(x)$ имеет три корня: α, β и γ. Больше трех корней многочлен третьей степени иметь не может. Мы видим, что может представиться только два случая: многочлен $f(x)$ имеет 1 корень или многочлен $f(x)$ имеет 3 корня. Наша задача заключается в том, чтобы узнать, какой из этих случаев имеет место (при заданных коэффициентах a и b).

Предположим, что многочлен $f(x)$ имеет три корня: α, β и γ, причем $\alpha < \beta < \gamma$. Значит многочлен не имеет корней, меньших α и больших γ. Но согласно следствию 1 теоремы 5 существует такое число N, что для достаточно больших x (точнее $x \geq N$), значения многочлена имеют тот же знак, что и значения старшего члена x^3 — то есть положительны, а при $x \leq -N$ по той же причине отрицательны. Значит при $x < \alpha$ всегда $f(x) < 0$, а при $x > \gamma$ всегда $f(x) > 0$ (рис. 8).

Так как $f(x) < 0$ при $\alpha-\varepsilon < x < \alpha$ и любом $\varepsilon > 0$, то согласно теореме 6 $f'(\alpha) > 0$, и значит $f(x) > 0$ при $\alpha < x < \alpha+\varepsilon$. Так как $f(x)$ не имеет корней между α и β, то по теореме Больцано принимает значения одного знака, так что $f(x) > 0$ при $\alpha < x < \beta$. Аналогично мы получаем, что $f(x) < 0$ при $\beta < x < \gamma$. Согласно теореме 7 между корнями α и β и между корнями β и γ лежит по корню производной $f'(x)$ многочлена $f(x)$. Так как $f'(x) = 3x^2 + a$, то при $a > 0$ производная не имеет корней, и этот случай (существование трех корней многочлена $f(x)$) невозможен. При $a = 0$ $f(x) = x^3 + b$. Как мы видели выше, такой многочлен имеет только один

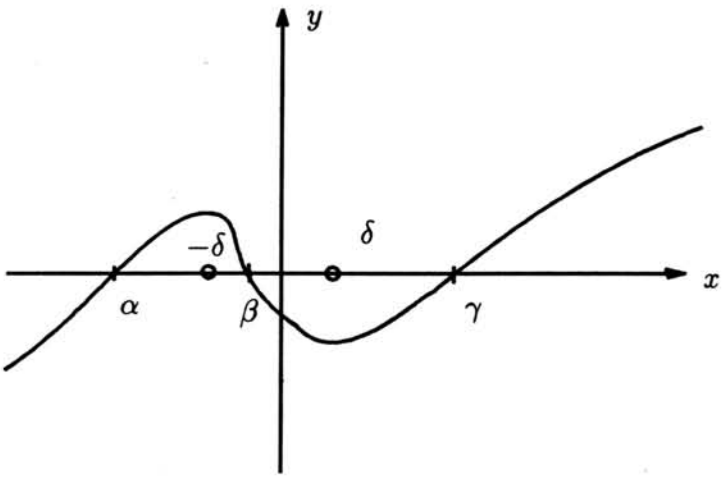


рис. 8

корень. Наконец, при $a < 0$ производная $f'(x) = 3x^2 + a$ имеет два корня: $\delta > 0$ и $-\delta < 0$ (здесь $\delta = +\sqrt{-\frac{a}{3}}$). Очевидно, $\alpha < -\delta < \beta < \delta < \gamma$.

Так как на отрезке от α до β многочлен принимает положительные значения, а на отрезке от β до γ — отрицательные, то

$$f(-\delta) > 0, \qquad f(\delta) < 0. \tag{20}$$

(в предположении, что многочлен $f(x)$ имеет три корня).

Наоборот, если выполнены соотношения (20), то по теореме Больцано многочлен $f(x)$ имеет корень, лежащий между $-\delta$ и δ. Мы обозначим этот корень через β. Кроме того, согласно следствию 1 теоремы 5 для достаточно больших значений x многочлен принимает положительные значения, а для достаточно малых — отрицательные. Из теоремы Больцано тогда следует, что многочлен имеет корень, меньший чем $-\delta$, а так же корень, больший, чем δ. Мы обозначим эти корни через α и γ соответственно. Таким образом из соотношений (20) следует, что многочлен имеет 3 корня: α, β и γ. Иначе говоря, соотношения (20) *необходимы и достаточны* для того, чтобы многочлен $f(x)$ имел 3 корня. В остальных случаях он имеет 1 корень.

Доказанное утверждение уже решает нашу задачу. Мы преобразуем еще условия (20) к более простому виду. Так как $f(x) = (x^2 + a)x + b$ и $3\delta^2 + a = 0$, $\delta^2 = -\frac{a}{3}$, то $f(\pm\delta) = (\delta^2 + a)(\pm\delta) + b = \pm\delta\frac{2a}{3} + b$, поэтому соотношения (20) принимают вид

$$-\frac{2a}{3}\delta + b > 0, \qquad \frac{2a}{3}\delta + b < 0$$

или $\frac{2a}{3}\delta < b < -\frac{2a}{3}\delta$. Эти два неравенства равносильны одному: $b^2 < \frac{4a^2}{3^2}\delta^2$. Так как $\frac{4a^2}{3^2}\delta^2 = -\frac{4a^3}{27b^2}$, то неравенства (20) равносильны неравенству $4a^3 + 27b^2 < 0$.

Это и есть окончательный ответ: если $4a^3+27b^2<0$, то многочлен x^3+ax+b имеет 3 корня, если $4a^3+27b^2=0$, то он имеет два равных корня и еще один корень, а если $4a^3+27b^2<0$, то многочлен имеет 1 корень.

Разумеется, все сказанное относится только к многочленам третьей степени. Для многочленов произвольной степени можно провести аналогичное исследование, но рассуждения здесь несколько сложнее, и мы отнесем их к приложению.

Задачи.

1. В конце гл. I мы доказали, что многочлен $x^3-7x^2+14x-7$ не имеет рациональных корней, поэтому его корни — если они существуют — являются иррациональными числами. Определите число корней этого многочлена, их знаки и укажите, между какими двумя последовательными целыми числами содержится каждый корень.

2. Докажите, что многочлен x^4+ax+b или не имеет корней, или имеет два корня, и выведите условие (на коэффициенты a и b) того, что имеет место тот или другой случай.

3. Докажите, что число корней многочлена четной степени - четно, а нечетной - нечетно.

4. Докажите, что многочлен x^n+ax+b имеет при n четном 0 или 2 корня, а при n — нечетном 1 или 3. Выведите условие (на коэффициенты a и b) того, что имеет место тот или другой случай.

5. Определите число корней многочлена $x^n+ax^{n-1}+b$ (в зависимости от n, a и b).

6. Докажите, что любой многочлен $f(x)$ принимает значения сколь угодно большие по абсолютной величине при достаточно больших по абсолютной величине значениях x.

7. Докажите, что в качестве границы корней N можно взять число $\dfrac{M}{|a_n|}+1$, где M — наибольшее из чисел $|a_0|,\dots,|a_{n-1}|$. Указание. Воспользоваться неравенством $|a_0+\dots+a_{n-1}z^{n-1}|\le M(1+|z|+\dots+|z|^n)$.

8. Докажите, что многочлен $a_0+a_1x+\dots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$, у которого $a_n>0$, $a_i\le 0$ для $i=1,\dots,n-1$, $a_0<0$, имеет ровно один положительный корень. Указание. Записать $f(x)$ в виде $a_nx^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_nx}+\dots+\frac{a_0}{a_nx^n}\right)$ и исследовать выражения $\frac{a_{n-k}}{a_nx^k}$ на возрастание или убывание, когда x растет, оставаясь положительным.

9. Пусть у многочлена $f(x)$ равны 0 все коэффициенты при четных степенях x, а коэффициенты при нечетных степенях положительны. Докажите, что он имеет единственный корень.

Приложение.

Теорема Штурма.

Мы изложим здесь метод, который позволяет для любого многочлена $f(x)$ определить число его корней, содержащихся в данном отрезке $[a, b]$.

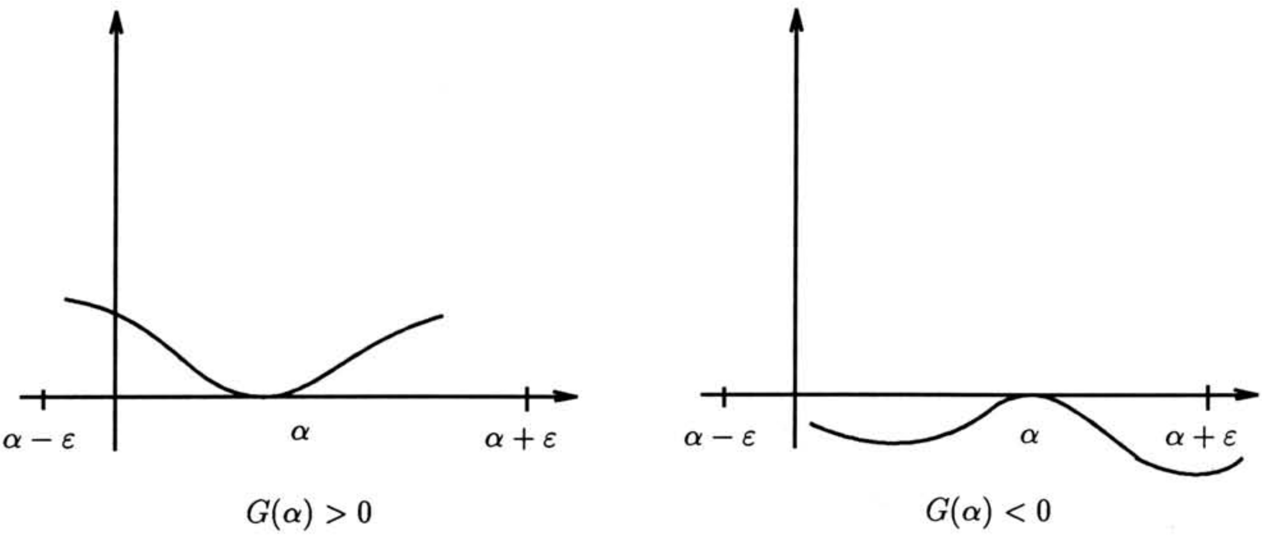
Идея метода основывается на том, что для одного многочлена $f(x)$ не существует приема, который связывал бы его свойства со свойствами многочлена меньшей степени, но для пары многочленов $f(x)$, $g(x)$ такой прием хорошо известен: он заключается в делении с остатком многочлена $f(x)$ на $g(x)$: $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и переходе от пары многочленов (f, g) к паре многочленов меньшей степени (g, r). Повторяя этот процесс, мы приходим к алгоритму Евклида нахождения общего наибольшего делителя многочленов f и g. Например, вопрос о существовании общих корней у многочленов f и g может быть сведен к вопросу о существовании общих корней у многочленов меньшей степени g и r и, в результате, к вопросу о существовании корней у многочлена меньшей степени НОД(f, g). Этот метод можно применить к случаю пары, состоящей из многочлена и его производной и тогда получим ответ на вопрос о существовании у многочлена кратного корня. Так мы поступали в гл. II. Так же мы поступим и теперь: сначала рассмотрим некоторое свойство корней пары многочленов (f, g), для исследования которого можно применить деление с остатком. Потом, применив это свойство к паре, состоящей из многочлена и его производной, найдем ответ на интересующий нас вопрос.

Начнем с совсем простого замечания, относящегося к одному многочлену $F(x)$. Пусть он имеет корень $x = \alpha$ и этот корень имеет кратность k. Тогда мы можем (по определению кратности корня, данной в §2 гл. II) записать

$$F(x) = (x - \alpha)^k G(x) \tag{1}$$

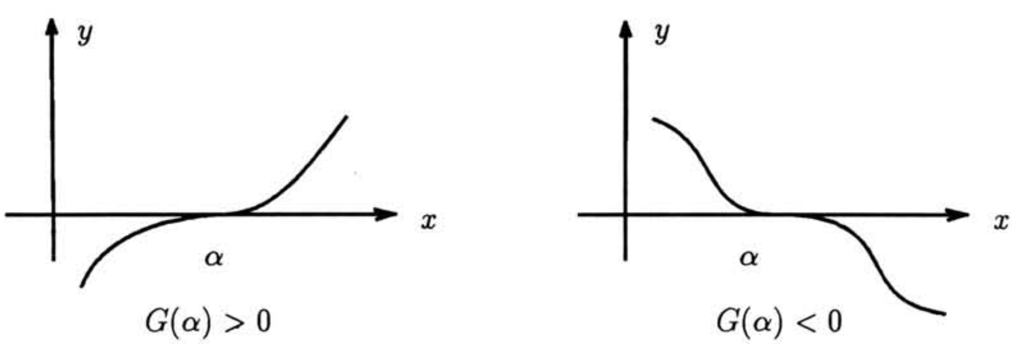
где $G(\alpha) \neq 0$. Поэтому, если число ε меньше, чем расстояние от α до ближайшего корня многочлена $G(x)$, то $G(x)$ принимает в отрезке $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ значения одного и того же знака. Действительно, если бы для двух чисел x и y в этом отрезке многочлен G имел значения $G(x)$ и $G(y)$ разных знаков, то между x и y по теореме Больцано содержался бы корень многочлена. Мы же выбрали ε так, что в отрезке $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ многочлен G не имеет корней. В частности, все значения $G(x)$ для x в отрезке $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ имеют тот же знак, что и $G(\alpha)$. Из формулы(1) теперь видно, что при четной кратности k и значения многочлена $F(x)$ для x, содержащихся в отрезке $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$, имеют тот же знак, что и $G(\alpha)$. Возможное расположение графика указано на рис. 1.

Если же кратность k нечетна, то формула (1) показывает, что при $G(\alpha) > 0$ будет $F(x) < 0$ при $\alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha$ и $F(x) > 0$ при $\alpha \leq x \leq \alpha + \varepsilon$, а при $G(\alpha) < 0$ — наоборот: $F(x) > 0$ при $\alpha - \varepsilon \leq x \leq \alpha$ и $F(x) < 0$ при $\alpha \leq x \leq \alpha + \varepsilon$. В первом случае (то есть, при $G(\alpha) > 0$) α *корнем с возрастанием*, а во втором (при $G(\alpha) < 0$) — *корнем с убыванием*. Возможное расположение графика многочлена $F(x)$ в первом и втором случае изображено на рис. 2.



$\alpha - \varepsilon$
α
$\alpha + \varepsilon$
$G(\alpha) > 0$
$\alpha - \varepsilon$
α
$\alpha + \varepsilon$
$G(\alpha) < 0$

рис. 1.



y
x
α
$G(\alpha) > 0$
y
x
α
$G(\alpha) < 0$

рис. 2

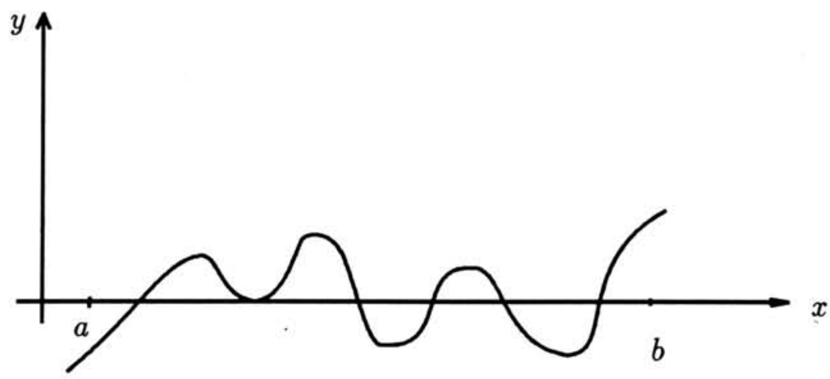


рис. 3

Определение. Пусть $F(x)$ — многочлен, не имеющий ни a, ни b своим корнем. *Характеристикой многочлена* $F(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ называется разность между числом его корней с возрастанием и корней с убыванием, расположенных в этом отрезке. При этом корни четной кратности не считаются. Характеристика обозначается через $[F(x)]_a^b$. Например, у многочлена $F(x)$, изображенного на рис. 3 имеется 3 корня с возрастанием и 2 корня с убыванием, так что $[F]_a^b = 1$.

Так как за каждым корнем с возрастанием следует корень с убыванием (корни четной кратности не считаются!), то характеристика определяется знаком чисел $F(a)$ и $F(b)$, а именно:

$$[F(x)]_a^b = 0 \quad \text{если } F(a) \text{ и } F(b) \text{ одного знака}$$
$$[F(x)]_a^b = 1 \quad \text{если } F(a) < 0,\ F(b) > 0$$
$$[F(x)]_a^b = -1 \quad \text{если } F(a) > 0,\ F(b) < 0$$

Таблица 1.

Таким образом, характеристика многочлена $F(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$ определяется его знаками в концам отрезка и, таким образом, может быть легко вычислена, хотя по определению она связана с его корнями, которые, как правило, найти трудно.

Нашу ситуацию можно наглядно представить себе в виде путешественника, пересекающего несколько раз границу между Францией и Германией. Чему равна разность между числом пересечений границы из Франции в Германию и из Германии во Францию? Очевидно, 0, если путешественник начал и кончил свой путь в одной и той же стране; 1 если начал во Франции, а кончил в Германии и -1 если начал в Германии и кончил во Франции. Маршрут его изображается линией подобной графику на рис. 3, причем Франция изображается областью ниже оси x, а Германия — выше.

Теперь рассмотрим два многочлена — f и g, про которые предположим, во-первых, что они не имеют общих корней, а во-вторых, что первый из них (то есть, $f(x)$) не обращается в 0 при $x = a$ или $x = b$. *Характеристикой многочлена* f *по отношению к* g *на отрезке* $[a, b]$ называется разность между числом корней многочлена f, содержащихся в отрезке $[a, b]$ и являющихся корнями с возрастанием для многочлена fg, и числом его корней в этом отрезке, являющихся корнями с убыванием для fg. Характеристика обозначается через $(f, g)_a^b$.

Главный пример, ради которого и вводится понятие характеристики, дается утверждением:

Теорема 1. *Если многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней и ни он, ни его производная $f'(x)$ не обращаются в 0 в концах a и b отрезка $[a, b]$, то характеристика $(f, f')_a^b$ равна числу корней многочлена f, содержащихся в отрезке $[a, b]$.*

Теорема является простым следствием теоремы 4 §3. Мы просто утверждаем, что все корни многочлена $f(x)$ являются корнями с возрастанием для многочлена (ff'), тогда теорема следует из определения характеристики. Действительно, согласно теореме 5 гл. II, многочлены f и f' не имеют общих корней. Если α — корень многочлена $f(x)$ и $f'(\alpha) > 0$, то согласно теореме 4 §3 α является корнем с возрастанием для $f(x)$, а так как $f'(x) > 0$ вблизи α то и для $f(x)f'(x)$. Если же $f'(\alpha) < 0$, то α является корнем с убыванием для $f(x)$, а так как $f'(x) < 0$ вблизи α , то опять корнем с возрастанием для $f(x)f'(x)$.

Характеристика $(f, g)_a^b$ — это как раз такое выражение, которое можно вычислить путем деления с остатком. Сначала отметим его простые свойства:

а) $(f, -g) = -(f, g)$

Это очевидно, так как при умножении многочлена g на -1 корни с возрастанием и корни с убыванием многочлена fg меняются местами.

б) Если $g(a) \neq 0$ и $g(b) \neq 0$, то $(f, g)_a^b + (g, f)_a^b = [fg]_a^b$.

Это тоже очевидно, так как по условию многочлены f и g не имеют общих корней. Поэтому корни многочлена fg разбиваются на корни многочлена f и многочлена g. Число корней с возрастанием (и точно так же с убыванием) многочлена fg равно сумме числа таких же корней многочлена f и многочлена g, что и дает равенство б).

в) Если многочлены g и h принимают одинаковые значения в корнях многочлена f (то есть $g(\alpha) = h(\alpha)$ при $f(\alpha) = 0$), то

$$(f, g)_a^b = (f, h)_a^b$$

Действительно, если $g(\alpha) = h(\alpha)$, то корень α многочлена $f(x)$ одновременно является корнем с возрастанием для многочленов fg и fh и точно так же одновременно – корнем с убыванием.

г) Если многочлен f делится на многочлен g, то

$$(f, g)_a^b = [fg]_a^b$$

Действительно, многочлен g не имеет корней, так как его корни были бы общими корнями многочленов f и g. Поэтому $(g, f)_a^b = 0$ из свойства б) следует, что $(f, g)_a^b = [fg]_a^b$

Теперь опишем процесс вычисления характеристики $(f, g)_a^b$. Разделим f с остатком на g:

$$f = gq + r \tag{2}$$

Согласно свойству б) мы имеем: $(f,g)_a^b = -(g,f)_a^b + [fg]_a^b$. С другой стороны из соотношения (2) вытекает, что $f(\alpha) = r(\alpha)$ при $g(\alpha) = 0$. Поэтому согласно свойству в) мы получаем, что $(f,g)_a^b = (g,r)_a^b$. Вместе полученные равенства показывают, что

$$(f,g)_a^b = -(g,r)_a^b + [fg]_a^b \tag{3}$$

Собственно, соотношение (3) решает нашу задачу, так как сводит вычисление характеристики $(f,g)_a^b$ к вычислению характеристики $(g,r)_a^b$ для многочленов g и r меньшей степени, поскольку выражение $[fg]_a^b$ определяется по значениям многочленов f и g в концах a и b отрезка $[a,b]$ (см. таблицу 1).

Наш процесс перехода от пары (f,g) к паре многочленов меньшей степени — тот же, что и при отыскании общего наибольшего делителя многочленов f и g. В этом случае характеристика определяется свойством г).

Мы еще усовершенствуем наш результат в двух направлениях. Во-первых, представим в единообразной красивой форме окончательный ответ, который получится, если перейти от пары (f,g) к (g,r), потом выполнить следующее деление и так пройти все шаги алгоритма Евклида. Во-вторых, наш индуктивный тип рассуждения требует, чтобы условия, наложенные на многочлен f и g ($f(a) \neq 0,\ f(b) \neq 0$) потом накладывались на многочлен g, r и т. д. Мы покажем, как можно легко избавиться от этих дополнительных ограничений.

Прежде всего несколько преобразуем полученный ответ (формулу (3)). Начнем с того, что изменим обозначения. Многочлен f обозначим через f_1, g — через f_2 а $-r$ — через f_3. Ввиду свойства а) характеристики формула (3) приобретает вид:

$$(f_1,f_2)_a^b = (f_2,f_3)_a^b + [f_1f_2]_a^b, \tag{4}$$

а формула деления с остатком (формула (2)) — вид

$$f_1 = f_2q_1 - f_3$$

(мы обозначили q через q_1). Теперь ясно как последовательно применять формулу (4), понижая степень рассматриваемых многочленов. Начиная с f_1 и f_2 определяем многочлены f_i по индукции, полагая

$$f_{i-1} = f_iq_{i-1} - f_{i+1} \tag{5}$$

где степень f_{i+1} меньше, чем степень f_i (считая, что f_{i-1} и f_i уже определены). Ясно, что f_{i-1} — это те же многочлены, которые получаются как остатки в алгоритме Евклида, только с измененными знаками. Через несколько шагов мы дойдем до многочлена f_k, совпадающего, с точностью до знака, с НОД(f_1,f_2).

Применяя формулу (4) к f_2 и f_3 вместо f_1 и f_2, мы получим, что $(f_2,f_3)_a^b = (f_3,f_4)_a^b + [f_2f_3]_a^b$. Подставляя это значение для $(f_2,f_3)_a^b$ в формулу (4), получим

$$(f_1,f_2)_a^b = (f_3,f_4)_a^b + [f_1f_2]_a^b + [f_2f_3]_a^b.$$

Продолжим этот процесс k раз и заметим, что $[f_k \cdot f_{k+1}]_a^b = 0$. В результате получим:

$$(f_1,f_2)_a^b = [f_1f_2]_a^b + [f_2f_3]_a^b + \cdots + [f_{k-1}f_k]_a^b \tag{6}$$

Заметим, однако, что для того, чтобы иметь право применять формулу (4), мы должны теперь предполагать, что $f_i(a) \neq 0$, $f_i(b) \neq 0$ для всех $i = 1, 2, ..., k$.

Рассмотрим внимательнее выражение $[fg]_a^b$, которое может быть вычислено на основании таблицы 1 при $F = fg$. Ее в нашем случае можно переписать так:

$$[fg]_a^b = \begin{cases} 0 & \text{если } f(a) \text{ и } g(a) \text{ одного знака, а } f(b) \text{ и } g(b) \text{ тоже одного знака или} \\ & f(a) \text{ и } g(a) \text{ разных знаков, а } f(b) \text{ и } g(b) \text{ разных знаков} \\ 1 & \text{если } f(a) \text{ и } g(a) \text{ разных знаков, а } f(b) \text{ и } g(b) \text{ —одного} \\ -1 & \text{если } f(a) \text{ и } g(a) \text{ одного знака, а } f(b) \text{ и } g(b) \text{ —разных} \end{cases}$$

Таблица 2.

Если даны два отличных от 0 числа A и B, то говорят, что в паре (A, B) есть одна перемена знака, если A и B разных знаков и нет перемены знака, если они одного знака. Пользуясь этим термином, можно иначе сформулировать информацию таблицы 2, обозначив через n число перемен знака в паре $(f(a), f(b))$, а через m число перемен знака в паре $(f(b), g(b))$. Таблица 2 приобретает тогда вид:

$[fg]_a^b$	m	n
0	0	0
0	1	1
1	1	0
−1	0	1

Мы видим, что во всех случаях $[fg]_a^b = m - n$.

Теперь применим это замечание к формуле (6). Обозначим через m_i число перемен знаков в паре $[f_i(a), f_{i+1}(a)]$, а через n_i — число перемен знака в паре $[f_i(b), f_{i+1}(b)]$. Формула (6) вследствие сделанного замечания приобретет вид

$$(f_1, f_2)_f^b = m_1 - n_1 + m_2 - n_2 + \cdots + m_k - n_k \tag{7}$$

Каков смысл числа $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$? Надо просто написать подряд числа $f_1(a)$, $f_2(a)$, ..., $f_k(a)$ и посмотреть сколько раз рядом стоят числа разных знаков — это и будет $m_1 + \cdots + m_k$. Вообще, если дана последовательность отличных от 0 чисел $A_1, ..., A_k$, то ***числом перемен знака*** в ней называется число мест, где рядом стоят числа разных знаков. Например, в последовательности 1, −1, 2, 1, 3, −2 имеется 3 перемены знаков. Мы можем сказать, что $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ — это число перемен знаков в последовательности $f_1(a)$, $f_2(a)$, ..., $f_k(a)$, а $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ — в последовательности $f_1(b)$, $f_2(b)$, ..., $f_k(b)$. Можно теперь придать формуле (7) следующий вид:

Теорема 2. *Если ни один из многочленов ряда Штурма $f_1, ..., f_k$ для многочленов f_1, f_2 не обращается в 0 ни в a, ни в b, и многочлены f_1, f_2 не имеют общих корней, то характеристика $(f, g)_a^b$ равна разности между числом перемен знака в последовательности значений многочленов ряда Штурма в a и в b.*

Нам остается избавится от ограничения $f_i(a) \neq 0$, $f_i(b) \neq 0$ для $i = 1, ..., k$, которое может быть неудобным в приложениях: мы будем предполагать только, что $f_1(a) \neq 0$ и $f_1(b) \neq 0$. Для этого надо несколько обобщить понятие числа перемен знаков. Если в последовательности $A_1, .., A_k$ некоторые числа равны 0, то числом перемен знаков в ней мы будем называть число перемен знака в последовательности, полученной вычеркиванием всех нулей. Например, вычеркивая нули в последовательности 1, 0, 2, −1, 0, 3, 1, мы получим последовательность 1, 2, −1, 3, 1, имеющую две перемены знака. Следовательно исходная последовательность имела 2 перемены знака (по определению).

Обозначим через ε расстояние от a до ближайшего корня (отличного от a) какого-либо многочлена $f_i(x)$. Таким образом, $f_i(x) \neq 0$ при $a < x < a+\varepsilon$. Выберем любое такое значение a', $a < a' < a+\varepsilon$. Аналогично выберем значение b'. Докажем лемму:

Лемма. Число перемен знаков в последовательности $f_1(a), ..., f_k(a)$ равно числу перемен знака в последовательности $f_1(a'), ..., f_k(a')$. То же верно при замене a на b и a' на b'.

Сначала убедимся, что лемма действительно дает возможность распространять теорему 2 на произвольные многочлены f_1, f_2 при единственном условии, что $f_1(a) \neq 0$ и $f_1(b) \neq 0$ и f_1 и f_2 не имеют общих корней.

Действительно, по условию многочлен f_1 не имеет корней в отрезках $[a, a']$ и $[b, b']$. Поэтому, все его корни, содержащиеся в отрезках $[a, b]$, содержатся уже в интервале $[a', b']$. Отсюда $(f_1, f_2)_a^b = (f_1, f_2)_{a'}^{b'}$. К характеристике $(f_1, f_2)_a^{b'}$ мы уже можем применить теорему 2. Число перемен знаков в последовательности $f_1(a'), ..., f_k(a')$ и в последовательности $f_1(b'), ..., f_k(b')$ определяется леммой. Отсюда получаем желаемый результат:

Теорема 3. *Если многочлены f_1 и f_2 не имеют общих корней, $f_1(a) \neq 0$ и $f_1(b) \neq 0$, то характеристика $(f_1, f_2)_a^b$ равна разности между числом перемен знаков в последовательности $f_1(a), ..., f_k(a)$ и в последовательности $f_1(b), ..., f_k(b)$, где $f_1(x), ..., f_k(x)$ — ряд Штурма, соответствующий паре многочленов f_1, f_2.*

Теперь убедимся в справедливости леммы. Рассмотрим, например, значение $x = a$. Предположим, что $f_i(a) = 0$ для некоторого $i = 1, ..., k$. По условию $i \neq 1$, так как $f_1(a) \neq 0$. Точно так же $i \neq k$, так как многочлен $f_k(x)$ с точностью до знака совпадает с НОД(f_1, f_2) и значит совпадает с отличным от нуля числом. Заметим, что тогда $f_{i-1}(a) \neq 0$ и $f_{i+1}(a) \neq 0$. Действительно, если бы мы имели, например, $f_i(a) = 0$, $f_{i+1}(a) = 0$, то из формулы (5) следовало бы, что $f_{i-1}(a) = 0$. Отсюда, точно так же мы получим $f_{i-2}(a) = 0$ и т.д. вплоть до $f_1(a) = 0$ — что противоречит предположению. Но мы можем сказать и больше — числа $f_{i-1}(a)$ и $f_{i+1}(a)$ не только отличны от 0, но имеют противоположные знаки — это сразу следует из подстановки $x = a$ в равенство (5) ввиду предположения $f_i(a) = 0$.

Сравним теперь последовательности $f_1(a), ..., f_k(a)$ и $f_1(a'), ..., f_k(a')$. Пусть $f_i(a) = 0$. Тогда, как мы видели, $f_{i-1}(a) \neq 0$ и $f_{i+1}(a) \neq 0$, причем $f_{i-1}(a)$ и $f_{i+1}(a)$ имеют разные знаки. Но тогда $f_{i-1}(a') \neq 0$ и $f_{i+1}(a') \neq 0$, причем $f_{i-1}(a')$ имеет тот же знак, что и $f_{i-1}(a)$, а $f_{i+1}(a')$ — тот же знак, что и $f_{i+1}(a)$. Это следует из того, что в отрезке $[a, a']$ многочлены f_{i-1} и f_{i+1} не имеют корней и поэтому (ввиду теоремы Больцано) не могут принимать значения разных знаков. Выпишем соответствующие части наших последовательностей. Предположим, что $f_{i-1}(a) >$

0. Тогда на основании сказанного выше мы получаем таблицу

	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$
$x = a$	$+$	0	$-$
$x = a'$	$+$	?	$-$

Характеристика $(f_1, f_2)_{a'}^{b'}$ зависит от числа перемен знака в нижней строке. Но мы видим, что оно совпадает с числом перемен знаков в верхней строке. Каков бы ни был неизвестный знак, обозначенный через ? , и вверху, и внизу будет одна перемена знака. Случай $f_{i-1}(a) < 0$ рассматривается точно также. Тем самым лемма доказана.

Соединяя теорему 3 и теорему 1, мы получаем основной результат:

Теорема 4 (теорема Штурма). *Если многочлен $f(x)$ не имеет кратных корней и не обращается в 0 при $x = a$ и $x = b$, то число его корней в отрезке $[a, b]$ равно разности между числом перемен знака значений многочленов ряда Штурма, составленных для многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ при $x = a$ и $x = b$.*

Нужно только заметить, что отсутствие кратных корней многочлена $f(x)$ равносильно отсутствию общих корней у многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ — это утверждает теорема 5 гл. II. Поэтому мы можем применить к многочлену $f(x)$ теорему 1, а потом к паре многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ — теорему 3.

Теорема Штурма дает возможность ответить на основные вопросы о расположении корней многочлена. Прежде всего, при ее помощи можно определить число корней многочлена. Для этого надо только вспомнить теорему 3 §3, которая указывает такое число N, что корни многочлена лежат между $-N$ и N. После этого достаточно применить теорему Штурма к отрезку $[-N, N]$. Однако, замечательно, что для определения числа корней нам нет необходимости ни вычислять само число N (применяя теорему 3), ни вычислять значения многочленов ряда Штурма при $x = -N$ и $x = N$. Действительно, для применения теоремы Штурма надо знать не сами значения $f_i(\pm N)$, а только их *знаки*. для этого выберем число N настолько большим, чтобы отрезок $[-N, N]$ содержал не только все корни многочлена $f_1(x)$, но и все корни всех многочленов ряда Штурма $f_i(x)$ (То есть, выберем соответствующее число N_i для каждого многочлена $f_i(x)$ и возьмем за N наибольшее из них). Согласно следствию 1 теоремы 3 §3 знак значения $f_i(N)$ или $f_i(-N)$ совпадает со знаком значения старшего члена многочлена $f_i(x)$ при $x = N$ и $x = -N$. Они определяются знаком коэффициента при старшем члене многочлена $f_i(x)$ и четностью его степени. Поэтому нам нет нужды вычислять N и значения $f_i(N)$ и $f_i(-N)$.

Когда число корней определено, то можно указать отрезки, в каждом из которых содержится ровно один корень. Для этого надо уже действительно вычислять число N, указанное в теореме 3 §3. После этого разделить отрезок $[-N, N]$ пополам и пользуясь теоремой Штурма, определить число корней в каждой половине. Потом поступить так с отрезками $[-N, 0]$ и $[0, N]$ и продолжать делить их пополам, пока не получим отрезки, в каждом из которых содержится только один корень.

Если известно, что в отрезке $[a, b]$ содержится один корень многочлена $f(x)$ и многочлен не имеет кратных корней, то значения $f(a)$ и $f(b)$ должны быть противоположных знаков. Действительно. если корень равен α, то согласно теореме 4

§3 при достаточно малом ε значения $f(\alpha-\varepsilon)$ и $f(\alpha+\varepsilon)$ имеют разные знаки. Но $f(\alpha-\varepsilon)$ и $f(a)$ должны быть одного знака — иначе многочлен имел бы еще корень в отрезке $[a, \alpha-\varepsilon]$. То же верно и относительно значений $f(\alpha+\varepsilon)$ и $f(b)$. Таким образом, $f(a)$ имеет тот же знак, что $f(\alpha-\varepsilon)$, $f(b)$ — что $f(\alpha+\varepsilon)$, а $f(\alpha-\varepsilon)$ и $f(\alpha+\varepsilon)$ — противоположные знаки. Значит и $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки. Зная это, можно вычислить корень α с любой степенью точности. Для этого достаточно разделить отрезок $[a,b]$ на две части (например, пополам) точкой c. Вычислим значение $f(c)$. Либо $f(a)$ и $f(c)$, либо $f(c)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки. В первом случае α содержится в отрезке $[a,c]$, во втором — в отрезке $[c,b]$. Потом поступаем так же с тем отрезком, в котором содержится α и так поступаем до тех пор, пока не заключим α в отрезок сколь угодно малой длины. Это и значит, что мы вычислили его со сколь угодно большой точностью.

Рассмотрим, например, многочлен $f(x)=x^3+3x-1$. Применяя выведенный в §3 признак, мы должны составить выражение $4a^3+27b^2=4\cdot 27+27$. Так как оно положительно, многочлен имеет один корень. Применив теорему 3 §3, мы определим из данных там формул значение $N=3$. Поэтому корень расположен между -3 и 3, причем $f(-3)<0$, $f(3)>0$. Поскольку $f(0)<0$, то корень расположен между 0 и 3. Так как $f(1)=3$ и $f(2)=13$, то корень расположен между 0 и 1. Чтобы найти его первый десятичный знак, надо узнать в каком из десяти отрезков (между 0 и 1/10, 1/10 и 2/10... 9/10 и 1) он содержится. Положим сначала $x=1/2$, тогда $f(x)=5/8$. Так как $f(0)$ и $f(1/2)$ разных знаков, то корень содержится между 0 и 1/2. Положим теперь $x=3/10$. Так как $f(3/10)=\frac{27}{1000}+\frac{9}{10}-1=\frac{27}{1000}-\frac{1}{10}<0$, то корень содержится между 3/10 и 5/10. Наконец, $f(4/10)=\frac{64}{1000}+\frac{12}{10}-1>0$. Значит корень лежит между 3/10 и 4/10 и имеет вид $\alpha=0,3\ldots$.

Ввиду большого числа применений теоремы Штурма и изящества ее формулировки, она стала очень известной сразу после того, как была доказана. Доказавший ее французский математик Штурм, когда рассказывал ее в своих лекциях, говорил: "теперь я докажу теорему, имя которой имею честь носить."

Задачи.

1. Постройте ряд Штурма для многочленов $f(x)$ и $f'(x)$, если $f(x)=x^2+ax+b$ или $f(x)=x^3+ax+b$. Используя теорему Штурма, выведите заново результаты о числе корней этих многочленов, полученные в конце §3. Указание. Для случая $f(x)=x^3+ax+b$ рассмотреть отдельно все случаи, когда число a и $D=4a^3+27b^2$ имеет те или иные знаки.

2. Определите, используя теорему Штурма, число корней многочлена x^n+ax+b в зависимости от n (играет роль его четность), a и b.

3. Найдите число корней многочлена $x^5-5ax^3+5a^2x+2b$. Указание. Ответ зависит от знака выражения a^5-b^9.

4. Пусть a — корень производной $f'(x)$ многочлена $f(x)$. Положим $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f'(x)/(x-a)$. Пусть $f(x)$ не имеет кратных корней, а $f_1(x),\ldots,f_k(x)$ — ряд Штурма для многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Выразите число корней многочлена $f(x)$ через число перемен знаков в последовательностях $f_i(N)$, $f_i(a)$ и $f_i(-N)$, $i=$

$1, \ldots, k$, где N — достаточно большое число.

5. Пусть даны два многочлена f_1 и f_2 степеней n и $n-1$ и предположим, что в построенном для них ряде Штурма степень многочлена $f_i(x)$ равна $n-i+1$, а коэффициент при x^{n-i+1} в нем положителен. Докажите, что тогда многочлен $f_1(x)$ имеет n корней. Более того, любой многочлен $f_i(x)$ имеет $n-i+1$ корней и между каждыми двумя соседними корнями многочлена $f_i(x)$ содержится корень многочлена $f_{i+1}(x)$.

6. Пусть многочлен $f(x)$ степени n имеет n корней. Докажите, что тогда в ряде Штурма (для многочленов f и f') каждый следующий многочлен имеет степень ровно на 1 меньшую предыдущего, а коэффициенты при их старших членах положительны. Докажите, что эти условия и достаточны для того, чтобы многочлен степени n имел n корней.

Математическое мышление и природа

И. Р. Шафаревич

Этот доклад был прочитан на собрании Японского Математического общества 28 сентября 1993 г. и впервые опубликован в "Commentarii mathematici universitatis" Sancti Pauli vol. 43, №1, 1994 на английском языке.

Для меня большая честь - представлять этот доклад вниманию Вашего Общества. Я сердечно благодарен за предложение прочесть его.

Вопрос, который я собираюсь обсудить, можно коротко сформулировать в виде следующих четырех предложений.

1) Человечество переживает сейчас всеобъемлюший экологический кризис. Все слышали о нем и его возможных последствиях. Исчезновение многих видов животных; уничтожение лесов, которыми дышит Планента; потепление атмосферы, которое превратит за 30 или 50 лет многие сейчас плодородные земли в пустыни и вызывающее таяние арктических льдов, так что океан может затопить многие страны: накопление радиоактивных отходов, которые будут продолжать оставаться радиоактивными еще тысячи и десятки тысяч лет, и т.д. и т.д. - все это представляет реальную угрозу живой части природы - и человеку в том числе.

2) Этот кризис не является результатом какой-то случайной, легко исправимой ошибки. Напротив, он является логическим следствием развития некоторой, очень, специфической цивилизации, распространившейся сейчас на весь мир. Она называется Технологической Цивилизацией, так как основывается на максимальном использовании техники во всех областях человеческой деятельности. Техника всегда считается более надежной и эффективной, чем Природа, и всюду вытесняет Природу, если это только возможно. Один социолог описал эту цивилизацию как попытку человека уничтожить природу, заменив ее искусственной природой - техникой.

3) Идеологической основой Технологической Цивилизации является Научная Идеология или Сциентизм. Она основана на вере в существование небольшого числа точно формулируемых законов природы; на их основе все в Природе предсказуемо и манипулируемо. Космос рассматривается как гигантская машина, которой можно управлять, если известен принцип ее функционирования. Эта научная идеология часто играет роль религии Технологической Цивилизации (как заметил еще Э.Мах).

4) Основная догма научной идеологии - это вера в математизацию. Она утверждает, что все (или, по крайней мере, все существенное) в Природе может быть измеряно, превращено в числа (или другие математические объекты) и что путем совершения над ними различных математачеких манипуляций можно предсказать и подчините своей воле все явления Природы и Общества. Кант говорил, что каждая область знания является наукой настолько, насколько в ней содержится

математика. Пуанкаре писал, что окончательная, идеальная фаза развития любой научной концепции это ее математизация. В некотором смысле можно сказать, что мы живем в Математической Цивилизации - и, может быть, умираем вместе с нею. Ввиду сказанного выше математику естественно проявить интерес к этим взаимосвязанным явлениям.

Научная идеология имеет сейчас уже длинную историю. Еще Галлилей говорил, что "книга науки написана на языке геометрии" (геометрией тогда называли математику). Приблизительно к то же время (1605) Кеплер писал в письме своему другу: "Моя цель - показать, что небесную машину нужно сравнивать не с божественным организмом, а с часовым механизмом". Декарт сравнивал животное с машиной, а столетие спустя Ламметри с книге "Человек- машина" распространил этот принцип и на человека.

Однако, лишь ко времена Ньютона механическая концепция мира полностью покорила себе умы. Ньютон и его последователи называли его теорию "Системой Мира". Она вдохновляла не только его современников, но и многие следующие поколения. Казалось, что можно развить полную картину Природы на, основе небольшого числа законов, из которых все остальное может быть дедуцировано при помощи решения дифференциальных уравнений, разложения функций в степенные ряды и других математических процедур.

Но больше всех зачарован этой картиной был сам Ньютон. Не случайно свое главное сочинение он назвал "Математические начала натуральной философии". В конце его он прокламирует применимость тех же принципов к живым существам, чтобы и эта часть природы была включена в его "Систему Мира". Он пишет: "Теперь следовало бы кое-что добавить о некотором тончайшем эфире, проникающем все сплошные тела и в них содержащемся, коего силою (...) возбуждается всякое чувствование, заставляющее члены животных двигагься по желанию, передаваясь именно колебаниями этого эфира черта тончайшие нити нервов от внешних органов чувств мозгу и от мозга мускулам. Но это не может быть изложено кратко, к тому же нет и достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны". Очевидно, Ньютон имеет в виду механическую теорию эфира и дает понять, что лишь недостаток места и неполнота экспериментальной базы мешают ему развить механическую теорию функционирования тел животных на базе теории эфира.

В то же время стали слышны и встревоженные голоса. Задавались вопросом: остается ли к этой Механической Системе Мира место для Бога? Можно было бы даже спросить - для чего-либо живого? Вселенная выглядела как гигантская машина, функционирующая исключительно на основе механических законов. И опять, наиболее встревожен был сам Ньютон, религиозные убеждения Ньютона и до сих пор остаются несколько загадочными. Но несомненно, он был глубоко религиозном человеком. Бесспорно, противоречие между его Механической Системой Мира и его религиозными чувствами было для него очень болезненным. Он ясно выразил это в своей переписке. Когда ему было около 50 лет Ньютон пережил тяжелый нервный кризис, некоторые исследователи говорят даже о психическом заболевании. Он не мог спать по нескольку дней и ночей подряд. Его память была спутанной. Он переживал глубокую депрессию. А. Н. Лапин обратил внимание на сходство этих симптомов с симптомами кризиса, пережитого Толстым примерно в том же возрасте. Есть основания считать, что в обоих случаях мы имеем дело с кризисом мировоззрения.

Как бы то ни было, в более поздних публикациях Ньютона мы встречаем очень интересные новые идеи. Например, во втором издании "Начал" появилось знаменитое "Общее поучение", в котором мы находим такие высказывания: "Шесть главных планет обращаются вокруг Солнца приблизительно по кругам, концентрическим с Солнцем, по тому же направлению и приблизительно в той же плоскости. Десять лун обращаются вокруг Земли, Юпитера и Сатурна по концентрическим кругам, по одному направлению в плоскости орбит самих планет. Невозможно представить, что все эти правильные движения имеют началом механические причины, ибо кометы носятся во всех областях неба по весьма эксцентрическим орбитам. Вследствие движений такого рода кометы проходят через орбиты планет весьма быстро и легко, в своих же афелиях, где они движутся медленнее и остаются дольше, они весьма далеко отстоят друг от друга и весьма мало притягивают друг друга. Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти могущественного и премудрого существа". (Здесь Ньютон явно имеет в виду очень специальное взаиморасположение планет, обеспечивающее устойчивость солнечной системы, так что одни планеты не падают на Солнце, а другие не уносится в пространство.)

В "Оптике" Ньютон формулирует "вопросы" или "сомнения" (Queries), например, "Вопрос 23" (о механическом принципе): "На основании только этого принципа в мире никогда не было бы движения. Какой-то другой принцип был необходим, чтобы привести тела в движение, а сейчас, когда они движутся, необходим другой принцип для сохранения их движения". В неопубликованном "Вопросе", подготовленном для одного из изданий "Оптики", читаем: "если Вы думаете, что эта живая сила достаточна для сохранения движения, прошу указать мне эксперименты; из которых Вы делаете эти выводы. Знаете ли Вы из экспериментов, что биение сердца не придает дополнительного движения крови? и т.д. Если да, сообщите Ваши эксперименты, если нет - Ваши суждения ненадежны. Рассуждения, не основанные на экспериментах, весьма обманчивы". Очевидно, весь дух и буква этих утверждений противоречит тому, о чем можно прочесть в конце "Начал": здесь выражается сомнение в возможности объяснить деятельность, живого организма при помощи "механического принципа". Этот принцип и считается применимым лишь к неживой природе, - и даже здесь с очень значительными ограничениями. Конечно, всегда остается трудный вопрос о границе между живой и неживой природой. Здесь тоже мы встречаемся с очень оригинальными взглядами Ньютона. В неопубликованном отрывке под заглавием "О не связанных с памятью законах природы" он пишет: "Земля напоминает - громадное животное или скорее неодушевленное растение, вдыхающее эфир, подкрепляясь им ежедневно и выделяющее его мощным выдохом. И аналогично другим живым существам должна иметь свое время начала, молодости, старости и гибели".

Ньютон был в высшей степени неоднoплановым мыслителем. Его научные идеи и религиозные убеждения, видимо, не согласовывались: во всяком случае, в одном и том же его произведении можно найти противоречащие друг другу точки зрения. Но совершенно независимо от его внутреннего конфликта, его "Механическая Система Мира" оказала грандиозное влияние. Совершенно справедливо Ван дер Варден считает Ньютона, а не какого-либо короля или политического деятеля "самой значительной исторической фигурой XVII века".

Не кто иной, как Вольтер, положил начало культу Ньютона во Франции, используя его авторитет как орудие в борьбе с Церковью. Однако кульминация научной идеологии и культа Ньютона связана со школой Сен-Симона. В первой четверти XIX века Сен-Симон создал социалистическую систему, впоследствии оказавшую большое влияние на Маркса и Энгельса. Создатель философии позитивизма О.Конт был последователем и одно время секретарем Сен-Симона. Немецкий поэт Г.Гейне был страстным сен-симонистом.

Основой сен-симонизма была научная идеология. Вот несколько высказываний ведущих деятелей сен-симонизма. "Законы, управляющие человеческим обществом, столь же точны, как и те, которые управляют падением камня". "Искусство и наука должны быть созданы с математической точностью, как учат рассчитывать мосты в Школе". (Имеется виду Норманская Школа в Париже.) Сен-Симон предлагал учредить поклонение Ньютону в особых храмах. Согласно его идее, общество должно управляться "Великим Ньютонианским Советом", состоящим из лучших математиков, физиков, химиков и физиологов мира. В качестве председателя они должны избрать математика. Все провинции управляются "Малыми Ньютонианскими Советами". Интересно, что среди ближайших последователей Сен-Симона были не только будущие революционеры и социалисты, но некоторые из самых преуспевших финансистов, впоследствии основавших крупнейшие французские банки и сети железных дорог. Так что во всех отношениях сен-симонизм повлиял как на развитие социалистических учений, так и современного капитализма.

Эта смесь сциентизма с техницизмом определяет и дух современной идеологии технической цивилизации. Великий биолог XX века Конрад Лоренц писал: "Категория морали применима к некоторому действию только, если оно направлено на нечто живое. Современный человек имеет дело главным образом с искусственными объектами. В результате он отучается оценивать свои действия с точки зрения морали и судит о них лишь с точки зрения эффективности. Поэтому встречаясь с чем-то живым, он его быстро уничтожает". Современный социолог С. Рамо предлагает: "Сейчас мы должны планировать сосуществование с машинами. Мы становимся партнерами. Машины нуждаются для оптимального функционирования в некотором типе общества. Мы тоже имеем свои предпочтения. Но мы нуждаемся в том, что может дать машина и поэтому должны идти на компромисс. Мы должны так изменить законы общества, чтобы мы были совместимы". Согласно принципам идеологии Технологической Цивилизации, все жизненные явления, которые не функционируют согласно "оптимальным правилам" машин, т.е. не могут быть механизированы, считаются ненадежными и неважными. Более того, они постепенно вытесняются. Людвиг фон Барталанфи пишет: "Это (быть может, исключая атомную бомбу) является величайшим открытием нашего века: возможность редуцировать человека к автомату, "покупающему" все - от зубной пасты и Битлсов, до президентов, атомной войны и самоуничтожения". Установка, рассматривающая любую деятельность человека как чисто технологическую, разрешает нам разрушать леса, губить китов, планировать и осуществлять социологические эксперименты в масштабе целых стран. Современный социолог Мак Лейш говорит: "После Хиросимы стало ясным, что наука лояльна не по отношению к человечеству, но к истине - ее собственной истине - что закон науки не есть закон блага - но закон возможного. Что для науки возможно, то она и должна сделать".

Основная догма научной идеологии - это вера в то, что все измеримо, все может быть выражено в числах, переведено на язык математики.

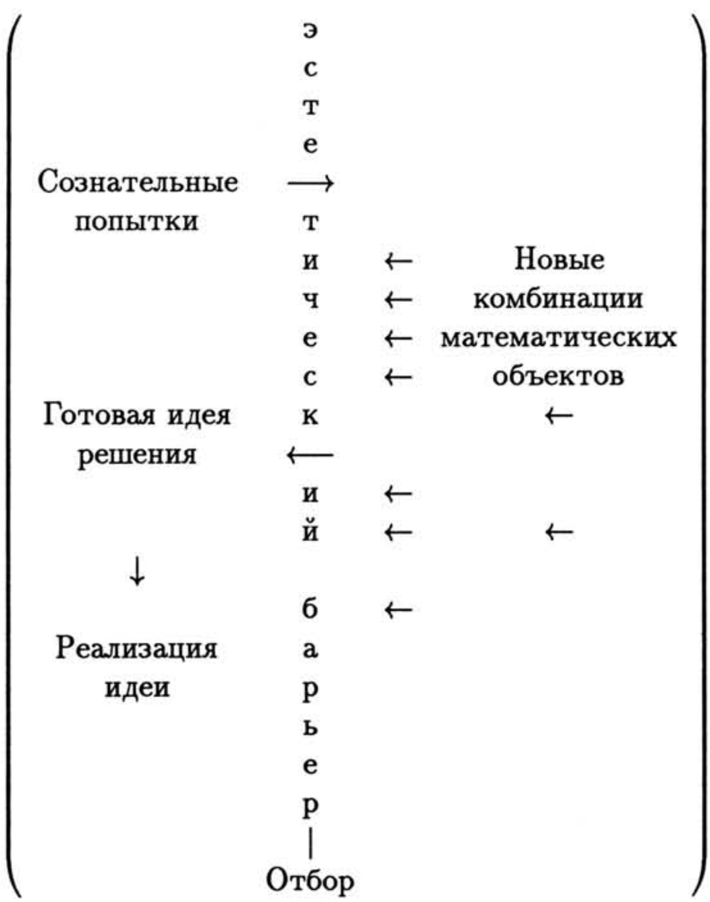
Эта вера содержится уже в призыве Галилея: "Измерить все, что измеримо, и сделать измеримым то, что неизмеримо". Особенно интересна вторая часть этой программы: как нам быть с любовью, состраданием, мужеством, нежностью? Очевидно, всем этим сторонам жизни нет места в математизированной концепции мира. В научной идеология математизация играет ту же роль, что стандартизации в технике. Простейший путь, применения математики - это счет. Но считать можно только однородные объекты. Пусть нам даны, скажем: яблоко, цветок, собака, дом, солдат, девушка, луна. Мы можем сосчитать их и сказать, что их 7 - но 7 чего? Единственный ответ - 7 предметов. Различия между собакой и луной, между яблоком и солдатом - исчезают: они все потеряли свою индивидуальность и превратились, в лишенные признаков "предметы". Счет убивает индивидуальность. Это самый примитивный пример, но во всех случаях присутствует тот же принцип. Другая особенность математики, очень существенная для научной идеологии - это ее способность трансформировать решение глубоких проблем в стандартизированные логические схемы. Например, квадрирование параболы или спирали в античности было проблемой, требующей усилий такого гениального математика как Архимед, основывалось на красивом арифметическом тождестве. Сейчас школьник старших классов может стандартным приемом вычислить $\int x^n dx$ при любом n. Более того, такое вычисление легко совершает компьютер. Возникает чувство, что вся математика может быть сведена к работе грандиозного компьютера.

Но большинство математиков несомненно согласится с тем, что их работа в принципе отличается от работы компьютера. Этот вопрос был предметом интересной дискуссии между Пуанкаре и Гильбертом в начале нашего века. Та же проблема ставилась тогда иначе: формализуема ли математика? Ответ Гильберта был: "да" - и на этом пути он надеялся получить доказательство непротиворечивости арифметики. Пуанкаре не соглашался с ним. Позже теорема неполноты Геделя по-видимому, решила вопрос в пользу Пуанкаре. Пуанкаре подчеркивает роль интуиции в математическом рассуждении. Он говорит, что математическое рассуждение имеет "род творческой силы" и тем отличается от цепи силлогизмов. Особенно он выделяет математическую индукцию; которая, по его словам, "содержит бесконечное число силлогизмов, как бы сжатое в одной формуле". Когда он говорит, что математик в принципе отличается от шахматиста, что он не может быть заменен никаким механическим устройством, то кажется, что ему лишь не хватало нужного термина, чтобы сформулировать свою мысль короче: “математик не может быть заменен компьютером”.

Особенно интересны взгляды Пуанкаре на роль эстетического чувства в математическом творчестве. Он говорит, что математическое открытие приносит чувство наслаждения, оно привлекательно как раз ввиду содержащегося в нем эстетического элемента. Коли бы математика была лишь собранием силлогизмов она была бы доступна всем - для этого была бы нужна лишь хорошая память. Но известно, что большинству людей математика дается с трудом. Пуанкаре видит причину в том, что силлогизмы складываются в математике в “структуру”, обладающую красотой. Чтобы понимать, математику, надо “увидеть” эту красоту, а это требует эстетических способностей, которыми не все обладают.

Пуанкаре предлагает очень интересную схему математического творчества. Он связывает его с делением человеческой психики на сознательную и бессознательную части (см. рисунок). Процесс начинается с сознательных усилий, направленных на решение некоторой проблемы. Эти усилия повышают активность бессознательной части психики. Там появляется множество новых комбинаций математических объектов - как бы возможных фрагментов решения. Они появляются в громадном количестве и с колоссальной скоростью. Сейчас мы могли бы сравнить эту фазу с работой грандиозного компьютера.

Сознательная психика Бессознательная психика



Но подавляющая часть этих комбинаций бесполезна для решения проблем. Они не достигают сознания, только очень небольшая их часть рассматривается сознанием. Чтобы достигнуть сознания, они проходят отбор, основанный на эстетическом принципе. Некий эстетический барьер позволяет лишь, очень небольшому их числу проникнуть в сознание. Они появляются там как готовая идея решения, причем это сопровождается очень сильным субъективным чувством уверенности в правильности идеи. Дальше остается лишь техническая работа по осуществлению найденной идеи.

Эта схема очевидно напоминает картину эволюции, основанную на мутациях и естественном отборе, и, вероятно, возникла под ее влиянием. Гораздо позже, видимо, не зная об идеях Пуанкаре, Конрад Лоренц высказал аналогичные мысли. Он рассматривает жизнь как "процесс обучения", "познавательный процесс". Он подчеркивает черты, общие обоим явлениям - мышлению и эволюции - такие, как "творческое озарение", "творческий акт", когда после долгих поисков "почти мгновенно" возникает новая идея или новый вид. Но можно эту аналогию обратить и взглянуть на эволюцию как на результат деятельности некоего гигантского интеллекта или души Природы. Концепция "anima mundi" (души Природы) возникала в различных философских и мистических учениях: у Платона, в христианстве. Когда в молодости я читал работы Пуанкаре, мне пришла в голову мысль об эволюции как процессе мышления и показалась очень привлекательной. Только много позже я узнал, что еще до Дарвина знаменитый естествоиспытатель Д.Агассиз рассматривал эволюцию как "мышление Бога". Но если продолжить эту аналогию, то насколько красивее окажется точка зрения Пуанкаре сравнительно с принятой сейчас концепцией! Решающим фактором в эволюции оказывается не "борьба за существование", а эстетический критерий. Тогда становится понятным, почему Природа порождает не только прекрасные растения и животные, но и решения проблемы адаптации видов, которые по красоте не уступают самым совершенным научным теория.

Но профессиональным математикам вряд ли нужны какие-либо аргументы в пользу важности эстетического элемента в математике: в разговорах математика в все время можно услышать: "изящное доказательство", "прекрасная статья" ... Каждый математик знает, что в его работе эстетическое чувство не только дает удовлетворение, помогающее ему и облегчающие, необходимые усилия, но и является рабочим средством, не менее важным, чем чисто логическое рассуждение. Он не будят следовать некоторой линии мыслей, так как она приводит к несимметричным, некрасивым формулам и он будет верить в некоторую гипотезу и не пожалеет сил для ее доказательства только потому, что она очень красива. С этой точки зрения математика играет противоположную анти-технологическую роль. Мы видим, как под воздействием технологической цивилизации красота все больше исчезает из нашей жизни: из живописи и музыки, из архитектуры наших городов и из окружающей нас Природы: в виде прекрасных бабочек, цветов и птиц. Математика (вместе с математической физикой) остается почти единственным островом, в котором это загадочное явление сохраняется в полной силе. Иисус спросил: "Что есть истина?" Явление красоты не менее загадочно. Очевидно, что это - одна из фундаментальных форм взаимодействия с внешним мирим, столь же существенная для большинства живых существ, как феномен истины и морали - для человека.

Один мой друг, геолог, высказал следующую мысль. Многие виды гибли из-за гипертрофированного развития признаков, первоначально очень полезных для их выживания. Например, громадная броня гигантских третичных ящеров. Для Homo Sapiens эту роль может сыграть его интеллект: способность к холодному, рациональному мышлению, не ограниченному моралью или жалостью. Математика несомненно как-то связана со способностью к такому алгоритмическому, машинообразному мышлению. С другой стороны, она глубоко связана с эстетическим чувством, которое способно служить противоядием для этой тенденции. И математик имеет свободу выбора принять участие в том или другом направлении развития человечества.

Смотря в каком пространстве...

А.Корзняков, В.Малыгина

Авторы — педагоги из г. Перми, одни из организаторов математического образования для продвинутых школьников; члены жюри различных олимпиад.

Вопрос: Скажите, рассчитанная Вами конструкция устойчива? Будет она надежно работать?
Ответ: Смотря в каком пространстве...

(Из стенограммы защиты одной диссертации.)

Встретив в школьном учебнике задачу: “Решить уравнение $(2x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = 0$”, мы, не задумываясь, выписываем ответ - множество $\{-1, 1/2\}$. И это правильный ответ, так как существует договоренность, в соответствии с которой, если это специально не оговаривается, подобная формулировка предполагает решение уравнения на множестве всех действительных чисел. Понятно, что изменение формулировки этой задачи, связанное с расширением или сужением множества, на котором рассматривается уравнение, может привести соответственно к расширению или сужению множества его решений. Так, если решать данное уравнение на множестве комплексных чисел, то множество решений будет состоять уже из четырех чисел: $\{-1, 1/2, 1/2 - i\sqrt{3}/2, 1/2 + i\sqrt{3}/2\}$; если же решать уравнение на множестве целых чисел, то корень будет один: $\{-1\}$.

Конечно, подобная зависимость множества решений уравнения от того, на каком множестве мы ищем его решения, проявится и в том случае, когда вместо алгебраических уравнений мы будем рассматривать любые другие уравнения, например, функциональные.

1. Об одном функциональном уравнении

Темь задач! Легкость прегрешений!
Груз просчетов! Но зло не в этом:
Ни одно из моих решений
Не сходилось вовек с ответом...
(И. Снегова)

Прежде всего, введем некоторые определения и обозначения. В этой статье нам придется иметь дело с множествами функций действительной переменной или, как принято писать в современной математической литературе, с функциональными пространствами. Пространство - это множество, наделенное определенной структурой. Например, в множестве можно ввести линейные операции (сложения и умножения на число); можно определить расстояние между любыми двумя элементами; можно обобщить на произвольное множество понятие сходимости и предела - при этом мы будем получать различные пространства. Нас будут интересовать, главным образом, п р о с т р а н с т в о непрерывных на R функций (обозначим его C) и пространство непрерывно дифференцируемых на R функций (обозначим его C^1). Как известно, в пространствах C и C^1 определены все арифметические операции, а также суперпозиция любых двух функций. В частности, если функция $y(x)$ - элемент пространства C (или C^1), то функция $y(2x)$ и $2y(x)$ - также элементы пространства C (соответственно, C^1). Следовательно, в пространствах C и C^1 можно рассматривать алгебраические уравнения, связывающие эти функции.

Задача 1. Решить функциональное уравнение

$$y(2x) = 2y(x) \tag{1}$$

в пространстве C^1.

Для читателей, впервые решающих функциональные уравнения, поясним постановку задачи. Требуется найти в с е функции, имеющие на множестве действительных чисел непрерывную производную и при всех $x \in R$ удовлетворяющие условию (1).

Предположим, что функция $y(x)$ является решением нашей задачи. Это означает, что при всех $x \in R$ выполняется равенство (1). Кроме того, эта функция дифференцируема на R, значит при всех $x \in R$

$$2y'(2x) = 2y'(x).$$

Сделав замену $y'(x) = u(x)$, получим:

$$u(2x) = u(x), \tag{2}$$

причем функция $u(x)$ непрерывна на R. Очевидно, любая постоянная функция $u(x) = const$ удовлетворяет уравнению (2). Покажем, что никакая другая непрерывная на R функция уравнению (2) не удовлетворяет. Действительно, если бы функция $u(x) \neq const$ существовала, то нашлось бы $x_0 \in R$, такое, что $u(x_0) \neq u(0)$. С другой стороны, в силу (2),

$$u(x_0) = u\left(\frac{x_0}{2}\right) = u\left(\frac{x_0}{4}\right) = \ldots = u\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\ldots,$$

и, учитывая, что $u(x) \in C$, имеем:

$$u(x_0) = \lim_{n\to\infty} u(x_0) = \lim_{n\to\infty} u\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = u\left(\lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{2^n}\right) = u(0).$$

Противоречие. Таким образом, $y'(x) = u(x) = u(0) = k$, а $y(x) = kx + 1$ $(k, 1 \in R)$.

При подстановке $x = 0$ в уравнение (1) получаем $y(0) = 0$, значит $y(x) = kx$, где $k \in R$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что всякая линейная функция $y = kx$ доставляет решение задаче 1.

Итак, мы доказали, что линейные функции (и только они) удовлетворяют уравнению (1). Это означает, разумеется, что никакая другая функция, скажем, $v(x) = x\ \sin(2\pi\ \log_2 |x|)$, служить решением уравнения (1) не может. Впрочем, в этом легко убедится и прямой подстановкой.

Подставляем:

$$v(2x) = 2x \cdot (2\pi\ \log_2 |2x|) = 2x \cdot \sin(2\pi + 2\pi\ \log_2 |x|) = 2v(x),$$

т.е. уравнение (1) ... обращается в тождество! Выходит, наше уравнение имеет еще одно решение?.. Как же мы его проглядели?!

2. Пришелец из другого мира (пространства)

> ... Есть еще одно правило, главное, его знает
> каждый; нарушение его - самый частый
> источник математических ошибок:
> удостоверьтесь в том, что "очевидное" - верно.
> (П. Халмош)

Отбросим эмоции и подвергнем новоявленное решение $v(x)$ детальному анализу. Прежде всего бросается в глаза, что оно не определено в точке $x = 0$, но... это беда поправимая: достаточно доопределить функцию $v(x)$, положив $v(0) = 0$, как того требует уравнение (1).

Упражнение 1. Докажите, что функция

$$v_0(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(2\pi\ \log_2 |x|, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на R.

В чем же дело? Вернемся еще раз к задаче 1: мы искали решение уравнения (1) в пространстве C^1, т.е. в пространстве непрерывно дифференцируемых на R функций. А имеет ли функция $v_0(x)$ непрерывную производную? Проверим: при $x > 0$

$$v_0(x) = \sin(2\pi\ \log_2 x) + \frac{2\pi}{\ln 2} \cos(2\pi \log_2 x).$$

Положим $x_n = (\sqrt{2})^{-n}$, $n \in N$; тогда $v_0'(x_n) = \frac{2\pi}{\ln 2}(-1)^n$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, в то время как последовательность $\nu_0(x_n)$ расходящаяся. Значит, $v_0'(+0)$ не существует! Теперь все ясно: функция $v_0(x)$ не является решением задачи 1 (хотя и удовлетворяет уравнению (1)!); она - "пришелец" из других, более широких, чем C^1 пространств. Каких? В процессе исследования мы уже выяснили это: результат упражнения 1 показывает, что $\dot{v_0}(x) \in C$. Впрочем, это не единственное расширение пространства C^1; $v_0(x)$ принадлежит, например, пространству непрерывно дифференцируемых на множестве $R \setminus \{0\}$ функций (интересно, что выбрасывание одной- единственной точки из области определения приводит к столь серьезным последствиям!).

3. Горизонты расширяются

Будь начеку: если видишь одну идею,
посмотри - нет ли в ней еще чего-нибудь.
(Р. Годдард)

Теперь, когда наше решение задачи 1 успешно защищено, а "постороннее" решение поставлено на место, функция $v(x)$ начинает вызывать любопытство: откуда она взялась? Вряд ли была случайно угадана... Скорей всего, для уравнения (1) есть полное описание решений и в более широких пространствах. Если так, то свойства уравнения (1) еще отнюдь не исчерпаны, и его исследование может быть продолжено.

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в пространстве С.
Изменение множества, на котором мы рассматриваем уравнение (1), вынуждает нас изменить и метод, с помощью которого мы будем искать множество его решений. Объясняется это тем, что не всякая непрерывная функция имеет производную, поэтому переход от уравнения (1) к соответствующему уравнению (2) для производных, приведший нас к успеху при решении задачи 1, в данном случае невозможен. Нужно искать другие пути.

Пусть $x > 0$. Сделаем замену $x = 2^t$ и обозначим $v(t) = y(2^t)$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$v(t+1) = 2v(t),\ t \in R.$$

Сделав еще одну замену $v(t) = 2^t p(t)$, получим

$$2^{t+1}p(t+1) = 2 \cdot 2^t p(t),$$

или

$$p(t+1) = p(t). \tag{3}$$

Выполнение условия (3) означает, что $p(t)$ - периодическая функция с периодом 1 (так называемая 1-периодическая функция).

Таким образом, любое решение задачи 2 при $x > 0$ представимо в виде $y(x) = xp(\log_2 x)$, где $p(t) \in C$ - произвольная 1-периодическая функция. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при $x > 0$ любая из этих функций обращает уравнение (1) в тождество.

Упражнение 2. Покажите, что при $x < 0$ любое решение задачи имеет вид: $y(x) = xp(\log_2(-x))$, где $p(t) \in C$ - произвольная 1-периодическая функция.

Далее, из уравнения (1) следует, что для любого решения задачи 2 $y(0) = 0$. Если мы сейчас покажем, что функция

$$y(x) = \begin{cases} xp_1(log_2(-x)), & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ xp_2(log_2 x), & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

(p_1, p_2 - произвольные непрерывные на R, 1-периодические функции) непрерывна в точке $x = 0$, то она и будет давать общий вид всех решений уравнения (1) в пространстве C.

Так как $p_1(t)$ и $p_2(t)$ - непрерывные 1-периодические функции, то они ограничены на всей оси (подумайте, почему?). Следовательно,

$$\lim_{x\to -0}(xp_1(\log_2(-x))) = \lim_{x\to +0}(xp_2(\log_2 x)) = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y(x)$ в точке $x = 0$.

Упражнение 3 (провокационное). Сделаем в уравнении (1) замену $y(x) = x\cdot\varphi(x)$. Тогда для функции $\varphi(x)$ имеем уравнение $\varphi(2x) = \varphi(x)$, которое, как показано при разборе задачи 1, в пространстве C имеет решением только константы, т.е. $\varphi(x) \equiv k$. Значит, в пространстве C общим решением уравнения (1) является функция $y(x) = kx$, что находится в полном противоречии с результатом задачи 2. Где ошибка?

4. Новый взгляд на вещи

...Когда ищешь форму ясного описания того или иного вопроса, часто приходят новые идеи.

(П. Капица)

Попробуем взглянуть на результаты пп.1-3 с несколько иной точки зрения. Мы доказали, что в пространстве C^1 решениями уравнения (1) являются лишь линейные функции. Следовательно, в пространстве C^1 уравнение (1) полностью задает линейную функцию и может быть принято за ее определение. Далее, в п.3 установлено, что в пространстве C соотношение (1) уже не является определяющим для линейной функции. Зададимся вопросом: а нельзя ли определить линейную функцию в C посредством нескольких условий вида (1)?

Задача 3. Решить в пространстве C систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} y(2x) = 2y(x), \\ y(3x) = 3y(x). \end{cases} \tag{4}$$

На интервале $(0,\infty)$ (или $(-\infty,0)$) заменой переменных $x = 2^t$, $y(2^t) = 2^t v(t)$ сведем систему (4) к системе

$$\begin{cases} v(t+1) = v(t), \\ v(t+\log_2 3) = v(t). \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим множество $\{M = m + n\log_2 3 \mid m,n \in Z\}$. Это множество обладает удивительным свойством: в любой, сколь угодно малой окрестности произвольного действительного числа содержится бесконечно много элементов множества M. Такие множества математики называют всюду плотными.

Докажем, что множество M всюду плотно.

Для этого нам достаточно показать, что для любого $x_0 \in R$ и любого сколь угодно малого положительного ε интервал $(x_0\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ содержит хотя бы один элемент множества M (объясните, почему?). Разобьем отрезок $[0,1]$ на $k = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ равных частей. Каждый из получившихся отрезков имеет длину. $\delta = \frac{1}{k} < \varepsilon$. Для любого целого n существует такое целое m, что число $m + n\log_2 3$ лежит на отрезке [0,1] (достаточно положить $m = -[n\log_2 3]$). Так как целых чисел бесконечно много, а отрезков, на которые мы разбили [0,1], конечное число, то найдется такой отрезок длины δ, которому принадлежат два элемента множества M: $m_1 + n_1\log_2 3$ и $n_2\log_2 3$. Тогда число

$$a = |(m_1 - m_2) + (n_1 - n_2)\log_2 3|$$

является элементом множества M и лежит на отрезке $[0, \delta]$. Кроме того, так как число $\log_2 3$ -иррациональное (докажите!), то число a лежит внутри отрезка $[0, \delta]$ (докажите!). Число

$$b = a\left[\frac{x_0}{a}\right] = a\left(\frac{x_0}{a} - \left\{\frac{x_0}{a}\right\}\right) = x_0 - a\left\{\frac{x_0}{a}\right\}$$

также принадлежит множеству M, причем

$$x_0 - \delta < b \leq x_0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что доказательство пройдет для любого множества $M = m + n\alpha \mid m, n \in Z$ произвольное иррациональное число. Этот факт известен в математике как теорема Кронекера.

Покажем теперь, что $v(t) = v(0) = const$. Ясно, что $0 \in M$, следовательно, при любом $t \in M$ $v(t) = v(0)$ (подумайте, почему?). Пусть теперь $t_0 \notin M$. По определению всюду плотного множества в любой окрестности точки t_0 вида $(t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n})$ найдется точка $t_n \in M$. Так как $|t_n - t_0| < \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$; но функция $v(t)$ - непрерывна, следовательно $v(0) = \lim\limits_{n\to\infty} v(0) = \lim\limits_{n\to\infty} v(t_n) = v(t_0)$, что и требовалось доказать. Возвращаясь к исходной функции $y(x)$ получаем:

$$y(x) = \begin{cases} k_1 x, & \text{если } x \geq 0 \\ k_2 x, & \text{если } x < 0 \end{cases}, k_1, k_2 \in R$$

Эти функции при любых действительных k_1 и k_2 являются решением задачи 3.

Упражнение 4. Доказать, что если в системе (4) второе уравнение заменить на уравнение $y(-3x) = -3y(x)$, то решением задачи 3 будут только функции $y(x) = kx$, $k \in R$.

Сравнение полученных при решении задач 1 и 3 результатов позволяет сделать следующий вывод: в пространстве C^1 линейную функцию определяет одно уравнение вида (1), в пространстве C таких уравнений требуется два (например, с коэффициентами 2 и -3).

Что произойдет, если продолжить расширение класса функций, например, рассмотреть пространство всех функций, заданных на R? Понятно, что в это пространство, наряду с непрерывными, войдут функции, имеющие сколь угодно много точек разрыва. В этом пространстве двух уравнений типа (4) будет явно недостаточно для определения линейной функции. В самом деле, функция

$$v(t) = \begin{cases} C_1, & \text{если } t \in M, \\ C, & \text{если } t \notin M, \end{cases} \qquad (6)$$

где C_1, C_2 - любые действительные числа, есть решение системы (5).

Упражнение 5. Покажите, что верно и обратное, то есть любая функция, удовлетворяющая системе (5), имеет вид(6).

Отсюда получаем целый класс функций $y(x)$ - решений системы (4) - разрывных и далеко не линейных.

Ситуация не изменится, даже если потребовать, чтобы равенство $y(nx) = ny(x)$ выполнялось для всех $n \in Z$. Нетрудно убедиться (убедитесь!), что тогда $y(rx) = ry(x)$ для любого $r \in Q$. В этом случае множество M сильно увеличится, но останется счетным (следовательно, не совпадающим с R), и всюду плотным. Значит, по-прежнему у системы (4) будет семейство решений описанного в предыдущем абзаце вида.

И только если потребовать, чтобы равенство $y(ax) = ay(x)$ выполнялось для любого $a \in R$, то, положив в нем $x = 1$, получим $y(a) = ay(1) = ka$, то есть только линейные функции.

5. Задачи.

...Очень советуем всем решать задачи. Ни для кого не секрет, что математику учат, решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие.

М.Рид, Б.Саймон

1. Найти решение уравнения $y(x^2) = y^2(x)$ в пространстве C^1; в пространстве C.

2. Решить систему функциональных уравнений
$$\begin{cases} y(ax) = ay(x), \\ y(bx) = by(x). \end{cases} \qquad (7)$$
в пространстве C. Найти необходимое и достаточное условия, которым должны удовлетворять числа a и b, чтобы система (7) определяла в C только линейные функции.

3. Решить в пространстве C уравнение $y(x + \frac{1}{n}) = y(x) + y(\frac{1}{n})$ при любом $n \in N$

4. Докажите, что любое решение системы (4) в пространстве всех функций, заданных на R, непрерывно в точке $x = 0$.

5. Найдите все решения системы (4) в пространстве функций, заданных на R, и непрерывных хотя бы в одной точке $x \neq 0$.

6. Попробуйте дать полное описание решений уравнения (1) в пространстве всех функций, заданных на R.

Contents

S. M. Nickolsky. In Memory of L. S. Pontryagin 3

From Memoirs of A. I. Pontryagina 7

Interview with Academician Pontryagin 15

L. S. Pontryagin. Ethics and Arithmetic 19

L. S. Pontryagin. My Gratitude to History of Mathematics 22

I. Shafarevich. Selected Themes of Algebra, Chapter V 31

I. Shafarevich. Mathermatical Reasoning versus Nature 67

A. Korznyakov, V. Malygina. That Depends on Space 75