Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год второй

№ 3-4 (6-7)

Июль- Декабрь 1998 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 3-4 (6-7), 1998 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 3-4 (6-7), июль – декабрь 1998 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1998 г.
“Математическое образование”, периодическое издание
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97
Подписано к печати 02.02.99. Корректура: С. И. Комаров
Объем 11 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Учебное пособие в журнале

Избранные главы алгебры (окончание)

И. Р. Шафаревич

В российском (и ранее советском) математическом образовании существует замечательная традиция: крупные ученые, внесшие существенный вклад в развитие математики, создают произведения, рассчитанные на школьников, заинтересованных этой наукой. Мы завершаем публикацию журнального варианта "Избранных глав алгебры", написанных выдающимся русским математиком академиком РАН И. Р. Шафаревичем. Надеемся, что материал заинтересует старших школьников и учителей, работающих по углубленной программе. Главы I, II, III, IV, V были опубликованы соответственно в первом, втором и третьем номерах журнала за 1997 год и первом и втором номерах за 1998 год.

Глава VI. Бесконечные множества

§1. Равномощность

В этой главе мы займемся бесконечными множествами. При этом естественно появляются "бесконечные" обобщения некоторых понятий, которые мы вводили в главе III. Например, пусть $M_1, M_2, M_3, \ldots$ — бесконечная система подмножеств некоторого множества M. Подмножество M' множества M , состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из подмножеств M_i мы будем по прежнему называть *объединением* этих подмножеств и обозначать тем же знаком: $M' = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$. Короче это записывается так:

$$M' = \bigcup_{n \geq 1} M_n.$$

Например, если M — множество всех натуральных чисел, а M_n состоит из чисел k, для которых $k \leq 2^n$, то $\bigcup\limits_{n \geq 1} M_n = M$.

Точно так же, если $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ — бесконечная система подмножеств некоторого множества M, то его элементы, общие всем подмножествам M_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют их *пересечение* . Оно обозначается как $M_1 \cap M_2 \cap \ldots$ или $\bigcap\limits_{n \geq 1} M_n$. Например, если M — множество натуральных чисел и M_n — подмножество чисел, делящихся на n, то $\bigcap\limits_{n \geq 1} M_n$ пусто.

Если множества M_i попарно не имеют общих элементов (то есть $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то их объединение называется *суммой* и обозначается как $M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$. Например, если M есть множество натуральных чисел, а M_n состоит из чисел k, для которых $2^{n-1} < k \leq 2^n$, то $M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$.

При рассмотрении бесконечных множеств мы сразу сталкиваемся с тем, что отсутствует то основное понятие, при помощи которого формулировались все вопросы и утверждения в гл. III: понятие числа элементов множества. Однако в гл. III мы установили принцип, выражающий *равномощность* двух конечных множеств (то есть то, что они имеют одинаковое число элементов) другим способом: *два конечные множества равномощны тогда и только тогда, когда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.* Из двух понятий: число элементов множества и взаимно однозначное соответствие — первое к бесконечным множествам не применимо, а второе — вполне применимо. Поэтому мы можем превратить высказанный выше принцип в определение равномощности двух множеств, имеющее смысл для совершенно произвольных множеств:

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, среди конечных множеств мы можем различать множества из 1-го, 2-х, 3-х и т.д. элементов, а бесконечные — различать по тому, равномощны ли они друг другу. Такой подход к изучению бесконечных множеств очень давно привлекал мыслителей. Но на этом пути они сталкивались с явлением, казавшимся им парадоксальным: множество может быть равномощно своей части. Например, множество натуральных чисел равномощно множеству четных натуральных чисел. Надо только сопоставить натуральному числу n число $2n$ — это будет, очевидно, взаимно однозначное соответствие между множествами натуральных и четных натуральных чисел. "Парадоксальность" такого обстоятельства заключается, очевидно, в том, что оно не может иметь место для конечных множеств. Поэтому и само понятие равномощности для бесконечных множеств казалось бессмысленным. Например, Галилей в его "Беседах" приводит пример взаимно однозначного соответствия между натуральными числами и квадратами натуральных чисел в котором n и n^2 соответствуют друг другу. Один из участников беседы резюмирует:

"свойства равенства, а также большей и меньшей величины, не имеют места там, где дело идет о бесконечности".

Только гораздо позже, во второй половине прошлого века, Дедекинд, наоборот, ввел понятие равномощности как фундаментальное средство исследования бесконечных множеств. То свойство, которое раньше казалось "парадоксальным" он даже предлагает принять за *определение* бесконечного множества: множество M равномощно своему подмножеству $M' \subset M$, отличному от M. Мы вскоре докажем, что это свойство действительно равносильно бесконечности множества.

Мы будем постоянно пользоваться следующим простым фактом:

Если множества A и B равномощны и B и C равномощны, то A и C равномощны.

Действительно, то что A и B равномощны, означает, что между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Пусть оно объединяет в пары (a, b) элементы этих множеств. Аналогично, равномощность B и C позволяет объединить в пары элементы этих множеств. Возьмем какой-то элемент $a \in A$. При взаимно однозначном соответствии между A и B он объединяется в пару (a, b) с каким-то элементом $b \in B$. При взаимно однозначном соответствии между B и C этот элемент b объединяется в пару с каким-то элементом $c \in C$. Объединим теперь в пару элементы a и c. Так устанавливается взаимно однозначное соответствие между A и C (проверьте это сами!). Таким образом, A и C равномощны.

На основании доказанного свойства, когда мы хотим доказать равномощность двух множеств A и B, мы можем заменить A равномощным ему множеством A' и доказывать равномощность A' и B. Аналогично и B можно заменить равномощным ему множеством B'. Мы будем дальше часто пользоваться этим приемом, не оговаривая этого. Он аналогичен рассуждению: чтобы доказать, что $a = b$, достаточно доказать, что $a = a'$ для некоторого a' и $a' = b$.

Сначала обратим внимание на некоторые простейшие бесконечные множества. Самым простым примером бесконечного множества является "натуральный ряд чисел", то есть множество всех натуральных чисел. Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным*.

Таким образом, для счетного множества M должно существовать взаимно однозначное соответствие между M и множеством N натуральных чисел. Если при этом элемент $a \in N$ объединяется в пару с натуральным числом n, то ему можно приписать индекс n и тем самым *занумеровать* все элементы множества M. Иначе говоря, множество счетно, если его можно записать в виде бесконечной последовательности: $M = \{a_1, a_2, ...\}$.

Счетные множества в некотором смысле являются самыми "маленькими" из бесконечных множеств. Об этом говорит хотя бы то, что *любое подмножество счетного множества конечно или счетно.* Действительно, счетное множество M может быть занумеровано: $M = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Пусть M' — его подмножество. Занумеруем его, назвав первым элемент a_k с наименьшим индексом k, принадлежащий M', вторым — элемент a_l, имеющий наименьший индекс $l > k$ и принадлежащий M' и т. д. Либо процесс оборвется — тогда множество конечно, либо он будет продолжаться бесконечно и даст нумерацию всех элементов множества M': ведь каждый из них содержится среди элементов $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и рано или поздно должен будет встретиться.

То же свойство счетных множеств как самых "маленьких" бесконечных характеризуется другим образом:

Теорема 1. *Каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть множество M бесконечно. Выберем из него любой элемент a_1. Так как M бесконечно, то оно содержит и другие элементы. Из них выберем элемент a_2, отличный следовательно от a_1. Так как множество M бесконечно, то оно содержит элементы, отличные от a_1 и a_2. Из них выберем элемент a_3. Так мы можем продолжать неограниченно: если мы уже нашли n различных элементов $a_1, ..., a_n$ множества M, то ввиду того, что оно бесконечно, эти элементы не могут его исчерпывать — из отличных от всех них элементов выбираем произвольный: a_{n+1}. Получаемое подмножество $N = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ состоит из различных элементов. Их нумерация и устанавливает взаимно однозначное соответствие между N и множеством всех натуральных чисел.

Заметим, что в качестве элемента a_1 мы могли выбрать произвольный элемент a множества M и значит построили такое счетное подмножество N, что $N \ni a$.

Следствие. Любое бесконечное множество M равномощно некоторому своему подмножеству, отличному от всего M.

Мы докажем это утверждение в более явной форме: каков бы ни был элемент a бесконечного множества M, множество $\overline{\{a\}}$, получающееся выбрасыванием a из M равномощно M ($\overline{\{a\}}$ есть дополнение множества $\{a\}$ из одного элемента a в M). Рассмотрим сначала случай, когда M есть множество натуральных чисел N и $N' = \overline{\{a\}}$, где a — некоторое натуральное число. Поставим в соответствие числу $n < a$ само n, а числу $n \geq a$ — число $n + 1$. Очевидно, мы получим взаимно однозначное соответствие между N и N'. Поэтому то же утверждение верно для любого счетного множества.

Для произвольного бесконечного множества M воспользуемся теоремой 1. Пусть M содержит счетное подмножество N. Как мы видели, можно предполагать, что $a \in N$. Как мы доказали, существует взаимно однозначное соответствие между N и N', где N' получается выкидыванием a из N. Пусть $\overline{N}$ — дополнение множества N в M, а M' получается выкидыванием a из M. Тогда $M = N + \overline{N}$, $M' = N' + \overline{N}$. Установим взаимно однозначное соответствие между M и M', объединив в пары элементы из N и N' согласно построенному сначала взаимно однозначному соответствию, а любой элемент $b \in N$ объединив в пару (b, b) с ним самим. Очевидно, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множествами M и M', а значит они равномощны.

Приведем еще несколько примеров счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел счетно.*

Объединим число 0 с числом 1, положительное целое число n с числом $2n$, а отрицательное целое число $-m$ с числом $2m + 1$. Очевидно, мы получим взаимно однозначное соответствие между множеством целых чисел и множеством натуральных чисел.

Следствие. Множество, являющееся суммой двух счетных подмножеств, счетно.

Пусть $A = B + C$. Если B и C счетны, то B равномощно множеству положительных целых чисел, а C — множеству отрицательных целых чисел. Поэтому A равномощно множеству всех целых чисел и значит счетно. (В этом рассуждении получились лишь целые числа, отличные от 0. Придумайте сами, как обойти эту трудность.)

2. *Множество всех положительных рациональных чисел счетно.*

Назовем высотой положительного рационального числа $\frac{m}{n}$ число $m + n$ (мы считаем m и n взаимно простыми). Очевидно, существует только конечное число рациональных чисел заданной высоты. Выпишем сначала рациональные числа высоты 2, потом высоты 3 и т.д. Мы получим бесконечную последовательность, в которой, рано или поздно, встретятся все рациональные числа. Объединив в пару рациональное число и его номер в этой последовательности, мы получим взаимно однозначное соответствие между множеством положительных рациональных чисел и множеством натуральных чисел. Начало нашей последовательности выглядит так:

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ldots$$

Здесь мы полагаем: $2 = \frac{2}{1}$, $3 = \frac{3}{1}$, $4 = \frac{4}{1}, \ldots$

Следствие. Множество всех рациональных чисел счетно.

Действительно, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством положительных рациональных чисел и множеством натуральных чисел. Значит, существует взаимно однозначное соответствие между множеством отрицательных рациональных чисел и множеством отрицательных целых чисел. Сопоставляя еще нулю ноль, мы получим вместе взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел и множеством всех целых чисел. Так как, согласно примеру 1, второе множество счетно, то счетно и первое.

В примере 2 мы представили множество рациональных чисел M как сумму счетного числа конечных подмножеств M_k, где M_k — множество рациональных чисел высоты k. Поэтому утверждение примера 2 следует из общего результата: сумма счетного числа конечных множеств счетна. Мы докажем даже более общее утверждение.

3. *Сумма счетного числа конечных или счетных множеств счетна.*

Доказательство основывается на том же принципе, который мы применяли в примере 2. Пусть $M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$. Так как множество M_i конечно или счетно, то его элементы можно перенумеровать. Будем предполагать, что каждое множество M_i действительно пронумеровано. Определим высоту элемента a множества M. Если он принадлежит множеству M_i и имеет в нем номер j, то его высотой назовем $i + j$. Очевидно, что существует лишь конечное число элементов заданной высоты. Действительно, если $i + j = n$ — задано, то $i < n$, так что элемент a высоты n может принадлежать лишь одному из множеств $M_1, \ldots, M_{n-1}$. Если он принадлежит множеству M_i, то имеет там номер $j = n - i < n$. Таких элементов тоже лишь конечное число. Поэтому мы можем переписать сначала элементы высоты 2, потом высоты 3 и так далее. В результате мы перенумеруем все множество M. Это и значит, что оно счетно. Принцип нумерации элементов множества M изображен на рисунке 1, где множество M_1 записано в первой строке, множество M_2 — во второй и т.д., а порядок нумерации всего множества M изображен зигзагообразной линией. На рис.1 предполагается, что все множества M_i счетны. Нарисуйте соответствующий чертеж, если, например, множество M_1 конечно и состоит из трех элементов.

Мы привели ряд примеров счетных множеств. Они все, очевидно, равномощны. Теперь приведем несколько других примеров равномощных друг другу множеств.

4. *Любые два отрезка равномощны.* Мы можем расположить наши отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ на двух параллельных прямых и установить взаимно однозначное соответствие как установлено на рис. 2. То есть, соединяя любую точку x отрезка $[a, b]$ с

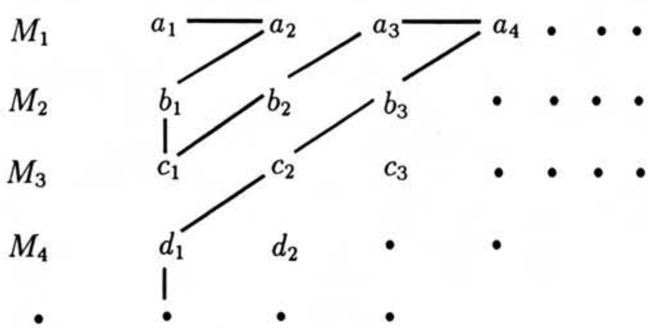


рис. 1.

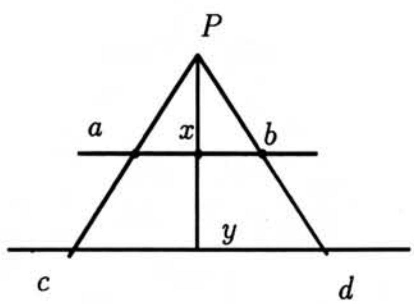


рис. 2

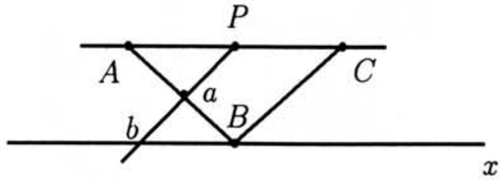


рис. 3

точкой пересечения P прямых ac и bd, ставить ей в соответствие точку y отрезка $[c, d]$, являющуюся точкой пересечения этой прямой Px с прямой cd, на которой расположен отрезок $[c, d]$.

5. *Любой отрезок равномощен всей прямой,* то есть множеству всех действительных чисел. Ввиду примера 4. достаточно рассмотреть один какой-то отрезок, например, [0,1]. Обозначим его через I. Разделим отрезок I на две равные части точкой $\frac{1}{2}$ и, согнув его в этой точке расположим на плоскости как изображено на рис. 3: в виде двух равных отрезков $[A, B]$ и $[B, C]$ длины $\frac{1}{2}$ под одинаковыми углами к оси x.

Обозначим через P середину отрезка AC и будем проектировать согнутый отрезок I на ось x как и в примере 4, то есть, сопоставляя точке a точку b — точку пересечения прямой aP и оси x. Очевидно, что согнутый отрезок I равномощен первоначальному. Описанное выше соответствие согнутого отрезка и прямой x взаимно однозначно за исключением того, что концам отрезка — точкам A и C — не соответствует никакая точка оси x, так как прямые PA и PC параллельны этой оси и ее не пересекают. Поэтому мы слегка видоизменим наше построение. Вспомним, что при доказательстве следствия теоремы I мы установили, что любое бесконечное множество равномощно множеству, получающемуся устранением любого одного элемента. В частности, отрезок $[0, 1]$ равномощен множеству, получающемуся устранением из него одного одного конца — числа 0. Повторяя то же рассуждение, убеждаемся, что отрезок равномощен множеству, получающемуся устранением из него обоих концов — чисел 0 и 1. На рис. 3 это множество изображается множеством, получающимся устранением из согнутого отрезка I его концов A и C. Полученное множество обозначим через J. Оно, как мы видели, равномощно отрезку. Но с другой стороны, соответствие, изображенное на рис. 3 для множества J будет взаимно однозначным соответствием этого множества и всей оси x. Таким образом наше утверждение доказано.

Задачи

1. Докажите, что произведение двух счетных множеств счетно. Понятие произведения множеств определено в §1 гл. III — оно годится как для конечных, так и для бесконечных множеств.

2. Докажите, что любая окружность равномощна отрезку.

3. Разделим отрезок [0,1] на две равные части числом $\frac{1}{2}$, потом отрезок $(\frac{1}{2}, 1)$ на две равные части числом $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ и т.д. Мы получим числа $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$. Докажите, что отрезок [0,1] есть сумма счетного числа отрезков $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$, если условимся сейчас в такой отрезок число α_{n+1} не включать, а число α_n — включать. Аналогично докажите, что прямая есть сумма счетного числа отрезков $[n, n+1)$, где n пробегает все целые числа. Докажите, что отрезки $[\alpha_n, \alpha_{n+1})$ и $[n, n+1)$ равномощны, а отсюда выведите другим способом , что отрезок и прямая равномощны (утверждение примера 5).

4. Задайте формулами взаимно однозначное соответствие между отрезками $[a, b]$ и $[c, d]$, построенное в примере 4.

5. Докажите, что не существует взаимно однозначного соответствия между множеством всех целых чисел и множеством натуральных чисел, сохраняющего сложение, то есть такого, что если m и m' соответствуют друг другу и n и n' соответствуют друг другу, то $m + n$ и $m' + n'$ соответствуют друг другу.

6. Докажите, что не существует взаимно однозначного соответствия между множеством всех целых чисел и множеством натуральных чисел, сохраняющего отношение порядка, то есть такого, что если m и m' соответствуют друг другу и n и n' соответствуют друг другу, причем $m < n$, то $m' < n'$.

7. Назовем расстоянием двух точек на окружности длину кратчайшей дуги этой окружности, соединяющей эти точки. Расстоянием двух точек A и B на отрезке будем называть, как обычно, длину отрезка AB. Доказать, что не существует взаимно однозначного соответствия между множеством точек окружности и множеством точек какого-либо отрезка, сохраняющего расстояния, то есть такого, что если A и A' соответствуют друг другу, и B и B' соответствуют друг другу, то расстояние точек A и B равно расстоянию точек A' и B'. Остается ли верным это утверждение, если из окружности выкинуть одну точку?

8. На прямой имеется множество отрезков, которые попарно не пересекаются. Докажите, что их множество конечно или счетно. (Указание: Докажите, что множество отрезков, содержащихся в заданном, конечно или счетно. Для этого рассмотрите множество отрезков длины, большей чем 1, большей чем $\frac{1}{2}$, большей, чем $\frac{1}{3}$ и т.д.)

9. На плоскости расположены кресты, каждый из которых состоит из горизонтальной и вертикальной перекладины длины 1, пересекающихся в середине. Кресты попарно не пересекаются. Докажите, что их множество конечно или счетно.

§2. Континуум

В конце предшествующего параграфа мы привели несколько примеров, которые разбиваются на две группы: A — счетные множества (все, по определению, равномощные друг другу) и B — множества, равномощные отрезку (и, значит, тоже равномощные друг другу). Остается открытым вопрос, равномощны ли множества первой группы и множества второй группы. Вероятно, принцип классификации множеств по их равномощности остался бы всего лишь как средство более четкого и гладкого изложения уже существующих математических теорий, если бы не было доказано, что множества из примеров A и B не равномощны. Этот факт имеет фундаментальное значение для всей математики.

Теорема 2. *Множество точек отрезка не счетно.*

Мы приведем два разных доказательства этой теоремы, в которых используются разные свойства отрезка. Как мы видим в §1, все отрезки равномощны одному, например, [0,1], его мы и будем рассматривать.

Первое доказательство. Если бы отрезок [0,1] был счетным, то счетным было бы и множество, полученное удалением его правого конца — числа 1. Запишем каждое число этого множества в виде десятичной дроби: $0, a_1a_2....$, где a_i принимают значения $0, 1, ..., 9$. Предположим, что все эти числа можно занумеровать: $x_1, x_2, ...x_n, ...$ и запишем их разложения в десятичные дроби одно под другим :

$$\begin{array}{ll} x_1: & 0, a_1a_2a_3\dots \\ x_2: & 0, b_1b_2b_3\dots \\ x_3: & 0, c_1c_2c_3\dots \\ \cdot & \dots\dots\dots\dots \\ \cdot & \dots\dots\dots\dots \\ \cdot & \dots\dots\dots\dots \\ \cdot & \dots\dots\dots\dots \end{array} \qquad (1)$$

Мы приведем к противоречию предположение о том, что перенумерованы *все* числа отрезка, построив десятичную дробь, которая не входит в список (1). Будем строить ее в виде $y = 0, k_1k_2k_3....$ Выберем цифры $k_1, k_2, k_3, ...$ так, что $k_1 \neq a_1$. Тогда при любом выборе следующих цифр $y \neq x_1$. После этого выберем $k_2 \neq b_2$ — тогда при любом выборе следующих цифр $y \neq x_2$. Потом выберем $k_3 \neq c_3$ и так далее: k_n выбирается отличным от цифры, стоящей на n–м месте в n–й строке таблицы (1). Тогда наверняка $y \neq x_n$. Выбрав так все цифры k_n мы получим, что y не совпадает ни с одним из x_k.

Против этого рассуждения можно сделать следующее возражение. В § 2 гл. V мы видели, что соответствие между числами отрезка и десятичными дробями *не* взаимно однозначно — оно нарушается из-за бесконечных десятичных дробей, имеющих 9 в периоде. Но если мы исключим такие дроби, то соответствие будет взаимно однозначным. Поэтому мы должны пользоваться только дробями, не имеющими 9 в периоде. В результате все дроби в таблице (1) не будут иметь 9 в периоде. Но мы должны построить и нашу дробь y так, чтобы она не имела 9 в периоде. Это вполне возможно. При выборе каждой цифры k_n мы должны были удовлетворить единственному условию: чтобы k_n не совпадала с цифрой, стоящей на n-м месте в n-й строке таблицы (1). Но поскольку в нашем распоряжении имеется 10 цифр — $0, 1, 2, ..., 9$, то мы при этом можем выбрать k_n и отличным от 9. В результате в дроби для y вообще не будет встречаться цифра 9. Доказательство закончено. Процесс построения бесконечной десятичной дроби y называется *диагональным процессом.*

Второе доказательство. В этом доказательстве нам будут встречаться отрезки, определенные двумя числами a и b, $a \neq b$ причем не будет заранее известен их порядок: $a < b$ или $b < a$? Мы будем их обозначать в любом случае $[a, b]$, так что если $a > b$, то $[a, b]$— это отрезок $[b, a]$ в прежних обозначениях. Заметим, что любой отрезок содержит числа, отличные от его концов — например, отрезок $[a, b]$ содержит середину $\frac{(a+b)}{2}$. Применяя это же рассуждение к отрезку $[a, \frac{(a+b)}{2}]$ и повторяя его, мы убедимся, что отрезок содержит бесконечное множество чисел.

Теперь переходим непосредственно к доказательству и предположим, что точки отрезка $[0, 1]$ перенумерованы:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots \tag{2}$$

Так как нумерация отрезка есть, по предположению, взаимно однозначное соответствие, то числа x_m и x_n с $m \neq n$ различны. Мы докажем, что сделанное предположение о счетности отрезка противоречит аксиоме о вложенных отрезках. Построим некоторую систему стягивающихся отрезков. Начнем с отрезка $[x_1, x_2]$ и отберем в последовательности (2) только те числа, которые содержатся в этом отрезке и не совпадают с его концами. Как мы видели, их будет бесконечно много и они составят последовательность

$$x_p, x_q, x_r, \ldots \tag{3}$$

где $1 < 2 < p < q < r \ldots$ Рассмотрим отрезок $[x_p, x_q]$ и отберем в последовательности (3), числа, содержащиеся в этом отрезке и не совпадающие с его концами. Мы получим еще одну бесконечную последовательность

$$x_m, x_n, x_k, \ldots$$

где $p < q < m < n < k \ldots$

Этот процесс можно повторять до бесконечности: на каждом шаге мы получим числа некоторого отрезка, которых бесконечно много и которые содержатся в последовательности (2) и даже в ее части, полученной на предшествующем шаге. Таким образом мы получим счетное число последовательностей:

$$\begin{gathered} x_p, x_q, x_r \ldots \\ x_m, x_n, x_r \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

в которых первая содержит все точки отрезка $[x_1, x_2]$, кроме его концов, вторая — все точки отрезка $[x_p, x_q]$ кроме его концов и т.д. По построению каждая новая последовательность начинается с большего номера, чем предыдущая и поэтому ни одно число последовательности (2) не может принадлежать им всем. Но последовательности (2), (3) и т.д. — это просто все числа отрезков $[x_1, x_2] \supset [x_p, x_q] \supset [x_m, x_n] \ldots$ и т.д. (кроме их концов). Согласно аксиоме о вложенных отрезках, существует число, общее всем отрезкам $[x_1, x_2], [x_p, x_q], [x_m, x_n] \ldots$ и т.д. Если бы оно принадлежало, например, отрезку $[x_m, x_n]$, то тем более принадлежало бы и отрезку $[x_p, x_q]$, причем не совпадало бы с его концами, то есть содержалось бы в одной из последовательностей (2), (3) ... и т.д. Но мы видели, что ни одно из чисел последовательности (2) всем этим последовательностям принадлежать не может, а все числа отрезка [0, 1] по предположению содержатся в последовательности (2). Это противоречие доказывает теорему.

Второе доказательство несколько сложнее первого, но имеет то преимущество, что не использует запись чисел в какой-то системе счисления, а доказывает теорему 2 прямо исходя из аксиом действительных чисел.

Оба приведенные доказательства были найдены Кантором в 70-е годы прошлого века, причем сначала второе из изложенных нами, а потом первое (его смутила трудность, связанная с дробями, имеющими 9 в периоде). Как вы видели, оба рассуждения очень простые, но сама постановка вопроса была тогда совершенно новой. В более поздней работе Кантор говорит, что ему понадобилось 8 лет, чтобы найти доказательство несчетности отрезка. Сохранилась очень интересная переписка Кантора и Дедекинда, показывающая, с каким трудом вырабатывались эти новые идеи. Кантор пишет, что не может ответить на вопрос, счетен ли отрезок и спрашивает — не известен ли ответ Дедекинду. Тот отвечает, что не знает доказательства (каков должен быть ответ, оба угадывали правильно), но говорит, что вопрос, по его мнению, не стоит больших трудов, так как вряд ли из него можно вывести интересные следствия.

Поразительно, что Дедекинд не почувствовал сразу важности вопроса — хотя бы того, что из несчетности отрезка и счетности множества рациональных чисел сразу вытекает существование иррациональных чисел, причем на основе совершенно новых рассуждений (до того существование иррациональных чисел устанавливалось путем, аналогичным тому, которым мы шли в гл. I). Еще более поразительно в связи с этим то, что сам Дедекинд доказал утверждение, которое, вместе с теоремой о несчетности отрезка, приводит к гораздо более значительным выводам.

Речь идет об одном понятии, не встречавшемся еще нам, но хорошо известном во времена Дедекинда и Кантора. Число α называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ с рациональными коэффициентами a_i. Так как при умножении многочлена на число его корни не изменяются, то мы можем помножить многочлен $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ на общий знаменатель всех чисел $a_0, ..., a_n$ и поэтому уже сразу предполагать в определении алгебраического числа, что коэффициенты $a_0, ..., a_n$ — целые числа. Те числа, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными*.

Теорема 3. *Множество всех алгебраических чисел счетно.*

Доказательство. Назовем *высотой* многочлена $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ с целыми коэффициентами число $n+|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|$. Очевидно, что высота — натуральное число. Точно так же очевидно, что существует лишь конечное число многочленов, высота которых не превосходит заданного числа m. Действительно, если $n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| \leq m$, то $n \leq m$ и $|a_i| \leq m$ для всех $i = 0, 1, ..., n$. Поэтому для каждого коэффициента a_i имеется не более чем $2m + 1$ возможностей $(-m, -m + 1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, m)$ и число всех многочленов конечно.

Рассмотрим теперь все алгебраические числа, которые являются корнями многочленов с целыми коэффициентами, имеющих высоту, не превосходящую заданного натурального числа m. Обозначим это множество через A_m. Оно конечно:

действительно, число многочленов, высота которых не превосходит m, как мы видели, конечно, а каждый многочлен имеет конечное число корней (согласно теореме 3 гл. II). Наконец, объединение всех множеств A_m при $m = 1, 2, \ldots$ совпадает с множеством всех алгебраических чисел. Из примера 3 в §1 вытекает, следовательно, что множество всех алгебраических чисел счетно.

Так как множество всех действительных чисел равномощно отрезку (пример 5 в §1), то из теоремы 3 следует существование трансцендентных чисел. А это далеко не простой факт. Хотя из теорем 2 и 3 следует, что трансцендентных чисел "несравненно больше", чем алгебраических, построить конкретное трансцендентное число или тем более, доказать трансцендентность какого-то уже известного числа — это трудная задача. Только в середине прошлого века было построено число, про которое можно было доказать его трансцендентность. Самое известное трансцендентное число — это π (отношение длины окружности к диаметру). Его трансцендентность была доказана в 80-е годы прошлого века.

Утверждение, которое мы назвали теоремой 3, Дедекинд доказал в письме Кантору. Видимо, именно для того, чтобы подчеркнуть конкретные применения новых идей, Кантор опубликовал статью под названием "Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел", где приводит доказательство утверждений, названных нами теоремой 2 и теоремой 3, и выводит из них существование трансцендентных чисел. После этого Дедекинд признал, что его возражение по поводу малой интересности вопроса о счетности или несчетности отрезка "решительно опровергнуто".

Но следующее открытие Кантора оказалось шоком для него самого. Речь идет об утверждении:

Теорема 4. *Множество точек квадрата равномощно множеству точек отрезка.*

Мы будем сравнивать квадрат со стороной 1 и отрезок длины 1. Начнем с простого технического видоизменения задачи. Обозначим квадрат через K и удалим две его соседние стороны AB и BC (рис. 4). Оставшееся множество обозначим через P, а

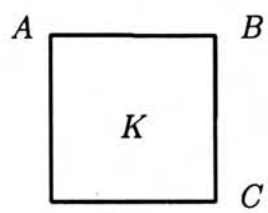


рис. 4.

объединение сторон AB и BC — через L. Тогда $K = P + L$. Очевидно, что L равномощно отрезку (это согнутый отрезок) и если мы докажем, что P равномощно отрезку, то K будет тоже равномощно отрезку. Действительно, как мы видели, отрезок равномощен множеству, получающемуся удалением одного его конца. Так что мы можем считать, что P равномощно отрезку $[0,1)$ с удаленным числом 1, а L равномощно отрезку $[1,2]$. Тогда K равномощно отрезку $[0,2]$. Точно так же нам достаточно доказать, что множество P равномощно отрезку $[0,1)$ с удаленной точкой 1. Эти очевидные замечания нужны, чтобы удобно было перейти от точек к числам. Метод координат дает возможность задать точку квадрата P парой чисел (x,y), где $0 \leq x < 1$ и $0 \leq y < 1$. Точно так же точки отрезка $[0,1)$ с удаленным концом 1 соответствуют таким числам t, что $0 \leq t < 1$. Мы должны, следовательно, указать взаимно однозначное соответствие между такими парами чисел (x,y) и числами t.

Для этого запишем все встречающиеся у нас числа в виде десятичных дробей

$$x = 0,a_1a_2a_3.... \tag{4}$$

$$y = 0,b_1b_2b_3.... \tag{5}$$

$$t = 0,c_1c_2c_3...., \tag{6}$$

где a_i, b_j, c_k — некоторые цифры 0, 1, ... , 9. Как раз таким образом будут задаваться все точки (x,y) множества P и числа t отрезка с удаленным концом. Теперь сопоставим паре (x,y) число t, "смешав" дроби (4) и (5), то есть положим $c_1 = a_1$, $c_3 = a_2$, $c_5 = a_3...$, $c_2 = b_1, c_4 = b_2, c_6 = b_3....$ Соответствие будет взаимно однозначным, так как по дроби (6) дроби (4) и (5) восстанавливаются: цифры c_i с нечетными индексами составляют все цифры первой дроби, а цифры с четными индексами — цифры второй.

Это рассуждение, впрочем, вызывает то же возражение, что и первое предложенное нами доказательство теоремы 2, а именно, в связи с дробями, имеющими 9 в периоде. Действительно, чтобы соответствие между числами отрезка и дробями было взаимно однозначным, мы должны запретить дроби, имеющие 9 в периоде. Но если дробь (6) не имеет 9 в периоде, то одна из восстанавливаемых по ней дробей (4) и (5) может оказаться с 9 в периоде. Например, если $t = 0,90909...$, то $x = 0,999....$ Это возражение сделал Дедекинд, когда Кантор сообщил письмом свое доказательство. Кантору не удалось устранить этого дефекта на выбранном пути и он вскоре предложил другое доказательство, не использующее десятичных дробей.

На самом деле, как выяснилось позже, доказательство легко исправить. Для этого несколько усложним процесс "перемешивания" дробей (4) и (5), обратив особое внимание на появление в них 9. А именно, мы будем перемешивать их по-прежнему, беря по очереди одну цифру из первой дроби, а другую из второй, до тех пор, пока эти цифры отличны от 9. Если же цифра a_k или b_k равна 9, то мы берем ее вместе со всеми девятками, которые непосредственно за ней следуют в ее дроби и вместе с первой отличной от 9 цифрой - и всю эту группу цифр вставляем в дробь (6). Например, из дробей $x = 0,12(995)76...$ и $y = 0,4(93)51...$ мы получим дробь $t = 0,142(93)(995)5716...$, где в скобки взяты группы цифр, переставляемые целиком. Процесс восстановления дробей (4) и (5) по дроби (6) тоже меняется. Мы по-прежнему по очереди ставим цифры дроби (6) то в дробь (4), то в (5), пока они отличны от 9. Если же мы дошли до 9, то берем ее вместе со всеми непосредственно за ней следующими девятками и следующей отличной от 9 цифрой и переставляем сразу эту группу цифр. Таким образом в каждой переставляемой группе цифр присутствует цифра, отличная от 9 и поэтому 9 в периоде получиться не могут.

Таким простым рассуждением получается результат, казалось бы противоречащий нашей геометрической интуиции: равномощными оказываются фигуры разной размерности, как квадрат и отрезок! Можно показать, что и куб им равномощен (задача 1). Этот результат поразил и самого Кантора. Он пишет Дедекинду: "То, что я сообщил Вам совсем недавно, для самого меня столь неожиданно, столь ново, что я никак не могу успокоить свой ум, пока не получу, мой почитаемый друг, Вашего суждения об этом. Пока вы не одобрите, я могу лишь сказать" — тут в письме, написанном по-немецки, он неожиданно переходит на французский — "я вижу, но не верю" (вероятно, намек на евангельское изречение: "ты поверил, потому что увидел меня: блаженны не видевшие и уверовавшие"). Кантору представляется, что пересмотра требует само математическое описание нашей интуиции размерности: "Различие, имеющееся между двумя образованиями различного числа измерений, следует, скорее, искать совсем в другой причине, нежели в числе независимых координат..."

В ответ Дедекинд подтверждает правильность нового доказательства, но высказывает свое убеждение, что оно не противоречит нашей уверенности в том, что размерность совпадает с числом координат ("хотя оно и может казаться разрушенным Вашей теорией"). "Ведь все авторы, очевидно, принимали во внимание то молчаливое и вполне естественное допущение, что для нового определения точек (- - -) с помощью новых координат последние должны быть *непрерывными* функциями старых."

Понятие непрерывной функцией было к тому времени точно сформулировано и хорошо известно. Мы не будем углубляться в этот вопрос во всей общности, а посмотрим на примерах, какие любопытные явления возникают при построенном нами взаимно однозначном соответствии между точками квадрата и отрезка. Причем связаны они именно с той трудностью, которую создает 9 в периоде и с нашим способом преодоления этой трудности. Рассмотрим две точки (x, y) и (x', y), где $x = 0,10...0...$, $y = 0,0...0$, $x' = 0,09...90...$ (в x' стоит n девяток подряд). Очевидно, что $y = 0, x = \frac{1}{10}$, а $x' = \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^{n+1}}$. Тогда $x' = \frac{9}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10^2}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$ (по формуле для суммы геометрической прогрессии). Это число равно $\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}}$. Таким образом с увеличением n x и x' неограниченно сближаются. Посмотрим теперь, какие точки t и t' на отрезке мы сопоставляем нашим точкам по правилу, изложенному в доказательстве теоремы 4. Для получения точки t просто "перемешиваем" дроби, соответствующие точкам x и y. После запятой мы берем 1 из x, потом 0 из y и дальше будут следовать одни нули, так что $t = 0,10... = \frac{1}{10}$. Теперь внимательнее проследим процесс построения дроби t'. После запятой мы должны взять 0 из x', потом 0 из y, потом в x' мы наталкиваемся на 9 и должны взять всю группу девяток со следующим за ним 0. Потом опять надо чередовать цифры из y и x', но они все будут равны 0. В результате мы получим, что $t' = 0,009...90....$ Иными словами, $t' = \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^{n+2}}$. Как и в случае x' мы вычисляем: $t' = \frac{9}{10^3}\left(1 + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = t' = \frac{9}{10^3}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{100} - \frac{1}{10^{n+1}}$. Мы видим, что с возрастанием n x и x' неограниченно сближаются. Так как y не изменяется, то и точки (x, y) и (x', y) неограниченно сближаются. Но соответствующие им точки t и t' все время остаются друг от друга дальше некоторой постоянной величины: $t = \frac{1}{10}$, $t' = \frac{1}{100} - \frac{1}{10^{n+1}}$ и $t - t' = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{10^{n+1}} > \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$. При нашем соответствии квадрат как-бы разрывается: все более близкие его точки соответствуют точкам, остающимся друг от друга на расстоянии, большим некоторой фиксированной положительной величины. Этот процесс похож на то, как разрывают лист бумаги.

Дедекинд в письме Кантору высказал предположение, что если включить в определение взаимно однозначного соответствия требование непрерывности (формулировку которого мы опускаем), то геометрические образы разной размерности (например квадрат и отрезок, куб и квадрат) нельзя будет взаимно однозначно сопоставить друг другу. Он пишет, что у него не было времени хотя бы попытаться доказать это, но он выдвигает такую гипотезу "как мое убеждение и веру". Позже Кантор согласился с точкой зрения Дедекинда и даже опубликовал доказательство этой его гипотезы, оказавшееся, однако, неверным. Гипотеза Дедекинда была доказана только в 1910 г.

Множества, равномощные отрезку, называются *континуальными* или *континуумом.* Теорема 2 утверждает, следовательно, что *континуум несчетен.* Практически все встречающиеся в математике бесконечные множества относятся к одному из этих типов: или континуальны или счетны. Можно построить множества, которые ни континуальны, ни счетны (задача 9) и даже построить бесконечное семейство бесконечных множеств, попарно не равномощных друг другу. Но значение их для остальной математики не велико. Точно так же равномощность квадрата и отрезка (теорема 4) не имеет приложений, на которые, казалось бы, можно было рассчитывать. Причину отчасти мы выяснили раньше. Обычно множество в математике возникает более конкретно, его элементы связаны какими-то отношениями. Например, определены действия над ними, или неравенства, или (в геометрии) расстояния, или хотя бы мы можем утверждать, что некоторая последовательность элементов a_n неограниченно приближается к элементу a. Тогда нас интересуют только такие взаимно однозначные соответствия, которые сохраняют эти отношения между элементами — их же может оказаться гораздо меньше (ср. задачи 5, 6 и 7 к §1). Поэтому теорема 4, вопреки ее поражающей ум формулировке, не является "рабочим" математическим результатом. Но теорема 2 является одним из самых значительных результатов математики.

Задачи

1. Докажите, что множество точек единичного куба, состоящее из точек

(x, y, z), $0 \le x < 1$, $0 \le y < 1$, $0 \le z < 1$, равномощно отрезку t, $0 \le t < 1$.

2. Докажите, что если M_1 и M_2 — непересекающиеся подмножества множества M, и M_1 и M_2 равномощны, то и их дополнения $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ равномощны. (Указание: Решение сводится к случаю, когда $M_1 \cup M_2 = M$.)

3. Докажите, что множество иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ равномощно множеству N чисел интервала, не имеющих вида $\frac{1}{n}$. Указание. Сравните оба подмножества с подмножеством N', состоящим из чисел не имеющих вида $\frac{\sqrt{2}}{n}$, $n > 1$ и примените задачу 2.

4. Докажите, что множество иррациональных чисел отрезка континуально. (Указание: Воспользуйтесь задачей 3. Достаточно доказать, что указанное там множество N континуально. Оно разбивает отрезок $[0,1]$ на отрезки $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Отобразите каждый такой отрезок на отрезок $[n, n+1]$, содержащийся в бесконечной прямой и докажите равномощность множества N с полупрямой $x \ge 1$. Потом воспользуйтесь приемом, примененным в примере 5 §2. Обратите внимание на концы отрезков!)

5. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей вида $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n...)$ где a_i — могут принимать значения $0, 1, ..., 9$, континуально.

6. Задано натуральное число $k > 1$. Докажите, что множество последовательностей $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n...)$ где a_i — произвольные целые числа $0 \le a_i < k$, континуально. (Указание: Сопоставьте каждой такой последовательности число x, записанное в системе счисления с основанием k: $x = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \dots + \frac{a_n}{k^n} + \cdots$. Придумайте, как преодолеть ту трудность, что полученное соответствие между последовательностями и числами отрезка $[0,1]$ не взаимно однозначно.)

8. Пусть U — множество всех подмножеств множества M (в случае, когда M конечно, мы сталкивались с ним в гл. III). Докажите, что множества U и M не равномощны. (Указание. Предположить, что можно установить взаимно однозначное соответствие $a \longleftrightarrow A$ между элементами и подмножествами множества M, рассмотрите множество B всех таких элементов a, которые не содержатся в соответствующем им множестве. Пусть в нашем соответствии $b \longleftrightarrow B$. Разберите обе гипотезы $b \notin B$ и $b \in B$.)

9. Постройте бесконечное множество, которое ни счетно, ни континуально.

§3. Тонкие множества

В этом параграфе мы покажем, какие конкретные свойства связаны со счетностью множества. Мы будем рассматривать множества M, содержащиеся в отрезке $[0,1]$. Обсудим вопрос о том, можно ли как-то измерить "длину" такого множества. Ясно, что длину самого отрезка $[0,1]$ естественно считать равной 1. Длину отрезка $[a,b]$, содержащегося в $[0,1]$ также естественно положить равной $b-a$. Если множество состоит из нескольких непересекающихся отрезков, то длину его положим равной сумме длин этих отрезков. Например, длина множества $M = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$ равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Но произвольное множество вовсе не обязательно распадается на отрезки, и так просто естественное определение для него найти не удается. Как,

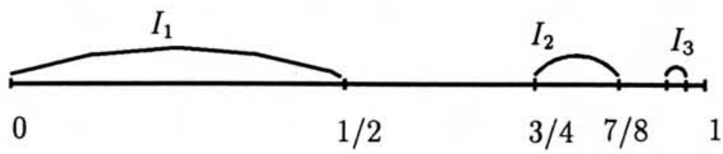


Рис. 5.

например, определить "длину" множества рациональных чисел, содержащихся в отрезке $[0,1]$? множества иррациональных чисел?

Существует теория, позволяющая определить длину если не произвольного, то очень широкого класса множеств, содержащихся в отрезке, причем это определение обладает всеми свойствами, которые подсказывает нам интуиция. Она называется *теорией меры.* Мы не будем углубляться в нее, а изложим только определение того, когда множество считается имеющим "длину 0". В теории меры такие множества называются *множествами меры 0.* Мы будем называть их *тонкими множествами.*

Начнем с обоснования определения, аппелируя к геометрической интуиции, а формальное определение дадим в конце рассуждения. Мы уже условились, что называть длиной отрезка $[a,b]$, содержащегося в отрезке $[0,1]$, а также суммы конечного числа непересекающихся отрезков. Отсюда один шаг к множествам, являющимся суммами счетного числа отрезков. Именно, если $M = I_1 + I_2 + \cdots + I_n + \cdots$, где I_k — непересекающиеся отрезки, причем длина отрезка I_k равна α_k, то отрезки $I_1,\ I_2, \ldots, I_n$ содержатся внутри отрезка $[0,1]$ и не пересекаются, поэтому сумма их длин не превосходит 1. Иначе говоря, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \le 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Из леммы в §1 гл. V следует, что бесконечная сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ существует и не превосходит 1. Эту сумму мы и будем называть длиной множества M. Например, если $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_k = \left[1 - \frac{1}{2^{2k-2}}, 1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right]$ (см. рис. 5), то $\alpha_k = \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^{2k-2}}\right) = \frac{1}{2^{2k-2}} - \frac{1}{2^{2k-1}}$, откуда $\alpha_k = \frac{1}{2^{2k-1}}$. Поэтому $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$ (по формуле для суммы бесконечной геометрической прогрессии). Для длины нашего множества мы получаем значение $\frac{2}{3}$.

Теперь введем два допущения, которые позволят нам сформулировать искомое определение. Во-первых, рассмотрим сначала видоизмененную ситуацию, когда множество M есть объединение отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ которые, может быть, пересекаются. Естественно предположить, что как бы мы ни определили длину множества M, она *не будет превосходить* суммы длин отрезков I_k. Теперь мы, конечно, не можем утверждать, что суммы $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ не превосходят 1, где, как и раньше, α_k обозначает длину интервала I_k — ведь возможен, например, и такой случай, когда все интервалы I_k совпадают. Поэтому наше допущение имеет смысл только в том случае, когда сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ существует. Второе допущение еще более очевидно интуитивно: мы предположим, что если как-то определены длины множеств M_1 и M_2 и если $M_1 \subset M_2$, то длина M_1 не превосходит длины M_2.

Сделанные допущения еще не дают возможность *измерить* длину произвольного множества, так как его, вообще говоря, нельзя представить как объединение счетного числа отрезков. Так нельзя, например, представить множество иррациональных чисел отрезка $[0,1]$ (задача 1). Но, пользуясь вторым допущением, мы можем *оценивать* длину множеств, как бы она ни была определена, лишь бы это определение удовлетворяло сделанным допущениям. Предположим, например, что множество M содержится в объединении отрезков $I_1, I_2, ..., I_n, ...$. Тогда его длина не должна превосходить суммы длин отрезков I_k. Мы как бы измеряем множество M, включая его в разные множества, являющиеся объединением счетных последовательностей отрезков. Если в результате подобных "измерений" мы получим для длины множества M все более низкие (близкие к 0) оценки, то не останется иной возможности как положить длину множества M равной 0. Это и приводит нас к определению тонкого множества.

Дальше для сокращения формулировок мы будем говорить, если множество M содержится в объединении множеств M_1, M_2, ..., M_n, ..., что оно *покрыто* этими множествами, а само включение

$$M \subset M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \cdots$$

назовем *покрытием* множества M множествами M_k.

Определение. Множество M, содержащееся в отрезке $[0,1]$ называется *тонким*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое покрытие множества M отрезками $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, что сумма длин отрезков I_k не превосходит ε.

Подчеркиваем еще раз, что все предшествующие рассуждения этого параграфа ничего не доказывали, а были лишь *объяснением* этого определения.

Рассмотрим теперь примеры тонких множеств. Конечно, множество, состоящее из одного единственного числа x — тонкое, так как для любого $\varepsilon > 0$ оно имеет покрытие $x \in I_\varepsilon$, где I_ε — отрезок $[x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}]$ длины ε, или, если он не содержится в отрезке $[0,1]$ — то их пересечение, имеющее длину не превосходящую ε. Так же доказывается, что множество, состоящее из конечного числа чисел — тонкое.

Теперь можно сказать, как понятие тонкого множества связано со счетностью.

Теорема 5. *Счетное множество отрезка* $[0,1]$ — *тонкое.*

Пусть
M — счетное множество, как-то перенумерованное: $M = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. Мы построим для каждого положительного $\varepsilon > 0$ такое покрытие этого множества отрезками $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, что сумма длин этих отрезков не превосходит ε — как и требуется определением тонкого множества. Для этого возьмем за I_1 отрезок длины $\varepsilon/2$ с центром в a_1 : $I_1 = \left[a_1 - \varepsilon/4, a_1 + \varepsilon/4\right]$ или, если этот отрезок не помещается в отрезке $[0,1]$, то ту его часть, которая содержится в отрезке $[0,1]$. И для любого k возьмем за I_k пересечение отрезка $\left[a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right]$ с отрезком $[0,1]$. В любом случае длина отрезка I_k не превосходит $\frac{\varepsilon}{2^k}$, а сумма длин всех отрезков I_k не превосходит суммы $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \cdots = \varepsilon$ (по формуле для суммы бесконечной геометрической прогрессии).

Таким образом, например, множество рациональных чисел, содержащихся в отрезке $[0,1]$ — тонкое, что на первый взгляд не очевидно.

Переходим к следующему свойству.

Теорема 6. *Объединение двух тонких множеств является тонким множеством.*

Пусть M_1 и M_2 — тонкие множества и $M = M_1 \cup M_2$. Чтобы доказать, что множество M — тонкое, мы должны для любого $\varepsilon > 0$ построить такое покрытие $I_1, I_2, ..., I_n, ...$, этого множества отрезками, что сумма длин отрезков I_k не превосходит ε. Воспользуемся тем, что множества M_1 и M_2 тонкие. Это значит, что для любого положительного числа $\eta > 0$ как M_1, так и M_2 обладает таким покрытием отрезками, что сумма длин отрезков каждого покрытия не превосходит η. Это верно для любого η и, в частности, для $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$, где ε — заданное нам сначала число. Запишем найденные покрытия:

$$M_1 \subset J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n \cup \cdots$$

$$M_2 \subset K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n \cup \cdots$$

Рассмотрим последовательность отрезков $J_1, K_1, J_2, K_2, J_3, K_3, \ldots$. Их объединение содержит как M_1 так и M_2, а значит и $M = M_1 \cup M_2$, то есть является покрытием этого множества отрезками. Докажем, что сумма длин отрезков этого покрытия не превосходит ε. Для этого обозначим длины отрезков J_m через a_m, а K_m — через b_m. Тогда сумма длин отрезков последовательности $J_1, K_1, J_2, K_2, ...$ равна

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots) + (b_1 + b_2 + \cdots) \tag{7}$$

Так как, по предположению, $a_1 + a_2 + \cdots \le \frac{\varepsilon}{2}$ и $b_1 + b_2 + \cdots \le \frac{\varepsilon}{2}$, то сумма в левой части равенства (7) не превосходит $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, то есть ε, что и надо было доказать.

Это рассуждение требует одного уточнения, которое касается формулы (7). Если бы мы имели дело с конечными суммами, то речь шла бы об утверждении, что скобки при вычислении суммы можно расставлять произвольно. Это следует из распределительного и сочетательного законов для сложения (аксиомы I_1 и I_2 из §1 гл.V). Но для бесконечных сумм мы таких аксиом не выводили и поэтому равенство (7) требует доказательства. Впрочем, сейчас нам достаточно меньшего — доказать, что левая часть равенства (7) не превосходит правую. Пусть $a_1 + a_2 + \cdots = \alpha$, $b_1 + b_2 + \cdots = \beta$. Любая конечная сумма в левой части равенства (7) разобьется на ряд слагаемых $a_1, a_2, ..., a_n$ и слагаемых $b_1, b_2, ..., b_m$ ($m = n$ или $n-1$ в зависимости от того, на четном или нечетном месте мы оборвали сумму в левой части равенства (7)). Но (по правилу действий с конечными суммами) эта сумма равна $a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_m$. Так как $a_1 + \cdots + a_n \le \alpha$, $b_1 + \cdots + b_m \le \beta$, то и вся наша конечная сумма не превосходит $\alpha + \beta$. это и значит, что бесконечная сумма в левой части равенства (7) не превосходит $\alpha + \beta$.

Отсюда по индукции, очевидно, сразу следует, что объединение конечного числа тонких множеств — тонкое множество. Но верно и более сильное утверждение, содержащее как частный случай теорему 6.

Теорема 7. *Объединение счетного числа тонких множеств — тонкое множество.*

Доказательство совершенно такое же, как доказательство предшествующей теоремы, поэтому мы изложим его более кратко. Пусть $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ — счетное множество тонких множеств и M — их объединение. Пусть задано положительное число ε. Мы построим покрытие множества M счетным числом отрезков, сумма длин которых не превосходит ε — тем самым будет доказано, что M — тонкое множество. Так как каждое из множеств M_n — тонкое, то, по определению, оно обладает покрытием из счетного числа отрезков, сумма длин которых не превосходит $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Рассмотрим теперь все отрезки, входящие во все рассмотренные выше покрытия. Пусть покрытие множества M_1 имеет вид: $M_1 \subset I_1 \cup I_2 \cup \ ...$, для множества $M_2: \ M_2 \subset J_1 \cup J_2 \cup \ ...$, для множества $M_3: \ M_3 \subset K_1 \cup K_2 \cup \ ...$ и так для всех M_n при $n = 1, 2, 3...$ Мы рассматриваем теперь множество всех отрезков I_r, всех отрезков J_s, всех отрезков K_t и так далее. Полученное множество отрезков является объединением счетного числа счетных множеств (так как каждое множество M_n покрывается счетным множеством интервалов). По теореме мы получаем счетное множество отрезков. Сумма их длин не превосходит $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots = \varepsilon$. Это и доказывает теорему.

Заметьте, что здесь мы встречаемся с тем же вопросом, что и доказательстве теоремы 6 в связи с равенством (7), только в более сложной ситуации. Мы имеем теперь счетное число равенств: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \alpha$, $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \beta$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \gamma$ и так далее. Потом мы смешиваем все числа a_i, b_j, c_k и так далее, как-то перенумеровываем и рассматриваем их сумму. Нам достаточно убедиться, что полученная сумма не превосходит $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$. Доказательство дословно то же, что и теореме 6, и мы его пропустим.

Наконец, рассмотрим еще одно, самое важное свойство тонких множеств. Именно, мы должны еще убедиться, что предпосылки, из которых мы исходили, формулируя определение этого понятия, не противоречат друг другу. Мы исходили из того, что длина отрезка $[a, b]$, содержащегося в отрезке $[0, 1]$, рана $b - a$; тонкое множество имеет "длину 0", а "длина" подмножества не превосходит "длину" множества. Если бы оказалось, что отрезок $[a, b]$ (с $b \neq a$) является тонким множеством, то наша теория была бы противоречивой. Мы докажем, что это не так. Тем самым мы впервые приведем пример множества, не являющегося тонким — до сих пор мы только доказывали, что то или иное множество — тонкое. Если в нашей теории тонкие множества играют такую же роль, как счетные в §2, то отрезок играет роль континуума и теорема, которую мы докажем, аналогична несчетности континуума (теореме 2).

Теорема 8. *Отрезок не является тонким множеством.*

Пусть нам задан отрезок $I = [a, b]$, вопреки утверждению теоремы обладающий для любого $\varepsilon > 0$ покрытием отрезками, сумма длин которых не превосходит ε. Обозначим через

$$I \subset I_1 \cup I_2 \cup ...$$

такое покрытие, а через α_k — длину отрезка I_k, так что сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ не превосходит ε. Дальше мы увидим, что удобнее иметь дело с отрезками (a_k, b_k), у которых удалены концы a_k и b_k (это множество таких чисел x, что $a_k < x < b_k$). Такие отрезки мы будем называть *интервалами* и обозначать буквами $J_1, J_2, ...$

и символом (a_k, b_k). Длиной интервала $J = (c, d)$ мы по-прежнему будем называть число $d - c$. Докажем, что отрезок I обладает покрытием интервалами, сумма длин которых сколь угодно мала. Для этого возьмем произвольное положительное сколь угодно малое число η и включим отрезок $I_k = [a_k, b_k]$ в интервал $J_k = \left(a_k - \frac{\eta}{2^{k+1}}, b_k + \frac{\eta}{2^{k+1}}\right)$. Его длина отличается от длины отрезка I_k на $\frac{\eta}{2^k}$. Поэтому сумма их длин не превосходит $\left(\alpha_1 + \frac{\eta}{2}\right) + \left(\alpha_2 + \frac{\eta}{4}\right) + \cdots + \left(\alpha_n + \frac{\eta}{2^n}\right) + \cdots \leq \varepsilon + \eta\left(\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} + \cdots\right) = \varepsilon + \eta$. С другой стороны, по построению, $I_k \subset J_k$ и поэтому

$$I \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots \subset J_1 \cup J_2 \cup \ldots \tag{8}$$

так что $J_1, J_2, \ldots$ — покрытие отрезка I. Так как за ε и η можно взять сколь угодно малые числа, то интервалы J_k можно выбрать так, что сумм их длин будет сколь угодно малой.

Сначала уясним себе на самом деле очевидный факт — что теорема верна, если число интервалов конечно. Пусть J_1 — интервал, содержащий хоть одно число из отрезка I. Если интервал J_k с ним пересекается, то они образуют вместе единый интервал $J_1 \cup J_k$, длина которого не превосходит $\alpha_1 + \alpha_k$. Если есть интервал J_l, пересекающий интервал $J_1 \cup J_k$, то рассмотрим интервал $J_1 \cup J_k \cup J_l$ длины не превосходящей $\alpha_1 + \alpha_k + \alpha_l$. Так мы соберем в интервал J' группу интервалов $J_1, J_k, J_l, \ldots$ и еще останутся интервалы, ни один из них не пересекающие. Интервал J' должен содержать отрезок I. Действительно, пусть $J' = (a', b')$. Если, например, $b' \leq b$, то b' уже не может принадлежать никакому из оставшихся сверх J' интервалов: если $b' \in J_r$, $J_r = (a_r, b_r)$, то по условию $a_r < b'$ (тут важно, что мы рассматриваем интервалы без концов), а тогда интервалы J' и J_r пересекались бы: любое число между a_r и b' принадлежало бы обоим. Это противоречит предположению. Таким образом, $b' > b$ и аналогично $a' < a$, то есть $I \subset J'$. Но как мы видели, длина интервала J' не превосходит $\alpha_1 + \alpha_k + \alpha_l + \cdots$ и тем более не превосходит суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ длин всех интервалов $J_1, J_2, \ldots$ Эта сумма, в свою очередь, не превосходит $\varepsilon + \eta$, то есть $b' - a' \leq \varepsilon + \eta$. Мы можем выбрать ε и η сколь угодно малыми и, в частности такими, что $\varepsilon + \eta < b' - a'$. Это и противоречие и доказывает теорему в нашем случае.

Теперь приступим к рассмотрению более тонкого случая — когда число интервалов бесконечно. Рассмотрим интервал J_k как подмножество множества всех действительных чисел, обозначим через $\overline{J_k}$ его дополнение и положим $I'_k = \overline{J_k} \cap I$. Иными словами, I'_k — это множество чисел из отрезка I, не принадлежащих интервалу J_k. Данное нам соотношение (8) равносильно тому, что

$$I'_1 \cap I'_2 \cap I'_3 \cdots = \emptyset. \tag{9}$$

Действительно, соотношение (9) — это по-другому записанное утверждение, что каждое число отрезка I принадлежит некоторому интервалу J_k — то есть соотношение (8).

Множество I'_k — не обязательно отрезок: это может быть отрезок или два отрезка, причем теперь в отрезки включаются и их концы, так же рассматривается и случай, когда отрезок сводится к точке: $[a, a] = a$ (рис. 6).

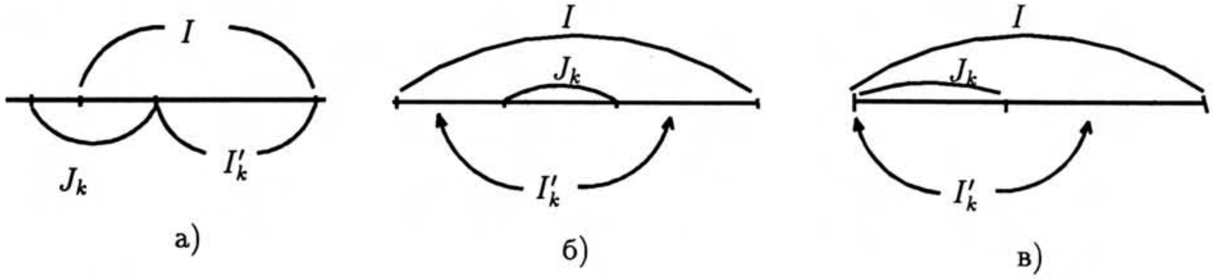


рис. 6.

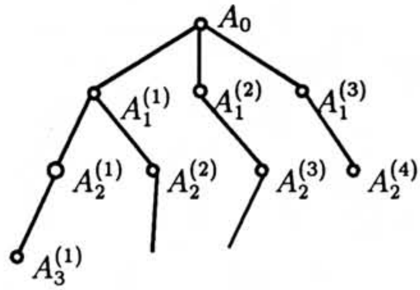


рис. 7.

Положим $A_n = I'_1 \cap I'_2 \cap \cdots \cap I'_n$. Соотношение (9) означает, что $A_n \supset A_{n+1}$,

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \emptyset. \tag{10}$$

Мы получаем картинку, очень похожую на ту, с которой имели дело в аксиоме о стягивающихся отрезках. Если бы множества A_n были отрезками, то мы могли бы применить эту аксиому и вывести из нее, что существует число x, принадлежащее всем им. Это противоречие с соотношением (10) и доказывало бы теорему. Однако A_n — вообще говоря, не отрезки, а немного более сложные множества.

Теперь нам остается только рассмотреть эту трудность. Так как объединение двух отрезков состоит из непересекающихся отрезков (в числе их, может быть, точки), то и A_n состоит из непересекающихся отрезков (может быть, вырождающихся в точки). Обозначим эти отрезки (или точки) через $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(k)}$. За A_0 возьмем весь отрезок I. Изобразим эту систему отрезков, изображая каждый отрезок $A_n^{(i)}$ кружком и располагая их друг под другом в порядке возрастания n (рис. 7). При этом кружок, изображающий какой-то отрезок $A_n^{(i)}$, соединим с точкой, изображающей $A_{n+1}^{(j)}$, если $A_n^{(i)} \supset A_{n+1}^{(j)}$. Мы будем говорить, что кружок $A_n^{(j)}$ лежит ниже кружка $A_m^{(i)}$ $(m < n)$, если от $A_m^{(i)}$ можно пройти к $A_n^{(j)}$, спускаясь вниз по отрезкам. Это значит, что отрезок $A_n^{(j)}$ содержится в отрезке $A_m^{(i)}$. Под кружком $A_n^{(i)}$ не лежит никакого кружка, если пересечение отрезка $A_n^{(i)}$ с множеством I'_{n+1} пусто.

На рис. 7 мы получаем фигуру, напоминающую разветвленную корневую систему. Она может относиться к одному из двух типов. а) В ней содержится всего конечное число кружков. Если все они имеют вид $A_m^{(i)}$ с $m \le n$, то под каждым кружком $A_n^{(i)}$ не лежит никакого кружка. Следовательно, $A_n^{(i)} \cap I'_{n+1} = \emptyset$, а так как $A_n = I'_1 \cap \cdots \cap I'_n$ и $A_n = \bigcap A_n^{(i)}$, то $I'_1 \cap \cdots \cap I'_{n+1} = \emptyset$. Это значит, что соотношение (9) имеет место уже для системы отрезков $I'_1, ..., I'_{n+1}$, а соотношение (8) — для системы интервалов $J_1, ..., J_{n+1}$. Но это случай конечного числа интервалов, который мы уже разобрали. б) Фигура, изображенная на рис. 7 содержит бесконечное число кружков. Если мы найдем в ней линию, спускающуюся неограниченно вниз (то есть линию $A_1^{(i)}, A_2^{(j)}, A_3^{(k)}, ...$, где $A_2^{(j)}$ ниже $A_1^{(i)}$, $A_3^{(k)}$ — ниже $A_2^{(j)}$ и т.д.) то получим систему вложенных отрезков $A_1^{(i)} \supset A_2^{(j)} \supset A_3^{(k)} \supset \dots$. Согласно аксиоме о вложенных отрезках (см. аксиому VII в §1 гл. V), эта система отрезков должна содержать хотя бы одно число x (здесь существенно, что отрезки $A_n^{(i)}$ рассматриваются вместе с концами).

Правда, у нас ситуация немного более общая, так как среди отрезков $A_n^{(i)}$ могут быть вырожденные отрезки $[a_k, b_k]$ с $b_k = a_k$, то есть точки. Но в этой рассмотренной ситуации аксиома о вложенных отрезках также верна: если один из цепочки вложенных отрезков сводится к точке x, то и все следующие отрезки должны совпадать с x. Таким образом, всегда существует число x, которое принадлежит каждому множеству A_n и значит $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$, что противоречит условию (10).

Проверим, что такую неограниченно спускающуюся вниз линию всегда в нашем случае можно найти. Это очень просто. По условию, все множество кружков на рис. 7 в нашем случае бесконечно. Значит, под A_0 лежит бесконечное число кружков. Отсюда следует, что для некоторого i под $A_1^{(i)}$ лежит бесконечное число кружков. Отсюда следует, что для некоторого кружка $A_2^{(j)}$, лежащего под $A_1^{(i)}$, под $A_2^{(j)}$ лежит бесконечное число кружков. Продолжая, мы получим бесконечную линию: $A_0, A_1^{(i)}, A_2^{(j)}, ...$, неограниченно спускающуюся вниз. Это завершает доказательство теоремы 7. Ввиду теоремы 4 из теоремы 7 вытекает несчетность отрезка (теорема 2). Мы получили уже третье доказательство этой теоремы.

Теперь впервые мы можем утверждать, что вообще существует множество, не являющееся тонким. Таков, например, весь отрезок. Но более того, тонкое множество столь "мало", что не может содержать никакого отрезка, сколь угодно малой длины. Это оправдывает представление о тонких множествах, как о множествах "бесконечно меньших" (докажите это!) интервала... В связи с этим говорят, что некоторое свойство выполняется *для почти всех чисел*, если множество чисел, не обладающих этим свойством — тонкое. Например, почти все числа иррациональны, почти все числа трансцендентны.

До сих пор мы обсуждали общие свойства тонких множеств — примеров таких множеств мы еще имеем мало. Собственно, мы знаем только, что конечные и счетные множества являются тонкими. Сейчас мы приведем один из наиболее интересных примеров тонкого, но не счетного множества.

Это множество связано с представлением чисел отрезка $[0, 1]$ десятичными дробями. Выберем некоторую цифру — дальше мы будем для определенности считать, что это цифра 2. Обозначим через M множество всех чисел отрезка, в записи которых как десятичной дроби, наша цифра не встречается. Мы докажем, что множество M не счетно и тонко. То, что множество M не счетно, — очевидно. Оно содержит подмножество M', состоящее из всех дробей, в записи которых встречается только две цифры, причем обе отличные от 2 — например, 0 и 1. Множество таких дробей, очевидно, равномощно множеству последовательностей $a_1, a_2, a_3, \ldots$ где все a_i равны 0 или 1. Мы знаем, что множество M' не счетно (задача 6 к §2). Так как подмножество счетного множества счетно, то отсюда следует, что и множество M не счетно. Нетрудно доказать, что M континуально (задача 4).

Докажем теперь, что множество M тонко. Обозначим через M_n множество тех чисел отрезка $[0,1]$ в десятичной записи которых среди первых n цифр не содержится 2. Таким образом, запись любого числа $x \in M_n$ имеет вид:

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \tag{11}$$

где $a_1 \neq 2,\ a_2 \neq 2,\ \ldots, a_n \neq 2$, а дальше идут любые цифры (разумеется из числа $0, 1, \ldots, 9$). Очевидно, что $M_n \supset M$, и мы построим для каждого n покрытие множества M_n отрезками так, что сумма длин отрезков этого покрытия есть число, неограниченно приближающееся к 0 с возрастанием n. Так как $M_n \supset M$, то покрытие множества M_n будет одновременно и покрытием множества M и тем самым будет доказано, что M является тонким множеством.

Зафиксируем любые n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и спросим себя: как выглядит множество чисел, представление которых десятичной дробью имеет на первых n местах именно эти числа? Иначе говоря, числа из нашего множества имеют представление десятичной дробью вида (11), где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фиксированы, а остальные цифры произвольные. Положим

$$\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_n 00 \ldots 0, \qquad \beta = 0, 00 \ldots 0 a_{n+1} a_{n+2} \ldots$$

где у β первые n цифр после запятой равны 0, а следующие — те же, что у x. Тогда $x = \alpha + \beta$, причем α для всех чисел нашего множества — одно и то же, а β пробегает все числа с n нулями после запятой. Иначе говоря,

$$\beta = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots = \frac{1}{10^n}\Big(\frac{a_{n+1}}{10} + \frac{a_{n+2}}{10^2} + \cdots\Big).$$

Так как цифры $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ — произвольные, то в скобках стоит представление произвольного числа y, $0 \le y < 1$ и $\beta = \alpha + \frac{1}{10^n} y$, то есть β (а значит, и все наше множество) содержится в отрезке $[\alpha, \alpha + \frac{1}{10^n}]$. Мы рассмотрели числа с фиксированными n первыми цифрами. Возможных наборов этих n цифр $a_1, \ldots, a_n$, для которых все $a_i \neq 2$ будет, согласно теореме гл. III, 9^n, так как множество наборов цифр равномощно произведению n множеств из девяти элементов: $(0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.(Мы пропускаем 2) Таким образом, наше множество M_n покрывается 9^n отрезками вида $[\alpha, \alpha + \frac{1}{10^n}]$. каждый из этих отрезков имеет длину $\frac{1}{10^n}$ и сумма их длин равна $\frac{9^n}{10^n} = \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Так как $\frac{9}{10} < 1$, то согласно лемме 2 в §1 гл. V, $\left(\frac{9}{10}\right)^n \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Это и доказывает наше утверждение.

Покрытие множества M_n 9^n отрезками длины $\frac{1}{10^n}$ изображено на рис. 8 для случаев $n = 1$ и 2. Чтобы построить покрытие множества M_1, достаточно уда-

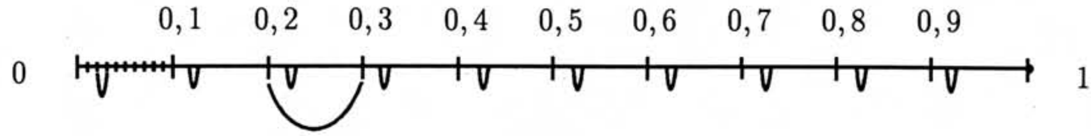


рис. 8

лить внутренность помеченного дугой отрезка $[0,2\ ,\ 0,3]$. Останется 9 отрезков $[0\ ,\ 0,1]$, $[0,1\ ,\ 0,2]$, $[0,3\ ,\ 0,4]$, $[0,4\ ,\ 0,5]$, $[0,5\ ,\ 0,6]$, $[0,6\ ,\ 0,7]$, $[0,7\ ,\ 0,8]$, $[0,8\ ,\ 0,9]$, $[0,9\ ,\ 1]$, каждый длины $\frac{1}{10}$. Чтобы построить покрытие множества M_2, надо из каждого из этих 9 интервалов удалить внутренность еще одного отрезков длины $\frac{1}{100}$. Они помечены маленькими дугами. Например, из отрезка $[0\ ,\ 0,1]$ — удалить внутренность отрезка $[0,02\ ,\ 0,03]$, из $[0,1\ ,\ 0,2]$ — внутренность отрезка $[0,12\ ,\ 0,13]$ и т.д. В каждом большом отрезке останется 9 отрезков длины $\frac{1}{100}$, а так как больших отрезков 9, то всего их будет 9^2 с суммой длин, равной $\frac{9^2}{10^2}$.

Пусть g — одна из цифр $0,1,...,9$. Обозначим через M_g множество чисел в отрезке $[0,1]$, десятичное представление которых не содержит цифры g. Мы доказали, что M_g — тонкое множество (для конкретности мы рассматривали множество M_2). Отсюда, ввиду теоремы 6 их объединение $M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_9$ является тонким множеством. Иначе говоря, в почти всех десятичных дробях (в отрезке $[0,1]$) встречаются *все* цифры.

Но это утверждение — лишь очень частный случай гораздо более общей закономерности. Оказывается, что для почти всех десятичных дробей каждая цифра "в среднем" встречается одинаковое число раз. Это имеет следующий точный смысл. Выберем произвольную цифру g. Для заданного числа x из отрезка $[0,1]$ обозначим через k_n число раз, которое цифра g встречается среди его первых n знаков. Например, для числа $x = 0,12237152097$ и $g = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 2$, $k_5 = 2$, $k_6 = 2$, $k_7 = 2$, $k_8 = 3$, $k_9 = 3$, $k_{10} = 3$, $k_{11} = 3$. Число k_n зависит от выбора цифры g. Например, для того же числа x и $g = 1$ $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1$, $k_6 = 2$, $k_7 = 2$, $k_8 = 2$, $k_9 = 2$, $k_{10} = 2$, $k_{11} = 2$. Если для фиксированного n сложить числа k_n, вычисленные для всех цифр $g = 0,1,2,...,9$, то получим n — общее число первых n цифр. Если бы среди первых n цифр числа x каждая цифра g встречалась одинаковое число раз, то для всех число k_n было бы одним и тем же, а именно, $\frac{n}{10}$. То есть, мы имели бы $\frac{k_n}{n} = \frac{1}{10}$. Мы будем говорить, что все цифры g встречаются в десятичной записи в *среднем* одинаковое число раз, если то же соотношение выполняется в пределе, то есть, $\frac{k_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{10}$ при $n \longrightarrow \infty$ и это верно для чисел k_n, вычисленных для любой цифры $g = 0,1,2,...,9$. Короче, такие числа называются *нормальными*. Замечательная теорема утверждает, что *почти все числа являются нормальными*, то есть, множество чисел, не являющихся нормальными —- тонкое. Это, конечно, гораздо больше того, что мы доказали. Если какая-то цифра g в десятичной записи числа не встречается, то для нее все числа

$k_n = 0$ и $\frac{k_n}{n} \longrightarrow 0$, так что число конечно не нормально.

То, что почти все числа нормальны — весьма поразительный факт. Действительно, легко построить числа, весьма отличающиеся от нормальных, например, такие, что для заданной цифры g и вычисленных для нее чисел k_n мы будем иметь $\frac{k_n}{n} \longrightarrow p$, где p — любое число между 0 и 1; или такие, что для цифры 0 числа k_n будут удовлетворять условию $\frac{k_n}{n} \longrightarrow 0$, а для цифры 1 — условию $\frac{k_n}{n} \longrightarrow 1$; или такие, что для заданной цифры g числа $\frac{k_n}{n}$ не стремятся ни к какому пределу (задачи 6, 7 и 8). Казалось бы в распределении цифр произвольной десятичной дроби господствует полный хаос и лишь в исключительно редких случаях выполняется простая закономерность (то есть число — нормально). Оказывается же, что закономерность имеет место почти всегда, а "хаос" встречается лишь у чисел, составляющих тонкое множество.

Доказательство теоремы о том, что почти все числа нормальны, основывается на соображениях, с которыми мы уже встречались в этой главе или в других местах книги. Однако, оно несколько сложно и мы отнесем его в Приложение.

Задачи

1. Докажите, что множество иррациональных чисел не содержит никакого отрезка.

2. Докажите, что множество иррациональных чисел — не тонкое.

3. Докажите равенство

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \cdots = (a_1 + a_2 + \cdots) + (b_1 + b_2 + \cdots)$$

в предположении, что обе суммы в скобках в правой части существуют (в тексте было доказано только, что левая часть не превосходит правой).

4. Докажите, что множество чисел в отрезке $[0, 1]$ в десятичное представление которых не входит цифра 2, континуально. (Указание: Воспользоваться задачей 6 к §2.)

5. В тексте было доказано, что множество M_n тех чисел в отрезке $[0, 1]$, в десятичном представлении которых среди первых n цифр не встречается 2, покрывается 9^n отрезками длины $\frac{1}{10^n}$. Какие числа из этих отрезков не содержатся в множестве M_n?

6. Для любого действительного числа p, $0 \leq p \leq 1$, постройте действительное число x, для которого последовательность чисел k_n, вычисленная для цифры 2, такова, что $\frac{k_n}{n} \longrightarrow p$, при $n \longrightarrow \infty$.

7. Заданы два неотрицательные действительные числа p и q, такие, что $p+q \leq 1$. Постройте такое действительное число x, что для него последовательность k_n, вычисленная для цифры 2, такова, что $\frac{k_n}{n} \longrightarrow p$, при $n \longrightarrow \infty$, а последовательность k'_n, вычисленная для цифры 3, такова, что $\frac{k'_n}{n} \longrightarrow q$, при $n \longrightarrow \infty$.

8. Постройте такое действительное число x, что вычисленная для цифры 2 последовательность k_n обладает тем свойством, что $\frac{k_n}{n}$ не стремится ни к какому пределу при $n \longrightarrow \infty$.

Приложение

Нормальные числа

Мы будем рассматривать действительные числа x, расположенные между 0 и 1, то есть принадлежащие отрезку $[0,1]$. Запишем такое число в виде бесконечной десятичной дроби

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \qquad (1)$$

Напомним, что число x называется ***нормальным***, если любая цифра r, $0 \le r \le 9$ встречается в записи x "одинаково часто". Это выражение имеет следующий смысл. Обозначим через k_n число раз, которое цифра r встречается среди первых n цифр $a_1, a_2, .., a_n$ дроби (1). Мы требуем, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{k_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{10} \qquad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty \qquad (2).$$

Таким образом, число x называется нормальным, если условие (2) выполняется для любого $r = 0, 1, ..., 9$. Дело в том, что для каждого такого r последовательность чисел k_n — своя. Мы можем для каждого r обозначить через N_r множество чисел x, для которых условие (2) выполнено для заданного r (последовательность чисел k_n построена по этому r). Тогда

$$N = N_0 \cap N_1 \cap \dots \cap N_9, \qquad (3)$$

где N — множество всех нормальных чисел.

Настоящее приложение посвящено доказательству следующего утверждения.

Теорема. *Множество чисел отрезка* $[0,1]$*, не являющихся нормальными — тонкое.*

Сначала тщательно проанализируем, что нам, собственно, надо доказать. Множество чисел, не являющихся нормальными, это, очевидно, есть множество $\overline{N}$, где N рассматривается как подмножество отрезка $[0,1]$, а $\overline{N}$ — его дополнение. Из соотношения (3) следует, что

$$\overline{N} = \overline{N_0} \cup \overline{N_1} \cup \dots \cup \overline{N_9}.$$

Так как объединение конечного числа тонких множеств — тонкое множество, то нам достаточно доказать, что каждое множество $\overline{N_r}$ — тонкое (для $r = 0, 1, ..., 9$). Поэтому дальше цифра r будет фиксирована и мы будем рассматривать множество $\overline{N_r}$ тех чисел отрезка $[0,1]$, для которых не выполнено условие (2), предполагая, что последовательность чисел k_n строится по цифре r (то есть показывает, сколько раз r встречается среди цифр $a_1, a_2, ..., a_n$).

Обозначим через U множество, $\overline{N_r}$, то есть, множество чисел x в отрезке $[0,1]$, для которых не выполнено соотношение (2) (для фиксированной цифры r). Вспомним, что означает соотношение(2): это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n(\varepsilon)$, что

$$\left| \frac{k_n}{n} - \frac{1}{10} \right| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad n > n(\varepsilon).$$

Если x не обладает этим свойством, то значит, для него существует такое ε, что неравенство $\left|\frac{k_n}{n} - \frac{1}{10}\right| < \varepsilon$ не выполнено для некоторых значений n, которые превосходят любую наперед заданную величину. Иначе говоря, для x

$$\left|\frac{k_n}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq \varepsilon \qquad (4)$$

для бесконечного числа значений n. Обозначим множество таких чисел x (с заданным ε) через $U(\varepsilon)$. Тогда для каждого числа $x \in U$ существует такое ε, что $x \in U(\varepsilon)$, иначе говоря U есть объединение всех $U(\varepsilon)$. Это описание можно несколько упростить. Действительно, заметим, что по самому смыслу определения $U(\varepsilon_1) \supset U(\varepsilon_2)$ если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Поэтому любое множество $U(\varepsilon)$ содержится в некотором $U\left(\frac{1}{m}\right)$ при m достаточно большом (таком, что $\varepsilon < \frac{1}{m}$), так что объединение всех $U(\varepsilon)$ (для всех ε) совпадает с объединением всех $U\left(\frac{1}{m}\right)$, то есть с $\bigcup U\left(\frac{1}{m}\right)$. Можно было бы с тем же успехом вместо последовательности чисел $\frac{1}{m}$ взять любую последовательность чисел ε_m, стремящуюся к 0. Нам существенно только, что множество U есть объединение множеств $U(\varepsilon_m)$ для некоторой счетной последовательности чисел ε_m : $U = \bigcup U(\varepsilon_m)$. Так как объединение счетного числа тонких множеств является тонким множеством, то нам достаточно доказать, что каждое из множеств $U(\varepsilon_m)$ — тонкое. Мы и докажем, что *множество $U(\varepsilon)$ является тонким для любого $\varepsilon > 0$.*

Обозначим через $V(n, \varepsilon)$ множество чисел, для которых выполнено неравенство (4) для заданных n и ε. Тогда то, что $x \in U(\varepsilon)$ означает, что $x \in V(n_i, \varepsilon)$ для некоторой бесконечной последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$. То есть, сколь бы большим мы ни выбрали натуральное число N, $x \in V(n, \varepsilon)$ при некотором $n > N$.

Положим
$$U_N(\varepsilon) = V(N, \varepsilon) \cup V(N+1, \varepsilon) \cup V(N+2, \varepsilon) \cup \cdots$$

Короче, это можно записать как

$$U_N(\varepsilon) = \bigcup_{n \geq N} V(n, \varepsilon). \qquad (5)$$

Мы можем, следовательно, сказать, что $x \in U_N(\varepsilon)$ и значит

$$U(\varepsilon) \subset U_N(\varepsilon) \qquad (6)$$

для всех N. Мы докажем, что при достаточно большом N множество $U_N(\varepsilon)$ можно покрыть отрезками, сумма длин которых сколь угодно мала. Ввиду соотношения (6) это и докажет, что множество $U(\varepsilon)$ — тонкое.

Все это было чисто логическим расшифрованием того, что же, в сущности, означает формулировка теоремы. Теперь мы должны посмотреть на то, из каких же чисел состоят в действительности наши множества. Ключом ко всему вопросу является множество $V(n, \varepsilon)$ и если к ним присмотреться, то окажется, что каждое из них является объединением конечного числа отрезков, так же как это было в случае множества дробей с отсутствующей цифрой в §3.

Действительно, предположим сначала, что первые n десятичных знаков фиксированы. Тогда

$$x = 0, a_1 a_2 ... a_n c_{n+1} c_{n+2} ...$$

где $a_1, ..., a_2$ — фиксированы, а c_i — любые (разумеется это цифры $0, 1, 2, ..., 9$). Положим $\alpha = 0, a_1 a_2 ... a_n$, $\gamma = 0, 0...0 c_{n+1} c_{n+2} ...$, где у γ первые n цифр заменены нулями. Тогда $x = \alpha + \gamma$, где α фиксировано, а γ пробегает любые числа вида $\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots$. Иными словами, $\gamma = \frac{1}{10^n}\beta$, $\beta = 0, c_{n+1} c_{n+2} ...$, то есть β — бесконечная десятичная дробь, задающая произвольное число в отрезке $[0, 1]$ кроме $\beta = 1$. Значит, $x = \alpha + \frac{1}{10^n}\beta$, α — фиксировано, β — любое в отрезке $[0, 1]$, $\beta \neq 1$. Ясно, что такие числа содержатся в отрезке $\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{10^n}\right]$ длины $\frac{1}{10^n}$. Таким образом, множество $V(n, \varepsilon)$ распадается на отрезки длины $\frac{1}{10^n}$, а число отрезков равно числу последовательностей $a_1, a_2, ..., a_n$ (состоящих из цифр $0, 1, ..., 9$), в которых фиксированная цифра r встречается k раз, где k удовлетворяет соотношению (4):

$$\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{10}\right| \geq \varepsilon. \tag{7}$$

Теперь нам надо вычислить число последовательностей, в которых цифра r встречается заданное число k раз. Если r стоит на *фиксированных* k местах, то на оставшихся $n-k$ местах стоят любые из 9-ти цифр, отличных от r. Значит, *таких* последовательностей будет всего 9^{n-k}. (Мы применяем теорему 1 гл. III). Кроме того, эти k возможных мест из n мест последовательности можно выбрать C_n^k способами (где C_n^k — биномиальный коэффициент, то есть число подмножеств из k элементов в множестве из n элементов, как показывает теорема 3 гл. III). Всего же число интересующих нас последовательностей будет равно

$$C_n^k 9^{n-k}.$$

Окончательный ответ будет таков: число последовательностей $a_1 a_2, ..., a_n$ равно $T_n(\varepsilon)$, где

$$T_n(\varepsilon) \quad \text{есть сумма выражений} \quad C_n^k 9^{n-k} \tag{8}$$

для всех чисел k, удовлетворяющих неравенству (7).

Поразительным образом мы пришли в почти к той самой сумме, которая возникла в связи с теоремой Чебышева о схеме Бернулли в приложении к гл. III. Чтобы увидеть их связь, разделим сумму $T_n(\varepsilon)$ на 10^n. Мы получим, что $\frac{1}{10^n}T_n(\varepsilon)$ равно сумме выражений $C_n^k \left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{9}{10}^{n-k}$ для всех значений k, удовлетворяющих соотношению (7). Полагая здесь $p = \frac{1}{10}$, $q = \frac{9}{10}$, мы получим сумму S_ε, рассматривавшуюся в приложении к гл. III.

Можно было бы сделать немного понятнее, почему рассмотрение двух казалось бы совсем разных вопросов приводит в точности к одному и тому же выражению.

Именно, последовательности $a_1, a_2, .., a_n$ можно рассматривать как схему Бернулли I^n, где вероятностная схема I состоит из двух событий: цифра$=r$ с вероятностью $\frac{1}{10}$ и цифра $\neq r$ с вероятностью $\frac{9}{10}$. Но мы не будем уточнять эту связь, так как все равно не сможем применить результаты, доказанные в приложении к гл. III. Дело в том, что вместо теоремы, доказанной там, нам будет нужно более точное неравенство, которое мы здесь докажем. Мы сформулируем и докажем его в ситуации, рассматривавшейся в гл. III, когда вероятность p была произвольным числом между 0 и 1. Потом мы будем применять его в случае $p = \frac{1}{10}$, но полезно будет иметь его в виду и в более общем случае.

Усиленное неравенство Чебышева. *Сумма S_ε всех выражений $C_n^k p^k q^{n-k}$ для всех k, для которых $0 \leq k \leq n$ и выполнено неравенство (7), не превосходит $\frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}$.*

Доказательство этого неравенства мы приведем позже, а сейчас изложим вывод из него теоремы. Мы видели, что множество $V(n, \varepsilon)$ содержится в объединении отрезков длины $\frac{1}{10^n}$, а число отрезков равно $T_n(\varepsilon)$. С другой стороны, мы только что заметили, что $\frac{1}{10^n} T_n(\varepsilon) = S_\varepsilon$, так что $T_n(\varepsilon) = 10^n S_\varepsilon$, а поскольку длина каждого отрезка есть $\frac{1}{10^n}$, то сумма их длин в точности равна $S_n(\varepsilon)$. Согласно усиленному неравенству Чебышева, $S_\varepsilon \leq \frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}$. Таким образом, множество $V(n, \varepsilon)$ есть объединение конечного числа отрезков, сумма длин которых не превосходит $\frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}$.

Теперь вспомним, что согласно соотношению (5) $U_N(\varepsilon)$ есть объединение всех $V_n(\varepsilon)$ при $n \geq N$ и значит множество $U_N(\varepsilon)$ содержится в объединении отрезков, сума длин которых не превосходит

$$\frac{1}{4\varepsilon^4} \left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \cdots \right). \tag{9}$$

С такой суммой мы встречались в §2 гл. V (см. лемму). Мы видели там, что из ограниченности сумм $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ для всех натуральных n следует, что сумма

$$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \cdots$$

будет меньше любого наперед заданного положительного числа, если только выбрать N достаточно большим. Поэтому мы можем выбрать N столь большим, что сумма (9) будет меньше, чем любое наперед заданное число $\delta > 0$. Из этого следует, что при достаточно большом N множество $U_N(\varepsilon)$ содержится в объединении счетного числа отрезков, сумма длин которых меньше, чем δ. Наконец вспомним, что согласно соотношению (6) множество $U(\varepsilon)$ содержится в любом $U_N(\varepsilon)$. Поэтому для $U(\varepsilon)$ верно, что для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ это множество содержится в объединении счетного числа отрезков, сумма длин которых меньше, чем δ. Иными словами, множество $U(\varepsilon)$ — тонкое. Мы уже показали раньше, что из этого следует утверждение теоремы: дополнение $\overline{N}$ множества всех нормальных чисел — тонкое множество.

Нам осталось доказать сформулированное выше усиленное неравенство Чебышева. Тем, кто решил задачу 5 в приложении к гл. III, делать больше ничего не нужно — в задаче предлагалось доказать нужное нам усовершенствованное неравенство Чебышева. Для тех же, кто эту задачу не сделал, мы приведем здесь доказательство. Оно может испугать читателя, так как требует выписывания длинных формул, занимающих три страницы, но идея его ничем не отличается от той, на которой основано доказательство неравенства Чебышева в приложении к гл. III. Приходится только раскрывать скобки и приводить подобные члены.

Рассмотрим сумму S_ε, состоящую из слагаемых $C_n^k p^k q^{n-k}$ для всех k, для которых $0 \leq k \leq n$ и $\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon$. Следуя доказательству неравенства Чебышева (приложение к гл. III) мы умножим в этой сумме каждое слагаемое $C_n^k p^k q^{n-k}$ на $\left(\frac{k-np}{n\varepsilon}\right)^4$, от чего сумма не уменьшится, так как мы рассматриваем только слагаемые с такими значениями k, что $\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon$, то есть $\left|\frac{k-np}{n\varepsilon}\right| \geq 1$. После этого мы рассмотрим сумму *всех* таких членов $\left(\frac{k-np}{n\varepsilon}\right)^4 C_n^k p^k q^{n-k}$ для всех $k = 0, 1, ..., n$. От этого сумма опять только возрастет, так как мы включим в нее новые положительные слагаемые. Полученную сумму обозначим $\overline{\overline{S_\varepsilon}}$ Как мы видели, $S_\varepsilon \leq \overline{\overline{S_\varepsilon}}$. Оказывается, что сумму $\overline{\overline{S_\varepsilon}}$ можно вычислить в явном виде, что и дает нужное неравенство.

В сумме $\overline{\overline{S_\varepsilon}}$ можно вынести за скобку общий знаменатель всех членов: $n^4\varepsilon^4$, то есть $\overline{\overline{S_\varepsilon}} = \frac{1}{n^4\varepsilon^4} P$, где P есть сумма всех членов $(k-np)^4 C_n^k p^k q^{n-k}$ для $k = 0, 1, ..., n$. Теперь развертываем выражение $(k-np)^4$ по формуле бинома для показателя 4:

$$(k-np)^4 = k^4 - 4k^3np + 6k^2n^2p^2 - 4kn^3p^3 + n^4p^4.$$

Мы получим, что

$$P = \sigma_4 - 4np\sigma_3 + 6n^2p^2\sigma_2 - 4n^3p^3\sigma_1 + n^4p^4\sigma_0, \tag{10}$$

где для любого $r \geq 0$ через σ_r обозначена сумма всех слагаемых $k^r C_n^k p^k q^{n-k}$ для $k = 0, 1, ..., n$. Как и при доказательстве неравенства Чебышева, нам нужно найти явные выражения для $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

Лемма. Пусть σ_r обозначает сумму членов $k^r C_n^k p^k q^{n-k}$ для $k = 0, 1, ..., n$. Тогда

$$\sigma_0 = 1, \tag{11}$$
$$\sigma_1 = kp, \tag{12}$$
$$\sigma_2 = n^2p^2 + npq, \tag{13}$$
$$\sigma_3 = n^3p^3 + 3n^2p^2q - npq(2p-1), \tag{14}$$
$$\sigma_4 = n^4p^4 + 6n^3p^3q - n^2p^2q(11p-7) + npq(1-6pq). \tag{15}$$

Доказательство заключается в последовательном повторении приема, при помощи которого была доказана лемма в приложении к гл. III.

Мы ввели там суммы σ_r, состоящие из слагаемых $k^r C_n^k p^k q^{n-k}$ для $k = 0, \ldots, n$ и нашли для них выражение $\sigma_r = q^n f_r^n(\frac{p}{q})$ (формула (8) приложения к гл. III), где $f_r(t)$

— многочлены, являющиеся суммой слагаемых $k^r C_n^k t^k$ для $k = 0, 1, \ldots, n$, так что задача сводится к нахождению многочленов $f_r(t)$. Они находятся последовательно из того, что $f_0(t) = (1+t)^n$ и

$$f_{r+1}(t) = f_r'(t)t \tag{16}$$

(см. формулу (10) в приложении к гл. III). Кроме того, мы уже нашли в гл. III многочлены $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (см. формулы (12) и (14) приложения к гл. III). Таким образом

$$f_0(t) = (1+t)^n,\ f_1(t) = n(1+t)^{n-1}t,\ f_2(t) = n(n-1)(1+t)^{n-2}t^2 + n(1+t)^{n-1}t.$$

Пользуясь последней формулой и формулой (16), мы можем теперь найти многочлен $f_3(t)$. Запишем $f_2(t)$ в виде $g(t) + h(t)$, где $g(t) = n(n-1)(1+t)^{n-2}t^2$, $h(t) = n(1+t)^{n-1}t$ и применим правило дифференцирования суммы из §2 гл. II. Мы получим

$$f_2'(t) = g'(t) + h'(t). \tag{17}$$

Для вычисления производных многочленов $g(t)$ и $h(t)$ надо применить правило дифференцирования степени из §2 гл. II (как мы уже делали для нахождения многочлена $f_2(t)$ в приложении к гл. III). Мы получим

$$\begin{aligned} g'(t) &= n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^2 + 2n(n-1)(1+t)^{n-2}t,\\ h'(t) &= n(n-1)(1+t)^{n-2}t + n(1+t)^{n-1}. \end{aligned}$$

Подставив это в соотношение (17), а результат в формулу (16) при $r = 2$ и приведя подобные члены, мы получим

$$f_3(t) = n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^3 + 3n(n-1)(1+t)^{n-2}t^2 + n(1+t)^{n-1}t. \tag{18}$$

Теперь переходим к вычислению многочлена $f_4(t)$, пользуясь формулой (16) при $r = 3$. Опять полагаем $f_3(t) = u(t) + v(t) + w(t)$, где $u(t) = n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^3$, $v(t) = 3n(n-1)(1+t)^{n-2}t^2$, $w(t) = n(1+t)^{n-1}t$. Тогда

$$f_3'(t) = u'(t) + v'(t) + w'(t). \tag{19}$$

Для вычисления производных $u'(t)$, $v'(t)$, и $w'(t)$, представляем каждый из многочленов $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ в виде произведения степени $1+t$ и степени t, а потом применим правило дифференцирования степени из §2 гл. II и формулу (19) гл. II. Мы получим таким образом

$$\begin{aligned} u'(t) &= n(n-1)(n-2)(n-3)(1+t)^{n-4}t^3 + 3n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^2,\\ v'(t) &= 3n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^2 + 6n(n-1)(1+t)^{n-2}t,\\ w'(t) &= n(n-1)(1+t)^{n-2}t + n(1+t)^{n-1}. \end{aligned}$$

Остается подставить эти выражения в формулу (19), а потом воспользоваться формулой (16) при $r = 3$. После приведения подобных членов мы получим

$$\begin{aligned} f_4(t) = {}& n(n-1)(n-2)(n-3)(1+t)^{n-4}t^4 + 6n(n-1)(n-2)(1+t)^{n-3}t^3 +\\ & 7n(n-1)(1+t)^{n-2}t^2 + n(1+t)^{n-1}t. \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь мы можем подставить в выражения (18) и (20) для $f_3(t)$ и $f_4(t)$ значение $t = \frac{p}{q}$. Следует помнить при этом, что $1 + \frac{p}{q} = \frac{(p+q)}{q} = \frac{1}{q}$, так как $p + q = 1$. Пользуясь соотношением $\sigma_r = q^n f_r(\frac{p}{q})$, мы получим выражения для σ_3 и σ_4. Для σ_3 мы получим выражение

$$\sigma_3 = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$$

Здесь еще нужно подставить $n(n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2n$, $n(n-1) = n^2 - n$. Приведя подобные члены и объединяя члены с одной степенью , мы получим

$$\sigma_3 = n^3p^3 + 3n^2p^2(1-p) + n(2p^3 - 3p^2 + p).$$

Так как $2p^3 - 3p^2 + p = p(p-1)(2p-1)$, то отсюда следует соотношение (14).

Теперь перейдем к вычислению выражения σ_4. Из соотношения (20) мы, как и при вычислении σ_3, получим

$$\sigma_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np.$$

Здесь опять надо раскрыть скобки в произведении $n(n-1)(n-2)(n-3)$:

$$(n-1)(n-2)(n-3) = n^3 - 6n^2 + 11^n - 6$$

(можно воспользоваться формулой Виета из гл. III). Мы уже раньше вычислили выражения $n(n-1)(n-2)$ и $n(n-1)$. Сгруппировав вместе слагаемые с одной степенью n, мы получим

$$\sigma_4 = n^4p^4 + (-6p^4 + 6p^3)n^3 + (11p^4 - 18p^3 + 7p^2)n^2 + (-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p)n.$$

Остается заметить, что

$$-6p^4 + 6p^3 = 6p^3(1-p) = 6p^3q,$$

$$11p^4 - 18p^3 + 7p^2 = -p^2(1-p)(11p-7) = -p^2q(11p-7),$$

$$-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p = p(1-p)(6p^2 - 6p + 1) = pq(1 - 6pq),$$

и мы получаем соотношение (15). Таким образом лемма доказана. Чтобы доказать усиленное неравенство Чебышева, остается подставить выражения (11), (12), (13), (14), и (15) для σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 и σ_4 в формулу (10) и привести подобные члены. Выпишем коэффициенты при различных степенях n:

При n^4 : $p^4 - 4p^4 + 6p^4 - 4p^4 + p^4 = 0$.

При n^3 : $6p^3q - 12p^3q + 6p^3q = 0$.

При n^2 (влияют только члены из σ_4 и σ_3):

$$-p^2q(11p-7) + 4p^2q(2p-1) = p^2q(-11p + 7 + 8p - 4) = 3p^2q^2.$$

При n (входит только член из σ_4):

$$pq(1 - 6pq).$$

В результате мы получаем, что

$$P = 3p^2q^2n^2 + pq(1-6pq)n.$$

Так как $\overline{\overline{S_\varepsilon}} = \frac{1}{n^4\varepsilon^4}P$, то

$$\overline{\overline{S_\varepsilon}} = \frac{1}{n^4\varepsilon^4}(3p^2q^2n^2 + pq(1-6pq)).$$

Для интересующей нас суммы S_ε мы доказали, что $S_\varepsilon \leq \overline{\overline{S_\varepsilon}}$, поэтому

$$S_\varepsilon \leq \frac{1}{n^3\varepsilon^4}(3p^2q^2n + pq(1-6pq)). \tag{21}$$

Для выражения в скобках мы имеем неравенство:

$$pq(1+3(n-2)pq) \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3(n-2)}{4}\right) \leq \frac{1}{4}n,$$

так как мы уже замечали в приложении к главе III, что всегда $pq \leq \frac{1}{4}$. Поэтому из неравенства (21) следует, что $S_\varepsilon \leq \frac{1}{4\varepsilon^4 n^2}$, как и утверждалось.

Тем самым доказано усиленное неравенство Чебышева, а из него, как мы видели, вытекает теорема.

Замечание 1. Мы доказали усиление неравенства Чебышева, в котором вместо знаменателя $\varepsilon^2 n$ (в первоначальном неравенстве) стоит знаменатель $(\varepsilon^2 n)^2$. Доказательство было совершенно параллельно доказательству неравенства Чебышева, только вместо множителей $\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2$ рассматривались множители $\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^4$. Естественно возникает вопрос, нельзя ли еще улучшить неравенство Чебышева, вводя множители $\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^{2r}$ для любого натурального показателя r. Это действительно так. При каждом конкретном значении r (например, $r = 3$) нужно провести совершенно те же преобразования, что и в нашем доказательстве. При этом преобразования для каждого большего значения r будут все усложняться — например, надо будет вычислить $2r+1$ сумм σ_k: σ_0, σ_1, ..., σ_{2r}. Для произвольного r нужны более сложные рассуждения. В результате получится неравенство с $(\varepsilon^2 n)^r$ в знаменателе. Нам эти улучшения неравенства Чебышева не понадобились и мы ограничились поэтому случаем $r = 2$.

Замечание 2. Наши рассуждения, конечно, никак не связаны со спецификой десятичной системы счисления, а годятся для записи чисел в любой системе счисления. Если основание системы счисления равно g, то мы назовем число x нормальным в g-ичной системе счисления числом, если $\frac{k_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{g}$ при $n \longrightarrow \infty$, где k_n показывает, сколько среди первых n знаков записи x в g-ичной системе счисления равны заданному знаку r. При рассмотрении множества чисел, не являющихся нормальными, мы придем к суммам слагаемых $C_n^k \left(\frac{1}{g}\right)^{n-k} \left(\frac{g-1}{g}\right)^k$, где k удовлетворяет неравенству $\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{g}\right| \geq \varepsilon$. Это как раз рассматривавшиеся нами суммы с

$p = \frac{1}{g}$, $q = \frac{g-1}{g}$. Таким образом, доказательство без изменения переносится на числа, записанные в g-ичной системе счисления.

Интересное применение этого факта мы получим, если положим $g = 100$. "Знаком" в 100-ичной системе счисления является любое двузначное число, то есть любая комбинация двух рядом стоящих цифр в десятичной записи. Таким образом мы получаем, что если k_n показывает, сколько раз заданная группа из двух цифр (например, 13 или 27) встречается среди первых $2n$ знаков десятичной записи числа x, то $\frac{k_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{100}$ для всех x, кроме принадлежащих некоторому тонкому множеству. То есть, для "почти всех" чисел любые комбинации знаков по два встречаются одинаково часто — с "частотой" $\frac{1}{100}$. Можно положить $g = 10^l$ для любого натурального l и тогда мы получим, что любые комбинации из l знаков в десятичной записи встречаются с одинаковой "частотой" $\frac{1}{10^l}$ — для "почти всех" чисел x.

Замечание 3. Мы показали, что "почти все" числа x нормальны. Но доказать, что конкретно заданное число x нормально, — это, обычно, весьма трудная задача. Конечно, нормальным является число $0,123456789...$, где дальше цифры $1,...,9$ повторяются периодически (см. задачу 1). Уже гораздо сложнее доказать нормальность числа $0,123...9101112...$, где подряд выписываются все натуральные числа в десятичной записи. Это было доказано только в 30-х годах нашего столетия. И, наконец, до сих пор не доказано, что числа $\sqrt{2}$ или π являются нормальными. К этим вопросам сейчас даже не видно подхода (когда говорят о числах, больших 1, то отбрасывают целую часть и называют число нормальным, если нормальна его мантисса).

Задачи

1. Рассмотрим число $x = 0,123456789...$, где дальше цифры $1,...,9$ повторяются периодически. Найдите для любой цифры $r = 0,1,...,9$ числа k_n и докажите, что число x — нормально.

2. Докажите, что для любого рационального числа x и заданной цифры $r = 0,1,...,9$ последовательность $\frac{k_n}{n}$ стремится к определенному пределу. (Указание: Вспомните, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая рациональному числу, периодична — задача 3 к §3 гл. V.)

3. Какому условию должен удовлетворять период периодической десятичной дроби, чтобы соответствующее ему число было нормальным?

Глава VII. Степенные ряды

§1. Многочлены как производящие функции

Мы уже не раз сталкивались с тем фактом, что свойства конечной последовательности чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ особенно удобно выражаются через многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Многочлен $f(x)$ в этом случае называется *производящей функцией* последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Особенно ярким примером этого явления служит вопрос, рассмотренный в гл. III, когда задано конечное множество M и a_k есть число его подмножеств из k элементов. Если ввести производящую функцию $f_M(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, то значение чисел a_k для множества $M_1 + M_2$ выражается особенно простой формулой $f_{M_1+M_2}(x) = f_{M_1}(x) f_{M_2}(x)$ (формула (8) гл. III).

Точно так же биномиальные коэффициенты C_n^k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ удобно исследовать при помощи их производящей функции, которая оказывается равной $(1+x)^n$. Из этого легко вытекают многие тождества между биномиальными коэффициентами (см. формулу (26) гл. II и задачу 5 к § 3 гл. II).

Сейчас мы приведем еще несколько примеров подобного типа.

Первый пример относится к некоторым свойствам натуральных чисел. Речь будет идти о представлении натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых: $n = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$. Такое представление называется также *разбиением* числа n. Два разбиения считаются одинаковыми, если в них слагаемые $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ одинаковы, независимо от порядка. То есть представления $6 = 1 + 1 + 4 = 1 + 4 + 1 = 4 + 1 + 1$ мы будем считать одним разбиением числа 6.

Обозначим через $P_{k,l}(n)$ число разбиений числа n на не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l. Эти числа мы и хотим исследовать и для этого составим соответствующую производящую функцию. По определению положим $P_{0,0}(0) = 1$. Заметим, что если существует хоть одно разбиение n, удовлетворяющее сформулированным условиям, то $n \le kl$. Поэтому мы можем составить сумму всех выражений $P_{k,l}(n)x^n$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$: в нее будут входить только числа с $n \le kl$, так что это будет многочлен. Этот многочлен мы обозначим $g_{k,l}(x)$:

$$g_{k,l}(x) = P_{k,l}(0) + P_{k,l}(1)x + \cdots + P_{k,l}(kl)x^{kl}. \qquad (1)$$

Очевидно, что $g_{0,l}(x) = 1$ и $g_{k,0}(x) = 1$. Теперь мы выведем два соотношения, связывающие многочлены $g_{k,l}$ с такими же многочленами, но с меньшими индексами. Рассмотрим разность $P_{k,l}(n) - P_{k,l-1}(n)$. Первое слагаемое равно числу разбиений n на k слагаемых, не превосходящих l, $n = a_1 + \cdots + a_j$, $j \le k$, $a_i \le l$, а второе — не превосходящих $l - 1$. Очевидно, что разность равна числу разбиений $n = a_1 + \cdots + a_j$, где j опять не превосходит k, $a_i \le l$ и среди $a_1, \ldots, a_j$ хотя бы одно равно l, например, $a_1 = l$. Отбросив это слагаемое, получим разбиение $n - l$: $n - l = a_2 + \cdots + a_j$, где число слагаемых теперь не превосходит $k - 1$, а слагаемые по прежнему не превосходят l. Мы получаем таким образом взаимно однозначное соответствие между рассмотренными $P_{k,l}(n) - P_{k,l-1}(n)$ разбиениями числа n и $P_{k-1,l}(n - l)$ разбиениями числа $n - l$. Поэтому

$$P_{k,l}(n) - P_{k,l-1}(n) = P_{k-1,l}(n-l). \tag{2}$$

Число $P_{k-1,l}(n-l)$ по определению равно коэффициенту при x^{n-l} в многочлене $g_{k-1,l}(x)$, а значит, коэффициенту при x^n в многочлене $g_{k-1,l}(x)x^l$. Теперь соотношение (2) устанавливает равенство коэффициентов при x^n в многочленах $g_{k,l} - g_{k,l-1}$ и $g_{k-1,l}x^l$. Так как оно имеет место при любом n, то мы получаем соотношение:

$$g_{k,l}(x) = g_{k,l-1}(x) + g_{k-1,l}(x)x^l. \tag{3}$$

Второе соотношение выводится совершенно аналогично. Рассмотрим разность $P_{k,l}(n) - P_{k-1,l}(n)$. Первое слагаемое равно числу разбиений n на не более чем k слагаемых, не превосходящих l, а второе — на не более чем $k-1$ таких же слагаемых. Значит, разность выражает число разбиений $n = a_1 + \dots + a_k$ в точности на k натуральных слагаемых, не превосходящих l. Вычтем из каждого слагаемого по 1, а если слагаемое было равным 1, то отбросим эту разность. В результате мы получим разбиение $n - k = b_1 + \dots + b_j$, где $j \le k$, $b_i \le l - 1$ и очевидно, что разность $P_{k,l}(n) - P_{k-1,l}(n)$ равна числу таких разбиений. Иными словами, мы доказали соотношение

$$P_{k,l}(n) - P_{k-1,l}(n) = P_{k,l-1}(n-k).$$

Как и раньше, отсюда следует соотношение

$$g_{k,l}(x) = g_{k-1,l}(x) + g_{k,l-1}x^k. \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) дают возможность найти явную формулу для многочленов $g_{k,l}(x)$. Из них следует, что

$$g_{k,l-1}(x) + g_{k-1,l}(x)x^l = g_{k-1,l}(x) + g_{k,l-1}x^k,$$

откуда

$$g_{k,l-1}(x)(1-x^k) = g_{k-1,l}(x)(1-x^l),$$

и значит,

$$g_{k,l-1}(x) = g_{k-1,l}(x)\frac{1-x^l}{1-x^k}.$$

Заменив в этом соотношении l на $l+1$, получаем

$$g_{k,l}(x) = g_{k-1,l+1}(x)\frac{1-x^{l+1}}{1-x^k}. \tag{5}$$

Соотношение (5) можно теперь применить к многочлену $g_{k-1,l+1}(x)$, в результате чего мы получим

$$g_{k,l}(x) = g_{k-2,l+2}(x)\frac{1-x^{l+1}}{1-x^k}\frac{1-x^{l+2}}{1-x^{k-1}}.$$

Этот процесс можно повторить k раз, а так как $g_{0,k+l}(x) = 1$, то мы получим формулу

$$g_{k,l}(x) = \frac{(1-x^{l+1})(1-x^{l+2})\cdots(1-x^{l+k})}{(1-x^k)(1-x^{k-1})\cdots(1-x)}. \tag{6}$$

Формула (6) приобретет более симметричный вид, если в правой части числитель и знаменатель умножить на $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^l)$. Обозначим многочлен $(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)$ через $h_m(x)$. Формула (6) принимает вид

$$g_{k,l}(x) = \frac{h_{k+l}(x)}{h_k(x)h_l(x)}. \tag{7}$$

Выражение в правой части имеет структуру, аналогичную биномиальному коэффициенту C_{k+l}^k, причем многочлен $h_k(x)$ является аналогом числа $k!$. Многочлены $g_{k,l}(x)$, определяемые равенством (7), называются ***многочленами Гаусса.*** Как и в случае биномиальных коэффициентов, сразу не очевидно, что рациональная дробь $\frac{h_{k+l}(x)}{h_k(x)h_l(x)}$ является многочленом. Это следует, конечно, из связи многочлена $g_{k,l}(x)$ с разбиениями, то есть из его определения формулой (1) (см., однако, задачу 3).

Теперь укажем некоторые свойства многочленов $g_{k,l}(x)$, аналогичные известным свойствам биномиальных коэффициентов. Из формулы (7) очевидно следует соотношение

$$g_{k,l}(x) = g_{l,k}(x), \tag{8}$$

аналогичное свойству биномиальных коэффициентов $C_{k+l}^k = C_{k+l}^l$ (так как многочлены $g_{k,l}(x)$ аналогичны биномиальным коэффициентам C_{k+l}^k). Соотношения (3) и (4) переходят друг в друга, если воспользоваться соотношением (8). Положив $g_{l,k} = g_{k,l}$, надо к $g_{l,k}$ применить соотношение (3): $g_{l,k} = g_{l,k+1} + g_{l-1,k}x^k$ и потом опять, ввиду соотношения (8), положить $g_{l,k-1} = g_{k-1,l}$, $g_{l-1,k} = g_{k,l-1}$ — мы получим из (3) соотношение (4). Оба соотношения аналогичны равенству $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ — формула (26) гл. II (надо заменить n на $k+l$; тогда C_{n-1}^k получается из C_n^k заменой l на $l-1$, а C_{n-1}^{k-1} — заменой k на $k+1$). Наконец, прямая связь (а не аналогия) с биномиальными коэффициентами вытекает из соотношения

$$g_{k,l}(1) = C_{k+l}^k. \tag{9}$$

Непосредственно подставить $x = 1$ в соотношение (6) нельзя — числитель и знаменатель при этом обратятся в 0. Разделим числитель и знаменатель на $(1-x)^k$ и, точнее, любой множитель, входящий в числитель и знаменатель формулы (6), разделим на $1-x$. Вообще, многочлен $1-x^m$ делится на $1-x$ при любом m и $\frac{1-x^m}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{m-1}$ (см. формулу (12) гл. I). Поэтому $\frac{1-x^m}{1-x}(1) = m$. Произведя деление на $1-x$ каждого множителя в числителе и знаменателе формулы (6) и полагая $x = 1$, мы получим поэтому

$$g_{k,l}(1) = \frac{(l+k)\cdots(l+2)(l+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k}$$

(мы изменили порядок множителей в числителе и знаменателе на обратный). Это и показывает, что $g_{k,l}(1) = C_{k+l}^k$.

В заключение укажем на важное свойство многочленов Гаусса $g_{k,l}(x)$, не имеющее аналога для биномиальных коэффициентов, использующее то, что $g_{k,l}(x)$ являются именно многочленами, а не числами. А именно, докажем, что многочлен $g_{k,l}(x)$ *является возвратным* при любых k и l. Напомним (ср. § 3 гл. III), что многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ степени n называется возвратным, если его коэффициенты, равноудаленные от конца и начала, равны друг другу, то есть $a_k = a_{n-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Многочлен $f(x)$ степени n тогда и только тогда является возвратным, когда $x^n f(\frac{1}{x}) = f(x)$ (это тоже доказано в § 3 гл. III). Многочлен $g_{k,l}(x)$ имеет степень kl: это следует из записи (1) и того, что $p(k,l,kl) \geq 1$: хоть одно разбиение kl на k слагаемых, равных l, существует: $kl = l + \cdots + l$ (k раз) (это же можно легко вывести и из представления (6), если вычислить степень числителя и знаменателя и из первой вычесть вторую). Таким образом, нам достаточно проверить соотношение $x^{kl}g_{k,l}(\frac{1}{x}) = g_{k,l}(x)$. Это сразу следует из записи (6). Заметим, что для произвольного m верно равенство $\left(1 - \frac{1}{x^m}\right) = (-1)x^{-m}(1 - x^m)$. Поэтому такое соотношение выполняется для любого множителя в числителе и знаменателе в правой части формулы (6). Так как число множителей в числителе и в знаменателе одно и то же (оно равно k), то множители (-1) в совокупности сократятся. Из каждого множителя $1 - x^m$ степени m вынесется множитель x^{-m}. Мы получим, что $g_{k,l}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-N}g_{k,l}(x)$, где N — разность степеней числителя и знаменателя. Но эта разность равна степени многочлена $g_{k,l}(x)$, то есть kl. Поэтому $N = kl$, $g_{k,l}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-kl}g_{k,l}(x)$ и, следовательно, $x^{kl}g_{k,l}\left(\frac{1}{x}\right) = g_{k,l}(x)$, а это и значит, что многочлен $g_{k,l}$ — возвратный.

Перечисленные свойства многочленов Гаусса $g_{k,l}(x)$ приводят к соответствующим свойствам разбиений (точнее, чисел $P_{k,l}(n)$, если перейти к их коэффициентам, воспользовавшись определением (1)). Так, соотношение (8) дает равенство

$$P_{k,l}(n) = P_{l,k}(n), \tag{10}$$

то есть *число разбиений n на не более чем k слагаемых, не превосходящих l, равно числу его разбиений на не более чем l слагаемых, не превосходящих k*. Возвратность многочлена $p_{k,l}(x)$ означает, что

$$P_{k,l}(n) = P_{k,l}(kl - n). \tag{11}$$

Соотношение (9) означает, что при заданных числах k и l сумма всех чисел $P_{k,l}(n)$ для $n = 0, 1, \ldots, kl$ равна C^k_{k+l}, то есть

$$P_{k,l}(0) + P_{k,l}(1) + \cdots + P_{k,l}(kl) = C^k_{k+l}. \tag{12}$$

Конечно, такие простые свойства разбиений могут быть доказаны и без использования производящих функций $g_{k,l}(x)$ (см. задачи 4, 5, 6). Однако обнаружить их проще всего с помощью производящих функций.

В заключение напомним, что в § 3 гл. III мы рассматривали, кроме возвратности, еще одно свойство многочленов — унимодальность. Для возвратного многочлена $a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ унимодальность означает, что $a_i \leq a_{i+1}$ при $i + 1 \leq \frac{N}{2}$.

Тогда из возвратности следует, что $a_j \geq a_{j+1}$ при $j \geq \frac{N}{2}$. Оказывается, что многочлены Гаусса $g_{k,l}(x)$ обладают свойством унимодальности. По определению это значит, что

$$P_{k,l}(n) \leq P_{k,l}(n+1) \text{ при } n+1 \leq \frac{kl}{2}.$$

Единственное известное доказательство этого факта основано на связи чисел $P_{k,l}(n)$ с совершенно другим разделом алгебры. Именно, оказывается, что число $P_{k,l}(n+1) - P_{k,l}(n)$ при $n+1 \leq \frac{kl}{2}$ совпадает с числом элементов некоторого конечного множества, связанного с другими вопросами, и значит неотрицательно. Как заверяют специалисты, никакого "естественного" доказательства этого факта, основывающегося на свойствах разбиений или многочленов $g_{k,l}(x)$, не известно. Это утверждение сейчас считается "загадочным". Может быть, кому-либо из читателей этой книги удастся найти такое доказательство.

В качестве *второго примера* мы рассмотрим некоторые уже известные свойства натуральных чисел, которые особенно изящно выводятся при использовании производящих функций. Речь идет о возможности записать все натуральные числа в системе счисления с заданным основанием.

Начнем с двоичной системы счисления. Из любого натурального числа n можно вынести в качестве множителя наибольшую степень 2, на которую оно делится, и представить его в виде $n = 2^k m$, где m — нечетно. Значит, m имеет вид $2r+1$ и n может быть представлено в виде $n = 2^k + 2^{k+1}r$. Теперь то же рассуждение можно применить к r, и продолжая так дальше, мы в конце концов представим n в виде суммы *различных* степеней 2: $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$, где $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$. Иначе говоря, мы представили n в виде

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_N 2^N, \tag{13}$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_N$ могут принимать значения 0 и 1. Отбрасывая те члены, для которых $a_i = 0$, мы возвратимся к представлению n как суммы разных степеней 2. Запись (13) называется *двоичной записью* числа n или его же записью в *двоичной системе счисления.* Докажем, что запись (13) для заданного числа n одна единственная. Пусть $n = b_0 + b_1 2 + \cdots + b_M 2^M$ — другая запись. Тогда $a_0 = b_0$, так как если n нечетно, то $a_0 = b_0 = 1$, а если четно, то $a_0 = b_0 = 0$. Поэтому во второй записи можно положить $b_0 = a_0$ и мы получим, что $\frac{n-a_0}{2} = a_1 + a_2 2 + \cdots + a_N 2^{N-1}$, $\frac{n-a_0}{2} = b_1 + b_2 2 + \cdots + b_M 2^{M-1}$. Так как $\frac{n-a_0}{2} \leq \frac{n}{2} < n$, то для меньшего чем n числа $\frac{n-a_0}{2}$ мы получили две разные двоичные записи. Применяя индукцию, мы можем предполагать, что наше утверждение верно для $\frac{n-a_0}{2}$ и значит, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 \ldots$ и т. д. (Впрочем, читатель, вероятно уже раньше сам провел эти рассуждения, решая задачу 5 к § 1 гл. I.)

При заданном значении числа N мы получим в записи (13) наибольшее число n, когда все числа a_i принимают наибольшее возможное для них значение, то есть когда все $a_i = 1$ и $n = 1 + 2 + \cdots + 2^N = \frac{2^{N+1}-1}{2-1} = 2^{N+1} - 1$. Таким образом, в форме (13) при заданном значении N могут быть записаны все числа, меньшие чем 2^{N+1} и только они, причем такая запись однозначна. С другой стороны, рассмотрим произведение:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^N}). \tag{14}$$

Раскрывая множители, мы из каждой скобки должны брать одно слагаемое, то есть из $(1+x^{2^i})$ либо 1, либо x^{2^i}. В результате мы получим член x^n, где n есть сумма различных степеней 2, то есть сумма чисел 2^i при некоторых $i \le N$. Как мы видели, так получается любое число $n \le 2^{N+1}-1$ и при этом каждое только один раз. То есть, раскрывая скобки в произведении (14), мы получим все члены x^n с $n \le 2^{N+1}-1$ и с коэффициентом 1. Иными словами, утверждение, что любое число $n \le 2^{N+1}-1$ имеет единственную двоичную запись, дает нам тождество:

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^N}) &= \\ = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^{N+1}-1}&.\end{aligned} \tag{15}$$

Вы легко убедитесь, что все наши рассуждения можно провести в обратном порядке, то есть из тождества (15) вытекает существование единственной двоичной записи для всех чисел $n \le 2^{n+1}-1$. Как же непосредственно убедиться в справедливости равенства (15) и, значит, заново убедиться в существовании и единственности двоичной записи? Для этого достаточно применить к правой части равенства (15) много раз встречавшуюся нам формулу

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^{N+1}-1} = \frac{1-x^{2^{N+1}}}{1-x}.$$

Значит, чтобы доказать тождество (15), достаточно проверить тождество:

$$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^N}) = 1-x^{2^{N+1}}.$$

Но оно очевидно! Перемножая первые два множителя, получим $1-x^2$. Умножая $(1-x^2)$ на $(1+x^2)$, получим $1-x^4$ и т. д., пока, перемножая $(1-x^{2^N})$ и $(1+x^{2^N})$, не получим $(1-x^{2^{N+1}})$.

Теперь рассмотрим совершенно аналогичный случай десятичной системы счисления. Разделим произвольное натуральное число n с остатком на 10: $n = 10n_1 + a_0$, где $0 \le a_0 \le 9$. Потом разделим n_1 с остатком на 10: $n_1 = 10n_2 + a_1$, где $0 \le a_1 \le 9$. Подставляя, получим что $n = 10^2 n_2 + 10a_1 + a_0$. Продолжая этот процесс, получим в заключение при некотором k, что $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$, где $0 \le a_i \le 9$ для всех a_i. Это — привычная нам десятичная запись числа n. Она единственна. Действительно, записав ту же формулу в виде $n = 10\cdot(10^{k-1}a_k + 10^{k-2}a_{k-1} + \cdots + a_1) + a_0$ или $n = 10m + a_0$, где $m = 10^{k-1}a_k + 10^{k-2}a_{k-1} + \cdots + a_1$, мы видим,что a_0 — остаток от деления n на 10. Но деление с остатком единственно (теорема 4 главы I). Поэтому если существуют разные десятичные представления, то во всех них по крайней мере a_0 должно быть одно и то же — оно равно остатку от деления n на 10. Если существует другое десятичное представление $n = 10^l b_l + 10^{l-1}b_{l-1} + \cdots + 10b_1 + b_0$, где $0 \le b_i \le 9$ для всех b_i, то мы можем утверждать, что $a_0 = b_0$. Отсюда

$$10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 = 10^l b_l + 10^{l-1}b_{l-1} + \cdots + 10b_1.$$

Сокращая на 10, получаем, что

$$10^{k-1}a_k + 10^{k-2}a_{k-1} + \cdots + a_1 = 10^{l-1}b_l + 10^{l-2}b_{l-1} + \cdots + b_1,$$

то есть мы имеем две десятичные записи для числа $m = \frac{n-a_0}{10}$. Так как $m \le \frac{n}{10} < n$, то мы можем, пользуясь индукцией, считать, что m имеет единственное десятичное представление, а это и значит, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$, и т. д.

Ясно, что число n, имеющее десятичную запись $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$, не превосходит (так как все $a_i \le 9$) числа $9(10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10 + 1)$, а это число равно $9 \cdot \frac{10^{k+1}-1}{10-1} = 10^{k+1} - 1$. Таким образом, десятичной записью вида $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ с заданным k обладают все числа, не превосходящие $10^{k+1} - 1$ (то есть меньшие 10^{k+1}) и только они. Теперь запишем этот факт в виде тождества между многочленами. Рассмотрим произведение $(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{90}) \cdots (1 + x^{10^k} + x^{2\cdot 10^k} + \cdots + x^{9\cdot 10^k})$. Раскрывая скобки, мы должны взять из первой скобки множитель x^{a_0}, где a_0 принимает одно из значений $0, 1, \ldots, 9$. Из второй скобки — множитель x^{10a_1}, где a_1 принимает одно из этих же значений, и так из каждой скобки. В результате мы получим член $x^{a_0+10a_1+\cdots+10^k a_k}$, а это, как мы видели — произвольный член x^n, где n — любое число, не превосходящее $10^{k+1} - 1$ — это и есть утверждение о существовании десятичной записи. При этом каждый такой член получится точно один раз, то есть с коэффициентом 1. Таким образом, из существования и единственности десятичной записи вида $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ для всех чисел $n \le 10^{k+1} - 1$ следует тождество

$$\begin{gathered}(1 + x + x^2 + \cdots + x^9)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{90}) \cdots \\ \cdots (1 + x^{10^k} + x^{2\cdot 10^k} + \cdots + x^{9\cdot 10^k}) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{10^{k+1}-1}.\end{gathered} \tag{16}$$

Как и в случае двоичного представления, все наши рассуждения можно провести в обратном порядке и значит, наоборот, из тождества (16) вытекает существование и единственность десятичной записи. Попробуем теперь непосредственно доказать тождество (16) и тем самым заново доказать существование и единственность десятичной записи. Это очень просто. Опять применяем формулу

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{10^{k+1}-1} = \frac{x^{10^{k+1}} - 1}{x - 1}$$

к правой части соотношения (16). Аналогично преобразуем каждый множитель в скобках в левой части:

$$\begin{gathered}1 + x + x^2 + \cdots + x^9 = \tfrac{x^{10}-1}{x-1}, \\ 1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{90} = \tfrac{x^{100}-1}{x^{10}-1}, \ldots, \\ 1 + x^{10^k} + x^{2\cdot 10^k} + \cdots + x^{9\cdot 10^k} = \tfrac{x^{10^{k+1}}-1}{x^{10^k}-1}.\end{gathered}$$

Тогда соотношение (16) приобретает вид:

$$\frac{x^{10}-1}{x-1}\frac{x^{100}-1}{x^{10}-1} \cdots \frac{x^{10^{k+1}}-1}{x^{10^k}-1} = \frac{x^{10^{k+1}}-1}{x-1}.$$

Оно совершенно очевидно: в левой части числитель каждого множителя сокращается со знаменателем следующего и из всего произведения остается $\frac{1}{x-1}$ (из первого множителя) и $x^{10^{k+1}}-1$ (из последнего). Это и стоит справа.

Дословно так же можно рассмотреть и случай системы счисления с произвольным основанием.

Задачи

1. Найдите в явном виде многочлены $g_{k,1}(x)$ из определения и из формулы (6).

2. Найдите в явном виде многочлены $g_{k,2}(x)$. (Это несколько сложнее, чем задача 1.)

3. Пусть рациональные выражения $g_{k,l}(x)$ *определены* формулой (7). Докажите для них соотношения (3) и (4) и отсюда докажите, что они являются многочленами (не используя формулу (1) и связь с теорией разбиений).

4. Докажите, что $P_{k,l}(n) = P_{l,k}(n)$, не используя свойства многочленов Гаусса.

Указание: Разбиение $n = a_1 + \dots + a_j$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_j$, изображают таблицей точек, в которой в первой строке стоят a_1 точек, во второй — a_2 точек и т. д. Например, разбиение $13 = 7 + 3 + 1 + 1 + 1$ изображается таблицей:

• • • • • • •
• • •
•
•
•

Сопоставить каждой таблице "повернутую" таблицу, строки которой являются столбцами первоначальной. Например, предшествующей таблице будет соответствовать такая:

• • • • •
• •
• •
•
•
•
•

5. Докажите, что $P_{l,k}(n) = P_{l,k}(kl-n)$, не используя свойства многочленов Гаусса. (Указание: Разбиению $n = a_1 + \dots + a_j$, $j \leq k$, $a_i \leq l$ числа n сопоставить разбиение $kl - n = (l - a_1) + (l - a_2) + \dots + (l - a_j) + l + \dots + l$ числа $kl - n$, где слагаемое $l - a_i$ отбрасывается, если оно равно 0, а число слагаемых, равных l, равно $k - j$.)

6. Докажите, что $P_{l,k}(0) + P_{l,k}(1) + \dots + P_{l,k}(kl) = C_{k+l}^{k}$, не используя свойства многочленов Гаусса. (Указание: Разбиению $a_1 + \dots + a_j$, $j \leq k$, $a_i \leq l$ числа, не превосходящего kl, сопоставить подмножество $\{a_1+1, a_2+2, \dots, a_j+j\}$ множества $\{1, 2, \dots, k+l\}$.)

7. Докажите, что любой вес, измеряемый целым числом килограммов, меньшим 2^n, можно определить путем взвешивания, если имеется n гирь весом $1, 2, \dots, 2^{n-1}$ килограммов (взвешиваемый предмет кладется на одну чашу гирь, а весы — на

другую).

8. При взвешивании разрешается помещать гири на обе чаши весов. Докажите, что любой вес, измеряемый целым числом килограммов, меньшим $\frac{3^n-1}{2}$, можно определить,имея n гирь весом $1, 3, \dots, 3^{n-1}$ килограммов. (Указание: Докажите существование и единственность троичного представления вида $m = a_0 + a_1 3 + \dots + a_{n-1}3^{n-1}$, где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ принимают значения 1, 0 и -1, для всех целых чисел m между $-\frac{3^n-1}{2}$ и $+\frac{3^n-1}{2}$. Какому тождеству соответствует это утверждение ? Докажите это тождество непосредственно.)

§2. Степенные ряды

В предшествующем параграфе мы видели примеры того, что свойства конечной последовательности чисел $(a_0, \dots, a_n)$ часто удобно изучать, рассматривая многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ — производящую функцию этой последовательности. Но как быть, если последовательность бесконечна — например, если это последовательность натуральных чисел или чисел Бернулли? Не очень раздумывая, можно и для бесконечной последовательности $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ написать:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \cdots. \tag{17}$$

Но что значит выражение, стоящее в правой части? Вернемся к случаю конечных последовательностей и многочленов. Для вывода свойств разных последовательностей в § 1 мы использовали тождества, связывающие многочлены. Для того, чтобы это можно было делать, нам не нужно было отвечать на такой общий вопрос — что такое многочлен? — а только знать, когда мы считаем два многочлена равными и как производятся действия над многочленами. Эти же вопросы мы выясним и в отношении выражений, фигурирующих в формуле (17), а потом покажем, как благодаря этому можно получить ряд неожиданных свойств бесконечных последовательностей.

Выражение, написанное в формуле (17), называется *степенным рядом.* Коэффициент a_0 называется его *свободным членом.* Как понимать равенство степенных рядов? Для многочленов мы имели два понятия равенства, которые, как было показано в гл. II, равносильны. Одно означало, что в двух многочленах после приведения свободных членов коэффициенты при одинаковых степенях x одинаковы. Второе понятие равенства означало, что два многочлена принимают одинаковые значения при одинаковых значениях неизвестной x. Второе определение равенства в применении к степенным рядам потребовало бы объяснить, что значит *значение* степенного ряда, заданного формулой (17) при некотором значении $x = \alpha$. Это потребовало бы объяснения, что означает сумма *бесконечного* числа членов $a_n\alpha^n$. Такое объяснение можно дать, хотя и не во всех случаях. Но это более сложный уровень понимания. Однако, если мы остановимся на первом понятии равенства, то никаких вопросов не возникает. Мы будем считать равными два степенных ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \cdots$ и $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \cdots$, если $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$ и вообще $a_n = b_n$ для любого n. На этом понятии равенства мы и остановимся.

Если разложение многочлена по степеням x аналогично представлению натурального числа в десятичной системе счисления (на эту аналогию мы указывали в начале гл. II), то степенной ряд — аналог бесконечной десятичной дроби. Это замечание высказал Ньютон.

Обсудим теперь действия над степенными рядами. Мы определим их точно так же, как и для многочленов — путем приведения подобных членов и раскрытия скобок. Суммой степенных рядов $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ и $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$ будем называть степенной ряд $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots$. Произведение тех же двух рядов определим, раскрыв скобки в выражении $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots)$ и приведя подобные члены. Иными словами, надо привести подобные члены, имеющиеся среди выражений $a_nb_mx^{n+m}$. Поэтому коэффициентом при x^l в новом степенном ряду будет сумма $a_0b_l + a_1b_{l-1} + \cdots + a_lb_0$. Заметим, что это — *конечная* сумма, то есть среди членов $a_nb_mx^{n+m}$ будет всегда только *конечное* число подобных друг другу, так что мы можем перемножать любые степенные ряды и всегда будем получать вполне определенный ответ.

Мы таким образом определили операции сложения и умножения произвольных степенных рядов. Они определяются совершенно такими же формулами, как и для многочленов. Более того, эти операции можно определить при помощи операций над многочленами. Для этого назовем многочлен $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, получающийся из степенного ряда (17) отбрасыванием всех членов степени большей, чем n, *n-ой частной суммой* этого ряда. Заметим, что в сумме или произведении двух рядов при вычислении членов степени, не превосходящей n, нам нужно знать только такие же члены (степени, не превосходящей n) первоначальных рядов. Поэтому, чтобы найти n-ую частную сумму для суммы или произведения двух рядов, достаточно взять n-ые частные суммы этих рядов, произвести над ними нужную операцию (сложение или умножение) и отбросить в получающемся многочлене все члены степени большей, чем n. Так как действия над степенными рядами таким образом сводятся к действиям над многочленами, то они обладают теми же свойствами: коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности. Иными словами, для степенных рядов $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ верны соотношения

$$
\begin{gathered}
f(x) + g(x) = g(x) + f(x),\\
(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)),\\
f(x)g(x) = g(x)f(x),\\
(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)),\\
(f(x) + g(x))h(x) = h(x)(f(x) + g(x)) = f(x)h(x) + g(x)h(x).
\end{gathered}
$$

Все это длинное пояснение нужно было для того, чтобы дальше можно было смело оперировать над степенными рядами, точно так же, как над многочленами. Именно такова была точка зрения математиков XVIII века, особенно Эйлера, смотревших на степенной ряд как на многочлен, степень которого по какой-то причине оказалась бесконечной, но от этого он не стал хуже. По этой же причине мы поместили главу о степенных рядах в тему о многочленах (“многочлены бесконечной степени”).

Теперь мы можем перейти к свойствам степенных рядов. Мы увидим, что некоторые операции над степенными рядами выполнимы, когда оставаясь в пределах многочленов их выполнить нельзя.

Теорема 1. *Любой степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots$, для которого свободный член a_0 отличен от 0, имеет обратный степенной ряд $f(x)^{-1}$.*

Чтобы доказать теорему, нам надо найти такой степенной ряд $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots$, что $f(x)g(x) = 1$. Тогда $g(x)$ и будет равно $f(x)^{-1}$. Перемножая степенные ряды $f(x)g(x)$ по тому правилу, о котором было сказано выше, получим степенной ряд $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots$. Чтобы этот ряд равнялся 1, необходимо, чтобы $a_0b_0 = 1$, а остальные коэффициенты равнялись 0. Отсюда мы получаем уравнение $a_0b_0 = 1$ и $b_0 = a_0^{-1}$; a_0^{-1} существует, так как по предположению $a_0 \neq 0$. Следующее уравнение (коэффициент при x) дает $a_0b_1 + b_0a_1 = 0$, откуда $b_1 = -a_0^{-1}b_0a_1 = -a_0^{-2}a_1$. Так мы будем по очереди определять из каждого следующего уравнения коэффициенты b_2, $b_3, \ldots$. Пусть, рассматривая коэффициенты при 1, x, $x^2, \ldots$, x^{n-1}, мы определили b_0, $b_1, \ldots$, b_{n-1}. Равенство 0 коэффициента при x^n в $f(x)g(x)$ дает уравнение

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = 0,$$

откуда $b_n = -a_0^{-1}(a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)$. Так как b_0, $b_1, \ldots$, b_{n-1} нами уже определены, то это дает значение для b_n. Тем самым теорема доказана.

Мы видим, что, в частности, любой многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, имеющий отличный от нуля свободный член a_0, обладает обратным степенным рядом $f(x)^{-1}$. Поэтому и всякое рациональное выражение $\frac{g(x)}{f(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены и свободный член многочлена $f(x)$ отличен от 0, может быть представлен в виде степенного ряда.

Проверим наше заключение на простейшем примере. Многочлен $1 - x$ должен иметь обратный степенной ряд $(1-x)^{-1}$. Докажем, что этот ряд совпадает с рядом $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, все коэффициенты которого равны 1. Нам надо доказать, что $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) = 1$. Левая часть равенства равна $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots - x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$. Мы видим, что здесь действительно сокращаются все члены кроме 1. Полученное равенство можно записать как

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots. \tag{18}$$

Заменяя x на $-x$, получаем из него

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^nx^n + \cdots. \tag{19}$$

Вспомним, что в § 3 гл. II мы сопоставляли любой последовательности $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ две другие последовательности: $Sa = (b_0, b_1, \ldots)$ и $\Delta a = (c_0, c_1, \ldots)$, где $b_0 = a_0$, $b_1 = a_0 + a_1$, $b_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$; $c_0 = a_0$, $c_1 = a_1 - a_0$, $c_2 = a_2 - a_1, \ldots$. Степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ мы будем называть *производящей функцией последовательности a* по аналогии с конечными последовательностями в §1. Как найти производящую функцию последовательностей Sa и Δ_a? Обозначим степенной ряд $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ через $s(x)$. Коэффициенты степенного ряда

$s(x)f(x)$ как раз равны a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, ..., то есть он является производящей функцией последовательности Sa. Еще более очевидно, что коэффициенты степенного ряда $(1-x)f(x)$ равны a_0, $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1, \ldots$, то есть он является производящей функцией последовательности Δa. Так как $s(x) = (1-x)^{-1}$, то операции умножения степенного ряда на $s(x)$ и на $1 - x$ — взаимно обратны. Это делает наглядно очевидным доказанное в §3 гл. II свойство — что операции S и Δ над последовательностями взаимно обратны.

Теперь перейдем к другой операции над степенными рядами.

Теорема 2. *Если у степенного ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ свободный член a_0 отличен от 0 и из него можно извлечь корень степени k, то и из всего ряда $f(x)$ можно извлечь корень степени k в виде степенного ряда. Этот ряд однозначно определяется своим свободным членом, за который можно взять любое значение $\sqrt[k]{a_0}$.*

Теорема утверждает, что при сделанных предположениях существует такой степенной ряд $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$, что $b_0^k = a_0$,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots)^k. \tag{20}$$

Мы докажем ее, последовательно определяя коэффициенты b_0, b_1, $b_2, \ldots$ так, чтобы в соотношении (20) совпали члены степени 0, 1, 2, и т.д. Сравнивая члены степени 0, получим для b_0 условие $b_0^k = a_0$. Существование такого числа b_0 гарантирует условие теоремы. Заметим, что так как $a_0 \neq 0$, то и $b_0 \neq 0$.

Сравним члены степени 1. В правой части мы можем отбросить все члены степени, большей чем 1: b_2x^2 и т.д., так как их перемножение не может дать члена степени 1. Поэтому член степени 1 будет такой же, как и в $(b_0 + b_1x)^k$. Это выражение мы можем раскрыть по формуле бинома и увидим, что член степени 1 будет иметь вид $kb_0^{k-1}b_1x$. Равенство членов степени 1 в соотношении (20) означает, что $a_1 = kb_0^{k-1}b_1$. Так как b_0 мы уже определили и оно отлично от 0, то отсюда находим b_1: $b_1 = \frac{1}{k}b_0^{-(k-1)}a_1$. При таких значениях b_0 и b_1 в равенстве (20) будут совпадать члены степени 0 и 1 в левой и правой части.

Очевидно, что так же мы можем продолжать и дальше. Предположим, что коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$ определены таким образом, что в равенстве (20) совпадают члены степени 0, 1, ..., n. Докажем, что можно так подобрать b_{n+1}, чтобы в соотношении (20) совпали члены степени $n+1$. Обозначим через $u(x)$ n-ую частичную сумму ряда $f(x)$, то есть многочлен $b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$, а через $v(x)$ — степенной ряд $b_{n+2}x^{n+2} + \cdots$. Тогда правая часть равенства (20) принимает вид $\left(u(x) + b_{n+1}x^{n+1} + v(x)\right)^k$. Степенной ряд $v(x)$ содержит только члены степеней, больших чем $n+1$, от их умножения не могут возникнуть члены степени $n+1$. Поэтому это слагаемое можно отбросить: члены степени $n+1$ в правой части равенства (20) будут такие же, как в многочлене $\left(u(x) + b_{n+1}x^{n+1}\right)^k$. Раскрывая это последнее выражение по формуле бинома, мы видим, что члены степени $n+1$ могут возникнуть только из слагаемых $u(x)^k + ku(x)^{k-1}b_{n+1}x^{n+1}$. Член степени $n+1$, входящий в многочлен $u(x)^k$ зависит только от коэффициентов этого многочлена, которые нам уже известны. Обозначим этот член через $F(b_0, b_1, \ldots, b_n)x^{n+1}$. Член степени $n+1$

в многочлене $ku(x)^{k-1}b_{n+1}x^{n+1}$ может произойти только от свободного члена многочлена $u(x)$ и, следовательно, имеет вид $kb_0^{k-1}b_{n+1}$. Таким образом, член степени $n+1$ в правой части равенства (20) имеет вид $\left(F(b_0, b_1, ..., b_n) + kb_0^{k-1}b_{n+1}\right)x^{n+1}$. Равенство членов степени $n+1$ в соотношении (20) означает, что

$$a_{n+1} = F(b_0, b_1, ..., b_n) + kb_0^{k-1}b_{n+1}.$$

Этому соотношению можно удовлетворить, полагая $b_{n+1} = -\frac{1}{k}b_0^{-(k-1)}\Big(a_{n+1} - F(b_0, b_1, ..., b_n)\Big)$. Таким образом, последовательно определяя коэффициенты b_n, мы можем удовлетворить равенству (20). Теорема доказана.

Например, если $a_0 > 0$, то для степенного ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ существует, согласно теореме 2, единственный степенной ряд $\sqrt[k]{f(x)}$ с положительным свободным членом, который можно записать как $f(x)^{1/k}$. Возводя его в произвольную степень m, мы получим степенной ряд $f(x)^{m/k}$, то есть $f(x)^\alpha$, где α — любое рациональное положительное число. Применяя теорему 1, мы можем и $f(x)^{-\alpha}$ записать в виде степенного ряда, то есть степенной ряд $f(x)^\alpha$ существует для любых рациональных — положительных или отрицательных — значений α. Это ставит некоторые интригующие вопросы. Например: как в явном виде записать ряд $(1+x)^\alpha$ при рациональных α? Речь идет, следовательно, о распространении формулы бинома на дробные (может быть, рациональные) показатели. В §3 гл. II мы вывели формулу бинома для целого показателя, используя свойства производной многочлена. Чтобы провести аналогичное рассуждение в нашем случае, необходимо ввести понятие производной степенного ряда.

В нашем распоряжении имеется совершенно явная формула для производной многочлена (формула (15) гл.II), которую вполне можно применить и к степенному ряду. Так мы и поступим, а именно для степенного ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ определим его производную как степенной ряд

$$f(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \quad . \tag{21}$$

Чтобы это определение не было слишком формальным, поясним его следующим образом. Степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ равен сумме многочлена степени не большей, чем n: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (n-ой частной суммы) и ряда $u(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \cdots$, содержащего только члены степени, большей, чем $n-1$. Тогда формула (21) показывает, что члены степени меньшей n в производной будут те же, что и у многочлена $p'(x)$. Иными словами, $f'(x) = p'(x) + v(x)$, где $v(x)$ — степенной ряд, содержащий только члены степени, большей, чем n. Иначе говоря, $(n-1)$-я частная сумма ряда $f'(x)$ равна производной от n-ой частной суммы ряда $f(x)$. Это правило указывает, какие члены степени меньшей, чем n, содержатся в производной. Так как оно верно для любого n, то однозначно определяет производную.

Пользуясь тем же правилом легко показать, что свойства производной, доказанные нами в §2 гл.II для многочленов, верны и для степенных рядов. Речь идет о соотношениях:

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2', \qquad (f_1 + \cdots + f_n)' = f_1' + \cdots + f_n',$$

$$(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2', \qquad (f_1\cdots f_k)' = f_1'f_2\cdots f_k + \cdots + f_1f_2\cdots f_k', \tag{22}$$
$$(f^k)' = kf^{k-1}f'.$$

Покажем, например, как вывести свойства производной произведения. Представим каждый из степенных рядов f_1 и f_2 как сумму его n-ой частной суммы и ряда, содержащего только члены степени большей, чем n: $f_1 = p_1 + u_1$, $f_2 = p_2 + u_2$. Тогда $f_1f_2 = p_1p_2 + (p_1u_2 + p_2u_1 + u_1u_2) = p_1p_2 + v$, где v содержит только члены степени большей, чем n. Поэтому n-ая частная сумма p ряда f_1f_2 получается из p_1p_2 отбрасыванием членов степени большей, чем n, то есть $p = p_1p_2 + w$, где w — многочлен, содержащий только члены степеней, больших, чем n. Ввиду сформулированного выше правила, $n-1$-я частная сумма ряда $(f_1f_2)'$ равна $p' = (p_1p_2)' + w' = p_1'p_2 + p_1p_2' + w'$ (здесь мы применяем формулы в) и г) из §2 гл. II для производной многочлена). Таким образом, $n-1$-я частная сумма ряда $(f_1f_2)'$ получается из многочлена $p_1'p_2 + p_1p_2'$ отбрасыванием членов степени, большей чем $n-1$. С другой стороны, $f_1' = p_1' + u_1'$, $f_2' = p_2' + u_2'$, $f_1'f_2 + f_1f_2' = p_1'p_2 + p_1p_2' + \varphi$, где $\varphi = p_1'u_2 + p_2u_1' + u_1'u_2 + p_2'u_1 + p_1u_2' + u_1u_2'$ и содержит только члены степени не меньшей n (даже $2n-3$). Поэтому $n-1$-я частная сума ряда $f_1'f_2 + f_1f_2'$ тоже получается из многочлена $p_1'p_2 + p_1p_2'$ отбрасыванием членов степени, большей чем $n-1$, то есть совпадает с $n-1$-й частной суммой ряда $(f_1f_2)'$. Так как это верно для любого n, то $(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2'$. Другие формулы (22), касающиеся производной произведения и степени, получаются из выведенной при помощи индукции точно так же, как и для многочленов. Формулы для производной суммы совершенно очевидны — читатель в этом легко убедится сам.

Теперь мы достаточно вооружены, чтобы вывести формулу для степенного ряда $(1+x)^\alpha$, где α — рациональное число. Мы рассмотрим только случай положительных α. Пусть $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Согласно теореме 2, существует такой степенной ряд $f(x) = 1 + a_1x + \cdots$, что

$$f(x)^q = (1+x)^p. \tag{23}$$

Его мы и обозначили через $f(x)^{\frac{p}{q}}$. Рассмотрим производную от обеих частей равенства (23). Пользуясь выведенными свойствами производной степенных рядов (22) и многочленов ((17) гл. II), мы получаем:

$$qf'(x)f(x)^{q-1} = p(1+x)^{p-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $(1+x)f(x)$. Мы получим:

$$qf'(x)f(x)^q(1+x) = p(1+x)^pf(x).$$

Воспользовавшись равенством (23), мы можем сократить это равенство — левую часть на $f(x)^q$, а правую — на $(1+x)^p$. Вспоминая, что $\frac{p}{q} = \alpha$, получим:

$$f'(x)(1+x) = \alpha f(x). \tag{24}$$

Пусть $f(x) = 1 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Приравняем коэффициенты при x^{n-1} в обеих частях равенства (24). Так как, согласно определению (21), $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$, то мы получим:

$$na_n + (n-1)a_{n-1} = \alpha a_{n-1}$$

откуда

$$a_n = \frac{\alpha - n + 1}{n} a_{n-1}.$$

Применяя эту же формулу несколько раз, мы получим

$$a_n = \frac{(\alpha - n + 1)(\alpha - n + 2)\cdots(\alpha - n + r)}{n(n-1)\dots(n-r+1)} a_{n-r}.$$

Так как $a_0 = 1$, то при $r = n$ получаем:

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Иными словами,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad (25)$$

Заметьте, что при целом $\alpha = m$ все коэффициенты этого ряда, начиная с $m+1$-го, обращаются в 0 и мы получаем обычную формулу бинома. Формула (25) верна и для отрицательных α (см. задачу 7). Именно формулу (25) справедливо называть формулой бинома Ньютона, так как ее-то Ньютон и вывел (даже для любого вещественного показателя α), формула же для натурального показателя была известна значительно раньше, например, Паскалю.

В заключение этого параграфа рассмотрим применение обобщенной формулы бинома (25) к определению одной важной в ряде вопросов последовательности чисел, так называемых *чисел Каталана*. Они связаны с различного рода задачами о разбиениях на части. Предположим, например, что речь идет о вычислении произведения n чисел a_1, a_2, ..., a_n, взятых в определенном порядке, причем мы хотим найти их произведение при помощи последовательности умножения двух чисел каждый раз. Для этого мы должны в произведении $a_1 \cdots a_n$ расставить скобки таким образом, чтобы каждый раз в скобках стояли две группы множителей, уже заключенных в скобки. Число способов расстановки таких скобок и называется числом Каталана c_n. Мы будем полагать $c_1 = 1$. Очевидно, что $c_2 = 1$. Для произведения трех множителей $a_1a_2a_3$ возможно два способа расстановки скобок: $(a_1a_2)a_3$ и $a_1(a_2a_3)$, так что $c_3 = 2$. Для $n = 4$ возможны расстановки $((a_1a_2)a_3)a_4$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$ и $a_1(a_2(a_3a_4))$, так что $c_4 = 3$.

Числа Каталана связаны важным соотношением. Последнее произведение, которое мы находим, вычисляя $a_1 \cdots a_n$ определяет расстановку скобок $(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n)$. Внутри каждой скобки мы можем расставлять скобки любым способом, то есть c_k способами в первой скобке и c_{n-k} — во второй. Всего будет $c_k c_{n-k}$ расстановок скобок, в которых последняя будет иметь заданный вид. Общее число всех расстановок равно сумме всех этих чисел для $k = 1, 2, ..., n-1$. Иными словами имеет место соотношение

$$\text{при } n \geq 2 \qquad c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_1. \tag{26}$$

Правая часть соотношения (26) напоминает формулу для коэффициента произведения двух степенных рядов и подсказывает рассмотреть степенной ряд

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

(производящую функцию для чисел Каталана). Правая часть в соотношении (26) равна коэффициенту при x^n в ряде $(f(x))^2$. Соотношение (26) показывает, что коэффициенты рядов $f(x)$ и $(f(x))^2$ будут равны во всех членах степени 2 и больше. Но $f(x)$ имеет член x степени 1, а $(f(x))^2$ такого члена не имеет. Поэтому

$$(f(x))^2 = f(x) - x.$$

Мы видим, что ряд $f(x)$ удовлетворяет квадратному уравнению $y^2 - y + x = 0$. Поэтому ряд $f(x)$ явно вычисляется:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Мы ставим знак "минус" перед квадратным корнем, так как ряд $\sqrt{1-4x}$ имеет свободный член 1, а $f(x)$ не имеет свободного члена.

По формуле (25)

$$\sqrt{1-4x} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}(-4x)^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^n + \cdots$$

Таким образом,

$$c_n = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n.$$

Эту формулу можно еще упростить:

$$c_n = -\frac{1}{2}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!}(-2)^n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{n!}2^{n-1}.$$

Умножим числитель и знаменатель последнего выражения на $(n-1)!$ и соединим каждый множитель в $1 \cdot 2 \cdots (n-1)$ с множителем 2. Мы получим произведение натуральных четных чисел, не превосходящих $2n-2$. В числителе стоит произведение нечетных чисел, меньших $2n-2$. Вместе их произведение даст $(2n-2)!$ Мы получим в результате:

$$c_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

Так как $C_{2n-2}^{n-1} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$, то можно эту же формулу записать как

$$c_n = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

Задачи

1. Найдите коэффициенты степенного ряда $\frac{1}{(1-x)^2}$ путем прямого возведения в квадрат ряда $\frac{1}{1-x}$.

2. Найдите формулу для коэффициентов степенного ряда $\frac{1}{(1-x)^n}$. Указание. Использовать индукцию по n и связь между умножением ряда на $\frac{1}{1-x}$ и применением операции S к его коэффициентам.

3. Найдите коэффициенты степенного ряда $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$.

4. Докажите формулу $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, если f и g — многочлены и степенные ряды.

5. Докажите, что ряды $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ и $1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$ обратны друг другу.

6. Найдите формулу для производной от $\frac{1}{(1-x)^n}$. Примените ее для определения коэффициентов степенного ряда $\frac{1}{(1-x)^n}$ (индукцией по n).

7. Найдите все степенные ряды $f(x)$ для которых $f'(x) = f(x)$.

8. Докажите, что формула (25) верна и для отрицательных α. (Указание: Положив $\alpha = -\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные, $f(x) = (1+x)^\alpha$, воспользоваться соотношением $f(x)^q(1+x)^p = 1$. Проверьте, что для целых отрицательных α результат согласуется с результатом задач 2 и 5.)

9. Сколькими способами можно разбить выпуклый $n+1$–угольник на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника? Докажите, что это число равно числу Каталана c_n.

10. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n. Докажите, что коэффициент при x^k в степенном ряде $\frac{f(x)}{1-x}$ равен $f(1)$, если $k > n$.

11. Положим $f_n(x) = x + 2^n x^2 + 3^n x^3 + \ldots$ Докажите, что $f_n(x) = \frac{u_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$, где $u_n(x)$ — многочлен степени $n+1$, удовлетворяющий соотношению $u_{n+1}(x) = x(1-x)u_n'(x) + (n+1)xu_n(x)$. (Указание: Доказать, что $xf_n'(x) = f_{n+1}(x)$. Найти $f_0(x)$ и применить индукцию.)

12. Докажите соотношение

$$n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \cdot 1 = n!.$$

(Указание: Использовать задачи 10 и 11. Доказать, что в условиях задачи 11, $U_n(i) = n!$.)

§3. Partitio Numerorum

Латинское название partitio numerorum (партицио нумерорум) — разбиение чисел — Эйлер дал разделу математики, где изучаются разбиения натуральных чисел на слагаемые при помощи степенных рядов. В качестве введения, в §1 мы привели примеры задач о разбиениях чисел, в которых можно обойтись многочленами.

В общем случае нам нужно будет использовать бесконечные суммы степенных рядов. Пусть $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — бесконечная последовательность степенных рядов, причем такая, что каждый ряд $f_n(x)$ начинается со степени x, которая неограниченно растет с возрастанием n. Иначе говоря, для каждого показателя N только в конечном числе рядов $f_n(x)$ будет отличен от нуля член ax^N. Тогда при вычислении коэффициента при x^N в бесконечной сумме $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots$ мы должны будем складывать только конечное число рядов: $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_m(x)$. И вся N-ая частная сумма получающегося ряда будет совпадать с N-ой частной суммой конечной суммы рядов $f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_m(x)$. Благодаря этому реальное вычисление бесконечной суммы (то есть ее частных сумм) сводится всегда к вычислению частных сумм некоторых конечных сумм рядов. Поэтому те правила, которые мы вывели в §2 для сумм конечного числа рядов, остается верным и для бесконечных сумм (если ряды $f_n(x)$ удовлетворяют сформулированному выше требованию). Собственно, только после такого разъяснения мы имеем право говорить, что степенной ряд $f(x)$ является суммой своих членов — в этом случае $f_n(x) = a_n x^n$.

Те же замечания относятся и к бесконечным произведениям вида

$$(1 + f_0(x))(1 + f_1(x))(1 + f_2(x)) \cdots (1 + f_n(x)) \cdots, \tag{27}$$

где степенные ряды $f_n(x)$ удовлетворяют тому же условию: $f_n(x)$ начинается со степени x, которая неограниченно растет с ростом n. Тогда для каждого показателя N ряды $f_k(x)$, начиная с некоторого номера $m+1$, то есть при $k > m$ не содержат членов степени N. Поэтому члены фиксированной степени N в произведении (27) получаются только из конечного произведения $(1 + f_0(x)) \cdots (1 + f_m(x))$.

Пользуясь сделанными замечаниями, мы можем теперь указать производящие функции для чисел разбиений того или иного типа.

Так, числа разбиений на слагаемые, не превосходящие m, имеют производящую функцию

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) \cdots (1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots).$$

Действительно, в таком разбиении числа n слагаемое 1 входит a_1 раз, 2 — a_2 раза ... m — a_m раз: $n = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + m \cdot a_m$ (некоторые a_i могут быть равными 0). Этому разбиению соответствует член, получающийся из умножения члена x^{a_1} в первой скобке, x^{2a_2} — во второй, ... x^{ma_m} — в m-й. Коэффициент при x^n, значит, равен общему числу всех разбиений на слагаемые, не превосходящие m. Ввиду формулы (18) мы можем записать этот ряд в виде

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}. \tag{28}$$

Совершенно аналогично число разбиений числа n на произвольные натуральные слагаемые имеет производящую функцию

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)\cdots}. \tag{29}$$

Число разбиений на нечетные слагаемые имеет производящую функцию

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots(1-x^{2m+1})\cdots\cdots}, \tag{30}$$

на четные —

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})\cdots\cdots}.$$

Если нас интересуют только разбиения на *различные* слагаемые, то производящей функцией будет

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^m)\cdots \tag{31}$$

Здесь допускаются только разбиения, в которые 1 входит a_1 раз, 2 — a_2 раза, ... m — a_m раз, однако при этом a_i могут быть равны только 0 или 1. Но в множителях произведения (31) как раз содержатся такие и только такие члены x^{a_1} ($a_1 = 0$ или 1) в первом множителе, x^{2a_2} ($a_2 = 0$ или 1) — во втором и так далее.

Эти формулы сразу дают ряд приложений.

Теорема 3. *Число разбиений числа n на различные слагаемые равно числу его разбиений на нечетные слагаемые (может быть, одинаковые).*

Например, 6 имеет 3 разбиения на различные слагаемые: $6 = 1+5 = 1+2+3 = 2+4$ и 3 разбиения на нечетные слагаемые: $6 = 1+5 = 1+1+1+3 = 3+3$.

На языке производящих функций теорема означает, что степенные ряды (30) и (31) совпадают. Чтобы доказать это, запишем ряд (31) в виде:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots$$

В числителе стоят произведения всех множителей $1-x^{2n}$, а в знаменателе $1-x^m$. Множители $1-x^m$ в знаменателе с четным m в совокупности дают выражение, стоящее в числителе и после сокращения остается произведение множителей $1-x^m$ с нечетным m, то есть ряд (30).

Следующее свойство касается числа разбиений натурального числа n на произвольные натуральные слагаемые. Мы обозначим число всех таких разбиений через $p(n)$. Как сказано выше, ряд $1+p(1)x+p(2)x^2+\cdots+p(n)x^n+\cdots$ задается формулой (29).

Теорема 4. *Для $n \geq 2$ выполняются неравенства*

$$p(n) - 2p(n-1) + p(n-2) \geq 0.$$

Эти неравенства означают, что

$$p(n-1) \leq \frac{1}{2}\Big(p(n) + p(n-2)\Big).$$

Иными словами, если нарисовать на плоскости точки с координатами $(n, p(n))$, $n = 1, 2, \ldots$ то каждая точка лежит ниже отрезка, соединяющего две соседние (рис. 1)

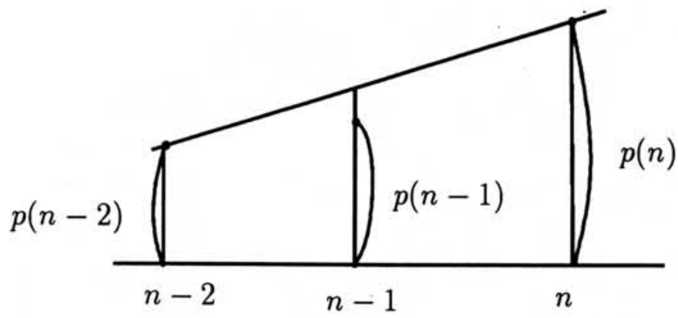


рис. 1

То есть, если во все точки $(n, p(n))$ вбить гвоздики и натянуть на них нить, то получится выпуклый бесконечный многоугольник. Первые 10 значений последовательности $p(n)$ таковы: $p(1) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$, $p(9) = 30$, $p(10) = 42$. Вы можете проверить теорему на этих значениях экспериментально. Выпуклость получающегося многоугольника связана с тем, что числа $p(n)$ очень быстро растут: уже $p(50) = 204226$.

Предпошлем доказательству теоремы одно замечание. В §3 гл. II мы определили для каждой последовательности $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ последовательность $\Delta a = (a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots)$. Применим к этой последовательности еще раз ту же операцию. Мы получим последовательность $\Delta\Delta a = (a_0, a_1 - 2a_0, a_2 - 2a_1 + a_0, \ldots)$. Член b_n этой последовательности имеет вид $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 2$. С другой стороны, если $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots$ — производящая функция последовательности a, то, как мы видели в §2, производящей функцией последовательности Δa будет ряд $(1-x)f(x)$. Поэтому последовательность $\Delta\Delta a$ имеет производящую функцию $(1-x)^2 f(x)$ и мы приходим к тождеству

$$(1-x)^2 f(x) = a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + \cdots + (a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2})x^n + \cdots,$$

если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы. Ввиду предшествующего замечания она означает, что коэффициенты ряда $(1-x)^2\Big(p(0) + p(1)x + \cdots + p(n)x^n + \cdots\Big)$, начиная с коэффициента при x^2, неотрицательны. Так как $p(0)+p(1)x+p(2)x^2+\cdots = (1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\cdots$, то нам надо доказать что коэффициенты ряда $(1-x)(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\cdots$, неотрицательны, начиная с коэффициента при x^2.

Положим $g(x) = (1-x^3)^{-1}(1-x^4)^{-1}\ldots$ Интересующий нас ряд имеет вид $(1-x)(1-x^2)^{-1}g(x)$. Так как $(1-x)(1-x^2)^{-1} = \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)} = (1+x)^{-1}$, то он равен $(1+x)^{-1}g(x)$. Но легко заметить, что ряд $g(x)$ тоже является производящей функцией простых чисел разбиений. Именно, рассуждая дословно так же, как и при рассмотрении рядов (28), (29) и (30), мы убедимся, что $g(x)$ — производящая функция для числа разбиений на слагаемые, не меньшие, чем 3. Обозначив число таких разбиений натурального числа n через $q(n)$, получим, что $g(x) = 1 + q(1)x + q(2)x^2 + \cdots$

Так как $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, то коэффициент при x^n в ряде $(1+x)^{-1}g(x)$ равен $q(n) - q(n-1) + q(n-2) - \cdots + (-1)^n$ (надо только вспомнить правило перемножения степенных рядов: каждый член первого умножается на каждый член второго, а потом подобные члены приводятся). Таким образом, нам остается доказать неравенство

$$q(n) - q(n-1) + q(n-2) - \cdots + (-1)^n \geq 0, \tag{32}$$

оно следует из очевидного неравенства $q(n) \geq q(n-1)$: действительно, увеличивая наибольшее слагаемое некоторого разбиения числа $n-1$ на 1, мы получим разбиение числа n. Если первое состояло из слагаемых, больших 2, то таким же будет и второе. Ввиду этого неравенства сумма (31) разбивается на $\frac{n}{2}$ неотрицательные суммы по 2 слагаемых $q(n-2k)-q(n-2k-1)$ (при n нечетном) и еще одно слагаемое 1 (при n четном). Это и доказывает теорему.

До сих пор мы получали утверждения о числах разбиений почти из ничего — из перемножения степенных рядов. Эйлер нашел более тонкий метод вычисления коэффициентов некоторых произведений, использующий так называемые функциональные уравнения, которым они удовлетворяют. Мы проиллюстрируем этот метод на одном примере.

Рассмотрим вопрос о разбиениях натурального числа на заданное число *различных* слагаемых. Для этого Эйлер предлагает ввести новую неизвестную z и ряд $G(x,z) = (1+z)(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\cdots$ Развертывая его по степеням z, мы получим равенство

$$G(x,z) = 1 + u_1(x)z + u_2(x)z^2 + \cdots + u_m(x)z^m + \cdots \tag{33}$$

где $u_i(x)$ — степенные ряды от неизвестной x. Здесь в член $u_m(x)z^m$ войдут члены, получающиеся из перемножения m членов x^iz из произведения $G(x,z)$ и, следовательно, коэффициент при x^nz^m будет равен числу разбиений n на m различных слагаемых. Иными словами, $u_m(x)$ и есть производящая функция таких разбиений.

Если в произведении $G(x,z)$ заменить z на xz, то мы получим все сомножители $G(x,z)$, кроме первого. Поэтому

$$G(x,z) = (1+z)G(x,xz). \tag{34}$$

Это и есть функциональное уравнение для ряда $G(x,z)$. С другой стороны, подставляя xz вместо z в ряд (33) мы видим, что

$$G(x,xz) = 1 + u_1(x)xz + u_2(x)x^2z^2 + \cdots + u_m(x)x^mz^m + \cdots$$

Перемножая $1+z$ на это выражение для $G(x,xz)$, мы получим, что

$$u_m(x) = u_m(x)x^m + u_{m-1}(x)x^{m-1},$$

откуда

$$u_m(x) = \frac{x^{m-1}}{1-x^m}u_{m-1}(x). \tag{35}$$

Применяя это же соотношение для $u_{m-1}(x)$ и подставляя в равенство (35), мы получим, что

$$u_m(x) = \frac{x^{(m-1)+(m-2)}}{(1-x^m)(1-x^{m-1})}u_{m-2}(x).$$

Производя такую же операцию m раз и учитывая, что $u_0(x) = 1$, мы найдем для $u_m(x)$ выражение

$$u_m(x) = \frac{x^{(m-1)+(m-2)+\cdots+1}}{(1-x^m)(1-x^{m-1})\cdots(1-x)} = \frac{x^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}. \tag{36}$$

Но ряд $\dfrac{1}{(1-x)\cdots(1-x^m)}$ нам уже встречался (см. формулу (28)). Это производящая функция для числа разбиений на слагаемые, не превосходящих m. Формула (36) показывает, что *число разбиений числа n на m различных слагаемых равно числу разбиений числа $n - \dfrac{m(m-1)}{2}$ на слагаемые, не превосходящие m.*

В связи с производящей функцией (29) Эйлер рассмотрел логически более простое произведение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots \tag{37}$$

Это очень интересное выражение. В §1 мы отметили аналогию между многочленами Гаусса $g_{k,l}(x)$ и биномиальными коэффициентами. Аналогия основывалась на формуле (7), в которой многочлен $h_m(x)$ был аналогичен числу m! Напомним, что

$$h_m(x) = (1-x)(1-x^2)\cdots)(1-x^m).$$

С этой точки зрения произведение (37) аналогично "факториалу бесконечности". Для чисел такое словосочетание бессмысленно, оно не имеет смысла и для многочленов, но приводит к вполне строго определенному выражению, если мы пользуемся степенными рядами.

Эйлер развернул это выражение в ряд вплоть до члена x^{51} и получил выражение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\cdots$$

Его поразила обнаруживающаяся здесь закономерность: все коэффициенты равны 0, $+1$ или -1. Более того, показатели членов с ненулевыми коэффициентами образуют последовательность, которая была Эйлеру знакома: это числа вида $\dfrac{n(3n+1)}{2}$ при $n = -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, -6$. Эти числа тогда вообще вызывали интерес в связи с так называемыми "фигурными числами", известными еще с античности. Именно, треугольное число — это число точек в правильном треугольнике, если на расстоянии n от вершины стоит $n+1$ точек (рис. 2). Таким образом, это числа: 1, 3, 6, 10, ..., $\dfrac{n(n+1)}{2}$, ...

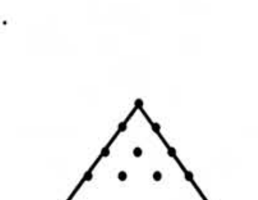


рис. 2

Квадратное число — это число точек в квадрате, если они расставлены на равном расстоянии и число точек на стороне равно n (рис. 3). Иными словами, это просто полные квадраты: n^2.

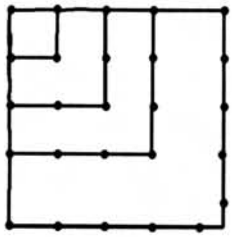


рис. 3

Пятиугольные (или пентагональные) числа получаются из правильного пятиугольника, если поставить точки в его вершинах, потом подобно увеличить его, сохранив одну вершину A и направления выходящих из нее сторон, и на не примыкающих к вершине A сторонах поставить по две точки, в следующий раз по 3 точки и т.д. Пятиугольное число равно числу точек, получающихся после n таких операций (рис. 4).

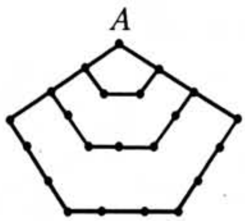


рис. 4.

Следовательно, пятиугольное число равно сумме арифметической прогрессии: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = 1 + (1+3) + (1+2\cdot 3) + \cdots + (1+(n-1)3) = \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n \text{ раз}} + (1 + 2 + \cdots + (n-1))3 = n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3 = \frac{3n^2 - n}{2}$.

По аналогии с этими числами и числа того же вида с отрицательным $n = -m$, то есть числа $\frac{3m^2 + m}{2}$ тоже называются пятиугольными.

Эйлер предлагает для произведения $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ выражение в виде ряда, состоящего из членов $(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}} + (-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Он называет это "примечательным наблюдением, которое я, однако еще не могу доказать с геометрической строгостью". Мы бы сейчас назвали это гипотезой. Эту гипотезу Эйлер высказал в 1741 г. Ее доказательство он нашел 9 лет спустя, в 1750 г. Ввиду ее связи с пятиугольными (пентагональными) числами, она называется пентагональной теоремой Эйлера. Ее доказательство несколько сложнее, чем рассуждения, которые мы до сих пор проводили, и мы отнесем его в Приложение.

Пентагональная теорема Эйлера дает новые свойства чисел разбиений. Прежде всего, произведение $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ тоже является некоторой производящей функцией. А именно, совершенно аналогично развертыванию произведения (31) каждый член x^n получается из некоторого разбиения n на различные слагаемые. Но теперь этот член входит со знаком "+", если число слагаемых четно, и со знаком "-", если это число нечетно. Таким образом, коэффициент при x^n равен *разности* между числом разбиений n на четное и нечетное число различных слагаемых. Поэтому пентагональная теорема Эйлера имеет следующую формулировку.

Число разбиений натурального числа n на различные четные слагаемые равно числу его разбиений на различные нечетные слагаемые, если n не является пятиугольным числом и разность между этими двумя числами равна $(-1)^m$ если n имеет вид $\dfrac{m(3m-1)}{2}$ при целом положительном или отрицательном m.

Другое следствие пентагональной теоремы таково. Вспомним, что произведение (29) совпадает с рядом $1+p(1)x+p(2)x^2+\cdots$, а обратное ему произведение (37) по теореме Эйлера есть сумма членов вида $(-1)^n x^{\frac{n(3n\pm1)}{2}}$. Перемножим эти два ряда по обычному правилу ("член одного умножается на член другого и приводятся подобные члены"), а потом запишем, что произведение равно 1, то есть ряду, у которого все коэффициенты, кроме свободного члена, равны 0. Выпишем коэффициент при x^n (при $n>0$) в произведении и приравняем его к 0. Мы получим соотношение

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+\cdots=0.$$

В этой сумме стоят члены $(-1)^m\Big(p(n-m_1)+p(n-m_2)\Big)$, где $m_1=\dfrac{m(3m-1)}{2}$, $m_2=\dfrac{m(3m+1)}{2}$. Рассматриваются только те значения m_1 и m_2, которые не превосходят n, и $p(0)$ считается равным 1. Полученное соотношение выражает $p(n)$ через значения $p(n')$ со значением $n'<n$ и дает удобный способ последовательного вычисления чисел $p(n)$. Например,

$$\begin{aligned}
&p(10)=p(9)+p(8)-p(5)-p(3),\\
&p(9)=p(8)+p(7)-p(4)-p(2),\\
&p(8)=p(7)+p(6)-p(3)-p(1),\\
&p(7)=p(6)+p(5)-p(2)-1,\\
&p(6)=p(5)+p(4)-p(1),\\
&p(5)=p(4)+p(3)-1,\\
&p(4)=p(3)+p(2),\\
&p(3)=p(2)+p(1),\\
&p(2)=p(1)+1,\\
&p(1)=1,
\end{aligned}$$

отсюда, идя снизу вверх, получаем, что $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$, $p(6)=11$, $p(7)=15$, $p(8)=22$, $p(9)=30$, $p(10)=42$.

Задачи

1.Недавно вновь введена денежная единица — копейка и монеты стоимостью в 1, 5, 10 и 50 копеек. Обозначим через a_n число способов, которым можно сумму из

n копеек составить из таких монет. Докажите, что степенной ряд $1+a_1x+a_2x^2+\cdots$ равен $\frac{1}{p(x)}$, где $p(x)$ — многочлен и найдите этот многочлен.

2. То же, если a_n — число способов, которыми число n можно разложить на слагаемые, равные заданным числам $k_1, \ldots, k_r$.

3. Докажите, что если в задаче 2 считать различными разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, то число разбиений n на m слагаемых равно коэффициенту при x^n в $(x^{k_1}+\cdots+x^{k_r})^m$. Решите задачу 2 при этих новых условиях.

4. Докажите, что каждое натуральное число может быть представлено 2^{n-1} способами как сумма натуральных слагаемых, если считать различными разбиения, отличающиеся порядком слагаемых.

5. Сколько существует различных одночленов степени m от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$? (Указание: Представьте ряд, являющийся суммой всех одночленов $x_1^{r_1}\ldots x_n^{r_n}$ в виде $\frac{1}{p(x_1, \ldots x_n)}$, где $p(x_1, \ldots x_n)$ — многочлен, а потом положите $x_1 = \cdots = x_n = y$.)

6. Положим $F_m = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$. Из очевидного соотношения $F_m \cdot (1-x^m) = F_{m-1}$ следует равенство $F_m = F_{m-1}+x^mF_m$. Выведите из этого, что число разбиений числа n на слагаемые $1, \ldots, m$ равно сумме числа таких же разбиений числа $n-m$ и числа разбиений n на слагаемые $1, 2 \ldots, m-1$. Какое соотношение имеет место при $n = m$?

Заметьте, что число разбиений n на слагаемые $1, 2, \ldots, m$ равно $P_{n,m}(n)$ в обозначениях §1. Поэтому полученное выше соотношение есть следствие равенства (2) §1 (при каких значениях k, l, n?). Но теперь оно получено без каких-либо рассуждений с разбиениями, исключительно исходя из свойств степенных рядов.

7. К теории разбиений внимание Эйлера привлек немецкий математик Ноде. В своем письме он спрашивает: как определить число разбиений для достаточно большого числа n? Например, чему равно число разбиений 50 на слагаемые, не превосходящие 7? На 7 различных слагаемых? Эйлер ответил Ноде через 2 недели, указав на связь его вопроса со степенными рядами, и этим методом смог ответить на вопросы Ноде. Он опубликовал свои результаты в печати через полгода. В частности, он вывел соотношение, указанное в задаче 6, и таким способом нашел последовательность чисел разбиений, начиная с меньших n и m вплоть до $n = 69$ и $m = 11$. Попытайтесь восстановить ход рассуждений Эйлера и составьте таблицу для чисел разбиений 1,2,...,49,50 на слагаемые не превосходящие 1,2,3,...,7.

Таблица должна иметь вид прямоугольника, где вверху по горизонтали отложены числа $m = 1, \ldots, 7$, а слева по вертикали $n = 1, \ldots, 50$, и на пересечении n-ой горизонтали и m-ой вертикали стоит число разбиений n на слагаемые, не превосходящие m. Докажите таким образом, что число разбиений 50 на слагаемые, не превосходящие 6, равно 18138, а число разбиений 50 на 7 разных слагаемых — 522. (Указание: Воспользуйтесь также соотношением, вытекающим из формулы (36).)

8. Докажите, что число разбиений n, в которых могут быть равными друг другу только нечетные слагаемые, равно числу разбиений, в которых каждое слагаемое встречается не более 3-х раз. (Указание: Представьте и те и другие числа разбиений при помощи производящих функций, которые разложены в бесконечное

произведение простых сомножителей.)

9. Представьте произведение $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^4z)(1+x^8z)\cdots$ в виде ряда $1+u_1(x)z+u_2(x)z+\cdots$ и найдите $u_k(x)$.

10. Представьте степенной ряд $(1-xz)^{-1}(1-x^2z)^{-1}(1-x^3z)^{-1}\cdots$ в виде $1+v_1(x)z+v_2(x)z+\cdots$ и найдите $v_k(x)$. (Указание: Воспользуйтесь функциональным уравнением для искомого ряда.)

Истолкуйте полученный результат как соотношение между числами разбиений, аналогично тому, как это было сделано с формулой (36).

Приложение I

Пентагональная теорема Эйлера

Мы изложим здесь два доказательства пентагональной теоремы Эйлера. Сейчас существует несколько разных ее доказательств. Мы изложим сначала доказательство, принадлежащее самому Эйлеру. Это замечательный образец чистой алгебры. В нем не используется ничего кроме раскрытия скобок и группировки членов, и в то же время эти операции комбинируются так филигранно, что сам Эйлер нашел доказательство почти через десять лет после того, как сформулировал теорему в виде гипотезы.

Идея доказательства очень естественна. Мы шаг за шагом развертываем произведение

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots, \tag{1}$$

на каждом шагу представляя его как сумму многочлена степени N и выражения, делящегося на x^{N+1}, причем с каждым шагом число N возрастает. Тем самым мы вычисляем частичные суммы разложения произведения (1) в степенной ряд.

Начнем с конечного произведения

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n).$$

Раскрыв последнюю скобку, запишем его в виде

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) = (1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1}) - a_n(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1}).$$

Теперь можно применить тот же прием к первому слагаемому, оно разобьется на произведение $n-2$ множителей $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-2})$ и член $-a_{n-1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-2})$. Потом так же преобразуем член $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-2})$ и таких преобразований совершим $n-1$, пока не выделится член $(1-a_1)$. В результате мы получим тождество

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) =$$
$$1 - a_1 - a_2(1-a_1) - a_3(1-a_1)(1-a_2) - \cdots - a_n(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1}). \tag{2}$$

Тождество (2) можно применить к бесконечному произведению $(1-u_1)\cdots(1-u_n)\cdots$, где $u_i(x)$ — степенные ряды, начинающиеся со все больших степеней x: мы применим это рассуждение к случаю, когда $u_n = x^n$, так что этот "ряд" начинается с члена степени n (и заканчивается им). Мы получим тождество:

$$(1-u_1)(1-u_2)\cdots(1-u_n)\cdots = 1 - u_1 - u_2(1-u_1) - \cdots - u_n(1-u_1)\cdots(1-u_{n-1}) - \cdots \tag{3}$$

Действительно, если мы рассмотрим члены степеней не превосходящих n, то в левой части можно отбросить все множители, начиная с $n+1$-го, а в правой — слагаемые, начиная с $n+1$-го, так как они не содержат членов степеней не превосходящих n. Но тогда мы получим тождество (2) с $a_i = u_i$. То есть члены степеней, не превосходящих n слева и справа в равенстве (3) совпадают. Так как это верно для любого n, то равенство (3) верно.

Подставив в соотношение (3) $u_i = x^i$, мы получим равенство

$$(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)\cdots =$$

$$1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - \cdots - x^n(1-x)\cdots(1-x^{n-1}) - \cdots \quad (4)$$

Это первый шаг в нашей цепи преобразований. Обозначим произведение $(1-x)\cdots(1-x^n)\cdots$ через P_0, вынесем в равенстве (4) x^2 из всех членов, кроме первых двух, и положим

$$P_1 = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + \cdots + x^m(1-x)\cdots(1-x^{m+1}) + \cdots$$

Тогда равенство (4) примет вид:

$$P_0 = 1 - x - x^2 P_1. \quad (5)$$

Теперь преобразуем P_1. Запишем P_1 в виде

$$P_1 = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_k + \cdots,$$

где

$$Q_k = x^k(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{k+1}).$$

В произведении Q_k раскроем первую скобку. Мы получим равенство, которое запишем в виде:

$$Q_k = A_k - B_k,$$

где

$$A_k = x^k(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^k), \qquad B_k = x^{k+1}(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^{k+1}),$$

$$A_0 = 1, \qquad B_0 = x.$$

Выражение P_1 запишется в виде

$$P_1 = A_0 - B_0 + A_1 - B_1 + \cdots + A_k - B_k + \cdots \quad (6)$$

Заметим теперь, что при $k \geq 2$ выражение $A_k - B_{k-1}$ может быть записано проще:

$$A_k - B_{k-1} = x^k(1-x^2)\cdots(1-x^{k+1}) - x^k(1-x^2)\cdots(1-x^k) = -x^{2k+1}C_{k-2},$$

где

$$C_k = (1-x^2)\cdots(1-x^{k+2}), \qquad k \geq 2, \quad C_0 = 1 - x^2$$

и значит

$$C_{k-2} = (1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^k).$$

Записав разложение (6) в виде

$$P_1 = A_0 - B_0 + A_1 + (-B_1 + A_2) + (-B_2 + A_3) + \cdots + (-B_{k-1} + A_k) + \cdots,$$

мы получим запись

$$P_1 = 1 - x + x(1 - x^2) - x^5 C_0 - x^7 C_1 - \cdots - x^{2k+5} C_k - \cdots$$

Иначе ее можно записать, приведя подобные члены вначале, так:

$$P_1 = 1 - x^3 - x^5 P_2, \tag{7}$$

где $P_2 = C_0 + x^2 C_1 + \cdots + x^{2k} C_k + \cdots$ В развернутом виде

$$P_2 = 1 - x^2 + x^2(1 - x^2)(1 - x^3) + \cdots + x^{2k}(1 - x^2)(1 - x^3)\cdots(1 - x^{k+2}) + \cdots$$

На этом, собственно, содержательная часть доказательства заканчивается. Равенства (5) и (7) уже дают начало индуктивного развертывания произведения (1) с выделением из него частичной суммы все большей степени. Надо только сформулировать процесс перехода от n-ого шага к $n+1$-му и явно выписать результат.

Положим

$$P_n = 1 - x^n + x^n(1 - x^n)(1 - x^{n+1}) + x^{2n}(1 - x^n)(1 - x^{n+1})(1 - x^{n+2}) +$$
$$+ \cdots + x^{kn}(1 - x^n)(1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+k}) + \cdots$$

Преобразуем это выражение дословно так же, как мы поступали с P_1. Положим $x^{nk}(1-x^n)(1-x^{n+1})\cdots(1-x^{n+k}) = Q_k$. Тогда $P_n = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_k + \cdots$ Раскроем в произведении Q_k первую скобку: $Q_k = A_k - B_k$,

$$A_k = x^{nk}(1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+k}), \qquad B_k = x^{n(k+1)}(1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+k}).$$

Рассмотрим разность $A_k - B_{k-1}$ при $k \geq 2$:

$$A_k - B_{k-1} = x^{nk}(1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+k-1})(-x^{n+k}) =$$
$$= -x^{nk+n+k}(1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+k-1}) = (-x^{nk+n+k})C_{k-2},$$

где

$$C_k = (1 - x^{n+1})\cdots(1 - x^{n+1+k}), \quad k \geq 0.$$

Показатель степени $nk+n+k$, в которой x делит C_{k-2}, может быть записан в виде $nk + n + k = (n+1)(k-2) + 3n + 2$. Поэтому P_n можно записать в виде

$$P_n = A_0 - B_0 + A_1 + (-B_1 + A_2) + \cdots + (-B_{k-1} + A_k) + \cdots =$$
$$= A_0 - B_0 + A_1 + -x^{3n+2}(C_0 + x^{n+1}C_1 + x^{2(n+1)}C_2 + \cdots).$$

Сумма

$$C_0 + C_1 + C_2 + \cdots = 1 - x^{n+1} + x^{n+1}(1 - x^{n+2}) + \cdots + x^{k(n+1)}(1 - x^{n+2})(1 - x^{n+3})\cdots(1 - x^{n+1+k}) + \cdots$$

совпадает по определению с P_{n+1}. $A_0 - B_0 + A_1 = 1 - x^n + x^n - x^{2n+1} = 1 - x^{2n+1}$. В результате мы получаем соотношение

$$P_n = 1 - x^{2n+1} - x^{3n+2}P_{n+1}. \tag{8}$$

Наш процесс развертывания произведения (1) в ряд полностью описан. Остается посмотреть, что же в результате получается. Выразим по этой же формуле P_{n-1} через P_n и подставим выражение (8) для P_n. Мы получим:

$$P_{n-1} = 1 - x^{2n-1} - x^{3n-1}(1 - x^{2n+1} - x^{3n+2}P_{n+1}).$$

Точно так же выразим P_{n-2} через P_{n-1} и подставим полученное выше выражение для P_{n-1}. Мы получим:

$$P_{n-2} = 1 - x^{2n-3} - x^{3n-4}(1 - x^{2n-1} - x^{3n-1}(1 - x^{2n+1} - x^{3n+2}P_{n+1})).$$

Так мы дойдем через n шагов до P_0 и получим выражение, в которое входят пары слагаемых $1 - x^{2n+1}$ с чередующимися знаками, причем выражение $1 - x^{2n+1}$ будет входить со знаком $(-1)^n$. Кроме того, каждое такое выражение будет умножаться на некоторую степень x. А именно, при переходе от P_n к P_{n-1} возникает множитель x^{3n-1}, при переходе от P_{n-1} к P_{n-2} — множитель x^{3n-4} и т. д. В результате при выражении P_0 сумма $1 - x^{2n+1}$ будет входить с множителем $x^{2+5+\cdots+(3n-1)}$. В показателе степени стоит сумма арифметической прогрессии $2 + (2+3) + \cdots + (2 + 3(n-1)) = 2n + 3(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2n + 3\dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{3n^2+n}{2}$. Итак, произведение (1) равно сумме членов $(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}(1 - x^{2n+1})$. Мы видим, что $\dfrac{3n^2+n}{2}$ — это пятиугольное число, соответствующее значению n. А $\dfrac{3n^2+n}{2} + 2n + 1 = \dfrac{3n^2+5n+2}{2} = \dfrac{3(n+1)^2-(n+1)}{2}$ — это пятиугольное число, соответствующее отрицательному значению $-(n+1)$. Итак, произведение (1) равно сумме членов $(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}$ для $n = 0, -1, 1, -2, 2$, и т.д. Это и есть утверждение теоремы Эйлера.

Заметим, что мы могли не выводить выражение P_1 через P_2 (то есть формулу (7)) а ограничиться выводом формулы (8), так как формула (7) получается из нее при $n = 1$. Мы, по существу, два раза повторили одно и то же рассуждение, чтобы сделать понятнее логику наших преобразований.

Изложим теперь второе доказательство пентагональной теоремы. Оно основывается на тождестве, найденном уже в XIX в. Гауссом и Якоби. Речь идет о вычислении бесконечного произведения

$$(1+xz)(1+xz^{-1})(1+x^3z)(1+x^3z^{-1})\cdots(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1})\cdots, \tag{9}$$

где степени x при z и z^{-1} пробегают все нечетные числа. Это — выражение более сложного вида, чем мы раньше рассматривали, так как в него кроме положительных степеней z входят и отрицательные. Убедимся, что такое выражение имеет вполне определенный смысл, точно так же, как бесконечные произведения, составленные из степенных рядов. Если рассмотреть первые n сомножителей из произведения (9), то мы получим выражение

$$(1+xz)(1+xz^{-1})(1+x^3z)(1+x^3z^{-1})\cdots(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1}), \qquad (10)$$

являющееся обычной алгебраической дробью. Раскрывая все скобки, мы получим члены вида $x^m z^r$, где m принимает положительные значения, а r — как положительные, так и отрицательные. Если же рассмотреть следующие сомножители произведения (9), то при раскрытии скобок добавятся только члены, содержащие x в степенях, больших чем $2n$. Поэтому коэффициент при z^r будет степенным рядом от x и для вычисления его членов степени, не превосходящей $2n$, достаточно рассмотреть конечное произведение (10). Таким образом, после развертывания, бесконечное произведение (9) будет суммой выражений $A_r(x)z^r$, где $A_r(x)$ — степенные ряды от x, а r принимает любые целые значения. Но ввиду симметрии выражения (9) относительно z и z^{-1}, выражение, полученное его развертыванием, будет также симметричным, поэтому коэффициент $A_r(x)z^r$ при z^r, $r>0$ будет равен коэффициенту $A_{-r}(x)$ при z^{-r}. В результате все произведение (9) может быть записано в виде

$$A_0(x)+A_1(x)(z+z^{-1})+\cdots+A_r(x)(z^r+z^{-r})+\cdots \qquad (11)$$

Наша задача и заключается в вычислении степенных рядов $A_0(x)$, $A_1(x), \ldots$ Оно происходит в два этапа.

Первый этап совершенно параллелен рассуждениям, которые мы проводили в §3. Обозначим произведение (9) через $F(z)$ и заменим в нем z на x^2z, то есть, рассмотрим $F(x^2z)$. Каждый сомножитель $1+x^{2k-1}z$ или $1+x^{2k-1}z^{-1}$ при замене z на x^2z даст такой же сомножитель $1+x^{2k+1}z$ и $1+x^{2k-3}z^{-1}$. Таким образом, сомножители в произведении $F(z)$ только поменяются местами и оно не изменится с точностью до того, что

а) в нем не окажется множителя $1+xz$ (все множители $1+x^{2k+1}z$ будут иметь показатели $2k+1\geq 3$);

б) из множителя $1+xz^{-1}$ появится множитель $1+x^{-1}z^{-1}$, которого раньше не было.

Это все можно записать в виде одной формулы:

$$F(x^2z)\frac{1+xz}{1+x^{-1}z^{-1}}=F(z).$$

Но, очевидно, $\dfrac{1+xz}{1+x^{-1}z^{-1}}=xz$ и мы можем записать эту формулу так:

$$F(x^2z)xz=F(z). \qquad (12)$$

Теперь вспомним, что мы можем считать произведение $F(z)$ развернутым в виде (11) и применим к этой записи соотношение (12). Мы получим:

$$\Big(A_0(x)+A_1(x)(x^2z+x^{-2}z^{-1})+\cdots+A_r(x)(x^{2r}z^r+x^{-2r}z^{-r})+\cdots\Big)xz=$$

$$A_0(x)+A_1(x)(z+z^{-1})+\cdots+A_r(x)(z^r+z^{-r})+\cdots$$

Приравняем члены, содержащие z^r. Слева они получатся из члена, содержащего z^{r-1} после умножения на xz. То есть из члена $A_{r-1}(x)x^{2(r-1)}z^{r-1}$ после умножения на xz. Справа — из члена, содержащего z^r, то есть из $A_r(x)z^r$. В результате получаем, что

$$A_{r-1}(x)x^{2r-1} = A_r(x).$$

Мы видим, что все ряды $A_r(x)$ выражаются друг через друга. В частности,

$$A_r(x) = x^{2r-1}A_{r-1}(x) = x^{2r-1+2r-3}A_{r-2}(x) = \cdots = x^{2r-1+2r-3+\cdots+1}A_0(x). \tag{13}$$

В показателе у x стоит сумма первых r нечетных чисел. Мы уже встречались с аналогичной суммой в первом доказательстве пентагональной теоремы: $1 + (1 + 2) + (1 + 2 \cdot 2) + \cdots + (1 + 2(r-1)) = r + 2(1 + 2 + \cdots + r - 1) = r + 2\frac{r(r-1)}{2} = r + r(r-1) = r^2$. Короче, сумма первых r нечетных слагаемых равна r^2. Мы можем записать соотношение (13) так:

$$A_r(x) = x^{r^2}A_0(x).$$

Можно убедиться, что рассмотрение членов с отрицательными степенями z даст нам те же самые соотношения, но мы этого делать не будем.

Мы видим, что из всего выражения (11) выносится множитель $A_0(x)$ и для нашего произведения (9) получается очень изящное выражение:

$$\begin{aligned}&(1+xz)(1+xz^{-1})(1+x^3z)(1+x^3z^{-1})\cdots(1+x^{2r-1}z)(1+x^{2r-1}z^{-1})\cdots = \\ &A_0(x)\Big(1 + x(z+z^{-1}) + \cdots + x^{r^2}(z^r + z^{-r}) + \cdots\Big),\end{aligned} \tag{14}$$

но в нем множитель $A_0(x)$ еще остался неопределенным.

Приведенное рассуждение полностью следует методу, примененному в §3 для вычисления произведения (33). Однако у нас там был член (свободный) заранее известен и все другие члены выражались через него. В нашем же случае такого члена нет и он приводит к множителю $A_0(x)$ в формуле (14), который еще нужно определить.

Для этого мы переходим ко второму этапу доказательства — вычислению ряда $A_0(x)$. Вспомним, что для того, чтобы найти в этом ряде члены, степени которых не превосходят $2n$, нам достаточно рассмотреть конечное произведение (10). В нем же некоторые коэффициенты мы можем явно указать. Например, коэффициент при z^n получится, если из всех скобок вида $1+x^{2r-1}z$ брать слагаемое $x^{2r-1}z$, а из скобок $1+x^{2r-1}z^{-1}$ — слагаемое 1. В результате мы получим член $x^{1+3+\cdots+(2n-1)}z^n = x^{n^2}z^n$. Применяя тот же прием, что и в первом этапе доказательства, мы сможем выразить через него все остальные, в частности, $A_0(x)$. Это и есть план доказательства.

Обозначим произведение (10) (при некотором фиксированном n) через $f(z)$ и заменим в нем опять z на x^2z. Теперь мы получим больше изменений, чем при таком же преобразовании произведения (9). А именно, как и там, возникнут изменения в начале произведения: в $f(x^2z)$ не будет сомножителя $1 + xz$ и появится новый сомножитель $1 + x^{-1}z^{-1}$, которого не было в $f(z)$. Но сверх того, изменения произойдут теперь и в конце произведения (11): появится новый множитель

$(1+x^{2n-1}\cdot x^2z)=(1+x^{2n+1}z)$ и множителя $(1+x^{2n-1}z^{-1})$ не будет (после подстановки x^2z вместо z показатель при x уменьшится). Остальные же сомножители в $f(x^2z)$ и $f(z)$ будут одинаковыми. Мы опять получаем соотношение между ними, только более сложное:

$$f(x^2z)\frac{1+xz}{1+x^{-1}z^{-1}}\frac{(1+x^{2n-1}z^{-1})}{1+x^{2n+1}x)}=f(z). \tag{15}$$

Как мы видели, $\frac{1+xz}{1+x^{-1}z^{-1}}=xz$, $xz(1+x^{2n-1}z^{-1})=xz+x^{2n}$, и соотношение (15) принимает вид:

$$f(x^2z)(xz+x^{2n})=f(z)(1+x^{2n+1}z). \tag{16}$$

Представим теперь себе $f(z)$ развернутым по степеням z и z^{-1}:

$$f(z)=a_0(x)+a_1(x)(z+z^{-1})+\cdots+a_n(x)(z^n+z^{-n}) \tag{17}$$

и подставим это выражение в соотношение (16):

$$\Big(a_0(x)+a_1(x)(x^2z+x^{-2}z^{-1})+\cdots+a_n(x)(x^{2n}z^n+x^{-2n}z^{-n})\Big)(xz+x^{2n})=$$

$$\Big(a_0(x)+a_1(x)(z+z^{-1})+\cdots+a_n(x)(z^n+z^{-n})\Big)(1+x^{2n+1}z).$$

Приравняем коэффициенты при z^r в обеих частях равенства (считая $r\geq 1$). Слева такой член получится из члена, содержащего z^{r-1} после умножения на xz и из члена, содержащего z^r после умножения на x^{2n}. Справа такой член получится из члена, содержащего z^{r-1} после умножения на $x^{2n+1}z$ и из члена, содержащего z^r после умножения на 1. В результате мы получаем соотношение:

$$a_{r-1}(x)x^{2r-1}+a_r(x)x^{2r+2n}=a_{r-1}(x)x^{2n+1}+a_r(x).$$

Перенося члены с $a_{r-1}(x)$ и с $a_r(x)$ в разные стороны, получим:

$$a_{r-1}(x)x^{2r-1}(1-x^{2n-2r+2})=a_r(x)(1-x^{2n+2r}). \tag{18}$$

Соотношение (18) дает возможность выразить одни коэффициенты $a_r(x)$ через другие. Например,

$$a_r(x)=\frac{a_{r-1}(x)x^{2r-1}(1-x^{2n-2r+2})}{(1-x^{2n+2r})}.$$

Заменяя в соотношении (18) r на $r-1$, мы так же выразим $a_{r-1}(x)$ и получим, подставляя это выражение:

$$a_r(x)=\frac{a_{r-2}(x)x^{2r-1+2r-3}(1-x^{2n-2r+2})(1-x^{2n-2r+4})}{(1-x^{2n+2r})(1-x^{2n+2r-2})}.$$

Повторяя этот процесс r раз, мы получим в числителе степень x, равную $x^{(2r-1)+(2r-3)+\cdots+1}$, то есть, как мы видели, x^{r^2}. В целом мы получим:

$$a_r(x)=a_0(x)x^{r^2}\frac{(1-x^{2n-2r+2})(1-x^{2n-2r+4})\cdots(1-x^{2n})}{(1-x^{2n+2r})(1-x^{2n+2r-2})\cdots(1-x^{2n+2})}.$$

Так как нам известен коэффициент $a_n(x)$ (он равен x^{n^2}), то положим в этом соотношении $r = n$:

$$x^{n^2} = a_0(x)x^{n^2}\frac{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})}{(1-x^{2n+2})\cdots(1-x^{4n})}.$$

Иначе это можно переписать так:

$$a_0(x) = \frac{(1-x^{2n+2})\cdots(1-x^{4n})}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})}. \tag{19}$$

Теперь вспомним вывод, к которому мы пришли: чтобы найти коэффициенты при степенях x, не превышающих $2n$ в произведении (9), достаточно найти те же члены в конечном произведении (10). В частности, это относится к членам, входящим в $A_0(x)$: в показателях, не превосходящих $2n$, они совпадают с такими же членами в $a_0(x)$. Но в числителе формулы (19) все степени x больше, чем $2n$. Поэтому для вычисления членов степеней не превосходящих $2n$, их можно отбросить и мы видим, что в ряде $A_0(x)$ члены степени, не превосходящей $2n$ те же, что и в ряде

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})}.$$

Наше заключение верно при любом n. Это доказывает, что имеет место равенство:

$$A_0(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})\cdots},$$

где в знаменателе перемножены все двучлены $1 - x^{2n}$ со всеми натуральными n. В сочетании с формулой (14) это полностью определяет произведение (9). Умножая на знаменатель и группируя по-другому сомножители (законность этой операции мы обсуждали в §§2 и 3), получаем соотношение:

$$(1+xz)(1+xz^{-1})(1-x^2)\cdots(1+x^{2n-1}z)(1+x^{2n-1}z^{-1})(1-x^{2n}) =$$
$$1 + x(z+z^{-1}) + x^4(z^2+z^{-2}) + \cdots + x^{n^2}(z^n+z^{-n}) + \cdots \tag{20}$$

и само по себе очень изящное.

Пентагональная теорема является следствием тождества (20). Действительно, положим в нем $x = y^3$, $z = -y$. Тогда слева $1 - x^{2n} = 1 - y^{6n}$, $1 + x^{2n-1}z = 1 - y^{6n-2}$, $1 - x^{2n-1}z^{-1} = 1 - y^{6n-4}$, то есть в левой части тождества (20) получатся все произведения $1 - y^n$ с четными натуральными n. Справа член $x^{n^2}z^n$ даст $(-1)^n y^{3n^2+n}$, а член $x^{n^2}z^{-n}$ даст $(-1)^n y^{3n^2-n}$. Мы получим слева и справа ряды, в которые входят только четные степени y. Поэтому мы можем положить $y^2 = t$. В результате слева получится произведение всех множителей $1 - t^n$ с натуральными n, а справа — сумма членов $(-1)^n t^{\frac{3n^2 \pm n}{2}}$. Это равенство и есть пентагональная теорема.

Задачи

1. Найдите представление произведения

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)\cdots(1-x^{2n+1})^2(1-x^{2n+2})\cdots$$

в виде ряда.

2. То же для произведения

$$(1+x)^2(1-x^2)(1+x^3)^2(1-x^4)\cdots(1+x^{2n+1})^2(1-x^{2n+2})\cdots$$

3. Докажите тождество

$$(1-x^2)(1+x)(1-x^4)\cdots(1+x^n)(1-x^{2n+2})\cdots=1+x+x^3+x^6+\cdots+x^{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots$$

4. Докажите тождество

$$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}=1+x+x^6+\cdots+x^{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots$$

Приложение II

Производящая функция для чисел Бернулли

Рассмотрим один замечательный степенной ряд:

$$e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{1}$$

Если доказать, что вместо x можно подставлять числа, то таким образом мы получим важную функцию: можно доказать, что $e(x) = e^x$, где e — основание натуральных логарифмов. Но мы останемся в пределах чисто алгебраической теории степенных рядов. Покажем, все же, что ряд $e(x)$ сохраняет некоторые свойства показательной функции. Введем новую неизвестную y и рассмотрим ряды $e(y)$ и $e(x+y)$. Мы докажем тождество:

$$e(x + y) = e(x)e(y). \tag{2}$$

Действительно, подставим $x+y$ вместо x в формулу (1). Член степени n будет иметь вид $\frac{1}{n!}(x+y)^n$. Развернем $(x+y)^n$ по формуле бинома и воспользуемся выражениями, найденными нами для биномиальных коэффициентов в §3 гл.II (формула (24)):

$(x + y)^n = x^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}y + \frac{n!}{2!(n-2)!}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n$. Поэтому

$$\frac{1}{n!}(x + y)^n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y}{1!} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!}.$$

Это есть сумма выражений вида $\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$ для $k = n, n-1, \ldots, 0$, то есть сумма произведений члена степени k в ряде $e(x)$ на член степени $n-k$ в ряде $e(y)$. Но именно таков член степени n в ряде $e(x)e(y)$. Это доказывает формулу (2).

По существу, формула (2) эквивалентна формуле бинома и содержит в себе *все* формулы бинома для всех значений n.

Благодаря такому замечательному свойству ряда $e(x)$ его удобно использовать для построения нового типа производящих функций. Пусть a — последовательность $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots, \alpha_n,\ \cdots)$. Введем ряд

$$e(ax) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1 x}{1!} + \frac{\alpha_2 x^2}{2!} + \frac{\alpha_3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha_n x^n}{n!} + \cdots$$

Его называют также *факториальной производящей функцией* последовательности a. Если определить сложение последовательностей поэлементно, то есть для $a = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$ и $b = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n, ...)$ положить $a + b = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n, ...)$, то, очевидно,

$$e((a + b)x) = e(ax) + e(bx). \tag{3}$$

Мы распространим на степенные ряды обозначения, введенные в Приложении к гл. II. А именно, если $f(t, x) = f_0(t) + f_1(t)x + \cdots + f_n(t)x^n + \cdots$ — степенной ряд, коэффициенты которого являются многочленами, и a — некоторая последовательность, то мы положим

$$f(a,x) = f_0(a) + f_1(a)x + \cdots + f_n(a)x^n + \cdots$$

Смысл же выражения $f(a)$, где $f(t)$ — многочлен, был определен в Приложении к гл. II: если $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ и $a = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$, то $f(a) = a_0 + a_1\alpha_1 + \cdots a_m\alpha_m$. В этих обозначениях факториальная производящая функция для последовательности a записывается как $e(ax)$. Легко видеть, что имеет место аналог соотношения (2)

$$e((\alpha + a)x) = e(\alpha x) \cdot e(ax). \tag{4}$$

Здесь α — число, $a = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$ — последовательность и $\alpha + a$ обозначает последовательность $a = (\alpha_0 + \alpha, \alpha_1 + \alpha, ..., \alpha_n + \alpha, ...)$. Доказательство — то же самое, что и для соотношения (2). Член степени n в левой части по определению равен $\dfrac{1}{m!}(\alpha + a)^m$, то есть сумме членов $\dfrac{1}{m!}\dfrac{m!}{k!(m-k)!}\alpha^k\alpha_{n-k}x^n = \dfrac{1}{k!}\alpha^k x^k \dfrac{1}{(n-k)!}\alpha_{n-k}x^{n-k}$. Но это есть произведение члена степени k в $e(\alpha x)$ на член степени $n-k$ в $e(ax)$. По определению умножения степенных рядов, сумма всех таких членов и есть член степени n в произведении $e(\alpha x)e(ax)$. Это доказывает равенство (4).

Найдем теперь, пользуясь выведенными тождествами, факториальную производящую функцию для последовательности чисел Бернулли $B = (B_0, B_1, ..., B_n, ...)$. Напомним, что числа Бернулли определялись при помощи соотношения

$$(B+1)^m - B_m = m, \qquad m = 1, 2, ... \tag{5}$$

Рассмотрим факториальные производящие функции трех последовательностей, входящих в соотношение (5). Это последовательность $(1+B)^m$, последовательность B^m и последовательность (состоящая из правых частей), которая имеет вид $(0, 1, ..., n, ...)$. Это 0 и все натуральные числа. Последнюю последовательность мы обозначим через N. Ввиду свойства (3) мы можем записать все соотношения (5) в виде:

$$e((1+B)x) - e(Bx) = e(Nx), \tag{6}$$

а ввиду свойства (5) $e((1+B)x) = e(x)e(Bx)$. Остается найти ряд $e(Nx)$. Его член степени n равен $\frac{n}{n!}x^n = \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \cdot x$. Поэтому $e(Nx) = xe(x)$ и соотношение (6) приобретает вид:

$$e(Bx)(e(x) - 1) = xe(x),$$

откуда

$$e(Bx) = \frac{xe(x)}{e(x) - 1}. \tag{7}$$

Таков вид факториальной производящей функции для чисел Бернулли. Заметьте, что в знаменателе стоит ряд $e(x) - 1$, свободный член которого равен 0. Из этого ряда можно вынести множитель x, сокращающийся с таким же множителем в числителе, а оставшийся степенной ряд будет иметь свободный член, равный 1 и обладает обратным по теореме 1 (§2). Из этого вида производящей функции очень просто выводятся все свойства чисел Бернулли. Докажем, например, что все числа Бернулли с нечетными индексами равны 0, кроме B_1 (задача 3 к Приложению к гл. II). Как мы знаем, $B_1 = \frac{1}{2}$ (это легко следует и из формулы (6)). Значит, наше утверждение означает, что в ряде $e(Bx) - \frac{x}{2}$ содержатся только члены с четными степенями x. Если в степенном ряде $f(x)$ заменить x на $-x$, то члены с четными степенями x не изменятся, а члены с нечетными степенями изменят знак. То, что в ряде присутствуют только члены с четными степенями, равносильно тому, что он не изменится, то есть что $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, нам надо убедится, что ряд $e(Bx) - \frac{x}{2}$ не меняется при замене x на $-x$. Пользуясь выражением (7) для ряда $e(Bx)$, мы получаем, что наше утверждение равносильно тождеству

$$\frac{xe(x)}{e(x)-1} - \frac{x}{2} = \frac{-xe(-x)}{e(-x)-1} + \frac{x}{2}.$$

Это равенство можно сократить на x и переместить $\frac{1}{2}$ в левую часть. Обозначим $e(x)$ через u. Согласно тождеству (2), $e(-x) = u^{-1}$. Наше равенство приобретает вид:

$$\frac{u}{u-1} - 1 = \frac{u^{-1}}{u^{-1}-1},$$

оно очевидно — надо левую часть привести к общему знаменателю, а справа числитель и знаменатель умножить на u.

Выведем этим новым путем связь между числами Бернулли и суммами степеней последовательных натуральных чисел: $S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m$. В Приложении к гл. II была доказана формула

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}((B+n)^{m+1} - B_{m+1}),$$

которую, заменяя m на $m-1$, можно записать в виде

$$S_{m-1}(n) = \frac{1}{m}((B+n)^m - B_m). \tag{8}$$

Выведем ее заново.

Рассмотрим факториальную производящую функцию последовательности $(B+n)^m - B_m$ (при фиксированном n). Ввиду свойства (3) ее можно записать в виде $e((B+n)x) - e(Bx)$. Согласно тождеству (4) этот ряд равен $e(Bx)e(nx) - e(Bx) = e(Bx)(e(nx)-1)$. Из свойства (3) легко следует (индукцией по n), что $e(nx) = e(x)^n$. Подставляя это значение и выражение (7) для $e(Bx)$, мы запишем наш ряд в виде $xe(x)\dfrac{e(x)^n - 1}{e(x)-1}$. Ввиду тождества (12) гл. I мы имеем:

$$\frac{e(x)^n - 1}{e(x)-1} = 1 + e(x) + \cdots + e(x)^{n-1}$$

и поэтому

$$xe(x)\frac{e(x)^n - 1}{e(x)-1} = x(e(x) + \cdots + e(x)^n).$$

Опять заменив $e(x)^k$ на $e(kx)$ для всех $k = 1, ..., n$ (по свойству (3)), получим

$$xe(x)\frac{e(x)^n - 1}{e(x) - 1} = x(e(x) + e(2x) + \cdots e(nx)).$$

Найдем коэффициент при x^m в ряде, стоящем справа. Он равен коэффициенту при x^{m-1} в ряде $e(x) + e(2x) + \cdots + e(nx)$. В $e(kx)$ коэффициент при x^{m-1} равен $\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}$, а во всей сумме выражению

$$\frac{1}{(m-1)!} + \frac{2^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} = \frac{S_{m-1}(n)}{(m-1)!}.$$

Положим $\alpha_m = (B+n)^m - B_m$ и всю последовательность $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ...)$ обозначим через a. Мы доказали, что в ряде $e(ax)$ коэффициент при x^m равен $\frac{S_{m-1}(n)}{(m-1)!}$. По определению же он равен $\frac{\alpha_m}{m!}$. Поэтому

$$\frac{\alpha_m}{m!} = \frac{S_{m-1}(n)}{(m-1)!},$$

откуда и следует равенство (8).

Задачи

1. Определим последовательность B'_n, где $B'_1 = -\frac{1}{2}$, $B'_n = B_n$ при $n \geq 2$. Докажите, что факториальная производящая функция последовательности B'_n имеет вид $e(B't) = \frac{t}{e^t - 1}$. Докажите для последовательности B'_n соотношение $(B'+1)^m = B'_m$ при $m \geq 2$.

2. Проверьте соотношение $e((B - \frac{1}{2})x) = 2e(B\frac{x}{2}) - e(Bx)$.

3. Докажите, что при четном m многочлен Бернулли $B_m(x)$ имеет корень $x = -\frac{1}{2}$. (Указание: Воспользуйтесь задачей 2 и задачей 3 к Приложению к гл. II.)

Даты жизни ученых, упоминавшихся в пособии[1]

Пифагор, предположительно	580 — 500	до Р.Х. I,1
Феодор из Кирены, предположительно	470 — 399	I,2
Теэтет, предположительно	414 — 368	I,2
Евклид, предположительно	365 — 300	I,2,3; IV,1
Архимед, предположительно	287 — 212	
Франсуа Виет	1540 — 1603	после Р.Х. III,2
Галилео Галилей	1564 — 1642	VI,1
Рене Декарт	1596 — 1650	II,1
Пьер Ферма	1601 — 1665	II,3
Блез Паскаль	1623 — 1662	II,3; VI,2
Исаак Барроу	1630 — 1667	II,3
Исаак Ньютон	1643 — 1727	II,3; VII,2
Этьен Ролль	1652 — 1719	V,4
Яков Бернулли	1655 — 1705	II,3,П; III,4,П; VII,П II
Леонард Эйлер	1707 — 1783	III,3; IV,1,2,3,П VII,2,3,П II
Этьен Безу	1730 — 1783	II,1
Пьер Лаплас	1749 — 1829	III,4
Карл Фридрих Гаусс	1777 — 1855	I,2; IV,П; VII,1
Бернард Больцано	1781 — 1848	V,4
Жак Штурм	1803 — 1855	V,5,П
Карл Якоби	1804 — 1851	VII,П
Эжен Каталан	1814 — 1894	VII,3
Пафнутий Львович Чебышев	1821 — 1894	III,П; IV,П; VI,П
Бернард Риман	1826 — 1866	IV,П
Рихард Дедекинд	1831 — 1916	III,1; VI,1,2
Георг Кантор	1845 — 1918	VI,2
Анри Пуанкаре	1854 — 1912	I,2

[1]Справа указаны те места в пособии, в которых этот ученый упоминается. Римские цифры обозначают номер главы, арабские — параграфа, буква П — Приложение.

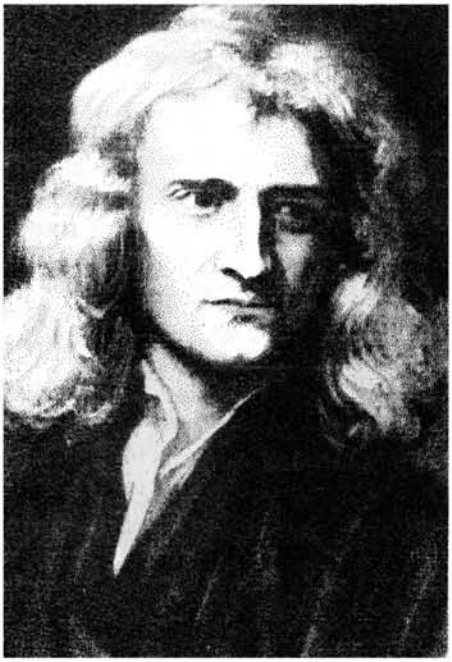
Портреты некоторых выдающихся математиков, упомянутых в пособии

Пифагор,
с фрески Рафаэля

Пифагор (предположительно),
античный бюст

Архимед

Ферма



Ньютон

Яков Бернулли

Эйлер

Гаусс

Чебышев

Дедекинд

Кантор

Пуанкаре

Оглавление ко всему пособию

1. Многочлены как производящие функции
2. Степенные ряды
3. Partitio Numerorum

Приложение I. Пентагональная теорема Эйлера

Приложение II. Производящая функция для чисел Бернулли

Учащимся и учителям средней школы

Элементарная теория погрешностей

Ляхов А.Ф.

Ляхов Александр Федорович — доцент кафедры теоретической механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Изложенный в статье материал изучается на семинарах Нижегородского научного общества учащихся 9-10 классов в течение 6 академических часов. Семинар работает при механико-математическом факультете университета.

Большинство людей, окончивших начальную школу, уверены, что они умеют считать, хотя бы на калькуляторе. А так ли это?

При встречах с расчетами в различных сферах человеческой деятельности обнаруживаются, вообще говоря, удивительные вещи.

Например, придя в банк, вы узнаете, что годовой процент по какому-то вкладу составляет $I_1 = 24,3\%$ годовых, а в соседнем банке $I_2 = 24\%$. Выгодность первого вклада кажется очевидной, но оказывается, что в сфере финансовых расчетов в разных странах, а следовательно, и в банках, используется различная продолжительность года — 365 дней и 360 дней. Предположим, что в первом банке при расчетах используется год длительностью в 365 дней, а во втором банке — 360 дней, тогда некоторый капитал S_0 в течение года из 365 дней в первом банке возрастет на сумму $S_0 \cdot I_1$, а во втором банке эта же сумма возрастет на величину $\dfrac{S_0 \cdot I_2 \cdot 365}{360}$. Равенство процентов будет иметь место, если $I_1 = \dfrac{365}{360} \cdot I_2$, т.е. $I_1 = 24.3(3)\%$. Отсюда следует, что первый банк дает меньший процент, чем второй.

Другой важный вопрос, сколько знаков после запятой необходимо учитывать при расчетах. С одной стороны, расчеты проводятся в денежных единицах, и здесь ограничение определяется наименьшей денежной единицей (т.е. у нас в стране бухгалтерские расчеты проводятся с точностью до копейки). С другой стороны, расчеты проводятся в процентах, и тогда при заключении крупных сделок условие точности расчетов фиксируется в контрактах. Обычно это $1/16$ или $1/32$ часть процента.

Приведем еще один простой пример возникновения вычислительной трудности. Проведем анализ эффективности игры футболиста. Предположим, что в одной игре нападающий трижды пробил по воротам, а в другой игре — четыре раза, в одной игре он забил 2 гола, а в другой — 3. Болельщиков, тренеров и самого игрока интересует средняя результативность, т.е. отношение числа забитых голов к числу ударов по воротам противника. В первой игре это отношение $e_1 = 2/3$, во второй — $e_2 = 3/4$. Если поставтить вопрос о средней результативности за две игры, то могут быть предложены две схемы расчета: $e_{cp1} = (e_1 + e_2)/2$ и $e_{cp2} = (2+3)/(3+4)$, т.е. $e_{cp1} = 17/24 = 0,714285(714285)$, $e_{cp2} = 5/7 = 0,7083(3)$. Можно видеть, что в этом случае результат расчетов определяется выбранной вычислительной схемой.

Но особенно важна правильность расчетов при создании современной техники и технологий. Известно, что несколько космических аппаратов были потеряны из-за ошибок, допущенных при выполнении расчетов их орбит и траекторий полета.

При выполнении научных и инженерных расчетов, как правило, используются выполненные экспериментально измерения, а в процессе расчетов некоторые операции многократно повторяются. Например, при исследовании колебаний ферменной конструкции моста её представляют как цепочку последовательно соединенных стержней, и расчет для каждого такого элемента проводится отдельно. Следовательно, если какой-то параметр стержня измерен даже с минимальной погрешностью, то в процессе вычислений эта погрешность при многократном повторении может значительно возрасти и даже полностью обесценить результат.

Поэтому требуются особые способы расчетов и подходы к оценке их точности, которые, с одной стороны, определяются корректностью применимости сложных математических методов, а с другой стороны, — точностью измерения параметров исследуемой системы.

Широкое внедрение современных компьютеров решило ряд вопросов при проведении вычислений. Так например, до появления компьютеров расчетчики стремились повысить точность вычислений хотя бы на один знак, обычные расчеты проводились с точностью до четырех, пяти значащих цифр (определение *значащей цифры* приведено ниже). В настоящее время возникла обратная проблема: компьютер позволяет проводить вычисления с числами, содержащими 8 – 20 значащих цифр, а поскольку исходные значения параметров задачи заданы приближенно, то встает вопрос, какая максимальная точность может быть достигнута при численном решении задачи.

Например, при проектировании и расчете обычного письменного стола не стоит задавать его размеры с точностью до микронов, т.е. размер стола будет описываться числом, содержащим не более четырех значащих цифр. Но тогда все расчеты, по-видимому, надо проводить с числами, содержащими не более пяти цифр.

Приведенные примеры показывают, что одним из наиболее важных вопросов при проведении вычислений является вопрос о том, как возникают погрешности и как затем изменяются и распространяются, т.е. как увеличивается или уменьшается их влияние при выполнении последовательности операций.

Возникновение и классификация погрешностей

При численном решении задач приходится сталкиваться с тремя основными видами погрешностей.

1. *Погрешности в исходной информации.* Эти погрешности возникают в результате неточности измерений. Они определяются методикой измерений и приборами, с помощью которых проводятся.

Грубые просмотры и ошибки, связанные с тем, насколько квалифицированный человек проводит измерения, как правило, учитываются с помощь статистических методов.

Погрешности в исходной информации определяют точность результатов вычислений и накладывают требования на точность используемых в вычислениях значений.

Например, если при измерении радиуса окружности получены три значащие цифры, то не имеет смысла находить площадь круга с двенадцатью знаками на калькуляторе или даже с четырьмя. Проведя анализ абсолютной погрешности при вычислении площади круга $S = \pi r^2$, можно показать, что результат вычислений будет содержать только две верные цифры (определение *верной цифры* приведено ниже).

2. *Погрешности ограничения метода.* Существует множество численных методов решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений, систем уравнений и т.д., которые позволяют найти точное решение за бесконечное число операций. Например, из математического анализа известно, что значение функции $\sin x$ для любого x (x задано в радианах) может быть найдено с любой заданной точностью с помощью ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Однако на практике вынуждены ограничиваться конечным числом операций, т.е. часть ряда отбрасывается, при этом возникает погрешность, связанная с ограничением метода. В данном примере, если $|x| < 1$ то ряд дает хорошие приближения значения $\sin x$ при малом числе слагаемых, но при $|x| \gg 1$ ряд будет давать не верные значения. В таблице приведены значения S суммы ряда, вычисленные при трех значениях x ($n = 10$).

x	S
30°	0.5001
390°	0,5005
750°	1461,29

При вычислении суммы большого числа членов ряда, погрешности, связанные с округлением, будут быстро нарастать,

3. *Погрешности округления.* Если предположить, что исходная информация не содержит никаких ошибок и все вычислительные процессы конечны, то все равно при вычислениях будут иметь место погрешности, связанные с округлением. Большинство используемых в вычислениях функций (тригонометрические, логарифмические, с дробными степенями и т.д.) берутся приближенно. Заметим также, что даже обыкновенные дроби очень часто нельзя представить в виде конечной десятичной дроби. Другая неустранимая причина, приводящая к необходимости проводить вычисления с округлением, связана с тем, что компьютеры работают с числами, представленными в двоичной системе, то есть при переходе от одной системы счисления к другой достаточно часто возникают бесконечные дроби.

Точные и приближенные числа

При решении задач приходится иметь дело с различными числами, которые могут быть точными или приближенными. Точные числа дают истинное количественное значение величины. Такие числа, как правило, возникают при счете некоторых «цельных»объектов: число учеников в классе, число страниц в книге и т.д.

Приближенные числа дают значение, близкое к истинному значению. Утверждения: длина комнаты — 4 м, расстояние от Москвы до Нижнего Новгорода — 400 км, вес некоторого человека — 63,5 кг, — являются приближенными.

С одной стороны, это связано с несовершенством измерительных инструментов. Не существует абсолютно точных измерительных приборов. Как правило, считается, что погрешность измерения определяется половиной деления шкалы прибора. Если у вас имеется линейка, на которой нанесены деления через один сантиметр, то погрешность ваших измерений 0,5 см. Истинное значение измеряемой длины может быть меньше или больше полученного значения на величину, которая меньше или равна 0,5 см. Если измерения проводятся с помощью линейки, на которой нанесены миллиметры, то погрешность измерений будет 0,5 мм.

С другой стороны, например, длина комнаты имеет разные значения при измерении ее вдоль различных стен или если это измерение проводится в середине комнаты, т.е. можно говорить о какой-то средней длине комнаты, причем разброс значений определяется технологией и качеством строительных работ. Сходные проблемы возникают при определении расстояний между географическими пунктами, в этом случае качество измерений определяется точностью геодезической съемки.

Еще одна причина возникновения приближенных чисел связана с процессом вычислений, т.е. даже при работе с целыми числами при выполнении операции деления, извлечения корня $(1/3, \sqrt{2})$ и ряда других появляются числа, содержащие бесконечное число цифр. При выполнении операций с такими числами мы вынуждены брать ограниченное количество цифр, т.е. брать приближенное значение числа.

Любое действительное положительное число a может быть представленно в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$a = a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_n \cdot 10^{m-n+1} + \cdots,$$

где a_i — цифра числа $(a_1 \neq 0)$, m — старший десятичный разряд числа a. Приведем пример такой записи числа: $1905,84 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$.

Напомним основные правила симметричного округления:

1. Если отбрасываемые цифры составляют число, которое больше половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу.

2. Если отбрасываемые цифры составляют число, которое меньше половины единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра не изменяется.

3 Если отбрасываемые цифры составляют число, которое равно половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу, если она нечетная и остается без изменений, если она четная.

Приведем всего один пример на применение данного правила. Округлить следующие числа: $A_1 = 247,5$; $A_2 = 248,5$ до трех цифр. Поскольку цифра 7 — нечетная, а 8 — четная, то по приведенному правилу округления получим: $A_1 = 248$; $A_2 = 248$.

Современные компьютеры и калькуляторы позволяют производить вычисления с большим числом значащих цифр. Так, при программировании на языке Паскаль допускаются переменные, содержащие различное число цифр. Всего таких типов пять для целых переменных и пять для вещественных чисел. Вещественные переменные типа SINGLE содержат 7 - 8 знаков, REAL — 11 - 12 знаков, DOUBLE — 15 - 16 знаков, EXTENDED — 19 - 20 знаков. Можно даже утверждать, что существуют потенциальные возможности производить вычисления с любым *заданным* числом значащих цифр. Однако при этом время вычислений будет также увеличиваться.

На практике выбор числа значащих цифр определяется необходимой точностью результата.

Операция округления при выполнении арифметических операций на компьютере обладает рядом важных свойств, которые в дальнейшем будут рассмотрены подробно.

Пусть A — точное число, а a — приближенное значение. Разность между точным числом A и его приближенным значением a называют *ошибкой* или *погрешностью.*

Как правило, величину погрешности $A - a$ и даже ее знак определить невозможно, поскольку неизвестно точное число A. Поэтому вместо самой погрешности используется наибольшее значение ее абсолютной величины.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина Δ_a, удовлетворяющая неравенству $\Delta_a \geq |A - a|$. Иногда это неравенство записывают в другой форме: $A = a \pm \Delta_a$.

В качестве абсолютной погрешности берут по возможности наименьшее число. Например, при измерении длины отрезка допущена погрешность 0,5 см, следовательно, погрешность не превышает 1, 2 и 3 см. Каждое из этих чисел может считаться абсолютной погрешностью. Однако в качестве абсолютной погрешности следует принять наименьшее из этих чисел, так как чем меньше абсолютная погрешность, тем уже промежуток, внутри которого мы задаем точное число.

Абсолютная погрешность отражает лишь количественную сторону погрешности, но не качественную, т.е. не показывает, хорошо или плохо произведено измерение или вычисление. Действительно, предположим, что, измеряя одной и той же линейкой с ценой деления 1 см длину и толщину крышки стола, мы получили следующие результаты: толщина стола $l_1 = 2 \pm 0,5$см и длина $l_2 = 100 \pm 0,5$см. И в первом, и во втором измерениях абсолютная погрешность одинакова и составляет 0,5 см. Однако, очевидно, что второе измерение выполнено более качественно, чем первое. Для того чтобы оценить качество выполненных вычислений или измерений, вводится понятие относительной погрешности.

Относительной погрешностью приближенного числа a называется величина δ_a, удовлетворяющая неравенству

$$\delta_a \geq \left|\frac{A-a}{a}\right|, \qquad a \neq 0.$$

Это определение позволяет записать ряд формул, часто используемых на практике: $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \implies \Delta_a = \delta_a \cdot |a|,\ a \neq 0,\ A = a(1 \pm \delta_a)$.

Заметим, что относительная погрешность есть отвлеченное число и ее иногда выражают в процентах.

Возвращаясь к измерению толщины и длины крышки стола, определим их относительные погрешности:

$$\delta_{l_1} = 0,5/2 = 0,25 = 25\%, \qquad \delta_{l_2} = 0,5/100 = 0,005 = 0,5\%.$$

Пример 1. Точное значение числа A находится в пределах $[23,07\,;\ 23,10]$. Определить его приближенное значение, абсолютную и относительную погрешности.

За приближенное значение принимаем середину заданного отрезка $a = 23,085$. В этом случае абсолютная погрешность будет равна половине длины отрезка $\Delta_a = 0,015$. За относительную погрешность примем $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = 0,000604.....$

Величину погрешности принято округлять до одной – двух цифр, причем при округлении оставляемая последняя значащая цифра всегда увеличивается на единицу.

Поэтому $\delta_a = 0,0007$ или $\delta_a = 0,07\%$.

Пример 2. Оценить качество вычислений

$$a_1 = 13/19 \approx 0,684 \qquad \text{и} \qquad a_2 = \sqrt{52} \approx 7,21.$$

Для нахождения абсолютных погрешностей возьмем числа a_1 и a_2 с бóльшим числом десятичных знаков: $\bar{a}_1 = 13/19 \approx 0,6842105$, $\bar{a}_2 = \sqrt{52} \approx 7,211102$. Определим абсолютные погрешности, округляя их с избытком

$$\Delta_{a_1} = |a_1 - \bar{a}_1| \approx 0,00022, \qquad \Delta_{a_2} = |a_2 - \bar{a}_2| \approx 0,0012.$$

Сравнивая относительные погрешности

$$\delta_{a_1} = \Delta_{a_1}/|a_1| = 0,00022/0,684 \approx 0,00033 \approx 0,04\% \qquad \text{и}$$

$$\delta_{a_2} = \Delta_{a_2}/|a_2| = 0,0012/7,21 \approx 0,00017 \approx 0,02\%,$$

можно сделать вывод о том, что качество второго вычисления оказалось выше ($\delta_{a_1} < \delta_{a_2}$).

Иногда при решении задач ставится условие: вычислить результат с точностью до 0,1; 0,01. Это означает, что абсолютная погрешность соответственно равна 0,1;

0,01. Может создаться впечатление, что точность вычислений определяется числом знаков после запятой. Однако это неверно. Точность вычислений определяется относительной погрешностью и числом цифр результата, заслуживающих доверия.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой отличной от нуля цифры. Нули в конце числа — всегда значащие цифры (в противном случае их не пишут).

Приведем пример записи чисел с различным числом значащих цифр: 50000 — пять значащих цифр, $50 \cdot 10^3$ — две значащие цифры, $0,50 \cdot 10^5$ — две значащие цифры. Последняя форма записи числа является наиболее предпочтительной формой записи чисел, и называется нормализованной формой числа.

Любое действительное число можно представить в *нормализованной форме:* $y = f \cdot 10^n$, здесь $0,1 \leq f < 1$ — мантисса числа, n — порядок числа (например число $A = 8456,234$ в нормализованной форме имеет вид $A = 0,8456234 \cdot 10^4$, $0,8456234$ — мантисса числа, 4 — порядок числа).

Рассмотрим десятичную запись положительного числа

$$a = a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_n \cdot 10^{m-n+1} + \cdots .$$

Цифра a_n приближенного числа a называется *верной значащей цифрой*, если выполняется неравенство $|A - a| \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}$, т.е., если абсолютная величина разности между точным числом и его приближенным значением не превосходит половины единицы десятичного разряда, в котором стоит a_n. В противном случае цифра a_n называется *сомнительной.*

Заметим, что если цифра a_n — верная, то и все предыдущие (слева от нее) цифры — тоже верные.

Пусть задано число $A = 2863,541$ и число $a = 2863,548$, тогда число a может быть представленно в виде $a = 2 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}$. В этом слчае $m = 3$. Рассмотрим, например, цифру 3: для нее $n = 4$, а абсолютная погрешность $|A - a| = 0,007 \leq 0,5 \cdot 10^{3-4+1} = 0,5 \cdot 10^0$, т.е. цифра 3 верная. Рассмотрим цифру 4, $n = 6$, для неё имеем: $\Delta_a = 0.007 > 0,5 \cdot 10^{3-6+1} = 0,004$, следовательно, цифра 4 сомнительная.

Если задано число n верных знаков приближенного числа a, то за абсолютную погрешность можно принять

$$\Delta_a = 0,5 \cdot 10^{m-n+1}.$$

Число верных знаков приближенного числа определяется неравенством

$$|A - a| \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}.$$

Разделив обе части этого неравенства на $|a|$, получим

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| \leq \frac{0,5 \cdot 10^{m-n+1}}{|a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \cdots + a_n \cdot 10^{m-n+1} + \cdots|} \leq \frac{0,5 \cdot 10^{m-n+1}}{a_1 \cdot 10^m}.$$

Следовательно, если цифра a_n верная, то за относительную погрешность можно принять $\delta_a = \dfrac{0,5 \cdot 10^{m-n+1}}{a_1 \cdot 10^m}$.

Для того, чтобы цифра a_n приближенного числа была верной, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\delta_a \le \dfrac{0,5\cdot 10^{m-n+1}}{(a_1+1)\cdot 10^m}$.

Пример 3. Какова относительная погрешность приближенного числа $a = 4,176$, если все его цифры верные?

В рассматриваемой задаче $n=4$, $m=1$, $a_1=4$. Для погрешности получим

$$\delta_a = \frac{0,5}{a_1\cdot 10^{n-1}} = \frac{0,5}{4\cdot 10^3} \approx 0,00013 = 0.013\%.$$

Заметим, что относительную погрешность числа a можно найти, пользуясь основной формулой $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$. Так как в данном числе a все цифры верные, то

$$\delta_a = 0,0005/4,176 \approx 0,00012 = 0,012\%.$$

Пример 4. Со сколькими верными десятичными знаками надо взять $\sqrt{18}$, чтобы погрешность не превышала $0,1\%$?

Из условия задачи имеем $a=\sqrt{18}\approx 4,...$, т.е. $m=1$, $a_1=4$, $\delta_a \le 0,1\% = 0,001$. Применяя формулы для определения погрешности, получим

$$\delta_a \le \frac{0,5\cdot 10^{m-n+1}}{a_1\cdot 10^m} \implies \frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{n-1}} \le 0,001.$$

Отсюда следует $125 \le 10^{n-1} \implies \lg 1,25 + 2 \le n-1 \implies n \ge 3 + \lg 1,25$, т.е. $n \ge 4$.

Рассмотрим подробно, как осуществляется операция округления на компьютере. Любое действительное число представляется в компьютере в нормализованной форме, $y = f\cdot 10^n$. Пусть компьютер округляет числа до t значащих цифр. Число y перед округлением можно записать в следующем виде: $y = f_y\cdot 10^n + g_y\cdot 10^{n-t}$, где f_y, $0,1 \le f_y < 1,0$, — оставляемое число, оно содержит t цифр, g_y, $0 \le g_y < 1,0$, — округляемая часть числа. Абсолютная погрешность при округлении $\Delta_y = g_y\cdot 10^{n-t}$, следовательно, относительная погрешность может быть записана в виде $\delta_y = \dfrac{|g_y\cdot 10^{n-t}|}{f_y\cdot 10^n|} = \dfrac{|g_y|}{|f_y|}\cdot 10^{-t}$. В компьютерах, как правило, осуществляется симметричная схема округления, $\Delta_y \le 0,5\cdot 10^{n-t}$, а

$$\delta_y \le \frac{0,5\cdot 10^{n-t}}{0,1\cdot 10^n} = 5\cdot 10^{-t} = 0,5\cdot 10^{1-t}.$$

Заметим, что относительная погрешность округления не зависит от числа y и является постоянной для каждого типа переменных, используемых при вычислении.

(Для переменных типа SINGLE — $\delta_y \le 0,5\cdot 10^{-6}$, EXTENDED — $\delta_y \le 0,5\cdot 10^{-18}$).

Пример 5. Округлить число $A = 8456,234$ до четырех значащих цифр.

При записи этого числа в память компьютера оно представляется в нормализованном виде $A = 0,8456234\cdot 10^4$. Округлим число A в соответствии с правилом симметричного округления: $a = 0,8456\cdot 10^4$. Соответствующие абсолютная погрешность — $\Delta_A = 0,234 \cdot 10^0$, относительная погрешность $\delta_A = 0,28 \cdot 10^{-4}$. Теоретическая оценка относительной погрешности и абсолютной погрешности $\delta_{теор} = 0.5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta_{Aтеор} = \delta_a \cdot a = 0,43 \cdot 10^1$. Можно видеть, что эти погрешности много больше действительных погрешностей.

Правила вычисления погрешности при выполнении арифметических операций

Один из основных вопросов, возникающих при выполнении арифметических операций с приближенными числами, связан с определением погрешности, получаемой в результате их выполнения.

Рассмотрим сумму двух чисел. A, B — точные числа и a, b — их приближенные значения. Для абсолютной погрешности суммы запишем

$$\Delta_{сум} = |A + B - (a + b)| \leq |A - a| + |B - b| \implies \Delta_{сум} \leq \Delta_a + \Delta_b.$$

Отсюда следует, что

за абсолютную погрешность суммы чисел можно принять сумму погрешностей этих чисел.

Можно видеть, что абсолютная погрешность суммы не меньше абсолютной погрешности наименее точного из слагаемых. Поэтому, чтобы не производить лишних вычислений, не следует сохранять лишние знаки в более точных слагаемых. При сложении чисел, имеющих различную абсолютную погрешность, обычно поступают следующим образом:

1) выделяют число, имеющее наименьшую точность, т.е. имеющее наибольшую абсолютную погрешность;

2) все остальные числа округляют таким образом, чтобы сохранить на один знак больше, чем в выделенном числе;

3) производят сложение;

4) полученный результат округляют на одну цифру.

Пример 6. Сложить приближенные числа, у которых все выписанные цифры верные

$$S = 0,1732 + 17,45 + 0,000333 + 204,4 + 7,25 + 144,2 + 0,0112 + 0,634 + 0,0771.$$

Числа с наибольшей абсолютной погрешностью — 204,4 и 144,2. Их погрешность равна 0,05. Остальные числа округляем и складываем:

$$0,17 + 17,45 + 0,00 + 204,4 + 7,25 + 144,2 + 0,01 + 0,63 + 0,08 = 374,19.$$

Округляем полученную сумму: $s = 374,2$. Абсолютная погрешность суммы Δ_S состоит из трех слагаемых: первое слагаемое состоит из суммы абсолютных погрешностей слагаемых, имеющих наименьшую точность $\Delta_1 = 0,05 \cdot 2 = 0,1$; второе слагаемое состоит из суммы абсолютных погрешностей округленных слагаемых $\Delta_2 = 0,005 \cdot 7 = 0,035$; третье слагаемое определяется абсолютной погрешностью, возникающей при округлении результата суммирования $\Delta_3 = 0,01$. Таким образом, получим: $\Delta_{рез} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0,1 + 0,035 + 0,01 = 0,145 \approx 0,14$. Результат суммирования может быть записан в виде $s = 374,2 \pm 0,14$ или $374,2 \pm 0,2$.

Относительная погрешность суммы $\delta_{сум} = \Delta_{сум}/|a+b|$, преобразуем это выражение $\delta_{сум} = \dfrac{\Delta_{сум}}{|a+b|} = \dfrac{\Delta_a + \Delta_b}{|a+b|} = \dfrac{\Delta_a \cdot a}{|a+b| \cdot a} + \dfrac{\Delta_b \cdot b}{|a+b| \cdot b}$ или, с учетом понятия относительной погрешности для отдельных чисел, получим:

$$\delta_{сум} = \frac{a}{a+b} \cdot \delta_a + \frac{b}{a+b} \cdot \delta_b.$$

Покажем особенности операции округления при выполнении сложения на компьютере. Например, требуется сложить два числа, имеющих различный порядок. Компьютер вначале выравнивает порядки чисел до наибольшего порядка, затем округляет мантиссы до установленного числа значащих цифр, и складывает их.

Пример 7. Найти сумму двух чисел $S = A + B$, $A = 0,2476$, $B = 43,35$, ограничиваясь четырьмя значащими цифрами.
Запишем числа, входящие в сумму в нормализованной форме: $A = 0,2476 \cdot 10^0$, $B = 0,4335 \cdot 10^2$. Выровняем порядок чисел: $A = 0,002476 \cdot 10^2$, $B = 0,4335 \cdot 10^2$. Округлим мантиссу числа A до четырех цифр, $A = 0,0025 \cdot 10^2$, и сложим числа: $S = 0,4360 \cdot 10^2$. Абсолютная погрешность $\Delta = 0,0024$, относительная погрешность $\delta = 0,55046 \cdot 10^{-4} \approx 0,57 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим разность двух чисел. Пусть A, B — точные значения, a, b — приближенные. Для абсолютной погрешности разности запишем

$$\Delta_{разн} = |(A - B) - (a - b)| = |\Delta_a - \Delta_b| \le \Delta_a + \Delta_b.$$

Отсюда следует, что

за абсолютную погрешность разности двух чисел может быть принята сумма абсолютных погрешностей этих чисел.

Относительная погрешность будет определяться по следующей формуле:

$$\delta_{разн} = \frac{\Delta_r}{|a-b|} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a-b|}$$

или, вводя относительные погрешности чисел, входящих в разность, получим

$$\delta_{разн} = \frac{a}{|a-b|}\delta_a + \frac{b}{|a-b|}\delta_b.$$

Правила вычисления разности чисел и определения погрешностей аналогичны правилам, которые используются при вычислении суммы.

Заметим, что при вычитании близких чисел происходит потеря точности. Если числа a и b мало отличаются друг от друга, то даже при малых абсолютных и относительных погрешностях этих чисел погрешность разности может оказаться значительной.

Пример 8. Пусть $a = 5,125$, $b = 5,135$, $\Delta_a = \Delta_b = 0,0005, \delta_a = \delta_b \approx 0,01\%$. Относительная погрешность разности $\delta_{разн} = \dfrac{0,0005 + 0,0005}{0,01} \cdot 100\% = 10\%$.

При вычислениях надо стремиться так изменить порядок вычислений, чтобы подобная ситуация не возникала.

Пример 9. Найти разность $r = \sqrt{6,27} - \sqrt{6,26}$ и оценить относительную погрешность результата, если числа 6,27 и 6,26 заданы точно.

Пусть $a = \sqrt{6,27} = 2,504$, $\Delta_a = 0,0005$, $b = \sqrt{6,26} = 2,502$, $\Delta_b = 0,0005$, $r = \sqrt{6,27} - \sqrt{6,26} = 2,504 - 2,502 \approx 0,2 \cdot 10^{-2}$

$$\delta_r = \frac{0,0005 + 0,0005}{0,2 \cdot 10^{-2}} = 0,5 = 50\%.$$

Изменив вычислительную схему:

$$r = \sqrt{6,27} - \sqrt{6,26} = \frac{\left(\sqrt{6,27} - \sqrt{6,26}\right) \cdot \left(\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}\right)}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}} =$$

$$= \frac{6,27 - 6,26}{\sqrt{6,27} + \sqrt{6,26}} \approx 0,2 \cdot 10^{-2},$$

можно получить другую оценку относительной погрешности. Действительно, в этом случае относительная погрешность делимого $\delta_{делим} = 0$, а погрешность делителя запишется в виде $\delta_{делит} = \dfrac{\Delta_a + \Delta_b}{a + b} = \dfrac{0,001}{5} = 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,02\%$. Погрешность результата $\delta_r = \delta_{делим} + \delta_{делит} = 0,02\%$ (эта формула для относительной погрешности частного двух чисел выведена ниже).

Рассмотрим произведение двух чисел. Пусть A, B — точные значения, a, b — приближенные, т.е. $A = a + \Delta_a$, $B = b + \Delta_b$.

$$a \cdot B = a \cdot b + a \cdot \Delta_b + b \cdot \Delta_a + \Delta_a \cdot \Delta_b.$$

Переходя к абсолютным величинам, получим

$$|A \cdot B - a \cdot b| \leq |a \cdot \Delta_b| + |b \cdot \Delta_a| + |\Delta_a \cdot \Delta_b|.$$

Учитывая, что $|a| \gg |\Delta_a|$, $|b| \gg |\Delta_b|$, и отбрасывая последнее слагаемое, получим

$$\Delta_{np} = |A \cdot B - a \cdot b| \leq |a \cdot \Delta_b| + |b \cdot \Delta_a|.$$

Для относительной погрешности произведения запишем

$$\delta_{np} = \frac{|a \cdot \Delta_b|}{|a \cdot b|} + \frac{b \cdot \Delta_a|}{|a \cdot b|} = \delta_b + \delta_a.$$

Поскольку относительная погрешность произведения определяется суммой относительных погрешностей, то при умножении чисел с различными относительными погрешностями не следует сохранять лишние знаки у чисел с меньшей относительной погрешностью. Обычно поступают следующим образом:

1) выделяют число с наименьшим количеством значащих цифр;

2) округляют оставшиеся сомножители таким образом, чтобы они содержали на одну значащую цифру больше, чем количество верных значащих цифр в выделенном числе;

3) в произведении сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет наименее точный из сомножителей.

Пример 10. Определить произведение приближенных чисел $P = a \cdot b$ и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные; $a = 12,4$, $b = 65,544$.

В первом числе — три верные значащие цифры, во втором — пять. Перемножим эти числа, предварительно округлив второе число до четырех цифр: $P = 12,4 \cdot 65,54 = 812,696$. В произведении следует оставить три значащие цифры, так как сомножитель a имеет три верные цифры. Следовательно, $P = 813$, а относительная погрешность округления полученного числа $\delta_o = \dfrac{0,31}{813} \approx 0,0004$. Относительная погрешность произведения будет состоять из суммы трех погрешностей

$$\delta_{np} = \delta_a + \delta_b + \delta_o = \frac{0,05}{12,4} + \frac{0,004}{65,54} + 0,0004 = 0,0041.$$

Теоретическая оценка абсолютной погрешности произведения $\Delta_{np} = P \cdot \delta_{np} = 813 \cdot 0,0041 \approx 4$.

Следовательно, произведение имеет два верных знака и его можно записать в следующем виде: $P = 813 \pm 4$.

Этот пример показывает, что число верных значащих цифр произведения меньше числа верных цифр сомножителей. Можно показать, что если произведение содержит не более 10 сомножителей, то число верных цифр произведения на одну или две единицы меньше числа верных цифр сомножителей.

Рассмотрим погрешность частного

$$\Delta_{дел} = \left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a + \Delta_a}{b + \Delta_b} - \frac{b \cdot \Delta_a - a \cdot \Delta_b}{b \cdot (b + \Delta_b)}\right| \le \left|\frac{\Delta_a}{b}\right| + \left|\frac{a \cdot \Delta_b}{b^2}\right|.$$

Для того, чтобы получить относительную погрешность частного, разделим левую и правую часть выражения на a/b:

$$\delta_{дел} = \left|\frac{b \cdot \Delta_a - a \cdot \Delta_b}{a \cdot (b + \Delta_b)}\right| = \left|\frac{b}{b + \Delta_b}\right| \cdot \left|\frac{\Delta_a}{a} - \frac{\Delta_b}{b}\right|.$$

Полагая, что $b \gg \Delta_b$, получим

$$\delta_{дел} \le \left|\frac{\Delta_a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta_b}{b}\right| = \delta_a + \delta_b.$$

Правила вычисления приближенного значения частного такие же, как и при вычислении произведения.

Пример 11. Вычислите частное $Z = a/b$ приближенных чисел $a = 5,7354$, $b = 1,23$, если все цифры делимого и делителя верные. Определить относительную и абсолютную погрешности.

Вычислим частное, округлив делимое, которое содержит пять цифр, а делитель — три цифры. В частном так же оставим три значащие цифры:

$$Z = 5,735/1,23 = 4,6626 \approx 4,66.$$

Погрешность округления полученного числа $\delta_o = \dfrac{0,0026}{4,66} \approx 0,0006$.

Вычислим относительную погрешность

$$\delta_Z = \delta_a + \delta_b + \delta_o = \frac{0,0004}{5,735} + \frac{0,005}{1,23} + 0,0006 = 0,00007 + 0,0041 + 0,0006 = 0,0048,$$

или $\delta_Z \approx 0,0048$.

Определим абсолютную погрешность $\Delta_Z = Z \cdot \delta_Z = 4,66 \cdot 0,0048 \approx 0,022 \leq 0,03$. Окончательный результат запишем в виде $Z = 4,66 \pm 0,03$.

Заметим, что, как и в предыдущем случае, число верных цифр уменьшилось на единицу.

При возведении в степень приближенного числа a^n относительная погрешность будет вычисляться по формуле $\delta = n \cdot \delta_n$, при извлечении корня степени m ($\sqrt[m]{a}$), формула для относительной погрешности имеет вид $\delta = \frac{1}{m}\delta_a$

Пример 12. Сторона квадрата 36,5 см. Найти площадь квадрата, относительную и абсолютную погрешности и число верных знаков результата.

Заметим, что измерение стороны квадрата проведено с точностью до миллиметра (0,1 см).

Вычислим площадь квадрата, оставляя три значащие цифры

$$S = 36,5^2 = 1332,25 \approx 133 \cdot 10^3 \text{см}^2.$$

Погрешность округления $\delta_o = \dfrac{2,25}{1330} = 0,00169 \approx 0,002$.

Определим относительную и абсолютную погрешность

$$\delta_S = 2 \cdot \delta_a + \delta_o = 2 \cdot \frac{0,1}{36,5} + 0,002 \approx 0,008.$$

$$\Delta_S = S \cdot \delta S = 1,33 \cdot 10^3 \cdot 0,008 \approx 10,64 \leq 11.$$

Окончательный ответ запишем в виде $S = (1,33 \pm 0,011) \cdot 10^3 \text{см}^2$.

Пример 13. Определить, с какой относительной погрешностью и со сколькими верными значащими цифрами можно найти стороны квадрата, если его площадь $S = 16,45 \text{см}^2$ задана с точностью до 0,01 см^2. Сторона квадрата $a = \sqrt{S} = 4,05586 \approx 4.056$см, погрешность округления

$$\delta_o = \frac{0,00014}{4,056} = 0.0000345 \leq 0,00004$$

Относительная погрешность имеет вид

$$\delta_a = \frac{1}{2}\delta_S + \delta_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,01}{16,45} + 0,00004 = 0,00034 \leq 0,04\%.$$

Абсолютная погрешность $\Delta_a = a \cdot \delta_a = 4,056 \cdot 0,00004 \leq 1,7 \cdot 10^{-3} \leq 0,002$. Окончательный ответ: $a = 4.056 \pm 0.002$см.

Приведенные правила приближенных вычислений могут быть распространены и на вычисление других функций. Например, при вычислениях следует брать тригонометрические функции с числом значащих цифр на единицу больше, чем в числе с наименьшим количеством верных цифр.

Пример 14. Вычислить произведение $P = a \cdot \sin b$, где $a = 1.25$, $b = 0,245$. Найти относительную, абсолютную погрешности произведения, число верных значащих цифр.

Поскольку первый сомножитель содержит три верные цифры, то определим синус с точностью до четырех знаков: $\sin b = 0,2426$. Перемножая, получим 0,30325, или, округляя, окончательно имеем $P = 0,303$. Относительная погрешность округления результата $\delta_o = 0.00084$. Окончательно получим

$$\delta_P = \delta_a + \delta_{\sin} + \delta_o = \frac{0,005}{1,25} + \frac{0,00005}{0,2426} + 0,00084 = 0,00504 \leq 0.006,$$

абсолютная погрешность $\Delta_P = P \cdot \delta_P = 0,006 \cdot 0,303 = 0,0019 \leq 0.002$. Ответ может быть записан в виде: $P = 0.303 \pm 0,002$.

Выпишем выражения для абсолютной и относительной погрешности результата четырех арифметических действий.

Пусть даны два числа A и B, их приближенные значения a, b, абсолютные погрешности Δ_a, Δ_b и относитсльпые погрешности δ_a, δ_b.

<u>Сложение.</u>

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b, \quad \delta_{a+b} = \frac{|a|}{|a+b|} \cdot \delta_a + \frac{|b|}{|a+b|} \cdot \delta_b. \tag{1}$$

<u>Вычитание.</u>

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b, \quad \delta_{a-b} = \frac{|a|}{|a-b|} \cdot \delta_a + \frac{|b|}{|a+b|} \cdot \delta_b. \tag{2}$$

<u>Умножение.</u>

$$\Delta_{a \cdot b} = b \cdot \Delta_a + a \cdot \Delta_b, \qquad \delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b. \tag{3}$$

<u>Деление.</u>

$$\Delta a/b = \left|\frac{\Delta_a}{b}\right| + \left|\frac{a \cdot \Delta_b}{b^2}\right|, \qquad \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b. \tag{4}$$

Возникновение и распространение погрешности при вычислениях. Вычислительные графы

Рассмотрим распространение погрешностей округления на примерах, в которых последовательно выполняется несколько арифметических операций.

Пример 15. Вычислить выражение $u = (x + y) \cdot z$, оценить абсолютную и относительную погрешности результата. Пусть исходные значения $x = 0,4568$, $y = 0,8412$, $z = 0,2346$ получены при округлении некоторых чисел до четырех значащих цифр, т.е. $\delta_x = \delta_y = \delta_z = 0,5 \cdot 10^{-4}$. Вычисления будем проводить, округляя промежуточные результаты до четырех значащих цифр, т.е. $\delta_o = 0,5 \cdot 10^{-4}$.

Определим сумму чисел $x + y = 1,2980$ или, округляя, получим $x + y = 1,298$. Относительная погрешность суммы в соответствии с (1) имеет вид

$$\delta_{x+y} = \frac{x}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{y}{x+y} \cdot \delta_y + \delta_o.$$

$u = (x + y) \cdot z = 0,3045108$ и, округляя, получим $u = (x + y) \cdot z = 0,3045$. Относительная погрешность будет иметь вид

$$\delta_u = \delta_z + \delta_{x+y} + \delta_o = \delta_z + \frac{x}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{y}{x+y} \cdot \delta_y + \delta_o + \delta_o.$$

Поскольку все относительные погрешности, входящие в это выражение, равны, $\delta_u = (\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} + 3) \cdot \delta_o = 4 \cdot \delta_o = 2 \cdot 10^{-4}$. Абсолютная погрешность будет найдена по формуле $\Delta_u = u \cdot \delta u = 0,3045 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0,6 \cdot 10^{-4}$.

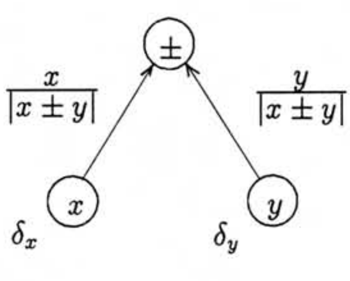
Ответ может быть записан в следующей форме $u = 0,3045 \pm 0,6 \cdot 10^{-4}$.

Заметим, что реальные погрешности вычислений значительно меньше приведенных значений. Погрешность округления после операции сложения равна нулю, относительная погрешность округления произведения равна $\frac{0,108 \cdot 10^{-4}}{0,3045} = 0,35 \cdot 10^{-4}$, следовательно, действительная относительная погрешность равна $1,35 \cdot 10^{-4}$, а абсолютная погрешность $0,3045 \cdot 1,35 \cdot 10^{-4}$.

При анализе сложных выражений удобно изобразить последовательность вычислений с помощью графов.

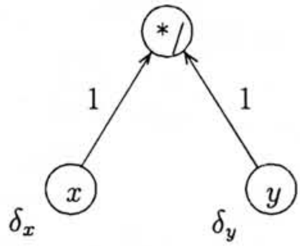
Распространение и изменения относительной погрешности при выполнении последовательности операций можно изображать с помощью стрелок и записанных рядом коэффициентов, отображающих изменение погрешности. Приведем графы для простейших арифметических операций.

Сложение и вычитание:



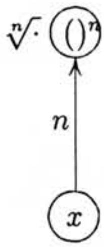
$$\delta_{x \pm y} = \frac{x}{|x \pm y|} \cdot \delta_x + \frac{y}{|x \pm y|} \cdot \delta_y$$

Умножение и деление:



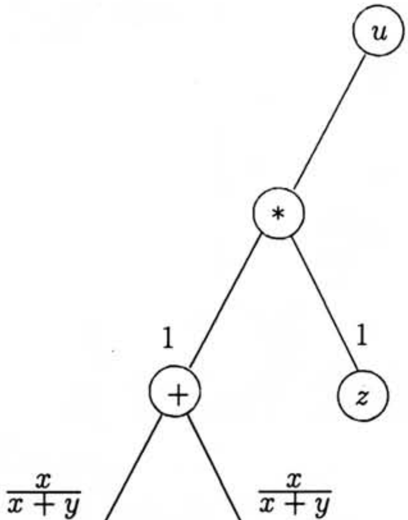
$$\delta_{a/b} = \delta + a + \delta_b, \qquad \delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$$

Возведение в степень и извлечение корня:



$$\delta = \frac{1}{n}\delta_a, \qquad \delta = n \cdot \delta_n.$$

Вычислительный граф, соответствующий примеру 15 ($u = (x + y) \cdot z$) будет иметь вид



$$\delta_u = \frac{x}{x+y} \cdot \delta_x + \frac{y}{x+y} \cdot \delta_y + \delta_o + \delta_z + \delta_o.$$

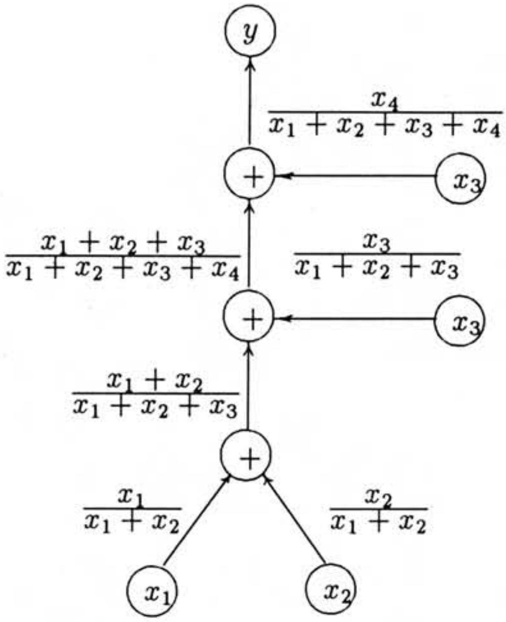
Применим вычислительные графы для определения относительных погрешностей и анализа качества вычислений некоторых задач, часто встречающихся в школьном курсе математики.

Пример 16. Определить относительную погрешность суммы четырех чисел

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

если все они заданы с одинаковой относительной погрешностью, равной погрешности округления $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_o$.

Вычислительный граф, соответствующий сумме, приведен на рисунке:



В соответствии с этим графом относительная погрешность запишется в следующем виде:

$$\delta_y =$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}\cdot\left(\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\cdot\delta_1+\frac{x_2}{x_1+x_2}\cdot\delta_2+\delta_o\right)\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3}+\right.$$
$$\left.+\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}\cdot\delta_3+\delta_o+\frac{x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}\cdot\delta_4+\delta_0.\right. \qquad (5)$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\delta_y = \frac{4x_1+4x_2+3x_3+2x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}\cdot\delta_o.$$

Абсолютная погрешность имеет вид

$$\Delta_y = (4x_1+4x_2+3x_3+2x_4)\cdot\delta_o.$$

Из рассмотрения этих погрешностей следует, что как абсолютная, так и относительная погрешности изменяются при перестановке слагаемых, а следовательно будет изменяться и результат суммирования.

Рассмотрим численный пример.

$$y = 0,2897\cdot10^0+0,6532\cdot10^1+0,7234\cdot10^2+0,5312\cdot10^3.$$

Полагаем, что числа заданы точно, т.е. $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=0$.

Проведем полный анализ этого примера, т.е. найдем сумму чисел, относительную и абсолютную ошибку при округлении промежуточных сумм до четырех значащих цифр. Выровняем порядки первых двух чисел $0,02897\cdot10^1$, $0,6532\cdot10^1$ и, округлив первое число до четырех значащих цифр $0,0290\cdot10^1$, сложим эти числа: $0,6822\cdot10^1$. Далее, выравнивая порядок этой суммы с третьим числом, округляя ее до четырех цифр и складывая, получим: $0,7916 \cdot 10^2$. Проделав эти действия в третий раз, окончательно имеем $y = 0,6104 \cdot 10^3$.

Выполним суммирование в обратном порядке:

$$z = 0,5312 \cdot 10^3 + 0,7234 \cdot 10^2 + 0,6532 \cdot 10^1 + 0,2897 \cdot 10^0,$$

получим $z = 0,6103 \cdot 10^3$. Действительно, при перестановке слагаемых сумма изменилась. Вычислим эту сумму со всеми значащими цифрами без округлений: $S = 610,3617$. Определим соответствующие абсолютные и относительные погрешности: $\Delta_y = 0,038$, $\Delta_z = 0,062$ и $\delta_y = 0,006\%$, $\delta_z = 0.01\%$.

Теоретические оценки относительной погрешности, вычисленные по формуле (5), имеют вид

$$\delta_{y теор} = 2,14 \cdot \delta_o = 2,14 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 1.1\%, \qquad \delta_{z теор} = 3,99\delta_o = 3,99 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 2,0\%.$$

Как и следовало ожидать, эти погрешности значительно превосходят действительные погрешности.

Из вышеприведенного анализа погрешностей и рассмотренного примера можно сделать ряд важных выводов относящихся к операции сложения последовательности чисел:

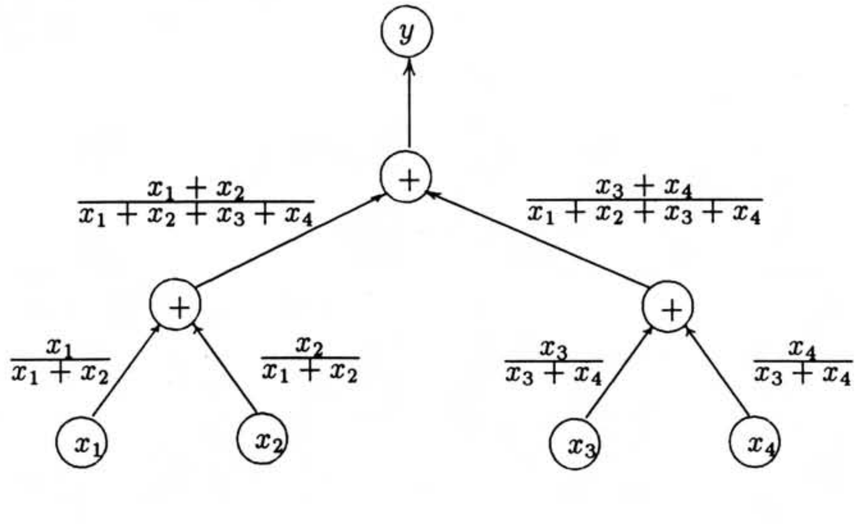
а) сумма чисел зависит от порядка вычисления;

б) для того, чтобы уменьшить величину погрешности, необходимо вначале складывать числа с меньшими значениями, а затем с бо́льшими.

В качестве упражнения самостоятельно проведите вычисление суммы тех же чисел, но по параллельной схеме:

$$y = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4).$$

Определите теоретические относительные и абсолютные погрешности. Соответствующий граф показан на рисунке.



Одна из самых распространенных задач, которую приходится решать школьникам, связана с решением квадратного уравнения. Проанализируем, как вычислительные погрешности влияют на процедуру нахождения корней и их значения.

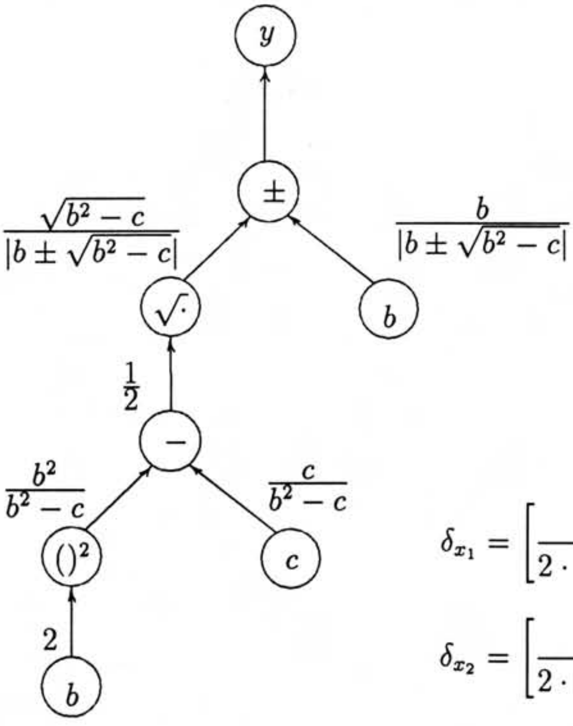
Для упрощения записи выражений погрешностей рассмотрим квадратное уравнение следующего вида:

$$x^2 - 2 \cdot b \cdot x + c = 0.$$

Будем полагать, что коэффициенты уравнения заданы точно, т.е. $\delta_b = \delta_c = 0$. Его решение запишем в следующей форме:

$$x_1 = b + \sqrt{b^2 - c}, \qquad x_2 = b - \sqrt{b^2 - c}.$$

Вычислительный граф, соответствующий этим корням, имеет вид



$$\delta_{x_1} = \left[\frac{(4b^2 - 3c)}{2 \cdot (b + \sqrt{b^2 - c}) \cdot \sqrt{b^2 - c}} + 1\right] \cdot \delta_0,$$

$$\delta_{x_2} = \left[\frac{(4b^2 - 3c)}{2 \cdot (b - \sqrt{b^2 - c}) \cdot \sqrt{b^2 - c}} + 1\right] \cdot \delta_0.$$

Анализ показывает, что погрешности возрастают, если b^2 близок к c, т.е. дискриминант уравнения близок к нулю или один из корней близок к нулю.

Продемонстрируем это явление на численных примерах.

Пример 17. Найти корни уравнения $x^2 - 0,8624 \cdot x + 0,1858 = 0$.

Дискриминант уравнения, вычисленный с четырьмя значащими цифрами, равен 0,0002

$$x_1 = 0,4312 + \sqrt{0,1859 - 0,1858} \approx 0,4312 + 0,01 = 0,4412,$$

$$x_2 = 0,4312 - \sqrt{0,1859 - 0,1858} \approx 0,4312 - 0,01 = 0,4212.$$

Значение корней, вычисленное с двумя дополнительными знаками, $x_{1точн} = 0,442732$, $x_{2точн} = 0,419668$. Соответствующие погрешности имеют следующие значения: $\Delta_{x_1,x_2} = 0,0015$, $\delta_{x_1,x_2} \approx 0,36\%$. Погрешности, найденные из теоретических оценок, значительно больше практических погрешностей: $\delta_{x_1 теор} = 1,38\%$, $\delta_{x_2 теор} = 1,43\%$.

Пример 18. Найти корни уравнения

$$x^2 - 0,8668 \cdot x + 0,1001 \cdot 10^{-3} = 0.$$

Вновь полагаем, что коэффициенты заданы точно и вычисления проводятся с округлением до четырех цифр:

$$x_1 = 0,4334 + \sqrt{0,1878 - 0,0001} = 0,4334 + 0,4332 = 0,8666,$$

$$x_2 = 0,4334 - \sqrt{0,1878 - 0,0001} = 0,4334 - 0,4332 = 0,0002.$$

Если провести вычисления, учитывая шесть знаков, то получим: $x_{1 точн} = 0,866685$, $x_{2 точн} = -0,115 \cdot 10^{-3}$. Соответственно относительные и абсолютные погрешности имеют значения: $\Delta_{x_1} = 0,000085$, $\Delta_{x_2} = 0,000085$ и $\delta_{x_1} = 0,01\%$, $\delta_{x_2} = 42,5\%$.

Соответствующие оценки относительных погрешностей, вычисленные по теоретическим формулам, дают значения: $\delta_{x_1} = 0,03\%$, $\delta_{x_2} = 43,5\%$.

Совершенно очевидно, что качество проведенных вычислений неудовлетворительно.

Качество вычислений второго корня можно значительнее улучшить, если изменить схему вычислений. Выражение для второго корня получим из теоремы Виета $x_1 \cdot x_2 = c$:

$$x_2 = \frac{c}{b + \sqrt{b^2 - c}}.$$

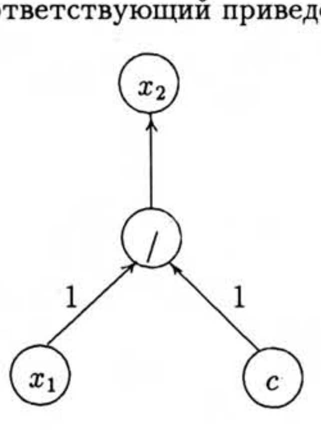
Проводя вычисления с четырьмя значащими цифрами, получим:

$$x_2 = \frac{0.0001001}{0,8666} = 0,1155 \cdot 10^{-3}, \qquad x_{2 точн} = 0,115498 \cdot 10^{-3}.$$

Для относительной и абсолютной погрешности имеем

$$\Delta_{x_2} = 0,24 \cdot 10^{-8}, \qquad \delta_{x_2} = 0,03\%.$$

Вычислительный граф, соответствующий приведенной схеме вычислений:



Выражение для относительной погрешности запишется в виде

$$\delta_{x_1} = \left[\frac{(4b^2 - 3c)}{2 \cdot (b + \sqrt{b^2 - c}) \cdot \sqrt{b^2 - c}} + 2\right] \cdot \delta_o.$$

Вычисление по этой формуле дает $\delta_{x_2} = 0,15\%$.

В школьном курсе математики много внимания уделяется решению систем линейных уравнений. Покажем, как в этом случае распространяются погрешности вычислений.

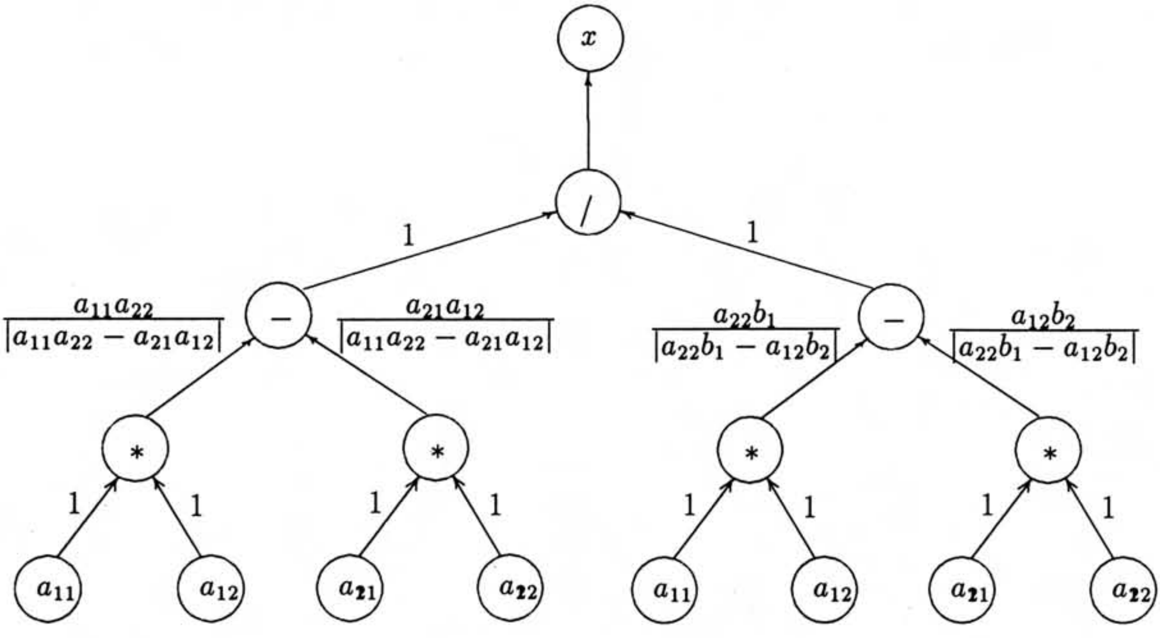
Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{21}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Ее решение может быть записано в виде:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_12}, \qquad y == \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_12}.$$

Вычислительный граф, соответствующий формулам, приведен на рисунке:



Полагая, что значения коэффициентов заданы точно, запишем теоретическую оценку относительной погрешности:

$$\delta_x = \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} + \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} + \frac{b_1a_{22}}{b_1a_{22} - b_2a_{12}} + \frac{b_2a_{12}}{b_1a_{22} - b_2a_{12}}\right) \cdot \delta_o + \delta_0.$$

Пример 19. Решить систему

$$\begin{cases} 0,2038x + 0,1238y = 0,2014 \\ 0,4071x + 0,2436y = 0,4038 \end{cases}$$

Решая систему с четырьмя значащими цифрами, получим $x = -1,714$, $y = 4,286$. Точное решение $x_{точ} = -2,000$, $y_{точ} = 5,000$. Абсолютная и относительная погрешности равны $\Delta_x = 0,186$, $\Delta_y = 0,714$ и $\delta_x = 9,3\%, \delta_y = 14,28\%$.

Пример 20. Решить систему

$$\begin{cases} 0,6324x + 0,4581y = 0,3162 \\ 0,7996x + 0,38626y = 0,3998 \end{cases}$$

Вновь решая систему с четырьмя значащими цифрами, получим

$$x = \frac{0,0610}{0,1221} = 0,4988, \qquad y = \frac{0,0001}{0,1221} = 0,000819.$$

Точное решение $x_{точ} = 0,4996836$, $y_{точ} = 0,0006542$. Абсолютная и относительная погрешности равны: $\Delta_x = 0,00088$, $\Delta_y = 0,000165$ и $\delta_x = 0,2\%$, $\delta_y = 25,5\%$.

Приведенные примеры позволяют сформулировать некоторые рекомендации для практических вычислений.

1) Если необходимо произвести сложение или вычитание длинной последовательности чисел, то сначала выполняйте операции над наименьшими числами.

2) По возможности избегайте вычитания близких чисел.

3) Стремитесь свести число арифметических операций к минимуму.

Приведем ряд задач для самостоятельного решения. При вычислениях используйте десятичную арифметику с четырьмя значащими цифрами.

1) Начертите графы вычислительных процессов $u = (a + a + a) \cdot b$ и $v = 3 \cdot a \cdot b$. Покажите, что максимально возможная относительная погрешность больше для первого выражения. Проверьте это на численном примере $a = 0,4299$, $b = 0,6824$.

2) Начертите графы вычислительных процессов $u = a \cdot x + b \cdot x^2$ и $v = x \cdot (a + x)$. Покажите, что пределы погрешностей одинаковы. В качестве примера возьмите $a = 0,7625$, $b = 0,6947$ и $x = 0,4302$. Покажите, что действительные погрешности будут различны.

3) Начертите графы вычислительных процессов $u = a + b$ и $v = (a^2 - b^2)/(a - b)$. Определите погрешности округления. В качестве примера возьмите $a = 0,3525,6$, $b = 0,3411$.

4) Начертите графы вычислительных процессов $u = (a - b)/c$ и $v = a/c - b/c$. Покажите, что относительная погрешность округления для v больше, чем для u. В качестве примера возьмите $a = 0,5241$, $b = 0,8636$, $c = 0,6570$.

5) Начертите граф вычислительного процесса $(a + b) - b$. Найдите выражения для максимально возможных относительных погрешностей округления. В качестве примера возьмите $a = 0,8614 \cdot 10^{-2}$, $b = 0,9949$, а также $a = 0,3204$, $b = 0,5837$.

Заключение

Анализ приведенных правил вычислений показывает, что при оценке погрешностей вычислений могут использоваться различные методы. Например, абсолютная погрешность может вычисляться непосредственно через абсолютные погрешности входящих в выражение чисел или через относительные погрешности.

Эта неопределенность и свобода выбора правил вычислений, позволяют по новому взглянуть на понятия "строгость" и "точность" математики.

В заключении автор выражает благодарность доценту кафедры численного моделирования физических процессов Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского Кротовой Валентине Сергеевне за проявленный к работе интерес и ценные замечания.

Литература:

1. Данилина Н.И., Дубровская Н.С. Вычислительная математика, М.: "Высшая шк.", 1985, с.472.

2. Д. Мак-Кракен, У.Дорн. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе, М.: "Мир", 1977, с.584.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., Численные методы, М.:" Наука", 1987, с.598.

Образовательные инициативы

В Республике Беларусь: на пути к третьему республиканскому турниру юных математиков

Д.Ф.Базылев, *студент пятого курса механико-математического факультета Белорусского государственного университета,*

В.Т.Вильчинский, *кандидат физико-математических наук, преподаватель математики школы-лицея № 16 г. Минска,*

Б.В.Задворный, *кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель декана факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета*

(члены жюри Второго республиканского турнира юных математиков)

1°. Что такое турнир юных математиков?

Турнир юных математиков — как его проводят в Беларуси — это командное соревнование старшеклассников в умении решать исследовательские задачи, наглядно представлять полученные результаты, аргументированно отстаивать свою точку зрения в публичных дискуссиях. При этом можно четко выделить две части (стороны) турнира: первая — длительная домашняя подготовка (проведение исследований по предложенным задачам), вторая — защита своих результатов в ходе дискуссий на математических боях (ср., например, математические бои конкурса "Кванта", турниры юных физиков).

2°. Вместо пролога (историческая справка).

1995-96 учебный год. Состоялись первые два турнира юных математиков, которые носили еще явно экспериментальный характер. Один — в лицее при БГУ. Второй, по общей договоренности нескольких энтузиастов, — в Белорусском государственном университете. Здесь собрались три команды: команда лицея при БГУ (капитан команды Михаил Вронский), сборная команда Минского района (на базе Боровлянской гимназии, рук. Г. В. Ламинская) и команда средней школы №56 г.Гомеля (рук. Г. М. Горохова). В таком порядке в этом турнире команды и заняли места.

1996-97 учебный год. Турнир получил статус республиканского. Снова в БГУ в Первом республиканском турнире юных математиков встретились четыре команды, которые в результате расположились в следующем порядке: первое место вновь заняла команда лицея при БГУ (капитан - Иван Фомин), а затем шли команды лицея №1 г. Бреста (рук. В. В. Слесарчук), средней школы №56 г. Гомеля (рук. И. Н. Борисова и В. Н. Бобкова) и школы-лицея №165 при БГУИР (рук. О. Ф. Борисенко). Возможно, более успешное выступление двух лицеев объясняется тем, что они предварительно провели аналогичные турниры у себя дома и поэтому имели определенную практику.

1997-98 учебный год. Во Втором республиканском турнире юных математиков 11-13 февраля 1998 г. собрались уже восемь команд: лицея БГУ (руководители - студенты Белгосуниверситета, бывшие лицеисты - А. Коренев, И. Фомин, С. Ших), лицея №1 г. Бреста (рук. В. В. Слесарчук), средней школы №56 г. Гомеля (рук. И. С. Дремук и И. Н. Борисова), школы-лицея №165 при БГУИР (рук. О. Ф. Борисенко), сборная команда лицея №1 г. Витебска и Лужеснянской гимназии (рук. М. И. Наумик), лицея №1 г. Барановичи (рук. Н. С. Богачук и Т. И. Хаярова), гимназии №1 г. Пинска (рук. М. А. Грушко и Ф. В. Родион) и команда гимназии №5 г. Минска (рук. В. В. Майорова).

Отметим, что именно на базе минской гимназии №5 и проходил этот турнир (директор Л. К. Корягина).

По результатам двух полуфинальных математических боев в финал вышли четыре команды, где и произошло окончательное распределение мест:

1-е место — команда лицея №1 г. Витебска и Лужеснянской гимназии,

2-е место было присуждено двум командам — школы-лицея №165 г. Минска и средней школы №56 г. Гомеля,

3-е место — команда лицея №1 г. Бреста.

3°. От турнира к турниру (от Второго к Третьему).

Так как же проходит турнир юных математиков, что нужно учитывать при подготовке к нему, какие неожиданности могут поджидать команды в ходе турнира и почему так получилось, что потенциально сильная команда лицея БГУ — победитель первых двух турниров — осталась за бортом финала?

Прежде всего о заданиях к турниру. Команды получают их заранее: в прошлом году — примерно за два месяца до начала турнира, в этом — еще раньше. Вот некоторые из заданий прошлогоднего турнира (для образца):

Числа

1. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из них равна 28.

а) найти все такие четверки чисел;

б) зависит ли способ решения от числа 28?

2. Произведение n целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма $(n-1)$-го из них равна k.

а) найти при каких n и k решение существует;

б) как зависит ответ от n и k?

в) как еще можно обобщить задачу?

Пересечения прямых и плоскостей

Пусть n — фиксированное натуральное число. Для каких натуральных b на плоскости можно расположить n прямых так, чтобы у них было ровно b точек пересечения?

Рассмотреть обобщения этой задачи, например: в трехмерном случае, в котором k — количество прямых (точек) пересечения двух (трех) плоскостей из n данных.

Интересна также обратная задача: для данного b найти такие n, для которых выполняются условия задачи.

Змей Горыныч

а) У Змея Горыныча три головы и три хвоста. А у доброго молодца — русского богатыря Ильи — меч-кладенец. Во время их битвы выяснилось, что:

1) если Илья отрубит своим мечом одну голову, то на ее месте вырастет новая голова;

2) если отрубит хвост, то вырастет два хвоста;

3) если отрубит два хвоста, то вырастет голова;

4) если отрубит две головы, то ничего не вырастет. Илья победит Змея Горыныча, если отрубит все головы и все хвосты; в противном случае проиграет. Может ли Илья победить? Если может, то найти самый короткий путь к победе.

б) Обобщите эту задачу следующим образом.

Пусть у Змея Горыныча A голов и B хвостов. Илья может своим мечом отрубить:

p голов и при этом вырастает k голов и l хвостов,

q хвостов и при этом вырастает m голов и n хвостов.

Значения всех чисел p, k, l, q, m, n не превосходят 3.

1) При каких p, k, l, q, m, n Илья всегда может победить Змея Горыныча?

2) Если при каких-то значениях p, k, l, q, m, n он побеждает не всегда, то укажите (опишите) множество пар значений (A, B), при которых он проигрывает.

3) Пусть значения p, k, l, q, m, n заданы. Опишите множество пар значений (A, B) таких, что Илья может победить Змея не более чем за 6 ударов меча.

Разумеется, интересно изучить и другие вопросы, связанные с борьбой Ильи-молодца и Змея Горыныча.

Очевидно, что эти задачи носят явно исследовательский характер: они решаются не за час и не за день, требуют длительной проработки разных направлений, иногда использования дополнительной литературы, часто решаются в составе исследовательских групп. Командам необходимо провести исследования по этим задачам и к предварительно указанному сроку (примерно за три дня до начала турнира) представить решения в оргкомитет. Последнее нужно, во-первых, оргкомитету, чтобы он мог реально судить о готовности команды к турниру; во-вторых, — жюри, ибо задачи сложные, решения объемные, и за время доклада как жюри, так и командам-соперницам будет трудно разобраться в правильности выводов, доказательств, программных реализаций и т.п.; в-третьих, — самим командам, ибо жюри по этим материалам имеет возможность судить о том, помогут ли они команде-оппоненту и рецензенту при подготовке к математическому бою. Так что это обязательный (и уже проверенный) элемент правил, причем все материалы должны быть по возможности четко и математически грамотно изложены, аккуратно оформлены, а основные результаты особо отмечены.

Но вот подготовка завершена, и команды прибывают на турнир.

В первый день командам предстоит жеребьевка и предварительный (нулевой) тур — двух-или трехчасовое командное решение специальных заданий (3-6 задач), подготовленных жюри. Эти задания также носят исследовательский характер, но проще основных задач. Командам необходимо за 2-3 часа предложить метод исследования (решения) и достичь в рамках этого метода максимального продвижения. Участие руководителей в этой части турнира не допускается. Ответственность за планирование решения командой этих заданий полностью возлагается на капитана. Вот примеры заданий предварительного тура турнира 1998 года:

1. Разности квадратов

При каком наименьшем значении n множество, состоящее из n различных натуральных чисел, заведомо будет содержать два таких числа, разность квадратов которых делится нацело на 10000?

2. Задача о количестве острых и тупых углов

Чему равно наибольшее число острых углов в плоском (несамопересекающемся) n-угольнике? А чему может быть равно наименьшее число тупых углов?

Примечания. Для второго вопроса возможно рассмотрение двух случаев: а) величина тупого угла лежит в интервале $(90°; 180°)$, б) величина тупого угла лежит в интервале $(90°; 360°)$. Изменятся ли ответы во всех случаях, если вместе с острыми или соответственно тупыми углами рассматривать прямые углы?

3.Странное умножение

Найдите как можно больше пар натуральных чисел таких, что результат их умножения выражен цифрами одного из сомножителей, разделенными одним или несколькими нулями. Например, $126*81 = 10206$, $18*56 = 1008$. (Внимание: разделяться должны некоторые цифры, но не обязательно все.)

Во второй день турнира проводится несколько (три или четыре) четвертьфинальных математических боев. Из этих боев по две лучшие команды выходят в полуфиналы (если команд не более восьми, то сразу разыгрываются полуфиналы). На следующий день — полуфинальные бои, из которых вновь по две команды выходят в финал. В последний день турнира — финальный математический бой, определяющий победителей.

Математический бой проводится по следующим правилам.

Различаются трехкомандные и четырехкомандные бои. Каждый бой проводится в три или четыре действия — раунда (в зависимости от количества команд):

а) **трехкомандный бой** (Д — докладчик, О — оппонент, Р — рецензент):

Раунд	1	2	3
Команда 1	Д	Р	О
Команда 2	О	Д	Р
Команда 3	Р	О	Д

б) **четырехкомандный бой** (здесь * — команда-наблюдатель):

Раунд	1	2	3	4
Команда 1	Д	*	Р	О
Команда 2	О	Д	*	Р
Команда 3	Р	О	Д	*
Команда 4	*	Р	О	Д

Порядок прохождения и регламент действий в каждом раунде:

1) Подготовка к докладу и доклад .... до 15 мин
2) Вопросы Оппонента к Докладчику и ответы Докладчика, выступление Оппонента, ответ Докладчика на выступление Оппонента.. до 10 мин
3) Вопросы Рецензента к Докладчику и Оппоненту, ответы Докладчика и Оппонента, выступление Рецензента .... до 5 мин
4) Заключительное слово Докладчика .... до 3 мин
5) Дополнительные выступления Оппонента и Рецензента .... до 5 мин
6) Вопросы и замечания Жюри .... до 7 мин

Таким образом, время одного действия не более 45 мин.

Примечания. 1. **Докладчик** в своем выступлении старается максимально подробно изложить результаты, полученные командой по задаче, дать четкое представление о методах, которыми они получены. В заключение доклада он должен еще раз четко сформулировать важнейшие с его точки зрения результаты, т.е. сделать резюме. Результатами могут являться как конкретные утверждения, так и методы решения, придуманные командой, или способы применения тех или иных утверждений (методов) к решению других задач, или даже специально построенные контрпримеры.

2. **Оппонент** дает оценку доклада, указав важнейшие с его точки зрения результаты, степень их обоснованности и/или доказанности, существенные и несущественнные неточности в доказательствах, неверные утверждения, если таковые имеются. Здесь основными оценочными критериями (показателями) анализа являются:

- верный и правильно доказанный результат,

- верный, но недоказанный результат (доказательство отсутствует или в нем допущены ошибки),
- сомнительный результат (и, разумеется, недоказанный),
- неверный результат.

3. **Рецензент** в своем выступлении в первую очередь оценивает выступление Оппонента (объективность оценки им доклада и его результатов, существенность и корректность заданных вопросов) и лишь в случае необходимости дает свою оценку доклада (например, в тех случаях, когда его оценка не совпадает с общей оценкой Оппонента или в докладе есть недостатки, не замеченные Оппонентом, и т.п.)

4. Оппонент и Рецензент в своих выступлениях, кроме указанного в п.5 регламента, не представляют своих результатов по данной задаче, если это не служит аргументом в полемике (например, в случае, когда по представленным материалам трудно судить о достоверности доказательств, а собственные результаты не совпадают или противоречат утверждениям Докладчика). Свои идеи и результаты можно кратко охарактеризовать в дополнительных выступлениях (п.5 регламента). Последние могут не учитываться при выставлении окончательной оценки.

5. Полемику имеет право вести только один человек из команды — непосредственно Докладчик, Оппонент и Рецензент. Команда может вмешаться в ход дискуссии (задать вопрос или сделать выступление с места) только в двух случаях:

- Докладчику нужна помощь команды,
- по просьбе капитана команды.

В обоих случаях Докладчик или капитан обращаются за разрешением к ведущему; выступление с места можно начинать только после его разрешения.

Ниже мы приводим решение одной из задач турнира, которое могло, но к сожалению, не прозвучало во время турнира 1998 г. Это исследование победителя турнира — витебской команды — по задаче "Рациональные точки на окружности". (В полуфинальном и финальном боях она выступала с другим докладом, но вышеназванный доклад показался нам по ряду параметров более привлекательным. В текст внесен ряд поправок, связанных в первую очередь с необходимостью значительно сократить его: переписана часть формулировок и доказательств, объединены сходные или вытекающие друг из друга результаты, опущены несущественные, на наш взгляд, утверждения).

4°. Рациональные точки на окружности

(Решение задачи команды лицея №1 г.Витебска и Лужеснянской гимназии)

Условие задачи

Точка с координатами (x,y) называется рациональной, если x и y- рациональны.

При каких неотрицательных целых n существуют окружности, содержащие ровно n рациональных точек?

1) Существуют ли окружности, которые:

— не содержат ни одной рациональной точки;

— содержат только одну рациональную точку;

— содержат только две рациональные точки?

Если такие окружности существуют, то сколько их?

2) Пусть задана окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$. Определить критерий существования на данной окружности хотя бы трех рациональных точек.

По трем различным рациональным точкам окружности определите все рациональные точки данной окружности.

3) Существуют ли окружности, содержащие ровно n $(n>2)$ рациональных точек?

Примечание. Два естественных продолжения этой задачи: 1) на эллипсы и другие кривые второго порядка; 2) в пространство.

Решение

1*. **а.** Окружность $x^2+y^2=\sqrt{2}+n$, где $n\in\mathbf{N}$, не содержит ни одной рациональной точки.

Доказательство. Пусть (p,q) — рациональная точка данной окружности, тогда число $\sqrt{2}=p^2+q^2-n$ является рациональным, а это неверно.

б. Окружность $(x-\sqrt{2}n)^2+y^2=2n^2$, где $n\in\mathbf{N}$, содержит ровно одну рациональную точку, а именно (0,0).

Доказательство. Пусть (p,q) — рациональная точка данной окружности, тогда $(p-\sqrt{2}n)^2+q^2=2n^2$, откуда $p^2+q^2=2\sqrt{2}pn$. Если $p\neq 0$, то из последнего равенства получаем, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Итак, $p=0$, а значит $q=0$.

в. Окружность $x^2+(y-\sqrt{2}n-1)^2=2n^2+1$, где $n\in\mathbf{N}$, содержит ровно две рациональные точки, а именно $(\pm1,1)$.

Доказательство. Пусть (p,q) — рациональная точка данной окружности, тогда $p^2+(q-\sqrt{2}n-1)^2=2n^2+1$, откуда $p^2+q^{-}2q=2\sqrt{2}(q-1)n$. Если $q\neq 1$, то из последнего равенства получаем, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Итак, $q=1$, а значит $p=\pm1$.

Во всех указанных случаях, так как n принимает бесконечно много значений, то таких окружностей бесконечно много.

2*. Докажем справедливость следующего критерия.

Критерий 1. *Для того чтобы окружность* $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ *содержала хотя бы три рациональные точки необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) a, b, c^2 *являлись рациональными числами,*

2) существовали рациональные числа m, n, *такие, что* $m^2+n^2=c^2$.

Доказательство. Докажем *необходимость*.

Пусть окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ содержит хотя бы три рациональные точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, тогда

$$(x_1-a)+(y_1-b)^2=c^2, \tag{1}$$

$$(x_2-a)+(y_2-b)^2=c^2, \tag{2}$$

$$(x_3-a)+(y_3-b)^2=c^2. \tag{3}$$

Вычтем неравенство (3) из равенств (1) и (2), получим:

$$a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)=0,5(x_3^2+y_3^2-x_1^2-y_1^2), \tag{4}$$

$$a(x_3-x_2)+b(y_3-y_2)=0,5(x_3^2+y_3^2-x_2^2-y_2^2), \tag{5}$$

Если $(x_3-x_1)(y_3-y_2)=(x_3-x-2)(y_3-y_1)$, то прямые AC и BC параллельны, т.е. точки A, B, C лежат на одной прямой, а следовательно, эта прямая пересекает окружность в трех различных точках, что невозможно. Поэтому

$$(x_3-x_1)(y_3-y_2)\neq(x_3-x-2)(y_3-y_1) \tag{6}$$

Решая систему линейных уравнений (4), (5) относительно a, b, и учитывая (6), заключаем, что a, b являются рациональными числами. Обозначим $x_1-a=m$, $y_1-b=n$, тогда $m,n\in\mathbf{Q}$, причем

$$c^2=(x_1-a)^2+(y-1-b)^2=m^2+n^2,$$

что и требовалось доказать.

Докажем *достаточность*.
Пусть $a,b\in\mathbf{Q}$ и $c^2=m^2+n^2$, где $m,n\in\mathbf{Q}$.
Покажем, что окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ содержит бесконечно много рациональных точек, а следовательно, по крайней мере три рациональные точки. Для этого заметим, что рациональные точки $(x,y)=\left(a+\frac{pm+qn}{r},b+\frac{qm-pn}{r}\right)$, где $p=k^2-1$, $q=2k$, $r=k^2+1$, $k\in\mathbf{Q}$, лежат на окружности. Действительно,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\left(\frac{pm+qn}{r}\right)^2+\left(\frac{qm-pn}{r}\right)^2=\frac{(p^2+q^2)(m^2+n^2)}{r^2}=m^2+n^2=c^2.$$

Так как k может принимать бесконечно много рациональных значений, то тем самым получаем бесконечно много рациональных точек на окружности.

Доказательство завершено.

Замечание. Сформулируем известное в математике **условие Ферма:** *рациональное число m представимо в виде суммы квадратов двух рациональных чисел тогда и только тогда, когда всякое простое число вида $4n+3$ входит в разложение числа m на простые множители в четной степени.*

Например, число $54/25 = 2 \cdot 3^3/5$ не представимо в виде суммы квадратов двух рациональных чисел, а число $49/40 = 7^2/2^3 \cdot 5$ представимо в таком виде.

Таким образом, условие 2) в **критерии 1** можно заменить условием Ферма, и тогда получится следующий

Критерий 2. *Для того чтобы окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ содержала хотя бы три рациональные точки необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) a, b, c являлись рациональными числами,

2) условие Ферма для числа c^2.

3*. Из доказательства **критерия 1** видим, что если окружность содержит хотя бы три рациональные точки, то она содержит бесконечно много рациональных точек. Таким образом, произвольная окружность может либо не содержать ни одной рациональной точки, либо содержать ровно одну такую точку, либо ровно две, либо бесконечно много.

4*. **а.** Обобщения на случай произвольных кривых второго порядка;
б. Обобщения на случай сферы в трехмерном пространстве.

а. Пусть нам задана произвольная кривая второго порядка. Будем записывать ее уравнение в виде:

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + fxy = 1.$$

Выделим следующие вопросы:

1) Существуют ли кривые второго порядка, которые содержат ровно три рациональные точки? (Ответ. Существуют и бесконечно много, например: кривые $(x-1)^2 = a(y^2-1) + 0,5(y+1)$, где a — иррационально, содержат ровно три рациональные точки — $(0,1),(2,1),(1,-1)$).

2) Существуют ли кривые второго порядка, которые содержат ровно четыре рациональные точки? (Ответ. Существуют и бесконечно много, например: кривые $x^2+1 = a(y^2-1) + 4y + 6$, где a — иррационально, содержат ровно четыре рациональные точки — $(3,1),(-3,1),(1,-1),(-1,-1)$).

3) Существуют ли кривые второго порядка, которые содержат пять и более рациональных точек? (Ответ. Существуют и бесконечно много, см. следующий критерий).

Критерий 3. *Кривые второго порядка, задаваемые уравнением*

$$ax^2 + bx + cy^2 + dy + fxy = 1.$$

содержат хотя бы пять рациональных точек тогда и только тогда, когда числа a, b, c, d, f *— рациональные и найдется точка* (x_0, y_0) *такая, что* $x_0, y_0 \in \mathbf{Q}$ *и*

$$ax_0^2 + bx_0 + cy_0^2 + dy_0 + fx_0y_0 = 1.$$

б. Точку с координатами (x, y, z) назовем рациональной, если все ее координаты — рациональные числа. Пусть задана сфера, уравнение которой:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Выделим следующие вопросы:

1) Существуют ли сферы, которые не содержат ни одной рациональные точки? (Ответ. Существуют и бесконечно много, например: $x^2 + y^2 + z^2 = a$, где a — иррационально).

2) Существуют ли сферы, которые содержат ровно одну рациональную точку? (Ответ. Существуют и бесконечно много, например: сферы $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$, где a — иррационально, содержат только одну рациональную точку — (0,0,0)).

3) Существуют ли сферы, которые содержат ровно две рациональные точки? (Ответ. Существуют и бесконечно много, например: сферы $(x - \pi)^2 + (y - e)^2 + z^2 = \pi^2 + e^2 + t^2$, где π и e — известные трансцендентные постоянные, а t — произвольное рациональное число, содержат ровно две рациональные точки — $(0, 0, \pm t)$.

4) Существуют ли сферы, которые содержат три и более рациональных точек? (Ответ. Существуют и бесконечно много, см. следующий критерий).

Критерий 4. *На сфере, заданной уравнением*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

существует хотя бы три рациональные точки тогда и только тогда, когда числа a, b, c *— рациональные и найдется точка* (x_0, y_0, z_0) *такая, что* $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{Q}$ *и*

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2.$$

Замечание. По поводу доказательства критериев 3 и 4 см. нижеприведенные комментарии.

5°. Комментарии авторов статьи к решению задачи и некоторым моментам, связанным с выступлениями команд

1) Прежде всего укажем неоспоримые достоинства этого исследования:

• *полнота* — в решении представлены ответы на все вопросы, поставленные автором задачи;

• *наличие обобщений,* тоже практически полных, с точки зрения поставленных автором вопросов;

• *сформулированные критерии легко применимы на практике* — они дают по существу полное описание кривых второго порядка и сфер, удовлетворяющих поставленным условиям, причем такое, что по этому описанию легко строить конкретные примеры и различать возможные случаи кривых и поверхностей; *в этом состоит, конечно, особая ценность приведенного решения;*

• *цельность, стройность, логичность и последовательность изложения,* что является особо важным ввиду предполагаемого представления результатов как доклада.

2) В то же время, хотя мы и говорим о полноте решения и нисколько не хотим умалить его достоинств, необходимо отметить некоторые естественные вопросы и направления исследования, которым могла последовать та или иная команда (в частности, если авторские предложения оказались по каким-то причинам незатронутыми или недоступными).

Одно из них такое: и в формулировке задачи, и в решении говорится о необходимых и достаточных условиях, при которых на окружности существуют три (или более) рациональные точки. Но можно было рассмотреть аналогичный вопрос для случаев, когда таких точек не существует либо когда их ровно одна или две, а не ограничиваться лишь констатацией того факта, что их бесконечно много (и это касается даже не обобщений, а основных вопросов задачи).

Другое направление — четкое выделение случаев, когда кривые второго порядка вырождаются в одну или две прямые; здесь необходимые и достаточные условия могли выглядеть необычным образом, и сразу возникал вопрос, а как они соотносятся с общим случаем (это естественные нюансы, возникающие в авторских обобщениях).

Еще одно направление — изучение вопросов существования на окружностях точек другого, более сложного вида, например, точек вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональные числа и т.д. (Такие неожиданные повороты возможны и в других задачах, и это всегда следует иметь в виду командам).

Что касается конкретно этого исследования, то у членов жюри осталось неудовлетворение, пожалуй, лишь от доказательства критериев 3 и 4 — достаточность в обоих случаях была доказана хорошо, а вот при рассмотрении необходимости в обоих случаях были ссылки на аналогичность критерию 1. Однако, здесь все же есть тонкие моменты, и их, конечно, требовалось осветить.

Все эти пункты по существу определяют новое большое исследование, и мы предлагаем заинтересовавшимся читателям самостоятельно проделать его, что вполне может послужить темой для доклада, например, на очередной конференции школьников.

3) Жаль, что на турнире не было выступления витебской команды по этой задаче. Очень интересно было бы проследить, как докладчик осветил бы в своем выступлении основные результаты, идеи и достоинства решения; что предложили бы на самом деле в качестве критики оппонент и рецензент. А ведь это один из двух важнейших элементов (сторон) турнира; первая сторона — исследование, т.е. собственно домашняя подготовка, вторая — защита своих результатов непосредственно на турнире. И если отдельные команды преуспевают в первом, но беспечно относятся ко второму, то вряд ли они могут в полной мере рассчитывать на успех.

Мы не будем касаться на этих страницах первой части — каждая команда, конечно, по-своему планирует свои домашние исследования, и здесь особая роль принадлежит руководителю.

Что же касается второй части (представления и защиты своих результатов), то здесь каждая команда сталкивалась и будет сталкиваться в первую очередь с двумя проблемами (а они должны быть на самом деле решены еще дома) — техническим оформлением доклада (плакаты, слайды, наглядное представление программных продуктов и т.п.) и вопросом, кто и как будет делать доклад. Именно неверное решение последнего вопроса, по нашему мнению, не позволило, например, команде лицея БГУ выйти в финал последнего турнира.

Давайте посмотрим, что здесь может получиться. Часто бывает, что автор хорошего исследования не является в то же время хорошим докладчиком. В этом случае команда может поручить сделать доклад кому-то другому, кто объективно является лучшим докладчиком, но плохо представляет все нюансы и тонкие места исследования и, разумеется, может оказаться не готов к серьезным и глубоким вопросам, касающимся существа дела. Тут трудно дать однозначный совет: мы видели обе ситуации — и когда докладчик (автор) проигрывал именно потому, что не мог вразумительно представить собственные результаты, и когда хороший докладчик (но не автор) проигрывал просто потому, что не мог ответить по существу на достаточно простые вопросы. Единственное, что мы здесь можем посоветовать, — обратите еще раз внимание на примечания к порядку прохождения и регламенту математического боя (и в первую очередь — на п. 5 примечаний).

6°. На пути к Третьему турниру.

В заключение представим краткую информацию о Третьем республиканском (белорусском) турнире юных математиков. Он состоялся 9–12 февраля 1999 года (вновь на базе гимназии №5 г. Минска). Сообщаем наши координаты в городе Минске и задания этого турнира:

Адрес:	**Белгосуниверситет, ФПМИ; пр. Скорины, 4; г.Минск; 220050, Республика Беларусь; Задворному Б. В.**
Телефон для справок:	**(017) 220-68-97 (Задворный Борис Валентинович),**
Факс:	**(017) 226-55-48,**
E-mail:	**zadorny ftp.bsu.unibel.by**

Задания к турниру

1. Странные числа

Перевертышем числа A называется число A^*, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Число A_0^* назовем странным для операции сложения перевертышей, если число, равное сумме $A_0 + A_0^*$, не содержит четных цифр.

1) Докажите, что нет семнадцатизначных странных чисел для операции сложения перевертышей.

2) Определите, среди каких еще n-значных чисел нет странных и среди каких они точно есть.

3) Попробуйте описать множество n-значных странных чисел или оценить их количество (для тех n, для которых они, конечно, существуют).

Для произвольного n-значного числа A_l определим множество круговых чисел $A_1,\ A_2,\ \dots\ ,\ A_n$ следующим образом: A_2 получается из A_1 перестановкой первой цифры (т.е. цифры, стоящей в старшем разряде) в конец числа, A_3 получается из A_2 аналогичным образом и т.д.

4) Попробуйте определить понятие странных чисел для операции сложения k подряд стоящих круговых чисел ($k = 2,\ 3$ и т.д.) во множестве круговых чисел, а также для операции умножения на натуральное число m. Изучите вопросы существования (или несуществования) странных чисел в различных множествах круговых чисел, оцените их количество, по возможности опишите множества странных чисел или способы их построения.

2. Последовательности из модулей

Последовательность (a_n) натуральных чисел $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$ составляется по следующему рекуррентному закону:

$$a_0,\ a_1,\ a_{n+1} = |a_n - a_{n-1}| \qquad (a_0 \text{ и } a_1 \text{ заданы}).$$

Продолжается последовательность до первого нуля.

1) Известно, что каждое число, входящее в последовательность, не превосходит 1998. Какое наибольшее количество членов может содержать такая последовательность?

Изучите свойства последовательности (a_n) для случаев:

2) рациональных чисел,

3) любых действительных чисел,

4) последовательность (a_n) строится по правилу $a_0,\ a_1,\ a_{n+1} = |a_n - \beta a_{n-1}|$ (a_0, a_1 и β заданы; члены последовательности, как и в случаях 1), 2), 3), являются натуральными, рациональными либо действительными числами).

Попробуйте получить общие условия на a_0 и a_1, обеспечивающие конечность указанных последовательностей, и оценить количество их членов в этих случаях.

3. Высоты многочленов

Пусть $p_m = P_m(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степени m. Будем обозначать через $H(P_m)$ модуль наибольшего по абсолютной величине коэффициента многочлена P_m. Пусть $Q_l = Q_l(x)$ — еще один многочлен — степени l; $n = m + l$.

1. Докажите, что $H(P_m Q_l) \leq C_1(n) H(P_m) H(Q_l)$ при $C_1(n) \geq n + 1$.
2. Найдите наименьшее из возможных значений $C_1(n)$.
3. Может ли выполняться строгое неравенство $H(P_m Q_l) < H(P_m) H(Q_l)$?
4. Как ведет себя величина $C_1(n)$ при стремлении n к бесконечности?
5. Найдите такую величину $C_2(n)$, что $H(P_m Q_l) \geq C_2(n) H(P_m) H(Q_l)$ при любых $P_m(x)$ и $Q_l(x)$.

4. Периметры и площади

Попробуйте получить какие-нибудь соотношения, связывающие периметры и площади выпуклых многоугольников. Может быть, вам удастся получить критерий (необходимое и достаточное условие) существования выпуклого многоугольника с заданным периметром P и площадью S.

5. Теория выпуклости фигур

Рассмотрим следующие задачи:

1) На плоскости расположено множество точек, удовлетворяющих такому условию: любой прямоугольник единичной площади можно поместить на этой плоскости так, что ни одна из указанных точек не попадет внутрь этого прямоугольника. Для каких положительных чисел α можно заведомо сказать, что таким же образом можно поместить на этой плоскости и любой выпуклый четырехугольник площади α?

2) Четырехугольник площади α лежит внутри прямоугольника площади 1. Для каких α можно заведомо сказать, что этот четырехугольник является выпуклым?

Оказывается, эти задачи тесно связаны между собой. Возможно, вам удастся найти такие понятия (и дать им точные определения), которые послужат основой методов исследования, общих для этих задач и помогающих их решению.

6. N прямых

Пусть на плоскости расположены n прямых; $c_1, c_2, \ldots, c_n, c$ — фиксированные действительные числа, $l_i(X)$ — расстояние от произвольной точки X плоскости до i-ой прямой ($i = 1, 2, ..., n$). Опишите геометрическое место точек плоскости, для которых выполняется

$$c_1 l_1(X) + c_2 l_2(X) + \cdots + c_n l_n(X) = c.$$

Рассмотрите различные случаи расположения прямых и различные значения $n = 1, 2, \ldots$.

Перекрашивания плоскости

Исходная задача. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги надо закрасить в черный цвет квадрат 2×2. Можно ли это сделать за конечное число операций, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате 3×3 или 4×4?

Общая постановка. Рассмотрите другие вопросы, связанные с перекрашиванием плоскости в различных случаях. (Например, какие фигуры других размеров и форм можно перекрасить в черный цвет, используя эти (или, возможно, другие) операции; какие фигуры, наоборот, нельзя перекрасить; укажите какие-нибудь общие подходы и правила (закономерности); попробуйте рассмотреть эту задачу в пространстве и т.д.).

8. Отмеченные точки

В прямоугольнике $m \times n$ клеток отмечены центры k из них. При этом никакие четыре отмеченных центра не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника. Известно, что при $m = n = 7$ наибольшее возможное значение k равно 21, а при $m = n = 13$ наибольшее k равно 52. Попробуйте это доказать.

Найдите по возможности наибольшие значения k и для других значений m и n (необязательно равных). Попробуйте рассмотреть пространственный аналог задачи.

9. Рассеянный математик

Исходная задача. Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0, 1, 2,..., 9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Докажите, что даже в случае "крайнего невезения" он сумеет войти в подъезд не позже, чем через 16 минут 42 секунды (если, конечно, он хороший математик) .

Рассмотрите различные обобщения этой задачи. Например, найдите минимальное время, за которое можно войти в подъезд в случае, когда код k-значный, а кнопок n, где $2 \leq k \leq n$.

Задачи X летней Конференции Турнира Городов

Наш журнал уже рассказывал о Турнире Городов (№3 за 1997 год) и о летней Конференции Турнира Городов (№2 за 1997 год). В настоящем номере мы публикуем условия задач X летней Конференции, проходившей в Гамбурге, Германия с 1 по 8 августа 1998 г. Подробный отчет о Конференции, включающий решения задач, списки участников и результаты команд, выйдет отдельным изданием. За справками можно обращаться в московский Оргкомитет Турнира по адресу: 121002 Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, комн. 211.

Задача 1. Обобщенные полимино

Есть бесконечная горизонтальная клетчатая полоска $\mathbb{P}$ шириной в одну клетку. Любую фигуру в этой полоске, состоящую из нескольких клеток, будем называть *полимино*, или, более точно, *n-мино*, если фигура состоит из n клеток.

Будем рассматривать фигуры из трех клеток – тримино. Каждое тримино задается двумя параметрами a и b – расстояниями между центральной и крайними клетками. Набор тримино с параметрами (a, b) называется *ориентированным*, если у каждого тримино в этом наборе a – расстояние, между центральной и крайней левой клеткой, а b – расстояние между центральной и крайней правой. Если же в наборе вместе с описанными тримино встречаются их зеркальные аналоги, мы будем считать этот набор тримино *неориентированным.* Если мы говорим об ориентированных или неориентированных три- или полимино, это значит, что мы отличаем их от их зеркальных аналогов.

1. а) Докажите, что если полоску $1 \times n$ можно покрыть ориентированными полимино, то это можно сделать единственным способом.

б) Докажите, что если полоску $1 \times n$ можно покрыть ориентированными тримино с параметрами (a, b), то $a = b$.

2. Докажите, что если одинаковыми обобщёнными домино можно покрыть прямоугольник $m \times n$, то ими можно покрыть полоску $1 \times n$ или полоску $1 \times m$.

3. а) Докажите, что если рациональные дроби $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ равны, то полоску $\mathbb{P}$ тогда и только тогда можно покрыть неориентированными (a_1, b_1)-тримино, когда ее можно покрыть неориентированными (a_2, b_2)-тримино.

б) Докажите, что если ориентированными полимино можно замостить полоску $1 \times n$, то эти полимино – центральносимметричные.

4. а) Докажите, что при любых a и $b \in \mathbb{N}$ неориентированными (a, b)-тримино можно покрыть всю полоску $\mathbb{P}$.

5. а) Докажите, что для всякого ориентированного тримино T_1 существует такое ориентированное тримино T_2, что ориентированными тримино этих двух видов можно покрыть конечную полоску (тримино T_1 должно быть хотя бы один раз использовано).

6. Пусть числа a и b фиксированы. Рассмотрим полоску наименьшей длины ℓ, которую можно замостить неориентированными (a, b)-тримино.

а) Докажите, что $\ell \geq \ell_0 = \frac{3}{2}(a+b)$.

б) Докажите, что существует не более одного замощения полоски длины ℓ_0 тримино с параметрами (a, b).

в) Пусть $a > b$, a и b взаимно просты. Докажите, что замощение полоски длины ℓ_0 существует в том и только том случае, если a и b – соседние нечётные числа.

7. Возьмем произвольные n^2 клеток нашей полоски, назовем фигуру, ими образованную, S. Ориентированное n-мино назовем *S-квадрируемым*, если существует замощение фигуры S n-мино такой формы. Докажите, что при всех n и S количество S-квадрируемых n-мино чётно.

Промежуточный финиш

4. б) При каких a, $b \in \mathbb{N}$ неориентированными (a, b)-тримино можно замостить хоть какой-нибудь прямоугольник, одна из сторон которого равна 1?

5. б) При каких a, $b \in \mathbb{N}$ полоску $\mathbb{P}$ можно покрыть ориентированными (a, b)-тримино?

8. Тетрамино с параметрами (a, b, a) будем называть *симметричным тетрамино с параметрами* (a, b). Докажите, что симметричными тетрамино с параметрами (a, b) (a и b взаимно просты) можно замостить полоску $\mathbb{P}$ в том и только том случае, если $a(a+b)$ – четно.

Для любого n и произвольного ориентированного n-мино T обозначим через q_k – наибольшее количество клеток, которые можно замостить непересекающимися фигурами вида T в прямоугольнике $1 \times k$. Величину $\Theta(T) = \sup\limits_k \frac{q_k}{k}$ будем называть *коэффициентом укладываемости* n-мино T. Величину $\Omega_n = \inf\limits_{|T|=n} \Theta(T)$ будем называть *минимальной паркетопригодностью* числа n.

9. а) Найдите Ω_3.

б) Найдите Ω_4.

в) Докажите, что $\Omega_n \geq \dfrac{2n}{n^2 - n + 2}$.

г) Докажите, что $\Omega_n \leq \frac{4}{n}$.

Задача 2. Одномерная динамика и теорема Шарковского

Предложил А. И. Буфетов

Введение

Мы будем изучать непрерывные отображения отрезка в себя.

Пусть $[a, b]$ — отрезок, $f : [a, b] \to [a, b]$ — отображение. Напомним определение непрерывности.

Определение Пусть для любых $x_n \in [a, b]$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [a, b]$ из условия

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Тогда отображение f называется *непрерывным.*

В работе с непрерывными отображениями очень полезна

Теорема о промежуточном значении *Пусть $a \le x \le y \le b$, $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрерывна. Тогда для всякого c, лежащего на отрезке с концами $f(x)$ и $f(y)$, найдется $d \in [x, y]$, такое что $f(d) = c$.*

Мы не будем здесь доказывать эту теорему; при решении пунктов задачи на нее можно ссылаться без доказательства.

Итак, рассмотрим непрерывное отображение $f : [a, b] \to [a, b]$. Заметим, что область значений отображения f есть подмножество его области определения, а потому для всякого $x \in [a, b]$ определены точки

$$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$$

Для всякого целого $n \ge 0$ обозначим

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n\text{ раз}}(x\underbrace{))\cdots)}_{n\text{ раз}}.$$

Замечание $f^0(x) = x$.

Определение Орбитой точки x называется множество $\{f^n(x) | n \ge 0\}$.

Определение Точка $x \in [a, b]$ называется неподвижной точкой отображения f, если $f(x) = x$.

Упражнение Всякое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

Определение Точка $x \in [a, b]$ называется периодической точкой отображения f, если существует такое $n > 0$, что $f^n(x) = x$. Всякое такое число n называется периодом точки x; наименьшее такое n называется наименьшим периодом точки x.

Упражнение Все периоды периодической точки являются кратными наименьшего.

Определение Число n будем называть периодом отображения f, если у f есть периодическая точка *наименьшего* периода n.

Как может быть устроено множество периодов непрерывного отображения отрезка в себя?

В 1964 году А. Н. Шарковский доказал следующий удивительный факт:

Если непрерывное отображение отрезка в себя имеет период 3, то оно имеет любой натуральный период.

В этой задаче, в числе прочего, доказывается этот факт.

В первой части задачи исследуется отображение

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|$$

(так называемое **tent map**). Предлагается в явном виде описать периодические точки этого отображения.

Вторая часть задачи посвящена доказательству теоремы Шарковского и близких утверждений.

1. The Tent Map

1. Рассмотрим $f(x) = 1 - |1 - 2x|$ на $[0, 1]$.
а) Покажите, что $f([0, 1]) = [0, 1]$.
б) Постройте график f.
2. Найдите у f точку
а) периода 2;
б) периода 3;
в) периода 5.
3. Опишите все периодические точки отображения f.
4. Покажите, что f имеет любой натуральной период.
5. Для произвольного натурального n найдите число точек периода n у отображения f.
Определение. Подмножество X отрезка $[0, 1]$ называется *плотным*, если для любых $0 < a < b < 1$,

$$X \cap (a, b) \neq \emptyset.$$

6*. Покажите, что у f есть плотные орбиты.
7.** Проведите аналогичное исследование для $f(x) = 4x(1 - x)$ на $[0, 1]$.

2. Теорема Шарковского

8. Построить пример непостоянного непрерывного отображения отрезка в себя, не имеющего других периодических точек, кроме неподвижной.

Пусть $f : [a,b] \to [a,b]$, K, L — отрезки, вложеннные в $[a,b]$. Будем писать $K \mapsto L$, если $f(K) \supset L$.

9. Пусть $K \mapsto K$. Показать, что у f есть неподвижная точка на отрезке K.

10. Пусть $K_0 \mapsto K_1 \mapsto K_2 \mapsto \ldots \mapsto K_{n-1} \mapsto K_n$. Показать, что $\exists x \in K_0$, такое что $f(x) \in K_1$, $f^2(x) \in K_2$, $\ldots$, $f^{n-1}(x) \in K_{n-1}$, $f^n(x) = x$.

11. Пусть непрерывное отображение отрезка в себя имеет период 3. Тогда оно имеет любой натуральный период.

12. а) Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, f—непрерывное отображение $[x_0, x_3]$, такое что $f(x_i) = x_{i+1}$ при $i = 0, 1, 2$, $f(x_3) = x_0$. Показать, что f имеет любой период на $[x_0, x_3]$.

б) Та же задача с заменой 3 на произвольное n.

13.** Построить непрерывное отображение отрезка в себя, множество периодов которого есть $\{2^n | n \geq 0\}$.

3. Дополнительные пункты

На самом деле, Шарковский доказал гораздо более общую теорему.

А именно, введем на множестве натуральных чисел новое отношение порядка $\triangleright$, определенное следующим образом:

$$
\begin{gathered}
3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots \\
\cdots\ 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright \cdots \\
\cdots\ 2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright \cdots \\
\cdots\ 2^k\cdot 3 \triangleright 2^k\cdot 5 \triangleright \cdots \\
\cdots \triangleright 2^{k+1} \triangleright 2^k \triangleright 2^{k-1} \triangleright \cdots \triangleright 2 \triangleright 1
\end{gathered}
$$

Теорема Шарковского. *Если $p \triangleright q$, то всякое отображение отрезка в себя, имеющее период p, имеет также и период q.*

В следующих пунктах мы намечаем доказательство теоремы Шарковского.

3.1. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 2 и не имеющего других периодических точек, кроме неподвижных.

3.2. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 4 и не имеющего периода 3.

3.3. Докажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 4, имеет также период 2.

3.4*. Приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, имеющего период 5, но не имеющего периода 3.

3.5. Покажите, что непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 5, имеет также период 7.

3.6*. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период $2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, имеет также период $2k+3$.

3.7*. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее нечетный период больше 1, имеет также период 6.
3.8. Покажите, что всякое непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее период 2^k, имеет также период 2^{k-1}.
3.9. Выведите из предыдущих пунктов теорему Шарковского.
3.10. Для всякого натурального k приведите пример непрерывного отображения отрезка в себя, множество периодов которого есть

$$\{1, 2, \ldots, 2^k\}.$$

3.11. Постройте пример отображения, множество периодов которого есть

$$\{2^n | n \geq 0\}.$$

4. Плотные орбиты

4.1. Пусть отображение отрезка в себя имеет любой период и множество периодических точек всюду плотно на отрезке. Верно ли, что у него есть плотные орбиты?
4.2. Пусть отображение отрезка в себя имеет плотные орбиты. Верно ли, что
а) оно имеет любой период?
б) его периодические точки плотны?
4.3. Рассмотрим отображение $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$,

$$f(x) = 10x(1 - x).$$

а) Опишите множество точек, орбита которых — ограниченное множество.
б) Покажите, что у f есть любой период.
4.4. Проведите аналогичное исследование для $f(x) = \lambda x(1 - x)$ при других значениях λ.
4.5. Пусть отображение $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ непрерывно. Верно ли, что множество точек, орбита которых ограничена, замкнуто?
4.6. Существует ли непрерывное отображение отрезка в себя, имеющее ровно одну плотную орбиту?
Ответ: Нет. Докажите.

Задача 3. О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры

Предложил Гервер М.

Познакомившись с двумя сериями подготовительных и двумя сериями основных задач по комбинаторной геометрии и теории графов, вы узнаете драматическую историю одной гипотезы, выдвинутой 65 лет назад, доказанной при дополнительных предположениях в сороковых-пятидесятых и опровергнутой в 1993 году. Вслед за основными задачами формулируется ряд трудных вопросов, ответы на которые пока не известны.

Все рассматриваемые ниже множества предполагаются *ограниченными*.

Диаметром множества M называется *наименьшее* число D, обладающее тем свойством, что *для любых двух точек M расстояние между ними не превосходит D*.

В частности, для множеств M, состоящих из конечного числа точек, диаметр D равен *наибольшему из попарных расстояний между точками M*.

Подготовительные задачи (первая серия)

1. Докажите, что любое множество на плоскости можно разбить на три части меньшего диаметра.

2. a) Приведите пример плоского множества, которое нельзя разбить на две части меньшего диаметра.

b) Приведите пример множества в трехмерном пространстве, которое нельзя разбить на три части меньшего диаметра.

3. Докажите, что a) окружность нельзя разбить на 2 части меньшего диаметра,

b**) трехмерный шар нельзя разбить на 3 части меньшего диаметра.

c) Разбейте трехмерный шар на 4 части меньшего диаметра.

Гипотеза Борсука и некоторые теоремы о разбиении

В 1933 г. известный польский математик Карел Борсук высказал гипотезу:

Любое ограниченное множество в трехмерном пространстве можно разбить на четыре части меньшего диаметра. И вообще: любое ограниченное множество в $d-$мерном пространстве можно разбить на $d+1$ частей меньшего диаметра (необходимые сведения о многомерных пространствах будут приведены ниже).

Решение задачи 1 подтверждает гипотезу Борсука при $d = 2$.

В 1955 г. Х. Эгглстон и в 1957 г. Б. Грюнбаум и А. Хеппеш доказали ее при $d = 3$. А еще раньше гипотеза Борсука нашла подтверждение для всех центрально симметричных множеств и всех гладких тел (Г. Хадвигер, 1946 г.) [1].

Основные задачи (первая серия)

4. Докажите, что любое центрально симметричное множество в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.
5. Докажите, что гипотезу Борсука достаточно проверить для *выпуклых* множеств (то есть для множеств, которые вместе с каждой парой точек содержат весь отрезок с концами в этих точках).

Определения

Через каждую граничную точку выпуклого множества V в трехмерном пространстве можно провести *хотя бы одну опорную плоскость* (т.е. такую плоскость, что V лежит по одну сторону от нее). Через вершину выпуклого многогранника (например, через вершину куба) проходит бесконечно много опорных плоскостей. Выпуклое множество (или выпуклое тело) V называется *гладким*, если через каждую граничную точку V проходит *единственная* опорная плоскость.
6.** Докажите, что любое *гладкое* выпуклое тело в трехмерном пространстве можно разбить на 4 части меньшего диаметра.

Контрпримеры к гипотезе Борсука

В 1993 г. случилось неожиданное: Д. Кан и Г. Калаи построили контрпример к гипотезе Борсука при $d = 1\,325$ и для всех $d > 2\,014$ [2]. В [3] и [4] были построены новые контрпримеры – при $d = 946$ и $d = 561$. Ниже предлагаются задачи, которые приведут к модификациям этих контрпримеров.

Многомерный куб

Введем прямоугольные системы координат x_1, x_2 на плоскости и x_1, x_2, x_3 в трехмерном пространстве. 4 точки $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ и $(-1,-1)$ на плоскости служат вершинами квадрата, 8 точек (x_1, x_2, x_3) в трехмерном пространстве, где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами куба.

Аналогично, 16 точек (x_1, x_2, x_3, x_4), где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами *четырехмерного* куба; 32 точки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где каждая из координат x_j равна 1 или -1, являются вершинами *пятимерного* куба и т.д.

Для n–мерного куба (для множества точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x_j| \le 1$) будем использовать обозначение $[-1,1]^n$.

Расстояние $r = |xx'|$ между точками

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{и} \quad x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \tag{1}$$

определяется формулой

$$r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2. \tag{2}$$

Соединив начало координат $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ с точкой $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получим вектор $0x$; скалярным произведением векторов $0x$ и $0x'$ называется число

$$(x, x') = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + \ldots + x_n x'_n. \tag{3}$$

При $n = 2$ и $n = 3$ это – привычные формулы для расстояний и для скалярных произведений на плоскости и в трехмерном пространстве.

Подготовительные задачи (вторая серия)

7. Пусть (1) – вершины n–мерного куба $[-1, 1]^n$: каждая из координат x_j и каждая из координат x'_j равна 1 или -1, $j = 1, 2, \ldots, n$.

a) Пусть $x_j = x'_j$ для s значений индекса j и $x_j \neq x'_j$ для t значений индекса j, $s + t = n$. Чему равен тогда квадрат расстояния (2) между точками (1)?

b) Сколько имеется различных попарных расстояний между вершинами куба $[-1, 1]^n$? Сколько вершин лежит на каждом из этих расстояний от данной вершины?

Указание

Для квадрата имеется 2 различных ненулевых попарных расстояния: длина стороны и длина диагонали; если фиксировать одну вершину квадрата $(1, 1)$, то – по расстояниям от нее – все 4 вершины квадрата разбиваются на 3 группы:

$$4 = 1 + 2 + 1$$

(в первой группе – сама вершина $(1, 1)$, во второй – вершины $(1, -1)$ и $(-1, 1)$, в третьей – $(-1, -1)$). Для трехмерного куба соответствующее разбиение имеет вид

$$8 = 1 + 3 + 3 + 1.$$

Продолжите: $16 =?$, $32 =?$, $64 =?$, $128 =?$, $256 =?$, $512 =?$, $1024 =?$, $\ldots$, $2^n =?$

c) Чему равен диаметр куба $[-1, 1]^n$?

8. Какие значения принимает скалярное произведение (3), если (1) – вершины n–мерного куба $[-1, 1]^n$?

Определение

Векторы $0x$ и $0x'$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

9. При каких n среди векторов, соединяющих центр 0 куба $[-1, 1]^n$ с его вершинами, имеются ортогональные? Фиксируем вершину куба x; для скольких вершин x' векторы $0x'$ ортогональны вектору $0x$?

Идея контрпримера

Будут построены два конечных множества X и Y (X будет подмножеством вершин n–мерного куба, Y – подмножеством вершин d–мерного куба: $X \subset [-1, 1]^n$, $Y \subset [-1, 1]^d$, $d = C^2_{n+1}$), состоящие из одного и того же числа точек: $|X| = |Y| = N$.

Между X и Y будет установлено такое взаимно однозначное соответствие

$$x \longleftrightarrow y, \quad x' \longleftrightarrow y', \tag{4}$$

что *максимально удаленным друг от друга точкам* y, y' будут соответствовать *ортогональные* $0x, 0x'$, т.е., если D – диаметр Y, то

$$(x, x') = 0 \longleftrightarrow |y, y'| = D. \tag{5}$$

Затем Y превращается в *граф* Γ: вершины y, y' соединяются ребром тогда и только тогда, когда $|yy'| < D$, и исследуются *полные подграфы* графа Γ (т.е. такие подграфы, в которых каждые 2 вершины соединены ребром); вычисляется число q вершин *максимального* (содержащего наибольшее возможное число вершин) полного подграфа Π графа Γ и устанавливается неравенство

$$N/q > d + 1. \tag{6}$$

10. Докажите что из (6) следует, что минимальное число частей диаметра $< D$, на которые можно разбить множество Y, больше $d+1$ (так что (6) дает контрпример к гипотезе Борсука).

Ввиду (4), (5), все построения фактически проводятся не в Y, а в X: именно X превращается в граф Γ и вершины x, x' соединяются ребром тогда и только тогда, когда $(x, x') \neq 0$.

Основные задачи (вторая серия)

11. Положим $n = 43$ и вложим n–мерный куб $[-1,1]^n$ в $n+1$–мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^n$. Иными словами, $[-1,1]^{43}$ трактуется как 43–мерная грань $x_0 = 1$ куба $[-1,1]^{44}$. Определим X как следующее подмножество вершин куба. Вершина $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X, если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^n$ четно. Проверьте, что X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{42}$.
12. Теперь положим $d = C_{44}^2 = 946$ и отобразим X на следующее подмножество Y вершин d-мерного куба $[-1,1]^d$.

Рассмотрим множество P всех пар $(i,j), 1 \leq i \leq j \leq n = 43$ (проверьте, что число таких пар равно d, так что их можно перенумеровать числами $k = k(i,j), 1 \leq k \leq d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i,j) \in P, \quad 1 \leq k = k(i,j) \leq d.$$

Докажите, что построенное отображение $y = y(x)$ является взаимно однозначным и, следовательно, Y (как и X) содержит N точек:

$$|Y| = |X| = N = 2^{42} = 4\,398\,046\,411\,104.$$

Граф Γ и его максимальный полный подграф Π

Пусть D – диаметр Y. Превратим Y в граф Γ, соединив ребрами все пары вершин $y, y' \in Y$, расстояние $|yy'|$ между которыми меньше D. Пусть Π – максимальный полный подграф Γ, т.е. такой (содержащий наибольшее возможное число вершин) подграф, что любые две его вершины соединены ребром. Решив задачи 14–18, вы увидите, что верна

Теорема. *Число* $|\Pi|$ *вершин подграфа* Π *не превосходит* $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k = 2\,665\,685\,155$.

Считая, что эта теорема верна, решите задачу 13.

13. Проверьте неравенство $N/|\Pi| > 1\,649$ и объясните, почему из него следует, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $946 \le d \le 1\,648$.

14. Докажите, что для различных $x, x' \in X$ скалярное произведение $(x, x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ может принимать значения $0, \pm 4k$, $1 \le k \le 10$, и не принимает никаких других значений; $(x, x) = 44$.

15. Докажите, что расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D, когда скалярное произведение $(x, x') = 0$.

16. Теперь граф Γ можно получить по–новому, соединив ребрами все пары вершин x, $x' \in X$, для которых $(x, x') \neq 0$. Выведите отсюда, что число вершин $|\Pi|$ максимального полного подграфа Π графа Γ не меньше, чем $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$.

Многочлены $F_a(x)$ и $G_a(x)$

Каждому $a \in X$ сопоставим многочлен

$$F_a(x) = ((a,x)+1)((a,x)-1)((a,x)+2)((a,x)-2)\ldots((a,x)+5)((a,x)-5). \quad (7)$$

Записав

(7) в виде линейной комбинации мономов и последовательно применяя соотношение $x_j^2 = 1$, получаем новый, равный $F_a(x)$ на X, многочлен $G_a(x)$ с мономами $c\,x_{j_1}^{s_1} x_{j_2}^{s_2} \ldots x_{j_{10}}^{s_{10}}$, c – целые, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{10} \le n = 43$, $s_k = 0$ или 1.

17. Докажите, что при всех $a, x \in X$ верны следующие соотношения. Если $a \neq x$ и $(a, x) \neq 0$, то $F_a(x) \equiv 0 \pmod{11}$. Если $a = x$, то $F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

18. Пусть $\{a_j\}_{j=1}^{q} \in X$ попарно неортогональны: скалярное произведение любых двух из них не равно нулю. Многочлены $G_a(x)$ при $a = a_j$ обозначим через $g_j(x)$, $1 \le j \le q$. Докажите, что $g_j(x)$ *линейно независимы над кольцом целых чисел*: если

$$c_1 g_1(x) + \ldots + c_q g_q(x) \equiv 0, \text{ где } c_1, \ldots, c_q \text{ – целые числа},$$

то $c_1 = \ldots = c_q = 0$. Выведите отсюда теорему о числе вершин $|\Pi|$ максимального полного подграфа Π графа Γ: докажите, что $|\Pi|$ не больше, чем $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^k$.

Новые контрпримеры

Задачи 11–18 приводят к выводу: *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $946 \le d \le 1\,648$. Задачи 19–21 приводят к аналогичному выводу для $860 \le d \le 2\,319$ и $561 \le d \le 757$.

19. Положим $n = 41$, $N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$, $q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^k = 473\,732\,328$.

a) Вложим n–мерный куб $[-1,1]^n$ в $n+1$–мерное пространство с координатами $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, и, трактуя $[-1,1]^{41}$ как 41–мерную грань $x_0 = 1$ куба $[-1,1]^{42}$, определим X подобно тому, как это было сделано в задаче 11: вершина $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, $x_j = \pm 1$, принадлежит к X, если $x_0 = 1$ и число минус единиц среди $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ четно.

Проверьте, что X содержит $N = 2^{n-1}$ точек: $|X| = N = 2^{40}$.

b) Так же, как в задаче 12, отобразим X на подмножество Y вершин d-мерного куба $[-1,1]^d$, $d = C_{42}^2 = 861$.

Рассмотрим множество P всех пар $(i,j), 1 \le i \le j \le n = 41$ (число таких пар равно d, так что их можно перенумеровать числами $k = k(i,j), 1 \le k \le d$) и вершине $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ сопоставим точку $y = y(x) \in Y$ с координатами

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \quad (i,j) \in P, \quad 1 \le k = k(i,j) \le d.$$

Докажите, что Y, как и X, содержит N точек: $|Y| = |X| = N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$.

c) Какие значения принимает скалярное произведение $(x,x') = \sum_{j=0}^n x_j x'_j$ для x, $x' \in X$?

d) Докажите, что расстояние $|yy'|$ между вершинами $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ тогда и только тогда равно диаметру D множества Y, когда скалярное произведение $(x,x') = \pm 2$.

e*) Превратим X в граф Γ, соединив ребрами все пары вершин x, $x' \in X$, для которых $(x,x') \ne \pm 2$. Докажите, что число вершин $|\Pi|$ максимального полного подграфа Π графа Γ равно $q = \sum_{k=0}^9 C_{41}^k$.

f) Из неравенства

$$\frac{N}{q} = \frac{1\,099\,511\,627\,776}{473\,732\,328} > 2\,320 \tag{8}$$

выведите, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $861 \le d \le 2\,319$.

20. Выведите из неравенства (8), что *гипотеза Борсука неверна при* $d = 860$.

21. Положив $n = 33$, $d = C_{34}^2 = 561$, $N = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ и $q = \sum_{k=0}^7 C_{33}^k = 5\,663\,890$, выведите из неравенства $N/q > 758$, что *гипотеза Борсука неверна всех* d, $561 \le d \le 757$.

Нерешенные вопросы

Сопоставляя полученные выше результаты с [2]–[4], видим, что *гипотеза Борсука неверна при всех* d, $561 \le d \le 757$ и $d \ge 860$.

22. Верна ли гипотеза Борсука при $3 < d < 561$? Что верно – теорема или контрпример – при $757 < d < 860$?

Ответить на часть этих вопросов, возможно, удастся, решив следующие задачи. Для перехода от этих задач к геометрическим нужно заменить нули и единицы на $+1$ и -1 соответственно.

A. Рассмотрим $2^{10} = 1024$ точки, занумеруем их числами 0, 1, 2, 3, ..., 1023.

Каждое из этих чисел запишем в двоичной форме (в виде 10-разрядного числа):

0) 000 0000 000, 1) 000 0000 001, 2) 000 0000 010, ..., 1 023) 111 1111 111.

Слева к каждому числу допишем 0, справа – 0 или 1 – так, чтобы число единиц (как и число нулей) стало четным:

0) 0000 0000 0000, 1) 0000 0000 0011, 2) 0000 0000 0101, ..., 1 023) 0111 1111 1110.

Любой паре полученных (12-разрядных) чисел a, b сопоставим число $a * b$, имеющее в i–м разряде 0, если цифры a, b в i–м разряде совпадают, и имеющее в i–м разряде 1, если цифры a, b в i–м разряде не совпадают.

Построим граф Г, соединив часть точек ребрами по следующему правилу: точки с номерами a, b *не соединяются*, если $a * b$ имеет поровну (по 6) нулей и единиц, и *соединяются* во всех остальных случаях.

a) Сколько вершин имеет максимальный полный подграф графа Г?

b) На какое *минимальное* число полных подграфов можно разбить граф Г?

B. Обобщите задачу A на случай 2^{4k-2} точек.

C. Обобщите задачу A на случай 2^{4k} точек (в этом случае при построении графа Г точки с номерами a, b *не соединяются*, если $a * b$ имеет *почти поровну* нулей и единиц ($k+2$ одних и k других), и *соединяются*, если число нулей и единиц в $a * b$ различается больше, чем на 2).

23. Гипотезу Борсука можно сформулировать следующим образом:

Обозначим через $f(d)$ минимальное из таких чисел m, что любое ограниченное множество в $d-$мерном пространстве можно разбить на m частей меньшего диаметра. Тогда $f(d) = d + 1$.

В [2] получена оценка $f(d) \geq (1.2)^{\sqrt{d}}$. Как на самом деле растет $f(d)$ с ростом d?

Список литературы

[1] Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. // Теоремы и задачи комбинаторной геометрии.

М.: Наука. 1965.

[2] Kahn J., Kalai G. // Bull. AMS (N.S.) 1993. V.29. N.1. P.60-62.

[3] Nilli A. // Contemp. Math. 1994. V.178. P.209-210.

[4] Райгородский А. // УМН. 1997. Т.52. Вып.6. С.181-182.

Задача 4. Парабола как окружность

Предложил С. Маркелов

Определения

Окружность — множество точек плоскости, равноудаленных от данной (*центра* окружности). *Парабола* — множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от данной точки (*фокуса* параболы) и данной прямой (*директрисы* параболы). Прямая, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе, является осью симметрии параболы и называется *осью* параболы.

Выберем декартову систему координат Oxy с осью Ox, параллельной директрисе параболы и осью Oy, параллельной оси параболы. Тогда парабола задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, b, c — некоторые числа, т. е. является графиком квадратного трехчлена. Прямая $y = kx + r$ либо пересекает параболу в двух точках, либо пересекает в одной точке, либо не пересекает параболу. Если имеет место второй случай, прямая называется *касательной* к параболе в точке. Можно дать геометрическое определение касательной к параболе. Пусть X — точка на параболе, F — фокус параболы, D — основание перпендикуляра, опущенного из X на директрису. Касательная к параболе в точке X будет биссектрисой угла FXD.

Геометрические наблюдения

Докажите следующие утверждения.

1. а) Прямая пересекает две концентрические окружности в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 1а.) Тогда $AB = B'A'$.

б) Прямая пересекает две параболы, совмещающиеся сдвигом вдоль их общей оси, в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 1б.) Тогда $AB = B'A'$.

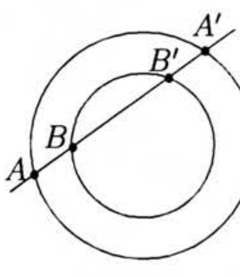


Рис. 1а

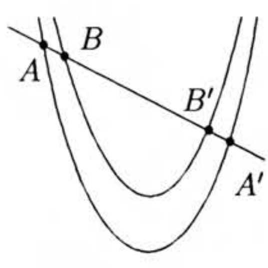


Рис. 1б

2. а) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.

б) Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.

3. а) Фигура C_M ограничена дугой окружности C и касательными к C, проведенными из точки M. (См. Рис. 2а.) Площадь C_M одинакова для всех точек M, лежащих на окружности, концентрической C.

б) Фигура P_M ограничена параболой P и касательными к P, проведенными из точки M. (См. Рис. 2б.) Площадь P_M одинакова для всех точек M, лежащих на параболе, полученной из P параллельным переносом вдоль оси.

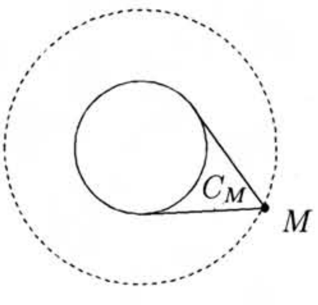


Рис. 2а

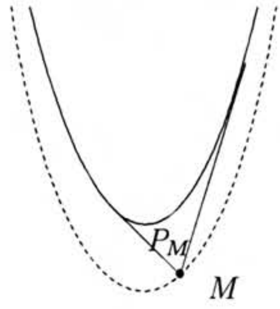


Рис. 2б

4. а) Возьмем точки A и B вне окружности. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей окружность в точках M, N, построим окружность, описанную вокруг BNM. Либо все эти окружности имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

б) Возьмем точки A и B вне параболы. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей параболу в точках M, N, построим параболу с осью, параллельной оси исходной параболы и проходящую через B, N, M. Либо все эти параболы имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

5. а) **(Теорема Фейербаха.)** Проведем к окружности три касательные, через середины сторон образованного ими треугольника проведем вторую окружность. Она будет касаться первой.

б) Проведем к параболе три касательные, на серединах сторон образованного ими треугольника построим параболу с осью, параллельной оси первой параболы. Она будет касаться первой параболы..

6. а) На сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях) отмечены точки, не совпадающие с вершинами треугольника: A' на BC, B' на AC, C' на AB. Точка C'' — вторая точка пересечения окужностей, описанных вокруг треугольников $AB'C'$ и $A'BC'$. Тогда и окружность, описанная вокруг треугольника $A'B'C$, проходит через C''.

б) На сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях) отмечены точки, не совпадающие с вершинами треугольника: A' на BC, B' на AC, C' на AB. Пусть через каждую тройку точек A, B', C'; A', B, C'; A', B', C проведены параболы с параллельными осями. Если первые две из них пересекаются в точке C'', отличной от C', то и третья парабола проходит через C''.

7. Попытайтесь понять, что общего в приведенных выше задачах. Найдите примеры, аналогичные задачам 1–6, и докажите соответствующие утверждения.

Замечание. Лучшие из найденных примеров будут включены в список задач после промежуточного финиша.

8*. Опишите наблюдаемое явление, т. е. сформулируйте как можно более широкий класс теорем, которые остаются верными после переформулировок, аналогичных тем, что сделаны в задачах 1–6 (“парабола” вместо “окружность”, “параболы, совмещающиеся параллельным переносом вдоль общей оси” вместо “концетрические окружности” и т. д.)
9.** Объясните наблюдаемое явление, т. е. докажите, что истинность теорем об окружностях, которые являются ответом в задаче 8, влечет истинность аналогов этих теорем о параболах.

Аффинные свойства

Аффинные преобразования задаются в координатах линейными выражениями. Это означает, что координаты $(x'; y')$ образа точки $(x; y)$ при аффинном преобразовании равны

$$\begin{array}{rcl} x' &=& a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' &=& a_{21}x + a_{22}y + y_0 \end{array} \quad \text{или} \quad (x; y) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + x_0; a_{21}x + a_{22}y + y_0). \qquad (*)$$

Аффинная инвариантность означает, что данное условие не нарушается при аффинных преобразованиях плоскости. Аффинные преобразования переводят прямые в прямые; сохраняют касательные; отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых; пропорционально изменяют площади всех фигур.

Замечание. Аффинное преобразование переводит окружность в *эллипс*, поэтому окружность нельзя определить аффинно-инвариантным образом.

Будем рассматривать теоремы такого вида: для конфигурации точек, прямых и некоторых кривых, описанной *аффинно-инвариантными* условиями, утверждается выполнение некоторых *аффинно-инвариантных* утверждений о точках, прямых и кривых этой конфигурации. Назовем эти теоремы аффинными свойствами конфигураций

Все кривые в условиях интересующих нас теорем будут либо окружностями (и тогда такую теорему будем называть евклидовой), либо параболами с параллельными осями (такую теорему будем называть параболической).

Гипотеза 1. Из справедливости евклидовой теоремы об аффинном свойстве некоторой конфигурации следует справедливость параболической теоремы для этой конфигурации.

10. Опровергните гипотезу 1.

В параболическом случае имеется особое семейство прямых параллельных осям парабол. Будем считать конфигурацию невырожденной, если в конфигурации нет прямых из особого семейства и ни одна пара точек из конфигурации не лежит на прямой из особого семейства.

Гипотеза 2. Из справедливости евклидовой теоремы об аффинном свойстве некоторой конфигурации следует справедливость параболической теоремы для этой конфигурации в предположении, что она — неособая.

11.** Докажите или опровергните гипотезу 2.

12. Приведите пример аффинного свойства (-в), справедливого в параболическом случае для неособых конфигураций, но неверного (-ых) в евклидовом случае.

Дополнительные примеры

13. Дайте аффинное определение биссектрисы угла, докажите или опровергните теорему о пересечении биссектрис треугольника в параболическом случае.

14. (*Ф. Петров, С. Тихомиров*) Дайте аффинное определение ортогональности двух прямых, докажите или опровергните теорему о пересечении высот треугольника в параболическом случае.

15. а) На сторонах AB; BC; CD; DA четырехугольника $ABCD$ отмечены точки A_B, B_A; B_C, C_B; C_D, D_C; D_A, A_D соответственно. (См. рис. 3а.) Если в четырехугольники, образованные прямыми
AB, AD, A_DB_C, A_BD_C; AB, B_AC_D, A_DB_C, BC; BC, C_BD_A, B_AC_D, CD; CD, D_CA_B, C_BD_A, DA; $A_BD_C, D_AC_B, C_DB_A, B_CA_D$, можно вписать окружности, то и в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) О восьми прямых l_1, l_2, l_3, l_4, l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, находящихся в общем положении, известно, что каждая из четверок прямых l_1, l_2, l'_1, l'_2; l_1, l_2, l'_3, l'_4; l_3, l_4, l'_1, l'_2; l_3, l_4, l'_3, l'_4; l_2, l_3, l'_2, l'_3; касается некоторой параболы с осью, параллельной данной прямой l. (См. рис. 3б.) Тогда и прямые l_1, l_4, l'_1, l'_4 касаются некоторой параболы с осью, параллельной l.

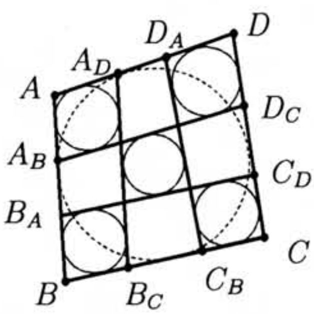


Рис. 3а

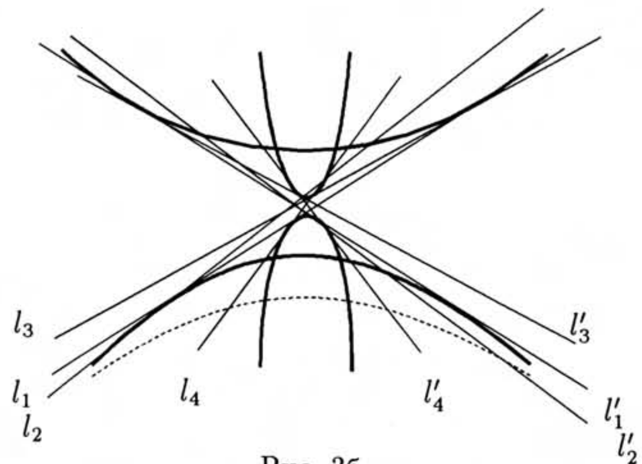


Рис. 3б

16*. Останется ли верным утверждение 15б), если заменить параболы (графики квадратных трехчленов) на графики дробно-линейных функций (гиперболы)?

17. (*Ф. Петров, С. Тихомиров*) Рассмотрите такую теорему: даны три окружности; к каждой паре проведены внешние касательные, тогда точки пересечения этих пар касательных лежат на одной прямой.

Является ли эта теорема аффинной? Верен ли ее параболический аналог?

Не аффинные аналоги

18. (Теорема о произведении длин секущих) а) Даны парабола и точка A вне нее. Через A проведена прямая, пересекающая параболу. Докажите, что произведение проекций длин секущих на директрису параболы не зависит от выбора прямой.

б) Можно ли сформулировать эту теорему как аффинное свойство?

19. Придумайте определение равенства углов для “параболической” геометрии так, чтобы оно было согласовано с аффинным определением биссектрисы.

Существуют ли параболические многоугольники с равными углами?

20. (*А. Гоголев*) а) Докажите теорему Кези (обобщенная теорема Птолемея): назовем расстоянием между окружностями длину отрезка общей внешней касательной, обозначать его будем $d(\omega_1, \omega_2)$. Тогда для четырех окружностей есть общая касающаяся их окружность в том, и только том случае, когда выполнено равенство

$$d(\omega_2, \omega_4)d(\omega_3, \omega_1) = d(\omega_2, \omega_1)d(\omega_3, \omega_4) + d(\omega_2, \omega_3)d(\omega_1, \omega_4).$$

б) Верен ли параболический аналог теоремы Кези? (Вместо расстояния будем брать длину проекции общей касательной на директрису.)

Задача 5. Ускорение сходимости рядов

Представил А. К. Толпыго

1. Вычислить суммы:

а) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$.

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

в) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\ldots=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$.

г) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

д) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}+\ldots=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$.

2. Ускорить сходимость ряда $\sum\dfrac{1}{n^2}$, сведя его:

а) к ряду, члены которого убывают как n^{-3};

б) к ряду, члены которого убывают как n^{-4}.

Указание. Использовать формулу $\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2(n+1)}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

3. Ускорить сходимость ряда $\sum\dfrac{1}{n^3}$.

4. Доказать $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=3\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$.

5. Доказать $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}=\dfrac{5}{2}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$.

6*. Доказать $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{36}{17}\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4\binom{2n}{n}}$.

7. Ускорить сходимость комплексного ряда $\sum{}'\dfrac{1}{\omega^4}$, где $\omega\neq 0$ пробегает все числа $a+bi$, a,b — целые.

8. Найти какую-нибудь аналогичную формулу для суммы обратных 6-х степеней (комплексных).

Задача 6. Округление сумм

Предложили А. В. Шаповалов и Д. Шаповалов

Округление — это замена нецелого числа на одно из двух ближайших целых (с недостатком или с избытком), целое число при округлении не меняется.

1. а) Докажите, что в равенстве $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ всегда можно округлить все слагаемые и сумму так, что равенство не нарушится.

б) Дан набор равенств для всех i, j таких, что $1 \leq i < j \leq n$:

$$s_{ij} = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j.$$

Докажите, что можно округлить все a_k и все s_{ij} так, чтобы равенства не нарушились.

Пусть в некотором конечном множестве переменных выделены несколько подмножеств, и для каждого подмножества S_i выписано равенство вида

$$s_i = x(S_i) = \sum_{j \in S_i} x_j = \text{сумма его элементов}.$$

Назовем такую структуру *округляемой*, если при любых значениях переменных можно округлить все эти значения и соответствующие суммы так, чтобы равенства не нарушились.

2. В вершинах многоугольника выписаны числа, а на каждой стороне — сумма чисел в ее концах.

Является ли такая структура округляемой а) для квадрата; б) 5-угольника; в) n-угольника?

г) Будет ли округляемой структура n-угольника, если кроме сумм на сторонах выписана еще сумма во всех вершинах?

3. Р-структура многогранника. В вершинах многогранника выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах.

Покажите, что Р-структура не округляема а) для тетраэдра и б) для октаэдра, но округляема в) для куба.

4. Р-структура графа. В вершинах графа выписаны числа, а на каждом ребре — сумма чисел в его концах.

а) Докажите что Р-структура графа округляема тогда и только тогда, когда вершины графа можно покрасить в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разного цвета (такой граф называется двудольным).

б) Докажите что Р-структура многогранника округляема тогда и только тогда, когда все грани многогранника имеют четное число вершин.

в) Добавим к округляемой Р-структуре графа сумму всех его элементов. Может ли при этом получиться не округляемая структура?

5. Г-структура многогранника. В вершинах многогранника выписаны числа, а на каждой грани — сумма чисел в ее вершинах.

Является ли Г-структура округляемой а) для тетраэдра; б) октаэдра в) куба г) n-угольной пирамиды без нижней грани?

д) Склеим из квадрата 4×4 тор с 16 гранями. Докажите, что его Г-структура не округляема.

6. Прямоугольные таблицы.

а) В прямоугольной таблице выписаны числа, а для каждой строки и столбца — их суммы. Докажите, что такая структура округляема.

б) Докажите, что если к суммам строк и столбцов таблицы добавить сумму всех ее элементов, структура останется округляемой.

в) В прямоугольной таблице $m \times n$ выписаны числа, а для каждого квадрата 2×2 — их суммы. Округляема ли структура?

г) В трехмерной прямоугольной таблице $l \times m \times n$ выписаны числа, а для каждого одномерного ряда $l \times 1 \times 1$, $1 \times m \times 1$ и $1 \times 1 \times n$ — их суммы. Округляема ли структура?

7. Двойственная структура. Пусть у нас есть некоторая структура S. Составим для каждой ее переменной список тех фиксированных подмножеств структуры, которым она принадлежит. Построим теперь новую, двойственную к S структуру: для каждого старого подмножества выпишем новую переменную, а каждой старой переменную — список новых переменных, соответствующий списку подмножеств.

Пример. Структуре $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_2 + x_3 + x_4$ соответствует двойственная структура $S_1 = y_1$, $S_2 = y_1 + y_2$, $S_3 = y_1 + y_2$, $S_4 = y_2$.

а) Покажите, что структуры пунктов 2г и 5г — двойственны.

б) Впишем по одной переменной в клетки квадрата $n \times n$, расположенные выше главной диагонали; выпишем суммы для каждого прямоугольника, чья правая верхняя клетка совпадает с правой верхней клеткой квадрата, а левая нижняя лежит на главной диагонали. Проверьте, что эта структура двойственна к структуре пункта 1б. Округляема ли она?

в) Покажите, что Р-структура двудольного графа двойственна подмножеству двумерной таблицы (пункт 6а).

г*) Покажите, что структура, двойственная к округляемой, тоже округляема.

8. Свобода первого округления. Пусть среди заданных значений переменных округляемой структуры выбрано одно не целое. Тогда можно округлить выбранное значение как с недостатком, так и с избытком — в обоих случаях округление структуры доводится до конца.

а) Проверьте принцип свободы первого округления для округляемых структур из предыдущих пунктов.

б*) верен ли этот принцип в общем случае?

Дополнительные пункты (после промежуточного финиша)

5. е) Докажите, что Г-структура любого выпуклого многогранника не округляема.

ж) Существует ли многогранник с округляемой Г-структурой?

9. Необходимое условие округляемости. Назовем нечетным циклом выписанные по кругу нечетное число (большее двух) переменных структуры, между любыми двумя соседними переменными вписано подмножество структуры, причем каждая переменная принадлежит только двум соседним с нею подмножествам из числа вписанных.

а) Докажите, что если структура округляема, то в ней нет нечетных циклов.

б*) Верно ли, что всякая структура без нечетных циклов округляема?

10. Матрица структуры и критерий округляемости.

Рассмотрим матрицу, чьи строки соответствуют суммам, а столбцы — переменным. Если переменная входит в сумму, то на пересечение соответствующей строки и столбца ставим 1, в остальные места — 0.

а) Необходимое условие. В матрице округляемой структуры все миноры по модулю не больше 1.

б) Докажите, что это условие является достаточным.

Примечание. Решение пункта 5ж авторам неизвестно.

Задачи заочного конкурса Турнира Городов

Не все могут принять участие в конференции Турнира Городов — это неминуемый недостаток любых мероприятий, на которые нужно съезжаться в одно место. Турнир Городов сам по себе возник во многом как реакция на недоступность Всесоюзной Олимпиады для многих сильных школьников из крупных математических центров. А теперь, когда появилась Летняя Конференция Турнира Городов, возник особый стиль ее задач и условий проведения, появилось желание сделать такие соревнования доступными для максимального числа желающих.

Предлагаем познакомиться с задачами заочного конкурса Турнира Городов. Он включает четыре задачи, каждая из которых состоит из большого количества пунктов. Конкурс проводится по каждой из предложенных задач в отдельности, оценивается максимальное продвижение в одной из задач. Решать задачи можно в одиночку или командой. Более подробно о конкурсе можно узнать по адресу:

121002, Москва, Б. Власьевский пер., 11, к. 211, «Турнир Городов»

1. Ну, погоди!

Предложена М. Антоновым

По аллеям зоопарка бегают Заяц и Волк.

По краям аллей густо растут деревья, поэтому Волк не видит Зайца, если тот находится на другой аллее. Цель Волка — поймать Зайца.

Требуется найти все такие отношения скоростей Зайца и Волка, при которых для Волка существует способ действий, гарантирующий поимку Зайца.

При этом есть две существенно разных постановки задачи.

Задача A: дело происходит днем, светло, поэтому Волк видит “до упора”, т. е. до конца аллеи.

Задача B: дело происходит ночью, темно, поэтому Волк видит на расстоянии не более $1/2$.

Предлагается исследовать обе эти задачи для зоопарков, аллеи которых образуют фигуры, перечисленные ниже.

1. Два равносторонних треугольника, имеющих общую сторону длины 1.

2. Два равносторонних треугольника со стороной 1, имеющих общую вершину и образующих вертикальные углы.

3. Равносторонний треугольник со стороной 1, в котором центр соединен с вершинами.

4. Равносторонний треугольник со стороной 1, в котором проведены медианы.

5. Равносторонний треугольник со стороной 2, в котором проведена средняя линия.

6. Равносторонний треугольник со стороной 2, в котором проведены две средних линии.

7. Единичный квадрат, в котором проведены диагонали.

8. Два единичных квадрата, имеющих общую вершину и образующих вертикальные углы.

9. Два правильных N-угольника, имеющих общую вершину и образующих вертикальные углы. Стороны N-угольников равны 1.

10. Правильный треугольник, разделенный, как предыдущие, на $N \times N$ правильных треугольников. Стороны всех маленьких треугольников равны 1.

а) Случай $N = 2$ (правильный треугольник, в котором проведены три средние линии, делящие его на 4 треугольника).

б) Случай $N = 3$ (правильный треугольник, в котором проведены три пары параллельных линий, делящих его на 9 треугольников).

в)* Общий случай.

Следующие фигуры являют собой прямоугольники, составленные из единичных квадратиков, указаны размеры этих прямоугольников.

11. 1×2.
12. $1 \times N$.
13. 2×2.
14. $2 \times N$.
15*. $M \times N$.

В следующих задачах зоопарк трехмерный, аллеи — ребра фигуры.

16. Тетраэдр, сторона равна 1.
17. Октаэдр, сторона равна 1.

Следующие фигуры являют собой параллелепипеды, составленные из единичных кубиков, указаны размеры параллелепипедов.

18. $1 \times 1 \times 1$.
19. $1 \times 1 \times N$.
20. $1 \times 2 \times N$.
21. $2 \times 2 \times N$.
22*. $K \times L \times M$.

2. Дыры и антидыры во вращаемых графах

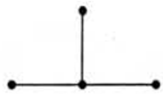
Предложена М. Вялым, В. Гурвичем, А. Кулаковым

Для начала объясним значение всех слов, входящих в название этой задачи.

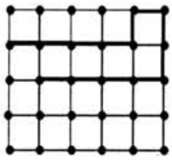
Граф — это *вершины* и соединяющие их *ребра*. Каждое ребро соединяет ровно две вершины, причем мы будем считать, что эти вершины разные. Будем также считать, что каждую пару вершин соединяет не более одного ребра.

Путем называется последовательность различных вершин графа, в которой соседние вершины связаны ребром. *Длина* пути равна числу входящих в него ребер.

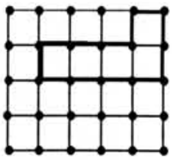
Циклом называется замкнутый путь (последняя и первая вершины в последовательности связаны ребром). Примеры:



Граф



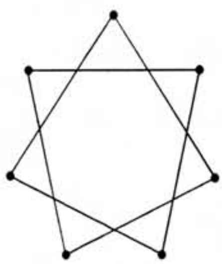
Путь в графе



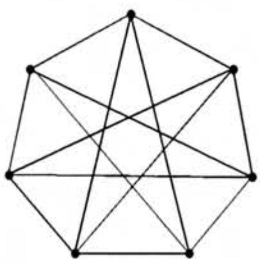
Цикл в графе

Дыра — это цикл нечетной длины 5 или больше, у которого нет "диагоналей". Это означает, что ребра графа связывают только последовательные вершины в этом цикле.

Дополнительным графом к некоторому графу G называется граф $\bar{G}$ с тем же множеством вершин и дополнительным множеством ребер, т е. в $\bar{G}$ ребра связывают те, и только те, вершины, которые не связаны ребром в исходном графе G. *Антидыра* — это дыра в дополнительном графе, т. е. граф, дополнительный к дыре.



Дыра на 7 вершинах



Антидыра на 7 вершинах

Осталось объяснить, какие графы называются *вращаемыми*. Представим, что вершины графа расположены в вершинах правильного многоугольника. Нарисуем все отрезки, соответствующие ребрам (они могут пересекаться, это нас не заботит). Если при поворотах, переводящих вершины многоугольника в вершины многоугольника, сохраняется множество соответствующих ребрам графа отрезков, то граф называется *вращаемым*. Если пометить какую-нибудь вершину графа числом 1, то все остальные вершины можно занумеровать числами от 2 до n, двигаясь против часовой стрелки по границе многоугольника. Эта нумерация будет использоваться в дальнейшем без дополнительных оговорок.

Чтобы проверить, что вы поняли определение, посмотрите еще раз на дыру и антидыру, нарисованные выше. Теперь в качестве упражнения докажите, что любая дыра и любая антидыра — вращаемые графы.

1. Придумайте удобный способ задания вращаемых графов.

Если занумеровать вершины графа, то ребра графа можно пометить парами чисел (номера концов ребра). Два графа называются *равными* или *изоморфными*, если можно так занумеровать их вершины, чтобы совпадали множества пар чисел, которыми помечены ребра этих графов.

Пара изоморфных графов (они оба изоморфны антидыре на 7 вершинах).

2. Составьте полный список без повторений всех вращаемых графов с а) 5; б) 7; в) 9 вершинами.

3. а) Докажите, что различных (с точностью до изоморфизма) вращаемых графов на 11 вершинах не больше 8 штук.

б) Докажите, что различных (с точностью до изоморфизма) вращаемых графов на 23 вершинах не больше 188.

в)* Сравните число различных (с точностью до изоморфизма) вращаемых графов на 25 вершинах с числом 500.

Основной вопрос данной задачи: какие вращаемые графы не содержат ни дыр, ни антидыр?

Исследование этого вопроса разумно начать с того, чтобы выяснить, в каких вращаемых графах вообще нет циклов нечетной длины.

4. Вращаемый граф не содержит циклов нечетной длины тогда и только тогда, когда общее число его вершин четно, а ребра соединяют вершины разной четности.

Граф называется *связным*, если в нем любая пара вершин соединена некоторым путем.

5. Докажите, что любой непустой (имеющий хоть одно ребро) вращаемый граф с простым числом вершин связен.

6. Придумайте критерий связности вращаемого графа в общем случае (т. е. число вершин — любое).

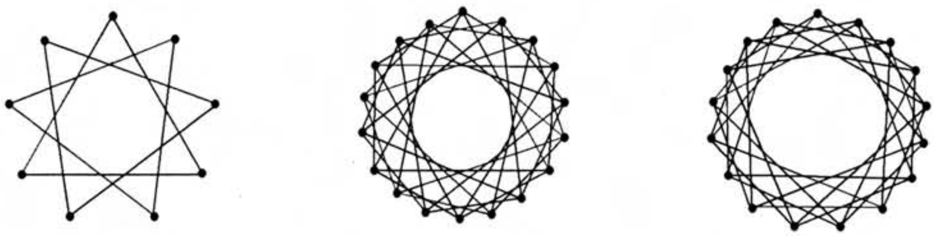
Введем еще несколько определений. *Пустой* граф не содержит никаких ребер, а в *полном* любая пара вершин связана ребром.

Наибольшее число попарно связанных ребрами вершин в графе называется кликовым числом (обозначение ω), а наибольшее количество попарно не связанных ребрами вершин в графе называется числом независимости (обозначение α).

7. Докажите, что для любого вращаемого графа на n вершинах выполнено неравенство $\alpha \cdot \omega \le n$.

Настало время понять, когда во вращаемом графе есть дыры или антидыры. При нечетном числе вершин дыры или антидыры, как правило, есть. Простой пример графов без дыр и антидыр — это пустой граф и полный граф.

8. Выберите из нарисованных ниже графов графы без дыр и антидыр. Аргументируйте ваш выбор.



Граф 1 Граф 2 Граф 3

9. Найдите бесконечное множество таких графов (вращаемых, с нечетным числом вершин, без дыр и антидыр, отличных от полного и пустого). Попробуйте построить как можно большее такое множество.

10.** Опишите все графы без дыр и антидыр с нечетным числом вершин.

Задача 10 очень трудная. Авторам кажется, что некоторую пользу при ее решении принесут следующие утверждения.

11*. Пусть n — число вершин во вращаемом графе. Если некоторое ребро соединяет вершины с номерами i и j (нумерация вершин определена выше!), то его длиной будем называть наименьшее из чисел $|j-i|$ и $n-|j-i|$.

Предположим, что в связном вращаемом графе с нечетным числом вершин нашлось ребро длины 1, а максимальная длина ребра равна d_{max}. Тогда если в этом графе нет дыр, то среди длин его ребер обязательно встретятся числа $d, d+1, 2d$, где $d = (n-1)/2 - d_{max}$.

12. а) Докажите, что если в связном вращаемом графе с нечетным числом вершин n нет дыр, то максимальная длина ребра в таком графе не меньше $(n-1)/3$.

б)* Попробуйте усилить оценку пункта а).

13*. Придумайте и докажите достаточные условия того, что вращаемый граф, отличный от полного или пустого, содержит дыру или антидыру. (Например, рассмотрите такое условие: “число вершин в графе простое”.)

3. Разбиения на равные части

Предложена А. Я. Беловым, С. В. Маркеловым

Выражение “фигура (тело) разбита (-о) на части” можно понимать по-разному. Во-первых, можно считать, что пересечение частей пусто (у них нет общих точек).

1. На плоскости дано (возможно, невыпуклое) множество A. Множество B есть результат некоторого движения множества A. Может ли так быть, что объединение A и B есть центрально-симметричное (возможно, невыпуклое) множество, содержащее свой центр симметрии, а пересечение множеств A и B пусто?

Во-вторых, можно допускать пересечения частей.

2. На плоскости дано множество A. Множество B есть результат некоторого движения множества A. Оказалось, что объединение A и B есть плоский прямоугольник (т. е. не ломаная, а контур вместе с внутренностью). Может ли при этом центр прямоугольника принадлежать A, но не принадлежать B?

В дальнейшем мы будем пользоваться в этой задаче естественным определением.

Определение. Фигура (тело) разбита (-о) на части, если объединение этих частей дает всю фигуру, а общие точки частей лежат на их границах.

Разбиения на 2 части центрально-симметричных фигур (тел)

Следующую задачу нужно исследовать во многих случаях.

Задача ЦС. Центрально-симметричное выпуклое тело (фигура) разбито на два конгруэнтных множества. Доказать, что его/её центр лежит на их границе.

При этом граница будет считаться состоящей из участков прямых и окружностей (плоскостей и сфер в пространственном случае). Для многогранников граница будет считаться состоящей из участков плоскости.

3. Несколько точек разбивают отрезок на два конгруэнтных множества (множество может состоять из нескольких кусков). Докажите, что одна из них — в его центре.

4. Круг разбит на 2 части. Доказать, что они переводятся друг в друга либо поворотом относительно центра круга, либо осевой симметрией. Что можно сказать о разбиении на 3 части?

5. Задача ЦС для квадрата.

6. Задача ЦС для правильного 6-угольника.

7. Решите задачу ЦС для 3-мерной (n-мерной) сферы, считая границу разбиения состоящей из участков плоскости.

8. Решите задачу ЦС для сферы.

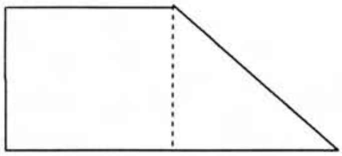
9. Решите задачу ЦС для куба.

10*. а) Решите задачу ЦС для плоских многоугольников.

б) для произвольных центрально-симметричных плоских фигур.

Разбиения на 2 равные части: общий случай

11. Можно ли фигуру, нарисованную ниже, разбить на две конгруэнтные части?



Объединение квадрата и прямоугольного равнобедренного треугольника по общей стороне (катету).

12. Четырехугольник таков, что его можно разбить на две равные части.

а) Доказать, что это можно сделать одним разрезом (здесь и далее — по прямой линии, как пишут в головоломках, одним разрубом).

б) Верно ли, что он имеет либо осевую, либо центральную симметрию?

13. Многоугольник можно разбить на 2 равные части. Верно ли, что это можно сделать одним разрезом?

14. Выпуклый многоугольник можно разбить на 2 равные части. Верно ли, что это можно сделать одним разрезом?

15. Выпуклый многоугольник можно разбить на 2 равные части, переводящиеся друг в друга движением первого рода (параллельным переносом или поворотом). Верно ли, что это можно сделать одним разрезом?

16. *Эта задача для тех, кто знаком с понятием алгоритма.*

Ниже приводится алгоритм проверки того, что данный многоугольник можно разбить на две равные части.

Алгоритм.

1° Составим множество *критических* точек. В это множество включим все вершины многоугольника и все середины его сторон.

2° Найдём самую короткую сторону многоугольника. Её длину обозначим a.

3° Из каждой критической точки проведем маленький отрезок длины $a/3$ вдоль контура многоугольника. Сделать это можно двумя способами (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Получаем множество *начальных ломаных.*

4° Каждую пару начальных ломаных продолжаем до пары *соответственных ломаных* (см. 5°–6°). Соответственные ломаные строятся так, чтобы они были равны (совмещались движением). Построение пары соответственных ломаных завершается постановкой диагноза (см. 7°–9°): можно ли разбить многоугольник на две равные части.

5° Пусть есть пара начальных ломаных A_1 и A_2. Двигаемся по контуру многоугольника в заданных начальными ломаными направлениях, проверяя при проходе каждой вершины, что полученные на данный момент ломаные равны. Это движение заканчивается одним из следующих событий:

– Ломаная A_1 достигла критической точки ломаной A_2, одновременно с этим ломаная A_2 дошла до критической точки ломаной A_1. Переходим к шагу 8°.

– Ломаная A_1 достигла критической точки ломаной A_2, а ломаная A_2 не дошла до критической точки ломаной A_1. Переходим к шагу 9°.

– Ломаная A_2, чтобы остаться равной ломаной A_1, должна выйти за пределы многоугольника (или наоборот — за пределы многоугольника должна выйти ломаная A_1). Переходим к шагу 9°.

– Ломаная A_2, чтобы остаться равной ломаной A_1, должна войти внутрь многоугольника (или наоборот — внутрь многоугольника должна войти ломаная A_1). Переходим к шагу 6° (в его описании мы считаем, что внутрь вошла ломаная A_2, второй случай описывается аналогично).

6° Продолжаем ломаную A_1 дальше по контуру, а ломаную A_2 — внутри (сохраняя равенство ломаных). Это движение заканчивается одним из следующих событий:

– Ломаная A_1 дошла до критической точки ломаной A_2. Переходим к шагу 9°.

– Ломаная A_2 вновь достигла контура. Это означает, что многоугольник разбит на две части. Осталось проверить их равенство. Переходим к шагу 7°.

7° Проверить, равны ли части, полученные на шаге 6°, можно, например, продолжая ломаную A_1 по контуру до критической точки ломаной A_2 и следя за продолжением ломаной A_2 (которое в оптимистичном варианте дойдет до критической точки ломаной A_1 по контуру). Ставим диагноз, после этого переходим к следующей паре начальных ломаных и возвращаемся к 5°.

8° Диагноз: “можно” (фигура либо центрально-симметрична, либо осесимметрична, в зависимости от того, шли мы в одну сторону по контуру, или в разные). Переходим к следующей паре начальных ломаных и возвращаемся к 5°.

9° Диагноз: “нельзя” (при данном выборе начальных ломаных). Переходим к следующей паре начальных ломаных и возвращаемся к 5°.

Исследуйте приведенный алгоритм:

а) убедитесь, что это действительно алгоритм — все шаги может выполнить компьютер и ни для какого входа (многоугольника) не произойдёт “зависание” (лучше всего, если Вы умеете программировать, написать программу для реального компьютера, реализующую этот алгоритм);

б) докажите, что всегда алгоритм находит разбиение многоугольника на две равные части, если оно есть;

в) докажите, если многоугольник не центрально-симметричный, то алгоритм находит все его разбиения на две равные части;

г) сколько действий нужно совершить в этом алгоритме в худшем случае для разбиения N-угольника на две равные части (или доказательства, что такого разбиения нет)?

17.** *Эта задача для тех, кто знаком с понятием алгоритма.*

Придумайте алгоритм, который проверяет, можно ли разбить заданный многоугольник на 2 подобные части.

18.** *Эта задача для тех, кто знаком с понятием алгоритма.*

Придумайте алгоритм, который проверяет, можно ли разбить заданный многогранник на 2 равные части.

Разбиения на большее количество частей

19. а) Приведите пример разбиения квадрата на 3 конгруэнтные части.

б) То же для 6-угольника.

в) Исследуйте разбиения круга на конгруэнтные части. Верно ли, что они переводятся друг в друга поворотами относительно центра окружности?

г)* Тот же вопрос для сферы.

д)* Тот же вопрос для шара.

20. Как устроено разбиение сферы на несколько частей?

а) Пускай их 1999. Верно ли, что они совмещаются друг с другом поворотами относительно некоторой оси?

б) Исследуйте разбиения сферы а) на 3; б) на 5 равных частей.

21.* Пусть многоугольник разбит на три равные части. Верно ли, что каждая из частей содержит точки границы исходного многоугольника?

22.** *Эта задача для тех, кто знаком с понятием алгоритма.*

Решите задачи, аналогичные задачам 16–18 для разбиений на 3 части.

4. Сверхсовершенные числа.

Предложена А. Г. Кулаковым

Хорошо известно следующее понятие:

Определение. Число n называется *совершенным*, если сумма всех его собственных делителей равна n.

Примером таких чисел являются 6, 28. Но известно про них мало.

1. (Евклид) Пусть $2^{n+1}-1$ – простое число. Докажите, что число $2^n(2^{n+1}-1)$ – совершенное.

2. (Эйлер) Докажите, что каждое четное совершенное число имеет евклидов вид, т.е. равно $2^n(2^{n+1}-1)$, где $2^{n+1}-1$ – простое число.

Про совершенные числа не известно даже, существуют ли нечетные совершенные числа. Мы, однако, не будем заниматься совершенными числами, а определим новое понятие:

Определение. Назовем натуральное число n *сверхсовершенным*, если сумма всех его делителей более, чем в 2 раза больше n (= сумма всех собственных делителей больше n).

3. Если число делится на сверхсовершенное, то оно тоже сверхсовершенное.

4. Приведите пример нечетного сверхсовершенного числа.

5. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k$ – различные числа и $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\ldots+\frac{1}{m_k} \geq 2$. Тогда число $n = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ – сверхсовершенно.

6. Докажите, что существует сколь угодно длинный отрезок натурального ряда, целиком состоящий из сверхсовершенных чисел.

7. Докажите, что среди первых 1998^3 натуральных чисел не менее 66-ти пар последовательных сверхсовершенных чисел.

Определение. Обозначим через $c(k,m)$ число отрезков натурального ряда, состоящих из k последовательных сверхсовершенных чисел, меньших m.

8. Оцените $c(1,m)$.

9. Оцените $c(2,m)$.

10. Оцените $c(3,m)$.

11. Оцените $c(k,m)$.

Как живет-умирает наша страна (окончание)

Опыт решения прикладной проблемы в рамках
учебного курса "Концепции современного естествознания"

Части II, III

Анализ потоков. Некоторые практические результаты

В. А. Дементьев, профессор Института Экономики и Предпринимательства

В первой части статьи ("Математическое образование" №1(4), 1998 г.), была введена полезная универсальная модель открытой неравновесной системы и показано, как можно использовать ее для анализа процессов, происходящих в живых организмах. Во второй и третьей частях статьи осуществляется анализ потоков, проходящих через некоторые открытые неравновесные системы, в том числе через нашу страну. В третьей части автор формулирует практические выводы и рекомендации, вытекающие из проведенного анализа. Приложение содержит определения некоторых используемых понятий термодинамики.

Наша планета Земля. Почему ее биосфера развивается?

Земля как небесное тело получает поток энергии от Солнца в форме света — высокоорганизованного потока теплового излучения. Это излучение исходит от поверхности Солнца при температуре $T_1 = 6000K$ и за единицу времени приносит на Землю тепловую энергию $\mathrm{d}Q$. Точно такую же по величине энергию $-\mathrm{d}Q$ Земля отдает в окружающее космическое пространство в форме инфракрасного излучения при температуре поверхности Земли $T_2 = 300K$. То есть полный поток энергии равен нулю. Если бы это было не так, то температура Земли постоянно изменялась бы. Но средняя температура Земли уже длительное геологическое время остается постоянной. Следовательно, энергия Земли постоянна, как и ее энтропия, поскольку не только температура, но и вообще состояние Земли в течение нашей геологической эпохи не меняется.

Теперь посмотрим, что происходит с энтропией проходящего через Землю теплового потока. С входящим потоком приходит энтропия $\mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}Q/T$. Такую энтропию получал бы космос от остывающего Солнца в отсутствие Земли. С уходящим потоком в космос уходит энтропия $\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}Q/T_2$. Следовательно, Земля, став на пути потока солнечного излучения, увеличивает скорость поступления энтропии в космос на величину

$$\sigma_l = \mathrm{d}S_2 - \mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}Q(1/T_2 - 1/T_1). \qquad (6)$$

Точно так же поступает с солнечным излучением любая другая планета Солнечной системы. Она не изменяет величины проходящего через нее в космос потока энергии, но ухудшает ее качество, делает ее менее ценной. Только из-за различных расстояний от Солнца и из-за различных радиусов планет величины $\mathrm{d}Q$ и T_2 в формуле (6) для всех планет будут различны. Для Земли $\sigma_l = 1\, Bm/м^2K$.

Мы подсчитали σ_l — внешнюю продукцию энтропии планетой. Конечно, любая планета характеризуется какой-то внутренней продукцией энтропии σ_l. На планете могут происходить процессы остывания ее ядра, выветривания горных пород, солнечные и “лунные” приливы в лито-, гидро- и атмосфере, грозы и другие геологические явления. В зависимости от интенсивности этих процессов для каждой из планет выполняется одно из условий (3) - (5). То есть любая планета могла бы воспользоваться условиями развития. А может находиться в совершенно бесполезном стационарном состоянии трансформатора качественной солнечной энергии в низкокачественную, рассеянную в космосе.

Отличие нашей уникальной планеты Земля от других планет Солнечной системы состоит в том, что Земля сумела воспользоваться условием развития (4) и затем перейти в нынешнее стационарное состояние. Развитие Земли состояло в появлении на ней биосферы и, вследствие жизнедеятельности растений, кислородосодержащей атмосферы (до появления биосферы атмосфера была восстановительной). Механизм развития Земли можно очень грубо описать следующим образом.

Поток $\mathrm{d}Q$ солнечной световой энергии на поверхности Земли встречается не с мертвым камнем, а с живым зеленым листом, который усваивает часть этого потока и запасает его в форме не менее качественной химической энергии таких веществ, которые оказываются полезными не только растению-хозяину листа, но и всему живому на Земле. Известно, что цепочка первичных процессов фотосинтеза заканчивается превращением квантов света, молекул углекислого газа и воды в молекулу сахара. А с сахаром дальше можно делать много полезного. Его можно затратить как источник энергии при синтезе белка, можно сжечь в печени теплокровного животного для выделения тепла, а можно превратить в полисахарид — целлюлозу и построить ствол могучего дерева. Древесина готова хранить солнечную энергию годами, а потом выделить ее в виде тепла, сгорая в топке. Или храниться тысячелетиями и донести до нас культуру древнего Египта. Или попасть в земную кору и превратиться в каменный уголь или нефть. Человек через миллионы лет может воспользоваться этой энергией, превратив ее в тепло. И только тогда она уйдет в космос в виде уже бесполезного рассеянного излучения с высокой энтропией. Но пока Земля запасает качественную энергию пойманного света, на ней могут происходить процессы созидания, сопровождаемые самопроизвольными деструктивными процессами, как и полагается любому живому организму. Земля будет оставаться живой и, возможно, развивающейся, пока скорость внутренней продукции энтропии на планете из-за протекания деструктивных процессов не превзойдет указанной величины $\sigma_l = 1\, Bm/м^2K$.

Первые практические результаты

Биосфера Земли не может развиваться беспредельно и превратиться в один сплошной райский сад, как хотелось бы нам или выдающимся религиозным мыслителям. Даже если мы попытаемся усовершенствовать состав этого рая. Уберем из биосферы менее благородные царства — животных и грибов. Эти царства не способны самостоятельно ловить и запасать солнечную энергию. Они пользуются растениями как пищей, следовательно, портят их ради своего существования и тем самым вносят свой прямой вклад в продукцию энтропии на Земле. Если животных станет слишком много, то их продукция энтропии может превзойти предельно возможную величину $1 Bm/м^2\, K$, и никакое развитие не будет возможно. Оставим одно лишь царство растений. Это самые благородные из живых организмов. Пусть себе ловят солнечный свет и тратят его энергию на то, чтобы из простейших молекул воды и углекислоты, а также из примитивных минеральных веществ строить свои величественные стволы и кроны. И пусть вся Земля покроется сплошной кудрявой зеленью.

Казалось бы, возможная вещь, тем более, что в долине Амазонки уже есть действующая модель такого райского сада — многоярусные тропические леса, очень эффективно улавливающие солнечный свет и выделяющие массу кислорода. Говорят, что это — легкие планеты. Имеется и художественная модель такого царства. Маленький Принц, знакомясь с различными планетами, обнаружил такую, где жил один огромный баобаб размером во всю планету.

Но так кажется только на первый взгляд. Каждое растение — это живой организм, то есть открытая неравновесная система. Через него проходят различные потоки. Мы до сих пор увидели только поток энергии, и нам показалось, что растение занимается только запасанием энергии из этого потока. Но мы не доглядели, что через растение проходит мощный поток различных веществ. Часть этих потоков приводит к накоплению простых веществ растением и к построению сложного тела растения. Но значительно бо́льшая масса вещества представляет собой просто поток воды, собираемой растением из почвы и интенсивно разбрасываемой в атмосферу в виде водяного пара. На это затрачивается заметная доля проходящего через растение потока энергии. Следовательно, растение вынуждено часть поглощаемой энергии обесценивать и только часть запасать в форме ценной химической энергии. Уже это дает энтропийную нагрузку на окружающий мир. Самая значительная часть внешней продукции энтропии связана с испарением воды из почвы через листья. Вода была сконцентрирована в жидком виде в почве, а выбрасывается в атмосферу в виде газа. Это дает огромный рост энтропии. И это совсем не безобидно в геологическом измерении. Тропические леса выбрасывают не только нужный всем кислород, но огромные массы влаги, которая обрушивается с тропическими ливнями и ураганами на те же самые леса, приводя к их гибели. Так что предположение о возможности сплошного растительного рая на планете — утопия.

Биосфера недаром включает в себя различные царства — растений, животных, грибов и сине-зеленых водорослей. Животные и грибы поедают часть растительной массы, задерживая на некоторое время овеществленную солнечную энергию в трофических цепочках. Это уменьшает скорость продукции энтропии и тем самым позволяет перераспределить общую продукцию между различными царствами.

Некоторые выдающиеся мыслители убеждены, что как только деятельность человечества направится в разумное русло, как только человек перестанет быть разрушителем и завоевателем, так сразу появятся условия для безграничного развития цивилизации. Развивать цивилизацию можно, но не безгранично. Человечество не может по своему произволу ни увеличить свою численность, ни усовершенствовать условия своего проживания на планете. Предел наступит тогда, когда вклад цивилизации в суммарную продукцию энтропии на планете превзойдет допустимую величину. Мы знаем, что допустимая величина всей продукции энтропии — это 1 $Вт/м^2 K$. Много ли это?

Учтем, что средняя температура поверхности Земли $300\,K$. Значит, с одного квадратного метра планеты может без опасности для ее стационарного существования выделяться не более $300\,Вт$. Это мощность слабенькой электроплитки. Но мы не можем позволить себе на каждом квадратном метре планеты включить по электроплитке или по два компьютера. Надо учесть, что на той же поверхности непрерывно выделяют энергию геологические процессы и наши соседи по биосфере. Вернадский подсчитал, что весь живой мир Земли высвобождает и рассеивает столько же энергии, сколько и все геологические процессы, а человек силой своего разума уже научился высвобождать и рассеивать столько же энергии, сколько и все остальные живые составляющие биосферы. Значит, по самой грубой оценке, на нашу долю может приходиться не более 100 $Вт/м^2$. Вот и все наши возможности. Нам остается выбирать — размножиться настолько, чтобы просто живя и питаясь, но не пользуясь удобствами, выделять эти 100 $Вт/м^2$, либо придержать рост нашей численности и позволить структурам нашей цивилизации поделить с нами эти 100 $Вт/м^2$.

Ясно, что человечество уже пошло по другому пути. Оно потеснило своих соседей по биосфере, уменьшив площади лесов и сократив численность популяций животных. Действительно, так можно отыграть для себя более значительную долю в рассеиваемых в космос 300 $Вт/м^2$. Но просто перераспределить эту долю между нами и остальной живностью и растительностью не получается, поскольку с наступлением на биосферу связан запуск дополнительных разрушительных геологических процессов, что уменьшает нашу возможную долю в общей продукции энтропии. Сошлемся на исторические примеры.

В конце прошлого века интенсивность производства сельхозпродуктов в США стала настолько большой, что на этом континенте возникло новое геологическое явление — массовая эрозия почвы. Благодатные почвы Северной Америки стали просто уноситься ветрами. И если бы вся нация не стала искать выход из этой проблемы, то получились бы американцы минус унесенные ветром продукты питания. Пришлось бы американцам закупать зерно у России.

Бывает, что неразумная деятельность человека на земле не подавляет живность, а стимулирует. Но ничего хорошего опять не получается. В Библии можно прочесть историю о египетских казнях, одна из которых — тучи саранчи, уничтожившей все зеленое в Египте. Современная энтомология установила, что в девственной природе саранча не дает гигантских генераций. Такие генерации инициированы неудачными технологиями возделывания земель.

Хотя бы из этих исторических примеров видна жизненно важная роль науки и ее место в цивилизации. В США были мобилизованы силы всей нации, чтобы решить, кто виноват и что делать. Наука выяснила, кто виноват, и подсказала политикам, что делать. В нынешнем веке сельское хозяйство США стало еще более интенсивным, а почвы не летят и не уплывают. Уплывали из Америки в СССР, а теперь плывут и в Россию сухогрузы с зерном и с несъедобными для американцев куриными окорочками.

С катастрофическими набегами саранчи теперь стало ясно — кто виноват. Но ученые пока не смогли втолковать политикам отсталых африканских и азиатских стран, что делать. Поэтому развитым странам пока приходится решать более простую задачу — спасать социалистическую Эфиопию от голода.

Простая задача: почему выживают закрытые страны

Теперь мы можем вернуться к вопросу - что происходит со страной, наглухо отгороженной от других стран. Ясно, что Железный занавес отсекает многие потоки, которые в норме могли бы проходить через такую страну. Ясно, что ничего хорошего для страны это не дает. Известно, что Япония несколько веков выражала свою признательность инициатору полной изоляции страны, предложившему закрыть все морские порты как для входа, так и для выхода. Но известно и отставание Японии от Европы и Америки, которое было ликвидировано только с переходом страны к режиму полной торговой и частичной культурной открытости. Известно отставание в развитии Венгрии, которая в раннем средневековье была заблокирована в своих границах соседями, чтобы прекратить разбойные экспедиции венгерских бояр. Во что превратилась наша страна за Железным занавесом, мы хорошо знаем. Весь мир сейчас выпускает компьютеры, ибо на дворе век информатики, а наша страна не может выпустить ни одного компьютера собственной разработки. Жители нашей страны вынуждены организовать поток компьютеров и комплектующих из других стран. Это делается, в том числе, и для чиновников, которые думают, что управляют нашей страной. Чиновники тоже хотят выглядеть современными людьми, сидящими за компьютерами.

Однако ни одна из упомянутых стран не погибла окончательно, хотя времени для продвижения к гибели им было предоставлено историей достаточно. Мы уже говорили, что дело здесь в неполной изоляции страны даже с наглухо закрытыми границами. Над страной имеется огромный порт — небо, через которое приходит и уходит поток энергии, позволяя стране выбрасывать вовне продукцию энтропии средней мощностью в 300 Bm на каждый квадратный метр своей площади. Для большой страны это очень большая величина. Следовательно, страна имеет возможность, как и вся биосфера планеты, задерживать на время этот поток энергии, преобразовывать его в удобную для использования форму, а затем выбрасывать его за пределы страны в форме обесцененной тепловой энергии. В частности, одна из важнейших форм запасения энергии, пусть на короткое время, — это химическая энергия, содержащаяся в плодах и семенах растений. Люди и животные в процессе эволюции приспособились пропускать через себя плоды и семена растений, портить их и тем самым поддерживать хотя бы в стационарном состоянии свои организмы, а при избытке плодов и семян — даже размножаться и развиваться. Вот потому-то небо как порт является главным в жизни крупной страны. Тогда ее не смогут погубить ни свои правители, решившие закрыть страну на замок, ни внешние, организовавшие блокаду страны.

У ней - особенная стать

Правителям нашей страны удалось проделать уникальную операцию, не имеющую аналогов в мировой истории. В результате серии управляющих воздействий им удалось превратить небо над страной в почти бесполезную дырку. Конечно, у правителей было маловато силенок, чтобы заткнуть и этот порт, поэтому они направили свои управляющие воздействия на крестьян, которые соглашались тратить свои жизни в помощь Солнцу и растениям на нашей земле. Совместное предприятие "Солнце-Сибирь Инкорпорейтед" перед Первой мировой войной давало стране прибыли от продажи сливочного масла больше, чем от добычи сибирского золота. Работники этого предприятия трудились в нормальном режиме, не надрываясь, что позволяло им между делом в качестве хобби заниматься пчеловодством и бортничеством. В результате страна была в тот же период времени монопольным поставщиком свечного воска в Европу.

После же Первой мировой войны правители нашли способы так подействовать на работников этого и других аналогичных предприятий, что тем постепенно расхотелось помогать растениям производить в избытке плоды и семена, годные в пищу людям и животным. Вместо избытка стали случаться недостатки, ставшие потом хроническими. Пришлось правителям приоткрывать порты в границах, чтобы через них в страну пошел поток зерна для людей и животных, а из страны — поток сибирского золота. К 1990 году поток сибирского золота из запасов страны иссяк, а поток зерна от совместного предприятия Солнце-Оклахома Инкорпорейтед самопроизвольно в страну идти не желал.

Прекращение этого потока превращало страну в такую открытую неравновесную систему, которая уже никак не похожа на живой организм, а скорее на те безжизненные планеты Солнечной системы, где Солнце светит, греет, но ничем помочь не может.

В этот момент правители мудро решили, что пора разбегаться. Конечно, прихватив кое-что с собой. Что-то не громоздкое. Уступив не престижное место другим правителям. Оставив им все громоздкое, но совершенно не нужное новым правителям. Армию, которую нужно кормить. Тяжелое и среднее машиностроение, которое вооружало армию и которое нужно кормить. Науку, которая учила среднее машиностроение, как вооружать армию и которую (науку) тоже нужно кормить. Высшую школу, которая готовила ученых и которую (школу) тоже нужно кормить. И так далее, до конца цепочки, до воспитательницы детского сада и до мамы малыша, посещающего детский сад. Их всех, естественно, надо кормить. Новым правителям старые не оставили единственной громоздкой структуры, но приятной тем, что ее не надо кормить. Которая сама могла бы прокормить всю цепочку, если бы имела возможность кланяться земле и Солнцу. Но такой возможности уже не было, поскольку самой структуры в природе этой страны не осталось. Крестьянство было ликвидировано как класс.

На это небывалое в истории супер-преступление наших бывших правителей, как ушедших на заслуженный отдых, так и разбежавшихся, как-то никто не обратил внимания. Подвесили за шею бронзового Феликса и тем ограничились. Мировая общественность тоже не возбудилась учинить супер-Нюрнберг. Что уж говорить о разных мелких грешках? А грешат не только старые, но и новые. Вот один из грехов.

Каждая страна вольна воспользоваться по-разному благостным потоком солнечного света и построить с его помощью что-то для себя ценное. Если считать такой ценностью ширпотреб или еду, то такого можно настроить очень много. Но если строить нечто уникальное по своей сложности, то придется кропотливо собирать уникальные строительные материалы и монтировать из них уникальные структуры, а обычные материалы превратить в отходы, в мусор. На языке теории открытых неравновесных систем создание уникальной по сложности и по низкой удельной энтропии подсистемы может произойти как бы само по себе, но при этом окружение, то есть вся система должна расплатиться за это накоплением высокой энтропии. Чтобы при этом не погибнуть, система должна позаботиться об удалении лишней энтропии во внешний мир. Так как в случае страны ее внешняя продукция энтропии строго ограничена, ясно, что никакая страна не может позволить себе производить уникальные сложные продукты в очень большом количестве. И уж во всяком случае не может позволить себе роскошь выбрасывать вон такие уникальные продукты. Мало того, что это глупо, но ведь мусор при этом остается в стране!

В нашей стране как бы сами по себе появляются уникальные продукты. Это ученые и музыканты. Такие, что на все времена. Но в 1922 году правители посадили на пароход и выкинули из страны два десятка ученых и мыслителей во главе с Бердяевым. А для других создали такие условия, что они эмигрировали сами. Нынешние правители создают такие условия в стране, что нормально работать ни ученый, ни большой музыкант или артист балета не может. Набравшись у страны сложнейших умений, он едет во внешний мир, а в стране остается мусор.

Проанализируем некоторые потоки, проходящие через нашу страну

Когда мы поймем, какие потоки полезны для страны, а какие вредны, нам будет легче понять, какое место имеет смысл занять нам в нашей стране, живущей, как ни крути, по-новому. Анализировать потоки — дело не простое, особенно если это делать на профессиональном специализированном уровне. Гидротехники делают это не так, как энергетики, а экономисты — уж совсем по-своему. Но и цели у них у всех разные. У нас цель особая — определить не конкретные параметры потоков, а только их пользу или вред для страны. Для этого можно воспользоваться введенным понятием скорости продукции энтропии. Тем более, что в термодинамике открытых неравновесных систем уже найдена формула, связывающая скорость продукции энтропии с потоками. Для одного потока J имеет место формула

$$\sigma = JX, \tag{7}$$

где X — обобщенная сила, вызывающая данный поток. Поясним формулу (7) на примере знакомого процесса теплопередачи. Когда в системе температура в одной точке T_1, а в другой точке T_2, то от точки 1 к точке 2 идет поток тепла $J = dQ/dt$. Мы знаем, что с передачей порции тепла dQ энтропия системы возрастает на величину $d\sigma = dQ(1/T_2 - 1/T_1) = dQ(T_1 - T_2)/T_1T_2$. Происходит это возрастание со скоростью $d\sigma/dt = dQ/dt(1/T_2 - 1/T_1)$. Сравнивая с (7), видим, что в данном случае обобщенная сила X, вызывающая поток тепла — это разность температур в двух точках системы.

Можно также подробно рассмотреть и другие процессы, и мы убедимся, что во всех случаях самопроизвольных необратимых процессов имеет место формула (7). Электрический ток выделяет тепло и тем самым увеличивает энтропию системы, по которой он протекает. Скорость продукции энтропии пропрциональна тепловой мощности $N = JU$ и обратно пропрциональна температуре. Ток J — это поток зарядов, а напряжение U — это обобщенная сила. В случае диффузии поток J — это поток вещества, а разность концентраций — это обобщенная сила.

Если через систему одновременно проходит несколько потоков, то каждый из потоков вносит свой вклад в продукцию энтропии по формуле

$$\sigma = \Sigma J_i X_i, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем потокам и их обобщенным силам.

Формула (8) не так проста, как кажется. Конечно, все потоки могут быть совершенно независимыми друг от друга. Тогда их вклады в σ просто механически суммируются. Каждый такой поток дает положительный прирост энтропии в соответствии со вторым началом термодинамики. Но отдельные потоки в системе могут быть и связаны друг с другом, действовать друг на друга. Такие потоки называют *сопряженными.* В случае сопряжения некоторые потоки могут давать отрицательный вклад в σ. Поясним это простым, но реалистичным примером.

Возьмем прямоугольный сосуд с газом. Пусть в качестве газа взяли какое-то летучее соединение урана. Будем нагревать одну стенку сосуда и охлаждать противоположную стенку. Естественно, в газе установится поток тепла $J_q = dQ/dt$ от горячей стенки к холодной. Поток J_q будет тем больше, чем больше вызывающая его обобщенная сила X_q — разность температур на стенках. С этим потоком будет связана положительная продукция энтропии σ_q, выбрасываемой наружу. Ничего интересного с этим потоком не связано. Но мы обнаружим, что чуть более легкие молекулы газа, содержащие U^{235}, собираются преимущественно у холодной стенки, а чуть более тяжелые молекулы газа, содержащие U^{238}, собираются преимущественно у горячей стенки. У холодной стенки в сосуд можно ввести заборную трубку и отсасывать соединение урана, обогащенное изотопом U^{235}, способным давать цепную ядерную реакцию деления. В любое другое место сосуда можно через трубку подавать газ, содержащий естественную смесь изотопов U^{238} и U^{235}. Получается промышленная установка для разделения изотопов с помощью процесса, называемого *термодиффузией.*

Обратим внимание на то, что в газе самопроизвольно устанавливается поток вещества: легкие молекулы с U^{235} сами текут из общей массы газа к холодной стенке. Но самое интересное, что они текут туда, где их концентрация больше, чем в среднем в газе. Нормальный процесс диффузии — это самопроизвольное движение примесных молекул оттуда, где их концентрация больше, туда, где их концентрация меньше. Разность концентраций — это обобщенная сила X_d, вызывающая поток диффундирующего вещества J_d. В случае термодиффузии также имеется обобщенная сила X_d, но поток J_d направлен в противоположную сторону, то есть имеет отрицательный знак. Значит, и продукция энтропии σ_d, связанная с аномальной диффузией в составе термодиффузии, также отрицательна. Что это значит? Раз идет поток отрицательной энтропии, значит происходит не порча, не разрушение чего-то, а наоборот, улучшение, построение какой-то новой полезной вещи. Это именно так, ибо в природе уран представлял собой смесь изотопов, а мы заставили газ разделяться и получаем более ценное вещество с повышенным содержанием U^{235}. Его практическая ценность проявится, когда этот уран станет делиться в ядерном реакторе и давать нужную нам электроэнергию. Или, на худой конец, взорвётся в атомной бомбе. До сих пор существуют некоторые правители, полагающие, что было бы полезно взорвать атомную бомбу. А природный уран сам по себе для них совершенно бесполезен.

Распишем формулу (8) для данного частного случая

$$\sigma = \sigma_q + \sigma_d = J_q X_q + J_d X_d. \tag{9}$$

Пусть наша установка для разделения изотопов работает сама по себе в стационарном режиме. Тогда $\sigma > 0$. Но мы показали, что $\sigma_d < 0$. Следовательно, $\sigma_q > |\sigma_d|$. Отсюда следует ряд важных выводов, имеющих общий характер для всех живых организмов, а не только для нашей примитивной установки.

1. Живой организм способен не только нагружать окружающий мир продукцией энтропии, но и выносить вовне что-то полезное, обладающее сравнительно низкой энтропией. Однако снижение энтропии в одной части окружающего мира должно с избытком перекрываться ростом энтропии других частей внешнего мира. В целом вреда от любого живого организма (в форме дезорганизации окружения) больше, чем пользы.

2. Живой организм работает самопроизвольно только потому, что некий внешний источник энергии побуждает проходить через этот организм тот главный поток, который и обеспечивает преобладающий рост энтропии во внешнем мире.

В разобранном примере с установкой разделения изотопов польза состоит в получении чуть-чуть обогащенного урана. Делается это с очень малой скоростью, коэффициент полезного действия установки хуже, чем у паровоза. А тепловой поток через установку бывает заметный, и всё это уже бесполезное тепло выбрасывается вон, создавая неприятную нагрузку на нашу атмосферу. Это в пояснение первого вывода. А со вторым выводом будет еще печальней. Когда мы обсуждали схему установки, мы просто сказали, что стенки сосуда находятся при разных температурах. Но откуда взялась разность температур? В реальной действительности следует наряду с установкой увидеть и электростанцию, к которой подключен нагреватель, создающий высокую температуру на одной из стенок сосуда. Вот и источник энергии, благодаря которому и возникает главный — тепловой — поток через установку. Ясно, что электростанция сама по себе интенсивно портит окружающий мир. Так что, еще надо подумать, стоит ли разделять изотопы урана, чтобы получить ядерное горючее для атомной электростанции. Не обойдется ли нам дешевая энергия слишком дорого?

Можно привести множество примеров, подтверждающих справедливость выводов 1 и 2. Перечислим лишь некоторые из них.

Домна сама по себе выдает нам поток чугуна, то есть почти чистого железа (с примесью 6% углерода). Но это возможно лишь потому, что через домну проходит мощный поток различных веществ, в том числе и носителей энергии, чтобы породить горы шлака. Да надо еще вспомнить, что все эти вещества добывались в горных выработках и доставлялись к домне по железной дороге. Да еще полезно подумать, что лет через двести добытый чугун обязательно превратится в ржавчину, то есть снова в железную руду. Так сработает окислительная атмосфера Земли, созданная благородными тропическими лесами.

Любая животная или растительная клетка втягивает в себя через мембрану те вещества, которые в ней уже и так имеются в достатке, а выдает наружу такие вещества, каких снаружи и так уже много. То есть клетка организует "противоестественные" потоки веществ и тем самым строит свою собственную высокоорганизованную структуру, а естественный процесс диффузии стремится навести равенство концентраций этих веществ. Тем не менее, этот процесс проходит сам по себе благодаря питанию клетки: через клетку проходят потоки сопряженных химических реакций, в которых расходуются высоко энергичные химические вещества, подобные сахару. Ну а весь животный или растительный организм состоит из множества клеток. И он должен организовать на уровне всего организма тот же самый процесс питания, который потом раздробится до клеточного уровня. И даже растения, как мы выяснили, что-то портят, когда строят свои сложные структуры. А что уж говорить о животных!

Любой вуз занимается тем, что прокачивает через себя поток молодых людей. На выходе каждый элемент этого потока становится старше и, как покажется Онегину, хуже. Но одна характеристика этого элемента становится существенно лучше. В целом этот поток выносит вовне резко уменьшившуюся энтропию в форме четко оформленной образованности. Возможно это только потому, что через вуз прокачиваются и другие потоки в форме материальных и иных ценностей, которые портятся и выбрасываются на свалку. На обсуждение материальных затрат не стоит тратить и времени. Однако есть один поток, роль которого стоит обсудить. Это поток преподавателей. Вузы и в целом различные системы образования заметно отличаются друг от друга тем, как они обходятся с этим потоком. В некоторых вузах, системах, странах этот поток на выходе настолько портится, что его элементы выходят из дверей вуза исключительно ногами вперед, т.е. профессор преподаёт, преподаёт, да и помрёт. А в других вузах, системах, странах этот поток на выходе заметно улучшается. На входе это вчерашний студент, затем молодой учёный, затем учёный с мировым именем, а там глядь — он уже покинул вуз и служит в крупной фирме, которая приписала к его зарплате ноль справа. Ясно, что вторая система образования существенно дороже обходится своей стране. Для того чтобы на выходе вуза постоянно были два разных высокоценных потока, необходимо прокачивать через вуз и перепортить в много крат больше ценностей, отнятых у страны. Но есть страны, где живут такие идиоты, которые на это почему-то идут. Насколько же умнее поступают в уже упомянутых вузах, где экономят огромные народные средства, тратя их в пользу одного лишь потока выпускаемых специалистов. Правда, есть некоторые сомнения, какой вклад в качество такого специалиста может дать профессор за день-два до собственного выхода из такого вуза.

Снова практические результаты: что делать нашим новым правителям?

Лучше всего, как мы только что поняли, им бы ничего не делать. Они уже сделали главное — открыли границы. И сами по себе пошли процессы, которые не позволят нашей стране превратиться в клочок безжизненной планеты. И могли бы еще раз разбежаться, никто бы от этого не пострадал. Однако им кажется, что они управляют всеми процессами в стране, и разбегаться не хотят.

Например, им кажется, что они поддерживают жизнедеятельность такой открытой неравновесной системы, как армия. Но они не понимают, что армия способна поддерживать свое стационарное состояние только тогда, когда она, даже ничего не делая, портит огромные потоки высококачественных продуктов - зерна, мяса, нефтепродуктов, электроэнергии, компьютеров, взрывчатки, цветных металлов и прочего. Все это надо быстро-быстро превращать в мусор в соответствии с условием (3). У правителей нет сил впрыскивать в армию эти потоки с нужной интенсивностью и с такой же интенсивностью отгребать мусор. И армия сама превращается в мусор в полном соответствии с условием (4).

Тем не менее, правители всех уровней мельтешат с усилиями поддержать армию в состоянии постоянной реанимации. Для этого надо впрыскивать в армию, наряду с перечисленными потоками, и главный поток — молодых людей, а на выходе убирать их в испорченном виде. Поэтому самопроизвольно возникает поток таких мальчиков, которые не хотят, чтобы их испортили. Поток этот утекает в тень или за границу, как в случае с пианистом Кисиным. Если бы правители не мельтешили, Кисин, возможно, не ударялся на пять лет в бега. Так что скажем еще раз, что правителям лучше бы ничего не делать.

Впрочем, на основе проведенного анализа можно усмотреть то поприще, на котором наши нынешние правители оказались бы полезными для страны. Идея состоит в том, что строить новое и сложное всегда трудно в силу указанных ранее причин, а разрушать в силу тех же самых причин значительно легче. Любая сложная природная или рукотворная структура, если ее предоставить самой себе, через некоторое время обязательно разрушится. Но если ей помогать разрушаться, то процесс разрушения этой структуры может пройти значительно быстрее. Например, динамичные капиталисты строят себе небоскреб в течение года. А когда небоскреб выработал свой ресурс, и его надо убрать, чтобы на его месте построить новый, то бывает достаточно испортить несколько килограммов тротила. И уходит на превращение небоскреба в кучу строительного мусор несколько секунд.

Так вот, усвоив эту простую идею, правители, стоящие у пульта управления страной, могли бы сосредоточить усилия не на попытках построить что-то новое, что должно возникнуть в огромной стране само по себе и даже вопреки их усилиям. Пусть бы они сосредоточили усилия на разрушении тех структур, которые мешают процессам самоорганизации страны. С их капитанского мостика им должно быть видно лучше, чем нам, какие структуры мешают сейчас стране. И наша новейшая история показала, что это вполне возможно. Именно с капитанского мостика поступила команда перестать ежедневно чинить Железный занавес. Он рухнул сразу, и народ тут же сам по себе включился в процессы мировой торговли ради спасения живота. Прозвучало бы еще несколько таких команд, и страна сама по себе устремилась бы к какой-то своей норме.

К сожалению, это совершенно утопическая идея. Дело в том, что за годы Советской власти непомерными усилиями всей страны и ценой ее саморазрушения создана уникальная система управления страной, всеми процессами в ней. С падением Железного занавеса эта система не упала, она тщательно поддерживается в рабочем состоянии. Этим как раз и заняты наши правители. И раз народ перестал пестовать эту систему, интуитивно понимая, что как раз она и является ему помехой, то ее жизнеспособность поддерживать все трудней и трудней. Для этого нужно рекрутировать и занимать все больше и больше правителей. Отсюда и происходят одиннадцать наших первых и вторых вице-премьеров. Завтра их станет больше. И никто из них не сможет заняться самоуничтожением, не даст команду демонтажа нынешней бездействующей системы управления страной. Нам остается наблюдать, как естественные процессы в стране постепенно размывают эту естественно отмирающую структуру.

Приложение. Определение энтропии.

В данной работе анализ процессов в нашей стране основан на свойствах энтропии и на связи продукции энтропии с различными потоками. Для того, чтобы читатель смог более объективно судить о качестве проведенного анализа, мы здесь приведем более строгое и подробное определение энтропии. Возможно, это поможет читателю судить о правомочности (или неправомочности) аналогий между процессами в термодинамической системе и в большой стране.

Термодинамической системой называется макроскопическая часть материального мира, отделенная от окружения чёткой границей. Макроскопичность системы означает, что её состояние регистрируется как совокупность показаний грубых приборов, каждый из которых сам по себе представляет макроскопический природный или техногенный объект. Такими приборами являются термометр, манометр, весы, рулетка. Показания таких приборов дают нам информацию о параметрах системы. Через параметры системы мы можем вычислить функции состояния системы. Если в банке заключена масса m двухатомного газа с молекулярной массой μ при абсолютной температуре T, то энергия — функция состояния газа — вычисляется по формуле

$$E = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}RT.$$

Различают вырожденные и невырожденные состояния. Если состояние с данной энергией можно реализовать многими различными способами, то такое состояние называют вырожденным.

Микроскопический взгляд дает оценку степени вырожденности газа. Мы верим, что газ в банке состоит из огромного числа молекул, обладающих присущей им внутренней способностью хаотически двигаться. Молекулы непрерывно обмениваются местоположениями и скоростями. Поэтому данное макроскопическое состояние газа реализуется огромным числом различных микроскопических состояний. Если мы подсчитаем число таких различных микроскопических состояний, то мы и получим степень вырожденности W данного макроскопического состояния с энергией E.

Число W можно подсчитать с помощью приёмов комбинаторики. Для этого надо разбить пространство, занятое системой, на элементарные ячейки $dxdydz$, после чего подсчитать, сколькими способами можно разместить частицы системы по этим ячейкам. Аналогичную операцию необходимо провести со скоростями частиц, разбив пространство скоростей на элементарные ячейки $dv_x dv_y dv_z$. Число способов размещения частиц в таком шестимерном фазовом пространстве дает степень вырожденности W системы.

Энтропией системы называется функция, определяемая по формуле

$$\sigma = klnW,$$

где k — постоянная Больцмана.

Может создаться впечатление, что такой способ подсчёта энтропии неоднозначен, поскольку пространство декартовых координат и пространство скоростей можно разбивать на ячейки различными способами. В классической физике, действительно, не было нужного критерия. Только в квантовой механике выяснилось, что имеется предел, до которого можно мельчить элементарные ячейки в фазовом пространстве. Этот предел кладёт соотношение неопределенностей Гайзенберга

$$dxdv_x = ih,$$

где h — постоянная Планка.

Таким образом, выбирая элементарную ячейку минимального объема в фазовом пространстве и зная фазовый объем, занимаемый системой, можно подсчитать число ячеек в системе. В каждую такую ячейку может поместиться не более одной частицы. Зная число частиц в системе и распределение их по скоростям, можно

Содержание журнала “Математическое образование” за 1997 – 1998 годы

N 1, апрель – июнь 1997 г.

N 2, июль – сентябрь 1997 г.

N 3, октябрь – декабрь 1997 г.

приемами комбинаторики однозначно подсчитать степень вырожденности W системы. Тем самым однозначно определяется энтропия системы.

Другой способ подсчёта энтропии связан с представлениями о вероятностном поведении частиц в системе. Пусть известна функция распределения частиц системы по энергиям $w_i(E)$. Тогда

$$\sigma = -\sum_i w_i ln w_i.$$

Более подробно ознакомиться с понятием энтропии и связью энтропии с другими функциями состояния термодинамической системы можно в различных курсах термодинамики и статистической физики, например, в курсе Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц “Статистическая физика”.

N 1(4), январь – март 1998 г.

N 2(5), апрель – июнь 1998 г.

N 3-4 (6-7), июль – декабрь 1998 г.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Подписаться на журнал можно в редакции по адресу: 117419, Москва, ул. Донская, д. 37, комн. 333.

Стоимость подписки на первое полугодие 1999 года (включая стоимость пересылки) – 70 рублей (новых).

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается **для журнала "Математическое образование", январь – июнь 1999 г.**

Реквизиты для перечисления (с 1 января 1998 г.):

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Лефортовском ОСБ 6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044525342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 30 руб. (новых).

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12, (095) 237-36-09.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents