Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год третий

№ 1 (8)

Январь- Март 1999 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 1 (8), 1999 г.

Москва

Contents

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 1 (8), январь – март 1999 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1999 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 12.08.99. Корректура: С. И. Комаров.
Компьютерный набор и верстка: А. Коршунов. Компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 7 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником

А. Г. Мякишев

Мякишев Алексей Геннадьевич — преподаватель московского Химического Лицея. В статье, доступной учащимся старших классов средней школы, рассматриваются некоторые интересные преобразования плоскости, определяемые треугольником. С помощью этих преобразований можно получать результаты о соотношениях замечательных точек и прямых в треугольнике.

Введение

Пусть на плоскости задан некоторый треугольник ABC. Будем рассматривать такое преобразование F, по которому каждой тройке пересекающихся в одной точке прямых, выходящих из вершин треугольника и пересекающих противоположные стороны (или их продолжения) ставится в соответствие аналогичная тройка пересекающихся прямых. Такое преобразование можно рассматривать как отображение плоскости в себя. При этом, если исходные прямые пересекались в точке X, то полученная при пересечении соответственных прямых точка Y называется образом точки X при преобразовании F относительно треугольника $ABC : Y = F(X)$. Если указанное преобразование F обладает свойством: $F(X) = Y \Leftrightarrow F(Y) = X$, то будем называть F *сопряжением.*

В этой статье речь пойдет о двух не слишком известных (во всяком случае, в превосходных книгах Прасолова и Шарыгина по планиметрии — см. "Список литературы" в конце статьи: [2], [3], [4] — они не упомянуты) видах такого преобразования и о некоторых свойствах *замечательных точек* треугольника, с ними связанных. Насколько все эти факты новы, оригинальны и заслуживают внимания? Здесь, пожалуй, уместным будет сообщить, что автор меньше всего склонен выступать в роли творца каких-то геометрических чудес, и вот почему. Во-первых, как однажды заметил крупнейший знаток и композитор геометрических задач И.Ф.Шарыгин, "... вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества. Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое, из тысячелетней геометрической культуры утеряно." ("Откуда берутся задачи", "Квант" №9, 1991 г.). Во-вторых, геометрия треугольника — всего лишь довольно узкий, хотя и специфический, раздел *проективной геометрии*, если взглянуть на нее с точки зрения высшей математики. Вот что по этому поводу писал, не без некоторой доли иронии, Ф.Клейн в книге "Элементарная математика с точки зрения высшей. Геометрия": "Я хотел бы коснуться еще одного маленького примера; я имею в виду так называемую геометрию треугольника. Здесь с течением времени возникла большая замкнутая область, в особенности благодаря трудам ряда учителей гимназий (*примечание автора статьи*: вообще разделяя позиции великого немецкого математика, но в то же время являясь преподавателем лицея, автор не может не вступиться за честь мундира — из того, что математика достаточна щедра, чтобы дарить радость приобщения к вечным ценностям довольно широкому кругу лиц, таланты и знания которых зачастую просто несопоставимы — кажется, ничего плохого не следует; плохо получается тогда, когда некоторые из этих ценностей пытаются насильно навязывать слабо их воспринимающим людям, в частности, некоторым, должным образом не подготовленным, подросткам), трактующая о многих замечательных точках, прямых, окружностях, которые можно определить в треугольнике: центр масс, высоты, биссектрисы, вневписанные окружности, описанная окружность, окружность Фейербаха и т.д. Бесчисленные соотношения, которые всегда снова и снова старались здесь найти и теперь еще стараются находить, очень легко увязать с нашей систематикой... речь идет о теории инвариантов тех плоских фигур, которые состоят из трех произвольных точек и из обеих мнимых циклических точек их плоскости, следовательно, действительно, о чем-то совершенно специальном." И, наконец ("last but not least"), автору очень по душе древняя, восходящая по крайней мере еще к Платону, гипотеза, весьма лаконично сформулированная П.Эрдешом, который считал, что "... у Бога есть книга, содержащая все математические теоремы с самыми красивыми доказательствами" (см. Р.Хонсбергер, "Математические изюминки", библиотечка "Квант", №83). От себя автор может добавить, что, хотя, наверное, и приятно заглянуть в эту Книгу, кого-то опередив, но, по-видимому, главное все же здесь — суметь заглянуть.

Теперь скажем более подробно о содержании статьи. Оно естественным образом разбивается на четыре небольших раздела. В первом мы напомним читателю некоторые теоремы планиметрии, необходимые для понимания дальнейшего. Вводный характер носит также и следующий раздел: барицентрические координаты. Это — удобная система координат, привязанная к треугольнику, неудивительно поэтому, что многие свойства треугольника в такой системе координат (представляющей частный, но весьма своеобразный случай координат на проективной плоскости) записываются красиво и просто. Оба раздела, для экономии места, не содержат решений и доказательств, но в нужных местах снабжены указаниями или ссылками на соответствующую литературу (стоит ли говорить, что читателю, не слишком искушенному в элементарной геометрии, полезнее будет попробовать вывести все эти факты самостоятельно, по возможности реже обращаясь к задачникам за помощью). В третьем разделе будет построено некое преобразование, названное автором *изоциркулярным*. Мы докажем, что оно, в определенном смысле, является *геометрическим средним* между классическими *изогональным* и *изотомическим* сопряжениями. В последнем разделе, используя свойства *изобарического* (название, опять же, автора) преобразования, найдем связь между точками

Жергонна, Нагеля и центром вписанной окружности.

1. Некоторые теоремы планиметрии

1.1 *Теорема Чевы* ([1], стр.15; [2], задача 341;[3], задача 5.70).

Если в некотором треугольнике ABC выбрать по точке на сторонах, противолежащих вершинам ($A_1 \in [BC]$; $B_1 \in [AC]$; $C_1 \in [AB]$), то следующие два условия равносильны:

а) Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в какой-то внутренней точке X треугольника ABC;

б) $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$ (условие Чевы).

Теорема Чевы, с небольшими поправками, остается справедливой для внешней точки треугольника и для точек A_1, B_1, C_1, таких, что одна из них принадлежит стороне треугольника, а остальные — продолжению сторон. В этих случаях, во-первых, тройка прямых может быть и параллельна, а во-вторых, точка X может оказаться на прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно противоположной стороне. Если, например, (AX) параллельна (BC), (BX) пересекает (AC) в точке B_1, а $(CX) \cap (AB) = C_1$, то условие Чевы запишется в виде $\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$. Чтобы не выделять эти случаи в особые, нужно превратить обычную плоскость в проективную, стандартным способом пополнив ее бесконечно удаленной прямой. Любое семейство параллельных прямых тогда будет пересекаться в некоторой бесконечно удаленной точке этой бесконечно удаленной прямой. При таком подходе параллельность прямых в теореме Чевы означает их пересечение в бесконечно удаленной точке. И мы в дальнейшем будем понимать пересечение прямых в проективном духе, обычно не оговаривая всякий раз это обстоятельство.

1.2 *Теорема Чевы в форме синусов* ([2], задача 340; [3], задача 5.78).

Пусть имеется некоторый треугольник ABC, точка A_1 лежит на прямой BC, $B_1 \in (CA)$, $C_1 \in (AB)$, причем только одна из них принадлежит стороне треугольника либо же все три. Тогда следующие условия равносильны:

а) Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

б) $\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA} = 1.$

1.3. *Изотомическое сопряжение* ([3], задача 5.77).

На плоскости фиксирован треугольник ABC. Выберем некоторую точку плоскости X и проведем через нее и вершины треугольника прямые, пересекающие стороны (или их продолжения) треугольника соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Каждую такую точку симметрично отобразим относительно середины той стороны, на которой лежит эта точка. Получим еще три точки: A_2, B_2, C_2. Тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2 также будут пересекаться в некоторой точке Y, которая и называется точкой, *изотомически сопряженной* точке X относительно треугольника

ABC. Можно поэтому считать, что на плоскости задано отображение F_m, так что $F_m(X) = Y$. (Нужно только исключить из рассмотрения прямые, проходящие через стороны треугольника, т.к. любой точке, лежащей на стороне, должна соответствовать противолежащая вершина, а вершине — любая точка противолежащей стороны, и нарушается однозначность. Для остальных же точек все нормально — читателю предлагается обдумать, например, как действует изотомическое сопряжение на точки, лежащие на прямой, проходящей через вершину треугольника параллельно противолежащей стороне). Доказательство сразу следует из теоремы Чевы: в условии Чевы числители меняются местами со знаменателями, и если исходное произведение равнялось единице, то "перевернутое" произведение не изменится.

Ясно, $F_m^2 = F_m \circ F_m = E$ (в том смысле, что для всех допустимых точек X выполняется равенство $F_m(F_m(X)) = X$).

1.4 *Изогональное сопряжение* ([2], задача 343; [3], задача 5.79)[1].

Пусть три прямые, выходящие из вершин треугольника ABC, пересекаются в некоторой точке X. Тогда прямые, им симметричные относительно соответствующих биссектрис треугольника, также пересекаются в одной точке. Эта точка Y называется точкой, *изогонально сопряженной* точке X относительно треугольника ABC. И в этом случае можно говорить (с той же оговоркой, что и в предыдущей задаче) о некотором отображении F_l плоскости в себя, таком, что $F_l(X) = Y$. Для доказательства здесь удобно воспользоваться теоремой Чевы в форме синусов: записанное таким образом условие Чевы "переворачивается" и не меняет своего значения.

И здесь, очевидно, справедливо равенство $F_l^2 = E$, где E — тождественное преобразование плоскости.

1.5 *Замечательные точки треугольника* ([3], задачи 5.71; 5.72).

а) *Центр описанной окружности O* — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Легко показать, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке, равноудаленной от вершин.

б) *Центр вписанной окружности I* — точка пересечения биссектрис. То, что они пересекаются в точке, равноудаленной от сторон треугольника, нетрудно доказать совсем элементарными рассуждениями. Но можно применить и теорему Чевы в обычной форме (тогда нужно вспомнить свойство биссектрисы о делении основания в отношении, равном отношению соответствующих сторон), а еще лучше — в форме синусов. Точка I — неподвижная точка изогонального сопряжения — под его действием она переходит сама в себя. Существуют ли другие неподвижные точки этого преобразования?

в) *Центр тяжести (барицентр) M* — точка пересечения медиан. Существование такой точки сразу следует из теоремы Чевы. M, в свой черед, является неподвижной точкой изотомического сопряжения.

г) *Ортоцентр H* — точка пересечения высот. Хорошее геометрическое доказа-

[1]См. также статью В. Прасолова "Четыре рассказа по геометрии", рассказ 3, "Математическое образование", №1, 1998 г.

тельство факта их пересечения заключается в проведении прямых через вершины треугольника параллельно его сторонам. Возникнет новый треугольник, для которого исходный будет "серединным", т.е. образованным средними линиями, и его высоты превратятся в серединные перпендикуляры к сторонам нового треугольника. Но можно воспользоваться и теоремой Чевы, выражая длины отрезков через длины сторон и косинусы углов при вершине.

д) *Точка Жергонна* G — точка пересечения прямых, проведенных из вершин в противолежащие точки касания вписанной окружности (как показывает педагогическая практика автора, у некоторых учащихся имеется опасная склонность отождествлять точку Жергонна с центром вписанной окружности — это, видимо, одна из таинственных форм проявления ее "замечательной" сути на уровне подсознания). Доказательство использует теорему о равенстве касательных, проведенных из одной точки, и теорему Чевы.

е) *Точка Нагеля* N — точка пересечения прямых, проведенных из вершин в противолежащие точки касания *вне*вписанных окружностей. Здесь, используя ту же теорему о равенстве касательных, можно показать, что точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника (не с продолжениями сторон) делят периметр треугольника пополам. Отсюда длины отрезков, входящие в условие Чевы, легко выражаются через длины сторон треугольника.

Автор однажды задумался, а *почему* замечательные точки действительно обладают всякими интересными свойствами. По некоторому размышлению, он пришел к выводу, что "философская" подоплека здесь такова: все эти точки порождаются весьма совершенной фигурой — правильным треугольником, где они все совпадают, являясь центром конфигурации. Начнем "ухудшать" треугольник какой-нибудь непрерывной деформацией. При этом возникнут некие выходящие из центра траектории, соответствующие движению той или замечательной точки — дети покинут отчий дом и, как говорится, заживут своею жизнью, и при этом каждый унаследует от родителей какое-нибудь достойное качество.

1.6 *Еще несколько замечательных точек* ([1], стр. 102,108, [2], задачи 640,665,666, [3], задача 5.115).

а) L — *точка Лемуана.* Такое название получила точка, изогонально сопряженная точке пересечения медиан M, т.е. в наших обозначениях $L = F_l(M)$. Оказывается, замечательные точки успешно выступают и в роли решения разного рода *экстремальных* задач. Так, точка M минимизирует сумму *квадратов* расстояний от точки плоскости до вершин данного треугольника (знакомые с *геометрией масс*, и, в частности, с моментом инерции и теоремой Лагранжа — см., к примеру, статью "Момент инерции в геометрии" В.Дубровского в приложении к журналу "Квант" №1 за 1995 г. — сумеют доказать это утверждение практически мгновенно), а точка L — *сумму квадратов* расстояний до *сторон* треугольника. Известно также, что *ортотреугольник* (треугольник, образованный основаниями высот) любого остроугольного треугольника минимизирует периметры треугольников, вписанных в данный.

б) Br_1 и Br_2 — первая и вторая *точки Брокара.* Первой точкой Брокара называется расположенная внутри треугольника ABC точка Br_1, такая, что $\angle ABBr_1 = \angle CABr_1 = \angle BCBr_1$. Если же для внутренней точки треугольника выполняются равенства $\angle BABr_2 = \angle ACBr_2 = \angle CBBr_2$, то она называется второй точкой Брокара. Чисто геометрически их можно получить, если на сторонах треугольника ABC построить внешним образом ему подобные, и их вершины соединить с противоположными вершинами исходного треугольника. Так, если треугольник ABC_1 таков, что $\angle C_1 = \angle A$; $\angle C_1AB = \angle CBA$ и т.д., то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в первой точке Брокара, если же $\angle C_1 = \angle B$; $\angle C_1AB = \angle BCA$ и т.д. — во второй. Из определения видно, что точки Брокара изогонально сопряжены.

в) *Точка Торричелли* (или *точка Ферма*). Если на сторонах треугольника ABC построить во вне правильные треугольники, затем провести прямые AA_1, BB_1, CC_1, то они пересекутся в одной точке — точке Торричелли T. Она минимизирует *сумму расстояний* от точки плоскости до *вершин* (если углы треугольника не превосходят 120° — если же в треугольнике имеется угол, превосходящий эту величину, то наступает стабилизация — т.е. решением экстремальной задачи будет вершина тупого угла).

1.7 *О сопряженности замечательных точек.*

Как мы уже видели, некоторые замечательные точки треугольника получаются друг из друга изогональным сопряжением:

а) $F_l(M) = L$ — центр тяжести и точка Лемуана изогонально сопряжены;

б) $F_l(Br_1) = Br_2$ первая и вторая точка Брокара изогонально сопряжены.

Читатель, вдумчиво решавший задачи 1.5 д) и 1.5 е), должен был обнаружить, что если обозначить точку касания вписанной окружности со стороной BC через A_1, а вневписанной — A_2, то $BA_1 = CA_2 = p-a$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника (на всякий случай напомним, что мы всюду следуем общепринятым соглашениям при обозначении сторон и углов треугольника ABC: угол при вершине A обозначаем α, сторону BC напротив вершины A обозначаем a и т.д.). А это и означает изотомическую сопряженность точек Нагеля и Жергонна;

в) $F_m(G) = N$ (конечно, как и для всякой изогонально либо изотомически сопряженной пары, и наоборот — $F_m(N) = G$).

В нашем списке отсутствует по крайней мере еще одна пара сопряженных замечательных точек (интересно, найдет ли ее читатель?). Мы выявим ее несколько позднее (2.6).

1.8 *Две замечательные прямые* ([1], стр. 28; [2], задачи 444,489; [3], задача 5.105; [4], задача 19.11).

а) *Прямая Эйлера* — на этой прямой лежат замечательные точки H, O', M, O треугольника ABC (где O' — центр окружности, описанной вокруг его серединного треугольника, причем (считая, естественно, исходный треугольник неправильным — иначе все четыре точки совпали бы) $\dfrac{HM}{OM} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{OM}{O'M}$ (второе равенство эквивалентно тому, что O' делит отрезок HO пополам). Здесь все основано на том, что центр описанной вокруг треугольника окружности является ортоцентром его серединного треугольника, подобного исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Так как медианы делятся центром тяжести M в отношении 2:1, то остается лишь рассмотреть гомотегию с центром в M и коэффициентом -2;

б) *Прямая без имени* — имеется ввиду прямая, проходящая через точки N, I', M, I (I' — центр вписанной в серединный треугольник окружности), так, что $\frac{NM}{IM} = \frac{2}{1} = \frac{IM}{I'M}$ (I' делит NI пополам). Поразительная идентичность предыдущей задаче связана с тем, что центр вписанной окружности является точкой Нагеля для серединного треугольника. Решает та же гомотетия.

2. Барицентрические координаты

2.1 *Система материальных точек и ее центр масс* ([4], задачи 14.1; 14.2; 14.3)

Системой материальных точек на плоскости назовем конечную совокупность пар вида $m_i A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где m_i — некоторое действительное число, а A_i — некоторая точка плоскости. Центром масс этой системы будем по определению считать такую точку Z плоскости, для которой выполняется равенство: $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{ZA_i} = \overrightarrow{0}$. Обычно здесь еще требуют, чтобы суммарная масса всей системы была отлична от нуля: $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \neq 0$ — запрещая тем самым бесконечно удаленным точкам плоскости выступать в качестве центра масс систем с нулевой суммарной массой. Но, как уже договорились заранее (1.1), мы считаем, что обычная плоскость пополнена бесконечно удаленной прямой, т.е. обращена в проективную. Поэтому нам такое ограничение не понадобится. Например, при проективном подходе, центром масс системы $(\lambda; A), (-\lambda; B)$ является бесконечно удаленная точка прямой AB, в которой пересекаются все прямые, параллельные данной. Необходимо, правда, потребовать, чтобы все массы точек системы не равнялись одновременно нулю ($\sum\limits_{i=1}^{n} m_i^2 \neq 0$), потому что центром масс такой системы могла бы стать любая точка плоскости. Из определения, используя свойства векторов, можно извлечь следующие четыре основных свойства:

а) *Существование и единственность центра масс.*

Для любой системы материальных точек существует, и единственный, ее центр масс (или, как иногда его по-другому называют, центр тяжести),

б) *Однородность.*

Одновременное умножение масс всех материальных точек системы на одно и то же, отличное от нуля, число не меняет ее центра масс;

в) *Правило рычага.*

Центр масс Z системы $(\alpha; A), (\beta; B)$ расположен на прямой AB таким образом, что, $\frac{|AZ|}{|BZ|} = \frac{|\beta|}{|\alpha|} = \lambda$, причем если массы одного знака, то Z находится *внутри* отрезка AB (т.е. делит его в отношении λ *внутренним образом*), если же эти массы различны по знаку, то точка Z расположена *вне* его (делит в отношении λ *внешним* образом). В последнем случае, если массы еще и равны по модулю, бесконечно удаленная точка Z прямой AB поделит данный отрезок в равном отношении внешним образом.

г) *Правило группировки.*

Если произвольно разбить систему материальных точек на какое-то количество подсистем, а затем рассмотреть новую систему, составленную из центров масс этих подсистем, нагруженных суммарными массами соответствующих подсистем, то центры масс исходной и новой систем совпадут.

2.2 *Барицентрические координаты* ([41], задача 14.30).

Выберем произвольно треугольник ABC на плоскости. Нагрузим его вершины какими-нибудь массами (лишь бы одновременно не равными нулю), т.е. рассмотрим систему $(p; A), (q; B), (r; C)$ и пусть Z — ее центр масс. Точку Z легко построить геометрически: если A_1 — центр масс подсистемы $(q; B), (r; C)$ (т.е. точка, делящая отрезок BC в отношении $\frac{|r|}{|q|}$, причем в зависимости от знаков масс, внутренним или внешним образом); B_1 — центр масс $(r; C), (p; A)$; C_1 — центр масс $(p; A), (q; B)$, то, согласно правилу группировки и теореме о единственности центра масс, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в точке Z. И обратно, если взять произвольную точку Z плоскости, провести через вершины треугольника прямые через нее до пересечения с противоположными сторонами (или их продолжениями) треугольника, отметить эти точки пересечения и найти отношения, в которых они делят стороны треугольника, тогда, пользуясь полученными отношениями, легко загрузить вершины треугольника так, чтобы Z стала бы центром масс построенной системы. К примеру, если точка Z расположена внутри треугольника, то все точки пересечения соответствующих прямых со сторонами треугольника попадают внутрь сторон, и обозначив, допустим $\frac{AC_1}{BC_1} = \alpha$; $\frac{BA_1}{CA_1} = \beta$, придем к системе $(1; A), (\alpha; B), (\alpha \cdot \beta; C)$. Если же Z расположена *вне* треугольника и, скажем, пересекает отрезок CA *внутренним* образом, а два других — *внешним*, тогда получим систему $(1; A), (-\alpha; B), (\alpha \cdot \beta; C)$ (нужно α и β заменить противоположными по знаку).

Итак, под записью $Z = (p; q; r)$ (или $Z(p, q, r)$) будем подразумевать, что точка Z является центром масс системы $(p; A), (q; B), (r; C)$, а тройку чисел $(p; q; r)$ назовем *барицентрическими координатами точки Z в базисном треугольнике ABC*. Всякая такая тройка чисел (за исключением нулевой) с точностью до умножения на отличную от нуля константу однозначно определяет некоторую точку плоскости, и наоборот. При этом тройкам с нулевой суммарной массой будут соответствовать бесконечно удаленные точки плоскости, образованные пересечением трех параллельных прямых, выходящих из вершин базисного треугольника; тройкам, у которых сумма каких-то двух координат нулевая — точка, лежащая на прямой, проходящей через соответствующую вершину базисного треугольника параллельно противолежащей стороне; если же имеется нулевая координата, это значит, что центр масс расположен на прямой, проходящей через сторону базисного треугольника.

2.3 *Барицентрические координаты как площади* ([3], задача 4.48; [4], задача 14.31).

В связи с этой задачей автору вспоминается довольно забавная история: как-то раз, несколько лет тому назад, ему довелось просматривать заявки на участие в ежегодной конференции школьников, проводимой Всероссийской Школой Математики и Физики "Авангард". В одной из них сообщалось "... об открытии новой теоремы планиметрии, а именно: если в треугольнике ABC Z — точка пересечения медиан, биссектрис или высот, а прямые, проходящие через вершины треугольника и эту точку, пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 — то выполняется соотношение $\frac{ZA_1}{AA_1} = \frac{ZB_1}{BB_1} = \frac{ZC_1}{CC_1} = 1$ (для высот тупоугольного треугольника с тупым углом при вершине A следует взять в полученной формуле первое слагаемое со знаком "минусе")". "Новизна" всего этого дела сразу вызвала серьезные сомнения. Во-первых, как отмечалось во введении, появлению поистине новых задач в элементарной геометрии препятствуют трудности объективного характера, а во-вторых, что может быть одновременно общего между высотами, биссектрисами и медианами? — трудно указать что, за исключением того только, что каждая тройка прямых пересекается в одной точке (а теорема в заявке как будто бы претендовала на большее). Поэтому просматривавший заявки вместе с автором представитель оргкомитета конференции Д. В. Андреев немедленно выдвинул весьма резонную гипотезу: указанное соотношение справедливо для любых трех прямых, выходящих из вершин треугольника и имеющих общую точку. (Как позже выяснилось, в такой именно формулировке задача имеется в книге Прасолова, ее можно встретить и в книге Л.Кэрролла "Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы").Через пару минут совместными усилиями она была доказана. Действительно, нагрузим вершины так, чтобы центр масс попадал в точку Z; $Z = (p, q, r)$. Тогда, если точка внутренняя, по правилу группировки, $\frac{AZ}{A_1Z} = \frac{q+r}{p} \Rightarrow \frac{ZA_1}{AA_1} = \frac{p}{p+q+r}$. Аналогично, $\frac{ZB_1}{BB_1} = \frac{q}{p+q+r}$; $\frac{ZC_1}{CC_1} = \frac{r}{p+q+r}$. (для внешней точки, такой, к примеру, что AZ пересекает отрезок BC, а не его продолжение, можно считать, что первая координата отрицательна, а другие — положительны. В трех предыдущих равенствах изменится только первое: $\frac{ZA_1}{AA_1} = \frac{-p}{p+q+r}$). Исходя из этих отношений, легко выразить барицентрические координаты точки Z через площади треугольников ZBC, ZAC, ZAB. И правда, если точка внутренняя, и мы опустим из Z и A перпендикуляры на BC, то $\frac{S_{\triangle ZBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{h_1}{h_2}$) = (по теореме Фалеса) $= \frac{ZA_1}{AA_1}$) = (в силу только что выведенного) $= \frac{p}{p+q+r}$) и т.д. Следовательно, $p = \frac{p+q+r}{S_{\triangle ABC}} \cdot S_{\triangle ZBC}$ и т.д. Воспользовавшись однородностью координат, получим $Z = (S_{\triangle ZBC}, S_{\triangle ZAC}, S_{\triangle ZAB})$ (для внешней точки, такой, что A_1 лежит на стороне треугольника, нужно взять первую площадь со знаком "минус").

2.4 *Изотомическое и изогональное сопряжение в барицентрических координатах* ([4], з.14.38).

а) *Изотомическое сопряжение.*

Если некая точка Z имеет барицентрические координаты (p, q, r), то ее образ при изотомическом сопряжении Z имеет координаты $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right)$.

Это утверждение очевидно: по определению изотомического сопряжения. $BA_1 = CA_2$, где A_1 — точка пересечения AZ и BC, A_2 - AZ и BC $\Rightarrow$ $\frac{BA_2}{CA_2} = \left(\frac{BA_1}{CA_1}\right)^{-1}$. Осталось вспомнить о том, как связаны барицентрические координаты и отношения, в которых выходящие из вершин прямые делят противоположные стороны (2.2)

б) *Изогональное сопряжение.*

Если точка Z имеет барицентрические координаты (p, q, r), то ее образ при изогональном сопряжении Z' имеет координаты $\left(\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r}\right)$ (в числителях всюду квадраты длин сторон базисного треугольника). Наметим план доказательства: поскольку изогональное сопряжение основано на "обращении" условия Чевы в форме синусов (1.2,1.4), следует сначала для исходной точки записать отношения, фигурирующие в этом условии, через барицентрические координаты и длины сторон; затем, переворачивая отношения, получим координаты образа точки. Подобный метод будет использован для нахождения барицентрических координат образа точки при изоциркулярном преобразовании.

2.5 *Барицентрические координаты замечательных точек треугольника* ([4], задачи 14.4,14.33).

а) Центр описанной окружности: $O = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$.

Для вывода удобно выписать координаты, как площади (2.3), применить теорему о центральном угле и воспользоваться однородностью (сократив на $\frac{R^2}{2}$); R — радиус описанной окружности). Напомним, что площадь треугольника можно вычислять как половину произведения длин сторон на синус угла между ними;

б) Центр вписанной окружности: $I = (a, b, c) = (\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma)$. Первое равенство следует из известного свойства биссектрисы, а второе — из теоремы синусов (в любом треугольнике $a = 2R\sin\alpha$ и т.д.) и однородности;

в) Точка пересечения медиан (барицентр): $M = (1, 1, 1)$; — очевидно.

г) Точка пересечения высот (ортоцентр): $H = (\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma)$.

Согласно (2.2) координаты точки выражаются через отношения длин отрезков, на которые прямые, соединяющие вершины с данной точкой, делят стороны треугольника. В нашем случае длины этих отрезков легко выражаются через высоты и тангенсы углов при вершинах. При переходе к отношениям высоты сокращаются;

д) Точка Жергонна: $G = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) = \left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ (p — полупериметр базисного треугольника).

Первое равенство получается, если выражать отношения через радиус вписанной окружности и углы, второе — в силу замечания к задаче 1.7 в);

е) Точка Нагеля: $N = \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}, \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right) = (p-a, p-b, p-c)$

Можно рассуждать аналогично предыдущему случаю, а можно воспользоваться тем, что точки Жергонна и Нагеля изотомически сопряжены (1.7 в); 2.4 а);)

ж) Точка Лемуана: $L = (a^2, b^2, c^2) = (\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma)$

Первое равенство сразу следует из определения точки Лемуана (1.6 а)) и из пунктов 2.4 а) и 2.5 в); второе — из первого и теоремы синусов;

з) Точки Брокара: $Br_1 = \left(\frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}\right)$; $Br_2 = \left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2}\right)$;

Второе равенство немедленно следует из первого и однородности, так как точки Брокара изогонально сопряжены. Удобно искать координаты первой точки через площади. Обозначим угол, который фигурирует в определении точки Брокара (1.6 б)) буквой φ — угол Брокара. Поскольку все три угла Брокара равны, то легко найти углы в треугольнике, например, CBr_1B:

$$\angle Br_1AC = \varphi;\ \angle Br_1CA = \gamma - \varphi;\ \angle ABr_1C = \pi - \gamma.$$

Так как $S_{\triangle BBr_1C} = \frac{1}{2}ax\sin\varphi$, где $x = |Br_1C| =$ (согласно теореме синусов и предыдущим равенствам)$= \dfrac{b\sin\varphi}{\sin\gamma}$, то эта площадь равна $\frac{1}{2}\dfrac{ab\sin^2\varphi}{\sin\gamma} = \left(\frac{1}{2}Rabc\sin^2\varphi\right)\cdot\frac{1}{c^2}$. Воспользуемся далее однородностью. (Сравните координаты точки Брокара и точки Лемуана. Какая жалость! Еще чуть-чуть, и эти точки оказались бы изотомически сопряженными. Да, видно, не судьба.)

и) Точка Торричелли.

Если искать координаты как площади, то, введя обозначения $TA = x$; $TB = y$; $TC = z$, приходим к системе (теорема косинусов):

$$\begin{cases} z^2 + y^2 + zy &= a^2 \\ x^2 + z^2 + xz &= b^2 \\ y^2 + x^2 + zy &= c^2 \end{cases}$$

Систему эту можно решить (вычитаем из первого уравнения второе, левую часть разлагаем на множители — появляется множитель $x+y+z$; затем из второго — третье; делим полученные уравнения друг на друга и т.д.), но в общем случае ответы, что называется, не радуют глаз.

Решения ее связаны с координатами так: $T = (zy, xz, yx) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ (второе получается из первого выделением общего множителя xyz). И тем не менее оказывается, что координаты T пропорциональны тройке $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}; \dfrac{\sin\beta}{\sin(60^\circ+\beta)}; \dfrac{\sin\gamma}{\sin(60^\circ+\gamma)}\right.$ Изящное геометрическое доказательство этого факта имеется в уже упомянутой статье В.Прасолова "Четыре рассказа по геометрии".

2.6 *Еще одна пара сопряженных точек.*

Из пунктов 2.4 б), 2.5 а), 2.5 г) вытекает изогональная сопряженность ортоцентра и центра описанной окружности, т.к. $O = (\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma) \Rightarrow O_1 = F_1(O) = 4R^2\cdot\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}, \dfrac{\sin^2\beta}{2\sin\beta\cos\beta}, \dfrac{\sin^2\gamma}{2\sin\gamma\cos\gamma}\right) = (\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma) = H$

2.7 *Уравнение прямой в барицентрических координатах* ([5], стр. 100).

$px + qy + rz = 0$ — все точки, барицентрические координаты которых (x, y, z) удовлетворяют такому уравнению, образуют некоторую прямую.

2.8 *Условие принадлежности трех точек одной прямой* ([5], стр. 97).

Пусть имеются три точки $X = (p_1, q_1, r_1)$; $Y = (p_2, q_2, r_2)$; $Z = (p_3, q_3, r_3)$.

$$X,\ Y,\ Z \text{ лежат на одной прямой } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} p_1, q_1, r_1 \\ p_2, q_2, r_2 \\ p_3, q_3, r_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \text{определитель, состав-} \\ \text{ленный из их координат,} \\ \text{равен нулю} \end{array} \right)$$

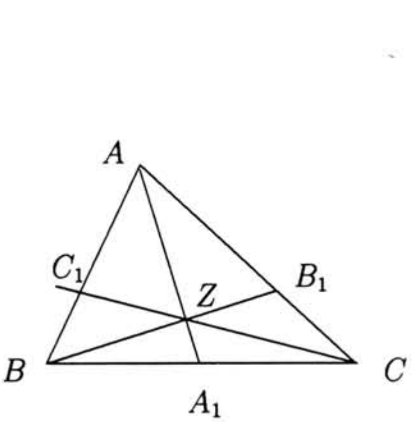
Дело в том, что модуль определителя, составленного из нормированных (т.е. с единичной суммарной массой) барицентрических координат любых трех точек плоскости, равен площади треугольника, образованного этими точками.

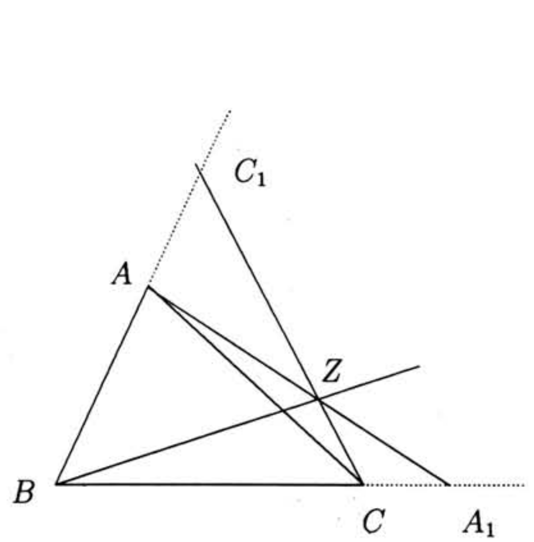
2.9 *Уравнение описанной вокруг треугольника окружности в барицентрических координатах, связанных с этим треугольником* ([4], задача 14.37).

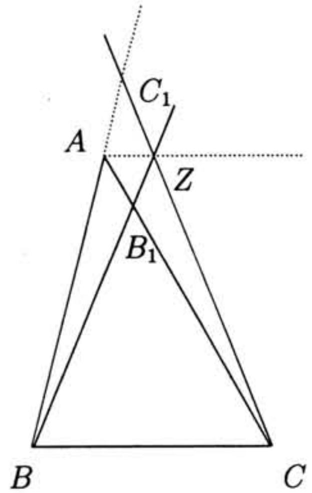
$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = 0$ (в числителях — квадраты сторон базисного треугольника).

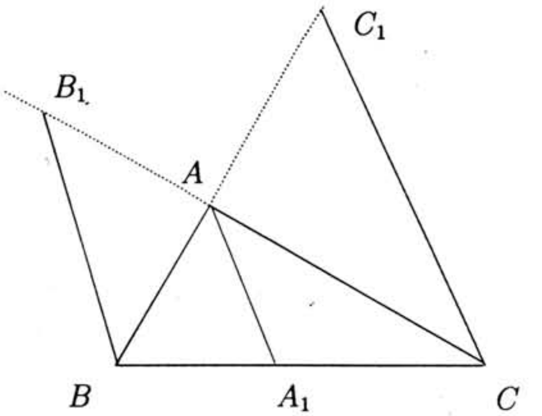
2.10 *Опорные картинки.*

Читатель, наверное, обратил внимание, что геометрические факты, изложенные выше, ни разу еще не были проиллюстрированы здесь хотя бы одним рисунком. Так сделано вполне сознательно: опытный читатель, знакомый с этим материалом, в рисунках не нуждается, а неопытному мы настоятельно советуем читать текст с карандашиком в руках и чистым листком бумаги под рукой, самостоятельно воспроизводя тот или иной чертеж по мере надобности. Вот, впрочем, четыре картинки, которые полезно постоянно держать в голове при чтении.







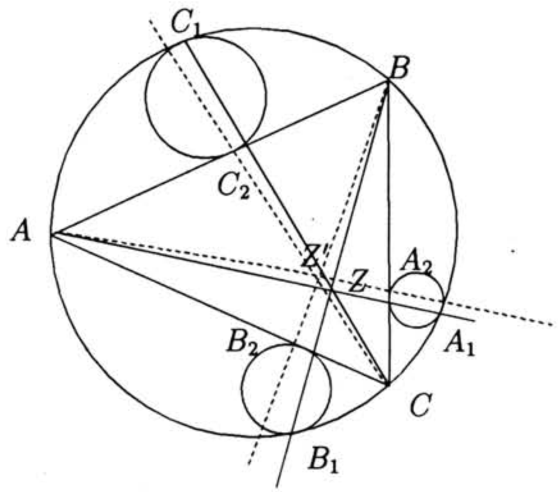


3. Изоциркулярное преобразование

3.1 *Существование изоциркулярного преобразования*

Из каждой вершины произвольного треугольника ABC проведем по прямой так, чтобы они пересекались в точке Z, расположенной внутри треугольника. Опишем, далее, окружность вокруг этого треугольника, и отметим точки пересечения трех наших прямых с ней: AZ пересекает окружность в точке A_1, BZ — в B_1, CZ — в C_1. Затем впишем в каждый из сегментов, образованных описанной окружностью и сторонами треугольника, по окружности — таким образом, чтобы каждая из них касалась описанной в отмеченной ранее точке пересечения. Наконец, обозначим точки касания этих окружностей со сторонами треугольника буквами A_2, B_2, C_2 (например, окружность, касающаяся описанной в точке A_1, касается стороны треугольника BC в точке A_2 и т.д.).

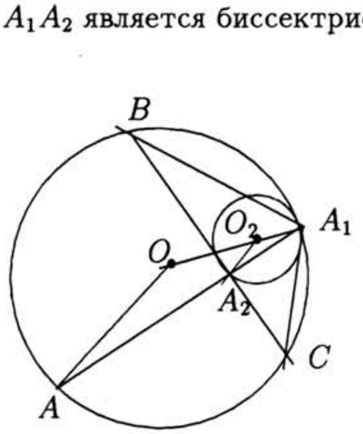
Оказывается, тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2 также будут пересекаться в некоторой точке Z'. Точку Z' назовем *изоциркулярным образом* точки Z (такое название уместно, так как точки A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 равноудалены от центров вписанных в соответствующие сегменты окружностей), а отображение плоскости на себя, построенное указанным выше способом (очевидно, если точка Z расположена вне треугольника, следует также рассматривать окружности, касающиеся описанной внешне и продолжения стороны треугольника) — *изоциркулярным преобразованием* $F_c : Z' = F_c(Z)$.



В основе этого утверждения лежит один интересный планиметрический факт: прямые, соединяющие точки касания вписанной в сегмент окружности, являются биссектрисами соответствующих углов — так, прямая A_1A_2 есть биссектриса $\angle BA_1C$. Мы докажем его несколько позже (3.2), а сначала поясним, почему наша теорема теперь выводится немедленно. Пусть $\angle BAA_1 = \alpha_1$; $\angle CAA_1 = \alpha_2$. Поскольку A_1A_2 — биссектриса угла при вершине A_1 в треугольнике BA_1C, то, по свойству биссектрисы, $\dfrac{BA_2}{CA_2} = \dfrac{BA_1}{CA_1}$, а так как треугольники BAA_1 и CAA_1 вписаны в одну и ту же окружность, то по теореме синусов $BA_1 = 2R\sin\alpha_1$; $CA_1 = 2R\sin\alpha_2$, и, следовательно, $\dfrac{BA_2}{CA_2} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$. Остается вспомнить и применить дважды теорему Чевы: сначала — в форме синусов (1.2), потом — в обычном виде (1.1).

3.2 *Лемма о вписанной в сегмент окружности* ([3]; задача 3.42)

Если окружность вписана в сегмент и касается окружности в точке A_1, а хорды BC — в точке A_2, то прямая A_1A_2 является биссектрисой $\angle BA_1C$.

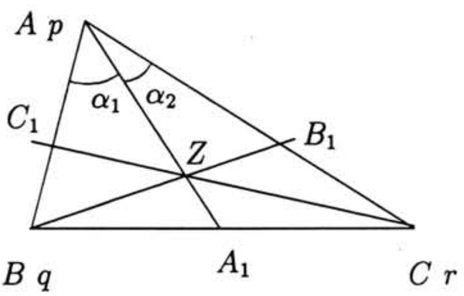


Т.к. равнобедренные треугольники AOA_1 и $A_2O_2A_1$ подобны (поскольку имеют общий угол), а (O_2A_2) перпендикулярна (BC), как радиус, проведенный в точку касания, то (AO) также перпендикулярна (BC). Но если про некоторый треугольник A_1BC, вписанный в окружность, известно, что некоторая прямая, выходящая из вершины A_1, пересекает описанную окружность в точке A таким образом, что (AO) перпендикулярна (BC) (где O — центр этой окружности), то (A_1A) является биссектрисой $\angle BA_1C$, т.к. центральные углы $\angle BOA$ и $\angle COA$ будут равны, а значит, будут равны $\angle BA_1A$ и $\angle CA_1A$, как половины центральных. (Заметим, что верно и обратное утверждение, а именно: если в треугольнике BA_1C провести биссектрису A_1A до пересечения с описанной окружностью, то (AO) перпендикулярна (BC), т.е. делит отрезок BC пополам. В переводе на язык изоциркулярного преобразования это означает, что для любого треугольника его центр тяжести является образом центра вписанной окружности при изоциркулярном преобразовании, т.е. $F_c(I) = M$ или $I_c = M$.)

Казалось бы, с формальной точки зрения результат (3.1) является простым следствием леммы (3.2). Но в действительности все происходило "с точностью до наоборот". Сначала перед мысленным взором автора (вероятно, как результат напряженной подсознательной работы) буквально предстала конструкция, описанная в (3.1), причем полной уверенности в том, что вторая тройка прямых пересекается в одной точке, не было. Поэтому следующий шаг заключался в том, чтобы воспользоваться служебным положением и слегка поэксплуатировать детский труд; ученикам 9-го и 10-го классов была предоставлена возможность получить несколько хороших отметок на следующих условиях — либо теорема о пересечении прямых будет доказана, либо будет предъявлен аккуратно сделанный циркулем и линейкой чертеж, на котором отчетливо видно, что никакого пересечения нет. Несмотря на то, что отличиться желали многие, пятерок ставить не пришлось, и оставалось только перейти к третьему, заключительному этапу: поиску доказательства. В конце концов ключевое соотношение между длинами отрезков и синусами углов было получено, но посредством привлечения тяжеловесных тригонометрических формул и расхода большого количества бумаги. Однако простота равенства $\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ заставила пуститься на поиски доказательства более приемлемого — и тогда только автор наткнулся на лемму (3.2), вывести которую оказалось несложно. Помнится, обнаружив этот красивый факт, автор испытал глубокое чувство досады и горечи — конечно, не потому, что было жаль потраченного времени (хотя, конечно, предварительное знакомство с леммой 3.2 существенно его сэкономило бы), а потому, что сразу понял, что встретился с чем-то классическим, а классику не знать просто стыдно! (Заглянув впоследствии в очень хороший учебник по планиметрии И. Ф. Шарыгина, автор, естественно, отыскал эту лемму, причем она именовалась там *леммой Архимеда*.) Впрочем, один положительный фактор в подобных "изобретениях велосипеда", безусловно, имеется: найдя вновь и пропустив через себя нечто (пускай и почти тривиальное), известное с незапамятных времен, начинаешь как-то более конкретно понимать, что имели ввиду умные люди, когда говорили, что "... при поверхностном наблюдении математика представляется плодом многих тысяч мало связанных индивидуальностей, разбросанных по континентам, векам и тысячелетиям. Но внутренняя логика ее развития гораздо больше напоминает работу одного интеллекта, непрерывно и систематически развивающего свою мысль, лишь использующего как средство многообразие человеческих личностей. Как бы в оркестре, исполняющем кем-то написанную симфонию, тема переходит от одного инструмента к другому, и когда один исполнитель вынужден прервать свою партию, ее точно, как по нотам, продолжает другой. ... История математики знает очень много примеров того, что открытие сделанное одним ученым, остается неизвестным, а позже с поразительной точностью воспроизводится другим." (И. Р. Шафаревич. "О некоторых тенденциях развития математики").

3.3 *Изоциркулярное преобразование в барицентрических координатах*

Пусть имеется базисный треугольник ABC, длины сторон которою — a, b, c и точка Z, имеющая в этом треугольнике барицентрические координаты (p, q, r). Выясним, какие координаты будет иметь образ этой точки при изоциркулярном преобразовании, т.е. найдем координаты $Z' = F_c(Z)$. Не ограничивая общности, будем считать, что Z лежит внутри базисного треугольника.



Применив теорему синусов к треугольнику BAA_1, получим: $\frac{BA_1}{\sin\alpha_1} = \frac{c}{\sin\angle BAA_1}$, а к треугольнику CAA_1 : $\frac{CA_1}{\sin\alpha_2} = \frac{b}{\sin(\pi - \angle BAA_1)} = \frac{b}{\sin BAA_1}$. Делением второго равенства на первое приходим к $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{b}{c}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}$. Но, согласно (2.2), $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{r}{q} \Rightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{b}{c}\cdot\frac{r}{q}$, т.е. по (3.1) $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{b}{c}\cdot\frac{r}{q}$. Совершенно аналогично, $\frac{CB_2}{AB_2} = \frac{c}{a}\cdot\frac{p}{r}$. Далее, если известны отношения, в которых прямые, выходящие из вершин, и проходящие через точку Z', делят стороны треугольника, то по этим отношениям легко восстановить барицентрические координаты точки (2.2). В нашем случае имеем $Z' = \left(\frac{b}{c}\cdot\frac{r}{q}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{p}{r}; 1; \frac{b}{c}\cdot\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{b}{q}\cdot\frac{p}{a}; 1; \frac{b}{c}\cdot\frac{r}{q}\right)$. Остается помножить все координаты на $\frac{q}{b}$ и воспользоваться однородностью (2.1 б)) Окончательно: $Z' = \left(\frac{p}{a}; \frac{q}{b}; \frac{r}{c}\right)$.

3.4 *Изоциркулярное преобразование как проективное преобразование.*

Хорошо известно, что многие преобразования плоскости сохраняют класс прямых или окружностей. Так, подобие (и, в частности, изометрия) прямые переводит в прямые, а окружности в окружности, аффинные преобразования плоскости как раз и характеризуются тем, что прямые переводят в прямые; проективные преобразования также переводят прямые в прямые, но на проективной (т.е. пополненной бесконечноудаленной прямой) плоскости; при этом сужение проективного преобразования на обычную плоскость является аффинным тогда и только тогда, когда бесконечноудаленная прямая переходит под действием исходного проективного преобразования в себя. Инверсия переводит прямые в прямые или окружности, и окружности также в прямые или окружности. Изогональное и изотомическое сопряжения устроены более сложным образом и такими свойствами не обладают. (Правда, изогональное сопряжение, например, имеет одну необычную особенность: как следует из 2.1, 2.4 б) и 2.9, оно переводит описанную вокруг базисного треугольника окружность в бесконечно удаленную прямую. Но вряд ли это можно считать даже самым отдаленным сходством с перечисленными выше преобразованиями.) Зато изоциркулярное преобразование является проективным, но не аффинным преобразованием, т.е. любую прямую переводит в прямую; (на проективной плоскости), причем, как несложно убедиться, бесконечноудаленная прямая *не* переходит в себя. В самом деле, пусть точка с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на некоторой прямой, т. е. (по 2.7) удовлетворяет уравнению $px + qy + rz = 0$. Тогда ее изоциркулярный образ имеет (3.3) координаты $\left(\frac{x_0}{a}; \frac{y_0}{b}; \frac{z_0}{c}\right)$, а значит, лежит на прямой, задаваемой уравнением $(ap)x + (bq)y + (cr) = 0$.

3.5 *Образ замечательной прямой при изоциркулярном преобразовании.*

Предыдущее утверждение позволяет производить столько "новых" задач, сколько заблагорассудится (но это явно не лучший способ). К примеру, возьмем прямую, проходящую через точки N, M, I (1.8 б)). Пусть N_c — изоциркулярный образ точки Нагеля.

Но, из 2.5 б), в); 2.4; 3.3, $I_c = F_c(I) = M$; $M_c = F_c(M) = F_m(I) = I_m$ т.е. изоциркулярный образ точки пересечения биссектрис — точка пересечения медиан, а изоциркулярный образ точки пересечения медиан совпадает с изотомическим образом точки пересечения биссектрис. Воспользовавшись 3.4, получим теорему: N_c, I_m, M лежат на одной прямой. (Полностью это звучит довольно грозно: изоциркулярный образ точки Нагеля, точка, изотомически сопряженная центру вписанной окружности и точка пересечения медиан лежат на одной прямой).

3.6 *Образы замечательных точек при изоциркулярном преобразовании.*

Только что были получены равенства: $I_c = M$, $M_c = I_m$. Имеется и еще одно, довольно занятное: $L_c = I$ (изоциркулярный образ точки Лемуана есть центр вписанной окружности). Оно следует из 2.5 и 3.3: $L_c = F_c(L) = \left(\frac{a^2}{a}, \frac{b^2}{b}, \frac{c^2}{c}\right) = I$. Заметим, что перевод этого утверждения на "нормальный" язык производит поистине гнетущее впечатление: если в треугольнике провести из вершин прямые через точку Лемуана до пересечения с описанной окружностью, затем провести окружности, касающиеся описанной в полученных точках и в каких-то точках сторон треугольника, потом отметить эти точки и соединить их прямыми с вершинами треугольника, то такие прямые пересекутся в центре вписанной окружности.

3.7 *Изоциркулярное преобразование как среднее геометрическое между изогональным и изотомическим.*

Обратимся вновь к доказательству 3.1. Оно опиралось на теорему Чевы в форме синусов и на обычную теорему Чевы — как бы проявилась связь между этими двумя теоремами. Вспомним, что изотомическое сопряжение было связано с теоремой Чевы в обычной форме, а изогональное — в форме синусов (1.3, 1.4). Исходя из этих соображений, можно чисто интуитивно прийти к выводу, что изоциркулярное преобразование является неким средним, или промежуточным между изогональным и изотомическим. Оказывается, этому утверждению несложно придать точный математический смысл, а именно: $(F_c)^2 = F_m \circ F_l$ — т.е., действуя дважды на произвольную точку плоскости изоциркулярным преобразованием, получим такой же результат, как если бы мы сначала подействовали на нее изогональным сопряжением, а затем на полученный образ — изотомическим.

Это непосредственно следует из 2.4 и 3.3 : допустим, что некоторая точка Z плоскости имеет барицентрические координаты (x_0, y_0, z_0). Тогда

$Z' = F_c(Z) = \left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, \frac{z_0}{c}\right)$; $Z'' = F_c(Z') = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$. С другой стороны,

$Y' = F_l(Y) = \left(\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}\right)$; $Y'' = F_m(Y') = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\right)$.

3.8 *О соответствии между парами изогонально и изотомически сопряженных точек.*

Справедлива следующая теорема: если X и X' изогонально сопряжены, то их образы при изоциркулярном преобразовании сопряжены изотомически.

И в самом деле, пусть $X = (p, q, r)$. Тогда по 2.4 б) $X' = \left(\frac{a^2}{p}, \frac{b^2}{q}, \frac{c^2}{r}\right)$; Далее согласно 3.3, $X_c = \left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}\right)$; $X'_c = \left(\frac{a^2}{ap}, \frac{b^2}{bq}, \frac{c^2}{cr}\right) = \left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \frac{c}{r}\right)$.

Изотомическая сопряженность этих точек вытекает из 2.4 а). Если же ввести *обратное изоциркулярное преобразование* F_c^{-1}, так что $F_c \circ F_c^{-1} = F_c^{-1} \circ F_c = E$, где E — тождественное преобразование (геометрически это означает, что в конструкции 3.1 сначала нужно отмечать точки пересечения прямых со сторонами треугольника, потом вписывать в сегменты окружности с тем расчетом, чтобы они касались сторон в отмеченных точках, и, наконец, проводить прямые из вершин в точки касания окружностей с описанной окружностью), то можно сформулировать двойственную теорему:

Если две точки сопряжены изотомически, то их образы при обратном изоциркулярном преобразовании сопряжены изогонально.

Ранее (см. 1.7 и 2.6) мы установили, что пары (M, L); (Br_1, Br_2); (O, H) сопряжены изогонально. Стало быть, их изоциркулярные образы будут сопряжены изотомически. Аналогично, т.к. пара (N, G) сопряжена изотомически (см. 1.7), то их образы при обратном изоциркулярном преобразовании будут сопряжены изогонально.

3.9 *Об орбитах точек при изоциркулярном преобразовании* (указано А. Заславским).

Пусть точка Z_0 плоскости не лежит на сторонах исходного треугольника (случай принадлежности стороне оставляем читателю).

Поскольку $F_c^n(Z_0) = (\frac{p}{a^n}; \frac{q}{b^n}; \frac{r}{c^n}) = \left((\frac{c}{a})^n p; (\frac{c}{b})^n q; r\right)$ и $\lim_{n\to\infty} t^n = 0$ при $0 < t < 1$, то:

а) при $a \geq b > c$ $\quad \lim_{n\to\infty} F_c^n(Z_0) = C$ (вершина угла, противолежащая наименьшей стороне);

б) при $a > b = c$ $\lim_{n\to\infty} F_c^n(Z_0) = A_1$ (точка пересечения прямых AZ_0 и BC;
в) при $a = b = c$ $\lim_{n\to\infty} F_c^n(Z_0) = Z_0$.

4. Изобарическое преобразование

4.1 *Понятие изобарического преобразования.*

Пусть имеется треугольник ABC. Впишем в него серединный треугольник A_1, B_1, C_1 (A_1 — середина BC и т.д.). Выберем затем произвольную точку плоскости Z. Она имеет какие-то барицентрические координаты (p, q, r) относительно базисного треугольника ABC. Теперь рассмотрим точку Z', которая будет иметь такие же координаты, но уже *относительно* треугольника A_1, B_1, C_1. Ее и назовем *образом точки Z при изобарическом преобразовании.*

$$Z' = Z_M = F_M(Z).$$

Изобарическое преобразование можно разложить в композицию двух других (изготовьте самостоятельно соответствующие рисунки, если в этом возникнет необходимость):

1. Проведем через Z прямые из вершин исходного треугольника и отметим точки их пересечения со сторонами как базисного (получим точки A_2, B_2, C_2), так и его серединного (соответственно точки A_3, B_3, C_3) треугольников. Так как из подобия сразу следует, что $\dfrac{BA_2}{CA_2} = \dfrac{C_1A_3}{B_1A_3}$ и т.д. (еще два аналогичных равенства), то из теоремы Чевы (1.1) заключаем, что прямые A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 пересекутся в одной точке, скажем, в точке Z, причем ясно, что координаты этой точки относительно серединного треугольника имеют вид $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}\right)$ (см. 2.2).

2. Подействуем на точку Z_1 изотомическим сопряжением относительно серединного треугольника. Согласно 2.4 а) ее образ Z' будет иметь относительно треугольника A_1, B_1, C_1 координаты (p, q, r).

4.2 *Изобарическое преобразование в координатах .*

Итак, $Z_M = (A_1p, B_1q, C_1r)$. Выясним, каковы же будут ее координаты относительно базисного треугольника ABC. Для этого сначала удвоим массы в вершинах серединного треугольника (по свойству однородности — см. 2.1 б) — центр масс системы от этого не изменится), т.е. перейдем к системе $(A_1; 2p), (B_1; 2q), (C_1; 2r)$, а затем, по правилам группировки и рычага (см. 2.1 в) и 2.1 г)) заменим ее эквивалентной (т.е., с тем же центром масс), но такой, чтобы образующие ее материальные точки были бы сосредоточены в вершинах треугольника ABC. Например, т.к. A_1, — середина отрезка BC, подсистему $(A_1; 2p)$ можно заменить подсистемой $(Bp; Cp)$ и т.д. Окончательно получим:

$$Z_M = (A(q + r), B(p + r), C(p + q)) = (q + r, p + r, p + q).$$

4.3 *Геометрическая суть изобарического преобразования.*

Рассмотрим систему из 6-ти материальных точек:

$$(A;p),(B;q),(C;r),(A;(q+r)),(B;(p+r)),(C;(p+q)).$$

Буквой m обозначим сумму $p+q+r$.

Из правила группировки следует, что наша система эквивалентна системе $(A;m),(B;m),(C;m)$, центром масс которой (см. 2.5) является центр тяжести треугольника ABC точка M. С другой стороны, центр масс системы $(A;p),(B;q),(C;r)$ есть точка Z, а ее суммарная масса равна m; центром же масс (см. 4.2) системы $(A;(q+r)),(B;(p+r)),(C;(p+q))$ является точка Z_M, а суммарная масса здесь равна $2m$. По правилу рычага, $\frac{ZM}{Z_MM}=\frac{2}{1}$. Отсюда делаем вывод: для любой пары точек Z и ее изобарического образа Z_M прямая, проходящая через них, будет содержать точку пересечения медиан M базисного треугольника, которая будет делить отрезок с концами в точках Z, Z_M в отношении 2:1, т.е. изобарическое преобразование есть просто гомотетия с центром в M и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

4.4 *Маленькая предельная теорема.*

Под символом F_M^n будем понимать n-кратную композицию изобарического преобразования. Тогда из 4.3 и теоремы Кантора о стягивающейся системе отрезков (система вложенных друг в друга отрезков с длиной, стремящейся к нулю, содержит единственную общую точку) моментально получается, что для любой точки плоскости Z $\lim_{n\to\infty} F_M^n(Z)=M$ (все образы будут лежать на прямой ZM, причем на каждом шаге длина соответствующих отрезков будет уменьшаться вдвое).

4.5 *Замечательные точки и изобарическое преобразование.*

В терминах изобарического преобразования классические результаты, изложенные в 1.8 (прямая Эйлера и прямая, проходящая через точку Нагеля и центр вписанной окружности), запишутся в следующем виде:

а) $F_M(H)=O; F_M(O)=F_M^2(H)=O'$ (изобарический образ ортоцентра есть центр описанной окружности, а изобарический образ описанной окружности есть центр окружности, описанной вокруг серединного треугольника).

б) $F_M(H)=I; F_M(I)=F_M^2(H)=I'$ (изобарический образ точки Нагеля совпадает с центром вписанной окружности, а изобарический образ центра вписанной окружности совпадает с центром окружности, вписанной в серединный треугольник).

4.6 *Две прямые, замечательные отчасти.*

Договоримся называть точку *замечательной отчасти* ("почти", "в некотором смысле"), если она получена как образ одной из замечательных точек (см. 1.5, 1.6) под действием изотомического, изогонального или изоциркулярного преобразования (см. 1.3; 1.4; 3.1). Так же, как и все замечательные точки, в правильном треугольнике отчасти замечательные точки будут совпадать с его центром симметрии. Замечательной отчасти прямой условимся считать такую прямую, которая содержит как замечательные, так и замечательные отчасти точки. Одну такую прямую мы получили уже в пункте 3.5. Сейчас укажем еще две:

а) Пусть на плоскости имеется треугольник ABC. Рассмотрим систему из шести материальных точек, расположенных в его вершинах:

$$\left(A;\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right),\left(B;\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right),\left(C;\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right),\left(A;\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right),\left(B;\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),\left(C;\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),$$

Согласно 2.5 центр масс первой тройки есть точка Жергонна G исходного треугольника, а центр масс второй точки совпадает с точкой Нагеля N. Заменим эту систему эквивалентной (не меняющей по правилу группировки 2.1 г) центр масс всей системы): $\left(A;\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right),\left(B;\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\right),\left(C;\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\right)=$ $\left(A;\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\right),\left(B;\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\right),\left(C;\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\right) = \left(A;\frac{1}{\sin\alpha}\right),\left(B;\frac{1}{\sin\beta}\right),\left(C;\frac{1}{\sin\gamma}\right)$ (при переходе к последнему равенству использовали однородность — см. 2.1 б)). Поученная система, по свойствам 2.4 а) и 2.5 имеет своим центром масс точку I_m, изотомически сопряженную центру вписанной в треугольник окружности I. Итак, доказана теорема: N, I_m, G (точка Нагеля, точка, изотомически сопряженная центру вписанной окружности и точка Жергонна) лежат на одной прямой.

При желании можно узнать, в каком отношении точка I_m делит отрезок NG. По правилу рычага (см. 2.1 в)) $\frac{NI_m}{GI_m}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$. Введем стандартные обозначения: r — радиус вписанной окружности, r_a, r_b, r_c — радиусы вневписанных окружностей, R — радиус описанной окружности, S — площадь и $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр. Легко показать, что площадь треугольника может быть найдена по одной из следующих формул: $S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=\frac{abc}{4R}$. Известно также (см. [3], задача 12.45), что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{r}$. Помножим оба этих равенства на S. Используя соотношения между радиусами и площадями, в правой части первого равенства получим после несложных упрощений $\frac{2p^2-a^2-b^2-c^2}{2}$, а в правой части второго — p^2. Следовательно, $\frac{NI_m}{GI_m}=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{2p^2}=1-\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$.

Эта задача имеет для автора особенное значение — благодаря ей перед ним, образно выражаясь, впервые приоткрылись кавычки в расхожей фразе "высшее проявление духовной жизни — это Творчество" (не говоря уже о том, что настоящие заметки, по существу, "выросли" именно из нее). А дело было так: однажды автор обратил внимание на тот факт, что из шести замечательных точек, перечисленных в пункте 1.5, пять лежат на двух замечательных прямых (см. 1.8). Стало обидно за обойденную точку Жергонна. А между тем, из самих определений и ее, и точки Нагеля, чувствовалось, что какая-то связь между ними и вписанной окружностью должна же существовать. И вот, в результате более или менее целенаправленных поисков такая связь была найдена.

б) Абсолютно аналогичными рассуждениями, заменив лишь соответствующим образом барицентрические координаты, придем к утверждению: H, O_m, H_m (ортоцентр, точка, изотомически ему сопряженная, и точка, изотомически сопряженная центру описанной окружности) лежат на одной прямой.

Используя формулы (см. [3], задачи 12.44 а); 12.49) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$; $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{4S}{a^2+b^2+c^2-8R^2}$ и формулу площади через радиус описанной окружности, получим $\dfrac{HO_m}{H_mO_m} = R^2\dfrac{(a^2+b^2+c^2)\cdot|a^2+b^2+c^2-8R^2|}{a^2b^2c^2}$.

4.7 *О связи между изобарически и изотомически сопряженными точками.*

Если пристальней вглядеться в полученные только что зависимости, и сопоставить их с тем, что:

а) I — изобарический образ N, N и G сопряжены изотомически (4.5,1.7)

б) O — изобарический образ H, H и H_m сопряжены изотомически (4.5) — трудно не догадаться, что они являются следствием более общего утверждения: для любой пары точек X и ее изобарического образа X_m сама точка X, а также точки, изотомически сопряженные точке X и ее изобарическому образу (т.е. $X_m; (X_M)_m$) лежат на одной прямой. Это утверждение на самом деле справедливо. Пусть барицентрические координаты точки $X = (p, q, r)$. Тогда, согласно 4.2, $X_M = (q+r, p+r, p+q)$.

Изотомические образы этих точек, в соответствии с 2.4, имеют координаты: $X_m = \left(\frac{1}{p}; \frac{1}{r}; \frac{1}{q}\right); (X_M)_m = \left(\frac{1}{q+r}; \frac{1}{p+r}; \frac{1}{p+q}\right)$. Для доказательства нашего предположения нужно (см. 2.8), следовательно, проверить равенство нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{q+r} & \frac{1}{p+r} & \frac{1}{p+q} \end{vmatrix}$$ раскрывая который, придем к выражению:

$$\frac{1}{q+r}\Big(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\Big)+\frac{1}{p+q}\Big(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\Big)+\frac{1}{p+r}\Big(\frac{r}{p}-\frac{p}{r}\Big)=$$

$$\frac{q-r}{qr}+\frac{r-p}{pr}+\frac{p-q}{pq}=$$

$$\frac{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)}{pqr}=0.$$

4.8 *О пересечении двух отчасти замечательных прямых*

Другое сопоставление (3.5 и 4.6 а)) с легкостью необычайной ведет к еще одной тяжело на слух воспринимаемой "теореме": Прямая, проходящая через точку Нагеля N и через точку Жергонна G, а также прямая, проходящая через изоциркулярный образ точки Нагеля N_c и точку пересечения медиан M, пересекаются в точке, изотомически сопряженной центру вписанной окружности I_m.

Москва, ноябрь 1997 — апрель 1998

Литература

1. Г.Коксетер, С.Грейтцер. “Новые встречи с геометрией” М., Наука, 1978 г.

2. И.Шарыгин. “Геометрия 9-11. Задачник” М., Дрофа, 1996 г.

3. В.Прасолов. “Задачи по планиметрии. Часть 1.” М., Наука, 1991 г.

4. В.Прасолов. “Задачи по планиметрии. Часть 2.” М., Наука, 1991 г.

5. М.Балк, В. Болтянский. “Геометрия масс” М., Наука, 1987г.

О доказательстве неравенства Коши посредством интеграла

С. И. Калинин

С. И. Калинин — заведующий кафедрой математического анализа Кировского Педагогического Института. В заметке автор предлагает доказательство классического неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, основанное на использовании простых свойств определенного интеграла.

Как известно, классическое неравенство Коши для среднего арифметического $A = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ и среднего геометрического $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ есть неравенство

$$G_n \leq A_n, \tag{1}$$

в котором равенство достигается лишь тогда, когда $a_1 = \ldots = a_n$. Буквально с момента опубликования его Огюстеном Луи Коши в 1821 г. оно находится в поле интересов как начинающих изучать математику, так и математиков-исследователей. Неравенство (1) рассматривается в школьном курсе математики, его применяют при изучении свойств элементарных функций, решении задач на максимум и минимум (часто прикладного характера), а также в различных вопросах, связанных с доказательством неравенств. На текущий момент из литературных источников по математике известно несколько десятков доказательств приводимого неравенства, принципиально отличающихся друг от друга и использующих как элементарные, так и нэлементарные подходы. Многие из упоминаемых элементарных доказательств основываются на применении индуктивных методов, некоторые же используют введение вспомогательных функций, обладающих теми или иными замечательными свойствами. Наши читатели наверняка встречались с такими доказательствами (см., напр., [1] — [4]). Отметим также, что в [3] приводится и простое "безвыкладочное" доказательство неравенства (1), основывающееся на факте: при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение растет. Цель настоящей заметки — акцентировать внимание читателя на способах доказательства неравенства Коши, использующих интеграл.

Напомним сначала о методе доказательства неравенства (1), принадлежащем С.Т.Берколайко (см.[5], с. 26) и основывающемся на двойном неравенстве

$$\frac{b-a}{b} \leq \ln\frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a} \qquad (0 < a \leq b). \tag{2}$$

При обосновании (2) автор цитируемой работы использует геометрический смысл определенного интеграла Римана: число $\ln\frac{b}{a} = \int\limits_a^b \frac{1}{x}dx$, выражающее значение площади соответствующей криволинейной трапеции, очевидно, не меньше площади прямоугольника с измерениями $b-a$, $\frac{1}{b}$ и не больше площади прямоугольника с измерениями $b-a$, $\frac{1}{b}$. Равенство в (2) достигается лишь тогда, когда $a=b$. В предположении, что числа a_i перенумерованы в порядке неубывания, т.е. $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, в [5] посредством (2) устанавливается неравенство

$$\ln \frac{a_{k+1}\cdot \ldots \cdot a_n}{A_n^{n-k}} \le \ln \frac{A_n^k}{a_1\cdot \ldots \cdot a_k}, \tag{3}$$

где k $(1 \le k \le n-1)$ такое, что $a_k \le A_n \le a_{k+1}$. Равенство в (3) достигается лишь при условии $a_1 = \ldots = a_n$. Ясно, что (3) равносильно неравенству $G_n^n \le A_n^n$, из которого следует (1).

Остановимся теперь на методе доказательства неравенства Коши, развивающем и дополняющем идеи кратко воспроизведенной статьи [5]. Упоминаемый метод мы применим для доказательства неравенства Коши для взвешенных среднего арифметического $\tilde{A}_n = p_1a_1+\ldots+p_na_n$ $(p_i>0,\ i=1,\ldots,n;\ p_1+\ldots+p_n=1)$ и среднего геометрического $\tilde{G}_n = a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{p_n}$ чисел $a_1,\ldots,a_n$, обобщающего неравенство (1). Покажем, что справедливо неравенство

$$\tilde{G}_n \le \tilde{A}_n, \tag{4}$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = \ldots = a_n$. Ясно, что при $p_i = \frac{1}{n}$ $(i=1,\ldots,n)$ неравенство (4) переходит в (1).

Величины $\frac{b-a}{b}$ и $\frac{b-a}{a}$ в двойном неравенстве (2) представим в интегральной форме $\frac{b-a}{b} = \int\limits_a^b \frac{1}{b}dx$, $\frac{b-a}{a} = \int\limits_a^b \frac{1}{a}dx$, а само это неравенство, помня, что $\ln\frac{b}{a} = \int\limits_a^b \frac{1}{x}dx$, расщепим на соотношения

$$\int\limits_a^b \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{b}\right)dx \ge 0,\ \int\limits_a^b \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)dx \ge 0, \tag{5}$$

в которых равенство достигается лишь при условии $a=b$. Используя (5), докажем неравенство (4), сводя рассуждения к технике вычисления определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница и применению свойства неотрицательности интеграла от неотрицательной непрерывной функции. По-прежнему будем считать, что числа a_i перенумерованы в порядке неубывания и пусть k $(1 \le k \le n-1)$ такое, что $a_k \le \tilde{A}_n \le a_{k+1}$. Введем в рассмотрение величину

$$A = \sum_{i=1}^{k} p_i \int\limits_{a_i}^{\tilde{A}_n} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tilde{A}_n}\right)dx + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int\limits_{\tilde{A}_n}^{a_i} \left(\frac{1}{\tilde{A}_n}-\frac{1}{x}\right)dx.$$

Заметим, что в силу (5)

$\int\limits_{a_i}^{\tilde{A}_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{A}_n}\right)dt \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad \int_{\tilde{A}_n}^{a_i}\left(\frac{1}{\tilde{A}_n} - \frac{1}{x}\right)dt \geq 0$ $(i = k+1,\ldots,n)$, следовательно, и $A \geq 0$. Вычислим A, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

$$A = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(\ln x - \frac{1}{\tilde{A}_n}x\right)\Big|_{a_i}^{\tilde{A}_n} + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\tilde{A}_n}x - \ln x\right)\Big|_{\tilde{A}_n}^{a_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \ln \frac{\tilde{A}_n}{a_i} - \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{\tilde{A}_n}\left(\tilde{A}_n - a_i\right) + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \frac{1}{\tilde{A}_n}\left(a_i - \tilde{A}_n\right) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i \ln \frac{a_i}{\tilde{A}_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\tilde{A}_n}{a_i}\right)^{p_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{1}{\tilde{A}_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\tilde{A}_n^{p_i}}{a_i^{p_i}} - 1 + \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A}_n} = \ln \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{G}_n}.$$

Таким образом, $\ln \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{G}_n} \geq 0$, откуда следует (4). Нетрудно видеть, что $A = 0$ тогда и только тогда, когда $a_i = \tilde{A}_n$ $(i = 1,\ldots n)$, т.е. когда $a_1 = \ldots = a_n$. Следовательно, только при выполнении последнего условия в (4) будет достигаться равенство.

Отметим, наконец, что в работе [6] Х.Альцером предложено следующее доказательство неравенства (4). Пусть k $(1 \leq k \leq n-1)$ такое, что $a_k \leq \tilde{G}_n \leq a_{k+1}$. Рассмотрим величину

$$B = \sum_{i=1}^{k} p_i \int\limits_{a_i}^{\tilde{G}_n}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{G}_n}\right)dx + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \int\limits_{\tilde{G}_n}^{a_i}\left(\frac{1}{\tilde{G}_n} - \frac{1}{x}\right)dx.$$

Вычисляя ее так же, как выше A посредством формулы Ньютона-Лейбница, будем иметь:

$$B = \sum_{i=1}^{k} p_i \ln \frac{\tilde{G}_n}{a_i} - \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{\tilde{G}_n}\left(\tilde{G}_n - a_i\right) + \sum_{i=k+1}^{n} p_i \frac{1}{\tilde{G}_n}\left(a_i - \tilde{G}_n\right) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i \ln \frac{a_i}{\tilde{G}_n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\tilde{G}_n}{a_i}\right)^{p_i} - \sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{1}{\tilde{G}_n}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{\tilde{G}_n^{p_i}}{a_i^{p_i}} - 1 + \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{G}_n} = \frac{\tilde{A}_n}{\tilde{G}_n} - 1.$$

Отсюда, в силу неотрицательности B, следует (4). Очевидно, $B = 0$ тогда и только тогда, когда $a_i = \tilde{G}_n$ $(i = 1,\ldots,n)$, т.е. когда $a_1 = \ldots = a_n$. Значит, лишь при выполнении последнего условия в (4) будет достигаться равенство.

На наш взгляд, рассмотренный материал может быть полезен при изучении темы "Интеграл" в школах и классах с углубленным изучением математики, а также во внеклассной работе по математике.

Литература

1. Берколайко С.Т., Каток С.Б. Об одном индуктивном методе доказательства неравенств // Квант. — 1970. — №8. — С.33—36.

2. Соловьев Ю. Огюстен Луи Коши и математическая индукция // Квант. — 1991. — №3. — С.13—14.

3. Курляндчик Л.Д. Неравенство Коши // Математика в школе. — 1987. — №5. — С.58—59.

4. Сорокин Г.А. Экстремум и неравенства // Математика в школе. — 1997. — №1. — С. 76—81.

5. Берколайко С. Интеграл помогает доказать неравенство Коши // Квант. — 1979. — №8. — С.26.

6. Alzer H. A proof of the arithmetic mean — geometric mean inequality // Amer. Math. Mon. — 1996. — 103, №7. — P.585.

Суммы квадратов многочленов

В. В. Прасолов

В. В. Прасолов — автор нескольких книг по математике, включая популярное, выпущенное массовым тиражом пособие “Задачи по планиметрии” в двух частях. В журнале “Математическое образование”, №1(4) за 1998 г. была опубликована его статья “Четыре рассказа по геометрии”. В настоящем номере публикуются две статьи, связанные с 17 проблемой Гильберта. Большая часть первой из них доступна учащимся школ с углубленной программой по математике.

1. Некоторые примеры

Нетрудно доказать, что любой многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами, принимающий неотрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами. В самом деле, корни многочлена с действительными коэффициентами разбиваются на действительные корни и пары комплексных корней. Поэтому

$$p(x) = a \prod_{j=1}^{s}(x - z_j)(x - \overline{z_j}) \prod_{k=1}^{t}(x - \alpha_k)^{m_k},$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Если $p(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $a \geq 0$ и все числа m_k четны, поэтому действительные корни тоже разбиваются на пары. Следовательно,

$$p(x) = \Big(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{l}(x - z_j)\Big)\Big(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{l}(x - \overline{z_j})\Big),$$

где некоторые из чисел z_j могут быть действительными. Пусть

$$\sqrt{a}\prod_{j=1}^{l}(x - z_j) = q(x) + ir(x),$$

где q и r — многочлены с действительными коэффициентами. Тогда

$$\sqrt{a}\prod_{j=1}^{l}(x - \overline{z_j}) = q(x) - ir(x).$$

В итоге получаем $p(x) = (q(x))^2 + (r(x))^2$.

Но для многочленов от нескольких переменных аналогичное утверждение уже не всегда верно, т. е. существуют *неотрицательные* многочлены (так мы будем называть многочлены с действительными коэффициентами, которые при всех действительных значениях переменных принимают неотрицательные значения), которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами. Первым это доказал в 1888 г. Гильберт [Hi], но он не привел явный пример такого многочлена. Первый простой пример привел Т. Моцкин в 1967 г.

Пример 1.[M] *Многочлен*

$$F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Проверим сначала, что $F(x,y) \geq 0$. Если $x=0$ или $y=0$, то $F(x,y)=1$. Поэтому будем считать, что $xy \neq 0$. В таком случае числа x^2, y^2 и $x^{-2}y^{-2}$ положительны и их произведение равно 1. Следовательно,

$$x^2+y^2+x^{-2}y^{-2} \geq 3,$$

а значит, $x^2y^2(x^2+y^2-3)+1 \geq 0$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $F(x,y) = \sum f_j(x,y)^2$, где f_j – многочлены с действительными коэффициентами. Тогда $\sum f_j(x,0)^2 = F(x,0) = 1$. Следовательно, $f_j(x,0) = c_j$ – некоторая константа, а значит, $f_j(x,y) = c_j + yg_j(x,y)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $f_j(x,y) = c'_j + xg'_j(x,y)$. Ясно, что при этом $c_j = c'_j$ и $f_j(x,y) = c_j + xyh_j(x,y)$. Таким образом,

$$x^2y^2(x^2+y^2-3)+1 = x^2y^2\sum h_j^2 + 2xy\sum c_jh_j + \sum c_j^2,$$

т. е.

$$x^2y^2(x^2+y^2-3) - x^2y^2\sum h_j^2 = 2xy\sum c_jh_j + \sum c_j^2 - 1.$$

Все одночлены, встречающиеся в правой части этого равенства, имеют степень не больше 3, а все одночлены, встречающиеся в левой части этого равенства, имеют степень не меньше 4. В самом деле,

$$\deg h_j = \deg f_j - 2 \leq \frac{1}{2}\deg F - 2 = 1.$$

Следовательно, $x^2y^2(x^2y^2-3) - x^2y^2\sum h_j^2 = 0$, а значит, $x^2+y^2-3 = \sum h_j^2$. Получено противоречие, так как $x^2+y^2-3<0$ при $x=y=0$. □

Пример 2.[R.M. Robinson, 1973] *Многочлен*

$$S(x,y) = x^2(x^2-1)^2 + y^2(y^2-1)^2 - (x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1)$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Проверим сначала, что $S(x,y) \geq 0$. Это очевидно для точек, лежащих в незаштрихованной на рис.1 области, так как для любой такой точки либо $x^2+y^2-1 \leq 0$ и $(x^2-1)(y^2-1) \geq 0$, либо $x^2+y^2-1 \geq 0$ и $(x^2-1)(y^2-1) \leq 0$. Но $S(x,y)$ можно записать и по-другому, а именно,

$$S(x,y) = (x^2+y^2-1)(x^2-y^2)^2 + (x^2-1)(y^2-1).$$

При такой записи очевидно, что $S(x,y) \geq 0$ для точек, лежащих в заштрихованной области, так как для любой такой точки $x^2+y^2-1 \geq 0$ и $(x^2-1)(y^2-1) \geq 0$.

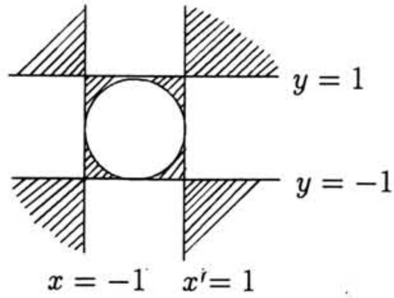


Рис. 1

Области, где $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ и $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \geq 0$

Предположим теперь, что $S(x, y) = \sum f_j(x, y)^2$. Функция S обращается в нуль в 8 точках, отмеченных на рис.2. Следовательно, в этих точках обращается в нуль каждая из функций f_j. Но $\deg f_j \leq \frac{1}{2} \deg S = 3$, а если кривая степени не более 3 проходит через указанные 8 точек, то она обязательно проходит и через точку $(0, 0)$; это мы докажем чуть позже. Итак, $f_j(0, 0) = 0$ при всех j, поэтому $S(0, 0) = 0$. Но, как легко убедиться, $S(0, 0) = 1$. Полученное противоречие показывает, что многочлен $S(x, y)$ нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов.

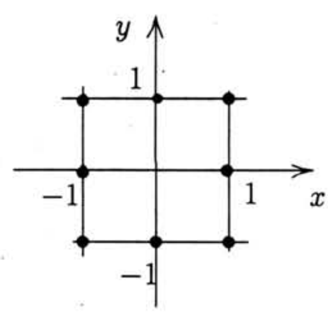


Рис. 2

Нули функции S

Доказательство того, что кубическая кривая, проходящая через 8 точек пересечения прямых p_i и q_j $(i, j = 1, 2, 3)$, обязательно проходит и через девятую точку, можно найти в книге [ПС]. Но для рассматриваемой конфигурации точек можно привести и более простое доказательство. Припишем точкам $(\pm 1, \pm 1)$ вес 1, точкам $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$ вес -2, а точке $(0, 0)$ вес 4. Рассмотрим сумму по этим точкам значений функции $x^p y^q$, умноженных на соответствующие веса. Если $pq = 0$, то сумма нулевая. Если $p > 0$ и $q > 0$, то ненулевой вклад в сумму дают только точки $(\pm 1, \pm 1)$. При этом сумма окажется ненулевой лишь в том случае, когда оба числа p и q четны. Но у многочлена f_j степени не больше 3 таких одночленов нет. Поэтому взвешенная сумма многочлена f_j по рассматриваемым 9 точкам равна нулю. В частности, если f_j обращается в нуль в восьми точках, то f_j обращается в нуль и в девятой точке. □

Пример 3.[R.M. Robinson, 1973] *Многочлен*

$$Q(x,y,z) = x^2(x-1)^2 + y^2(y-1)^2 + z^2(z-1)^2 + 2xyz(x+y+z-2)$$

неотрицателен, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов.

Предположим, что $Q(x,y,z) = \sum f_j(x,y,z)^2$. Тогда степень каждого многочлена f_j не превосходит 2. А так как функция $Q(x,y,z)$ обращается в нуль во всех точках (x,y,z) с координатами $x,y,z = 0$ или 1, за исключением точки $(1,1,1)$, то во всех этих точках обращаются в нуль функции f_j. Как мы сейчас убедимся, из этого следует, что $f_j(1,1,1) = 0$. Но тогда $Q(1,1,1) = 0$, а непосредственные вычисления показывают, что $Q(1,1,1) = 2$.

Припишем восьми рассматриваемым точкам веса ± 1 так, как это показано на рис.3, и рассмотрим сумму по этим точкам функции $f_j(x,y,z)$ с соответствующими весами. Легко проверить, что рассматриваемая сумма равна нулю для следующих функций: $1, x, xy, x^2$. Поэтому она равна нулю и для функции $f_j(x,y,z)$, так как ее степень не превосходит 2. Следовательно, если в семи из восьми рассматриваемых точек функция f_j обращается в нуль, то она обращается в нуль и в восьмой точке.

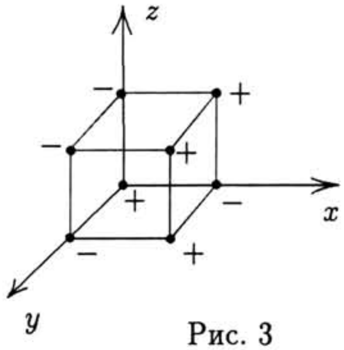


Рис. 3

Веса восьми вершин куба

Докажем теперь, что $Q(x,y,z) \geq 0$. Запишем для этого многочлен Q по–другому:

$$\begin{aligned} Q &= x^2(x-1)^2 + [y(y-1) - z(z-1)]^2 + Q_x \\ &= y^2(y-1)^2 + [z(z-1) - x(x-1)]^2 + Q_y \\ &= z^2(z-1)^2 + [x(x-1) - y(y-1)]^2 + Q_z, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_x &= 2yz(x+y-1)(x+z-1), \\ Q_y &= 2xz(x+y-1)(y+z-1), \\ Q_z &= 2xy(x+z-1)(y+z-1). \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что в любой точке (x, y, z) одна из функций Q_x, Q_y, Q_z неотрицательна. Но эти функции не могут быть одновременно отрицательными, так как их произведение представляет собой квадрат многочлена

$$2\sqrt{2}xyz(x+y-1)(x+z-1)(y+z-1). \quad \square$$

Пример 4.[Anneli Lax, Peter D. Lax, 1978] *Форма* $A(x) = A_1(x) + \cdots + A_5(x)$, *где* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *и* $A_i(x) = \prod_{j\neq i}(x_i - x_j)$, *неотрицательна, но ее нельзя представить в виде суммы квадратов форм.*

Замечание. Рассматриваемая форма зависит только от разностей переменных, поэтому ее можно представить в виде формы от четырех переменных. Поделив эту новую форму на четвертую степень одной из переменных, можно получить многочлен степени 4 от 3 переменных.

Проверим сначала, что $A(x) \geq 0$. Значение формы $A(x)$ не изменяется при любой перестановке переменных, поэтому можно считать, что $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$. В таком случае $A_1(x) + A_2(x) =$

$$(x_1 - x_2)[(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5) - (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)] \geq 0,$$

так как $x_1 - x_2 \geq 0, x_1 - x_3 \geq 0, x_2 - x_3 \geq 0$ и т. д. Аналогично доказывается, что $A_4(x) + A_5(x) \geq 0$. Ясно также, что $A_3(x)$ представляет собой произведение двух неположительных и двух неотрицательных сомножителей, поэтому $A_3(x) \geq 0$.

Предположим теперь, что $A(x) = \sum Q_j(x)^2$, где Q_j — квадратичные формы. Если каждая переменная x_i равна какой–то другой переменной x_k, то $A(x) = 0$, а значит, $Q_j(x) = 0$. Поэтому квадрика $Q_j(x) = 0$ в $\mathbb{R}P^4$ содержит проективную прямую $x_1 = x_2, x_3 = x_4 = x_5$. При перестановках координат получаем 10 прямых такого вида (для задания прямой нужно выбрать 2 координаты из 5). Эти прямые пересекают гиперплоскость общего положения в 10 точках, причем через эти точки должна проходить квадрика $Q_j(x) = 0$. Но в трехмерном пространстве не через любые 10 точек проходит квадрика, поэтому можно ожидать, что форма Q_j тождественно равна нулю. Мы сейчас убедимся, что это действительно так, и тем самым придем к противоречию.

Пусть $Q(x) = \sum c_{ij}x_ix_j, c_{ij} = c_{ji}$. По предположению

$$\begin{aligned} 0 = Q(s,s,t,t) \;\; &= \;\; (c_{11} + 2c_{12} + c_{22})s^2 + 2(c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{23} + c_{24} + c_{25})st + \\ &\quad + (c_{33} + c_{44} + c_{55} + 2c_{34} + 2c_{35} + 2c_{45})t^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_{11} + 2c_{12} + c_{22} = 0, \tag{1}$$
$$c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{23} + c_{24} + c_{25} = 0, \tag{2}$$
$$c_{33} + c_{44} + c_{55} + 2c_{34} + 2c_{35} + 2c_{45} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, выполняются аналогичные равенства, получающиеся в результате любой перестановки индексов. В частности, из (1) следует, что

$$c_{33} + 2c_{34} + c_{44} = 0. \tag{4}$$

Вычитая (4) из (3), получаем

$$c_{55} + 2c_{35} + 2c_{45} = 0.$$

Пусть $c_{55} = \lambda$. Тогда при попарно различных i и j, отличных от 5, выполняется равенство $c_{i5}+c_{j5} = -\lambda/2$. Следовательно, $c_{15} = c_{25} = c_{35} = c_{45} = -\lambda/4$. Аналогично $c_{21} = c_{31} = c_{41} = c_{51} = c_{15} = -\lambda/4$ и т. д. В результате получаем $c_{ii} = \lambda$ и $c_{ij} = -\lambda/4$ при $i \neq j$. Но в таком случае из (2) следует, что $\lambda = 0$, т. е. $Q(x) = 0$ при всех x.

2. Теорема Артина–Касселса–Пфистера

Мы привели примеры неотрицательных многочленов, которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов. В статье «Семнадцатая проблема Гильберта», опубликованной в этом же номере журнала, показано, что любой неотрицательный многочлен можно представить в виде суммы квадратов рациональных функций. Но для многочленов от одной переменной нет существенной разницы между представлением в виде суммы квадратов многочленов и представлением в виде суммы квадратов рациональных функций. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть K — поле, характеристика которого не равна 2, $f(x)$ — многочлен над K. Предположим, что*

$$f(x) = \alpha_1 r_1(x)^2 + \dots + \alpha_n r_n(x)^2,$$

где $\alpha_i \in K$, $r_i(x)$ — рациональные функции над K. Тогда

$$f(x) = \alpha_1 p_1(x)^2 + \dots + \alpha_n p_n(x)^2,$$

где $p_i(x)$ — многочлены над K.

Эта теорема имеет долгую историю. В 1927 г. Артин [Ar] доказал, что

$$f(x) = \beta_1 p_1(x)^2 + \dots + \beta_m p_m(x)^2,$$

где m — некоторое число, не обязательно равное n. Затем в 1964 г. Касселс [Ca] доказал, что можно считать, что $m = n$. А в 1965 г. Пфистер [Pf] доказал, что можно считать, что $\beta_i = \alpha_i$.

Теорему 1 можно применить и к многочлену $f(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных над полем L. Для этого нужно положить, например, $x = x_1$ и $K = L(x_2, \dots, x_n)$ — поле рациональных функций от переменных $x_2, \dots, x_n$ над полем L. В результате получим, что в представлении многочлена f в виде суммы квадратов рациональных функций в знаменателях этих рациональных функций можно избавиться от любой из переменных (но нельзя избавиться от всех переменных одновременно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому в дальнейшем будем считать, что $n > 1$ и все $\alpha_i \neq 0$. Доказательство удобно провести на языке квадратичных форм над полем $K(x)$. Пусть $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — вектор с координатами из $K(x)$. Положим $\varphi(u, v) = \sum \alpha_i u_i v_i$. Требуется доказать, что если $f \in K[x]$ и $f = \varphi(u, u)$, где $u_i \in K(x)$, то $f = \varphi(w, w)$, где $w_i \in K[x]$. Квадратичная форма $\varphi(u, u)$ может быть либо изотропной (т. е. $\varphi(u, u) = 0$ для некоторого $u \neq 0$), либо анизотропной (т. е. $\varphi(u, u) \neq 0$ при $u \neq 0$).

Случай 1. Форма $\varphi(u, u)$ изотропна. В этом случае нам даже не потребуется условие $f = \varphi(u, u)$ для $u_i \in K(x)$. Иными словами, для любого многочлена f найдется такой вектор u с координатами из $K[x]$, что $f = \varphi(u, u)$.

В равенстве $\varphi(u, u) = 0$ можно считать, что u — многочлен; для этого достаточно рациональные функции u_i привести к общему знаменателю. Можно также считать, что многочлены $u_1, \ldots, u_n$ взаимно просты в совокупности. Тогда существуют такие многочлены $v_1, \ldots, v_n$, что $u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = 1$. В самом деле, в виде $u_1 f_1 + u_2 f_2$ можно представить НОД(f_1, f_2); затем в виде $(u_1 f_1 + u_2 f_2) g_1 + u_3 f_3$ можно представить НОД(f_1, f_2, f_3) и т. д. Поделив каждый многочлен v_i на число $2\alpha_i$, получим такой вектор v, что $\varphi(u, v) = 1/2$. А так как $\varphi(u, v + \lambda u) = \varphi(u, v)$ и $\varphi(v + \lambda u, v + \lambda u) = \varphi(v, v) + \lambda$, то после замены v на $v - \varphi(v, v) u$ можно будет считать, что $\varphi(v, v) = 0$.

Равенство

$$\varphi(fu + v, fu + v) = f^2 \varphi(u, u) + 2f\varphi(u, v) + \varphi(v, v) = f$$

показывает, что любой многочлен f можно представить в виде $f = \varphi(w, w)$, где $w = fu + v$.

Случай 2. Форма $\varphi(u, u)$ анизотропна. В этом случае без условия $f = \varphi(u, u)$ для $u_i \in K(x)$ обойтись уже нельзя. Это видно из следующего примера: $K = \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ и $\varphi(u, u) = u_1^2 + \cdots + u_n^2$.

Умножим обе части равенства $f = \varphi(u, u)$ на общий знаменатель рациональных функций $u_1, \ldots, u_n$. В результате получим равенство вида $\alpha_1 u_1^2 + \cdots + \alpha_n u_n^2 = f u_0^2$, где $u_0, \ldots, u_n$ — многочлены. Среди всех равенств такого вида можно выбрать равенство, в котором многочлен u_0 имеет минимальную степень r. Требуется доказать, что $r = 0$. Предположим, что $r = \deg u_0 > 0$. Поделим многочлен u_i на u_0 с остатком и тем самым найдем такой многочлен v_i, что $\deg(u_i - u_0 v_i) \leq r - 1$.

Помимо векторов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ рассмотрим векторы $\tilde{u} = (u_0, \ldots, u_n)$ и $\tilde{v} = (v_0, \ldots, v_n)$, где $v_0 = 1$. Рассмотрим также форму $\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varphi(x, y) - f x_0 y_0$. По условию $\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{u}) = \varphi(u, u) - f u_0^2 = 0$. Кроме того, $\tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v}) = \varphi(v, v) - f$, так как $v_0 = 1$. Поэтому равенство $\tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v}) = 0$ противоречит условию $r > 0$. В дальнейшем будем считать, что $\tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v}) \neq 0$. Это, в частности, означает, что векторы $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ не пропорциональны. В таком случае вектор $\tilde{w} = \tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v}) \tilde{u} - 2\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) \tilde{v}$ ненулевой и $\tilde{\varphi}(\tilde{w}, \tilde{w}) = 0$, так как $\tilde{\varphi}(\lambda\tilde{u} - \mu\tilde{v}, \lambda\tilde{u} - \mu\tilde{v}) = \mu(-2\lambda\tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \mu\tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v})) = 0$ при $\lambda = \tilde{\varphi}(\tilde{v}, \tilde{v})$ и $\mu = \tilde{\varphi}(\tilde{u}, \tilde{v})$.

Итак, мы построили ненулевой вектор $\tilde{w} = (w_0, w)$ с полиномиальными координатами, удовлетворяющий равенству $\varphi(w, w) - f w_0^2 = 0$. Чтобы прийти к противоречию, достаточно убедиться, что $\deg w_0 < r$. Учитывая, что $v_0 = 1$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0 &= \tilde{\varphi}(\tilde{v},\tilde{v})u_0 - 2\tilde{\varphi}(\tilde{u},\tilde{v})v_0 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^2 - f\right)u_0 - 2\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i v_i - f u_0\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(v_i^2 u_0 - 2u_i v_i + \frac{u_i^2}{u_0}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i u_i^2}{u_0} + f u_0 = \frac{1}{u_0}\sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i - u_0 v_i)^2,\end{aligned}$$

так как $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i^2 = f u_0^2$.

Напомним, что $\deg(u_i - u_0 v_i) \le r - 1$. Поэтому

$$\deg w_0 = \deg\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i - u_0 v_i)^2\right) - \deg u_0 \le 2(r-1) - r = r - 2.$$

□

С помощью теоремы 1 можно указать неотрицательный многочлен от n переменных, который нельзя представить в виде суммы n квадратов рациональных функций.

Теорема 2. *Многочлен $x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1$ нельзя представить в виде суммы n квадратов рациональных функций от переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем $\mathbb{R}$.*

Доказательство. В условии теоремы 1 положим $K = \mathbb{R}(x_1, \dots x_{n-1})$ и $x = x_n$. Предположим, что многочлен $x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1$ представлен в виде суммы n квадратов рациональных функций от $x_1, \dots, x_n$. Это означает, что многочлен $x^2 + d$, где $d = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1 \in K$, можно представить в виде суммы n квадратов элементов поля $K(x)$. В таком случае согласно теореме 1 многочлен $x^2 + d$ можно представить в виде суммы n квадратов элементов кольца $K[x]$, т. е.

$$x^2 + d = \sum_{i=1}^n \left(a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \cdots\right)^2.$$

Ясно, что при этом должно выполняться равенство $a_{i2} = a_{i3} = \dots = 0$. Таким образом,

$$x^2 + d = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2, \quad a_i, b_i \in K.$$

Подставим в полученное равенство такое значение $x = c$, что $c^2 = (a_n c + b_n)^2$, т. е. $(1 \pm a_n)c \pm b_n = 0$ (при $a_n \ne \pm 1$ можно взять любой знак, а при $a_n = \pm 1$ допустим только один знак). В результате получим $d = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i c + b_i)^2$, где $c, a_i, b_i \in K$. Иными словами, многочлен $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 1$ допускает представление в виде суммы $n-1$ квадратов рациональных функций от переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$ над полем $\mathbb{R}$. Повторяя аналогичные рассуждения, в конце концов получим, что многочлен $x_1^2 + 1$ является квадратом рациональной функции от x_1 над полем $\mathbb{R}$. Получено противоречие. □

3. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим заключается в следующем. Если $x_1, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа, то

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Заменим x_i на t_i^{2n}. Тогда это неравенство примет вид

$$P(t_1, \ldots, t_n) = \frac{t_1^{2n} + t_2^{2n} + \cdots + t_n^{2n}}{n} - t_1^2 t_2^2 \cdots t_n^2 \geq 0.$$

Теорема 3.(Гурвиц [Hu]) *Многочлен $P(t_1, \ldots, t_n)$ можно представить в виде суммы квадратов многочленов.*

Доказательство. Положим $y_i = t_i^2$. Для функции $f(y_1, \ldots, y_n)$ рассмотрим

$$Sf(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\sigma \in S_n} f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}).$$

Например,

$$\begin{aligned} Sy_1^n &= (n-1)!(y_1^n + \cdots + y_n^n), \\ &\cdots \\ Sy_1 \ldots y_n &= n!\, y_1 \cdots y_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= S[(y_1^{n-1} - y_2^{n-1})(y_1 - y_2)], \\ \varphi_2 &= S[(y_1^{n-2} - y_2^{n-2})(y_1 - y_2)y_3], \\ \varphi_3 &= S[(y_1^{n-3} - y_2^{n-3})(y_1 - y_2)y_3 y_4], \\ &\cdots \\ \varphi_{n-1} &= S[(y_1 - y_2)(y_1 - y_2)y_3 y_4 \ldots y_n], \end{aligned}$$

Легко проверить,что

$$\varphi_1 = Sy_1^n + Sy_2^n - Sy_1^{n-1} - Sy_2^{n-1}y_1 = 2Sy_1^n - 2Sy_1^{n-1}y_2.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 2Sy_1^{n-1}y_2 - 2Sy_1^{n-2}y_2 y_3, \\ \varphi_3 &= 2Sy_1^{n-2}y_2 y_3 - 2Sy_1^{n-3}y_2 y_3 y_4, \\ &\cdots \\ \varphi_{n-1} &= 2Sy_1^2 y_2 y_3 \ldots y_{n-1} - 2Sy_1 y_2 \ldots y_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1} = 2Sy_1^n - 2Sy_1y_2\dots y_n.$$

Учитывая соотношения (5), получаем

$$\frac{y_1^n + y_2^n + \dots + y_n^n}{n} - y_1y_2\dots y_n = \frac{1}{2n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}),$$

т. е.

$$\frac{t_1^{2n} + t_2^{2n} + \dots + t_n^{2n}}{n} - t_1^2t_2^2\dots t_n^2 = \frac{1}{2n!}(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}),$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_k &= S[(y_1^{n-k} - y_2^{n-k})(y_1 - y_2)y_3y_4\dots y_{k+1}] =\\ &= S[(y_1 - y_2)^2(y_1^{n-k-1} + y_1^{n-k-2}y_2 + \dots + y_2^{n-k-1})y_3y_4\dots y_{k+1}] =\\ &= S[(t_1^2 - t_2^2)^2(t_1^{2(n-k-1)} + t_1^{2(n-k-2)}t_2^2 + \dots + t_2^{2(n-k-1)})t_3^2t_4^2\dots t_{k+1}^2].\end{aligned}$$

Таким образом, φ_k — сумма квадратов многочленов от $t_1, \dots, t_n$. □

4. Теорема Гильберта о неотрицательных многочленах $p_4(x, y)$

Пусть p_k обозначает многочлен степени k. В параграфе 1 мы привели примеры неотрицательных многочленов типа $p_6(x, y)$ и $p_4(x, y, z)$, которые нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов. Для многочленов типа $p_2(x_1, \dots, x_n)$ таких примеров не существует. В самом деле, многочлену $p_2(x_1, \dots, x_n)$ соответствует квадратичная форма

$$F_2(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^2 p_2(y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1}).$$

Любую квадратичную форму можно представить в виде $f_1^2 + \dots + f_k^2 - f_{k+1}^2 - \dots - f_{n+1}^2$, где $f_1, \dots, f_{n+1}$ — линейные формы. Ясно, что многочлен p_2 будет неотрицательным лишь в том случае, когда $f_{k+1} = \dots = f_{n+1} = 0$.

Гораздо сложнее доказать, что любой неотрицательный многочлен типа $p_4(x, y)$ можно представить в виде суммы квадратов многочленов.

Теорема 4.(Гильберт) *Любой неотрицательный многочлен типа $p_4(x, y)$ можно представить в виде суммы трех квадратов многочленов.*

Мы приведем два доказательства этой теоремы. Первое доказательство более простое, но оно позволяет доказать лишь более слабое утверждение, а именно, будет показано, что $p_4(x, y)$ можно представить в виде суммы нескольких (не обязательно трех) квадратов многочленов. Второе доказательство — оригинальное доказательство Гильберта.

Оба доказательства нам будет удобнее проводить не для многочленов, а для однородных форм $F_4(x, y, z)$.

Первое доказательство. (Choi — Lam) Мы будем доказывать, что любую неотрицательную однородную форму $F_4(x, y, z)$ можно представить в виде суммы квадратов однородных форм. Первая часть доказательства относится к формам любой степени от любого числа переменных.

Двум формам P и Q степени n от m переменных можно сопоставить форму $\lambda P+\mu Q$, т. е. на множестве всех таких форм имеется естественная структура линейного пространства. Поэтому формы можно считать точками аффинного пространства; начало координат соответствует нулевой форме.

Неотрицательные формы образуют замкнутый выпуклый конус C с вершиной в начале координат O. Ясно, что если Q – ненулевая форма и $Q \in C$, то $-Q \notin C$. Поэтому любая плоскость, проходящая через O и Q, пересекает C по (замкнутому) углу Q_1OQ_2, величина которого строго меньше π. При этом форма Q является выпуклой линейной комбинацией форм Q_1 и Q_2.

Проведем опорные гиперплоскости к конусу C, проходящие через лучи OQ_1 и OQ_2. Они пересекают конус C по некоторым выпуклым конусам строго меньшей размерности. Рассмотрим сечение каждого из этих конусов плоскостью, проходящей через точки O и Q. После нескольких таких операций мы обязательно придем к конусам размерности 1 (лучам).

Точку A замкнутого выпуклого конуса C называют *экстремальной,* если для нее существует опорная гиперплоскость, пересекающая конус C лишь по лучу OA. Иными словами, точка A экстремальная, если она не является внутренней точкой отрезка, концы которого принадлежат конусу C, но не лежат на луче OA. Описанная выше конструкция показывает, что *любая неотрицательная однородная форма Q является выпуклой линейной комбинацией экстремальных неотрицательных форм.*

До сих пор мы рассматривали формы любой степени от любого числа переменных. Но следующее утверждение справедливо лишь для форм степени 4 от 3 переменных.

Лемма 1. *Любую неотрицательную однородную форму $T(x,y,z) \neq 0$ степени 4 можно представить в виде*

$$T = q^2 + T_1,$$

где $q \neq 0$ – квадратичная форма, T_1 – неотрицательная форма.

Следствие. *Любая экстремальная неотрицательная форма $T(x,y,z)$ степени 4 является полным квадратом.*

Следствие вытекает из леммы очевидным образом: для экстремальной неотрицательной формы T разложение $T = q^2+T_1$ должно быть тривиальным, т. е. формы q^2 и T_1 должны быть пропорциональны. В свою очередь, из следствия очевидным образом вытекает теорема. В самом деле, выпуклая линейная комбинация экстремальных неотрицательных форм степени 4 от 3 переменных представляет собой сумму квадратов квадратичных форм.

Доказательство. Пусть $Z(T)$ – множество нулей формы T, рассматриваемых с точностью до пропорциональности (т. е. множество нулей этой формы в $\mathbb{R}P^2$).

Случай 1. $Z(T) = \emptyset$. На единичной сфере $x^2+y^2+z^2=1$ функция T принимает минимальное значение $\mu > 0$, поэтому $T(x,y,z) \geq \mu(x^2+y^2+z^2)^2$ при всех (x,y,z).

Случай 2. $Z(T)$ состоит из одной точки; без ограничения общности можно считать, что $T(1,0,0)=0$. В таком случае коэффициент при x^4 равен 0, поэтому

$$T(x,y,z)=x^3(\alpha_1 y+\alpha_2 z)+x^2 f(y,z)+2xg(y,z)+h(y,z).$$

Если $\alpha_1\neq 0$ или $\alpha_2\neq 0$, то при $x\to\pm\infty$ можно получить отрицательные значения T. Поэтому

$$T(x,y,z)=x^2 f+2xg+h.$$

Ясно также, что $f\geq 0$ и $h\geq 0$.

В разложении

$$fT=(xf+g)^2+(fh-g^2)$$

форма $fh-g^2$ неотрицательна. В самом деле, если $fh-g^2<0$ в точке (a,b), то $f(a,b)\neq 0$. Положив $x=-g(a,b)/f(a,b)$, получим $fT<0$ в точке (x,a,b).

Неотрицательную квадратичную форму $f(x,y)$ можно представить в виде квадрата линейной формы или в виде суммы двух квадратов линейных форм. В соответствии с этим разберем два варианта.

(а) $f=f_1^2$, где $f_1=\alpha y+\beta z$. В точке $(-\beta,\alpha)$ получаем $fh-g^2=-g^2\leq 0$, поэтому $g(-\beta,\alpha)=0$, так как форма $fh-g^2$ неотрицательна. Таким образом, $g=f_1g_1$. Следовательно,

$$fT\geq(xf+g)^2=(xf_1^2+f_1g_1)^2=f_1^2(xf_1+g_1)^2=f(xf_1+g_1)^2,$$

а значит, $T\geq(xf_1+g_1)^2$.

(б) $f=f_1^2+f_2^2$, где f_1 и f_2 – линейные формы, не имеющие нетривиальных (т. е. отличных от начала координат) общих нулей. В таком случае $f(y,z)>0$ при $(y,z)\neq(0,0)$. Предположим, что $fh-g^2=0$ при $(y,z)=(a,b)\neq(0,0)$. Тогда $T=0$ при $(x,y,z)=(-g(a,b)/f(a,b),a,b)$. Приходим к противоречию, так как по предположению у T есть только один нуль в $\mathbb{R}P^2$, а именно $(1,0,0)$.

Итак, $fh-g^2>0$ при $(y,z)\neq(0,0)$, а значит,

$$(fh-g^2)/f^3\geq\mu>0$$

на единичной окружности. Следовательно, $fh-g^2\geq\mu f^3$ при всех (y,z). Поэтому $T\geq(fh-g^2)/f\geq\mu f^2=(\sqrt{\mu}f)^2$.

Случай 3. $Z(T)$ содержит не менее двух точек; без ограничения общности можно считать, что $T(1,0,0)=T(0,1,0)=0$. Как и в случае 2, форма T не может содержать членов с x^4 и x^3, а также членов с y^4 и y^3. Поэтому

$$T(x,y,z)=x^2 f(y,z)+2xzg(y,z)+z^2h(y,z).$$

В разложении

$$fT=(xf+zg)^2+z^2(fh-g^2)$$

форма $fh-g^2$ неотрицательна.

При разборе варианта (а) случая 2 мы не пользовались тем, что у формы T есть ровно один нуль. Поэтому если $f=f_1^2$ (или $h=h_1^2$), то можно применить те же самые рассуждения. Остается рассмотреть случай, когда $f > 0$ и $g > 0$. Мы снова разберем два варианта.

(а) $fh - g^2$ имеет нетривиальный нуль (a, b). Пусть $\alpha = -g(a,b)/f(a,b)$ и

$$T_1(x,y,z) = T(x + \alpha z, y, z) = x^2 f + 2xz(g + \alpha f) + z^2(h + 2\alpha g + \alpha^2 f).$$

В точке (a, b) получаем

$$h + 2\alpha g + \alpha^2 f = h + 2\frac{-g}{f}g + \frac{g^2}{f^2}f = h - g^2 f = \frac{hf - g^2}{f^2} = 0.$$

Поэтому $h + 2\alpha g + \alpha^2 f = h_1^2$. Таким образом, $T_1(x,y,z) \geq (zh_1)^2$, а значит,

$$T(x,y,z) = T_1(x - \alpha z, y, z) \geq (zh_1(x - \alpha z, y, z))^2.$$

(б) $fh - g^2 > 0$. В таком случае

$$\frac{fh - g^2}{(y^2 + z^2)f} \geq \mu > 0,$$

а значит,

$$fT = (xf + zg)^2 + z^2(fh - g^2) \geq z^2(fh - g^2) \geq \mu z^2(y^2 + z^2)f.$$

В итоге получаем $T \geq (\sqrt{\mu} zy)^2 + (\sqrt{\mu} z^2)^2 \geq (\sqrt{\mu} z^2)^2$. □

□

Второе доказательство. (Гильберт) Основная идея этого доказательства заключается в том, чтобы рассмотреть множество A, состоящее из тех вещественных форм от трех переменных, которые можно представить в виде $f^2 + g^2 + h^2$, где f, g, h – *вещественные* квадратичные формы, не имеющие нетривиальных общих нулей над полем *комплексных* чисел.

Лемма 2. *Множество A открыто.*

Доказательство. Коэффициенты a_{ijk} формы $\sum a_{ijk} x^i y^j z^k$ можно считать координатами в $\mathbb{R}^n$. Поэтому отображение

$$\Phi : (f, g, h) \mapsto F = f^2 + g^2 + h^2$$

представляет собой алгебраическое отображение $\mathbb{R}^{18} \to \mathbb{R}^{15}$ (квадратичная форма от 3 переменных задается 6 коэффициентами, а форма степени 4 задается 15 коэффициентами).

Достаточно доказать, что если $(f, g, h) \in A$, то дифференциал $d\Phi$ отображения Φ в точке (f, g, h) имеет ранг 15, т. е. $\dim \ker \Phi = 3$. Ясно, что

$$d\Phi(u, v, w) = 2(uf + vg + wh),$$

где $(u, v, w) \in \mathbb{R}^{18}$ – тройка квадратичных форм, $uf + vg + wh$ – форма степени 4.

Квадратичные формы f, g, h не имеют нетривиальных общих нулей над $\mathbb{C}$. Покажем, что в таком случае из равенства

$$uf + vg + wh = 0 \tag{6}$$

(u, v, w – квадратичные формы) следует, что

$$u = \nu g - \mu h, \quad v = \lambda h - \nu f, \quad w = \mu f - \lambda g$$

для некоторых $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Достаточно доказать, что

$$u = \nu_1 g - \mu_1 h, \quad v = \lambda_1 h - \nu_2 f, \quad w = \mu_2 f - \lambda_2 g.$$

В самом деле, тогда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)hg + (\mu_2 - \mu_1)fh + (\nu_1 - \nu_2)fg = 0.$$

Кривые $f = 0, g = 0$ и $h = 0$ попарно различны, поэтому на кривой $f = 0$ есть точка, не принадлежащая кривым $g = 0$ и $h = 0$. Рассмотрев значения f, g и h в этой точке, получим $\lambda_1 = \lambda_2$. Аналогично доказывается, что $\mu_1 = \mu_2$ и $\nu_1 = \nu_2$.

Докажем, например, что $w = \mu_2 f - \lambda_2 g$. По теореме Гильберта о корнях[1] идеал, порожденный формами f, g и h, содержит некоторую степень любого многочлена, так как эти формы не имеют общих нулей. В частности, x^n при некотором n можно представить в виде

$$x^n = rf + sg + th, \tag{7}$$

где r, s, t – формы степени $n-2$. Рассмотрим равенство (2) с минимальным n. Из (6) и (7) следуют равенства

$$uft + vgt + wht = 0, \quad x^n w = rfw + sgw + thw,$$

поэтому

$$x^n w = (rw - ut)f + (sw - vt)g = af + bg, \tag{8}$$

где a и b – формы степени n. Если $n = 0$, то мы получаем требуемое равенство. Если же $n > 0$, то мы получаем противоречие с минимальностью n. В самом деле, при $x = 0$ равенство (8) превращается в

$$a_0 f_0 + b_0 g_0 = 0,$$

где $a_0 = a(0, y, z)$ и т.д. При этом f_0 и g_0 не имеют общих нулей, а значит, $a_0 = d_0 g_0$ и $b_0 = -d_0 f_0$ для некоторого многочлена $d_0(y, z)$. Положим $d(x, y, z) = d_0(y, z)$ и рассмотрим многочлены $a_1 = a - dg$ и $b_1 = b + dg$. Ясно, что

$$a_1 f + b_1 g = af + bg = x^n w$$

[1] Ее доказательство можно найти, например, на с. 490 книги [B].

и $a_1(0,y,z) = b_1(0,y,z) = 0$, т. е. a_1 и b_1 делятся на x. Сократив на x, получим равенство вида $a_2 f + b_2 g = x^{n-1}w$, что противоречит минимальности n.

Итак, ядро отображения

$$d\Phi : (u, v, w) \mapsto 2(uf + vg + wh)$$

состоит из векторов вида

$$(\nu g - \mu h, \lambda h - \nu f, \mu f - \lambda g) = \lambda(0, h, -g) + \mu(-h, 0, f) + \nu(g, -f, 0),$$

поэтому размерность ядра равна 3. □

Лемма 3. *Пусть $F \in \overline{A} - A$, где $\overline{A}$ – замыкание A. Тогда либо F имеет нетривиальный вещественный нуль, либо над полем $\mathbb{C}$ кривая $F = 0$ имеет по крайней мере две двойные точки.*

Доказательство. Ясно, что $F = f^2 + g^2 + h^2$, где f, g и h имеют общий нетривиальный нуль (a, b, c). Если этот нуль не вещественный, то точки (a, b, c) и $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ будут двумя различными двойными точками кривой $F = 0$. В самом деле, эти точки являются нулями функций f, g, h, поэтому они являются двукратными нулями функций f^2, g^2, h^2, а значит, они являются двукратными нулями функции $F = f^2 + g^2 + h^2$. □

Займемся теперь непосредственно доказательством теоремы. Нужно доказать, что любая неотрицательная форма лежит в A. Открытое множество A ограничено поверхностью $\partial A = \overline{A} - A$. Пусть F_1 – произвольная неотрицательная форма степени 4 от 3 переменных. Если $F_1 \in A$, то доказывать уже нечего. Поэтому будем считать, что $F_1 \notin A$. В таком случае отрезок F_0F_1, где $F_0 \in A$ — произвольная точка, должен пересекать ∂A в некоторой точке F_t. Достаточно доказать, что точку F_0 можно выбрать так, что точка F_t совпадет с F_1 (тогда $F_1 = F_t \in \partial A \subset \overline{A}$). Будем считать, что F_t – внутренняя точка отрезка F_0F_1. Точку F_0 можно выбрать так, что F_t имеет нетривиальный вещественный нуль. Дело в том, что согласно лемме 2 формы из ∂A, не имеющие нетривиальных вещественных нулей, соответствуют кривым с двумя двойными точками, а такие формы образуют множество коразмерности не менее 2. Действительно, кривая $F = 0$ имеет двойную точку, если система уравнений $F = 0, F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ имеет решение. Первое уравнение можно не учитывать, так как $xF_x + yF_y + zF_z = nF$, где n – степень формы F (в нашем случае $n = 4$). Кривые $F_x = 0$ и $F_y = 0$ пересекаются в $(n-1)^2$ точках. Кривая $F = 0$ имеет k двойных точек, если кривая $F_z = 0$ проходит через k точек пересечения кривых $F_x = 0$ и $F_y = 0$. Это накладывает k алгебраических соотношений на коэффициенты формы F.

Итак, форма $F_t = (1-t)F_0 + tF_1$ имеет нетривиальный вещественный нуль. Но это противоречит тому, что $F_t \neq F_1$. В самом деле, $F_0 > 0$ и $F_1 \geq 0$, поэтому при $t \neq 1$ форма $(1-t)F_0 + tF_1$ принимает строго положительные значения во всех точках, отличных от начала координат. □

Литература

[В] Ван дер Варден Б. Л., *Алгебра,* М.: Наука, 1976.

[ПС] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П., *Эллиптические функции и алгебраические уравнения,* М.: Факториал, 1997.

[Ar] Artin E., *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate,* Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), 100–115.

[Ca] Cassels J. W. S., *On the representation of rational functions as sums of squares,* Acta Arithm. **9** (1964), 79–82.

[Hi] Hilbert D., *Ueber die Darstellung definierter Formen als Summe von Formenquadraten,* Math. Ann. **32** (1888), 342–350.

[Hu] Hurwitz A., *Ueber der Vergleich des arithmetischen und des geometrischeh Mittels,* J. fur Math. **108** (1891), 266–268.

[M] Motzkin T. S., *Algebraic Inequalities,* в книге *Inequalities*, Editor O. Shisha, New York: Academic Press, 1967, 199–203.

[Pf] Pfister A., *Multiplikative quadratische Formen,* Arch. Math. **16** (1965), 363–370.

Семнадцатая проблема Гильберта

Прасолов В. В.

Эта статья является непосредственным продолжением предыдущей, но она требует от читателя существенно большей математической подготовки. Предполагается, например, некоторое знакомство с теорией полей и их расширений.

Часть I. Теория Артина

Этот раздел в основном посвящен решению Артина семнадцатой проблемы Гильберта о представимости любого неотрицательного многочлена в виде суммы квадратов рациональных функций. Доказательство Артина не дает никаких оценок достаточного количества этих рациональных функций в представлении многочлена от n переменных. Такую оценку получил Пфистер: неотрицательный многочлен от n переменных можно представить в виде суммы 2^n квадратов рациональных функций. Теорию Пфистера мы обсудим во второй части этой статьи.

В §§1 — 2 приведены необходимые сведения из теории вещественных полей; результаты этих параграфов принадлежат Артину и Шрайеру [AS]. Собственно решение семнадцатой проблемы Гильберта содержится в §3. Это доказательство основано на теореме Сильвестра, позволяющей вычислить количество вещественных корней многочлена как индекс некоторой квадратичной формы (см. с. 50). Наше изложение опирается на [S].

1. Вещественные поля

Поле K называют *упорядоченным*, если оно разбито на три непересекающихся подмножества

$$K = N \bigcup \{0\} \bigcup P$$

так, что $N = -P$ (N — *отрицательные* числа, P — *положительные* числа), причем сумма и произведение двух положительных чисел положительны.

Для упорядоченного поля можно ввести обозначение $x - y > 0$, если $x - y \in P$ ($x \geq y$, если $x - y \in P$ или $x = y$).

Положим

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что $|ab| = |a| \cdot |b|$ и $|a + b| \leq |a| + |b|$.

В любом упорядоченном поле $1 > 0$, так как обратное неравенство $-1 > 0$ приводит к противоречию: $1 = (-1)(-1) > 0$. В частности, характеристика любого упорядоченного поля равна нулю, поскольку $1 + \dots + 1 > 0$.

В любом упорядоченном поле $x^2 \geq 0$. В самом деле, $0^2 = 0$, а оба неравенства $x > 0$ и $-x > 0$ приводят к одному и тому же неравенству $x^2 > 0$.

Упорядочение поля $\mathbb{Q}$ единственно, а именно, $p/q > 0$ тогда и только тогда, когда $pq > 0$. Действительно, числа p/q и pq получаются друг из друга умножением на $q^{\pm 2} > 0$.

Примером поля, которое нельзя упорядочить, служит любое поле L, в котором элемент -1 является суммой квадратов (и характеристика L не равна 2). В самом деле, любой элемент a поля L является суммой квадратов:

$$a = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{1-a}{2}\right)^2.$$

Поле K называют *формально вещественным,* если элемент -1 нельзя представить в виде суммы квадратов элементов K. Эквивалентное условие: если $b_1^2 + \dots + b_n^2 = 0$, где $b_1, \dots, b_k \in K$, то $b_1 = \ldots = b_n = 0$. Для краткости будем называть формально вещественные поля просто *вещественными*.

Любое вещественное поле имеет характеристику 0. В самом деле, если характеристика равна p, то $-1 = 1^2 + \dots + 1^2$ (количество слагаемых в правой части равно $p - 1$).

Теорема 1. *Пусть K — вещественное поле, $a \in K$.*

а) Если элемент a является суммой квадратов элементов K, то поле $K(\sqrt{a})$ вещественно.

б) Если поле $K(\sqrt{a})$ не вещественно, то элемент $-a$ является суммой квадратов элементов K.

Доказательство. Пусть поле $K(\sqrt{a})$ не вещественно. Тогда, в частности, $K(\sqrt{a}) \neq K$, т. е. $\sqrt{a} \notin K$. Кроме того, элемент -1 является суммой квадратов элементов поля $K(\sqrt{a})$, т. е. в K существуют такие элементы b_i, c_i, что

$$-1 = \sum (b_i + c_i\sqrt{a})^2 = \sum b_i^2 + 2\sqrt{a}\sum b_ic_i + a\sum c_i^2. \tag{1}$$

Формула (1) показывает, что если $\sum b_ic_i \neq 0$, то $\sqrt{a} \in K$. Поэтому

$$-1 = \sum b_i^2 + a\sum c_i^2. \tag{2}$$

Пусть a — сумма квадратов элементов K. Формула (2) показывает, что в таком случае предположение (с которого мы начинали доказательство) о том, что поле $K(\sqrt{a})$ не вещественно, приводит к противоречию. Это доказывает утверждение а).

Чтобы доказать утверждение б), запишем формулу (2) в виде

$$-a = \frac{1 + \sum b_i^2}{\sum c_i^2}.$$

Остается заметить, что если p и q — суммы квадратов, то $p/q = pq(q^{-1})^2$ тоже сумма квадратов. □

Следствие. *Для вещественного поля K одно из полей $K(\sqrt{a})$ и $K(\sqrt{-a})$ обязательно вещественно.*

Доказательство. Если поле $K(\sqrt{a})$ не вещественно, то элемент $-a$ является суммой квадратов, поэтому поле $K(\sqrt{-a})$ вещественно. □

Теорема 2. *Пусть K — вещественное поле и $f \in K[x]$ — неприводимый многочлен нечетной степени. Тогда поле $K(\alpha)$, где α — корень f, вещественно.*

Доказательство. Пусть $n = \deg f$. Предположим, что поле $K(\alpha)$ не вещественно. Тогда

$$-1 = \sum g_i(\alpha)^2,$$

где g_i — многочлены степени не выше $n-1$. Многочлен $1 + \sum g_i(x)^2$ имеет корень α, поэтому он делится на f, т. е.

$$-1 = \sum g_i(x)^2 + h(x)f(x),$$

где h — некоторый многочлен. Предположим, что $h = 0$. Тогда $-1 = \sum g_i(x)^2$. Если $\max_i(\deg g_i) = m > 0$, то сумма квадратов коэффициентов многочленов g_i при x^m равна нулю. А если $g_i = c_i \in K$, то $-1 = \sum c_i^2$. Оба варианта противоречат вещественности поля K, поэтому $h \neq 0$.

Степень многочлена $\sum g_i(x)^2$ четна и не превосходит $2n-2$. Поэтому степень многочлена h нечетна и не превосходит $n-2$. У многочлена h есть неприводимый множитель h_1, степень которого нечетна и не превосходит $n-2$. Пусть β — корень многочлена h_1. Тогда $-1 = \sum g_i(\beta)^2$, т. е. элемент -1 является суммой квадратов элементов поля $K(\beta)$. Повторив для многочлена h_1 те же самые рассуждения, что и для многочлена f, получим, что элемент -1 является суммой квадратов элементов поля $K(\gamma)$, где γ — корень некоторого неприводимого многочлена нечетной степени, не превосходящей $n-4$, и т.д. Приходим к противоречию. □

Поле K называют *вещественно замкнутым,* если оно вещественно и любое его вещественное алгебраическое расширение совпадает с K.

Из теоремы 2 следует, что в вещественно замкнутом поле любой многочлен нечетной степени имеет корень.

Вещественным замыканием вещественного поля K называют вещественно замкнутое поле R, алгебраическое над K.

У любого вещественного поля K есть вещественное замыкание. В самом деле, рассмотрим частично упорядоченное множество всех вещественных полей, алгебраических над K. Согласно лемме Цорна в этом множестве есть по крайней мере один максимальный элемент R. Ясно, что поле R вещественно замкнуто.

Теорема 3. *Вещественно замкнутое поле R допускает ровно одно упорядочение, а именно, ненулевой элемент $a \in R$ положителен тогда и только тогда, когда он является квадратом.*

Доказательство. Ясно, что равенства $a = t_1^2$ и $-a = t_2^2$, где $t_1, t_2 \in R$, не могут выполняться одновременно, так как иначе $-1 = (t_1/t_2)^2$. Поэтому достаточно доказать, что $\pm a = t^2$, где $t \in R$.

Если $a \neq t^2$, то поле $R(\sqrt{a})$ является собственным расширением поля R, поэтому оно не вещественно. В таком случае согласно теореме 1 (б) элемент $-a$ является суммой квадратов элементов R. Тогда согласно теореме 1 (а) поле $R(\sqrt{-a})$ вещественно, поэтому оно совпадает с R. Это означает, что $\sqrt{-a} \in R$, т. е. $-a = t^2$, где $t \in R$. □

Теорема 4. *Пусть K — вещественное поле, причем элемент $a \in K$ нельзя представить в виде суммы квадратов. Тогда существует упорядочение поля K, при котором $a < 0$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 (б) поле $K(\sqrt{-a})$ вещественно. Пусть R — вещественное замыкание поля $K(\sqrt{-a})$. Согласно теореме 3 поле R имеет упорядочение, при котором элемент $-a = (\sqrt{-a})^2$ положителен, т. е. элемент a отрицателен. Ограничение этого упорядочения на $K \subset R$ и есть требуемое упорядочение. □

Введем для алгебраического замыкания поля R обозначение $\bar{R}$.

Теорема 5. *Поле R вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда $\bar{R} \neq R$ и $\bar{R} = R(\sqrt{-1})$.*

Доказательство. Предположим сначала, что поле R вещественно замкнуто. Тогда уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в R, поэтому $\bar{R} \neq R$. Докажем, что $\bar{R} = R(\sqrt{-1})$.

Введем для краткости обозначение $i = \sqrt{-1}$. Прежде всего покажем, что в поле $R(i)$ любое квадратное уравнение имеет корень. Корни квадратного трехчлена $x^2 + 2px + q$ находятся по формуле

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q},$$

поэтому достаточно доказать, что если $a, b \in K$, то $\sqrt{a + ib} \in K(i)$. Иными словами, нужно подобрать $c, d \in K$ так, что $(c + di)^2 = a + bi$, т. е. $c^2 - d^2 = a$ и $2cd = b$. Ясно, что $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$. Поэтому подходящими кандидатами являются

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad d^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

Прежде всего проверим, что так определенные числа c и d действительно лежат в R. Так как $a^2 \geq 0$ и $b^2 \geq 0$, то $a^2 + b^2 \geq 0$, поэтому согласно теореме 3 $\sqrt{a^2 + b^2} \in R$. Далее, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} \geq \pm a$ (здесь $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{a^2}$ — неотрицательные числа). Поэтому $\sqrt{a^2 + b^2} \pm a \geq 0$, т. е. c и d лежат в R. Равенство $c^2 - d^2 = a$ выполняется автоматически, а равенство $2cd = b$ будет выполняться, если правильно выбрать знаки чисел c и d.

Рассмотрим теперь произвольный многочлен f, неприводимый над R. Запишем его степень n в виде $n = 2^m q$, где q — нечетное число. Докажем индукцией по m, что f имеет корень в $R(i)$. При $m = 0$ это следует из теоремы 2. Предположим теперь, что $m > 0$ и требуемое утверждение уже доказано для чисел $1, \ldots, m-1$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена f в некотором расширении поля R. Выберем число $c \in R$ так, чтобы все числа $\alpha_k\alpha_l + c(\alpha_k + \alpha_l)$, где $k \neq l$, были попарно различны. Эти числа являются корнями многочлена g степени $n(n-1)/2$ с коэффициентами из R (коэффициенты лежат в R, так как они являются симметрическими функциями от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Число $\deg g = n(n-1)/2$ имеет вид $2^{m-1}q(n-1)$, где $q(n-1)$ — нечетное число. Поэтому к многочлену g можно применить предположение индукции. Без ограничения общности можно считать, что корень $\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$ многочлена g лежит в $R(i)$.

Докажем, что $R(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = R(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2))$. Рассмотрим для этого многочлен F с корнями $\alpha_k\alpha_l$ и многочлен G с корнями $\alpha_k + \alpha_l$; коэффициенты многочленов F и G лежат в R. Пусть $\theta = \alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ясно, что $G(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$ и $F(\theta - c(\alpha_1 + \alpha_2)) = F(\alpha_1\alpha_2) = 0$, т. е. $\alpha_1 + \alpha_2$ — общий корень многочленов $G(x)$ и $F(\theta - cx)$ с коэффициентами из $R(\theta)$. Из условия $\theta - c(\alpha_k + \alpha_l) \neq \alpha_k\alpha_l$ при $k, l \neq 1, 2$ следует, что $\alpha_1 + \alpha_2$ — единственный общий корень этих многочленов. Кроме того, этот общий корень некратный, так как он является некратным корнем многочлена G. Следовательно, наибольший общий делитель многочленов $G(x)$ и $F(\theta - cx)$ имеет вид $x - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Коэффициенты этих многочленов лежат в $R(\theta)$, поэтому $\alpha_1 + \alpha_2 \in R(\theta)$ и

$$\alpha_1\alpha_2 = \theta - c(\alpha_1 + \alpha_2) \in R(\theta) = R(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)).$$

Обратное включение $R(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)) \subset R(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$ очевидно.

Итак, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 \in R(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)) \subset R(i)$. Поэтому α_1 и α_2 — корни многочлена (степени 2) с коэффициентами из $R(i)$. Но мы уже доказали, что корни любого квадратного многочлена с коэффициентами из $R(i)$ лежат в $R(i)$. Таким образом, у многочлена f есть корень α_1, лежащий в $R(i)$. Это означает, что $\bar{R} = R(i)$.

Обратное утверждение (если $\bar{R} \neq R$ и $\bar{R} = R(i)$, то поле R вещественно замкнуто) доказывается существенно проще. Между R и $\bar{R} = R(i)$ нет промежуточных полей, поэтому достаточно доказать, что поле R вещественно, т. е. -1 не является суммой квадратов элементов R. По условию $i \notin R$, т. е. -1 не является квадратом. Таким образом, достаточно доказать, что в R сумма квадратов сама является квадратом. Поле $R(i)$ алгебраически замкнуто, поэтому если $a, b \in R$, то $\sqrt{a + bi} \in R(i)$, т. е. в R существуют такие элементы c и d, что $a + bi = (c + di)^2$. В таком случае $a - bi = (c - di)^2$. Поэтому

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = (c + di)^2(c - di)^2 = (c^2 + d^2)^2.$$

Остается заметить, что если сумма двух квадратов является квадратом, то и сумма любого числа квадратов тоже будет квадратом. □

2. Теорема Сильвестра для вещественно замкнутых полей

Сильвестр показал, что количество вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно рангу квадратичной формы, коэффициенты которой определенным образом выражаются через коэффициенты многочлена. Аналогичную теорему можно доказать и для вещественно замкнутых полей. Но мы сначала обсудим теорему Сильвестра для поля $\mathbb{R}$, потому что этот случай имеет самостоятельный интерес.

Рассмотрим линейное пространство $V = \mathbb{R}[x]/(f)$, состоящее из многочленов, рассматриваемых по модулю многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$. Будем считать, что старший коэффициент многочлена f равен 1 и $\deg f = n$. Многочлены $1, x, \ldots, x^{n-1}$ образуют базис пространства V. Каждому элементу $a \in V$ можно сопоставить линейное отображение $V \to V$, заданное формулой $v \mapsto av$ (элементы пространства V — многочлены; их можно перемножать). Пусть $\operatorname{tr}(a)$ — след этого отображения. Рассмотрим симметрическую билинейную форму $\varphi(v, w) = \operatorname{tr}(vw)$.

Теорема 6. а) *Пусть $f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) \in \mathbb{R}[x]$ и $s_k = \alpha_1^k + \cdots + \alpha_n^k$. Тогда матрица формы φ относительно базиса $1, x, \ldots, x^{n-1}$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n} \end{pmatrix}.$$

б) Сигнатура формы φ равна количеству различных вещественных корней многочлена f.

Доказательство. а) Разложим многочлен f над полем $\mathbb{C}$ на взаимно простые линейные множители: $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$. Согласно китайской теореме об остатках

$$h \pmod f \mapsto \Big(h \pmod{f_1^{m_1}}, \cdots, h \pmod{f_r^{m_r}}\Big)$$

задает канонический изоморфизм

$$\mathbb{C}[x]/(f) \cong \mathbb{C}[x]/(f_1^{m_1}) \times \cdots \times \mathbb{C}[x]/(f_r^{m_r}).$$

В этом разложении множители взаимно ортогональны относительно формы φ. Действительно, пусть многочлены h_i и h_j относятся к множителям с различными номерами i и j, т.е. $h_i \equiv 0 \pmod{f/f_i^{m_i}}$ и $h_j \equiv 0 \pmod{f/f_j^{m_j}}$. Тогда $h_ih_j \equiv 0 \pmod f$, поэтому отображение $v \mapsto h_ih_jv$ нулевое, а значит, его след равен нулю. Таким образом, $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_r$, где φ_i — ограничение формы φ на пространство $\mathbb{C}[x]/(f_i^{m_i} =)\mathbb{C}[x]/(x-\alpha_i)^{m_i}$. Остается проверить, что $\varphi_i(1, x^k) = m_i\alpha_i^k$.

Матрица формы φ_i легко вычисляется в базисе $1, x-\alpha_i, \ldots, (x-\alpha_i)^{m_i-1}$. Действительно, в этом базисе отображение $v \mapsto (x-\alpha_i)^kv$ представляется треугольной матрицей; след этой матрицы равен m_i при $k=0$ и равен 0 при $k>0$. Воспользовавшись тем, что

$$0 = \varphi_i(1, x-\alpha_i) = \varphi_i(1, x) - \alpha_i\varphi_i(1, 1) = \varphi_i(1, x) - m_i\alpha_i,$$

получим $\varphi_i(1, x) = m_i\alpha_i$. Затем с помощью равенства $\varphi_i(1, (x-\alpha_i)^k) = 0$ индукцией по k получаем $\varphi_i(1, x^k) = m_i\alpha_i^k$.

б) При вычислении сигнатуры нужно оставаться в поле $\mathbb{R}$, поэтому мы разложим многочлен f над полем $\mathbb{R}$ на взаимно простые линейные или квадратичные множители: $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$. Снова рассмотрим разложение

$$\mathbb{R}[x]/(f) \cong \mathbb{R}[x]/(f_1^{m_1}) \times \cdots \times \mathbb{R}[x]/(f_r^{m_r}).$$

Достаточно проверить, что сигнатура ограничения формы φ на $\mathbb{R}[x]/(f_i^{m_i})$ равна 1, если $\deg f_i = 1$, и равна 0, если f_i — неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен степени 2. Как мы уже выясняли, в базисе $1,\ x-\alpha_i,\ (x-\alpha_i)^{m_i-1}$ форма φ_i записывается матрицей $\begin{pmatrix} m_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому если $\deg f_i = 1$, то сигнатура формы φ_i равна 1.

Если f_i — неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен степени 2, то $\mathbb{R}[x]/(f_i^{m_i}) \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1)^{m_i}$; здесь имеется в виду изоморфизм над $\mathbb{R}$. Таким образом, достаточно вычислить сигнатуру формы φ на $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)^m$. Матрицу формы φ удобно вычислять в базисе $1,\ x^2,\ x^2+1,\ x(x^2+1),\ (x^2+1)^2, \dots,\ x(x^2+1)^{m-1},\ (x^2+1)^{m-1}$. В этом базисе операторы умножения на x и на x^2 представляются матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Поэтому след оператора умножения на x равен 0, а след оператора умножения на x^2 равен $-2m$. Операторы умножения на $x^a(x^2+1)^k$, где $a = 0, 1, 2$ и $k \geq 1$, представляются диагональными матрицами с нулевыми диагоналями; такие операторы имеют нулевой след. В итоге получаем, что матрица формы φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Сигнатура такой формы равны нулю. □

Вернемся теперь к интересующему нас случаю произвольных упорядоченных полей. Пусть K — упорядоченное поле, f — неприводимый многочлен над K. Будем называть вещественно замкнутое поле $R \supset K$ *вещественным замыканием* поля K, если R алгебраично над K и упорядочение K, индуцированное упорядочением R, совпадает с исходным упорядочением K.

Теорему Сильвестра можно доказать и для упорядоченных полей полей. Важнейший вывод из этого таков: если f — многочлен над упорядоченным полем K, то в любом вещественном замыкании R поля K число корней многочлена f одно и то же.

Сигнатура квадратичной формы φ над упорядоченным полем K определяется следующим образом. Над полем K квадратичную форму φ можно привести к виду

$$\varphi(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \tag{1}$$

Как и в случае поля $\mathbb{R}$, количество положительных λ_i и отрицательных не зависит от того, как именно мы приводим форму φ к виду (1). Действительно, предположим, что есть два разложения $V_+ \oplus V_- \oplus V_0 = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$. Тогда $V_+ \bigcap (W_- \oplus W_0) = 0$, поэтому $\dim V_+ + \dim W_- + \dim W_0 \leq 0$, а значит, $\dim V_+ \leq \dim W_+$. Аналогично, $\dim W_+ \leq \dim V_+$.

Пусть R — вещественное замыкание поля K. Из теоремы 5 следует, что степень неприводимого над полем R многочлена равна 1 или 2. Поэтому очевидная модификация рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 6 (см. с. 50), позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть f — многочлен над полем K и $\varphi(x, y)$ — билинейная симметрическая форма на пространстве $K[x]/(f)$, равная следу оператора умножения на xy. Тогда сигнатура формы φ равна количеству различных корней многочлена f, лежащих в вещественном замыкании R поля K.*

В частности, как мы уже говорили, количество различных корней многочлена f для всех вещественных замыканий поля K одно и то же.

Форму φ мы будем называть *формой следа* на пространстве $K[x]/(f)$.

Теорема 8. (Артин — Шрайер) *Пусть K — упорядоченное поле и R, R' — его вещественные замыкания. Тогда существует ровно один изоморфизм $\sigma : R \to R'$ над K, причем этот изоморфизм сохраняет порядок.*

Доказательство. В вещественно замкнутом поле условие $x > y$ эквивалентно тому, что $x - y$ является квадратом. Поэтому любой изоморфизм $\sigma : R \to R'$ сохраняет порядок.

Поле R алгебраично над K, поэтому любой элемент $\alpha \in R$ является корнем неприводимого многочлена f над K. Из теоремы 7 следует, что в R и R' многочлен f имеет одинаковое число корней. Пусть этими корнями будут $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ и $\alpha'_1 < \ldots < \alpha'_n$ соответственно. Выберем в R элементы t_i так, что $t_i^2 = \alpha_{i+1} - \alpha_i$. Согласно теореме о примитивном элементе

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_{n-1}) = K(\theta),$$

где $\theta \in R$ — корень некоторого неприводимого над K многочлена g. В поле R' многочлен g имеет столько же корней, сколько в поле R. В частности, у него есть некоторый корень $\theta' \in R'$. Над K существует изоморфизм $K(\theta) \to K(\theta')$. Он представляет собой вложение

$$\sigma : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, t_1, \ldots, t_{n-1}) \to R.$$

Легко проверить, что $\sigma(\alpha_i) = \alpha_i'$. В самом деле, σ переводит корень многочлена f в корень многочлена f, причем $\sigma(\alpha_{i+1}) - \sigma(\alpha_i) = \sigma(t_i^2) > 0$. На $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ отображение σ определено однозначно. В частности, однозначно определен образ элемента α. Теперь с помощью леммы Цорна можно построить однозначно определенный изоморфизм R на R' над K. □

Докажем теперь, что у любого упорядоченного поля есть вещественное замыкание.

Теорема 9. *Пусть K — упорядоченное поле, K' — его расширение, в котором нет соотношений вида $-1 = \sum \lambda_i a_i^2$, где λ_i — положительные элементы K и $a_i \in K'$. Тогда поле L, полученное из K' присоединением квадратных корней из всех положительных элементов K, вещественно.*

Доказательство. Предположим, что поле L не вещественно. Тогда $-1 = \sum b_i^2$, где $b_i \in L$. Поэтому в L есть соотношение вида $-1 = \sum \lambda_i b_i^2$, где λ_i — положительные элементы K и $b_i \in L$. По условию все b_i не могут одновременно лежать в K'. Поэтому определено наименьшее натуральное число r, для которого выполняется некоторое соотношение указанного вида с $b_i \in K'(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_r})$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — положительные элементы K.

Запишем b_i в виде $b_i = x_i + y_i\sqrt{\mu_r}$, где $x_i, y_i \in K'(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_{r-1}})$. Тогда

$$-1 = \sum \lambda_i(x_i + y_i\sqrt{\mu_r})^2 = \sum \lambda_i(x_i^2 + y_i^2\sqrt{\mu_r}) + 2\sqrt{\mu_r}\sum x_iy_i.$$

Если $\sum x_iy_i \neq 0$, то $\sqrt{\mu_r} \in K'(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_{r-1}})$, что противоречит минимальности r. Поэтому

$$-1 = \sum \lambda_i x_i^2 + \sum \lambda_i \mu_r y_i^2,$$

где λ_i и $\lambda_i\mu_r$ — положительные элементы K и $x_i, y_i \in K'(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_{r-1}})$. Это тоже противоречит минимальности r. □

Следствие 1. *У любого упорядоченного поля K есть вещественное замыкание.*

Доказательство. Положим $K' = K$. В K нет соотношений вида $-1 = \sum \lambda_i a_i^2$ с положительными λ_i. Поэтому поле L, полученное из K присоединением квадратных корней из всех положительных элементов K, вещественно. Вещественное замыкание поля L и есть требуемое вещественное замыкание поля K. □

Следствие 2. *Пусть K — упорядоченное поле и K' — его расширение. Упорядочение поля K можно продолжить на K' тогда и только тогда, когда в K' нет соотношений вида $-1 = \sum \lambda_i a_i^2$, где λ_i — положительные элементы K и $a_i \in K'$.*

Доказательство. Ясно, что если соотношения указанного вида есть, то упорядочение нельзя продолжить на K'. Предположим, что таких соотношений нет. Тогда можно построить вещественное поле $L \supset K'$. Рассмотрим его вещественное замыкание R. Упорядочение R индуцирует требуемое упорядочение K'. □

3. Семнадцатая проблема Гильберта

В этом параграфе мы наконец докажем, что если вещественная рациональная функция $r(x_1, \dots, x_n)$ неотрицательна для всех вещественных $x_1, \dots, x_n$, то ее можно представить в виде суммы квадратов вещественных рациональных функций. Это доказательство годится не только для поля $\mathbb{R}$, но и для произвольного вещественно замкнутого поля R. Требуемое доказательство легко получить из следующей достаточно трудной теоремы.

Теорема 10. (Артин — Ленг) *Пусть R — вещественно замкнутое поле и $K = R(x_1, \dots, x_n)$ — упорядоченное конечно порожденное расширение поля R, причем упорядочение поля K согласовано с упорядочением поля R. Тогда существует гомоморфизм R-алгебр*

$$\varphi : R[x_1, \dots, x_n] \to R,$$

тождественный на R.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда степень трансцендентности K над R равна 1. Можно считать, что элемент $x_1 = x$ трансцендентен над R. Тогда поле K является конечным алгебраическим расширением поля R, поэтому согласно теореме о примитивном элементе $K = R(x)[y]$. Точно такие же рассуждения, как при доказательстве леммы Нётер о нормализации (см. [Л], с. 294), показывают, что элемент y можно выбрать так, чтобы он удовлетворял уравнению $y^l + c_1(x)y^{l-1} + \dots + c_l(x)$, где $c_1(x), \dots, c_l(x) \in \mathbb{R}[x]$. При этом будем считать, что степень l минимальна.

Рассмотрим многочлен $f(X, Y) = Y^l + c_1(X)Y^{l-1} + \dots + c_l(X)$ от независимых переменных X и Y. Любой паре элементов $a, b \in R$, удовлетворяющих соотношению $f(a, b) = 0$, соответствует гомоморфизм R-алгебр $\sigma : R[x, y] \to R$, заданный формулами $\sigma(x) = a$ и $\sigma(y) = b$. Покажем, что таких пар $a, b \in R$ бесконечно много.

Пусть R_K — вещественное замыкание поля K. Многочлен $\tilde{f}(Y) = f(x, Y) \in R(x)[Y]$ имеет в поле R_K корень y, поэтому согласно теореме 7 сигнатура формы следа φ на пространстве

$$R(x)[Y]/(\tilde{f}) \cong R(x)[y]/R(x) = K/R(x)$$

положительна. Эту форму можно привести к диагональному виду с элементами $h_1(x), \dots, h_s(x) \in R[x]$ на диагонали.

Над вещественно замкнутым полем R любой многочлен раскладывается на линейные и неприводимые квадратичные множители. При этом квадратичные множители имеют вид $(x + \alpha)^2 + \beta^2$, где $\alpha, \beta \in R$. Поэтому они положительны как элементы $R(x)$, и при всех $a \in R$ элементы $(a + \alpha)^2 + \beta^2 \in R$ тоже положительны.

Пусть $x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_t$ — все различные линейные множители, входящие в разложения многочленов $h_1(x), \dots, h_s(x)$. Упорядочим элементы $x, \lambda_1, \dots, \lambda_t \in R(x)$; при этом возможны следующие варианты:

$$\dots < \lambda_i < x < \lambda_j < \dots; \qquad \dots < \lambda_i < x; \qquad x < \lambda_j < \dots$$

Пусть a — любой элемент поля R, удовлетворяющий, соответственно, неравенствам $\lambda_i < a < \lambda_j$; $\lambda_i < a$; $a < \lambda_j$ (таких элементов a бесконечно много). Тогда знаки элементов $h_k(a)$ и $h_k(x)$ совпадают при всех $k = 1, \ldots, s$. Поэтому сигнатура формы φ равна сигнатуре формы с диагональными элементами $h_1(a), \ldots, h_s(a)$.

Покажем, что для почти всех a форма следа φ_a на пространстве $R[Y]/(f(a, Y))$ приводится к диагональному виду с элементами $h_1(a), \ldots, h_s(a)$ на диагонали. Действительно, пусть $A(x) = (a_{ij}(x))$ — матрица формы φ в базисе $1, Y, \ldots, Y^{l-1}$, а $B(x) = (b_{ij}(x))$ — матрица, для которой

$$(B(x))^T A(x) B(x) = \mathrm{diag}\Big(h_1(x), \ldots, h_s(x)\Big).$$

Тогда если $\det B(a) \neq 0$ и ни один из знаменателей рациональных функций $b_{ij}(x)$ не обращается в нуль при $x = a$, то

$$(B(a))^T A(a) B(a) = \Big(\mathrm{diag}(h_1(a), \ldots, h_s(a)\Big).$$

Остается заметить, что $A(a)$ — матрица формы φ_a в базисе $1, Y, \ldots, Y^{l-1}$.

Итак, существует бесконечно много элементов $a \in R$, для которых сигнатура формы φ_a положительна. Для всех таких a многочлен $f(a, Y)$ имеет корень $b \in R$, т. е. $f(a, b) = 0$. Как мы уже говорили, любой такой паре (a, b) соответствует гомоморфизм R-алгебр $\sigma : R[x, y] \to R$. Покажем, что почти все такие гомоморфизмы можно продолжать на $R[x, y, x_2, \ldots, x_n] \supset R[x, y]$. Напомним, что $x_2, \ldots, x_n \in R[x_1, \ldots, x_n] = K = R(x)[y]$, поэтому $x_i = p_i(x, y)/q_i(x)$, где p_i и q_i — многочлены. Пусть $q = q_1 \cdots q_n$. По построению $\sigma(q(x)) = q(a) \neq 0$ для почти всех a. В таких случаях гомоморфизм σ можно продолжить на

$$R[x, y]\left[\frac{1}{q(x)}\right] \supset R[x, y, x_2, \ldots, x_n] \supset R[x_1, \ldots, x_n] = K.$$

Переход от случая, когда степень трансцендентности K над R равна 1, к случаю степени трансцендентности $m \geq 1$ делается простой индукцией по m. Предположим, что существование требуемого гомоморфизма доказано для всех полей K, степень трансцендентности которых над R строго меньше m. Рассмотрим поле $K = R(x_1, \ldots, x_n)$, степень трансцендентности которого над R равна m. Выберем промежуточное поле $F : R \subset F \subset K$, для которого степень трансцендентности K над F равна 1. Пусть $R_F \subset R_K$ — вещественные замыкания F и K. Степень трансцендентности R_K над R_F равна 1, поэтому существует гомоморфизм R_F-алгебр

$$\psi : R_F[x_1, \ldots, x_n] \to R_F.$$

Степень трансцендентности R_F над R равна $m - 1$, поэтому степень трансцендентности поля $R(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)) \subset R_F$ над R не превосходит $m - 1$. Ясно также, что на поле $R(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n))$ можно задать упорядочение, индуцированное упорядочением поля R_F. Поэтому существует гомоморфизм R-алгебр

$$\sigma : R[\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)] \to R.$$

Ограничение композиции отображений ψ и σ на алгебру

$$R[x_1, \dots, x_n] \subset R_F[x_1, \dots, x_n]$$

и есть требуемый гомоморфизм. □

Теперь уже легко доказать теорему Артина о неотрицательных рациональных функциях. Пусть k — упорядоченное поле. Рациональную функцию

$$r(x_1, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{q(x_1, \dots, x_n)}, \quad \text{где} \quad p, q \in k[x_1, \dots, x_n],$$

называют *неотрицательной*, если $r(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ при всех $a_1, \dots, a_n \in k$, для которых $q(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

Теорема 11. (Артин) *Пусть R — вещественно замкнутое поле, $r \in R(x_1, \dots, x_n)$ — неотрицательная рациональная функция. Тогда r можно представить в виде суммы квадратов элементов $R(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. Предположим, что r не является суммой квадратов элементов поля $R(x_1, \dots, x_n)$. Тогда согласно теореме 4 существует упорядочение поля $R(x_1, \dots, x_n)$, для которого $r < 0$. Представим r в виде несократимой дроби p/q, где $p, q \in R[x_1, \dots, x_n]$. Рассмотрим R-алгебру

$$R\left[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{q(x_1, \dots, x_n)}\right],$$

содержащую r. В вещественном замыкании упорядоченного поля $R(x_1, \dots, x_n)$ есть такой элемент γ, что $\gamma^2 = -r > 0$. Поле $R(x_1, \dots, x_n, \gamma)$ содержится в вещественном замыкании $R(x_1, \dots, x_n)$, а значит, в этом поле можно ввести упорядочение, индуцированное упорядочением вещественного замыкания. По теореме Артина — Ленга существует гомоморфизм

$$\varphi : R\left[x_1, \dots, x_n, \frac{1}{q(x_1, \dots, x_n)}\gamma, \frac{1}{\gamma}\right] \to R,$$

тождественный на R.

Ясно, что $\varphi(\gamma)\varphi(\frac{1}{\gamma}) = 1$ и $\varphi(q)\varphi(\frac{1}{q}) = 1$, поэтому $\varphi(\gamma) \neq 0$ и $\varphi(q) \neq 0$. Следовательно, $\varphi(r) = -\varphi(\gamma^2) = -(\varphi(\gamma))^2 < 0$. Но

$$\varphi(r) = \frac{p(a_1, \dots, a_n)}{q(a_1, \dots, a_n)}, \quad \text{где} \quad a_i = \varphi(x_i).$$

При этом $q(a_1, \dots, a_n) = \varphi(q) \neq 0$. Неравенство $r(a_1, \dots, a_n) < 0$ противоречит условию теоремы. □

Для произвольного (т. е. не обязательно вещественно замкнутого) упорядоченного поля теорема Артина неверна (первый пример такого поля приведен в [Du];

более простой пример можно найти на с. 86 книги [P2]). Но, слегка дополнив доказательство теоремы 11, для произвольного упорядоченного поля k можно доказать следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть k — упорядоченное поле и R — его вещественное замыкание. Если рациональная функция $r \in k(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что $r(a_1, \ldots, a_n) \geq 0$ при всех $a_1, \ldots, a_n \in R$ (если, конечно, значение $r(a_1, \ldots, a_n)$ при этом определено), то r можно представить в виде суммы квадратов элементов $k(x_1, \ldots, x_n)$.*

Доказательство. Если r не является суммой квадратов элементов $k(x_1, \ldots, x_n)$, то существует упорядочение поля $k(x_1, \ldots, x_n)$, для которого $r < 0$. Пусть R' — вещественное замыкание поля $k(x_1, \ldots, x_n)$ с таким упорядочением. Можно считать, что $R \subset R'$ (вещественное замыкание поля $k(x_1, \ldots, x_n)$ содержит некоторое вещественное замыкание R_1 поля k, а R_1 и R изоморфны как вещественные замыкания одного и того же поля). В поле R' есть такой элемент γ, что $\gamma^2 = -r > 0$. Введем на R-алгебре

$$R\left[x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{q(x_1, \ldots, x_n)}\gamma, \frac{1}{\gamma}\right] \subset R'$$

упорядочение, индуцированное упорядочением R'. Дальнейшие рассуждения в точности те же самые, что и при доказательстве теоремы 11. □

Следствие. *Если упорядоченное поле k таково, что из условия $r(x_1, \ldots, x_n) < 0$ при всех $x_1, \ldots, x_n \in k$ следует, что $r(x_1, \ldots, x_n) < 0$ при всех $x_1, \ldots, x_n \in R$, где R — вещественное замыкание k, то для поля k верна теорема Артина.*

В частности, теорема Артина верна для поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, т. е. любая неотрицательная рациональная функция с рациональными коэффициентами является суммой квадратов рациональных функций с рациональными коэффициентами.

В заключение приведем формулировки двух интересных теорем, доказательства которых опираются на теорему Артина. Точнее говоря, первая из этих теорем выводится из теоремы Артина, а вторая — из первой.

Теорема 13. ([Ri]) *Пусть I — идеал в кольце $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) любой многочлен, обращающийся в нуль во всех общих вещественных нулях многочленов из идеала I, сам лежит в I;

(2) если сумма квадратов многочленов из кольца $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ лежит в I, то и сами эти многочлены лежат в I.

Теорема 14. ([St]) *Однородная форма F неотрицательна тогда и только тогда, когда существует однородное полиномиальное соотношение вида $\varphi(-F) = 0$, где*

$$\varphi(u) = u^{2n+1} + a_1 u^{2n} + \cdots + a_{2n}$$

и коэффициенты $a_1, \ldots, a_{2n}$ являются суммами квадратов однородных форм.

Часть II. Теория Пфистера

4. Мультипликативные квадратичные формы

В этом параграфе мы будем рассматривать квадратичные формы над произвольным полем k, характеристика которого не равна 2. Квадратичная форма φ на пространстве k^n задается симметрической матрицей A порядка n. При этом если $x = (x_1, \dots x_n) \in k^n$, то
$$\varphi(x) = xAx^T = \sum x_i x_j a_{ij}.$$

Квадратичные формы φ и ψ называют *эквивалентными,* если существует такая невырожденная матрица P порядка n, что $\varphi(x) = \psi(Px)$. В таком случае ψ задается матрицей PAP^T. Для эквивалентных форм будем использовать обозначение $\varphi \cong \psi$.

Будем говорить, что форма φ *представляет* элемент $a \in k$, если $a = \varphi(x)$ для некоторого $x \in k^n$. Например, форма $\varphi(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ представляет элемент a тогда и только тогда, когда a можно представить в виде суммы n квадратов.

Основным инструментом теории Пфистера служат введенные им мультипликативные формы специального вида. Квадратичную форму φ называют *мультипликативной,* если формы φ и $a\varphi$ эквивалентны для любого ненулевого элемента a, представимого формой φ.

Любая мультипликативная форма φ обладает следующим замечательным свойством: если элементы a и b представимы формой φ, то элемент ab тоже представим формой φ. Дело в том, что эквивалентные формы представляют одно и то же множество элементов поля k. А если мультипликативная форма φ представляет элементы a и b, то форма $a\varphi$ эквивалентна ей и представляет элемент ab.

Введем для удобства следующие обозначения. Форму $\varphi(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ будем обозначать $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Для форм $\varphi = \langle a_1, \dots, a_m\rangle$ и $\psi = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$ положим

$$\begin{aligned}
\varphi \oplus \psi &= \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\rangle, \\
\varphi \otimes \psi &= \langle a_1b_1, \dots, a_mb_1, a_1b_2, \dots, a_mb_2, \dots, a_1b_n, \dots, a_mb_n\rangle.
\end{aligned}$$

Формы вида $\langle 1, a_1\rangle \otimes \langle 1, a_2\rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_n\rangle$, где $a_1 \cdots a_n \neq 0$, введенные Пфистером, играют главную роль в его теории. Будем для краткости обозначать такие формы $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$. Наибольший интерес для нас представляет форма $\langle\langle \underbrace{1, \dots, 1}_{n}\rangle\rangle$, т. е. сумма 2^n квадратов. Но при доказательствах индукцией по n не удается избежать рассмотрения общего случая $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$.

Теорема 15. (Пфистер) *Форма $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ мультипликативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть форма $\langle\langle a_1\rangle\rangle = x_1^2 + a_1x_2^2$ представляет элемент $b \neq 0$, т. е. $b = c_1^2 + a_1c_2^2$. Положим $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ и $P = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -a_1c_2 & c_1 \end{pmatrix}$. Легко проверить, что $PAP^T = bA$ и $\det P \neq 0$. Это означает, что $\langle\langle a_1\rangle\rangle \cong b\langle\langle a_1\rangle\rangle$.

Форма $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ имеет вид $\varphi \oplus a_n\varphi$, где $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle$. Поэтому достаточно доказать, что если форма φ мультипликативна и $a \neq 0$, то форма $\varphi \oplus a\varphi$

тоже мультипликативна. Пусть $b = \varphi(x) + a\varphi(y) = \xi + a\eta \neq 0$, где элементы ξ и η представимы формой φ. Если $\xi = 0$, то $\eta \neq 0$, поэтому $\eta\varphi \cong \varphi$, а значит,

$$b(\varphi \oplus a\varphi) = a\eta(\varphi \oplus a\varphi) \cong a\varphi \oplus a^2\varphi \cong \varphi \oplus a\varphi,$$

так как $a^2\varphi \cong \varphi$. Случай $\eta = 0$ рассматривается аналогично. Остается рассмотреть случай $\xi\eta \neq 0$. В этом случае $\varphi \cong \xi\varphi$ и $\varphi \cong \xi^{-1}\varphi \cong (\eta\xi^{-1})\varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} b(\varphi \oplus a\varphi) &= (\xi + a\eta)(\varphi \oplus a\varphi) \cong (1 + a\eta\xi^{-1})(\varphi \oplus (a\eta\xi^{-1})\varphi) \cong \\ &\cong (1 + a\eta\xi^{-1})\langle\langle a\eta\xi^{-1}\rangle\rangle \otimes \varphi. \end{aligned}$$

При разборе случая $n = 1$ было показано, что форма $\langle\langle a\eta\xi^{-1}\rangle\rangle$ мультипликативна. Эта форма представляет элемент $1 + a\eta\xi^{-1} = b\xi^{-1} \neq 0$. Следовательно,

$$(1 + a\eta\xi^{-1})\langle\langle a\eta\xi^{-1}\rangle\rangle \cong \langle\langle a\eta\xi^{-1}\rangle\rangle,$$

а значит,

$$b(\varphi \oplus a\varphi) \cong \langle\langle a\eta\xi^{-1}\rangle\rangle \otimes \varphi = \varphi \oplus (a\eta\xi^{-1})\varphi \cong \varphi \oplus a\varphi,$$

что и требовалось доказать. □

При доказательстве теоремы Пфистера мы не пользовались тем, что $\operatorname{char} k \neq 2$, поэтому она верна для любого поля. Особенно интересен случай $a_1 = \ldots = a_n = 1$. В этом случае из теоремы Пфистера следует, что в любом поле произведение элементов, представимых в виде суммы 2^n квадратов, тоже представимо в виде суммы 2^n квадратов. При $n = 1, 2, 3$ для такого представления есть явные формулы общего вида. Например, при $n = 1$, т. е. для суммы двух квадратов, требуемое тождество имеет вид

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 + x_2y_2)^2(x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Но при $n > 3$ тождеств такого вида уже быть не может.

В дальнейшем нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Запишем форму* $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, *где* $a_1 \cdots a_n \neq 0$, *в виде* $\varphi = \langle 1\rangle \oplus \varphi'$. *Пусть форма* φ' *представляет элемент* $b_1 \neq 0$. *Тогда* $\varphi \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$ *для некоторых ненулевых* $b_2, \ldots, b_n$.

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n = 1$ форма φ' имеет вид $a_1x_1^2$. Если $b_1 = a_1c^2$, то $b_1x_1^2 = a_1(cx_1)^2 \cong a_1x_1^2$. Таким образом, $\langle a_1\rangle \cong \langle b_1\rangle$, а значит, $\langle\langle a_1\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1\rangle\rangle$.

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для всех форм вида $\langle\langle c_1, \ldots, c_{n-1}\rangle\rangle$, где $c_1 \cdots c_{n-1} \neq 0$. Чтобы доказать требуемое утверждение для формы $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$, рассмотрим форму $\psi = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle = \langle 1\rangle \oplus \psi'$. Ясно, что $\varphi = \psi \oplus a_n\psi$ и $\varphi' = \psi' \oplus a_n\psi$. Поэтому элемент b_1, представимый формой φ', можно записать в виде $b_1 = b_1' + a_nb$, где элементы b_1' и b представляются формами ψ' и ψ, соответственно.

Пусть сначала $b = 0$. В таком случае $b_1' = b_1$. Согласно предположению индукции $\psi \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle$, а значит, $\varphi \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n\rangle\rangle$.

Рассмотрим теперь случай $b \neq 0$. В этом случае форма ψ представляет ненулевой элемент b. Согласно теореме Пфистера форма ψ мультипликативна, поэтому $\psi \cong b\psi$. Следовательно,

$$\varphi' = \psi' \oplus (a_n b)(b^{-1}\psi) \cong \psi' \oplus c_n\psi,$$

где $c_n = a_n b$. При этом $b_1 = b_1' + c_n$. Пусть $b_1' = 0$. Тогда $b_1 = c_n$ и

$$\varphi \cong \langle\langle c_n\rangle\rangle \otimes \psi = \langle\langle c_n, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle = \langle\langle b_1, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle.$$

Остается рассмотреть случай, когда $b_1 = b_1' + c_n$, причем $b_1' c_n \neq 0$. Форма ψ' представляет элемент b_1', поэтому согласно предположению индукции $\psi \cong \langle\langle b_1', b_2, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle$. Следовательно,

$$\varphi \cong \langle\langle b_1', b_2, \ldots, b_{n-1}, c_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1', c_n, b_2, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1', c_n\rangle\rangle \otimes \langle\langle b_2, \ldots, b_{n-1}\rangle\rangle.$$

Пусть $\lambda = b_1'$ и $\mu = c_n$. Тогда $\lambda + \mu = b_1 \neq 0$. Равенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 \\ 0 & (\lambda+\mu)\lambda\mu \end{pmatrix}$$

показывает, что $\langle b_1', c_n\rangle \cong \langle b_1, b_1 b_1' c_n\rangle$. Поэтому

$$\langle\langle b_1', c_n\rangle\rangle = \langle 1,\, b_1',\, c_n,\, b_1' c_n\rangle \cong \langle 1,\, b_1,\, b_1' c_n,\, b_1 b_1' c_n\rangle = \langle\langle b_1, b_1' c_n\rangle\rangle.$$

Положим $b_n = b_1' c_n$. Тогда

$$\varphi \cong \langle\langle b_1, b_n\rangle\rangle \otimes \langle\langle b_2, \ldots, b_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle.$$

□

5. C_i-поля

В предыдущем параграфе мы познакомились с одним из инструментов теории Пфистера — мультипликативными формами. Другой инструмент этой теории, C_i-поля, был создан в 1933 — 1936 гг. китайским математиком Чунжцзе Дзеном и в 1952 г. переоткрыт Ленгом.

Поле K называют *C_i-полем,* если любая система однородных многочленов

$$f_1, \ldots, f_r \in K[x_1, \ldots, x_n],$$

для которых $d_1^i + \cdots + d_r^i < n$, где $d_s = \deg f_s$, имеет общий нетривиальный нуль.

Теорема 16. (Дзен — Ленг) *Если поле L алгебраически замкнуто, то поле $K = L(t_1, \ldots, t_i)$ (т. е. поле рациональных функций от i переменных над полем L) является C_i-полем.*

Доказательство. Применим индукцию по i. При $i = 0$ поле K совпадает с L, т. е. поле K алгебраически замкнуто, а условие $d_1^i + \dots + d_r^i < n$ означает, что $r < n$. Требуемое утверждение следует из того, что система из r уравнений в n-мерном аффинном пространстве над алгебраически замкнутым полем определяет алгебраическое многообразие, размерность которого не меньше $n - r$. Доказательство этого свойства размерности можно найти в [M], § 3B.

Шаг индукции заключается в том, чтобы доказать, что если поле L является C_i-полем, то поле $K = L(t)$ является C_{i+1}-полем. Пусть $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$ — однородные многочлены, причем $d_1^{i+1} + \dots + d_r^{i+1} < n$, где $d_s = \deg f_s$. Требуется доказать, что многочлены $f_1, \dots, f_r$ имеют общий нетривиальный нуль в K. Коэффициенты многочленов $f_1, \dots, f_r$ лежат в $K = L(t)$, т. е. они являются рациональными функциями над полем L от переменной t. Умножив все эти коэффициенты на подходящий многочлен из кольца $L[t]$, можно будет считать, что коэффициенты многочленов $f_1, \dots, f_r$ лежат в $L[t]$, т. е. эти коэффициенты являются многочленами от t над полем L. Степени этих многочленов ограничены некоторым числом m, поэтому любой коэффициент α можно представить в виде

$$\alpha = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m, \quad \text{где} \quad a_0, \dots, a_m \in L. \tag{1}$$

При $p = 1, \dots, n$ положим

$$x_p = x_{p0} + x_{p1} t + \dots + x_{ps} t^s, \tag{2}$$

где $x_{p0}, \dots, x_{ps}$ — независимые переменные над полем L, а число s достаточно велико (это число мы определим чуть позже). Заменим в каждой однородной форме $f_1, \dots, f_r$ коэффициенты и переменные выражениями (1) и (2), соответственно. В результате форма f_j запишется в виде

$$g_0 + g_1 t + \dots + g_N t^N,$$

где $N = sd_j + m$ и $g_0, \dots, g_N$ — формы степени d_j от $(s+1)n$ переменных x_{pq} над полем L. Согласно предположению индукции все формы g для многочленов $f_1, \dots, f_r$ имеют общий нетривиальный нуль, если выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{r} (sd_j + m + 1) d_j^i < (s+1)n,$$

т. е.

$$(m+1) \sum d_j^i - n < s(n - \sum d_j^{i+1}).$$

По условию $n - \sum d_j^{i+1} > 0$, поэтому требуемое неравенство выполняется при достаточно больших s, например, при $s > (m+1) \sum d_j^i$. □

6. Теорема Пфистера о суммах квадратов рациональных функций

В двух предыдущих параграфах мы приготовили основные инструменты для доказательства теоремы Пфистера. Нам понадобится еще следующее свойство квадратичных форм: если невырожденная квадратичная форма φ над полем K изотропна (т. е. $\varphi(u) = 0$ для некоторого $u \neq 0$), то она универсальна (т. е. представляет все элементы поля K). В самом деле, невырожденной квадратичной форме φ соответствует невырожденная билинейная симметрическая форма

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)).$$

Поэтому найдется такой вектор v, что $f(u,v) = 1$. В таком случае

$$\varphi(v + \lambda u) = \varphi(v) + \varphi(\lambda u) + 2f(v, \lambda u) = \varphi(v) + 2\lambda.$$

Для любого $b \in K$ можно выбрать такое λ, что $\varphi(v) + 2\lambda = b$.

Из теоремы 16 следует, что если поле L алгебраически замкнуто, то любая невырожденная квадратичная форма φ от 2^n переменных на полем $K = L(t_1, \ldots, t_n)$ универсальна. В самом деле, пусть $r \in K$. Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму $\tilde{\varphi}(u,t) = \varphi(u) - rt^2$ от $2^n + 1$ переменных. Согласно теореме 16 форма $\tilde{\varphi}$ имеет нетривиальный нуль (u_0, t_0). Если $t_0 = 0$, то $\varphi(u_0) = 0$, причем $u_0 \neq 0$. Это означает, что форма φ изотропна, а потому универсальна. Если же $t_0 \neq 0$, то $\varphi(t_0^{-1}u_0) = r$, т. е. форма φ представляет r.

Теорема 17. (Пфистер) *Пусть R — вещественно замкнутое поле и $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ — невырожденная квадратичная форма от 2^n переменных над полем $R(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда если b — сумма квадратов элементов $R(x_1, \ldots, x_n)$, то форма φ представляет b.*

Доказательство. Если форма φ изотропна, то она универсальна. Поэтому можно считать, что форма φ анизотропна, т. е. $\varphi(u) \neq 0$ при $u \neq 0$. По условию $b = b_1^2 + \cdots + b_m^2$. Применим индукцию по m. При $m = 1$ утверждение очевидно, так как любая мультипликативная форма представляет элемент 1, а значит, она представляет и элемент $b_1^2 \cdot 1$.

Пусть теперь $m = 2$, т. е. $b = b_1^2 + b_2^2$, причем $b_1 b_2 \neq 0$. Пусть $L = R(i)$ — алгебраическое замыкание поля R. Элемент $\beta = b_1 + ib_2$ порождает поле $L(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $R(x_1, \ldots, x_n)$, т. е.

$$L(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1, \ldots, x_n)(\beta).$$

Поле R вещественное, поэтому $i \notin R(x_1, \ldots, x_n)$ и $\beta \notin R(x_1, \ldots, x_n)$.

Форму φ можно рассматривать и как форму над полем $L(x_1, \ldots, x_n) \supset R(x_1, \ldots, x_n)$. Над этим полем она универсальна, так как поле L алгебраически замкнуто. Поэтому найдутся такие 2^n-мерные векторы u, v с коэффициентами из $R(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $\varphi(u + \beta v) = \beta$, т. е.

$$\varphi(u) + 2\beta f(u,v) + \beta^2 \varphi(v) = \beta, \tag{1}$$

где f — билинейная симметрическая форма, соответствующая φ. При этом $v \neq 0$, так как иначе $\beta = \varphi(u) \in R(x_1, \ldots, x_n)$. Из анизотропности формы φ следует, что $\varphi(v) \neq 0$.

Неприводимое над $R(x_1, \ldots, x_n)$ уравнение для β имеет вид $(\beta - b_1)^2 + b_2^2 = 0$, т. е.

$$\beta^2 - 2b_1\beta + b = 0. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем, в частности, $b = \varphi(u)/\varphi(v)$. Из мультипликативности формы φ следует, что она представляет как элемент $1/\varphi(v)$, так и произведение элементов $\varphi(u)$ и $1/\varphi(v)$, т. е. элемент b.

Предположим теперь, что требуемое утверждение доказано для некоторого $m \geq 2$, т. е. любая форма φ вида $\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ представляет любой элемент вида $b_1^2 + \cdots + b_m^2$. Нужно доказать, что форма φ представляет любой элемент вида $b_1^2 + \cdots + b_m^2 + b_{m+1}^2$, где $b_{m+1} \neq 0$. Запишем этот элемент в виде $b_{m+1}^2(b+1)$, где b — сумма m квадратов. Достаточно доказать, что форма φ представляет элемент $c = b + 1$. Можно считать, что $c \neq 0$.

Чтобы воспользоваться леммой 1 (см. с. 59), запишем форму φ в виде $\varphi = \langle 1\rangle \oplus \varphi'$. Согласно предположению индукции форма φ представляет элемент b, т. е. $b = b_0^2 + b'$, где элемент b' представляется формой φ'. Рассмотрим мультипликативную форму $\psi = \varphi \otimes \langle 1, -c\rangle$ от 2^{n+1} переменных. Ясно, что

$$\psi = \langle 1\rangle \oplus \varphi' \oplus (-c)\varphi = \langle 1\rangle \oplus \psi',$$

где форма $\psi' = \varphi' \oplus (-c\varphi)$ представляет элемент

$$b' - c = (b - b_0^2) - (1 + b) = -1 - b_0^2.$$

При этом $-1 - b_0^2 \neq 0$, так как $i \notin R(x_1, \ldots, x_n)$. В таком случае можно применить лемму 1 к форме ψ и элементу $-1 - b_0^2$. В результате получим, что в поле $R(x_1, \ldots, x_n)$ существуют такие ненулевые элементы $c_1, \ldots, c_n$, что

$$\psi \cong \langle\langle -1 - b_0^2, c_1, \ldots, c_n\rangle\rangle,$$

т. е. $\psi \cong \langle -1 - b_0^2\rangle \otimes \chi = \chi \oplus (-1 - b_0^2)\chi$, где $\chi \cong \langle\langle c_1, \ldots, c_n\rangle\rangle$,

Применим снова предположение индукции, на этот раз к форме χ. Элемент $1 + b_0^2$ является суммой не более чем m квадратов, поэтому форма χ его представляет. В таком случае из мультипликативности формы χ следует, что $\chi \cong (1 + b_0^2)\chi$, а значит,

$$\varphi \oplus (-c\varphi) = \psi \cong \chi \oplus (-1 - b_0^2)\chi \cong (1 + b_0^2)\chi \oplus (-1 - b_0^2)\chi.$$

Пусть $\xi = (1 + b_0^2)\chi$. Тогда

$$\varphi(Px + Qy) - c\varphi(Rx + Sy) = \xi(x) - \xi(y),$$

где $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = U$ — невырожденная матрица порядка 2^n. Положив $x = y$, получим $\varphi(Ax) = c\varphi(Bx)$, где $A = P + Q$ и $B = R + S$. Из невырожденности матрицы U следует, что если $x \neq 0$, то $(Ax, Bx) \neq (0, 0)$. Если бы одна из матриц A и B

оказалась вырожденной, то форма φ была бы изотропной, а мы рассматриваем случай анизотропной формы. Если же обе матрицы невырожденные, то $\varphi \cong c\varphi$, а значит, мультипликативная форма φ представляет элемент c. $\square$

Согласно теореме Артина любой неотрицательный элемент поля $R(x_1, \ldots, x_n)$, где R — вещественно замкнутое поле, является суммой квадратов. Поэтому мультипликативная форма $\langle\langle \underbrace{1, \ldots, 1}_{n} \rangle\rangle$ представляет любой неотрицательный элемент поля $R(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. любой неотрицательный элемент этого поля можно представить в виде суммы 2^n квадратов.

На с. 36 приведен пример элемента поля $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$, который нельзя представить в виде суммы n квадратов. Таким образом, если N — наименьшее число, для которого любой элемент поля $\mathbb{R}(x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде суммы N квадратов, то $n + 1 \leq N \leq 2^n$. В общем случае для N никаких других оценок не известно. Лишь при $n = 2$ известно, что $N = 4$. Это утверждение доказано двумя разными способами, но оба доказательства весьма сложные. Одно доказательство использует теорию эллиптических кривых над полями алгебраических функций (см. [CEP] и [Ch]). Другое доказательство опирается на теорему Нётера — Лефшеца о том, что на поверхности общего положения степени $d \geq 4$ в трехмерном проективном пространстве любая кривая высекается некоторой другой поверхностью (см. [Co]).

При доказательстве теоремы Пфистера существенно используется то, что поле R вещественно замкнуто. Для поля $\mathbb{Q}$ теорема Пфистера неверна. Это видно уже при $n = 0$. Действительно, не любое положительное рациональное число является квадратом рационального числа. Но при $n = 0$ требуемая оценка известна: любое положительное рациональное число является суммой квадратов четырех рациональных чисел. В самом деле, согласно теореме Мейера (см. [БШ], [K] или [C]) любая невырожденная квадратичная форма над полем $\mathbb{Q}$ от $n \geq 5$ переменных (нетривиально) представляет нуль, если она представляет нуль над полем $\mathbb{R}$. В частности, если $r > 0$, то форма $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - rx_5^2$ представляет нуль над $\mathbb{Q}$.

При $n = 1$, т. е. для многочленов над $\mathbb{Q}$ от одной переменной, первым получил оценку Э. Ландау в 1906 г. в работе [L]. Он показал, что любой неотрицательный многочлен (от одной переменной) с рациональными коэффициентами можно представить в виде суммы 8 квадратов многочленов с рациональными коэффициентами (простое доказательство теоремы Ландау приведено в главе 7 книги [P2]). Но эта оценка не точная. Точную оценку получил Пурше [Po]: любой неотрицательный многочлен над $\mathbb{Q}$ можно представить в виде суммы квадратов 5 многочленов над $\mathbb{Q}$ (подробному изложению теоремы Пурше посвящена глава 17 книги [R]).

Для многочленов, обладающий некоторыми специальными свойствами, можно получить и более точные результаты. Например, в [DLS] показано, что если значения многочлена $f(x)$ при всех целых x являются суммами квадратов двух целых чисел, то многочлен $f(x)$ является суммой квадратов двух многочленов с целыми коэффициентами.

Пример неотрицательного многочлена, который над $\mathbb{Q}$ нельзя представить в виде суммы квадратов четырех многочленов, строится достаточно просто. Дело в том, что если

$$ax^2 + bx + c = \sum_{i=1}^{4}(a_i x + b_i)^2,$$

то $4ac - b^2$ — сумма квадратов трех рациональных чисел. Действительно,

$$4ac - b^2 = 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) - 4\left(\sum a_i b_i\right)^2,$$

а если рассмотреть произведение кватернионов $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ и $b_1 - b_2 i - b_2 j - b_2 k$, то можно убедиться, что

$$\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right) = \left(\sum a_i b_i\right)^2 + \text{сумма трех квадратов.}$$

Теперь легко показать, что квадратный трехчлен $x^2 + x + 4$ нельзя представить в виде суммы квадратов четырех многочленов. Для этого нужно доказать, что 15 нельзя представить в виде суммы квадратов трех рациональных чисел. Если бы 15 равнялось $p^2 + q^2 + r^2$, то после приведения к общему знаменателю мы получили бы сравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 15d^2 \,(\mathrm{mod} 8) \equiv -d^2 \,(\mathrm{mod} 8),$$

где хотя бы одно из чисел a, b, c, d нечетно. Такое сравнение невозможно.

Литература

[БШ] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел,* М.: Наука, 1972.

[В] Ван дер Варден Б. Л., *Алгебра,* М.: Наука, 1976.

[К] Касселс Дж., *Рациональные квадратичные формы,* М.: Мир, 1982.

[Л] Ленг С., *Алгебра,* М.: Мир, 1968.

[М] Мамфорд Д., *Алгебраическая геометрия 1, Комплексные проективные многообразия,* М.: Мир, 1979.

[ПС] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П., *Эллиптические функции и алгебраические уравнения,* М.: Факториал, 1997.

[С] Серр Ж.-П., *Курс арифметики,* М.: Мир, 1972.

[A] Artin E., *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate,* Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), 100–115.

[AS] Artin E., Schreier O., *Algebraische Konstruktion reeler Körper,* Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), 85–99.

[Ca] Cassels J. W. S., *On the representation of rational functions as sums of squares,* Acta Arithm. **9** (1964), 79–82.

[CEP] Cassels J. W. S., Ellison W. J., Pfister A., *On sums of squares and on elliptic curves over function fields,* J. Number Theory **3** (1971), 125–149.

[Ch] Christie M. R., *Positive definite rational functions of two variables which are not the sum of three squares,* J. Number Theory **8** (1976), 224–232.

[Co] Colliot-Thélène J.-L., *The Noether–Lefschetz theorem and sums of 4 squares in the rational function field* $\mathbb{R}(x, y)$, Compositio Math. **86** (1993), 235–243.

[DLS] Davenport H., Lewis D. J., Schinzel A., *Polynomials of certain special types,* Acta Arithm. **9** (1964), 108–116.

[Du] Dubois D. W., *Note on Artin's solution of 17th Hilbert's problem,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 540–541.

[Hi] Hilbert D., *Ueber die Darstellung definierter Formen als Summe von Formenquadraten,* Math. Ann. **32** (1888), 342–350.

[Hu] Hurwitz A., *Ueber der Vergleich des arithmetischen und des geometrischeh Mittels,* J. fur Math. **108** (1891), 266–268.

[L] Landau E., *Über die Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten,* Math. Ann. **62** (1906), 290–329.

[M] Motzkin T. S., *Algebraic Inequalities,* в книге *Inequalities*, Editor O. Shisha, New York: Academic Press, 1967, 199–203.

[P1] Pfister A., *Multiplikative quadratische Formen,* Arch. Math. **16** (1965), 363–370.

[P2] Pfister A., *Quadratic forms with applications to alrebra, geometry and topology,* London Math. Soc. Lecture Notes Series, V. 217, 1995.

[Po] Pourchet, *On the representation in sums of squares for definite functions in one variable over an algebraic number field,* Acta Arithm. **19** (1971), 89–109.

[R] Rajwade A. R., *Squares,* London Math. Soc. Lecture Notes Series, V. 171, 1993.

[Ri] Risler J.-J., *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réeles,* C. R. Acad. Sci. **271** (1970), Serie A, 1171–1173.

[S] Scharlau W., *Quadratic and hermitian forms,* Springer, Berlin e.a., 1985.

[St] Stengle G., *Integral solution of Hilbert's seventeenth problem,* Math. Ann. **246** (1979), 33–39.

Соревнования, математика, жизнь

Александр Сойфер[1]

Александр Сойфер — профессор Университета Колорадо. Кроме того, он — председатель и основатель Математической Олимпиады Колорадо, которой уже 16 лет, член комитета Математической Олимпиады США, секретарь Всемирной Федерации Национальных Математических Соревнований и редактор ежеквартального журнала "Геомбинаторика"[2]. *Александром Сойфером написаны четыре книги: "Математика как решение задач" (1987), "Как разрезать треугольник?" (1990), "Геометрические этюды на темы комбинаторной математики" (1991, совместно с В. Болтянским) и "Математическая Олимпиада Колорадо: первые десять лет и дальнейшие исследования" (1994). Он работает над новой книгой "Математическая книга раскрасок" (которая, возможно, выйдет в этом году). Более подробно смотрите http://www.uccs.edu/~asoifer*

Памяти Поля Эрдёша

Знаменитый русский математик Борис Николаевич Делоне сказал однажды, о чём вспоминает Андрей Николаевич Колмогоров в своем вступлении к книге [GT]: "большое научное открытие отличается от хорошей олимпиадной задачи тем, что для решения олимпиадной задачи требуется 5 часов, а получение крупного научного результата требует затраты 5000 часов." Мои книги иллюстрируют это наблюдение очень ясно и показывают, что соревновательные и исследовательские задачи в математике произрастают из одних и тех же корней, делаются из одного и того же материала и не имеют естественных разделяющих границ. Естественно, поэтому, давать открытые проблемы молодым школьным олимпийцам (правда, не на математических олимпиадах, так как они не продолжаются 5000 часов). Я проиллюстрирую эти идеи здесь на материале связанным с хроматическим числом плоскости и проблемами раскрасок. Я предложу здесь как новые задачи, так и старые, но последние будут сопровождаться мало известными решениями. Я представлю как задачи олимпиадного типа, так и открытые проблемы и гипотезы. Каждый, надеюсь, найдет что нибудь новое и захватывающее в этом эссе — иначе зачем его было писать?

Перевод с английского С. А. Дориченко с уточнениями и дополнениями А. Сойфера.

[2]Название, придуманное А. Сойфером, составлено из двух слов — геометрия и комбинаторика (в оригинале — *Geombinatorics*).

1. Хроматическое число плоскости

Наша старая добрая евклидова плоскость, не знаем ли мы всё про неё? Что ещё можно сказать о ней после Пифагора и Штейнера, Евклида и Гильберта? Мы рассмотрим сейчас одну проблему — пример лучшего, что есть в математике. Каждый способен понять её условие, но ещё ни одному не удалось найти её решение.

В августе 1987 года я присутствовал на вдохновляющей лекции Поля Халмоша в Chapman College, Калифорния. Она называлась "Некоторые задачи, вы можете решить, а некоторые вы не можете." Эта задача была среди тех, которые "вы не можете решить".

"Захватывающая задача ..., объединяющая идеи из теории множеств, комбинаторики, теории меры и метрической геометрии", говорят в своей книге "Нерешенные проблемы в геометрии" Hallard Croft, Kennet Falconer и Richard Guy (см. [CFG]).

"Если задача 8 будет решаться столь же долго (как и знаменитая проблема четырех красок), мы узнаем ответ в 2084 году", — пишут в своей книге "Новые и старые нерешенные проблемы планиметрии и теории чисел" Victor Klee и Stan Wagon (см. [KW]).

Вы готовы? Вот эта проблема:

Каково наименьшее число цветов, достаточное для раскраски плоскости так, чтобы не нашлось двух точек одного цвета на расстоянии 1 друг от друга?

Это число назывется *хроматическим числом плоскости* и обозначается χ. (Уточним, что мы можем покрасить каждую точку плоскости в один из цветов, без всяких ограничений).

Мне хотелось узнать, кто и когда впервые сформулировал эту проблему, поскольку это была моя любимая открытая проблема в математике. Тщательное исследование показало, что проблема была создана в октябре или ноябре 1950 года 18-летним студентом Чикагского университета Эдвардом Нелсоном (сейчас он профессор Принстонского Университета и член Национальной академии наук). Возможно, стоит ознакомиться с описанием этих исследований в *Geombinatorics*, [S3]: Рональд Грехэм назвал его "исключительно интересной историей" ([Gr]).

Задача 1. Докажите нижнюю оценку: $\chi \geq 4$, т. е. любая плоскость, окрашенная в три цвета, содержит две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Решение. Вместо того, чтобы привести здесь известное решение с повернутыми ромбами, впервые найденное Эдвардом Нелсоном в 1950 году, мне хочется изложить решение, которое, как мне удалось проследить, восходит к Соломону Голомбу, знаменитому изобретателю полимино.

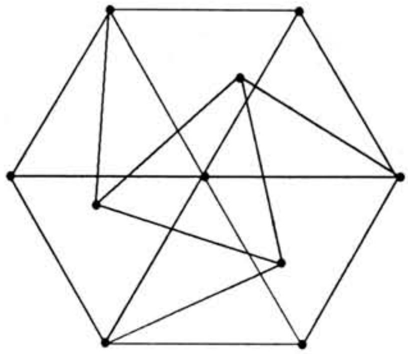


Рис. 1

Рассмотрим на трёхцветной (красно-бело-синей) плоскости граф, изображённый на рисунке 1, в котором каждое ребро имеет длину 1; (естественно называть его графом Голомба). Предположим, что в графе нет двух точек одного цвета, соединённых ребром. Пусть центральная точка окрашена в красный цвет, тогда, поскольку она соединена со всеми вершинами правильного шестиугольника H единичными рёбрами, вершины H должны быть раскрашены в белый и синий цвета чередующимся образом. Все вершины равностороннего треугольника T соединены единичными рёбрами с тремя одноцветными вершинами H, скажем, белыми. Но тогда белый цвет не может быть использован для окраски вершин T, и значит вершины T окрашены в красный и синий цвета. Но отсюда следует, что две из вершин T имеют один и тот же цвет. Это противоречие доказывает, что трёх цветов недостаточно для правильной раскраски десяти вершин графа Голомба, не говоря уже о всей плоскости.

Задача 2. Докажите верхнюю оценку: $\chi \le 7$, то есть существует семицветная плоскость, не содержащая двух точек одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Решение. Снова, вместо того, чтобы рассмотреть здесь хорошо известное решение, основанное на разбиении плоскости на правильные шестиугольники, мне хочется представить намного менее известное решение 1982 года, принадлежащее Ласло Шекели. (Его оригинальный рисунок требует небольшой корректировки, нужно также уточнить, как красятся границы, что я и сделаю здесь).

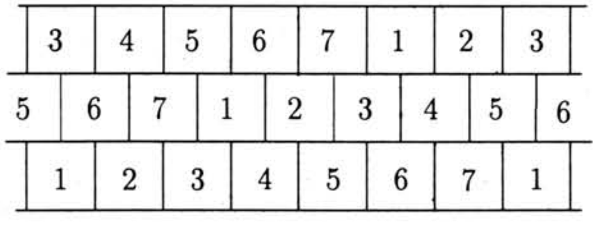


Рис. 2

На рисунке 2 мы начинаем со строки квадратов, имеющих единичные диагонали, раскрашенной циклически в семь различных цветов (квадраты одинакового цвета отмечены одним номером). Каждая следующая строка раскрашенных квадратов получается из предыдущей сдвигом вправо на длину, в 2,5 раза большую длины стороны квадрата. Верхняя и правая стороны каждого квадрата (за исключением двух точек: левого верхнего и правого нижнего углов) красятся в тот же цвет, что и сам квадрат. Легко проверить, что требуемая раскраска получена.

Удивительно, что эти простые задачи 1 и 2 дают нам наилучшие известные на сегодня границы для числа χ. После 49 лет всё, что мы знаем, — это то, что $\chi = 4$, либо 5, либо 6, либо 7: действительно, очень широкий разброс. Какой, по-вашему, ответ на самом деле? Отвечая на этот вопрос, Поль Ердёш написал мне в письме [E2]: "Я думаю, что хроматическое число плоскости ≥ 5; по теореме, доказанной де Брёйном и мною, конечное множество должно давать ответ на этот вопрос, но оно может быть невообразимо большим[3]".

Недавно замечательный американский геометр Victor Klee поделился со мной очень интересной историей. В 1980-1981 годах он читал лекции в Швейцарии. Среди слушателей был знаменитый математик Ван дер Варден. Когда профессор Klee представил проблему определения хроматического числа плоскости, Ван дер Варден очень заинтересовался. Прямо там, во время лекции, он перестал слушать и начал работу над задачей. Он пытался доказать, что $\chi = 7$. С другой стороны, Robert Hochberg верит, что $\chi = 4$; некоторые алгебраисты надеются, что $\chi = 4$, или иначе $\chi = 6$.

Я думаю, что $\chi = 7$ (или иначе $\chi = 6$). Поль Ердёш говорил, что "У Бога есть трансфинитная Книга, которая содержит все теоремы и их наилучшие доказательства, и тем к кому он хорошо относится, он открывает книгу на мгновенье". Если бы я когда-либо удостоился чести и имел бы выбор, я бы заглянул на страницу с хроматическим числом плоскости. А вы?

Хотя ничего больше не известно сегодня про общий случай, много хороших результатов было получено для раскрасок с дополнительными условиями на монохроматические множества (то-есть, множества, все точки которых имеют один и тот же цвет). Если вы потребуете, чтобы множества точек каждого цвета в раскрашенной плоскости были замкнутыми, открытыми, измеримыми по Лебегу, form a map, то соответствующие ограниченные хроматические числа будут обозначатся χ_C, χ_O, χ_M, χ_{MAP}.

Задача 3. (Douglas R. Woodal, 1973 [D], исправлено S. P. Townsend, 1981 [T]).

$$6 \leq \chi_C \leq 7$$

[3]Мы можем рассматривать плоскость как граф, вершинами которого являются все точки плоскости, причём две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда расстояние между ними равно 1. Наш граф, тем самым, бесконечен. Теорема компактности Ердёша-де Брёйна утверждает, что хроматическое число этого графа (т. е. хроматическое число плоскости) равняется наибольшему из хроматических чисел его конечных подграфов. Таким образом, если хроматическое число плоскости в самом деле больше или равно 5, то найдётся конечный подграф, хроматическое число которого равно 5. Ердёш, однако, побаивается (и я тоже), что этот конечный граф может быть достаточно большим, и поэтому его трудно найти *(примечание добавлено автором для русского перевода)*.

$$6 \leq \chi_{MAP} \leq 7$$

Задача 4. (Nathanial Brown, Nathan Dunfield, Greg Perry, 1993-94 [BDP][4]).

$$6 \leq \chi_{O} \leq 7$$

Задача 5. (Kenneth Falconer, 1981 [F]).

$$5 \leq \chi_{M} \leq 7$$

Для конгресса WFNMC[5] в Джонг-Джане (Китай) в 1998 году я придумал следующую задачу (где она и была впервые опубликована):

Задача 6. (А. Сойфер, 4 июля 1998). Докажите, что любая четырёхцветная плоскость содержит две точки одного цвета на расстоянии 1 или Г друг от друга, где Г — золотое сечение[6].

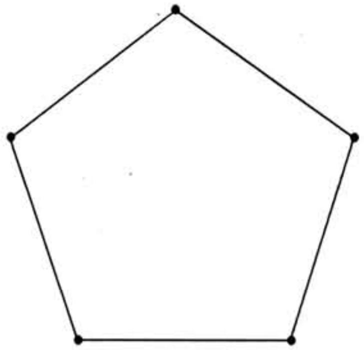


Рис. 3

Решение. Бросим на четырёхцветную плоскость правильный пятиугольник, длина диагонали которого равна 1 (рисунок 3). Вычисления (которые я оставляю читателю в качестве домашней работы) показывают, что длина стороны пятиугольника в точности равна Г. Как нетрудно увидеть, из пяти вершин пятиугольника две должны быть окрашены в один и тот же цвет, и расстояние между ними будет равняться либо 1, либо Г. Всё доказано!

Мои попытки увидеть, могу ли я понизить верхнюю оценку 7 для хроматического числа плоскости, не окончились триумфом, но я получил следующий стоящий результат.

[4]Все три автора были студентами во время написания этой работы

[5]Всемирная Федерация Национальных Математических Соревнований

[6]т. е. $\Gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Сначала определение. Если дана такая n-цветная плоскость, что цвет i не содержит двух точек на расстоянии d_i друг от друга $(1 \leq d_i \leq n)$, мы говорим, что такая раскраска имеет тип $(d_1,\ d_2,\ \ldots, d_n)$.[7]

Задача 7. (А. Сойфер [S5], [S6]). Докажите, что для любого действительного числа α, удовлетворяющего неравенствам $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq 1/\sqrt{5}$, существует шестицветная раскраска плоскости, имеющая тип $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \alpha)$.

Конструкция решения. Рассмотрим разбиение плоскости, изображённое на рис. 5. Оно порождается большим и маленьким квадратами с углом ϕ между ними (см. рис. 4). Теперь мы готовы к раскраске разбитой на части плоскости в шесть цветов. Обозначим через Ψ часть плоскости, ограниченную жирной линией (рис. 5). Используем цвета с первого по пятый для восьмиугольников внутри Ψ и шестой цвет для всех маленьких квадратов. Часть границы восьмиугольников и квадратов окрашивается в тот же цвет, что и они сами, эти участки границы показаны на рисунке 6 жирными линиями. Теперь мы можем, с помощью сдвигов продолжить шестицветную раскраску фигуры Ψ до шестицветной раскраски всей плоскости. С помощью подходящей гомотетии мы можем сделать диаметры наших восьмиугольников равными единице.

Доказательство. Я отсылаю заинтересованного читателя к [S5] и [S6], где я доказал, что для любого действительного числа α, удовлетворяющего неравенствам $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha \leq 1/\sqrt{5}$, существуют единственные x, y и ϕ, такие, что наша шестицветная раскраска плоскости имеет тип $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \alpha)$.

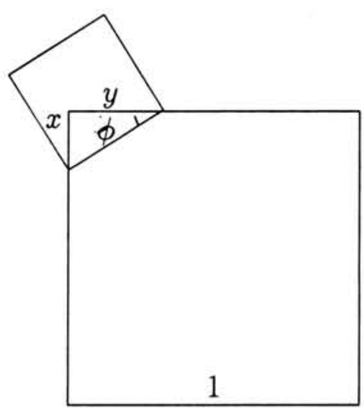


Рис. 4

[7]Понятие *типа* стало стандартным. Оно является частью написанного Яношем Пахом обзора *Конечные точечные конфигурации* в фундаментальной тысячестраничной книге 1997 года *Дискретная и вычислительная геометрия* [GO]. Оно было впервые введено мною в 1992 году в [S4], когда я нуждался в способе сравнения известной шестицветной раскраски плоскости с недавно найденной мною раскраской.

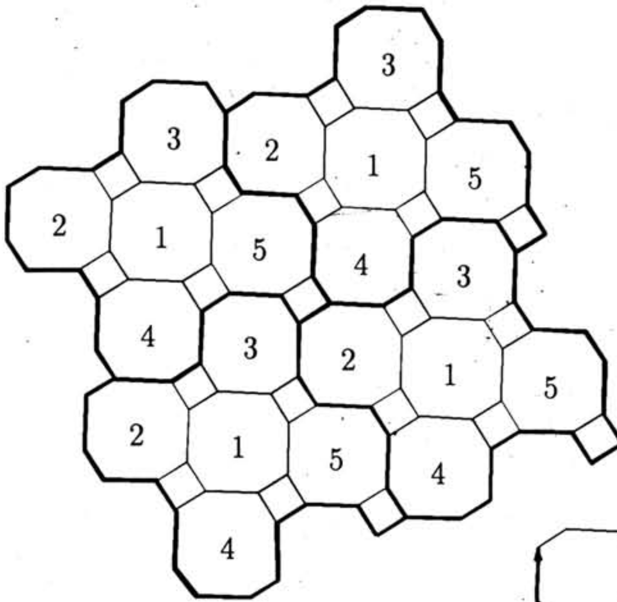


Рис. 5

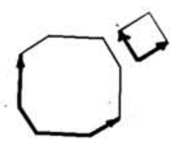


Рис. 6

Естественно сформулировать подобный вопрос для более высоких размерностей. Хроматическое число $\chi(E^3)$ евклидова трёхмерного пространства E^3 определяется как наименьшее число цветов, необходимое для раскраски E^3 со свойством: никакие две точки одного цвета не находятся на расстоянии 1 друг от друга.

Наилучшие границы, известные на сегодня, таковы:

Задача 8. $5 \le \chi(E^3) \le 18$.

Нижняя граница была найдена в 1970 году Дмитрием Райским, который в то время был ещё школьником, учеником Н. Н. Константинова [R]. Верхняя граница была недавно доказана австралийским математиком David Coulson [C], который улучшил предыдущую оценку, равнявшуюся 21. Ко времени этого перевода Каулсон превзошел себя доведя верхнюю границу до 15. Этот замечательный результат $[C_1]$ еще неопубликован.

Мы изучали одноцветные пары точек. Перейдем теперь к одноцветным тройкам.

Одноцветные треугольники

Треугольник в данном контексте — это тройка точек, а *одноцветный треугольник* — это тройка точек одного цвета. Каждая ли раскрашенная в 2 цвета плоскость содержит любой одноцветный треугольник? Следующая задача даёт отрицательный ответ на этот вопрос. Она была предложена Лео Мозером Мартину Гарднеру для его раздела в журнале "Scientific American", сентябрьский выпуск 1960 года (задача поставлена в [G1], решение опубликовано в [G2]).

Задача 9. Найдите раскраску плоскости в два цвета, при которой плоскость не содержит одноцветных равносторонних треугольников с длиной стороны, равной 1.

Решение. Разделим плоскость на параллельные полосы шириной $\frac{\sqrt{3}}{2}$ каждая ($\frac{\sqrt{3}}{2}$ — это длина высоты правильного треугольника с длиной стороны 1). Раскрасим полосы попеременно в черный и белый цвета (рис. 7). Считаем при этом, что каждая полоса включает в себя свою левую граничную прямую и не включает правую. Легко убедится, что наша двуцветная плоскость не содержит одноцветных равносторонних треугольников с длиной стороны 1.

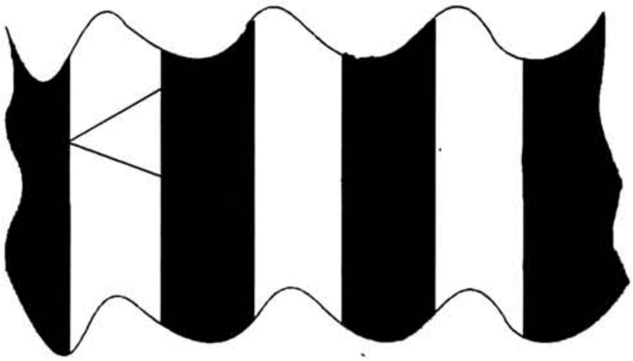


Рис. 7

Такая раскраска не единственна. Решите следующее упражнение:

Задача 10. Найдите раскраску плоскости в два цвета, отличную от приведённой в решении задачи 9, при которой плоскость не содержит одноцветных равносторонних треугольников с длиной стороны, равной 1.

Когда вы решите задачу 10, вы, возможно, заметите, что ваша раскраска не сильно отличается от раскраски из задачи 9. На самом деле, Поль Эрдёш, Рональд Л. Грэем, Питер Монтгомери, Bruce L. Rothschild, Joel Spencer и Ernst G. Straus в своей фундаментальной трилогии [EGMRSS] 1973 года предположили, что такие раскраски не могут сильно отличаться:

Гипотеза 11. ([EGMRSS], Гипотеза 1, Часть III). Всякая двуцветная раскраска плоскости, при которой не существует одноцветных равносторонних треугольников с длиной стороны, равной 1, является раскраской на полосы ширины $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (цвета полос чередуются), как и в решении задачи 9, за исключением окраски граничных линий между полосами (при их окраске допускается некоторая свобода).

Тем не менее, некоторые одноцветные треугольники имеются на любой двуцветной плоскости. Первые примеры такого рода были найдены в 1973 году Полем Эрдёшем и др. в [EGMRSS]. Leslie Shader решил проблему для прямоугольных треугольников:

Задача 12. (L. Shader, [Sh]). Для любого прямоугольного треугольника T каждая двуцветная плоскость содержит одноцветный треугольник, равный треугольнику T.

Таким образом, мы имеем некоторое количество примеров треугольников, для которых их одноцветные копии найдутся на любой двуцветной плоскости, и один пример треугольника (правильный треугольник), одноцветная копия которого может и не найтись. Желая разобраться в этом, я поставил в 1989 году моим студентам и школьникам приведённую ниже 25-долларовую проблему, и опубликовал её в 1991 году [S1]. Позднее я узнал, что 16 годами ранее Поль Ердёш и другие пытались решить эту же самую проблему, и Поль предлагал много больше денег за первое её решение.

Открытая Проблема 13. Найдите все такие треугольники T, что любая двуцветная плоскость содержит одноцветный треугольник, равный T.

Кроме того, Пауль Эрдёш и др. сделали в 1973 году следующие предположения:

Гипотеза 14. ([EGMRSS], Гипотеза 3, Часть III). Для любого неравностороннего треугольника T, всякая двуцветная плоскость содержит одноцветный треугольник, равный треугольнику T.

Гипотеза 15. ([EGMRSS]). Если двуцветная плоскость P не содержит одноцветного равностороннего треугольника со стороной длины d, то P содержит одноцветный равносторонний треугольник с длиной стороны d' для любого $d' \neq d$.

Эта проблема оказалась неожиданно трудной. Приведём здесь слова Поля Эрдёша по этому поводу написанные в 1979 году ([E1]): "Множество частных случаев было доказано нами [т. е. авторами [EGMRSS]] и другими, но общий случай остаётся открытым, и я предлагаю 100 долларов за его доказательство или опровержение." В 1985 году он увеличил размер приза до 250 долларов, но проблема осталась открытой. И остаётся до сих пор. Чтобы пытаться доказывать подобные гипотезы, нужно владеть определённой техникой. Ниже приводится одно из подобных технических утверждений, найденное мною в 1991 году.

Пусть T — треугольник. Тогда T_m будет обозначать треугольник, длина каждой стороны которого в два раза больше длины соответствующей медианы треугольника T (медианы любого треугольника сами являются сторонами некоторого треугольника — докажите это простое утверждение самостоятельно).

Лемма 16. ([S1]). Для любого треугольника T всякая двуцветная плоскость содержит одноцветный треугольник, равный либо T, либо T_m.

Решение. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника T, и P — плоскость, раскрашенная в красный и синий цвета. Если вся плоскость раскрашена только одним цветом, то лемма очевидна. Если нет, то P содержит отрезок AE любой заданной длины с разноцветными концами (я оставляю доказательство этого утверждения в качестве хорошего домашнего упражнения). В частности, P содержит отрезок длины $2a$ с синим концом A и красным концом E. Середина C отрезка AE окрашена в тот же цвет, что и один из концов отрезка, скажем в синий (как A, см. рис. 8).

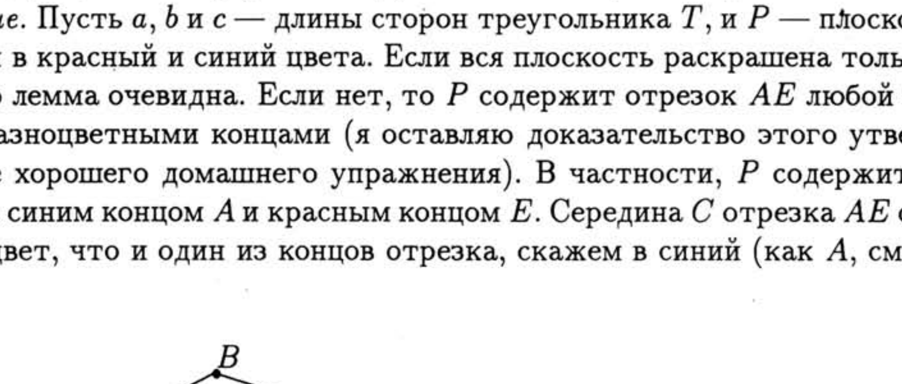


Рис. 8

Выберем точки B и D так, чтобы четырёхугольник $ABCD$ являлся параллелограммом с длинами сторон b и c. Если одна из точек B или C — синяя, то мы получим треугольник, все вершины которого — синие: ABC или ADC. Если же обе точки B и C красные, то BED будет треугольником, все вершины которого — красные, а длины сторон в два раза длиннее длин медиан треугольника T.

Лемма 16 имеет следующее следствие:

Следствие 17. Любая двуцветная плоскость содержит одноцветный равносторонний треугольник с длиной стороны 1 или $\sqrt{3}$.

Оставив изучение треугольников на двуцветной плоскости, можно двигаться дальше по крайней мере в двух направлениях.

Прежде всего рассмотрим раскраски в два цвета трёхмерного пространства E^3. В отличие от случая плоскости (см. задачу 9), мы сможем получить равносторонний треугольник с длиной стороны 1 в любом двуцветном пространстве E^3.

Задача 18. ([EGMRSS], Теорема 6 Главы 1). Любое двуцветное пространство E^3 содержит одноцветный равносторонний треугольник с длиной стороны 1.

Решение. Пусть простанство E^3 раскрашено в два цвета — красный и синий. Рассмотрим две точки A и B одного цвета, скажем, красного, на расстоянии 1 друг от друга (по задаче 1, мы сможем найти такие точки A и B в любой плоскости пространства E^3). Если найдётся третья красная точка C на расстоянии 1 от каждой из точек A и B, то нужный треугольник найден. В противном случае мы получим целую окружность S_1, состоящую из синих точек, которая лежит в плоскости, перпендикулярной AB, а её центр — это середина O_1 отрезка AB (см. рис. 9).

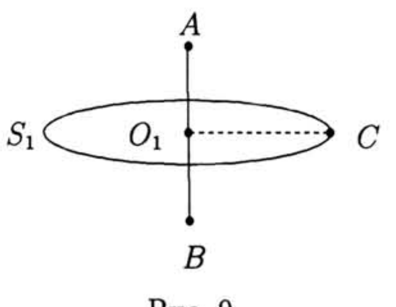


Рис. 9

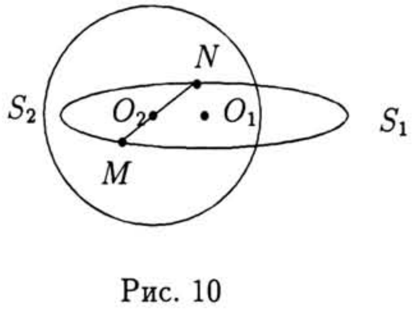


Рис. 10

Радиус этой окружности равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь рассмотрим в окружности S_1 хорду MN длины 1. Если найдётся третья синяя точка K на расстоянии 1 от каждой из точек M и N, то нужный треугольник найден. В противном случае, найдётся целая окружность S_2, состоящая из красных точек, расположенная в плоскости, перпендикулярной плоскости S_1 (см. рис. 10). Радиус окружности S_2, разумеется, имеет ту же длину, что и радиус S_1 (поскольку мы получали эти окружности одинаковым способом).

Если мы будем поворачивать хорду MN вокруг точки O_1, то и красная окружность S_2 будет соответственно поворачиваться вокруг точки O_1, в результате чего образуется вырожденный тор T (тор без дырки внутри, но с самопересечением). Итак, мы получили целый красный тор!

Наибольшая горизонтальная окружность (экватор) S_3 на этом торе имеет диаметр $d = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ (проверьте это). Мы можем вписать в S_3 равносторонний треугольник K с длиной стороны $\dfrac{\sqrt{3}}{2}d = \dfrac{\sqrt{6}+3}{4} > 1$. Сдвигая симметрично вершины K по поверхности тора T к его середине (так, чтобы плоскость, определяемая треугольником K, смещалась вверх, оставаясь горизонтальной), мы сможем получить на торе новый равносторонний треугольник K_1 с длиной стороны 1 (проверьте это!). Но раз K_1 лежит на T, а весь тор T красный, то K_1 будет искомым одноцветным треугольником.

Поль Эрдёш и др. использовали оригинальный приём, подобный решению задачи 18, для доказательства следующего более сильного результата. Попробуйте получить его самостоятельно.

Задача 19. ([EGMRSS], Теорема 24 части II). В любом двуцветном пространстве E^3 в одном из цветов можно найти равносторонние одноцветные треугольники (этого цвета) всех размеров.

С помощью остроумной леммы из элементарной геометрии Ердёш и другие вывели из задачи 19 свойство, которое не выполняется для плоскости:

Задача 20. ([EGMRSS]). Для любого треугольника T любое двуцветное пространство E^3 содержит одноцветный треугольник T', равный T.

Другое направление, в котором можно продолжать исследования после изучения треугольников на двуцветной плоскости — это изучение треугольников на трёхцветной плоскости. Мы не можем надеяться гарантированно найти одноцветную копию любого треугольника на трёхцветной плоскости. Более того, Рональд Л. Грэм сформулировал следующую гипотезу (во время нашего телефонного разговора 10 июля 1991 года [S2]):

Гипотеза 21. (Р. Л. Грэм). *Для любого треугольника T найдётся трёхцветная плоскость, не содержащая одноцветного треугольника, равного T.*

С другой, "положительной" стороны, я сформулировал в 1991 году следующую гипотезу. Я называю треугольник *представительным*, если все его вершины окрашены в разные цвета.

Гипотеза 22. ([S2]). *Для любого треугольника T любая трёхцветная плоскость, в которой присутствуют все три цвета, содержит одноцветный или представительный треугольник, равный T.*

Я знаю, что эта гипотеза верна по крайней мере для треугольников следующего типа:

Задача 23. ([S2]). Любая трёхцветная плоскость, в которой присутствуют все три цвета, содержит одноцветный или представительный треугольник T с наименьшей стороной 1 и углами, величины которых находятся в отношении $1:2:4$.

Решение. Предположим, что трёхцветная плоскость P (окрашенная в красный, белый и синий цвета) не содержит одноцветной копии треугольника T. Бросим на плоскость P правильный семиугольник H с длиной стороны 1.

H может иметь не более трёх вершин одного цвета, поскольку любые четыре вершины H содержат тройку вершин, образующую равный T треугольник. С другой стороны, по принципу Дирихле, H должен содержать по крайней мере три вершины одного цвета. Итак, в один из цветов (скажем, красный) у H окрашено ровно 3 вершины.

Выбрать в H три красные вершины так, чтобы они не образовывали одноцветную копию треугольника T, можно тремя существенно различными способами (см. рис. 11). Количества оставшихся белых и синих вершин либо совпадают (по две вершины каждого цвета), либо относятся как 3 к 1. Теперь уже нетрудно убедиться, что при любом способе раскраски вершин на рисунке 11 в три цвета, найдётся представительный треугольник, равный T.

Рис. 11

Цвета политики

Вашингтонские прямоугольники[8]

а) Если демократы и республиканцы целиком заполнят площадь Lafayette размером 2×2, то найдутся два человека из одной партии на расстоянии не менее чем $\sqrt{5}$ друг от друга.

б) Трёхцветное (красно-бело-синее, разумеется) прямоугольное знамя имеет размер 2×3. Докажите, что на нём найдутся две точки одного цвета на расстоянии не менее чем $\sqrt{5}$ друг от друга.

Следствие продолжается

а) Прямоугольник R размерами 2×4 раскрашен в 4 цвета. Источники близкие к следствию, сообщили нам по секрету, что четыре угла R не являются раскрашенными два в один цвет и два — в другой цвет. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии не менее чем $\sqrt{5}$ друг от друга.

б) Покажите, что условие окраски углов, выданное нам по секрету, существенно: без этого условия существует четырёхцветная раскраска R, при которой нет двух точек одного цвета, находящихся на расстоянии $\sqrt{5}$ или больше друг от друга.

[8] На английском название задачи записано *"Washington recTangles"*, *rectangle* означает *прямоугольник*, а *tangle* — *клубок, путаница, неразбериха*

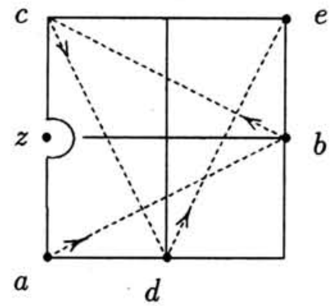


Рис. 12

Решение задачи "Вашингтонские прямоугольники". а). Предположим, что квадрат S размерами 2×2 окрашен в два цвета так, что любые две точки одного цвета отстоят друг от друга менее чем на $\sqrt{5}$. Нарисуем на S решётку из единичных квадратов (см. рис. 12). Поскольку расстояние между любыми двумя соседними точками в последовательности a, b, c, d, e равно $\sqrt{5}$, цвета этих точек чередуются. Поэтому, точки a и e окрашены в один и тот же цвет, но они находятся друг от друга на расстоянии, большем чем $\sqrt{5}$ — противоречие. Поэтому при любой раскраске S в два цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии не менее чем $\sqrt{5}$ друг от друга. (Наша последовательность $a - b - c - d - e$ напоминает ходы коня на шахматной доске!)

Замечание: мы не использовали цвет точки z в решении.

б). Предположим, что прямоугольное знамя B размерами 2×3 окрашено в три цвета: красный, белый и синий, причём расстояние между любыми двумя одноцветными точками меньше $\sqrt{5}$. Нарисуем на B решётку из единичных квадратов (см. рис. 13).

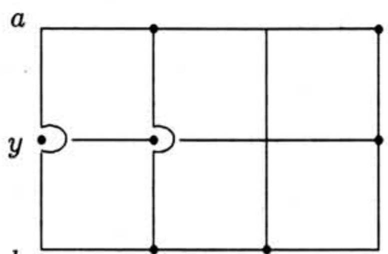


Рис. 13

Поскольку мы использовали три цвета, а у знамени четыре угла, по крайней мере два угла (обозначим их a и b) должны быть одноцветными, скажем, белыми. Точки a и b должны быть концами одной, причём короткой, стороны: иначе расстояние между ними будет больше $\sqrt{5}$. Но тогда любая жирная точка решётки (см. рис. 13) должна быть окрашена в красный или синий цвета, так как каждая жирная точка отстоит от одного из углов a, b не менее чем на $\sqrt{5}$.

Тем самым мы свели нашу задачу к пункту а) — жирные точки образуют такую же, как и в п. а), конфигурацию.

Замечание: мы не использовали цвет точки z в решении.

Решение задачи "Следствие продолжается".

а). Предположим, что прямоугольник R размерами 2×4 окрашен в четыре цвета так, что любые две точки одного цвета отстоят друг от друга меньше чем на $\sqrt{5}$. Нарисуем на R решётку из единичных квадратов (см. рис. 14).

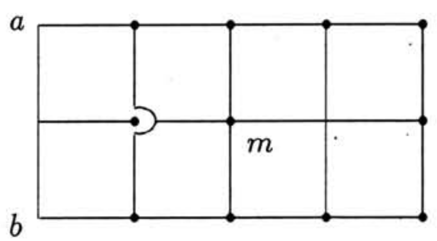


Рис. 14

Заметим, что центр m прямоугольника R находится на расстоянии ровно $\sqrt{5}$ от каждого из углов R. Поэтому цвет точки m не может быть использован при раскраске углов R. Значит, углы R раскрашены не более чем в три цвета, откуда следует что по крайней мере два угла (обозначим их a и b) должны быть одноцветными. Точки a и b должны быть концами одной, причём короткой, стороны: иначе расстояние между ними будет больше $\sqrt{5}$. Но тогда цвета жирных точек решётки (см. рис. 14) должны быть отличны от цвета точек a и b, так как каждая жирная точка отстоит от одного из углов a, b не менее чем на $\sqrt{5}$. Значит, все жирные точки окрашены не более чем в три цвета.

Кажется, что жирные точки удовлетворяют условиям, пункта б) задачи "Вашингтонские прямоугольники", и мы можем в точности применить здесь его решение — по крайней мере, так выглядит ситуация на первый взгляд. Более полный анализ показывает, что мы нуждаемся ещё в одном дополнительном наблюдении. В решении пункта б) задачи "Вашингтонские прямоугольники" мы устанавливали существование двух углов одного цвета a' и b' прямоугольника B размерами 2×3. При этом точки a и b должны были быть концами одной, причём короткой, стороны прямоугольника B. Но сейчас имеет значение, какой именно короткой стороны. Однако эта проблема легко решается: точки a, b, a', b' не могут быть в точности четырьмя углами прямоугольника B, так как тогда *его четыре угла представляют собой пару точек одного цвета и пару точек другого цвета* (что противоречит полученной нами секретной информации). Поэтому a' и b' обязаны находится на следующей вертикали после точек a и b (рис. 15), и теперь уже оставшая часть решения идеально переносится из "Вашингтонских прямоугольников".

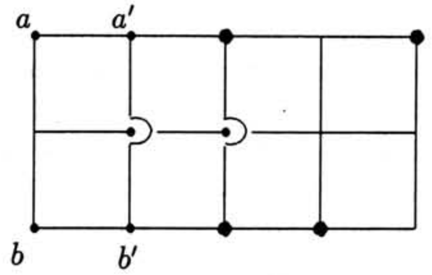


Рис. 15

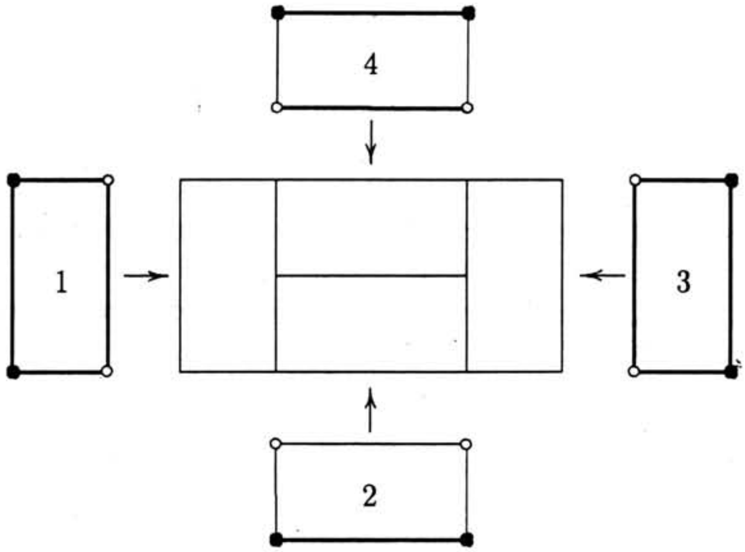


Рис. 16

б). Пусть четыре угла прямоугольника R раскрашены два в один цвет и два — в другой цвет. Наша задача докрасить весь прямоугольник R в четыре цвета так, чтобы не нашлось двух точек одного цвета на расстоянии $\sqrt{5}$ или больше. Это действительно можно сделать: смотрите рисунок 16. Каждый прямоугольник (домино) на рис. 16 закрашивается одним цветом, жирные линии и точки каждого прямоугольника обозначают участки границы, которые окрашиваются в тот же цвет, что и он сам, тонкие линии и выколотые точки обозначают те участки, которые не красятся этим цветом.

Множество других захватывающих результатов о цветных фигурах, пространствах и числах будет скоро опубликовано в моей книге "Математическая книга раскрасок" [S7]. Её приблизительное содержание можно найти в сети Интернет: http://www.uccs.edu/~asoifer

Пишите! Присылайти новые идеи, цветные задачи, решения и теории.

Библиография

[BDP] Brown, N., Dunfield, N., and Parry, D, Colorings of the plane I, II, III, *Geombinatorics* III (2),1993, 24-31; III (3), 1994, 64-74; III (4), 1994, 110-114.

[C] Coulson, D. An 18-colouring of 3-spase having no two points distance one apart of the same colour (submitted to *Combinatorica*).

[C1] Coulson, D., A 15-colouring of 3-space omitting distance one (рукопись).

[CFG] Croft, H. T., Falconer K. J., and Guy R. K., *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York, 1991.

[E1] Erdös, P., Combinatorial problems in geometry and number theory, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* Amer. Math. Soc., Providence, 1979, 149-162.

[E2] Эрдёш П., Письмо от 14 августа 1991 г.

[EGMRSS] Erdös P., Graham R. L., Montgomery P., Rothschild B., Spencer J. and Straus E., Euclidean Ramsey theorems I, II and III, *J Combin. Theory Ser. A*, 14 (1973) 341-363; *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai*, 10 (1973) North Holland, Amsterdam (1975), 529-557 and 559-583

[F] Falconer, K. K., The realization of distances in measurable subsets covering R^n, *Com. Theory (A)*, 31 (1981), 187-189.

[G1] Gardner, M., The celebrated four-color map problem of topology, *Scientific American*, 206 (Sept. 1960), 218-226.

[G1] Gardner, M., A new collection of brain teasers, *Scientific American*, 206 (Oct. 1960), 172-180.

[Gr] Graham, R. L., Euclidean Ramsey Theory, 153-166, in *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, ed. Goodman, J. E. and O'Rourke, J., CRC Press, Boca Raton, 1997.

[GO] *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, ed. Goodman, J. E. and O'Rourke, J., CRC Press, Boca Raton, 1997.

[GT] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. *Московские Математические Олимпиады*, Просвещение, Москва, 1986 (предисловие А. Н. Колмогорова).

[KW] Klee, V., and Wagon S., Old and new Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory, The Mathematical Association of America, 1991.

[R] Райский Д. Е., Реализация всех расстояний в разбиении пространства R^n на $n+1$ часть, *Мат. Заметки*, 7 (1970), 319-323.

[Sha] Shader, L. E., All right triangles are Ramsey in E^2!, *J. of Combin. Theory*, (A) 20 (1976), 385-389

[S1] Soifer A., Triangles in a Two-Colored Plane, *Geombinatorics*, I (1), 1991, 6-7 and I (2), 1991, 13-14

[S2] Soifer A., Triangles in a Three-Colored Plane, *Geombinatorics*, I (2), 1991, 11-12 and I (4), 1992, 21.

[S3] Soifer A., Chromatic Number of the Plane: A Historial Essay, *Geombinatorics*, I (3), 1991, 13-15.

[S4] Soifer A., A six-coloring of the plane, *J. of Combin. Theory, Ser. A*, 61 (2), (1992), 292-294

[S5] Soifer A., Six-realizable set X_6, *Geombinatorics*, III (4), 1994, 140-145.

[S6] Soifer A., An infinite class of six-colorings of the plane, *Congressus Numerantium* 101 (1994), 83-86

[S7] Soifer A., *Mathematical Coloring Book*, Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs, CO (www.uccs.edu/~asoifer), готовится к печати.

[Sz] Székely, L. A., Remarks on the cromatic number of geometric graphs, *Graphs and Other Combinatorial Topics, Proceedings of the Third Czechoslovak Symposium on Graph Theory, Prague, August 24-27, 1982* ed. Fiedler, M., Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig, 1983

[T] Townsend, S. P., Every 5-coloured map in the plane contains a monochrome unit, *J. of Combin. Theory, Ser. A*, 30 (2), (1981), 114-115

[W] Woodall, D. R., Distances relized by sets covering the plane, *J. of Combin. Theory, Ser. A*, 14, (1973), 187-200

Alexander Soifer
University of Colorado
1420 Austin Bluffs Parkway, Colorado Springs, CO 80918, USA
e-mail: asoifer@mail.uccs.edu
Internet: http://www.uccs.edu/~asoifer

Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие "семенного логоса"

А. И. Щетников

Андрей Иванович Щетников — консультант среднего учебного заведения "Новая школа" города Новосибирска. В статье анализируются некоторые созданные в античной математике алгоритмы построения рациональных приближений отношений несоизмеримых величин, а также восстанавливаются возможные философские основания этих алгоритмов.

1. Введение

В диалоге "Тимей" Платон объявляет четыре правильных геометрических тела первоначалом и семенем ($\alpha\rho\chi\eta$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma\pi\varepsilon\rho\mu\alpha$) четырех космических стихий ($\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$). При этом огню соответствует тетраэдр, воздуху — октаэдр, воде — икосаэдр и земле — куб. Плоскими началами этих четырех телесных элементов служат два прямоугольных треугольника; один из них составляет половину квадрата, а второй — половину равностороннего треугольника.[1]

"Что же касается начал, лежащих еще ближе к истоку, то их ведает Бог, а из людей разве что тот, кто друг Богу" (53d).

В данной статье делается попытка реконструировать "начала, лежащие еще ближе к истоку". Исходным пунктом этой реконструкции служит алгоритм для вычисления рациональных приближений иррационального отношения стороны и диагонали квадрата, приведенный в книге *Теона Смирнского* (II век н. э.) "Изложение математических вещей, полезных при чтении Платона".

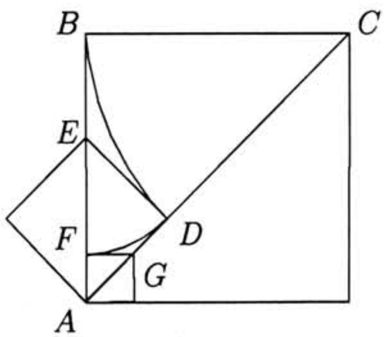


Схема 1.

[1]Куб ограничен квадратами, а тетраэдр, октаэдр и икосаэдр — равносторонними треугольниками. Пятое правильное тело — додекаэдр — играет в теории Платона роль образца для Космоса в целом.

2. Антифайретическое доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата

Наибольшая общая мера двух величин α и β может быть найдена с помощью процедуры *антифайресиса* ($\alpha\nu\tau\upsilon\varphi\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\iota\varsigma$ = последовательное взаимное отнятие). Пусть $\alpha > \beta$; будем отнимать β от α до тех пор, пока не получится остаток $\gamma < \beta$. Затем будем отнимать γ от β до тех пор, пока не получится остаток $\delta < \gamma$. Будем повторять этот процесс раз за разом, пока на очередном шаге одна величина не вымерит другую без остатка. Эта величина и будет наибольшей общей мерой исходных величин α и β. "Если же при антифайресисе двух неравных величин остаток никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут *несоизмеримыми*" ("Начала" Евклида, X, 2).

Применим процедуру антифайресиса к стороне и диагонали квадрата (*схема 1*). Сторона $AB = BC$ укладывается в диагонали AC *один* раз; при этом получается остаток AD. Построим квадрат на AD (при этом $BE = ED = AD$), затем отложим $EF = ED = AD$. Длина AD уложилась в AB два раза, и получился остаток AF. На всех последующих шагах антифайресиса ситуация будет *геометрически подобна* ситуации предыдущего шага: AF уложится в AD *два* раза, и так далее. Тем самым доказано, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы между собой.[2]

3. Алгоритм Теона и его антифайретическая реконструкция

В VIII книге "Государства" Платон употребляет выражение "выразимая диагональ ($\rho\eta\tau o\varsigma\ \delta\iota\alpha\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$) пятерки" (546d). *Теон Смирнский* комментирует это место так:

"Подобно тому как числа потенциально имеют отношения треугольные, четырехугольные, пятиугольные и соответствующие прочим фигурам, так мы могли бы найти отношения между "сторонними" и "диагональными" числами, обнаруживающиеся в соответствии с семенными отношениями, ибо по ним соизмеряются фигуры. А так как над всеми фигурами согласно наивысшему семенному отношению ($\sigma\pi\varepsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma\ \lambda o\gamma o\varsigma$) начальствует единица, то и отношение диагонали к стороне отыскивается в единице.

Возьмем две единицы; положим, что одна из них есть диагональ, другая же — сторона, ибо единица, будучи началом всего, потенциально должна быть и стороной и диагональю. И пусть к стороне прибавляется диагональ, а к диагонали две стороны, ибо удвоенный квадрат стороны равен квадрату диагонали. Теперь большее становится диагональю, а меньшее стороной.

При первой стороне и диагонали квадрат единицы-диагонали на одну единицу меньше, чем дважды взятый квадрат единицы-стороны; ведь единицы находятся в равенстве, и единое на одну единицу меньше, чем двойное. Прибавим к стороне диагональ, то есть к единице единицу; итак, сторона будет 2 единицы; к диагонали же прибавим две стороны, то есть к единице две единицы; диагональ будет 3 единицы. Квадрат стороны будет 4, а квадрат диагонали будет 9; и 9 на единицу больше, чем дважды взятое 4. Снова прибавляем к стороне 2 диагональ 3; сторона будет 5; а к диагонали 3 две стороны, то есть два

[2]Этот результат был впервые получен пифагорейцами с помощью "теории четных и нечетных чисел".

раза по 2; диагональ будет 7. Квадрат стороны будет 25, а квадрат диагонали будет 49; и 49 на единицу больше, чем двукратно взятое 25. Снова к стороне прибавь диагональ 7; будет 12; к диагонали 7 прибавь дважды взятую сторону 5; будет 17. И квадрат 17 на единицу полнее, чем двукратно взятый квадрат от 12.

И от дальнейшего прибавления, происходящего таким образом, будет происходить подобная же смена: двукратно взятый квадрат стороны то на единицу меньше, то на единицу больше, чем квадрат диагонали; при этом стороны и диагонали выразимы ($\rho\eta\tau\alpha\iota$)" [1, 317].

Теон описывает итерационный процесс построения пар (s_k, d_k), удовлетворяющих соотношению $2s_k^2 = d_k^2 \pm 1$, начиная с пары (1, 1):

$$d_{k+1} = d_k + 2s_k,$$
$$s_{k+l} = s_k + d_k$$

О происхождении этих формул Теон ничего не говорит. Историками математики ([1, 316], [2, 51], [3, 175]) высказывалась гипотеза о генетической связи алгоритма Теона с антифайретическим доказательством несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. На *схеме 1.* диагональ "исходного" квадрата AC и его сторона AB могут быть выражены через диагональ "последующего" квадрата AE и сторону AD:

$$AC = AE + 2 \cdot AD,$$
$$AB = AE + AD.$$

В свою очередь диагональ AE и сторона AD могут быть выражены через диагональ AG и сторону AF:

$$AE = AG + 2 \cdot AF,$$
$$AD = AG + AF.$$

Оборвав эту цепочку на каком-нибудь шаге, будем считать сторону и диагональ "последнего" квадрата *приближенно* равными. Совершая обратное "восхождение", можно рассчитать *приближенное* рациональное отношение диагонали и стороны "исходного" квадрата, тем более точное, чем "глубже" мы предварительно опустимся.

4. Альтернативная реконструкция алгоритма Теона

Антифайретическая реконструкция алгоритма Теона плохо согласуется с обоснованием алгоритма, приводимым самим Теоном: "к стороне прибавляется диагональ, а к диагонали две стороны, *ибо удвоенный квадрат стороны равен квадрату диагонали*". Ссылка на это обоснование была бы осмысленной в том случае, если бы оно имело универсальный характер. Но если ему приписать такую универсальность, то в таком случае при вычислении рациональных приближений "невыразимого" отношения сторон двух квадратов, один из которых в n раз больше другого (где n не является квадратным числом), аналогичное обоснование будет формулироваться так: "к меньшей стороне прибавляется большая, а к большей n раз взятая меньшая, *ибо n раз взятый меньший квадрат равен большему квадрату*". Тем самым разумно будет предположить, что Теон получает свой алгоритм, исходя из следующей схемы, находящейся в ближайшем родстве с известной пифагорейским математикам схемой параболического приложения площадей:

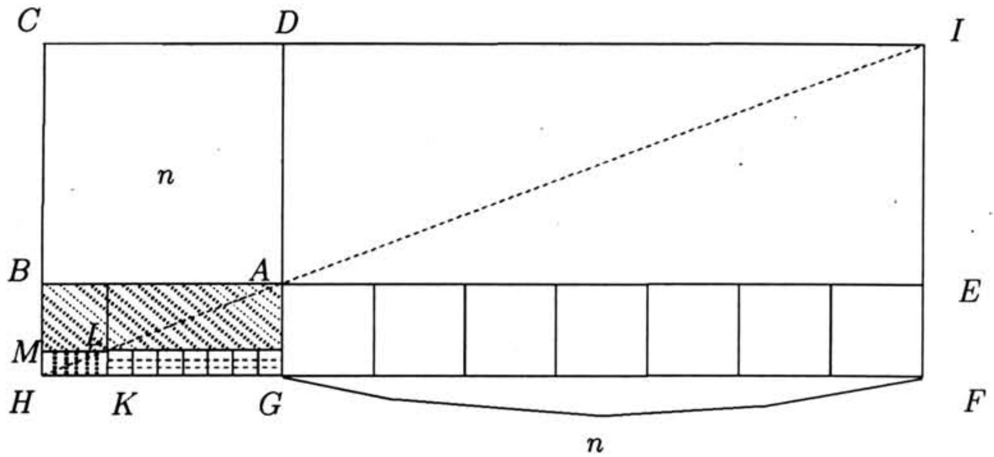


Схема 2.

Здесь квадрат $ABCD$ равновелик прямоугольнику $AEFG$, составленному из n одинаковых квадратов; прямоугольники $ABHG$ и $ICHF$ геометрически подобны. Стороны прямоугольника $ICHF$ могут быть выражены через стороны прямоугольника $ABHG$:

$$HF = HG + n \cdot HB,$$
$$HC = HG + HB.$$

Прямоугольник $ABHG$ сам может быть разделен на квадратные и прямоугольные части в той же самой пропорции; при этом его стороны можно будет выразить через стороны меньшей прямоугольной части $LMHK$:

$$HG = HK + n \cdot HM,$$
$$HB = HK + HM.$$

Эта цепочка может быть продолжена и далее. Оборвав ее на некотором шаге, будем считать большую сторону "последнего" прямоугольника *приближенно* равной m меньшим сторонам (где m — наибольшее натуральное число, квадрат которого не превосходит n). Совершая обратное "восхождение", можно рассчитать приближенное рациональное отношение сторон двух квадратов, один из которых в п раз больше другого, тем более точное, чем "глубже" мы предварительно опустимся. При этом следует исходить из начального приближения $p_0 = m,\ q_0 = 1$, и пользоваться формулами

$$p_{k+1} = p_k + nq_k,$$
$$q_{k+1} = p_k + q_k.$$

При $n = 2$ эти формулы соответствуют алгоритмической процедуре, описанной Теоном, — и поэтому мы будем называть их "формулами Теона". При $n = 3$

“алгоритм Теона” порождает (с учетом сокращения до взаимно- простых пар) последовательность числовых отношений (1: 1), (2: 1), (5: 3), (7: 4), (19 : 11), (26 : 15), ... Членами этой последовательности являются те же самые числовые отношения, что и получающиеся на последовательных шагах антифайресиса сторон двух квадратов, один из которых в 3 раза больше другого. Однако при $n \geq 5$ последовательности числовых пар, построенные с помощью “алгоритма Теона”, уже не будут совпадать с антифайретическими последовательностями.

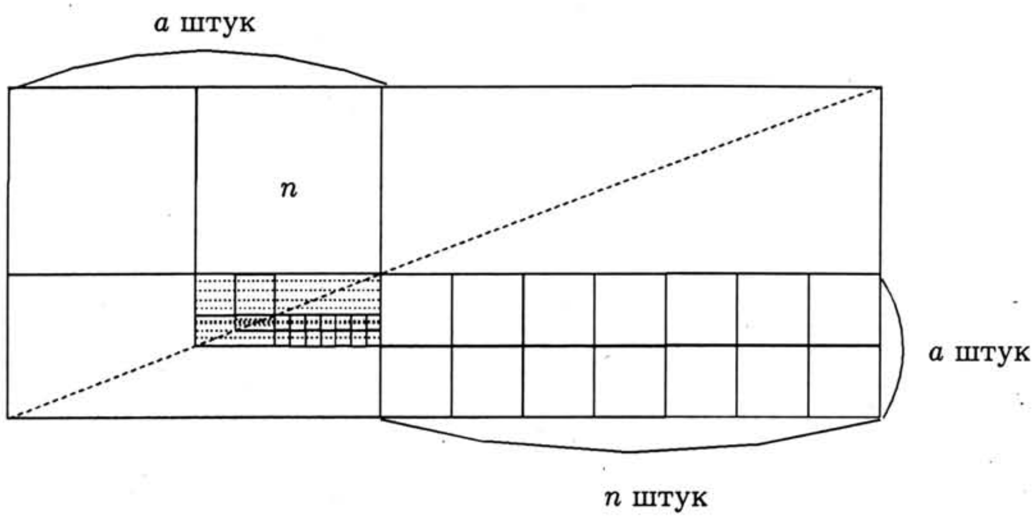


Схема 3.

Пользуясь *схемой 3*, аналогичной *схеме 2*, можно получить “обобщенные формулы Теона”

$$p_{k+1} = ap_k + nq_k.$$
$$q_{k+1} = p_k + aq_k.$$

Если положить $a = m$ — наибольшему натуральному числу, квадрат которого не превосходит n, то последовательности числовых пар, рассчитанные с помощью “обобщенных формул Теона” исходя из начального приближения $p_0 = m$, $q_0 = 1$, совпадут с “антифайретическими” последовательностями в тех случаях, когда периодичность повторения подходящих частных при антифайресисе не превышает двух шагов.

К мысли о универсальном характере алгоритма Теона первым из историков математики пришел М.Е.Паев ([4], [5]). Он же указал и на то, что этот алгоритм мог использоваться Архимедом для вычисления рациональных приближений $\sqrt{3}$, используемых в сочинении “Об измерении круга”. В качестве геометрической основы алгоритма Теона М.Е.Паев рассматривал *схему 4*, эквивалентную *схеме 2* настоящей статьи; рассматривалась им и схема, приводящая к “обобщенным формулам Теона”, и эквивалентная *схеме 3* настоящей статьи.

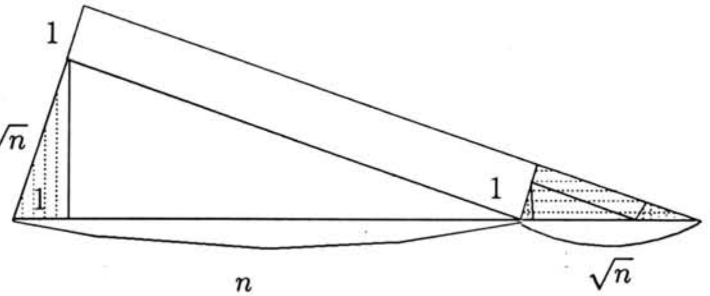


Схема 4.

Однако реконструкция “метафизического содержания” алгоритма Теона, предлагаемая ниже, существенным образом отличается от реконструкции М.Е. Паева.

5. “Семенной логос” равнобедренного прямоугольного треугольника

Хотя базовую схему алгоритма Теона и можно считать восстановленной с достаточной степенью достоверности, некоторые особенности текста Теона, кажущиеся на первый взгляд весьма странными, пока еще остаются необъясненными. О каких “семенных отношениях, по которым соизмеряются фигуры”, идет речь у Теона? В каком смысле “над всеми фигурами согласно наивысшему и семенному отношению начальствует единица”? Почему Теон говорит о “потенциальном равенстве стороны и диагонали” не как о приближенном, но как о *точном*?

Чтобы ответить на эти вопросы, видоизменим *схему 2* применительно к конкретному случаю поиска рациональных приближений для иррационального отношения стороны и диагонали квадрата (схема 5).

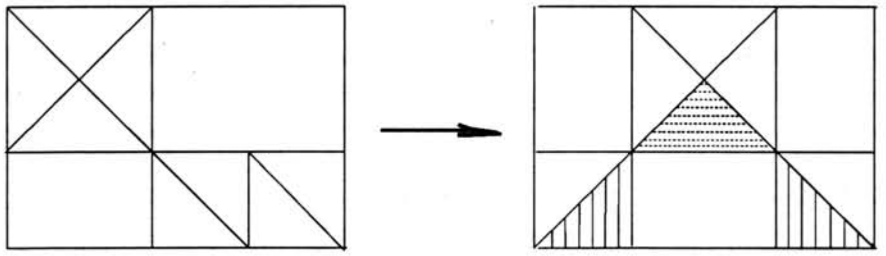


Схема 5.

Рассмотрим рекурсивный процесс, на первом шаге которого в равнобедренный прямоугольный треугольник “вписываются” три равных между собой треугольника той же формы: на следующих шагах эта процедура воспроизводится вновь *(схема 6)*.

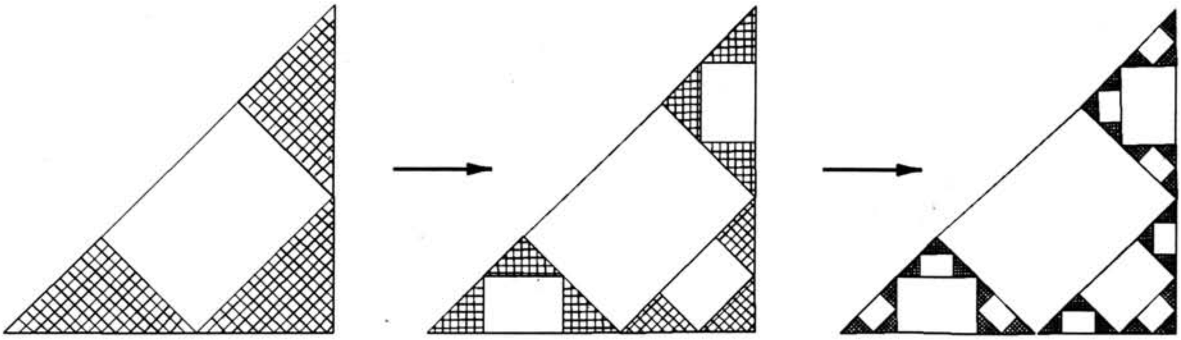


Схема 6.

Наша основная гипотеза состоит в том, что *Теон мыслил этот бесконечный процесс завершающимся предельным разбиением первоначального треугольника на неделимые "первотреугольники",* [3] *не имеющие "плоскостных" частей.* [4] Поскольку каждый такой "первотреугольник" мыслится неделимым на части, длины его сторон не могут быть подведены под отношение "больше-меньше" (так как меньшая величина всегда есть *часть* от большей). Тем самым гипотенуза и катеты такого "первотреугольника" оказываются, как выражается Теон, "потенциально равными".

Теперь рассмотрим обратный процесс соединения "первотреугольников" в более крупные агломерации. Три "семени" складываются в "агломерацию первого порядка"; при этом в новой гипотенузе укладываются три единицы (старая гипотенуза и два старых катета), а в новом катете — две единицы (старая гипотенуза и старый катет). Три "агломерации первого порядка" складываются по тому же самому *формообразующему принципу* (= "семенному логосу") в "агломерацию второго порядка", и так далее. Этот процесс показан на *схеме 7* (здесь бесконечно-малые неделимые "первотреугольники" условно изображаются треугольниками конечных размеров).

[3]Эта формулировка выглядит весьма неожиданной: как может закончиться бесконечная последовательность действий? Однако если мы будем настаивать на том, что *бесконечные* процессы не могут иметь *завершения*, то в таком случае мы вынуждены будем признать, что Ахиллес из знаменитой апории *Зенона Элейского* никогда не догонит черепаху. А поскольку Ахиллес все-таки догоняет ее, то это означает, что и другие потенциально бесконечные действия могут быть рассмотрены с точки зрения их актуальной завершенности.

[4]Бесконечно-малый "первотреугольник" нельзя представить себе зрительно — можно лишь помыслить его идею (как сказал бы Платон).

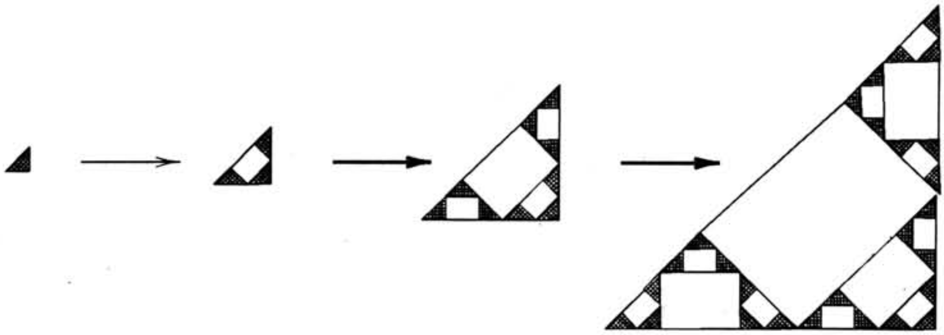


Схема 7.

Числа гипотенузных и катетных единиц на каждом шаге могут быть рассчитаны по формулам Теона. При этом конечное число шагов “вверх” не выводит из области бесконечно-малого в область “конечного”: чтобы составить из неделимых “семян” треугольник “конечных” размеров, нужно сделать бесконечное число шагов “вверх”. В итоге невыразимое отношение длины диагонали и стороны квадрата будет выражено бесконечными гипотенузным и катетным числами.

Тем самым мы предполагаем, что Теон был последователем изощренной концепции математического атомизма, согласованной с фактом существования несоизмеримых величин. “Семена” Теона не являются бесформенными точками; *внутренняя* форма их “первотреугольности” и *внешний* закон формообразования агломераций взаимно определяют друг друга. И именно эта взаимная определенность позволяет Теону конструировать “невыразимые” отношения, восходя к конечному от бесконечно-малого.

6. Алгоритм Теона и учение стоической школы о “семенном логосе”

Задавшись вопросом о том, в рамках какого философского течения могла быть развита данная математическая концепция, обратим наше внимание на фрагменты учения стоической школы в изложении *Диогена Лаэртского* [6]:

“Начала ($\alpha\rho\chi\alpha\iota$) бестелесны, стихии ($\sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\alpha$) имеют форму” (VII, 134). “Стихия ($\sigma\tau o\iota\chi\epsilon\iota\nu$) есть то, из чего первоначально возникает все возникающее и во что оно в конце концов разрешается” (137). “Семенем ($\sigma\pi\epsilon\rho\mu\alpha$) они называют то, что может порождать подобное порождающему” (158). “Природа есть самодвижущееся самообладание, изводящее и поддерживающее свои порождения в назначенные сроки по семенному логосу ($\sigma\pi\epsilon\rho\mu\alpha\tau\iota\kappa o\varsigma\ \lambda o\gamma o\varsigma$), и от чего взято, так то и творится” (148).

Предложенная выше реконструкция алгоритма Теона вполне соответствует духу учения Древней Стои. В самом деле, “стихии” Теона имеют определенную форму и находятся под началом бестелесной умопостигаемой единицы. Равнобедренный треугольник составляется из “стихий” и разлагается на оные. Эти стихии естественно называть “семенами”, потому что они геометрически *подобны* составляемым из них агломерациям, каждая из которых вновь является “семенем” для агломерации следующего порядка. И весь процесс выстраивания “внутренней структуры” равнобедренного треугольника происходит в полном подчинении “семенному логосу”.

Еще одно свидетельство в пользу достоверности данной реконструкции содержится в сочинении *Плутарха* “О противоречиях у стоиков”. Плутарх сообщает о том, что Хрисипп и другие стоики постулировали “третий род” величин (между протяженными и не имеющими протяжения), которые, *будучи арифметически равными, в то же время сохраняют определенные геометрические отношения* [7, 94]. Тем самым вполне правдоподобно будет предположить, что алгоритм, описываемый Теоном Смирнским (II в. н.э.), был предложен еще в III в. до н.э. кем-то из стоиков, вероятнее всего — Хрисиппом. Теон вполне мог воспроизвести оригинальный текст Хрисиппа в практически неизменном виде. Вопрос же о том, был ли “алгоритм Теона” известен уже во времена Платона[5], следует оставить открытым.

7. Дополнение: применение алгоритма Теона к построению рациональных приближений “золотого сечения”

Отношение “золотого сечения”, при котором вся величина относится к большей своей части так же, как большая часть относится к меньшей, рассматривалось пифагорейцами в связи с задачей о построении правильного пятиугольника. На *схеме 8* треугольник MNP геометрически подобен треугольнику QRP; треугольники QRP и NSP равны; поэтому треугольник MNP геометрически подобен треугольнику NSP. Тем самым отрезок MP делится точкой S в крайнем и среднем отношении.

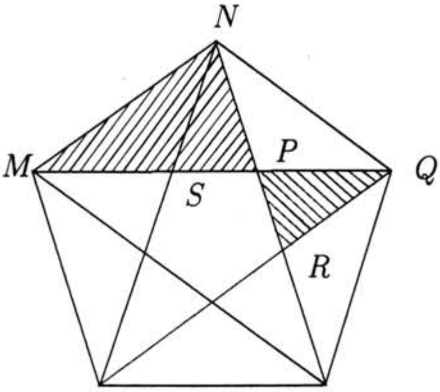


Схема 8.

Треугольники, геометрически подобные треугольнику MNP, будем для краткости называть “золотыми” треугольниками. Рассмотрим “золотой” треугольник,

[5]М.Е.Паев приписывает изобретение этого алгоритма Феодору Киренскому [5].

и впишем в него два подобных ему и равных между собой треугольника; в эти треугольники снова впишем по два треугольника, и так далее (*схема 9*). Мыслимым итогом такого бесконечного процесса будет разбиение первоначального треугольника на неделимые "первотреугольники". Основание и боковую сторону каждого такого "первотреугольника" объявим потенциально равными единице.

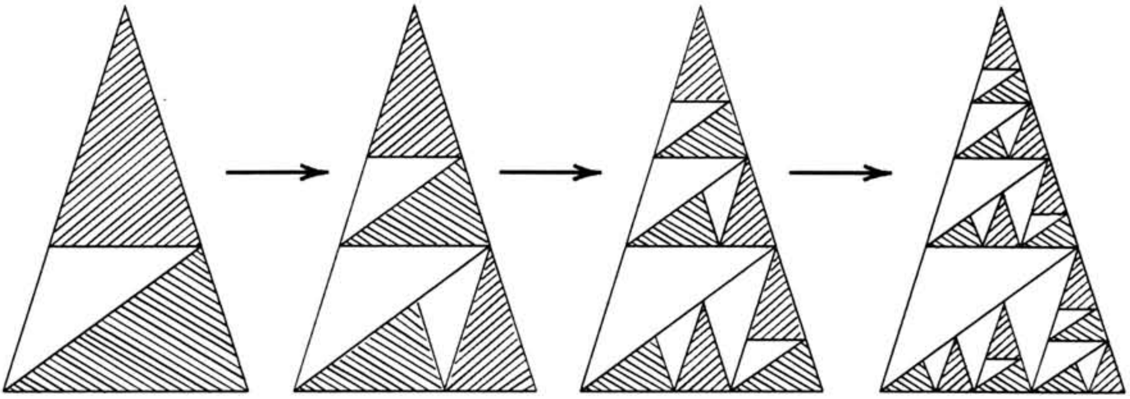


Схема 9.

Обратная процедура составления агломераций подчиняется следующему правилу: новое "число основания" равно старому "боковому числу", новое "боковое число" равно сумме старых "бокового числа" и "числа основания". При этом образуются пары (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), ... Здесь каждое "число основания", начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих "чисел основания", а квадрат каждого "числа основания" то на единицу меньше, то на единицу больше произведения его "соседей".[6]

Литература.

1. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. М., 1967.
2. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.-Л., 1938.
3. Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959.
4. Паев М. Е. О приближенном вычислении квадратных корней в древней Греции. ИМИ, вып. XVI. М., 1965. С.219-234.
5. Паев М. Е. Решение двух античных проблем. Киев. 1987.
6. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. М., 1986.

[6]Тем самым "числа основания" и "боковые числа" являются членами известной *последовательности Фибоначчи* (Примечание редакции).

7. Лурье С. Я. Предшественники Ньютона в философии бесконечно-малых. Исаак Ньютон. 1643-1727. М., 1943. С.75-98.

Summary

The basic scheme of "Theon's algorithm" for calculations of rational approximations of square roots is reconstructed. The main hypothesis is that the author of "Theon's algorithm" followed specific conception of mathematical atomism, which agreed with an existence of incommensurable quantities. This conception was based on the idea of "spermatic logos" — samesimilar generation of geometrical figures from infinitesimal indivisible "sperms". Linear elements of those "sperms" are metrically indistinguishable while being different geometrically. The idea that "Theon's algorithm" was invented by Chryshippos, Old Stoic School's leader, is suggessted.

V-й Международный Математический Конгресс в Кембридже

(21-28 августа н. ст. 1912 г.)

Д. Синцов, Харьков.

Международные Математические Конгрессы являются важным событием в жизни математической общественности. Они проводятся регулярно, раз в 4 года, по их итогам публикуются подробные отчеты. Последний Конгресс проходил 18 — 27 августа 1998 г. в Берлине. На наш взгляд, современному читателю будет интересно познакомиться с впечатлениями участника одного из первых Конгрессов, опубликованными в журнале “Математическое образование” №4, 1913 г., тем более, что они касаются в основном части работы Конгресса, посвященной преподаванию математики. Статья перепечатана с небольшими сокращениями.

21-28 августа н. ст. истекшего года состоялся международный математический конгресс в Кембридже, по счету 5-й. Первый был в Цюрихе в 1896 г., второй — в Париже в 1900 г., третий — в Гейдельберге в 1904 г., 4-й — в Риме в 1908 г. По личному впечатлению я могу судить только о конгрессах Парижском и Римском, — на Цюрихском и Гейдельбергском мне быть не привелось.

Поэтому только с этими двумя я могу сравнивать, но зная Цюрих и Гейдельберг, можно мне кажется сказать, что именно с этими двумя съездами Кембриджский должен был иметь наибольшее сходство.

Действительно, конгрессы, приурочиваемые к таким мировым столицам, как Париж и Рим, приобретают совсем иной характер. Слишком сильное впечатление оказывает самый город, слишком много внимания отдается ему; внимание разбивается, и в конце не знаешь, чему больше отдавался — съезду или городу. В Париже при том была в 1900 году всемирная выставка, привлекавшая и поражавшая уменьем французов сделать привлекательным и поучительным это всемирное торжище, этот самый усовершенствованный тип рекламы, до какой додумался капиталистический строй. Французы, надо отдать им справедливость, сумели отвести благам духовным не меньшее место, чем материальным: независимо от обширного и интереснейшего отдела образования, они устроили еще целый ряд самых различных конгрессов, — что конечно с другой стороны не мало содействовало и материальному успеху выставки. Но на математическом конгрессе это отозвалось не особенно благоприятно: втиснутый между Congres des Sourds-Muets и Congres des pompiers, он и залу для торжественных заседаний получил на самом верху и секционные заседания происходили в 3-ьем этаже Сорбонны. Но здесь нас принимал весь цвет французской математической науки с Poincare и Darboux во главе:

секретарем был тогда еще совсем молодой, но уже прославившийся E.Borel, и мы, русские, тогда и не предполагали, что именно он будет руководителем в занятиях парижских стипендиатов русского Министерства Народного Просвещения.

Совсем иной характер носил съезд в Риме. В стенах вечного города нас приняли очень радушно. На открытии присутствовал итальянской король, нас принимали и угощали в Капитолии и в Палатине. Для заседаний нам отвели прекраснейший Palazzo Corsini. А прогулки по Forum Romanus, в Колизее, по Via Appia! Итальянцы устроили конгрессистам даже удешевленный проезд по круговым поездкам по всей Италии, прибавив только предусмотрительно, что требуется непременно заехать в Рим в начале Конгресса. В этом, конечно, надобности, может быть и не было для математиков, но это устраняло злоупотребление посторонних. — Итальянцы сделали однако еще больше: они постарались нам показать воочию результаты своего научного Risorgimento, совпадающего с политическим. Все наиболее видные итальянское математики приняли деятельнейшее участие в работах конгресса. Любезные хозяева, они усердно ухаживали за своими гостями, особенно французами, наиболее хорошо представленными. И чувствовалось, что культурно итальянцы все же ближе с Францией, чем с Германией, своей политической союзницей. К тому же немцы, многочисленные на Парижском Конгрессе, в Риме были представлены сравнительно слабо.

В сравнении с этими блестящими Конгрессами Кембриджский Конгресс производил разумеется впечатление несколько серое. Не было официальной помпы; не было и роскошных декораций. Это был деловой съезд.

Кембридж и Оксфорд, вот два имени, которые приходят Вам в голову, когда речь заходит об университетах Англии. Это два наиболее типичных для староанглийского действительно университетского строя.

Нам русским более знакомы германское университеты, и когда говорят о маленьких университетских городах, существующих университетом и для университета, то в голову приходят именно германское университетское города в роде Гёттингена.

Но еще в гораздо большей степени таков Кембридж. Университет, его многочисленные колледжи — это все. Остальное - это то, что служит университету и потребностям его и его персонала. Не всегда, конечно, так было, и в старину город имел самостоятельное значение — пограничной крепости и ярмарочного пункта, задолго до возникновения в нем первых скромных зачатков того, что стало с течением времени Кембриджским Университетом. Не существует определенной даты, к которой можно было бы отнести основание университета, и неизвестно в какое время образовалось в Кембридже первое ядро преподавательской корпорации. Первые исторические сведения относятся к царствованию Генриха III (1216-1272), сына Иоанна Безземельнаго и университет выступает уже тогда как сложившаяся сильная корпорация[1]. Но английский университет сложился совершенно своеобразно. На частные пожертвования возникли полумонастырского характера общежития — колледжи, в которых в значительной мере и проходят занятия студента. Колледжи соединяются между собою и приглашают лекторов и преподавателей,

[1]Первое упоминание относится к 1229 году. Права студентам даны в 1231 г.

которые и подготовляют студентов к экзаменам.

Благодаря этому до самого последнего времени объединяющим элементом, собственностью всего университета были университетская библиотека и Examination Hall. Только с развитием естественных наук необходимость устраивать лаборатории оказывается не по средствам отдельным колледжам, и возникают — в 1872 г. Cavendish Laboratory — физическая лаборатория, построенная на средства герцога Девонширского, в 1888 закончена химическая лаборатория, в 1894 открыта лаборатория практической механики и инженерного искусства (for Mechanics and Engineering).

Совершенно своеобразная жизнь английского студенчества, в общем принадлежащего к сравнительно зажиточным классам, заслуживала бы особого описания.

И одною из привлекательных сторон съезда было то, что мы имели возможность прожить неделю в обстановке английского колледжа, и до некоторой степени познакомиться с его внутренней жизнью.

Перехожу к работам самого съезда. Его открыл своею приветственною речью председатель организационного Комитета и Кембриджского Философского Общества сэр Дж. Дарвин, сын знаменитого естествоиспытателя. Свою речь он посвятил воспоминаниям и оценке того, кто бы должен быть президентом съезда — А. Пуанкаре. Увы, не много прошло с тех пор времени, и сам он сошел уже в могилу.

Работы съезда распадались на три части, как и всегда. Во-первых, речи на общих собраниях, произносимые видными представителями науки на заранее намеченные темы, далее, частные сообщения и доклады, заслушиваемые на секционных заседаниях и, в третьих, обсуждение предложений, внесенных вновь или разрабатывавшихся в промежутки между двумя съездами.

Я остановлюсь особенно на третьей части и лишь вкратце коснусь двух первых сторон деятельности съезда.

Речь Ф. Енрикеса, (Fed. Enriques, Болонья) “Значение критики в развитии математических наук”. Критика принципов занимает внимание математиков. Анализ понятий предела и функции, изыскания вытекающие из теории параллельных и неевклидовой геометрии, новейшие исследования относительно оснований геометрии проэктивной и “Analysis Situs”, относительно многообразий многих измерений, относительно преобразований и их групп; наконец теория множеств (ансамблей) и рассуждения о бесконечном и актуальном бесконечно-малом подняли массу вопросов и привлекают философские умы. И встает вопрос, каково же по существу значение критики принципов и какое место принадлежит ей в успехах нашей науки. И на ряде примеров проф. Энрикес доказывал, что критическое направление отнюдь не вредит прогрессу науки и всегда сопровождало ее историческое развитие. Он говорил о континууме и методах бесконечно-малых у греков, об основании исчисления бесконечно-малых, о критике его основных понятий и о новейшем развитии вариационнаго исчисления, произвольных функциях и современной разработке понятия о континууме, об уравнениях и воображаемых числах, теории алгебраических функций Риманна и критике принципов геометрии, и на этих примерах доказывал справедливость своего тезиса[2].

Другие доклады: Е. — *W. Brows'a* (Yale University): периодичность в солнечной системе, которые докладчик закончил свидетельствованием уважения памяти А.Пуанкаре, *E. Landau*: решенные и не решенные проблемы из теории распределения простых чисел и римановой функции — зета. Докладчик, выпустивший недавно обширное двухтомное сочинение, посвященное этой теории, дал обзор начиная с простейших понятий и кончая еще не решенными вопросами в этой области. Академик кн. Б.Голицын прочел по-английски доклад по инструментальной сейсмологии, основная задача которой — определение истинного движения почвы в данный промежуток и требует применения математических методов. В заключение докладчик воздал должное заслугам английских ученых в этой области.

На 3-ьем общем собрании *E.Borel* прочел речь: определение и область существования функций моногенных однозначных. Напомнив происхождение идеи функции, Борель изложил различные точки зрения — аналитические и геометрические, на которые становились при изучении теории аналитических функций. Он отметил различия между функциями моногенными и функциями аналитическими и в заключении указал на аналогию между теорией функций комплексного переменного и теорией потенциала.

Более общий характер носил доклад сэра Вильяма Уайта (Will. H. White): место математики в инженерной практике. Математика — первая между науками, обширными познаниями в которых должен обладать инженер. С течением времени математики и инженеры научились лучше понимать друг друга, а потому и быть более полезными одни другим. Но между теми и другими существенное различие: математик рассматривает работу инженера с научной точки зрения, стараясь сделать математику полезной для инженера, вырабатывая теории и разыскивая формулы; инженер имеет своею главною задачей действительное выполнение работ, стремясь осуществить насколько возможно условия прочности, экономии и коммерческого успеха. Помощь, которую математик приносит инженеру, заключается в развитии математических теорий, основанных на гипотезах, подтверждаемых наблюдениями и практикой прошлого. Ранее люди науки полагали, что чистая математика сама по себе может руководить работою инженера. Теперь это уже признано недостаточным, — лучшие услуги математиков инженеру в том, чтобы внушить ему наилучшие методы экспериментального исследования, установить общие принципы, основанные на анализе и опыте и выработать практические правила, основываясь на этих научных принципах. Характерная иллюстрация разницы методов прошлого и настоящего — сравнения работ Д.Бернулли (XVIII в.) и В.Фроуда (XIX в.) о движении судов по волнам. Д.Бернулли, получивший в 1757 г. премию в Парижской Академии был прекрасным математиком, но очень мало знал море и корабли; его мемуар — математический трактат, но его практические правила, основанные на гипотезах, не соответствующих действительности, были неправильны. В.Фроуд был опытный инженер, обладавший хорошими математическими познаниями и математическим духом, но имевший кроме того большое

[2]Речь была произнесена Ф. Энрикесом по итальянски; присутствующим раздавался французский текст ее, напечатанный в журнале Scientia. т. 6.

знание моря и кораблей и крупные таланты экспериментатора. Он взялся за тот же вопрос, основывая свои математические исследования на опыте и наблюдении, и ему удалось достичь полезных результатов для практики кораблестроения. Многое уже сделано благодаря совместной работы математика и инженера. Еже больше можно ожидать впредь, когда взаимные отношения математики и инженерного искусства будут лучше поняты. Дальнейшие доклады в общих собраниях:

M.Bôcher (Harvord (?) Univ.): задачи при границах в одном измерении. *Дж. Лармор* (Кембридж): динамика радиации. Таким образом как и подобало Кембриджу, где жил и воспитывался Ньютон, главное место в этих докладах было отдано прикладной математике.

Не буду перечислять названий докладов по отдельным секциям[3] как носивших специальный характер.

Ограничусь лишь четвертой секцией и в частности ее подсекцией, посвященной преподаванию математики, заседания которой происходили совместно с собраниями Международной Комиссии по преподаванию математики и составляли как бы II-ой международный съезд по преподаванию математики, организованный по тому же плану, что и первый устроенный Комиссией в сентябре 1911 года в Милане.

II.

Председатель Центрального Комитета проф. Ф. Клейн не мог приехать на конгресс, и по поручение Центрального Комитета его товарищ председателя, маститый Сэр Дж. Гринхиль (G.Greenhill) выступил на первом общем собрании 22, VII с кратким заявлением о том, в каком положении находится дело, возложенное на Комиссию, и сообщил, что в заключительном заседании Конгресса Комиссия имеет в виду выступить с предложением продолжить ее полномочия.

Секретарь Комиссии проф. H.Fehr доложил общий отчет об организации и деятельности Комиссии за 1908—1912 гг., затем делегаты отдельных стран доложили о состоянии работ их родины; за отсутствовавших докладывал также проф. Fehr. Закончены и представлены отчеты 9 стран: Швеции, Голландии, Франции, Швейцарии, Австрии, Японии, Соединенных Штатов, Великобритании (2 тома) и Дании. Еще не закончены, но уже в печати отчеты в 8 странах: Германии, опубликовано 25 тетрадей из предположенных 36, Бельгии[4], Испании, Венгрии, Италии, Норвегии,

[3]Их было 4 (а считая и подсекции 6).

I. Арифметика, алгебра, анализ.

II. Геометрия.

III а. Механика, математическая физика, астрономия.

III б. Экономические науки, страхование, статистика.

IV а. Философия и история математики.

IV б. Преподавание математики.

[4]Пользуюсь случаем исправить сделанную в предыдущей статье ошибку: Бельгийский отчет не исчерпывается опубликованным томом. Должен появиться еще второй том с двумя очерками. Математика в промышленных и профессиональных школах — Rombaux, и преподавание математики в университетах и высших учебных заведениях — J. Neuberg

Румынии и России. — Таким образом, в Соединенных Штатах вопреки мнениям скептиков работа оказалась законченной.

Интересный доклад о нем сделал J.W.A.Joung (Chicago).

Отчет Соед. Штатов состоит из общего отчета, дающего общий очерк целого и 20 специальных отчетов, трактующих отдельные области и в совокупности дающие полный очерк математического преподавания в Соед. Штатах. Его значительная однородность обусловливается не законодательствами, предоставляющими организацию народного образования веденью отдельных Штатов, а однородности мысли и жизни на всей территории Соединенных Штатов. Нормально ученик проходит по порядку, а) детский сад (Kindergarden) 3 года (от 3 до 6 л.), элементарную школу 8 л. (от 6-летнего возраста); средняя школа (secondary School) 4 года (поступление в 14 л. возрасте), колледж или учреждение того же типа 4 года (возраст поступления — 18 лет); университет или учреждение того же типа — 3 или более лет (возраст поступления — 22 года). Одна из важнейших задач американского преподавания математики — от низших до высших ступеней — надлежащая подготовка преподавательского персонала. В настоящее время 415 учителей элементарных школ — женщины, и при том лишь немногие остаются в школе на более продолжительный срок. Задача подготовки такой армии учительниц, большая часть которых по истечении сравнительно короткого срока уходят, было и есть одною из больших трудностей, и влияние этого на Американское образование вообще и на элементарную математику в частности весьма серьезно. — Вопрос об улучшении преподавания арифметики очень волновал в последние годы, и это имело хорошие результаты: устранение большей части устарелых приложений из курса арифметики, введение в значительном проценте современного материала в задачах, лучшая группировка арифметического материала с целью возбуждать интерес и идти на встречу непосредственным нуждам ребенка, считаясь с его психологией, в третьих, приспособление задач к местным условиям, признанное важным самими учителями и сокращение (благодаря устранению устарелого материала) времени отводимого на арифметику с введением в замен того года алгебры и геометрии. Рост городов и промышленности приводит к замене сельскохозяйственных задач задачами из городской и промышленной жизни. — Средняя школа распадается на общую и техническую, — последняя выросла за последние десятилетья и слишком разнообразна по типам, и приспособление курса математики средней школы к разнообразным потребностям технической — очередная задача, привлекающая к себе внимание американских педагогов. Что касается до средней школы общего типа, то интерес к преобразованию ее курса математики возбудился в последнее время под влиянием деятельности Международной Комиссии. Курс математики средней школы с 4-х летним курсом в большинстве случаев мало уклоняется от такой схемы:

1-й год: Первый курс алгебры.

2-й год: Планиметрия — начинается и оканчивается.

3-й год: 1-ое полугодие: второй курс алгебры (включая квадратные уравнения).
2-ое полугодие: Стереометрия — начинается и оканчивается.

4-й год: 1-ое полугодие: Третий курс алгебры.
2-ое полугодие: Плоская тригонометрия.

Курсы первых двух лет обязательны, двух последних, — обыкновенно факультативны. — Есть стремления с одной стороны к упрощению преподавания, с другой к перераспределению материала — чтобы алгебра и геометрия преподавались одновременно. Это связано с подготовкою преподавателей, и признается, что при легком изменении преподавания в колледжах можно бы требовать такой минимальной подготовки для преподавания в средних школах:

a) тригонометрия, алгебра (“College algebra”), аналитическая геометрия;

b) низшая геодезия или начертательная геометрия, или элементарная астрономия (космография);

c) дифференциальное и интегральное исчисление с приложениями к геометрии, механике и физике;

d) современная геометрия (проэктивная);

e) основания аналитической механики;

f) основания теоретической и опытной физики;

g) алгебра с современной точки зрения;

h) один или несколько курсов вводящих в важные области современной математики;

i) один или несколько курсов по истории математики;

j) один или несколько курсов по преподаванию математики.

Опускаю дальнейшие замечания докладчика о преподавании в колледжах и в высших учебных заведениях. Здесь же уместно упомянуть, что Bureau of Education издает составленную D.E.Smith'ом и C.Goldziher (Budapest) библиографию преподавания математики, содержащую до 2000 заглавий за 1900—1912 гг. Первоначальный материал содержал 5000 заглавий, съезд в своем заседании 27 VIII признал желательным опубликование этой библиографии полностью. Но для этого понадобится сотрудничество представителей различных стран.

Крупный интерес представляет двухтомный отчет, опубликованный английскою делегацией.

Второе заседание 27 августа было целиком посвящено докладу C.Runge: об анкете устроенной по вопросу о математической подготовке для избирающих своею специальностью физику.

Вопросник анкеты, выработанный C.Runge, был таков:

1. Каковы те ветви математики, которые должны входить в состав регулярного обучения физика? Делается ли в математической подготовке физика разница в зависимости от того, специализируется ли он по опытной или по теоретической физике? Принимают ли профессора математики в соображение нужды физиков? Есть ли курсы математики специально предназначенные для физиков? В какой мере и с какой точки зрения принимают математики участие в курсах а) механики, б) в других курсах, в особенности таких, которые относятся к современной области математической физики?

2. В какой мере распространены в университетах современные графические методы интеграции и номографии? Рекомендуется ли изучающим физику изучать начертательную геометрию, численный счет, численное решение дифференциальных уравнений и метод наименьших квадратов?

Обучаются ли они обращению с математическими инструментами, как то счетной линейкой, счетной машиной и планиметрами, существуют ли для этого особые курсы или это делается на практических занятиях по физике?

3. Какова организация математических упражнений, предназначенных для физиков? Организованы ли они по обычному методу лабораторий? Существует ли личное общение профессора или его ассистентов с отдельными студентами?

Вот главные вопросы, поставленные C.Runge. На основании ответов, поступавших из Италии, Австрии, Германии, Швейцарии, Голландии, Англии и Соединенных Штатов составил Runge свой отчет. Он указывает, что довольно трудно производить сравнение, ибо один и тот же термин, напр., "аналитическая геометрия" в разных местах означает различные вещи. Выясняется все же, что предметы преподавания приблизительно одинаковы, и курс математики, проходимый физиками, не имеет никакого прямого отношения к их специальности, профессора математики мало считаются с потребностями физиков, и никакого различия между изучающими теоретическую и опытную физику не делается. Runge говорит о жалобах его корреспондентов, что профессора математики отдают много времени логическому обоснованию анализа, мало обращают внимания на то, что нужно для физиков (теоремы Грина и Стокса, более применимое на практике трактование теоремы Фурье, векторный анализ). Но главное — нужно более тесное единение математиков и физиков и изменение духа математического преподавания в сторону большей практичности и применимости к физическим проблемам, — разрыв теперь широк и не стремится сузиться. Графическое методы распространены, за исключением Франции, очень мало, за исключением начертательной геометрии, которая, если ее не сдерживать, имеет тенденцию перерастать и вытеснять из внимания студента все остальные математические дисциплины; как ни важна начертательная геометрия, но очень мало математических исследований могут, быть сделаны с ее помощью, и графическое представление изменений функций одной или нескольких переменных имеет по меньшей мере то же значение для изучающих натуральную философию. Эмпирическая функция, часто встречающаяся физику, гораздо удобнее и легче поддаются графическим методам, чем аналитическим, и инженеры давно этим пользуются, но только с Massau (Бельгия) и M. d'Ocagne (Париж) методы эти разработаны систематически и стали ветвью математики, которой однако только во Франции отдается должное внимание преподавателями. Методы графического интегрирования данной функции вещественной или комплексной переменной, обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторых уравнений в частных производных должны бы стать существенною частью интегрального исчисления. Графическое методы имеют то преимущество, что делают интегрирование более доступным, чем дифференцирование, и тем восстановляют естественный порядок. *Численные* методы старше графических и потому более известны, но и они слишком заброшены в математическом образовании студента-физика. Причина та, что большинство профессоров математики не чувствуют к ним склонности и не имеют вкуса и привычки к численным выкладкам. Еще способ наименьших квадратов читается, но исчисление конечных разностей, численное решение уравнений, численное нахождение интегралов и численное решение дифференциальных уравнений были бы очень полезны для физиков, равно как и уменье обращаться с математическими инструментами — счетной линейкой, интеграфом, планиметром, счетной машиной. Но для этого необходимы занятия лабораторного типа, какие пока привились только по начертательной геометрии. Но по такому же плану занятия должны вестись и по численным и по графическим вычислениям, да и по общим математическим упражнениям. Трудность в математических занятиях студента не столько в том, чтобы понять доказательство математической теоремы, а в том, чтобы схватить ее содержание, чтобы видеть приложимость ее в разнообразных случаях, чтобы уметь применить ее. Для изучающих физику или инженерное дело первейшую важность имеет способность применять свои математическая познания, которые без этого совершенно не нужны. Но эта способность, достигается только упражнениями. По одним лекциям так же нельзя изучить математику, как нельзя научиться играть на фортепьяно только слушая игру пианиста. Только при лабораторных занятиях возможна индивидуализация обучения. Кроме того графики и употребление математических инструментов надо показать каждому студенту в отдельности и заставить некоторое время попрактиковаться на глазах учителя.

Доклад вызвал оживленные прения. Некоторые из ораторов (например, Штеккель) настаивали, что опасно было бы пренебрегать логическою стороною преподавания; утилитарная сторона не должна доминировать. Другие указывали, что все сказанное было бы полезно и для специализирующихся по чистой математике, и время для этого легко было бы найти за счет практических занятий по физике, число которых по признанию самих физиков[5] иногда преувеличено, достаточно было бы отказаться от некоторых манипуляций, мало интересных и не имеющих ни теоретического ни практического значения.

Заседание 27 августа было посвящено и докладу D.E.Smith'a по анкете об интуиции и эксперименте в математическом преподавании в средней школе[6]. Циркулярное обращение было составлено D.W.Lietzmann'ом, секретарем германской подкомиссии. Оно ограничивало предмет анкеты ролью того и другого в высших классах средней школы. Ответы поступили от Dintzl'я (Вена), Godfrey (Осборн, Англия), Bioche (Париж, Франция), P.Treutlein'a и W. Lietzmann 'а (Германия), H.Fehr'a (Швейцария), D.E.Smith'a и J.W.A.Joung (Соед. Штаты).

В Англии придерживаются мнения, что этим методам место в средних и низших классах, но не в высших. В Соединенных Штатах за последние 10 лет было сделано не мало опытов, начиная с крайней лабораторной методы с минимумом математики и кончая самым абстрактным изложением, в котором интуиция и опыт не играют никакой почти роли.

Переходя затем к отдельным пунктам списка вопросов Лидманна, D.E.Smith изложил вкратце общие результаты, отлагая детальное изложение для печати. Мы и ограничимся приведением этих общих результатов.

В деле измерения и оценки (Mesure et estimation des grandeurs, Messen und Schätzen) более практическая форма по-видимому находится в стадии развития,

[5] J.J.Thomson

[6] Доклад напечатан полностью в "Вестник Оп. Физ." №570, 572-3.

особенно в Австрии, Германии и Швейцарии. Англия, Франция и Соединенные Штаты уделяли по-видимому меньше внимания этим вопросам или по крайней мере получили менее определенные результаты. Элементарная тригонометрия обычно начинается в более раннем периоде в первых трех странах, и это дает возможность производить работу на открытом воздухе с простыми инструментами на более ранней ступени.

В деле геометрического черчения и графического представления различные страны находятся в переходном состоянии от прежнего положения, когда этим ведал учитель рисования, к тому, когда это относится к области математики, общая тенденция — рассматривать эти предметы как часть математики, но самое содержание, даже и термин “начертательная геометрия” еще не установились. В общем преподавание ведется в реальных школах и не ведется в гимназиях.

Графические методы изображения функций становятся всеобщими в последнем поколении. От представления линией уравнения происходит переход к графическому представлению функции, но все находится еще в стадии эксперимента; о значении миллиметровой бумаги споров нет, ей даже злоупотребляют, слишком растягивая прохожденье уравнений и доказывая очевидное.

Сокращенные методы вычислений, усиленно рекомендовавшиеся 50 лет назад, не делают успехов, — чувствуется, что они не практичны. Применение логарифмов, напротив, возросло, счетная линейка вошла в фавор в технических школах. Графическое вычисление и приближение корней высших уравнений (по методам Runge например) не нашло еще себе доступа в школу и трудно сказать, найдет ли.

В общем признание роли интуиции и эксперимента в математике средней школы сделало бо́льшие успехи в Австрии, Германии и Швейцарии, чем в Англии, Франции и Соединенных Штатах.

Наиболее важными являются однако вопросы о природе геометрии и о трактовании понятия функции.

Первый из этих вопросов таков, насколько геометрия в средней школе должна быть индуктивна и насколько дедуктивна. Немногие готовы будут утверждать в настоящее время, что всего лучше начинать геометрию с Евклида или Лежандра. Должна быть подготовительная ступень, характеризуемая интуицией и экспериментом. Но сколько времени (1 1/2, 2 и 3 года) отдавать этому подготовительному курсу, каково должно быть его содержание и в какой мере должна интуиция заменять Евклидову дедукцию[7] — на эти и другие вопросы трудно дать научнообоснованный ответ.

Можно сказать вообще, что в тевтонских странах стремятся соединить интуитивное изложение с дедуктивным, а во Франции и теперь в Англии индуктивный цикл предшествует дедуктивному. В Соединенных Штатах только еще начинают говорить об этом, но заметна склонность к англо-французскому плану.

Второй важный, вопрос относится к тому, как излагать понятие о функции. Если анализ бесконечно-малых уже вводится в среднюю школу, то его нужно вво-

[7]Smith отсылает читателей к книжкам. *P. Treutlein.* Der geometrische-Anschauungsunterricht als Unterstufe des zweistufigen geometrischen Unterricht Leipzig. Teubner. 1911. (есть русский перевод). *H.E. Timerding.* Die Erziehung der Anschauung. 1922.

дить не ex abrupto. Понятие предела, изменяемости, ее меры, функции, графика должны вводиться постепенно и стать настолько ясными, что когда приступим к анализу, они явились бы старыми друзьями. Как достичь этого возможно экономичнее — одна из проблем наглядной (интуитивной) математики.

Один из интересных фактов современной педагогики тот, что преподаватели требуют исключения несоизмеримых чисел из геометрии, с тем только, чтобы встретиться лицом к лицу с требованием их же для изучения пределов, функции, и меры изменения. Движение в пользу выработки понятия функции еще слишком ново, чтобы судить об устойчивости его в средней школе, — возникшие во Франции лет двадцать назад и с силою поддерживаемое лет десять в Германии, оно в разумных границах имеет за себе многое[8].

C.A.Laisant выразил сожаление, что подкомиссия ограничила исследование вопроса средним образованием, а не захватила его во всей широте, от первого знакомства ребенка с математикой. Thaer, признавая верность характеристики данной D.E.Smith'ом положения дела в Германии, указал на тенденцию — сначала к составлению искусственных наглядных пособий, которую сменило затем стремление брать материал из окружающего, чтобы *ученик поучался абстрагировать математические понятия из окружающей обстановки и снова к ней их применять.* Применение *черчения кривых* и графических решений по мнению многих в Германии уже преувеличено. В особенности статистические кривые часто могут скорее затемнить понятие функции, чем раскрыть его. В географии они конечно полезны, но в математике только тогда, когда они приводят к установлению функциональной зависимости. Например колебания курса акций какой-нибудь промышленной компании едва ли могут быть в этом полезны, напротив, влияние количества добываемого золота и серебра на цену серебра, поскольку она не изменяется биржевою спекуляцией, может оценить ученик средних классов.

E.Dintzl (Вена) говорил о положении дела в Австрии. Он привел воззрения проф. Соботка (чеш. унив. в Праге): "эксперименты (демонстрации моделей, графические изображения и пр.) следует производить учителю и ученику, но только постольку, поскольку он помогает самостоятельному постиганию и выработке способности к пространственному воззрению, заставляет обдумывать, или способствует открытию в исследуемом предмете новых сторон, т.е. как *пособие*, а не как *исключительное средство для достижения цели*".

Вот наиболее интересные моменты прений по поводу доклада D.E.Smith'a.

Отметим в заключение, что в заключительном заседании деятельность международной комиссии продолжена до следующего VI конгресса, который соберется в Стокгольме. В промежутки предполагается съезд деятелей Комиссии в Париже в начале апреля 1914 г. На порядок дня предположено поставить вопрос о математике в высшем техническом образовании.

Летом 1915 г. предполагается съезд в Гёттингене или Галле, который будет посвящен вопросу о теоретической и практической подготовке преподавателей математики.

[8] См. *R.Schimmak* Die Entwickelung der mathematischen Unterrchtsreiorm in Deutschland.

О книге М. М. Постникова "Критическое исследование хронологии древнего мира"

Наш журнал собирается рассказывать о новинках математической, историко-математической и биографической литературы. Первая книга, которую мы представляем, хотя и не может быть в точности отнесена ни к одному из этих разделов, но касается истории науки, в том числе математики, а также применения математических (статистических) методов к обоснованию или опровержению исторических гипотез. Книга написана выдающимся современным математиком М. М. Постниковым.

Читатели нашего журнала знакомы с выдающимся математиком лауреатом Ленинской премии профессором Михаилом Михайловичем Постниковым. Его 70-летнему юбилею был посвящен 2-й номер "Математического образования" за 1997 год. В тот номер вошли и две статьи, отражающие его увлечение древней историей: "О достоверности древней истории" и "Необходимые разъяснения к статье "О достоверности...".

В 1976 г. группе математиков (включающей А.Т.Фоменко, А.С.Мищенко и др.) им был прочитан цикл лекций по древней истории. Результатом явилась в 1977 г. рукопись книги "Критическое исследование хронологии древнего мира". Двадцать лет эта книга распространялась в самиздате, а в нынешнем году она в трех томах выходит в издательстве **"Крафт+Леан"**.

В предисловии М.М.Постников пишет: "Известный ученый и революционер, член Исполнительного Комитета "Народной Воли" Почетный академик Николай Александрович Морозов (1854-1946) опубликовал в 1924-1932 гг. многотомное исследование "Христос" (первоначальное название — "История человечества в естественно-научном освещении"), в котором подвергнуты коренному пересмотру традиционные представления о древней истории человечества. Положения Морозова были нацело отвергнуты учеными-историками по существу без всякого анализа и понятно почему."

Причины такого неприятия подробно объяснены во второй из упомянутых статей, "Необходимые разъяснения...", "МО", №2, 1997. Там же изложена увлекательная и драматическая история прорыва идей Морозова к советскому читателю и создания рукописи настоящей книги.

Современный читатель находится в гораздо более выгодном положении:

в том же издательстве "Крафт+Леан" осуществлено переиздание труда Морозова "Христос", более того, впервые будут опубликованы рукописи Морозова, относящиеся к истории России.

Широко распространены и постоянно появляются новые работы продолжателей идей Морозова, в которых история пересматривается гораздо более радикально.

Вновь обратимся к предисловию: "Хотя настоящее сочинение содержит, как мне представляется, изложение всех основных идей Морозова, это не значит, что я со всеми ними согласен, хотя бы потому, что о некоторых его соображениях я не могу квалифицированно судить, верны они или нет. Они все же приведены, чтобы у читателя сложилось собственное мнение. Однако мною был осуществлен, конечно, определенный отбор, так что вполне возможно, что сам Морозов мог бы обвинить меня в искажениях. Таким образом, вся ответственность за этот текст лежит, в конце концов, целиком на мне.

Последние годы (это написано в 1977 г.! — *прим. ред.*) ознаменовались появлением большого числа сочинений, посвященных так называемой "паранауке". В области истории — это "атлантоведение", представление о существовании в далеком прошлом (чуть ли не в третичном периоде) культурнейших цивилизаций, убеждение в посещении Земли космическими пришельцами и т.д. и т.п. Не обсуждая здесь эти вопросы по существу, нельзя все же не отметить, что адепты паранауки отличаются невероятным легковерием, выражающемся в аппелировании к непрверяемым показанием "очевидцев", которые, как правило, характеризуются очень неопределенно ("один летчик", "один турист" и т.п.). Проверка их ссылок на "материальные свидетельства" (скажем, на пресловутый "зальцбургский параллелепипед") обнаруживает, что этих свидетельств либо просто нет, либо они были "уничтожены" или "пропали" при неясных и неуточняемых обстоятельствах. В связи с этим особенно любопытно, что **так называемая "античная история" (в отличие, скажем, от новой истории) обнаруживает все характерные черты так называемой паранауки.** Выявление этого замечательного факта (конечно, в других терминах) и является одной из основных заслуг Морозова. Подробному обсуждению этого вопроса посвящен первый том настоящей книги, в котором также описываются основные принципы и методы исследования.

В литературе бытует много совершенно неправильных мнений о труде Морозова. Например, утверждается, что ядро его теории состоит якобы в "астральном" истолковании библейских мифов. На самом же деле, это астральное истолкование настолько малосущественно, что здесь его рассмотрение оказалось возможным отложить до последней главы второго тома, являющейся всего лишь своего рода комментарием к предыдущим главам.

Более того, хотя исследование Библии (отнюдь не в астральном истолковании) и играет у Морозова весьма существенную роль, но все же его основные утверждения могут быть обсуждены и обоснованы без какого-либо упоминания библейских мотивов. Это видно хотя бы из того, что в первом томе настоящего сочинения Библия нигде не упоминается.

Очень распространено также мнение, что основным орудием Морозова была астрономия (так и пишут, что он произвел "астрономический переворот в исторической науке"). Это тоже не совсем так: астрономические соображения играют у Морозова хотя и важную, но все же вспомогательную роль. Гораздо большее значение имеют его общетеоретические установки и математико-статистические наблюдения над параллельным течением некоторых династических потоков.

В общем-целом, исследование Морозова носит синтетический характер, сочетая в себе (часто в причудливой и почти всегда неожиданной форме) общетеоретические, математические, астрономические, лингвистические, геологические и прочие соображения. В отличие от сторонников паранауки Морозов в своих главных критических утверждениях основывается, как правило, на самых фундаментальных фактах истории, которые можно найти в любых монографиях, учебниках и в научно-популярной литературе.

(...)

...В последние годы А. Т. Фоменко (академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ — *прим. ред.*) с сотрудниками выпустил в свет целый ряд книг, продолжающих и развивающих идеи Морозова. Он совсем по-иному реконструирует историю Средневековья. Сама возможность этого еще раз подчеркивает, насколько зыбки и неопределенны наши знания о прошлом."

Из переписки с читателями

Наш читатель из Челябинска М.А.Овчинников обнаружил, что задача из старого выпуска "Математического образования", опубликованная в подборке номера 1 за 1997 г., содержит неверный результат. Вот ее формулировка:

В треугольник ABC вписаны три окружности так, что они касаются вписанной окружности и двух сторон треугольника. Если их радиусы суть s_a, s_b, s_c, то

$$s_a + s_b + s_c = r \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s_a s_b}} + \frac{1}{\sqrt{s_b s_c}} + \frac{1}{\sqrt{s_c s_a}} = \frac{1}{r} \tag{2}$$

$$S = r^3 \cdot \sqrt{\frac{r}{s_a s_b s_c}}, \tag{3}$$

r – радиус вписанного круга.

Первое и третье равенства, очевидно, выполняются в случае равностороннего треугольника. Если правую часть второго равенства заменить на $\frac{9}{r}$, то оно также выполняется для равностороннего треугольника.

В общем случае все равенства неверны. Чтобы опровергнуть первое и второе равенства, достаточно рассмотреть равнобедренный треугольник с очень малым углом при основании; чтобы опровергнуть третье — равнобедренный треугольник с очень малым углом при вершине.

Редакция.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание постарается оказать образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 1999 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 1999 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342 БИК 044525342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 25 руб., сдвоенного номера 3-4(6-7) за 1998 г. – 35 руб.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.
Адрес страницы фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru
Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.