Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год третий

№ 4 (11)

Октябрь - декабрь 1999 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 4 (11), 1999 г.

Москва

Contents

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 4 (11), октябрь – декабрь 1999 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 1999 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 27.04.2000. Корректура: Н. А. Носова.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Числа и суммы (окончание)

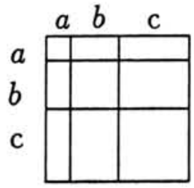
Пособие для факультативных занятий

Окончание пособия «Числа и суммы» содержит ответы и указания к некоторым задачам пособия и Приложение, поясняющее использование некоторых общеупотребительных математических обозначений.

§12. Ответы и указания к некоторым задачам пособия

К параграфу 1

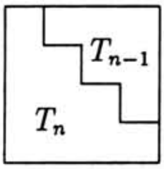
1.3.



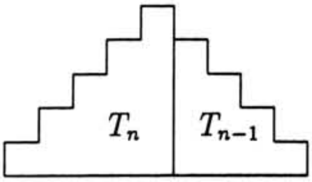
К параграфу 2

2.3. 36

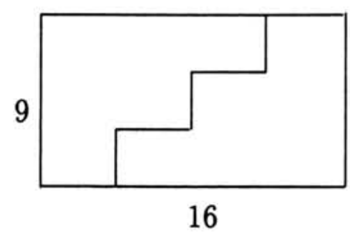
2.6.



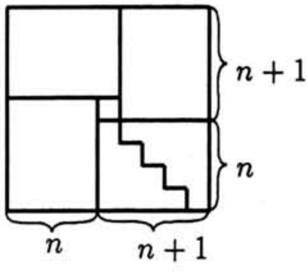
2.8.



2.10.

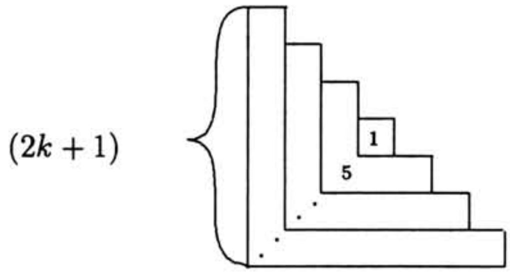


2.11.



К параграфу 3

3.3.

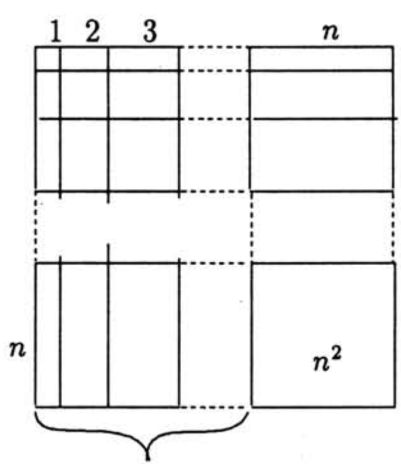


$1+5+9+\cdots+(4k+1)=(2k+1)(k+1)$

3.6. б) если n — четное, то $n^2 = 4 + 12 + 20 + \cdots + (4n - 4)$; если n — нечетное, то $n^2 = 1 + 8 + 16 + \cdots + (4n + 4)$.

3.8. «Пифагорова таблица умножения» чисел от 1 до n представляет собой квадрат со стороной, имеющий площадь $S = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Найдем площадь уголка, соответствующего умножению на n (см. рис.). Уголок составлен из квадрата площадью n^2 и двух одинаковых прямоугольников со сторонами n и $1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, площадь n-го уголка $S_n = n^2 + 2 \cdot n\dfrac{n(n-1)}{2} = n^2 + n^3 - n^2 = n^3$; так как пифагорова таблица сложена из уголков, то получаем тождество $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.



$1+2+3+\cdots+(n-1)$

К параграфу 4

4.6. Воспользуемся методом Гаусса:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Теперь остается заметить, что во всех скобках одно и то же число, а для этого достаточно доказать, что в любых двух соседних скобках одно и то же число. Но по определению прогрессии $a_{i+1} = a_i + d$, а $a_{n-i+1} = a_{n-i} + d$, поэтому $(a_i - a_{n-i+1}) = (a_{i+1} - d) + (a_{n-i} + d) = (a_{i+1} + a_{n-i})$ — искомое равенство. Так как в выражении для $2S$ ровно n одинаковых слагаемых, то $2S = n \cdot (a_1 + a_n)$ или $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

4.7. По определению арифметической прогрессии, $a_k = a_{k-1} + d$, $a_{k+1} = a_k + d$; выражая a_k из 1-го и 2-го равенств, получаем $2a_k = (a_{k-1} + d) + (a_{k+1} - d) = (a_{k-1} + a_{k+1})$.

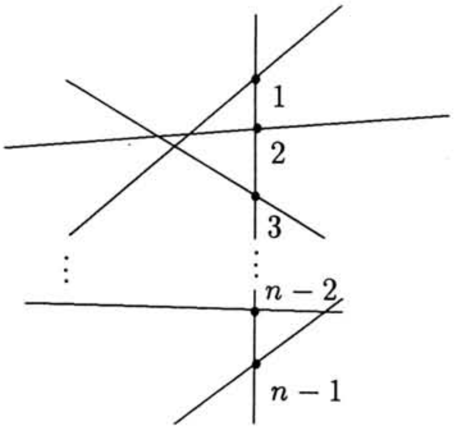
4.8. Равенство $a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$ удобно переписать в виде $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$ или $(a_k - a_{k-1}) = (a_{k+1} - a_k)$. Последнее равенство означает, что соседние члены различаются на одно и то же число — разность арифметической прогрессии.

4.12. Сопоставим каждой команде точку на плоскости, а каждой игре между двумя командами — отрезок, соединяющий две точки, соответствующие играющим командам. Нетрудно видеть, что тогда число матчей первого круга равно числу всех отрезков с концами в наших шестнадцати точках и, как следует из 4.13, равно $\frac{16(16-1)}{2} = 120$. Следовательно, всего будет сыграно 240 матчей. Так как в каждой игре разыгрывается ровно два очка, то общее количество очков $2 \cdot 240 = 480$.

4.13. Две точки на плоскости соединяются единственным отрезком. Если добавить третью точку, то добавится два отрезка (нужно соединить третью точку с двумя уже имеющимися), при добавлении четвертой точки добавится три отрезка, ..., при добавлении n-й точки добавится $(n-1)$ отрезок по количеству уже имеющихся точек. Следовательно, общее количество отрезков $N = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

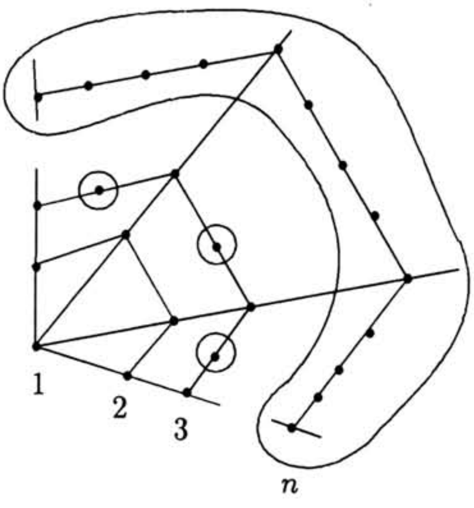
4.14. Соединим любые две вершины выпуклого n-угольника. Получилось $\frac{n(n-1)}{2}$ отрезка (см. 4.13.), среди которых ровно n отрезков являются сторонами n-угольника. Следовательно, общее число диагоналей $N = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

4.15. Как и в задаче 4.13, будем последовательно проводить прямые и смотреть, как меняется количество частей, на которые разделилась плоскость. Первая прямая разделит плоскость на две части, вторая прямая добавит еще две части, третья прямая добавит еще три части. Подсчитаем, сколько частей добавится после проведения n-й прямой. Эта прямая делится остальными прямыми на n интервалов ($n-2$ отрезка и два луча) (см. рисунок), что соответствует делению n частей плоскости, через которые проходит прямая, на две части каждой. Таким образом, после проведения n-й прямой общее количество частей плоскости увеличивается на n. Если обозначить a_i — количество



частей, на которые делят плоскость i прямых, то полученный нами результат можно кратко записать $a_n = a_{n-1} + n$, причем $a_0 = 1$ (почему?). Следовательно, $a_n = a_0 + (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

4.17. а) Разберем случай пятиугольных чисел. Заметим, что n-е пятиугольное (k-угольное) число является суммой n слоев, как это изображено на рисунке, а количество вершин в n-м слое больше такового в $(n-1)$-м слое на 3 вершины (для k-угольного числа на $k-2$ вершины, по одной на каждой стороне слоя). Если обозначить через a_n — количество вершин в n-м слое, то полученное соотношение можно записать как $a_n = a_{n-1} + 3$ ($a_n = a_{n-1} + (k-2)$), т.е. последовательность a_n — арифметическая прогрессия, имеющая разность 3, и $a_1 = 1$ (разность равна $k-2$ и $a_1 = 1$ для k-угольного числа). Следовательно, пятиугольные числа являются суммами арифметической прогрессии с разностью 3, и первым членом, равным единице (а k-угольные?).



б) Формула для n-го k-угольного числа, как следует из а), имеет вид

$$b_n = n\frac{2 + (k-2)(n-1)}{2}.$$

4.18. в) n-е $(k+1)$-угольное число на n меньше, чем сумма n-го треугольного и k-угольного чисел; $(n+1)$-угольное число равно сумме $(n+1)$-го k-угольного и n-го треугольного.

4.19. Пусть N — число промахов стрелка. Тогда штрафные очки, полученные стрелком, составляют арифметическую прогрессию $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$, где $a_1 = 1$, а

$a_i = a_1 + \frac{1}{2}(i-1)$. Сумма прогрессии $S = \dfrac{1+\frac{1}{2}(N-1)+1}{2} \cdot N = \dfrac{N(N+3)}{4}$. Получаем квадратное уравнение $7 = S = \dfrac{N(N+3)}{4}$, единственным целым положительным решением которого будет $N = 4$. Следовательно, число попаданий равно $25 - 4 = 21$.

К параграфу 5

5.4. $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$. 5.5. $S_n = \dfrac{3^n - 1}{3^n}$. 5.6. а) $S_n = 2^{n+1} - 1$; б) $S = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

5.7. а) $(n+1)! - 1$; б) $1 - \frac{1}{n!}$.

5.8. См. задачу 3.8.

5.18. д) числа вида n^2 и $n^2 + m^2$.

5.19. в) Пусть два числа представляются в виде суммы двух квадратов: $N_1 = a_1^2 + b_1^2$, $N_2 = a_2^2 + b_2^2$, тогда легко заметить, что

$$N_1 \cdot N_2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2.$$

Замечание. Доказанное свойство есть отражение следующего общего факта: если $x = a_1 + ib_1$, $y = a_2 + ib_2$ два комплексных числа, то $|x|^2|y|^2 = |xy|^2$, где $|x|^2 = a_1^2 + b_1^2$, $|y|^2 = a_2^2 + b_2^2$, $i^2 = -1$.

5.20. Следующая теорема впервые доказана Гауссом (см., например. книгу: З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич «Теория чисел», Москва, 1972).

Для того, чтобы целое положительное число N было суммой трех квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно не было числом вида $4^n(8^m - 1)$.

Проверьте ее на вашем экспериментальном материале.

5.23. Назовем числа, которые являются одновременно и треугольными и квадратными — треугольно-квадратными числами. Наименьшее треугольно-квадратное число $T_1 = 1$, следующее за ним — $T_8 = \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 36 = 6^2$. Оказывается, что таких чисел бесконечно много и ниже мы укажем способ нахождения всех таких чисел.

Пусть k-е треугольное равно m-му квадратному числу: $T_k = \dfrac{k(k+1)}{2} = m^2$. Домножим это уравнение на 8

$$4k^2 + 4k = 2(2m)^2,$$

прибавим к обеим частям по 1

$$4k^2 + 4k + 1 = 2(2m)^2 + 1$$

и введем новые обозначения

$$\begin{cases} p = 2k + 1 \\ q = 2m. \end{cases} \tag{1}$$

В этих обозначениях уравнение запишется

$$p^2 - 2q^2 = 1, \tag{2}$$

причем нас, в силу (1), будут интересовать только такие целые решения (p, q), что p — нечетно, а q — четно.

Уравнение (2) называется «уравнением Пелля»(по имени математика, упомянувшего о нем в своем письме к Л.Эйлеру).

Пусть имеются два решения уравнения Пелля (p_1, q_1) и (p_2, q_2), т.е. $p_1^2 - 2q_1^2 = 1$ и $p_1^2 - 2q_2^2 = 1$. Запишем эти два уравнения в следующем виде:

$$(p_1 + \sqrt{2}q_1)(p_1 - \sqrt{2}q_1) = 1,$$

$$(p_2 + \sqrt{2}q_2)(p_2 - \sqrt{2}q_2) = 1.$$

Перемножив их, получим

$$(p_1 + \sqrt{2}q_1)(p_2 + \sqrt{2}q_2)(p_1 - \sqrt{2}q_1)(p_2 - \sqrt{2}q_2) = 1$$

или, раскрывая скобки и группируя,

$$\Big((p_1p_2 + 2q_1q_2) + \sqrt{2}(p_1q_2 + p_2q_1)\Big)\Big((p_1p_2 + 2q_1q_2) - \sqrt{2}(p_1q_2 + p_2q_1)\Big) = 1.$$

Легко видеть, что правая часть уравнения — разность квадратов:

$$(p_1p_2 + 2q_1q_2)^2 - 2(p_1q_2 + p_2q_1)^2.$$

Последнее уравнение означает, что пара (p_3, q_3)

$$\begin{cases} p_3 = p_1p_2 + 2q_1q_2 \\ q_3 = p_1q_2 + p_2q_1 \end{cases} \tag{3}$$

также является решением уравнения Пелля. Таким образом, имея два решения (p_1, q_1) и (p_2, q_2), мы можем получить новое решение $(p_3, q_3) = (p_1p_2 + 2q_1q_2, p_1q_2 + p_2q_1)$, т.е. мы получили возможность «размножать» решения уравнения Пелля.

У уравнения (2) есть простое решение $(1, 0)$. Посмотрим, как с помощью этого решения получаются другие решения, а для этого положим $(p_2, q_2) = (1, 0)$ и подставим в уравнения (3). Легко видеть, что $p_3 = p_1$, $q_3 = q_1$, т.е. $(p_3, q_3) = (p_1, q_1)$, т.е. при помощи решения $(p_2, q_2) = (0, 1)$ мы не получаем новых решений.

Но у уравнения Пелля (2) есть еще одно простое решение — $(3, 2)$:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1.$$

Если положить $(p_2, q_2) = (3, 2)$, то формулы (3) запишутся в виде

$$\begin{cases} p_3 = 3p_1 + 4q_1 \\ q_3 = 2p_1 + 3q_1 \end{cases}$$

(или $(p_1, q_1) \otimes (3, 2) = (3p_1 + 4q_1,\ 2p_1 + 3q_1)$, где знак $\otimes$ обозначает операцию сопоставления двум решениям третьего по формулам (3)). Итак, размножаем решения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\otimes(3,2)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\otimes(3,2)} \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\otimes(3,2)} \begin{pmatrix} 99 \\ 70 \end{pmatrix} \xrightarrow{\otimes(3,2)} \begin{pmatrix} 577 \\ 408 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \tag{4}$$

Проверьте, что $17^2 - 2\cdot 12^2 = 1, 99^2 - 2\cdot 70^2 = 1$, ... Заметим, что все наши решения будут удовлетворять условию: p — нечетное, а q — четное. Действительно, если p_1 — нечетное, а q_1 — четное, то очевидно, что $p_3 = 3p_1 + 4q_1$ — нечетное, а $q_3 = 2p_1 + 3q_1$ — четное. Оказывается, что, продолжая процесс, описанный в (4), мы получим все положительные решения уравнения Пелля (доказать это не так-то просто и мы здесь этого делать не будем). Таким образом, осталось понять, какие треугольно-квадратные числа соответствуют решениям уравнения Пелля. Вспомним, что $p = 2k + 1,\ q = 2m$ (см. (1)), следовательно

пара $(3, 2)$ соответствует $T_1 = 1 = 1^2$,
пара $(17, 12)$ соответствует $T_8 = \dfrac{8\cdot 9}{2} = 36 = 6^2\ [17 = 2\cdot 8 + 1;\ 12 = 2\cdot 6]$,
пара $(99, 70)$ соответствует $T_{49} = \dfrac{49\cdot 50}{2} = 35^2\ [99 = 2\cdot 49 + 1;\ 70 = 2\cdot 35]$

и так далее.

К параграфу 6

6.2. Пусть $r = \frac{p}{q}$, $p < q$ — рациональное число. Разделим p на q в столбик:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{\;p\qquad\qquad} & \;q \\ \cline{2-2}
\underline{p0\qquad\qquad} & 0, n_1n_2n_3\ldots \\
\quad\underline{p_1 0\qquad\quad} & \\
\qquad\underline{p_2 0\qquad} & \\
\qquad\quad p_3 0 & \\
\qquad\qquad\ldots &
\end{array}
$$

Остатки от деления $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k,\ p_m$ все меньше q. Следовательно, если процесс деления не прервется на каком-нибудь шаге, то один из остатков p_i обязательно повторится (их конечное число). Легко видеть, что в этом случае дробь будет периодической.

6.3. Если дробь $\frac{p}{q}$ имеет вид $a_1\ldots a_m,\ b_1\ldots b_n$, то

$$\frac{p}{q} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_mb_1\ldots b_n}}{10^n} = \frac{\overline{a_1\ldots b_n}}{2^n5^n},$$

где $\overline{a_1a_2\ldots b_n}$ обозначает целое число, составленное из соответствующих цифр.

Наоборот, дробь вида $\frac{N}{2^{n_1}5^{n_2}}$ может быть записана в виде

$$\frac{2^{n_1-m}N}{2^{n_2}5^{n_2}} = \frac{2^{n_2-m_1}\cdot N}{10^{n_2}} \qquad \left(\text{или } \frac{5^{n_1-n_2}\cdot N}{2^{n_1}5^{n_1}}\right).$$

Следовательно, несократимая дробь $\frac{p}{q}$ дает в десятичной записи конечную дробь в том и только том случае, когда $q = 2^{n_1}5^{n_2}$ для некоторых чисел n_1 и n_2.

6.6. б) Проведем доказательство от противного, т.е. допустим, что данное число является рациональным. Тогда в силу 6.2 данная дробь является периодической. Пусть m — длина (т.е. количество цифр) периода. Количество нулей между N-й и $(N+1)$-й единицей в записи числа равно $(N+1)^2 = N^2 - 1 = 2N$. Положим $N = 2m$. Тогда длина последовательности нулей между N-й и $(N+1)$-й единицей равна $4m$, и ясно, что последовательность такой длины содержит хотя бы один период. По это означает, что период состоит из одних нулей, а это, в свою очередь, означает, что число имеет конечную десятичную запись. Этот вывод противоречит условию задачи.

6.7. Идея решения состоит в составлении уравнения относительно x. Возведем x в квадрат

$$x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

и заметим, что правая часть равна $1 + x$; искомое уравнение $x^2 = 1 + x$.

Ответы: а) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; б) 2; в) 2.

6.8. Ответы: а) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; б) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

6.9. Заметим, что $3 = \sqrt{6+3} = \sqrt{6+\sqrt{6+3}} = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}} = \ldots$

$$= \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+3}}}}}_{2000\ \text{раз}} > \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6+0}}}}_{2000\ \text{раз}}.$$

К параграфу 7

7.1. Первый пешеход догонит второго после отправления через время $t = \frac{1}{v_1 - v_2}$, поэтому первый пешеход пройдет расстояние $S_1 = v_1 t = \frac{v_1}{v_1 - v_2}$, а второй $S_2 = \frac{v_2}{v_1 - v_2}$.

7.3. Скорость Ахиллеса $v_1 = 2v_2$. Подставляя v_1 в формулу для S_1, получаем $S_1 = \frac{2v_2}{2v_2 - v_2} = 2$; с другой стороны, $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$.

7.4. б) $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$.

7.5. $\frac{6}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \cdots = 1$.

7.6. $\frac{6}{7} + \frac{6}{7^2} + \cdots + \frac{6}{7^n} = 1 - \frac{1}{7^n}$.

7.8. Указание. Переформулируйте задачу о делении пирога при условии, что общее число гостей вместе с Алешой равно k.

а) 1; б) $1 - \frac{1}{k^n}$.

7.10. б) Обозначим $S_n = \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{5}{3^n}$, тогда $\frac{1}{3}S_n = \frac{5}{9} + \frac{5}{27} + \dots + \frac{5}{3^n} + \frac{5}{3^{n+1}}$; вычтем второе равенство из первого: $S_n - \frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3}S_n = \frac{5}{3} - \frac{5}{3^{n+1}}$; $S_n = \frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

7.11. Указание. См. задачу 7.10.

7.13. д) Дробь $S = 0,a_1 \dots a_n(b_1 \dots b_m)$ можно представить в виде

$$S = 0,a_1 \dots a_n + 0,0 \dots 0b_1 \dots b_m + 0,0 \dots 00 \dots 0b_1 \dots b_m + \dots =$$

$$= 0,a_1 \dots a_n + 0,0 \dots 0b_1 \dots b_m(1 + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}} + \frac{1}{10^{3m}} + \dots) =$$

$$= \frac{a_1 ... a_n}{10^n} + 0,0...0b_1...b_m \frac{1}{1 - \frac{1}{10^m}}.$$

К параграфу 8

8.6. Для нечетного n имеется похожая формула:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

8.8. Указание. См. задачу 4.8.

8.9. Указание. Если d — разность арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_n, то q^d — знаменатель геометрической прогрессии q^{a_1}, q^{a_2}, ..., q^{a_n}.

8.10. Заметим, что $11...1 = \dfrac{10^k - 1}{9}$, поэтому сумма запишется следующим образом:

$$\frac{10^1 - 1}{9} = \frac{10^2}{\cdot 9} + \dots + \frac{10^{2000} - 1}{9} = \frac{1}{9}\left(\left(\sum_{k-1}^{2000} 10^k\right) - 2000\right) = \frac{1}{9}(\underbrace{11...10}_{221 \text{ раз}} - 2000).$$

Искомый ответ

$$S = \underbrace{123456790\,123456790 \cdots 123456790}_{221 \text{ раз}}\,2345678790.$$

8.11. а) $S_n = \frac{3}{4} \cdot S \cdot \left(\frac{1}{4^{n-1}}\right)$; б) $S \cdot \left(\frac{1}{4^n}\right)$; S.

8.12 $S_n = \dfrac{m^2 - 1}{m^2} S \left(\dfrac{1}{m^2}\right)^{n-1}$.

8.13 $S_n = \dfrac{m^2 - (m-1)^2}{m^2} S \left(\dfrac{(m-1)^2}{m^2}\right)^{n-1}$.

8.14. 255.

8.15. Обозначим через N общее количество покупателей. Тогда последний покупатель купил 2^N орехов, которые весят 50 кг. Общее количество орехов, бывших у продавца, складывается из одного оставшегося ореха и $1+2+4+\cdots+2^N = 2^{N+1}-1$ орехов и равно $2^{N+1} = 2\cdot 2^N$, что составляет $2\cdot 50 = 100$ кг.

8.16. Предположим, что каждый раз направляется в магазин максимальное количество картофеля — $\frac{1}{10}$ общего количества. Легко заметить, что после каждой отправки на базе остается $\frac{9}{10}$ имеющегося картофеля: после 1-й отправки осталось $\frac{9}{10}$ первоначального количества, после 2-й — $\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}$, ..., после n-й $\left(\frac{9}{10}\right)^n$. Следовательно, общее количество отправленного картофеля равно

$$V = \frac{1000}{10} + \frac{1000}{10}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1000}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^n = \left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)\cdot 1000,$$

где n — число отправок.

Ясно, что, выбирая n достаточно большим, можно сделать V сколь угодно близким к 1000 кг.

8.17. а) Обозначим через S общий размер наследства, тогда доля наследства, передаваемого одним из братьев другому, равна $\frac{S}{2^n}$, а размер наследства, оказавшегося после n-й передачи, у первого брата равен

$$S_1^n = S - \frac{S}{2} + \frac{S}{2^2} - \frac{S}{2^3} + \cdots + (-1)^n\frac{S}{2^n} = S\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right).$$

Сумма в скобках является суммой конечной геометрической прогрессии со знаменателем, равным $\left(-\frac{1}{2}\right)$, и мы можем использовать формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$S_1 = S\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cdots\right) = \frac{S}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}S.$$

б) Сумма наследства, оставшегося у старшего брата, равна в этом случае

$$S_1 = S\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\cdots\right) = \frac{S}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}S.$$

в) Пусть q — возвращаемая часть полученной перед этим доли наследства. Получаем уравнение $S(1-q+q^2-q^3+\cdots) = 0,51S$, определяющее долю наследства у 1-го брата. Решением данного уравнения будет $\frac{49}{51}$.

8.18. а), б). Указание. Какое бы количество гирь мы ни выбрали, самая большая из них имеет вес больший, чем все остальные вместе взятые.

8.19. а) Расстояние S, которое пробежал Бим, равно $15\cdot t$, где t — время, которое Сережа шел к дому: $t = \frac{10}{5} = 2$; $S = 15\cdot 2 = 30$(км).

б), в) После того, как Бим первый раз оказался дома, расстояния, которые он пробежал по направлению от дома и к дому, равны. Действительно, каждый раз после встречи с Сережей Бим должен пробежать в обратном направлении такое же расстояние, которое он преодолел, когда бежал от дома к Сереже. Следовательно, расстояние, которое Бим пробежит к дому, больше расстояния, которое он пробежит от дома на первоначальные 10 километров, и, значит, эти расстояния равны соответственно 20 км и 10 км.

К параграфу 9

9.1. Заметим, что $(2i+1) = (i+1)^2 - i^2$ для любого i. Искомая сумма равна $(n+1)^2$.

9.2. 1) Общий член запишется в виде $i \cdot i! = (i+1)! - i!$; искомая сумма равна $(n+1)! - 1$.

2) Общий член суммы имеет вид $\frac{i-1}{i!} = \frac{1}{(i-1)!} - \frac{1}{i!}$; искомая сумма равна $1 - \frac{1}{n!}$.

9.3. а) Заметим, что $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$; $\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$ и, вообще, любой член нашей суммы имеет вид $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Если теперь переписать нашу сумму с учетом этого замечания, то соседние слагаемые взаимно уничтожатся.

Ответ: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) = \frac{50}{101}$.

б) Общий член нашей суммы можно записать в виде

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

С учетом этого сумма равна

$$S = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98\cdot 99} - \frac{1}{99\cdot 100}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{99\cdot 100}\right).$$

в) Общий член суммы запишется в виде $\frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right)$.

Действуя так же, как в п. а) и б), легко убедиться, что $S = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ и, вычисляя разность d из уравнения $a_{n+1} = a_1 + nd$, получить окончательной ответ $S = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$.

9.4. а) Можно представить общий член суммы в виде $i(i+1) = \frac{(i+1)^3 - (i+1)}{3} - \frac{i^3 - i}{3}$; искомая сумма равна $\frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3}$.

б) Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = \frac{\sqrt{i+1} - \sqrt{i}}{1}$; проводя взаимные уничтожения в соседних слагаемых, получаем ответ — $-\sqrt{n+1} - 1$.

9.6. Указание. См. решение задачи 8.10.

9.7. а) Сумма членов нашей последовательности равна сумме элементов указанной ниже таблицы:

$$
\left\{
\begin{array}{l|l}
x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n & x\dfrac{x^n - 1}{x - 1} \\
x + x^2 + \cdots + x^{n-1} & x\dfrac{x^{n-1} - 1}{x - 1} \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\
x + x^2 & x\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \\
x & x\dfrac{x - 1}{x - 1}
\end{array}
\right.
$$

Поэтому искомая сумма равна

$$\frac{x}{x-1}(x + x^2 + \cdots + x^n - n) = \frac{x}{x-1}\left(x\frac{x^n - 1}{x - 1} - n\right).$$

б) Заметим, что искомая сумма равна сумме элементов следующей таблицы

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
 & 2x \\
+ & \\
 & 2(x^2 + 2x^2) \\
+ & \\
 & 2(x^3 + 2x^3 + 3x^3) \\
+ & \\
 & 2(x^4 + 2x^4 + 3x^4 + 4x^4) \\
+ & \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & \\
 & 2(x^n + 2x^n + 3x^n + \cdots + nx^n)
\end{array}
\right.
$$

Действительно, коэффициент при x^i равен $2(1+2+\cdots+i) = \dfrac{i(i+1)}{2}\cdot 2 = i(i+1)$. Найдем искомую сумму, вычисляя суммы элементов по столбцам: в первом столбце сумма равна $2x\dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, во втором — $2 \cdot 2x\dfrac{2x^{n-1} - 1}{x - 1}$, в третьем — $2 \cdot 3x\dfrac{3x^{n-1} - 1}{x - 1}$, и т.д. Окончательно, сумма запишется как

$$S = 2x\left(\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{x - 1}\right)\Big((x^n - 1) + x(x^{n-1} - 1) + \cdots + x^{n-1}(x - 1)\Big) =$$

$$= 2x\frac{n(n+1)}{2(x-1)}(nx^2 - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}))$$

или $S = \dfrac{n(n+1)}{(x-1)}\left(nx^n - \dfrac{x^n - 1}{x - 1}\right)$.

в) $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{9}{8} + \cdots + \dfrac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = n + \left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = (n+1) - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

9.8. Разность кубов последовательных чисел равна $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$. Используя это тождество, можно записать

$$(n+1)^3 - 1 = ((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \cdots + (2^3 - 1^3) =$$

$$= (3n^2 + 3n + 1) + (3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1) + \cdots + (3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) =$$
$$= 3(n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2) + 3(n + (n-1) + \cdots + 2 + 1) + n =$$
$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3\frac{n(n+1)}{2} + n;$$

откуда получаем

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - (n+1) - (n+1)\frac{3n}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9.9. Аналогично решению предыдущей задачи найдем разность четвертых степеней последовательных чисел: $(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. Следовательно, можно записать

$$(n+1)^4 - 1 = \left((n+1)^4 - n^4\right) + \left(n^4 - (n-1)^4\right) + \left((n-1)^4 - (n-2)^4\right) + \cdots + \left(2^4 - 1^4\right) =$$
$$= \left(4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\right) + \left(4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1)^2 + 1\right) + \cdots + \left(4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1\right) =$$
$$= 4(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 2 + \cdots + n) + n.$$

Подставив выражения для $(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$ и для $(1 + 2 + \cdots + n)$, легко получим ответ:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

9.12. $S_2(n) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - S_0(n)\right)$.

$$S_3(n) = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - S_0(n)\right).$$

в)** $S_k(n) = \frac{1}{(k+1)}\left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_{k+1}^i S_i(n)\right)$, где $C_l^S = \frac{l!}{S!(l-S)!}$. (Указание: $(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum\limits_{i=0}^{k} C_{k+1}^i n^i$).

9.13. а) См. решение задачи 9.12 в).

9.14. а) $\frac{1}{k+1}$; б) Сумма, коэффициентов равна $S_k(1) = 1^k = 1$.

Приложение. Об обозначениях

Для того чтобы записывать длинные словесные рассуждения в виде удобных для преобразований формул, в алгебре принято обозначать различные величины буквами.

Рассмотрим стандартную задачу.

Веревку длиной 100 м разрезали на два куска, один из которых на два метра длиннее другого. Требуется найти длины кусков.

Для решения этой задачи длины кусков обозначим буквами x и y. Условие задачи перепишем в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} x+y = 100 \\ x-y = 2. \end{cases}$$

Решить ее не составляет труда.

Однако, бывают задачи, в которых для обозначения входящих в них величин может не хватить и всего алфавита.

Задача 1. Веревку длиной 100 м разрезали на 50 кусков так, что каждый следующий кусок был на 2 см длиннее предыдущего. Найдите длины кусков.

В этой задаче удобно длины всех кусков обозначить одной и той же буквой, но с разными номерами (индексами): d_1 — длина первого куска, d_2 — длина второго куска, ..., d_{50} — длина пятидесятого куска. Подобного рода наборы чисел, естественно расположенные одно за другим и снабженные номерами, называют *последовательностями*. Например, последовательность четных чисел:

$$a_1 = 2; \qquad a_2 = 4; \qquad a_3 = 6; \qquad a_4 = 8; \quad \ldots$$

Задача 2. Чему равны a_{10}, a_{150}, a_{1000} в этой последовательности?

Символ a_n служит для обозначения числа, стоящего на месте с номером n. В данном случае a_n — n-е четное число.

Задача 3. Верно ли, что $a_n = 2n$? Почему?

Подобного рода формулы, позволяющие по заданному номеру n находить значение a_n , называют формулами общего члена (или формулами n -го члена) последовательности.

Задача 4. Найдите формулу общего члена последовательностей

а) положительных нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, ...

б) квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, ...

в) натуральных чисел, кончающихся нулем: 10, 20, 30, ...

г) натуральных чисел, дающих остаток 2 при делении на 7: 2, 9, 16, ...

Задача 5. Выпишите первые пять членов последовательностей, формулы общего члена которых имеют вид а) $a = 10n - 5$, б) $a = 2^n$,

в) $a = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$, г) $a = (-1)^n$,

д) $a = 10^n + (-10)^n$, е) $a = \frac{1}{n}$.

Вернемся к задаче 1 и перепишем ее условие на языке уравнений. 49 уравнений, отражающих то обстоятельство, что каждый кусок на 2 см длиннее предыдущего, можно записать одной строкой:

$$d_k - d_{k-1} = 2 \qquad \text{при} \qquad 2 < k < 50.$$

То что сумма длин всех кусков равна 100 м,

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{50} = 10000\textit{см},$$

можно коротко записать как:

$$\sum_{n=1}^{50} d_n = 10000\textit{см}$$

(читается: сумма дэ-эн с эн от одного до пятидесяти равна десяти тысячам сантиметров). В этой записи греческая буква Σ (сигма) говорит о том, что производится суммирование. Написанное снизу знака суммы $\sum$ говорит о том, каков номер первого члена суммы, написанное сверху — каков номер последнего члена суммы. Так запись $\sum\limits_{n=10}^{100} b_n$ означает, что суммируется 91 член последовательности с номерами с 10-го по 100-й включительно; записи

$$\sum_{n=1}^{4} nb_n \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{n^3}$$

расшифровываются, соответственно, как суммы

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 \qquad \text{и} \qquad 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27}.$$

Задача 6. Перепишите при помощи обычных знаков сложения, вычитания и умножения:

а) $\sum\limits_{n=1}^{4} \frac{n+3}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{4} (-1)^n 2n$, в) $\sum\limits_{n=0}^{5} a^{2n}$,

г) $\sum\limits_{n=-3}^{2} nb^{-n}$, д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$, е) $\sum\limits_{n=2k}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

ж) $\prod\limits_{n=2}^{6} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Задача 7. Запишите при помощи знака $\sum$ следующие выражения:

а) $a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{50}$;
б) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{20}$;
в) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10}$;
г) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$;
д) сумму первых ста треугольных чисел;
е) сумму всех четырехзначных чисел, делящихся на 7.

Задача 8. Какие из приведенных ниже формул правильные (а они не все правильные!)?

а) $\sum\limits_{i=1}^{100}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{100} a_i + \sum\limits_{i=1}^{100} b_i$,

б) $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda a_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} a_i$,

в) $\left(\sum\limits_{i=1}^{100} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{100} b_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{100} a_i b_i$,

г) $\left(\sum\limits_{i=1}^{100} a_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{100} b_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{100}(a_i - b_i)$,

д) $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i + \sum\limits_{i=4}^{10} a_i = \sum\limits_{i=1}^{10} a_i$,

е) $\sum\limits_{i}\left(\sum\limits_{j} a_i b_j\right) = \sum\limits_{j}\left(\sum\limits_{i} a_i b_j\right)$,

ж) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = 2\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_j\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Задача 9. Измените правую часть неправильных формул в задаче 8 так, чтобы они стали правильными.

Задача 10. Доведите до конца решение задачи 1 (за справками обращайтесь к §4).

Ответы к задачам Приложения

Задача 1. 1 м 51 см, 1 м 53 см, ... 2 м 47 см, 2 м 49 см.
Задача 2. $a_{10} = 20$, $a_{150} = 300$, $a_{1000} = 2000$.
Задача 3. Да.
Задача 4. а) $2n + 1$; б) n^2; в) $10n$; г) $7n - 5$.

Задача 5. а) $5, /10, /15, /35, /45$; б) 1, 2, 4, 8, 16, 32; в) 0, 0, 0, 1, 4; г) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1$; д) 0, 20, 0, 20, 0; е) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$.

Задача 6. а) $4 + \frac{5}{2}$; б) $-2 + 4 - 6 + 8$; в) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + a^{10}$; г) $-3b^2 - 2b^2 - b + 0 + \frac{1}{b} + \frac{2}{b^2}$; д) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \cdots$; е) $\frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2k+2}} + \dots + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots$;
ж) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{30}\right)$.

Задача 7. а) $\sum\limits_{n=1}^{50} a^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{20} a^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{10} (-1)^{n+1} a_n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{100} T_n = \sum\limits_{n=1}^{100} \frac{n(n+1)}{2}$; е) $\sum\limits_{1000<7n<9999} 7n = \sum\limits_{n=143}^{1428} 7n$.

Задача 8. Правильные формулы: а); б); г); д); е).

Задача 9. Правая часть в) $\sum\limits_{i=1}^{100} \sum\limits_{j=1}^{100} a_i b_j$;

правая часть ж) $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_j \right)$.

Задача 10. Смотри задачу 1.

Светлой памяти Андрея Бучина

О дополнительной кубике Дарбу

А. Мякишев

О кубических кривых, связанных с треугольником, рассказывалось в статье В.В.Прасолова в нашем журнале, №1, 1998 г. В №1, 1999 г. была опубликована статья А.Г.Мякишева о некоторых связанных с треугольником преобразованиях. Эти две темы объединены в настоящей статье.

1. Постановка задачи

Пусть на плоскости задан некоторый треугольник ABC. Тогда для каждой точки Z плоскости можно провести прямые через вершины треугольника и эту точку и отметить точки их пересечения со сторонами (или продолжениями сторон) данного треугольника, которые обозначим A_1, B_1, C_1 (при этом, как обычно, $A_1 \in (BC)$ и т.д.). Из полученных точек, далее, можно восставить перпендикуляры к сторонам треугольника.

Настоящие заметки, в основном, призваны дать решение на следующей задачи: *описать геометрическое место таких точек Z, чтобы соответствующие каждой точке Z перпендикуляры пересекались бы в одной точке.*

Поскольку наши последующие рассуждения будут достаточно интенсивно использовать *геометрию масс* и *барицентрические координаты*, следует, по-видимому, сообщить сразу читателю, что все необходимые сведения по этой тематике он сможет найти, например, в [1].

2. Изогональные кубики. Кубика Дарбу

В содержательной статье В.В. Прасолова ([2, 3]) приводится некая конструкция, позволяющая получать разные интересные *кубики* (т.е. кубические кривые, задаваемые в барицентрических координатах (p, q, r) уравнением вида $\sum\limits_{i+j+k=3} c_{ijk}p^i q^j r^k = 0$), связанные с данным треугольником ABC. Будем здесь называть эти кубики *изогональными*.

2.1. *Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изогонально сопряженных точек P и Q (т.е. если тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной из* *этих точек, то тройка прямых, симметричных исходным относительно биссектрис соответствующих углов, пересечется в другой точке), для которых прямая PQ проходит через точку F. Тогда точки P и Q заметают кубическую кривую, которая проходит через вершины треугольника, через центры вписанной и трех вневписанных окружностей (т.е., через все четыре неподвижные точки изогонального сопряжения), а также через саму точку F, называемую центром вращения возникшей изогональной кубики. Если какая-то точка Z лежит на этой кубике, то и точка Z_l, изогонально сопряженная точке Z, также принадлежит этой кубике, и потому на ней расположена еще и точка F_l, изогонально сопряженная центру кубики.*

2.2. *Кубикой Дарбу* называется *изогональная* кубика *с центром вращения в точке* $\mathring{H}$, симметричной точке пересечения высот H относительно центра описанной окружности O.

2.3. Барицентрические координаты

$$\mathring{H} = (\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma); \sin\beta(\cos\beta - \cos\gamma\cos\alpha); \sin\gamma(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)).$$

(Отметим, что в статьях В.В. Прасолова выкладки проводятся в т.н. *трилинейных координатах*; переход от трилинейных к барицентрическим осуществляется простым умножением координаты, на длину соответствующей стороны треугольника, либо на синус угла при соответствующей вершине).

Упражнение: используя свойство $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$, справедливое для углов треугольника, показать, что барицентрические координаты $\mathring{H}$ приводятся к виду

$$\mathring{H} = (\tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha; \tan\gamma + \tan\alpha - \tan\beta; \tan\alpha + \tan\beta - \tan\gamma).$$

2.4. Оказывается, *кубика Дарбу* является решением задачи, *обратной* к поставленной в п. 1:

опустим из точки Z перпендикуляры на стороны (или их продолжения) треугольника ABC; получим основания перпендикуляров A_1, B_1, C_1; тогда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, следовательно *Z лежит на кубике Дарбу.*

3. Изотомические кубики

3.1. Определение изотомической кубики

Используем понятие *изотомического* сопряжения: тройке пересекающихся прямых, выходящих из вершин треугольника, будет соответствовать тройка пересекающихся же прямых, выходящих из вершин и проходящих через точки, симметричные основаниям изначальных прямых относительно середин соответствующих сторон.

Пусть на плоскости задана точка F. Для данного треугольника ABC рассмотрим всевозможные пары изотомически сопряженных точек P и Q, для которых *прямая PQ проходит через точку F. Тогда все такие точки заметают некоторую кубику, которую назовем изотомической кубикой с центром вращения в точке F.*

3.2. Уравнение изотомической кубики

Как известно, три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их барицентрических координат, равен нулю. Кроме того (см. [1]), если координаты какой-то точки $Z = (p; q; r)$, то координаты ее изотомического образа

$$Z_m = \left(\frac{1}{p}; \frac{1}{q}; \frac{1}{r}\right) = (qr;\ pr;\ pq).$$

Поэтому точка Z удовлетворяет определению 3.1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ qr & pr & pq \end{vmatrix} = 0 \iff f_1p(q^2 - r^2) + f_3q(r^2 - p^2) + f_3r(p^2 - q^2) = 0,$$

где $f_1; f_2; f_3$ — координаты точки F.

Сравнив получившееся уравнение с общим уравнением кубики, приведенным в начале п. 2, убеждаемся, что определенное в 3.1 геометрическое место точек есть действительно некоторая кубическая кривая.

3.3. Характерные точки изотомической кубики

Исходя из геометрического смысла и полученного уравнения, легко видеть, что на каждой изотомической кубике расположены следующие точки:

1) вершины исходного треугольника A, B, C;

2) неподвижные точки изотомического сопряжения M, M_a, M_b, M_c (центр тяжести и точки, симметричные вершинам треугольника относительно середин соответствующих сторон);

3) центр кубики F и его изотомический образ F_m.

4. Изогональные и изотомические кубики как изоциркулярно эквивалентные

4.1. Изоциркулярное преобразование

В [1] было построено некое преобразование плоскости, названное автором *изоциркулярным*.

Рассмотрим треугольник ABC, опишем вокруг него окружность и выберем внутри этого треугольника произвольную точку Z. Затем через нее и вершины треугольника проведем прямые до пересечения с описанной окружностью и отметим точки пересечения. Затем в сегменты, образованные описанной окружностью и сторонами треугольника, впишем по окружности таким образом, чтобы они касались описанной в отмеченных ранее точках (если бы точка Z располагалась вне треугольника, то там, где нужно, мы рассмотрели бы окружность, касающуюся описанной внешним образом и касающуюся продолжения стороны треугольника). Тогда оказывается, что прямые, соединяющие вершины треугольника с им противоположными точками касания новых окружностей со сторонами, также пересекутся в некоторой точке Z', которую и назовем *изоциркулярным образом точки* Z.

В [1] были подробно исследованы свойства этого преобразования. Перечислим основные:

1) если барицентрические координаты точки $Z = (p;\, q;\, r)$, то координаты ее изоциркулярного образа $Z_c = F_c(Z) = \left(\frac{p}{a};\, \frac{q}{b};\, \frac{r}{c}\right)$, и, соответственно, координаты точки, полученной под действием обратного изоциркулярного преобразования $Z_{c^{-1}} = F_c^{-1}(Z) = (ap;\, bq;\, cr)$;

2) изоциркулярное преобразование является *проективным* (т.е. любую прямую на проективной плоскости переводит в прямую), но не *аффинным* (т.е. бесконечно удаленная прямая *не* переходит в себя);

3) изоциркулярное преобразование есть *среднее геометрическое* между изогональным и изотомическим сопряжениями, т.е. $F_c^2 = F_m \circ F_l$;

4) изоциркулярное преобразование переводит пары изогонально сопряженных точек в пары сопряженных изотомически (а обратное к нему — наоборот).

4.2. Определение и примеры изоциркулярно эквивалентных кубик

Очевидно (из определений кубик и свойств изоциркулярного преобразования), что

всякая изогональная кубика под действием изоциркулярного преобразования переходит в некоторую изотомическую (причем если центр первой кубики был в точке F, то центр второй кубики будет в ее изоциркулярном образе F_c); и обратно, всякая изотомическая кубика под действием обратного изоциркулярного преобразования переходит в изогональную.

Пары таких кубик назовем *изоциркулярно эквивалентными.*

Рассмотрим, например, изогональную кубику с центром в точке пересечения медиан M — это (см. [2, 3]) т.н. *кубика Томсона*, проходящая, помимо своих характерных точек, через ортоцентр, центр описанной окружности, середины сторон и середины высот, а также через точку Лемуана L как изогонально сопряженную центру данной кубики.

Тогда изоциркулярно эквивалентная ей изотомическая кубика будет иметь своим центром точку $I_m = F_c(M) = \left(\frac{1}{a};\, \frac{1}{b};\, \frac{1}{c}\right)$ — точку, изотомически сопряженную центру вписанной окружности, иначе называемую *центром антибиссектрис.*

Несложно проверить, что, помимо характерных (среди которых центр вписанной окружности I), на этой кубике лежат точка косинусов $K = (\cos\alpha;\, \cos\beta;\, \cos\gamma)$, основания антибиссектрис данного треугольника, а также точка *Жергонна* G (образована пересечением прямых, проходящих через вершины и противоположные им точки касания вписанной окружности) и точка *Нагеля* N (образована пересечением прямых, проходящих через точки касания вневписанных окружностей).

Покажем, к примеру, истинность последнего утверждения. Для этого необходимо проверить, что точки G, I_m, N лежат на одной прямой, т.е. что определитель, составленный из их координат, равен нулю. Этот же определитель

$$\begin{vmatrix} \tan\frac{\alpha}{2} & \tan\frac{\beta}{2} & \tan\frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{\sin\alpha} & \frac{1}{\sin\beta} & \frac{1}{\sin\gamma} \\ \cot\frac{\alpha}{2} & \cot\frac{\beta}{2} & \cot\frac{\gamma}{2} \end{vmatrix}$$

после умножения каждого столбца на синус соответствующего угла и несложных преобразований приводится к виду

$$\begin{vmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & \cos^2\frac{\beta}{2} & \cos^2\frac{\gamma}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-\cos^2\frac{\alpha}{2} & 1-\cos^2\frac{\beta}{2} & 1-\cos^2\frac{\gamma}{2} \end{vmatrix}.$$

А это очевидно, выражение, представляющее собой разность определителей, каждый из которых имеет две совпадающие строки, т.е. равно нулю.

Читателю предлагается самостоятельно исследовать свойства следующих изоциркулярно эквивалентных кубик:

— изогональной кубики с центром в точке Лемуана L и изотомической с центром в центре вписанной окружности I;

— изогональной кубики с центром в точке M_a, симметричной вершине A относительно середины стороны a и изотомической с центром в центре вневписанной окружности I_a.

5. Ортогональный аналог теоремы Чевы

Для того чтобы справиться с задачей, сформулированной в начале нашей статьи, надо располагать критерием, позволяющим по положению точек на границе треугольника распознать, будут ли перпендикуляры к сторонам с основаниями в этих точках пересекаться в одной точке. Оказывается, такой критерий давно известен (правда, не столь широко, как теорема Чевы — он сформулирован, например, на первых же страницах замечательной, но, жаль, труднодоступной книги Д.Ефремова «Новая геометрия треугольника» (Одесса, 1902 г.)).

Пусть точка A_1 лежит на прямой, проходящей через сторону BC данного треугольника, точка B_1 — на прямой CA, точка C_1 — на прямой AB. Пусть, далее, $BA_1 = x_1$; $CA_1 = x_2$; $CB_1 = y_1$; $AB_1 = y_2$; $AC_1 = z_1$; $BC_1 = z_2$. Тогда следующие условия равносильны:

перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника, восставленные в точках A_1, B_1, C_1, соответственно, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

условие *Чевы* пересечения в одной точке прямых, выходящих из вершин, $x_1y_1z_1 = x_2y_2z_2$

Доказательство, пожалуй, еще проще, чем доказательство теоремы Чевы, и опирается лишь на теорему Пифагора.

В самом деле, если перпендикуляры пересекаются в точке Z, то просто получить следующие три равенства:

$$AB_1^2 - CB_1^2 = AZ^2 - CZ^2,$$
$$BC_1^2 - AC_1^2 = BZ^2 - AZ^2,$$
$$CA_1^2 - BA_1^2 = CZ^2 - BZ^2.$$

Теперь осталось только сложить их.

Доказательство обратной теоремы (точно как и обратной теоремы Чевы) использует прямую теорему: два перпендикуляра в одной точке пересекутся, опустим из нее перпендикуляр на третью сторону и т.д.

Покажем, пользуясь полученным соотношениям, что перпендикуляры из точек касания *вневписанных* окружностей (для вписанной, ясно, они пересекутся в ее центре) пересекаются в одной точке. Для этого достаточно заметить, что

$$x_1 = p - c;\ x_2 = p - b;\ y_1 = p - a;\ y_2 = p - c;\ z_1 = p - b;\ z_2 = p - a.$$

Суммы, стоящие в левой и в правой частях нашего условия, очевидно, совпадают, с точностью до перестановки слагаемых.

Несложно показать, что перпендикуляры к точкам касания вневписанных окружностей пересекаются в точке, симметричной центру вписанной окружности относительно центра описанной окружности — в точке $S_O(I)$. Для этого нужно вспомнить, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей симметричны относительно середины стороны.

Если, далее, в установленном соотношении собрать все квадраты вместе, воспользоваться формулой разности квадратов и считать длины отрезков *ориентированными* (т.е. если, допустим, точка A_1 лежит внутри отрезка BC, то x_1 и x_2 *положительны*, а если вне — то *наименьшее по модулю* из них будет *отрицательным*, а *наибольшее — положительным*), то получим следующую форму записи условия, которую назовем **канонической формой ортогонального аналога теоремы Чевы:**

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) + c(z_1 - z_2) = 0.$$

6. Дополнительная кубика Дарбу. Решение основной задачи

6.1. Искомое геометрическое место точек (см. п. 1) представляет некую изотомическую кубику

Не ограничивая общности, будем считать, что точка Z плоскости, барицентрические координаты которой $(p; q; r)$, лежит внутри данного треугольника. Проведем через нее прямые из вершин треугольника и отметим точки их пересечения со сторонами: A_1, C_1, B_1. Обозначим $BA_1 = x_1$; $CA_1 = x_2$ и т.д. Тогда получим систему (первое уравнение которой есть следствие *правила группировки и правила рычага* — см. [1]):

$$\begin{cases} x_1 q = x_2 r \\ x_1 + x_2 = a\ . \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $x_1 = \frac{ra}{r+q}; x_2 = \frac{qa}{r+q}$.

Аналогично выражаются и длины остальных четырех отрезков.

Поскольку перпендикуляры к основаниям наших прямых пересекаются в одной точке, то подставив найденные длины в *каноническую форму ортогонального аналога* (см. п. 5), получим:

$$a^2\frac{r-q}{r+q} + b^2\frac{p-r}{p+r} + c^2\frac{q-p}{q+p} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю и достаточно элементарных преобразований это уравнение приводится к виду **уравнения дополнительной кубики Дарбу:**

$$\left(b^2+c^2-a^2\right)p\left(q^2-r^2\right) + \left(c^2+a^2-b^2\right)q\left(r^2-p^2\right) + \left(a^2+b^2-c^2\right)r\left(p^2-q^2\right) = 0.$$

Согласно п. 3.2, это есть уравнение некоторой изотомической кубики с центром вращения в точке $F = \left(b^2+c^2-a^2; c^2+a^2-b^2; a^2+b^2-c^2\right)$. Автоматически мы определили ее барицентрические координаты.

Найденную кубику назовем *дополнительной кубикой Дарбу.*

6.2. Геометрический смысл центра вращения дополнительной кубики Дарбу

В п. 5 фактически было доказано, что точки Нагеля и Жергонна (N; G) лежат на нашей кубике. Значит, точки N, G и F (центр кубики) лежат на одной прямой. Далее, очевидно, что ортоцентр H тоже ей принадлежит, и потому, в силу 3) п. 3.3, на ней также будет расположена точка, изотомически сопряженная ортоцентру — H_m, т.н. *антиортоцентр*. Наконец, несложно показать, что точки N, G, H_m лежат на одной прямой. Для этого достаточно показать, что определитель, составленный из координат G, I_m, H_m, равен нулю (поскольку, в силу 4.2, N, I_m, G лежат на одной прямой). Этот определитель, точно также, как и в 4.2, быстро приводится к виду (с точностью до умножения на произведение синусов углов)

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & 1-\cos\beta & 1-\cos\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix},$$

представляющему собой разность двух определителей с одинаковыми строками. Мы воспользовались тем, что $H_m = (\cot\alpha; \cot\beta; \cot\gamma)$. Получается, во-первых, что точки N, G, I_m, H_m лежат на одной прямой (что само по себе довольно интересно), а во-вторых, и это сейчас для нас главное, на одной прямой оказались точки N, G, F, I_m, каждая из которых принадлежит кубике. *Но прямая не может пересекать кубику более чем в трех точках*! Отсюда вытекает, что точки F и H_m совпадают, т.е. мы доказали теорему

антиортоцентр H_m есть центр вращения дополнительной кубики Дарбу.

Кроме того, в качестве еще одного следствия выразили барицентрические координаты этой точки через стороны, т.е. доказали, что

$$H_m = (\cot\alpha; \cot\beta; \cot\gamma) = \left(b^2+c^2-a^2;\ c^2+a^2-b^2;\ a^2+b^2-c^2\right),$$

что, конечно, можно сделать и «в лоб», заменив по теореме синусов квадраты сторон на квадраты синусов соответствующих углов и повозившись немного с тригонометрией, если только *знать заранее*, что именно нужно доказывать. Приятно сравнить координаты антиортоцентра с координатами точки Нагеля, которые в тригонометрической форме равны *котангенсам половинных углов*, ну а через длины сторон выглядят так: $N = (b + c - a;\ c + a - b;\ a + b - c)$.

Используя правило рычага, можно подметить еще одну любопытную особенность антиортоцентра:

точки H_m, M (центр тяжести) и L (точка Лемуана — точка, изогонально сопряженная центру тяжести) лежат на одной прямой, причем $\frac{H_mM}{LM} = 2 : 1$, т.е. точка Лемуана есть образ антиортоцентра при гомотетии с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$.

Действительно, пусть $m = a^2 + b^2 + c^2$. Тогда $H_m = (m - 2a^2; m - 2b^2; m - 2c^2)$, и (см. [1]), $L = (2a^2; 2b^2; 2c^2)$. Покоординатное сложение дает центр тяжести $M = (m; m; m)$, что и означает принадлежность всех трех точек одной прямой, а суммарные массы при H_m и L равны m и $2m$, соответственно. Отсюда и определяется отношение.

6.3. Замечательные точки, лежащие на дополнительной кубике Дарбу

Как мы уже установили, эта кубика проходит через вершины A, B, C треугольника, центр тяжести M и точки, симметричные вершинам относительно середин противолежащих сторон, M_a, M_b, M_c, а также через точки Нагеля и Жергонна N и G, через ортоцентр и антиортоцентр H и H_m. Оказывается, можно указать еще не меньше *трех пар изотомически сопряженных замечательных точек*, лежащих на кубике.

Во всяком треугольнике, помимо точек Жергонна и Нагеля, имеются три *добавочные точки Жергонна G_a, G_b, G_c* и *три добавочные точки Нагеля N_a, N_b, N_c*, разбивающиеся на пары изотомически сопряженных.

Так, G_a получим, если проведем прямые через вершины и противолежащие им точки касания *вневписанной* окружности с центром I_a напротив вершины A; N_a — если вершину A соединим с противолежащей точкой касания *вписанной* окружности, а две другие — с противолежащими точками касания двух *вневписанных* окружностей и т.д. (доказательство сразу получается из теоремы Чевы). Легко ищутся и координаты. Так, $N_a = (-p, p - c, p - b)$.

Пользуясь методами п. 4.2 и 6.2 и, полностью аналогично, расписывая соответствующие определители, получаем теорему:

прямые (NG), (N_aG_a), (N_bG_b), (N_cG_c) пересекаются в антиортоцентре H_m (и кроме того, вторая прямая содержит точку I_{a_m} — изотомически сопряженную центру вневписанной окружности и т.д.).

Из этой теоремы следует принадлежность добавочных точек данной кубике.

Кроме того, пользуясь уравнением кубики 6.1 и координатами $\mathring{H}$, выписанными в 2.3, можно установить, что точка $\mathring{H}$, *симметричная ортоцентру H относительно центра описанной окружности, также лежит на дополнительной кубике Дарбу.*

Упражнение: проверить это утверждение, произведя необходимые подсчеты; попробовать отыскать также и чисто геометрическое доказательство.

7. Изоциркулярно родственные кубики

Было бы просто замечательно, если бы кубика Дарбу и дополнительная к ней оказались изоциркулярно эквивалентными (см. 4.2). Увы, это не так, потому что легко проверить, что центр кубики Дарбу $\mathring{H}$ (см. 2.2, 2.3) при изоциркулярном преобразовании не переходит в точку H_m.

Но кое-какую изоциркулярную связь между дополнительной кубикой Дарбу и другой известной кубикой установить все-таки можно, правда, связь эта, что называется, слегка «притянута за уши».

Введем следующее определение (см. 4.1):

изогональная и изотомическая кубики называются изоциркулярно родственными, если образы их центров при изоциркулярном (для первой кубики) и изоциркулярно-обратном (для второй) преобрпзовании совпадают.

(При этом образ изогональной кубики есть кубика изотомическая, и наоборот (см. 4.2), и оба образа, хотя и представляющие из себя различные кубики, имеют общий центр.)

Тогда справедлива теорема

дополнительная кубика Дарбу и кубика Мак-Кэя изоциркулярно родственны

(так как кубика Мак-Кэя определяется как изогональная кубика с центром в точке O — центре описанной окружности, см. [2, 3], а кроме того, изоциркулярный образ O и обратно-изоциркулярный образ H_m совпадают с точкой косинусов $K = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$).

8. О некоторых свойствах касательных к дополнительной кубике Дарбу

Предыдущим параграфом автор и намеревался поставить окончательную точку. Но после того как В.В. Прасолов (которому я искренне благодарен за ряд полезных замечаний и советов при обсуждении данной статьи еще в рукописи) сообщил, что некоторая информация относительно исследуемой здесь кубики содержится в [6], и после ознакомления с этой информацией, возникло естественное желание включить сюда также и ее, особенно впрочем, не налегая на доказательства и не вдаваясь в детали. Иначе объем работы грозил бы существенно возрасти. (*Пытливому* читателю на всякий случай сообщаем, что все необходимое для проведения полных и строгих выкладок он сможет отыскать в [4, 5].)

Прежде всего, оказалась (как и следовало ожидать), что объект, названный нами *дополнительной кубикой Дарбу*, давно известен в математике под именем *собственным* — это т.н. кубика Люка́ (Lucas). Но поскольку Люка открыл сразу несколько кубик (в [6] упомянуты, по крайней мере, еще две), мы сочли возможным не менять всюду в статье кубику Дарбу на кубику Люка, а оставить все, как было.

Математические же свойства этой кубики, описанные в [6], связаны, в основном, с касательными к ней. Перечислим некоторые из них.

8.1. Характерные касательные свойства изотомических и изогональных кубик

1. *Пусть точка F — центр вращения изотомической (соответственно изогональной) кубики, а $F_m\,(F_l)$ — точка, изотомически (изогонально) ему сопряженная. Тогда прямая $FF_m\,(FF_l)$ касается данной кубики в ее центре F.*

Это свойство связано, безусловно, с тем, что указанная прямая имеет с кубикой ровно *две* общие точки.

2. *Пусть точка F — центр вращения изотомической (изогональной) кубики, а M, M_a, M_b, M_c — неподвижные точки изотомического сопряжения (см. 3.3), лежащие на кубике (I, I_a, I_b, I_c — неподвижные точки изогонального сопряжения — центры вписанной и вневписанных окружностей). Тогда все четыре касательные к кубике в неподвижных точках проходят через центр кубики F.*

И здесь все основано на том, что эти прямые имеют с кубикой только две общие точки.

3. *Пусть точка F — центр вращения изотомической (изогональной) кубики, а $F_m(F_l)$ — точка, изотомически (изогонально) сопряженная ей. Тогда касательные к кубике в вершинах основного треугольника ABC пересекаются в точке $F_m(F_l)$.*

Доказательство легко провести, используя, например, *уравнение касательной к кубике, проведенной из точки Z, если сама кубика задается уравнением* $F\,(p,\,q,\,r)=0$:

$$\frac{\partial F\,(Z)}{\partial p}\cdot p+\frac{\partial F\,(Z)}{\partial q}\cdot q+\frac{\partial F\,(Z)}{\partial r}\cdot r=0$$

(см. [4, 5]), а также специальные уравнения изотомических или изогональных кубик, имеющих идентичный вид (если изотомическую кубику задавать в барицентрических координатах, а изогональную — в *трилинейных*) — см.2.1; 3.1.

8.2. Характерные касательные свойства дополнительной кубики Дарбу

С учетом предыдущего пункта и 6.1 получаем, что

1) *прямая H_mH касается кубики в точке H_m;*

2) *касательные, проведенные из точек M, M_a, M_b, M_c, пересекаются в точке H_m;*

3) *касательные, проведенные из вершин основного треугольника, пересекаются в ортоцентре треугольника H и, следовательно, являются высотами.*

8.3. Особые касательные свойства дополнительной кубики Дарбу

1. В [6] приводится еще и такое любопытное утверждение:

касательные к кубике, проведенные из всех четырех точек Жергонна (см.6.3), пересекаются в одной точке, лежащей на кубике, а именно в точке $\mathring{H}$ *— симметричной ортоцентру* H *относительно центра описанной окружности.*

Доказательство может быть получено непосредственным подсчетом, с использованием уравнения касательной и координат точки $\mathring{H}$ (см. 6.3).

2. Опираясь на предыдущий пункт, можно сформулировать и такое свойство:

касательные к кубике, проведенные из всех четырех точек Нагеля (см. 6.3), пересекаются в одной точке, а именно в точке, полученной пересечением прямой $H\mathring{H}$ *с кубикой.*

Наметим коротко доказательство, основанное на красивой операции *сложения точек на кубической кривой.*

Эта операция, основанная на том, что всякая прямая , проходящая через точку кубики, содержит, как правило, еще две точки кубики (точку касания можно при этом считать за две совпадающие), состоит в следующем (см. [4, 5])

— зафиксируем на кубике какую-нибудь точку E;

— для любых двух точек кубики A и B их суммой $C = A + B$ назовем точку пересечения прямой PE с кубикой, где P есть точка пересечения с кубикой прямой AB (касательной — в случае если $B = A$);

— отметим точку $\overline{E}$ — точку пересечения касательной в точке E с кубикой — и для каждой точки A точку пересечения прямой $A\overline{E}$ с кубикой назовем *противоположной для* A (или $-A$).

Оказывается, такое сложение задает на кубической кривой структуру *абелевой группы с нейтральным элементом* E.

Легко далее проверить, что если мы в качестве E выберем на дополнительной кубике Дарбу ее центр H_m, то для каждой пары изотомически сопряженных точек на кубике получим $A + A_m = H$. В частности, для точек Жергонна и Нагеля $G + N = H$; и для точек $\mathring{H}$, — $\mathring{H}_m$. Также понятно, что если прямая AB проходит через точку K кубики, то $A + B = K_m$.

В этих терминах условие 1 п. 8.3 запишется как $G + G = \mathring{H}_m$ (и т.д. — еще три аналогичных равенства). Воспользуемся, наконец, групповыми свойствами:

$$N + N = H - G + H - G = \mathring{H} + (\mathring{H}_m - G) + (\mathring{H}_m - G) + \mathring{H} = \mathring{H} + (G + G) + \mathring{H} =$$

$$= \mathring{H} + (\mathring{H} + \mathring{H}) = \mathring{H} + H.$$

Итак, $N + N = \mathring{H} + H$ — это и означает справедливость 2 п. 8.3.

Литература:

[1] Мякишев А.Г. «О некоторых преобразованиях, связанных с треугольником». В журнале «Математическое образование», №1, 1999 г. Москва.

[2] Прасолов В.В. «Рассказы по геометрии». В журнале «Математическое образование», №1, 1998 г. Москва.

[3] Прасолов В.В. «Рассказы о числах, многочленах и фигурах. Рассказ 21» М., «Фазис», 1997 г.

[4] Прасолов В.В., Соловьев Ю.П. «Эллиптические функции и алгебраические уравнения» М., «Факториал», 1997 г.

[5] Рид М. «Алгебраическая геометрия для всех». М., «Мир», 1991 г.

[6] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. «Справочник по теории плоских кривых третьего порядка.»М., «ГИФМЛ», 1961 г.

Автор: Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики в
Московском Химическом Лицее.
Рабочий телефон: 3623440

Заметки о неравенствах

В. В. Прасолов

В статье на конкретных примерах рассказывается о четырёх различных подходах к доказательству неравенств.

1. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Их *средним арифметическим* называют число $A = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, а их *средним геометрическим* называют число $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$. В 1821 г. Коши доказал неравенство $A \geq G$. Доказательство Коши использовало индукцию, но не обычным способом: сначала доказывалось, что если утверждение верно для $n = 2^m$, то оно верно и для $n = 2^{m+1}$, а затем доказывалось, что если утверждение верно для n, то оно верно и для $n-1$.

Неравенство $A \geq G$ можно доказать и прямой индукцией. Для этого нужно расположить данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Если $a_1 = a_n$, то $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. В таком случае $A = G$. Поэтому будем предполагать, что $a_1 < a_n$. Тогда $a_1 < A < a_n$, а значит,

$$A(a_1 + a_n - A) - a_1 a_n = (a_1 - A)(A - a_n) > 0,$$

т.е. $A(a_1 + a_n - A) > a_1 a_n$. В частности, $a_1 + a_n - A > 0$.

Предположим, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим верно для любых $n-1$ положительных чисел. Применим его к числам a_2, a_3, ... , a_{n-1}, $a_1 + a_n - A$. В результате получим

$$\left(\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A}{n-1}\right)^{n-1} \geq a_2 a_3 \cdots a_{n-1}(a_1 + a_n - A).$$

Здесь

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A}{n-1} = \frac{nA - A}{n-1} = A.$$

Умножим теперь обе части полученного неравенства на A:

$$A^n \geq a_2 a_3 \cdots a_{n-1} A(a_1 + a_n - A) > a_1 a_2 \cdots a_n;$$

мы воспользовались доказанным выше неравенством $A(a_1 + a_n - A) > a_1 a_n$.

2. Расстояние между эллипсом и гиперболой

Здесь мы докажем следующее утверждение.

Если $xy = 4$ и $z^2 + 4w^2 = 4$, то $(x-z)^2 + (y-w)^2 \geq 1,6$.

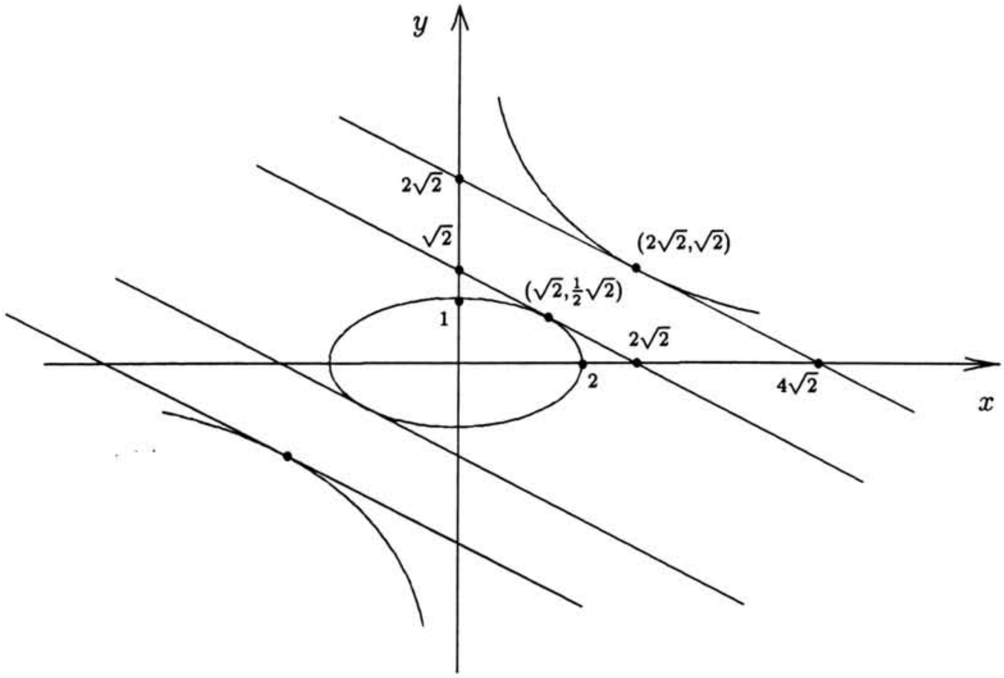


Рис. 1

На геометрическом языке это неравенство означает, что расстояние между эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$ и гиперболой $xy = 4$ не меньше $\sqrt{1,6}$. При доказательстве удобно пользоваться именно геометрической формулировкой. Мы будем доказывать следующее утверждение:

> касательная к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 4$ в точке $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ параллельна касательной к гиперболе $xy = 4$ в точке $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, и квадрат расстояния между этими касательными равен $1,6$.

Обратившись к рис. 1, несложно убедиться, что из него следует требуемое утверждение.

Теперь нам надо найти уравнения касательных к эллипсу и к гиперболе в данных точках. Обсудим, как получить уравнение касательной к конике (кривой второго порядка) в данной точке.

Уравнение касательной к конике

Предположим, что точка (x_0, y_0) принадлежит конике

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Любая прямая, проходящая через точку (x_0, y_0), задаётся уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

(или уравнением $x = x_0$, что соответствует $k = \infty$). Найдём вторую точку пересечения прямой и коники. Для этого подставим уравнение прямой в уравнение коники (т.е. заменим в уравнении коники y на $k(x - x_0) + y_0$) и вычислим коэффициенты A и B при x^2 и x (свободный член C нас интересовать не будет):

$$\begin{aligned} A &= a + bk + k^2; \\ B &= -bkx_0 + by_0 - 2ck^2x_0 + 2cky_0 + d + ke. \end{aligned}$$

Рассматриваемая прямая является касательной к конике тогда и только тогда, когда она пересекает конику только в точке (x_0, y_0).[1] Эквивалентное условие таково: $2x_0 = -B/A$, т.е.

$$k(bx_0 + 2cy_0 + e) = -(2ax_0 + by_0 + d).$$

Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$(x - x_0)(2ax_0 + by_0 + d) + (y - y_0)(bx_0 + 2cy_0 + e) = 0.$$

По условию точка (x_0, y_0) принадлежит конике, т.е.

$$ax_0^2 + bx_0y_0 + cy_0^2 + dx_0 + ey_0 + f = 0.$$

Воспользовавшись этим равенством, уравнение касательной можно записать в другом виде:

$$(2ax_0 + by_0 + d)x + (bx_0 + 2cy_0 + e)y + dx_0 + ey_0 + 2f = 0.$$

Пример 1. *Касательная в точке (x_0, y_0) к эллипсу (или гиперболе) $ax^2 + by^2 = 1$ задаётся уравнением $ax_0x + by_0y = 1$.*

Пример 2. *Касательная в точке (x_0, y_0) к гиперболе $xy = a$ задаётся уравнением $x_0x + y_0y = 2a$.*

Вернёмся к исходной задаче. Касательная к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 4$ в точке $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ задаётся уравнением $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 4$, т.е.

$$x + 2y = 2\sqrt{2}. \tag{1}$$

Касательная к гиперболе $xy = 4$ в точке $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ задаётся уравнением $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 8$, т.е.

$$x + 2y = 4\sqrt{2}. \tag{2}$$

Прямые, заданные уравнениями (1) и (2), параллельны. Расстояние между ними равно высоте h прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, опущенной на гипотенузу. Ясно, что $h = ab/c$, где $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$ и $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, $h^2 = 1,6$, что и требовалось.

---

[1] Это утверждение не совсем точно. Например, прямые $x = x_0$ и $y = y_0$ пересекают гиперболу $xy = 1$ в одной точке, но не являются касательными. Но на самом деле эти прямые пересекают гиперболу ещё и в бесконечно удалённых точках. С учётом бесконечно удалённых точек утверждение верно.

3. Положительные симметрические функции

Предположим, что $x_1, \ldots, x_n$ — действительные числа, про которые известно, что все числа $\sigma_1 = \sum x_i$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $\sigma_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k$, ... , $\sigma_n = x_1 \cdots x_n$ положительны. Верно ли, что тогда и сами числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны?

Ответ такой: да, верно. Чтобы это доказать, рассмотрим многочлен

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ являются его корнями. Поэтому достаточно проверить, что если $x < 0$, то $f(x) \neq 0$. Но если $-x > 0$, то

$$(-1)^n f(x) = (-x)^n + \sigma_1 (-x)^{n-1} + \sigma_2 (-x)^{n-2} + \cdots + \sigma_n > 0.$$

Замечание. *Условий $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ не достаточно для того, чтобы комплексные числа x_1 и x_2 были положительными. Например, если $x_1 = 2 + i$ и $x_2 = 2 - i$, то $\sigma_1 = 4$ и $\sigma_2 = 3$.*

4. Неравенство $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$

При $0 < x < \pi/4$ выполняется неравенство $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$. Нетривиальность доказательства этого неравенства связана с тем, что функция $f(t) = t^t$ не монотонна на интервале $(0, 1)$; она имеет минимум в точке $t_0 = 1/e \approx 0,367879$.

Положим $u = \sin^2 x$ и $v = \cos^2 x$. Тогда $u + v = 1$ и $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$. Требуется доказать, что $(\sqrt{u})^{\sqrt{u}} < (\sqrt{v})^{\sqrt{v}}$, т.е. $\frac{1}{2}\sqrt{u}\ln u < \frac{1}{2}\sqrt{v}\ln v$ (логарифмы здесь отрицательны). Воспользуемся разложением логарифма в ряд и тем, что $u + v = 1$. В результате получим

$$\ln u = \ln(1 - v) = -\left(v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \cdots\right).$$

Таким образом, переходим к неравенству

$$\sqrt{u}\left(v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \cdots\right) > \sqrt{v}\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots\right).$$

После сокращения на $\sqrt{uv}$ получаем неравенство

$$\sqrt{v}\left(1 + \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} + \cdots\right) > \sqrt{u}\left(1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + \cdots\right).$$

Это неравенство очевидно, поскольку $v > u > 0$.

О решении уравнений $\mathbf{F}(\cos\mathbf{x}, \sin\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ — многочлен второй степени

В. С. Куликов

Сыночку-абитуриенту от папы-репетитора.

Когда студенты математических специальностей изучают различные разделы современной математики, а студенты высших технических специальностей — более-менее фундаментальный курс, так называемой, высшей математики, из памяти быстро исчезает школьный курс элементарной математики, а также массив абитуриентских задач. В вузах (кроме педагогических) редко возвращаются к вопросам элементарной математики и ее связям с тем, что изучают студенты. В связи с этим интересна предлагаемая статья. В ней демонстрируется, как (небольшой) раздел «высокой науки» помогает разобраться с классом задач, которые часто встречаются на вступительных экзаменах. Школьникам и учителям можно извлечь из нее полезный способ решения задач этого класса, а студентам — увидеть как методы современной математики могут помочь в решении элементарных задач, с которыми приходилось "маяться" в школе и будучи абитуриентами.

Мы хотим рассказать о решении одного типа задач на вступительных экзаменах по математике, которые обычно относятся к задачам повышенного уровня сложности. Эти задачи в своей основе имеют красивую геометрическую подоплеку, и поэтому представляют не только чисто утилитарный интерес.

1. Пусть задан многочлен второй степени от двух переменных

$$F(z_1, z_2) = a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 + 2a_1z_1 + 2a_2z_2 + a_0. \tag{1}$$

Требуется решить уравнение $F(\cos x, \sin x) = 0$, т.е. уравнение вида

$$a_{11}\cos^2 x + 2a_{12}\cos x\sin x + a_{22}\sin^2 x + 2a_1\cos x + 2a_2\sin x + a_0 = 0\ . \tag{2}$$

Применим метод разложения на множители, т.е. попытаемся представить левую часть уравнения (2) в виде произведения двух множителей,

$$(b_1\cos x + b_2\sin x + b_0)(c_1\cos x + c_2\sin x + c_0) = 0, \tag{3}$$

или, что тоже самое, разложить $F(z_1, z_2)$ на множители

$$F(z_1, z_2) = (b_1z_1 + b_2z_2 + b_0)(c_1z_1 + c_2z_2 + c_0). \tag{4}$$

Сам многочлен $F(z_1, z_2)$, вообще говоря, на множители не разлагается. Однако в нашем распоряжении имеется основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, т.е. имеем многочлен $F_0(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - 1$, с помощью которого можно подправить $F(z_1, z_2)$ так, чтобы он стал разлагаться на множители. Можно доказать, что всегда существует такое действительное число λ_0 , что многочлен

$$F_{\lambda_0}(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) - \lambda_0 F_0(z_1, z_2)$$

разлагается на множители. Ниже мы опишем алгоритм, позволяющий найти λ_0 и разложить $F_{\lambda_0}(z_1, z_2)$ на множители.

Таким образом, уравнение (2) приводится к эквивалентному уравнению $F_{\lambda_0}(\cos x, \sin x) = 0$, которое распадается на два простых уравнения, методы решения которых известны (метод введения вспомогательного угла; универсальная тригонометрическая подстановка).

2. Начнем с описания практического рецепта решения уравнения (2), а затем объясним геометрические соображения, лежащие в его основе. Сначала откроем секрет, как экзаменаторы составляют уравнения вида (2). Берут две линейные функции $l_1(z_1, z_2) = b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_0$ и $l_2(z_1, z_2) = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_0$, перемножают их и получают разложимый квадратичный многочлен $F(z_1, z_2) = l_1(z_1, z_2) \cdot l_2(z_1, z_2)$, и, наконец подставляют $z_1 = \cos x, z_2 = \sin x$. Так получается простейший вариант задачи, для которого непосредственно применим метод разложения на множители. После этого применяют следующий прием усложнения задачи. Разложимое уравнение $F(z_1, z_2) = 0$ "портят" - прибавляют к нему "основное тригонометрическое тождество" $z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$, умноженное на некоторое число λ, и получают неразложимое уравнение $F_\lambda(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) + \lambda(z_1^2 + z_2^2 - 1) = 0$. Один из возможных способов произвести такую "порчу" - заменить в уравнении $F(\cos x, \sin x) = 0$ $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$ или $\sin^2 x$ на $1 - \cos^2 x$. Наша задача состоит в том, чтобы распутать данное уравнение: сначала с помощью основного тригонометрического тождества сделать его разложимым, а затем провести разложение на множители.

3. Перейдем к решению уравнения (2).

Шаг I . Сведение к разложимому уравнению.

Нам потребуется критерий разложимости многочлена (2), который мы приведем без доказательства. (Доказательство критерия разложмиости можно найти, например, в стандартных учебниках алгебраической геометрии.) Чтобы его сформулировать, необходимо ввести понятие определителя третьего порядка. Для незнакомых с этим понятием скажем, что определитель третьего порядка $|A|$ - это число, которое сопоставляется квадратной матрице A третьего порядка (таблице с тремя строками и тремя столбцами) по следующему правилу (разложение определителя по первой стороке):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

является определителем второго порядка.

Каждой квадратичной функции (1) мы можем сопоставить симметрическую матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Двойки в формуле (1) означают, что a_{12}, a_1 и a_2 – это половины коэффициентов, стоящих перед $z_1 z_2, z_1$ и z_2. Таким образом, половины этих коэффициентов мы ставим в матрицу A на места, симметрично расположенные относительно «главной» диагонали.

Теорема. Квадратичная функция (1) является разложимой тогда и только тогда, когда $|A| = 0$.

Вообще говоря, разложение, о котором идет речь в теореме, возможно над полем комплексных чисел. Имея в виду нашу практическую цель, не будем отвлекаться на это обстоятельство.

Пусть имеется квадратичная функция (1). Рассмотрим семейство функций

$$F_\lambda(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) - \lambda(z_1^2 + z_2^2 - 1) = 0. \tag{6}$$

Пусть A_λ — матрица, соответствующая $F_\lambda(z_1, z_2)$. Мы ищем λ такое, что $F_\lambda(z_1, z_2)$ разложима. В силу теоремы λ должно быть решением уравнения

$$|A_\lambda| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 + \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Применяя правило (5), получаем уравнение третьей степени относительно λ :

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что его свободный член c равен $|A|$. Поэтому, если $|A| = 0$, т.е. если $\lambda = 0$ корень уравнения (7), то уравнение (2) с самого начала являлось разложимым.

Коэффициенты уравнения (7) часто являются целыми числами. В случае, если уравнение (8) имеет рациональные корни, их можно найти перебором. При этом надо воспользоваться предложением:

если уравнение (8) с целыми коэффициентами имеет рациональный корень λ_0, то λ_0 – целое число, которое является делителем свободного члена c.

Доказательство этого предложения является нетрудным упражнением. Проведите его. Таким образом, искать корни уравнения (8) надо среди делителей (как положительных, так и отрицательных) числа c.

Итак, если мы нашли корень λ_0 уравнения (8), то уравнение $F_{\lambda_0}(\cos x, \sin x) = 0$ равносильно уравнению (2) и является разложимым. Далеее можно считать, что само уравнение (2) является разложимым.

Шаг II . Разложение на множители квадратичной части.

Предположим, что имеет место разложение

$$a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 + 2a_1z_1 + 2a_2z_2 + a_0 =$$
$$= (b_1z_1 + b_2z_2 + b_0)(c_1z_1 + c_2z_2 + c_0). \tag{9}$$

Приравнивая члены второй степени, получаем, что должно иметь место разложение квадратичной формы

$$a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 = (b_1z_1 + b_2z_2)(c_1z_1 + c_2z_2).$$

Чтобы найти это разложение, рассуждаем так: выносим за скобку z_2^2 и «делаем» из квадратичной формы квадратичную функцию относительно переменной $k = \frac{z_1}{z_2}$; находим корни k_1 и k_2 квадратного уравнения и разлагаем квадратичную функцию на множители; возвращаемся к «однородным координатам» z_1 и z_2 , заменяя k на $\frac{z_1}{z_2}$:

$$a_{11}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 = z_2^2\left(a_{11}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{z_1}{z_2} + a_{22}\right) =$$
$$= z_2^2(a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22}) = z_2^2a_{11}(k - k_1)(k - k_2) =$$
$$= z_2^2a_{11}\left(\frac{z_1}{z_2} - k_1\right)\left(\frac{z_1}{z_2} - k_2\right) = a_{11}(z_1 - k_1z_2)(z_1 - k_2z_2).$$

Шаг III . Разложение на множители всей функции (2) – нахождение свободных членов.

Таким образом, мы нашли b_1 , b_2 и c_1 , c_2 в разложении (9) . Теперь найдем b_0 и c_0 . Для этого приравняем члены первой степени в равенстве (9). Получим

$$2a_1z_1 + 2a_2z_2 = b_0(c_1z_1 + c_2z_2) + c_0(b_1z_1 + b_2z_2)\ .$$

Приравнивая коэффициенты при z_1 и z_2, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} c_1b_0 + b_1c_0 = 2a_1, \\ c_2b_0 + b_2c_0 = 2a_2, \end{cases} \tag{10}$$

из которой можем найти неизвестные b_0 и c_0, и тем самым полностью найти разложение (9).

После того как разложение уравнения (2) найдено, оно сведено к совокупности двух уравнений вида $a\cos x + b\sin x + c = 0$. Решая эти уравнения, получаем ответ.

4. *Пример.* Решить уравнение

$$3\sin x\cos x + 4\sin x = 4 - 3\cos^2 x + \cos x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде (2)

$$3\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \cos x + 4\sin x - 4 = 0.$$

Шаг I. Вычислим определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

Получим $|A| = -6 \neq 0$, т.е. (2) не разлагается. Составляем уравнение типа (7):

$$|A| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} - \frac{3}{2}\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & \lambda-4 \end{vmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем

$$(3-\lambda)(-\lambda^2+4\lambda-4) - \frac{3}{2}(\frac{3}{2}\lambda - 6 + 1) - \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{2}\lambda) = 0,$$

т.е.

$$(\lambda-3)(\lambda^2-4\lambda+4) - 2(\lambda-3) = 0.$$

Находим, что $\lambda = 3$ является корнем.

Многочлен

$$F_{\lambda_0}(z_1, z_2) = F(z_1, z_2) - \lambda_0 F_0(z_1, z_2)$$

в нашем случае равен

$$(3z_1^2 + 3z_1z_2 - z_1 + 4z_2 - 4) - 3(z_1^2 + z_2^2 - 1) =$$

$$= 3z_1z_2 - 3z_2^2 - z_1 + 4z_2 - 1.$$

Шаг II . Квадратичная форма разлагается здесь автоматически:

$$3z_1z_2 - 3z_2^2 = 3(z_1 - z_2)z_2.$$

Шаг III . Сравнивая члены первой степени в произведении $(z_1 - z_2 + b_0)(3z_2 + c_0)$ и в уравнении $F_{\lambda_0}(z_1, z_2)$, получаем систему типа (10):

$$\begin{cases} c_0 = -1, \\ 3b_0 - c_0 = 4. \end{cases}$$

Находим $b_0 = 1, c_0 = -1$.

Получаем, что

$$3z_1z_2 - 3z_2^2 - z_1 + 4z_2 - 1 = (z_1 - z_2 + 1)(3z_2 - 1).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$(\cos x - \sin x + 1)(3\sin x - 1) = 0,$$

или совокупности уравнений

$$\cos x - \sin x = -1 \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{3}.$$

Решая эти уравнения, получаем ответ:

$x = -\frac{\pi}{4} + (\pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n)$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. *Комментарий.* В основе нашего алгоритма лежат простые соображения из аналитической (и алгебраической) геометрии. Мы изложим эти соображения для читателей, знакомых с этим разделом «высшей математики».

Уравнение $F(z_1, z_2) = 0$ определяет кривую второго порядка C , а уравнение $F_0(z_1, z_2) = 0$ определяет еще одну такую кривую (окружность). Множество всех кривых второго порядка параметризуется точками $a = (a_{11} : a_{12} : \ldots : a_0)$ (комплексного) проективного пространства $\mathbf{P}^5$. Известно, что множество особых кривых второго порядка, а это множество кривых, распадающихся на пару прямых, параметризуется гиперповерхностью третьей степени D , определяемой уравнением

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим пучок кривых C_λ , определяемых уравнением $F_\lambda = F - \lambda F_0 = 0$. В пространстве $\mathbf{P}^5$ кривые C_λ соответствуют точкам прямой l . Нам надо найти F_{λ_0} , соответствующее одной из трех (в комплексной области) точек $D \cap l$. Для этого надо решить уравнение третьей степени (7). Поскольку степень этого уравнения нечетна, оно всегда имеет действительный корень λ_0. В результате получаем кривую C_{λ_0} распадающуюся на пару прямых (быть может комплексно сопряженных). Уравнение $F_{\lambda_0} = 0$ можно стандартными методами привести к каноническому виду.

Куликов Валентин Степанович
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Университета Печати

В школу пришел физик

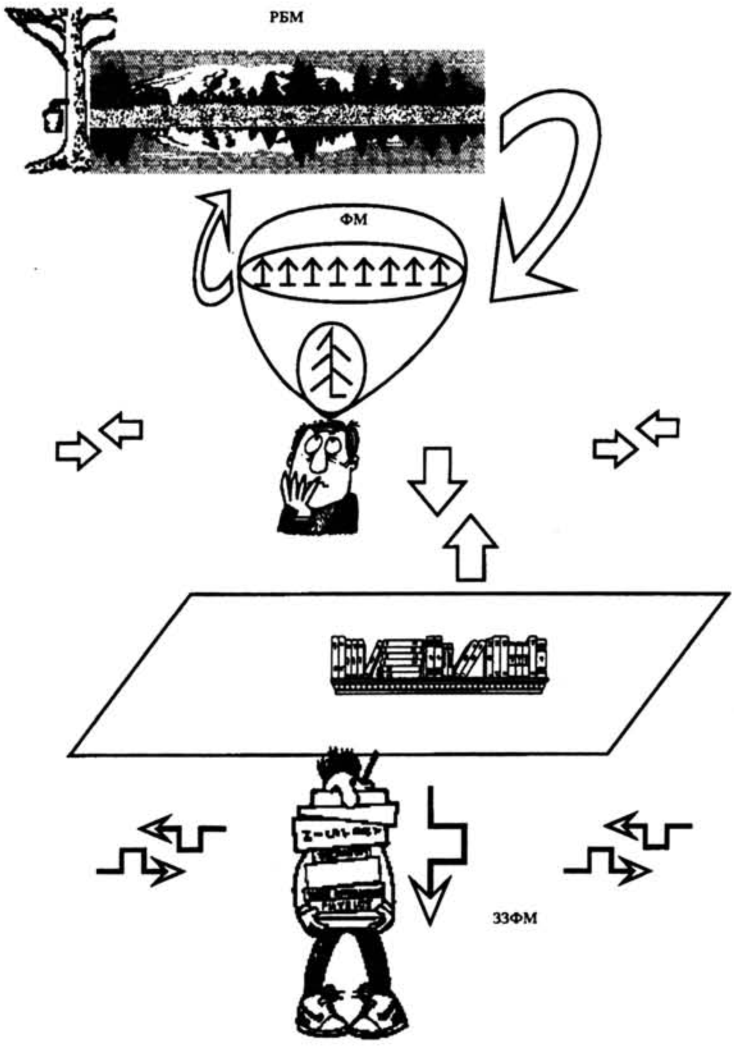
В. А. Дементьев

В. А. Дементьев — доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственной премии РФ за 1999 г., автор нашего журнала (см. №№1, 3 — 4, 1998 г.). Последние несколько лет преподает физику в средней школе — Экспериментальной Гуманитарно-Методологической общеобразовательной школе №1314 г. Москвы "Проектный Колледж". Школа является московской экспериментальной площадкой по разработке содержания общего образования. В. А. Дементьев активно участвует в этой работе. В статье он делится своими соображениями о возможных способах улучшения физического образования, основанных на своеобразном видении места и роли физики и физиков в мире.

И с удивлением обнаружил, что преподаваемый здесь предмет по своему духу никак не напоминает предмет его профессиональных занятий. По букве — да, напоминает. Название предмета просто совпадает. Перечень разделов школьной программы почти совпадает с пунктами программы университетского курса общей физики. В школьных учебниках выделены особым шрифтом вполне знакомые формулировки основных физических законов. В рамочки взяты привычные основные формулы. Именно это и сбило физика с толку, когда он соглашался ради необходимых нынче дополнительных заработков прийти в школу и встать на место учителя. Если бы авторы школьной программы и учебников внятно отразили там полное несоответствие духа преподаваемого предмета и буквы сложившихся физических законов, то физик сразу поискал бы себе другой приработок.

Понадобилась «разведка боем», чтобы обнаружить это. Ознакомившись с содержанием и стилем учебников, с составом задач и с описаниями обязательных лабораторных работ, с богатым практическим опытом и с методическими поисками учителей, приобретя свой собственный учительский опыт, физик ясно увидел, что школьный предмет, называемый физикой, не имеет ровно ничего общего ни с его профессиональной жизнью в физической науке, ни с реальной жизнью нормальных людей. Физик довольно долго ломал голову над вопросами, почему это так и как назвать отраженную в школьном предмете реальность. Результат этих раздумий изложен ниже. Физик отдает себе отчет в дискуссионности изложенных соображений и приглашает коллег — физиков-исследователей, прикладников, а также преподавателей средней и высшей школы — к обсуждению. Если какие-то из этих выводов заслуживают внимания, то нам всем захочется что-то изменить в лучшую сторону. Ведь кризис кризисом, приработки приработками, но когда-то и о душе следует подумать. О единой душе и едином духе нашего любимого предмета, где бы эта душа ни теплилась — в исследовательской лаборатории, в инженерной деятельности или в учебной аудитории.

Начнем с обсуждения того, как, по мнению автора, соотносятся упомянутые реальности. Это мнение можно выразить приведенной на рисунке схемой.



Имеется реальный Божий мир (РБМ) со всеми его сложностями. Огромное число разнообразных взаимосвязанных объектов из РБМ никому не под силу отобразить полностью. Физику дана способность отобразить в своем сознании часть этого РБМ в форме моделей и теорий. Это отображение назовём физическим миром (ФМ). Ясно, что ФМ устроен значительно беднее и проще, чем РБМ. В полном соответствии с теоремой Шеннона, информация, проходя по каналам связи, может только портиться.

Поток информации от РБМ к физику показан большой изогнутой стрелкой. Эта информация соответствует наблюдениям и экспериментам, организуемым физиком ради получения косвенных (в основном) данных о свойствах реальных объектов. Перерабатывая эту информацию на основе данных ему способностей, физик строит ФМ, который беднее, чем РБМ. В своём ФМ физик не видит прекрасного дерева, а лишь его «скелет». Физик не видит прекрасного леса, состоящего из разнообразных деревьев, а лишь скучную череду одинаковых древесных скелетов. В построении таких метафор физик упорно однообразен. В «химическом» мире физик видит не молекулу с её многообразными свойствами, а лишь её жесткий (или, в лучшем случае, упругий) скелет; не реальный полимер, а его «скелетную цепочку», да настолько упрощенную, что она получается бесконечно длинной.

При всей его бедности ФМ обладает одним замечательным свойством — некоторой адекватностью реальному миру. Именно это свойство позволяет физику оказывать обратное влияние на РБМ. Менее мощный поток информации, показанный маленькой стрелкой, проходя через сознание инженера, вливается в виде новых техногенных объектов нашей цивилизации в реальный мир. Это и определяет для общества смысл существования физика. Так появилась, например, видеокамера, способная отобразить РБМ по-своему.

В свою очередь, ФМ может быть отражен в каком-нибудь «зеркале». «Зеркало» может быть любым. Иногда это текст нобелевской речи физика. А чаще всего это — книжная полка, куда физик складывает часть своих представлений о построенном им ФМ. Отображение ФМ в книге беднее самого ФМ (в силу той же теоремы Шеннона). В сознании физика постоянно бродят обрывки сложных образов, помогающие ему создавать ФМ. В книгах следы этих образов не видны. Ценность книжного отражения ФМ чисто количественная. Туда отправили свои фрагменты ФМ многие физики. Поэтому можно сэкономить время и силы, заимствуя оттуда богатый строительный материал для формирования своего фрагмента ФМ. Но для того и существуют научные конференции и личные контакты физиков, чтобы восполнить идейную бедность отраженного в книжном зеркале коллективно построенного ФМ. Такие связи между создателями ФМ показаны на схеме горизонтальными стрелками.

Теперь вспомним важное свойство любого зеркала — оно не только отражает, но и частично пропускает падающий на него поток в пространство, находящееся за ним, в «Зазеркалье». В исследуемых сейчас нами мирах тоже есть своё Зазеркалье. Малая часть потока информации о состоянии ФМ из написанных физиками книг попадает в другие книги, называемые учебниками. В такой форме эта информация попадает в сознание тех людей, которые живут исключительно в этом Зазеркалье. Это — учащиеся школ и нефизических вузов, а также студенты и профессора педвузов, согласившиеся всю оставшуюся жизнь прожить в Зазеркалье и помогать усваивать эту информацию о ФМ. Так возникает и живет сам по себе зазеркальный физический мир (ЗФМ).

Самое неприятное в данной схеме состоит в том, что население Зазеркалья полностью автономно (во всяком случае, в информационном плане). Информация (показанна тонкой изломанной стрелкой на рисунке) попадает сюда из ФМ. Однако обратной связи с ФМ нет. Кстати, входящий поток информации организуют сами жители Зазеркалья — профессора педвузов, опытные преподаватели нефизических вузов и школьные учителя-методисты. Понятно, что в соответствии с теоремой Шеннона при такой передаче информации она портится. Казалось бы, чего тут сокрушаться? Нормальное дело, и при передаче от физика к зеркалу информация портится, и тут портится. Но порча порче — рознь. Когда информация от физика поступает на книжную полку, она обедняется, но не искажается. Если такое и произойдёт, то обратный поток информации тут же даст другим физикам это почувствовать. Не желая строить свои фрагменты ФМ неадекватными, физики тут же наведут порядок на книжной полке. А если в Зазеркалье информации случится исказиться, то никто и не заметит, ибо обратного потока нет. Возникнет дезинформация, которая тут же законсервируется. Не секрет, что информация непосредственно через зеркало редко попадает на материальные носители. В Зазеркалье больше приняты горизонтальные потоки информации (и дезинформации), когда она переносится непосредственно со старого носителя на новый. Горизонтальные ломаные стрелки напоминают об экспансии ЗФМ.

Такова схема. Попробуем проверить её на адекватность и работоспособность. Для этого будем прогнозировать некоторые следствия из описанных закономерностей и сравнивать прогноз с реальной действительностью.

Прежде всего может возникнуть возражение против тезиса о замкнутости Зазеркалья — ведь оттуда многие учащиеся, становясь физиками-исследователями, поднимаются до высот ФМ. Это, конечно так, но какая информация приходит с такими за зеркальцами в ФМ? Что выносят во внешний мир клиенты учителя физики? Умение решать зазеркальные задачи, чтобы поступить в технический вуз и прожить там ещё два года в Зазеркалье институтского курса физики? Я неоднократно обращался к коллегам, преподающим специальные дисциплины, с просьбой указать, какие разделы курса физики важны для непосредственной поддержки их курсов. Не получив четкого ответа, автор забрался в тома журнала «Transactions of American Society of Agricultural Engineering» и нашел прекрасные образцы прикладных работ, выполненных физиками для американского сельского хозяйства. На этом материале написал и издал методичку «Применение методов прикладной физики в сельскохозяйственной науке и в производстве», где предлагал студентам ознакомиться с доступными описаниями этих работ и обсудить с преподавателями специальных кафедр тактико-технические свойства предложенных американскими физиками методов и устройств. Подарил весь тираж ректорату, деканам и заведующим ведущих кафедр. Ждал реакции пять лет. Не дождался. Пробовал сам проводить практические занятия по этой методичке со студентами первых курсов. Студенты вежливо молчали. Им не были близки проблемы американских фермеров, решенные с помощью физических методов.

Теперь о дезинформации, бытующей в ЗФМ. Учебники по физике для школы и для нефизических вузов написаны людьми, которые никогда сами не добывали и не применяли на практике физические знания. На этих учебниках воспитаны поколения учителей, не способных видеть физику иначе, чем учебный предмет. Не будучи профессиональными физиками, такие учителя и преподаватели не способны распознать и отбросить дезинформацию, накопившуюся с годами в непрофессиональных учебниках. В результате хорошим учеником считается тот, кто без ошибки воспроизводит ошибочное утверждение из учебника: «Затухающие колебания на практике не используются». Это утверждение не случайный ляпсус и в другом томе учебника тех же авторов тем же полужирным курсивом отмечено утверждение: «Затухающие электрические колебания на практике не используются». Помилуйте, а зачем же во всех автомобильных фирмах ломают головы над конструкциями амортизаторов? Ведь владелец автомобиля пользуется именно затухающими колебаниями. Любой пианист пользуется затухающими колебаниями и струн и деки, чтобы доставить на концерте удовольствие авторам цитируемого учебника. Если авторы этого учебника когда-либо говорили друг с другом по телефону, то они пользовались именно затухающими электрическими колебаниями. Любой физик, открыв любой учебник ЗФМ, найдет там любое количество подобных ляпсусов. Это можно смело прогнозировать.

Можно сделать и такой прогноз: живя в автономном ЗФМ, с его смесью информации и дезинформации, его служители не могут не выработать фантастических представлений о смысле и о ритуале своего служения. На примере любого учебника физики для школы или для нефизического вуза можно видеть, что общеобразовательная физика совершенно оторвана от любой реальной действительности. Она оторвана от реальностей физической науки, так как не знакомит ученика и студента с процессом добычи и осмысления физического знания. Физические законы даются в готовом виде без обсуждения их характера и условий их применимости. Общеобразовательная физика также оторвана от других дисциплин естественнонаучного блока и от своих инженерно-технических приложений. В результате от курсов физики возникает стойкое ложное впечатление, что этот предмет замкнут сам на себя и ни на что не пригоден, кроме как для сдачи экзаменов. Занятия превращаются в некий ритуал, лишенный осмысленной цели. Без цели невозможно отобрать и целесообразный материал для работы. Поэтому школьная программа по физике является настолько обширной, что усвоение всего материала принципиально исключено. А без усвоения конкретных физических закономерностей невозможно ставить вопрос о воспитании в учащемся современного естественнонаучного мировоззрения. В результате огромные затраты труда учащихся и преподавателей на проработку такого громоздкого учебного материала оказываются во многом напрасными.

Можно заранее предсказать, что все общеизвестные разговоры о необходимости налаживания междисциплинарных связях в естественнонаучном блоке средней или высшей школы навсегда так и останутся пустыми разговорами. Если специалисты по ЗФМ никогда не смотрели глазами профессионального физика ни на РБМ, ни на ФМ, то как они могут увидеть реальные природные связи между физическим и химическим или биологическим миром? Это утопия. Автор уверен, что в Зазеркалье и другие дисциплины естественнонаучного блока находятся в таком же неблагополучном состоянии. Кроме математики, если математику относить к этому блоку. Математика — единственная из дисциплин блока, которая знакомит учащихся с приложением своей науки и пытается научить всех нас пользоваться на практике своим техническим аппаратом. Конечно, по приведенным выше признакам неблагополучия в физике нельзя судить о состоянии дел во всем блоке дисциплин. Приведем лишь один признак, по которому работник любой дисциплины сможет судить о неблагополучии во всем блоке. В действующем естествознании, как фундаментальном, так и прикладном, всю его иерархию пронизывает густая сеть междисциплинарных связей. Внешне эти связи проявляются во взаимном заимствовании методов исследования, моделей и приборов. Биолог вынужден пользоваться химическими методами и физическими моделями и теориями. Химик — физическими. И те, и другие получают свои первичные данные с помощью физических приборов и методов измерений. Все мы пользуемся математическими методами представления своих моделей. Это реальность. А проверьте, как она отражена в школьном учебнике по Вашей дисциплине. Никак. Да иначе и быть не может, поскольку авторы наших учебников с этой реальностью никогда не соприкасались.

Кто виноват в отмеченных бедах? — Виновато зеркало, пропускающее часть информации в Зазеркалье. Осталось решить, что делать. На уровне схемы можно предложить следующие очевидные преобразования. Нет, не уничтожать зеркало и не пенять на его свойство пропускать за себя поток информации. Будем надеяться, что этим пропущенным за зеркало потоком будут пользоваться популяризаторы с пользой для общества и с удовольствием для себя. Попробуем вынуть из Зазеркалья наших клиентов и расположить их на одном уровне с физиками. Получится новая схема, приведенная на втором рисунке.

Эта схема вовсе не надуманная. Так физики обучают своих студентов, аспирантов и молодых сотрудников. Мастер, наряду со своими профессиональными занятиями, непосредственно общается с учениками и обучает их приёмам работы. Кое-что важное ученик усваивает в таком общении, причём очень эффективно. Кое-что видит в зеркале. И сам постепенно становится мастером. Впрочем, эта схема работает не только в мире физики. Так воспитывают старшие (более опытные) коллеги младших: врачи, художники, музыканты, слесари.

Теперь от схем перейдём к конкретным предложениям. Я считаю, что в реальной действительности имеются возможности и средства постепенно устранять отмеченные недостатки сложившейся системы школьного и вузовского нефизического образования и выходить на некоторый новый стандарт образования. Мы находимся и работаем в столице. Нам предоставлены некоторые особые возможности. Если нам позволят поэкспериментировать в плане приближения школьного образования к духу и к практике современного естествознания, как фундаментального, так и прикладного, то мы сможем получить полезные результаты и предъявить их коллегам. Это вполне реалистический прогноз. Он основан на личном опыте, когда удавалось показать учащимся школ и вузов стандартный программный материал с позиций профессионала-исследователя и прикладника. Из этого опыта автор вынес некоторые соображения — что можно и нужно сделать, чтобы вывести школьный блок естественных дисциплин из возникшего застоя на новый уровень, более соответствующий современному естествознанию. Рассуждая применительно к преподаванию физики, будем подразумевать, что все это можно применить и другим дисциплинам блока.

Как обострить восприятие учебного материала на занятиях

Это средство давно открыто выдающимися деятелями мировой высшей школы и отражено в лучших вузовских учебниках. Физика — опытная наука. Это написано почти во всех введениях к учебникам. А дальше учебники умалчивают, как же это из опыта получается физика. В выдающемся учебнике Поля «Опытная физика» автор пытается последовательно рассказать, как это делается. Но профессионалу-экспериментатору такой учебник не нужен, а физику-любителю — бесполезен. Это всё равно как дать в руки скрипачу учебник по технологии деревообработки и отправить его преподавать этот предмет в ПТУ. Вроде всё написано, а научить этому почему-то невозможно. Музыкант не поймет, в каком стиле надо обучать будущего столяра. Опыт преподавания специальных предметов в ПТУ, в консерватории, в академии живописи, в медицинском училище показывает, что ученик развивается быстро и направленно как профессионал только тогда, когда мастер обучает будущего мастера путём показа элементов своего мастерства. Полезно попробовать перенести этот стиль на преподавание общеобразовательных дисциплин. Пусть мы не ставим своей целью подготовку квалифицированного подмастерья (лаборанта) физика, химика, биолога. Но если мы будем показывать ученику элементы такого профессионализма, то восприятие подаваемого материала будет совершенно другим, более острым и глубоким — из профессиональной жизни мастера.

Как это сделать?

В идеале следовало бы провести преподавание всех естественнонаучных дисциплин в профессиональном стиле. Это означает, что понимание учащимися материала достигается через участие в опытной, поисковой, исследовательской работе. Физик учит будущего физика, показывая ученику, как уже состоявшийся работник ведет исследование. Разница с настоящим исследованием одна: в настоящем исследовании выясняются новые закономерности, а в школьном — ранее известные. Отсюда гарантия принципиальной выполнимости такого плана. И никакой искусственности, так как в естествознании принято неоднократно повторять чужие исследования для подтверждения полученных кем-то опытных данных и теоретических построений. Это входит в суть научного метода. А конкретные материальные константы и параметры опытных лабораторных установок всегда являются принципиально новыми. Здесь исследовательская деятельность в школе по духу ничем, кроме сложности, не будет отличаться от настоящей. Для реализации этого предложения нет принципиальных препятствий, есть лишь одно практическое затруднение. Такие занятия по собственному разумению может вести только исследователь, а этому нельзя научиться по учебникам. Школьный учитель сам должен вести исследовательскую работу в своей или смежной области знания, тогда он сможет сам спланировать маленькое исследование в классе. Педвузы же пока исследователей не выпускают.

В реальной действительности, в рамках нашего экспериментирования с новыми программами и учебными пособиями, можно предложить вполне осуществимый паллиатив. Возьмем обычного молодого учителя и напомним ему опытную общую физику на том уровне, как он изучал ее в институте. Попросим его перенести все свои студенческие умения с уровня институтской физики на уровень школьной физики, навыки работы в институтском физпрактикуме — на демонстрационный эксперимент школьного урока. Попросим всю постановку, обработку и обсуждение такого эксперимента проводить вместе с учениками. И уже с высот такой поисковой работы спускаться к положениям школьной программы. Надо лишь заготовить подробные методические разработки с описанием хода всех таких экспериментов, чтобы учитель мог отбирать из этого материала то, что он может реализовать на уроке в условиях своего класса. Автор уже располагает сценариями занятий, проведенных им в школе №1314 г. Москвы, где ведётся поисковая методическая работа в рамках программы «Столичное образование». Занятия проводились по теме «Тепловые явления» в 8-м классе и по теме «Динамика равноускоренного движения» в 9-м классе.

Участие в проведении и обсуждении экспериментов позволяет учащимся ярко увидеть в окружающей действительности физику. Отсюда уже не так трудно научиться сопоставлять физику с реальностью, а не с дезинформацией или с заблуждениями. Если мы с учениками изучим явления в модели автомобильного амортизатора и экспериментально, и теоретически, а затем увидим в видеофильме, как качается и успокаивается на амортизаторах кузов хорошего легкового автомобиля, то после этого ученик вряд ли поверит тезису школьного учебника: «Затухающие колебания на практике не используются». Если мы с учениками изучим на опыте с измерениями и с оценками ошибок измерения, как падает дробинка в стеклянном цилиндре с водой на уроке, посвященном теме «Равномерное прямолинейное движение», то вряд ли потом ученик глубокомысленно заявит: «А в природе равномерное прямолинейное движение никогда не наблюдается». Такое заявление приходилось слышать от хороших учеников, когда на занятии по теории относительности им предлагалось представить себя в равномерно и прямолинейно движущейся лаборатории. И ведь в догматической физике такое заявление имеет право на жизнь!

Автор отнюдь не настаивает, что занятия по физике должны проходить только в экспериментах и их обсуждениях. Более того, в первом концентре физики (7 — 8 классы) это было бы для учеников непосильной перегрузкой. Там иногда возможны качественные демонстрации, чтобы было ясно, о чем идет речь. Но во втором концентре физики (9 — 11 классы) это должно быть основным способом подачи новых фундаментальных физических явлений и закономерностей.

Как обеспечить усвоение физики?

Общеизвестно, что школьники плохо усваивают физику. Можно анализировать причины. А можно и спросить — а зачем её усваивать? Вряд ли кто-нибудь даст вразумительный ответ. Разве что поступающим в технические вузы надо натренироваться в решении физических задач для сдачи вступительных экзаменов. Но такие ученики идут на платные курсы при намеченных институтах, где и учатся решать типовые для каждого института задачи. Родной школе, даже хорошей, никто не доверяет. Школьная физика могла бы сделать очень ценный вклад в общее развитие любого выпускника и тем самым принести немалую пользу стране. Но при нынешней стилистике работы над усвоением материала она этого сделать никак не может. Дело в том, что школьные задачи погружают учащегося в совершенно искусственный мир. Из реального мира выхолащивается всё, что может помешать получить ответ, подставив исходные данные в известные формулы. При этом никто никому никогда не объяснил, зачем нужно реальный мир так выхолащивать. Например, большая тема «Падение тел» проходит под лозунгом: «Не учитывать сопротивление воздуха». И ученики получают ответы, которые соответствовали бы ситуации, когда Земля потеряла бы всю свою атмосферу. Кому нужны такие результаты?

Предлагается радикально изменить стилистику тренинговой работы в рамках школьной программы по физике. С целью достижения глубокого и прочного усвоения тренинговую часть учебного процесса в классе целиком посвятить решению прикладных задач. Это органически входит в логику любой естественнонаучной дисциплины: научные накопления (данные, теория и аппарат) нужны для выполнения прогнозов, для технического конструирования, для планирования, для ориентирования в реальной действительности. А всё это и есть прикладные задачи. Вот такие задачи, доступные школьному уровню, и предлагается решать совместными усилиями в классе. Решение же обычных ознакомительных задач (на подстановку в формулы) оставить для домашней работы.

Автор отдаёт себе отчет, что прикладные задачи во много раз труднее обычных, ибо всю свою научную жизнь он решает именно прикладные задачи. Но это лучший способ усвоить, что такое физика. Фокус в том, что прикладную задачу невозможно ни поставить, ни решить без интенсивной работы с физическими моделями. Как только возникает самая пустяковая прикладная задача, сразу же приходится качественно и количественно оценивать возможность или невозможность оставить за рамками принимаемой модели какие-то черты и особенности реального мира, чтобы получаемый ответ не вводил нас в заблуждение, а наталкивал на правильные действия. Это никогда не получается сразу, ибо это искусство, которому трудно научиться. Но ему стоит научиться, потому что навсегда останется опыт оперирования с моделями, полезный любому думающему работнику, в частности, и журналисту. Такому работнику уже труднее будет генерировать легковесные, ничем не подкрепленные суждения о реальной действительности.

Высказанные два предложения — о демонстрационных экспериментах и о прикладных задачах — тесно связаны и бьют в одну точку. Эксперимент на уроке ведёт ученика от реальной действительности к искусству теоретических физических построений, а прикладные задачи выводят снова в реальную действительность через искусство построения физических моделей. При этом модель является центром и одного и другого процесса. Так что получается единый сложный процесс работы с моделями. Непрерывность этого процесса даст гарантию и понимания, и усвоения учебного предмета с целью воспитания умственных навыков, полезных далеко за рамками данного учебного предмета.

Автор готов предоставить апробированные им образы прикладных задач по школьному курсу физики. И каждому будет видно, что эти задачи вовсе не выходят за рамки материала стандартной школьной программы. Иным является лишь стиль, который соответствует настоящей физике.

О связях между учебными дисциплинами естественнонаучного блока

Если мы научимся сочинять физические модели и ими оперировать, то можем надеяться решить самым естественным путём проблему междисциплинарных связей в нашем блоке. Как это делается в самом естествознании, уже было сказано. Нам останется только договориться с коллегами, как и когда перенести молекулярные и феноменологические модели и теории процессов диффузии и теплопроводности из физики в химию и в биологию. Как и когда перебросить представления о процессах в полной электрической цепи на модель первичных процессов фотосинтеза. Как и когда подготовить в математике простейшие представления о сложении и умножении вероятностей, чтобы в физике рассказать об учете хаотичности материи и о вероятностном поведении всех объектов микромира. Как спустить из биологии в химию модель реакционных циклов, а из химии в физику — модель бимолекулярной реакции, чтобы увидеть, как на этом высоком уровне организации материи работают простейшие законы электростатики и проявляются экзотические механические свойства электронов. На сколько глубоко (вернее насколько поверхностно) надо в математике познакомиться с элементами статистической обработки опытных данных, чтобы потом проводить такую обработку на уроках по другим дисциплинам нашего блока. Обо всём этом договориться вполне возможно. И выполнить не так уж сложно. Результат же может быть прекарсным. Говоря много раз об одних и тех же природных объектах в разных учебных дисциплинах и пользуясь при этом одними и теми же моделями, способными и усложняться, и упрощаться, мы сможем создать реалистичную картину материального единства мира и адекватной ему системы естественнонаучных знаний. А где еще будущий гражданин России увидит с близкого расстояния такую картину? Хорошо, что Министерство образования догадалось ввести в стандарт для гуманитариев новый курс «Концепции современного естествознания». А что делать будущему инженеру? Считается, что такой курс ему ни к чему, раз он пройдет в вузе курсы физики и химии. Но мы-то знаем, что эти курсы столь же догматичны, как и школьные. И знаем, к чему такой догматизм приводит. Не зная изнутри физики, наши инженеры-электронщики за всю компьютерную историю не предложили ни одного нового физического элемента компьютерной памяти типа магнитно-пузырьковой. В результате эти инженеры сидят за американскими компьютерами и общаются с ними на английском языке. И никому в голову не приходит, что всё могло бы быть иначе.

Давайте, пользуясь предоставленными нам возможностями, придадим процессу народного образования импульс снизу. И уж во всяком случае, в нашей власти ликвидировать психологический зажим, которым страдают учащиеся как в школе, так и в техническом вузе, потому что уверены, что принцип Паули в физике это одно, а в химии — совсем другое.

О концепциях современного естествознания в школьной программе

Если нам удастся на моделях осваивать и глубоко усваивать частные закономерности естествознания, то можно будет попытаться на последних оборотах каждого курса выйти на некоторые общие закономерности естествознания, на концепции, которые можно применить в других областях знания. Тут можно будет выйти на связь с коллегами из гуманитарного блока и обсудить с ними возможности рассмотрения процессов общественного развития с точки зрения закономерностей развития открытых неравновесных систем или возможность применения принципа дополнительности Бора к процессам и закономерностям психологии или искусства.

Механически переносить элементы этого нового курса из вуза в школу нельзя. Автор пробовал и наткнулся на препятствие в виде фантастических представлений о характере частных законов природы (все такие законы точны и критике не подлежат, все свойства мира можно найти в справочной литературе). Такая ненаучная фантастика является прямым следствием догматического стиля подачи материала в школе.

Каковы препятствия к реализации данных предложений

Есть только одно серьезное затруднение. Если работать над школьным материалом так, как предложено, то скорость прохождения материала заметно снизится. Выход из положения может состоять в удалении из программы ряда второстепенных вопросов. Но ни в коем случае нельзя из программ нашего блока удалять дублирование важных элементов программ. Выше высказано мнение о ценности такого дублирования для усвоения культуры моделирования, столь важной для любой будущей специализации нашего выпускника. Есть техническое препятствие — отсутствие приборной базы. Можно и здесь предложить нестандартное и более приемлемое решение, чем создание стандартного физического кабинета. Следует собрать в школе или в нефизическом вузе очень немногочисленный набор настоящих научных приборов. Этот набор можно приобрести у отмирающих научных институтов. Список приборов можно обсудить. В качестве необходимого дополнения надо приобрести видеокамеру, видеомагнитофон, компьютер с дисплеем 15 — 17 дюймов. Видеотехника нужна в качестве регистрирующей измерительной техники, а компьютер нужен для прокручивания имитационных и прогностических программ. Образцы таких программ собственной разработки автор может продемонстрировать.

Наш журнал продолжает рассказывать о местных инициативах в области математического и естественно-научного образования. В этом номере публикуются материалы о традиционной многопредметной Космической олимпиаде в подмосковном городе Королеве, а также задачи осеннего (1999 г.) тура Турнира Городов.

Интеллектуальный марафон в Космограде

Материал подготовил А. Б. Беляков

С 14 по 24 октября 1999 года в городе Королеве Московской области проходила традиционная ежегодная Космическая олимпиада школьников «Космос-2000». Эта олимпиада стала 6-й по счету и была посвящена наступлению нового «космического» тысячелетия. Предшествующие олимпиады:

1998 год — Международный молодежный космический лагерь, посвященный 60-летию города Королева (Калининграда);

1997 г. — «Спутник-40», Международный молодежный космический лагерь, посвященный 40-летию запуска первого искусственного спутника Земли;

1996 г. — «Космос-50», Международный молодежный космический лагерь, посвященный 50-летию РКК «Энергия» им. С.П. Королева;

1995 г. — Международный молодежный космический лагерь «Центр управления полетами-95»;

1994 — Международный молодежный космический лагерь «Центр управления полетами-94».

Организаторы — Городской комитет образования г. Королева Московской области и РКК «Энергия» им. С.П. Королева — целью проведения Международного молодежного космического лагеря ставили пробуждение интереса у учащихся к научному творчеству, ознакомление их с работой предприятий космической отрасли, профессиональную ориентацию на работу в области ракетно-космической техники.

В работе лагеря приняли участие более 80 российских школьников, в том числе 68 учащихся старших классов из семи городов России (Королева, Мытищ, Юбилейного, Железнодорожного, Новороссийска, Пушкино, Чехова), 13 учащихся 5-х и 6-х классов из города Королева, а также 28 студентов колледжей из городов Дерби и Линкольна (Великобритания) и из штата Вирджиния (США).

Программа проведения Международного молодежного космического лагеря включала:

— проведение олимпиад по физике, математике, информатике, литературе, а также защиту творческих работ;

— посещение ведущих космических предприятий — музея РКК «Энергия» им. С.П. Королева, Центра управления полетами (ЦУП), Центра подготовки космонавтов в Звездном городке, встречи с космонавтами и ветеранами РКК «Энергия» им. С.П. Королева;

— культурно-развлекательные мероприятия — посещение Алмазного фонда, экскурсии по Третьяковской галерее и в г. Александров, поездку в Московский драмматический театр им. К. С. Станиславского и в Цирк на проспекте Вернадского, «Вечера дружбы».

Космическая направленность мероприятий Международного космического лагеря была обусловлена космической тематикой творческих работ, с которыми школьники выступали на олимпиаде, а также экскурсионно-ознакомительной программой, которая была организована сотрудниками РКК «Энергия» им. С.П. Королева.

Среди творческих работ космической тематики особенно выделялись проекты «Получение электронных изображений Солнца» Романа Серова из города Железнодорожный и «Черные дыры — действительность или обращения» Тима Лэнкэшиа из английского города Дерби. Также были представлены работы с философско-космическим уклоном, например, «Эра разобщенного мира или всеединства как проблема Космоса в русской философии» Александра Белобородько, 11 класс гимназии №19 города Королева. Были и другие очень интересные работы на философскую тему.

Победителем стала ученица Королевского Лицея научно-инженерного профиля (ЛНИП) Анна Михайлович за творческий проект на тему «Механический аналог биологической системы (гусеница)».

В этой олимпиаде участвовали также ребята 5-х и 6-х классов. Они представили свои творческие проекты, рисунки, макеты, работы, связанные с космической тематикой.

Высокая насыщенность программы стала возможной благодаря тому, что участники Международного космического лагеря проживали в Профилактории РКК «Энергия» им. С.П. Королева. Участие в Международном космическом лагере стало настоящим праздником для детей. Они получили редкую возможность общения со сверстниками, имеющими общие интересы, а также возможность испытать свои силы в олимпиадах и продемонстрировать свою творческую работу, возможность познакомиться с достижениями отечественной космонавтики и с работой предприятий космической отрасли в современных условиях. Участие в Международном космическом лагере школьников не только из г. Королева, но и из других городов России, а также иностранной делегации позволило значительно расширить географию творческого соперничества и неформального общения детей. На торжественном вечере, посвященном открытию Международного космического лагеря, участников и гостей приветствовали мэр г. Королева А.Ф. Морозенко, представитель РКК «Энергия» им. С.П. Королева А.В. Лукьяшко и председатель Комитета народного образования Н.П. Гринько.

По окончании Международного космического лагеря все его участники получили памятные подарки, а победителям Олимпиады были вручены ценные призы.

Ракетно-космическая корпорация учредила специальные призы: групповую экскурсию в один из городов Золотого кольца России и посещение космодрома Байконур. Прощаясь, ребята говорили: «До свидания, до следующей встречи в 2000 году». И хочется надеяться, что эта встреча действительно состоится. Проведение Международного молодежного космического лагеря стало значительным событием в культурной жизни г. Королева, привлекло внимание школьников города, стало стимулом для творческой деятельности учащихся в направлении космической тематики.

Результаты выполнения заданий на олимпиадах по физике, информатике, математике и на защите творческих работ показали высокий образовательный и творческий уровень школьников г. Королева.

Участники Международного молодежного космического лагеря получили большую информацию об истории космонавтики и ее современном состоянии, а также о работе предприятий космической отрасли, что вызвало значительный интерес к космической тематике.

Из анализа результатов опроса участников Международного молодежного космического лагеря видно, что уровень проведения Международного лагеря в целом и его отдельных мероприятий очень высок.

Международная космическая олимпиада, физика

8 класс

1. На поршень насоса действует сила 300 Н. Найти работу за два хода поршня, если ход поршня равен 60 см.

2. Размеры плиты составляют $2 \times 1,\ 6 \times 0,2$ (м). Найти массу этой плиты, если она изготовлена из материала плотности $2,7 \times 10^3$ кг/м^3.

3. Два шарика одинакового радиуса из алюминия и серебра нагрели до температуры 100°С, а затем опустили в одинаковые стаканы со 100 г воды в каждом при температуре 0°С. В каком из стаканов вода нагреется до большей температуры?

$\rho_{Al} = 2700$ кг/м^3;
$\rho_{Ag} = 10500$ кг/м^3;
$C_{Al} = 920 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$;
$C_{Ag} = 250 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

4. Когда катер проходил под мостом, один из пассажиров уронил в реку шляпу. Через 15 минут катер повернул назад и догнал плывущую по течению шляпу на расстоянии 900 м от моста. Найти скорость течения воды в реке, если режим работы двигателя постоянен.

5. При первом взвешивании на разноплечных весах тело было уравновешено гирями массы 5 кг. После того, как тело переложили на другую чашку весов, оно было уравновешено гирями массой 10 кг. Какова истинная масса тела?

6. Колба из стекла вместимостью 1,5 л имеет массу 250 г. Какой минимальный груз надо поместить в колбу, чтобы она потонула в воде?
Плотность стекла $2,5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

9 класс

1. Во сколько раз масса детали из алюминия меньше массы точно такой же детали из серебра? Плотности алюминия и серебра 2700 и 10500 кг/м^3.

2. Двигаясь равноускоренно, ракета за 10 с прошла 30 м, причем ее скорость увеличилась в 5 раз. Найти ускорение ракеты.

3. К пробковому шарику объемом 27 см^3 привязали кусок железа и опустили в воду. При какой массе куска железа оба тела еще не потонут? Плотности пробки и железа 240 и 7800 кг/м^3.

4. В стакан налили 100 г воды при температуре 20°C и опустили кусок льда массой 100 г при температуре 0°C. Нарисуйте и обоснуйте примерный график зависимости температуры воды в стакане от времени. Температура окружающего воздуха 20°C.

5. В электрическом самоваре мощностью 600 Вт и в электрическом чайнике мощностью 300 Вт при включении в сеть напряжением 220 В, на которое они рассчитаны, вода закипает одновременно через 20 мин. Через сколько времени закипит вода в самоваре и в чайнике, если их соединить последовательно и включить в сеть?

6. Ядро, летящее со скоростью 800 м/с, распадается на два одинаковых осколка. Найти максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков и направлением первоначального движения ядра, если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость 400 м/с.

10 класс

1. При уменьшении температуры (по шкале Кельвина) некоторой массы газа в 2 раза ее объем возрос в 4 раза. Как изменилось давление газа?

2. Нижнюю половину спирали от электрической плитки опустили в воду, а верхняя — осталась в воздухе. Будут ли отличаться напряжения на концах верхней и нижней частей спирали после ее включения в сеть, если сопротивление проводника увеличивается с увеличением температуры. Ответ обосновать.

3. Кинетическая энергия спутника на круговой орбите равна K. Чему равна его потенциальная энергия в поле тяжести Земли? Потенциальная энергия двух тел массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии R друг от друга, определяется соотношением $U = -\frac{Gm_1m_2}{R}$.

4. Какой импульс необходимо мгновенно сообщить Луне, чтобы плоскость ее орбиты повернулась на 90°? Радиус вращения Луны вокруг Земли R остается неизменным, масса Земли — M, Луны — m.

5. Ракета с выключенным двигателем влетает в пылевое облако, причем ее скорость убывает с пройденным расстоянием l по закону $v = v_0 - kl$, где v_0 — начальная скорость, k — постоянный коэффициент. Как зависит сила сопротивления со стороны пылевого облака от скорости ракеты.

6. Стержень, одним концом шарнирно закрепленный на горизонтальной плоскости, лежит на цилиндре. Угловая скорость стержня ω. Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найти зависимость угловой скорости цилиндра от угла α между стержнем и плоскостью.

11 класс

1. Расстояние между двумя заряженными частицами увеличили в четыре раза. Во сколько раз изменится сила взаимодействия между ними?

2. Ракета, запущенная вертикально вверх с поверхности Земли, движется с ускорением $2g$ в течение 10 с. Затем двигатели прекращают работу. На какую максимальную высоту поднимается ракета?

3. Астронавты высадились на планету, масса которой M, а радиус R. Пытаясь определить направление на центр планеты, астронавты обнаружили, что нить отвеса устанавливается параллельно оси вращения. Определить период вращения планеты.

4. Два электрона движутся с одинаковой по модулю скоростью v в однородном магнитном поле. В некоторый момент расстояние между ними равно $2R$, а скорости электронов перпендикулярны к магнитному полю и прямой, соединяющей электроны. При какой индукции магнитного поля расстояние между электронами остается неизменным?

5. Ракета стартовала с поверхности некоторой планеты, двигаясь вертикально вверх с постоянным ускорением, равным по модулю ускорению свободного падения тел на этой планете. В какой-то момент двигатели ракеты перестали работать и через 10 с после старта ракета упала на поверхность планеты. Сколько секунд работали двигатели?

6. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем и при температуре окружающей среды находится идеальный одноатомный газ. Поршень медленно смещают от положения равновесия, поднимая его на высоту H. Затем дожидаются, пока температура газа в сосуде снова станет равной температуре окружающей среды. После этого сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На какое расстояние опустится поршень к тому времени, когда его колебания прекратятся? Теплоемкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Давление воздуха снаружи считать малым.

Международная космическая олимпиада, математика

8 класс

1. Вычислить
$$\frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}.$$

2. Даны две дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$ $(m > n)$. Определить, какая из них ближе к 1.

3. Докажите, что для любого числа K верно неравенство
$$(K^2 + 1) + \frac{1}{K^2 + 1} \geq 2.$$

4. Найти все целые решения уравнения $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + 1$.

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и C. Точки P и Q основания перпендикуляров, опущенных из B на эти биссектрисы. Доказать, что отрезок PQ параллелен AC.

6. В лабораторию привезли три сплава. Первый содержит 40% меди и 60% никеля, второй 60% меди и 40% кобальта, третий 60% кобальта и 40% никеля. Для эксперимента понадобился 1 кг сплава с содержанием кобальта 40% и наименьшим содержанием меди. Как получить этот сплав?

9 класс

1. Дана функция $f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7$. Найти $f(x)$.

2. В $\triangle ABC$ $\angle A = 70°$, $\angle B = 50°$. Точка M лежит внутри $\triangle ABC$, причем $\angle MAC = \angle MCA = 40°$. Найти $\angle BMC$.

3. У продавца есть рычажные весы с разными по длине плечами. 1 кг товара он взвешивает на левой чашке, а другой 1 кг того же товара тому же покупателю — на другой чашке, считая что этим компенсирует неточность весов. Что получилось в действительности?

4. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

5. В лабораторию привезли три сплава. Первый содержал 40% меди и 60% никеля. Второй — 60% меди и 40% кобальта. Третий 60% кобальта и 40% никеля. Для эксперимента понадобилось 1 кг сплава, который содержит 40% кобальта и наименьшее количество меди. Как получить такой сплав?

6. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит ее на части 9 и 16 см. Из вершины большего острого угла треугольника проведена прямая, проходящая через середину высоты. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри данного прямоугольного треугольника.

11 класс

1. Найдите наименьший член последовательности $a_n = (n^2 - 4n)(n+3)^2$.

2. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^2y - xy^2 = 6 \end{cases}.$$

3. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$.

4. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, вдвое больше площади последнего. Найти отношение катетов прямоугольного треугольника.

5. Касательная к графику $y = x^2$ пересекает координатные оси Ox и Oy в точках A и B так, что $OA = OB$. Найти длину AB.

6. Дана тройка чисел $\sqrt{2}$, 2, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Разрешается любые два из них заменить их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и их разностью, также деленной на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, получить тройку чисел: 1, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$?

Ответы и указания к задачам по физике

8 класс

1. 3600 Дж.

2. 832 кг.
3. В стакане с серебрянным шариком.
4. 0,5 м/с.
5. 7,07 кг.
6. 1350 г.

9 класс

1. В 3,9 раза.
2. 0,4 м/с^2
3. 23 г.
5. 3 ч и 45 мин.
6. 30°. Воспользоваться формулой сложения скоростей и найти максимум угла.

10 класс

1. Увеличится в 8 раз.
2. Напряжение на части спирали, опущенной в воду, меньше из-за меньшей температуры.
3. $-2K$. Записать закон Ньютна для спутника и воспользоваться выражением для потенциальной энергии.
4. $\sqrt{2}m\sqrt{\frac{GM}{R}}$. Воспользоваться законом Ньютона для Луны и учесть, что конечный импульс Луны по модулю равен начальному и направлен под углом 90° к нему.
5. $F = kv$. Записать дважды для близких моментов времени приведенный в условии задачи закон изменения скорости от расстояния и воспользоваться законом Ньютона для ракеты.
6. $\omega/2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Очевидное соотношение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = R/x$ записать для двух близких моментов времени и воспользоваться выражением для угловой скорости цилиндра: $v = \omega R$, где v — скорость оси симметрии цилиндра.

11 класс

1. Уменьшится в 16 раз.
2. 3 км.
3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Записать закон Ньютона для отвеса.
4. Воспользоваться законом Ньютона для электрона $Bev - \frac{ke^2}{4R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Отсюда находим: $B = \frac{mv}{eR} + \frac{ke}{4R^2v}$.
5. 3 с. При работающем двигателе $x_0 = \frac{at_0^2}{2}$; $v_0 = at_0$. В момент касания ракеты с поверхностью планеты $x_1 = x_0 + v_0t - \frac{at_1^2}{2} = 0$. Учитывая, что $t_0 + t_1 = 10$ с, из полученных соотношении получаем ответ задачи.
6. 0,6 Н. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для начального, промежуточного и конечного состояния газа под поршнем и закон сохранения энергии для перехода из промежуточного состояния в конечное в адиабатическом процессе. Решая полученную систему уравнений с учетом того, что давление газа в начальном и конечном состоянии $P = M\,g/S$ равны друг другу, находим ответ задачи.

Двадцать первый Турнир Городов

Осенний тур, 1999 — 2000 гг.

8 — 9 кл., тренировочный вариант 24 октября 1999 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются.)

Задача 1.

а) (2) Бумажный прямоугольный треугольник перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной. В каком отношении делятся диагонали получившегося четырехугольника их точкой пересечения?

б) (2) Бумажный прямоугольный треугольник площади 1 перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной. Полученный четырехугольник разрезали по диагонали, выходящей из третьей вершины исходного треугольника. Найти площадь наименьшего образовавшегося куска бумаги.

Задача 2. Рассматриваются тройки целых чисел a, b и c, для которых выполнено условие $a + b + c = 0$. Для каждой такой тройки вычисляется число $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$.

а) (2) Может ли случиться, что $d = 2$?

б) (2) Может ли случиться, что d — простое число? (Простым называется целое число, большее 1, которое не имеет делителей, отличных от него самого и единицы; вот первые простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, ...)

Задача 3. (4) На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

Задача 4. (4) В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная — 24 оборота, причем, как обычно, минутная стрелка длинее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная — 24).

Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления итальянских часов, которые встречаются и на обычных часах. Сколько таких положений существует на итальянских часах в течение суток? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах.)

Задача 5. (4) Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами. Плашек каждого сорта имеется достаточно много. Можно ли выбрать 18 плашек и сложить из них квадрат 6×6 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

10 — 11 кл., тренировочный вариант 24 октября 1999 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

Задача 1. (4) В треугольнике точку пересечения биссектрис соединили с вершинами, в результате он разбился на 3 меньших треугольника. Один из меньших треугольников подобен исходному. Найдите его углы.

Задача 2. (4) Докажите, что существует бесконечно много целых положительных нечетных n, для которых число $2^n + n$ — составное. (Составным называется целое положительное число, которое имеет делители, отличные от него самого и единицы.)

Задача 3. (4) В пространстве проведено n плоскостей. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

Задача 4. (4) Можно ли отметить на числовой оси 50 отрезков (быть может, перекрывающихся), так что выполняются два условия:

а) длины отрезков — 1, 2, 3, ... , 50;

б) концы отрезков — это все целые числа от 1 до 100 включительно?

Задача 5. (4) Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух сортов, так как диагональ можно расположить двумя способами. Плашек каждого сорта имеется достаточно много. Можно ли выбрать 32 плашки и сложить из них квадрат 8×8 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

8 — 9 кл., основной вариант 31 октября 1999 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются.)

Задача 1. (3) Несколько последовательных натуральных чисел выписали в строку в таком порядке, что сумма любой тройки подряд идущих чисел делится нацело на самое левое число этой тройки. Какое максимальное количество чисел могло быть выписано, если последнее число строки — нечетное?

Задача 2. Пусть ABC — остроугольный треугольник, C' и A' — произвольные точки на сторонах AB и BC, соответственно, B' — середина стороны AC.

а) (2) Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ не больше половины площади треугольника ABC.

б) (2) Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна четверти площади треугольника ABC тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек A', C' совпадает с серединой соответствующей стороны.

Задача 3. (5) 100 гирек 1, 2, ..., 100 грамм разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.

Задача 4.

а) (3) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски 8×8 стоит по фишке: внизу — белые, вверху — черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или по горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые — вверху?

б) (4) Тот же вопрос для доски 7×7.

Задача 5. (8) Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема — вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

Задача 6. (9) Внутри прямоугольного листа бумаги вырезали n прямоугольных дыр со сторонами, параллельными краям листа. На какое наименьшее число прямоугольных частей можно гарантированно разрезать этот дырявый лист? (Покажите, что в любом случае можно разрезать на найденное Вами число частей, а на меньшее число частей в некоторых случаях разрезать нельзя.)

10 — 11 кл., основной вариант 31 октября 1999 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются.)

Задача 1. (3) При каких n можно расставить целые числа от 1 до n по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась нацело на следующее за ними по часовой стрелке?

Задача 2. На прямоугольном листе бумаги отмечены

а) (2) несколько точек на одной прямой;

б) (3) три точки.

Разрешается сложить лист бумаги несколько раз по прямой так, чтобы отмеченные точки не попали на линии сгиба, и затем шилом проколоть сложенный лист насквозь. Докажите, что можно добиться, чтобы дырки оказались в точности в отмеченных точках и лишних дырок не получилось.

Задача 3. (6) Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема — вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

Задача 4. Точки K и L на сторонах AC и CB треугольника ABC — это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,

а) (3) делит периметр треугольника ABC пополам;

б) (3) параллельна биссектрисе угла ACB.

Задача 4.

а) (4) 100 гирек 1, 2, ..., 100 грамм разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.

б) (4) Рассмотрим такие n, что набор гирь 1, 2, ... , n грамм можно разделить на две части, равные по весу. Верно ли, что для любого такого n, большего трех, можно убрать по две гирьки из каждой части так, что равенство весов сохранится?

Задача 6. (8) На большой шахматной доске отметили $2n$ клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разрезать на n прямоугольников.

Задача 7. (8) Докажите, что у выпуклого $10n$-гранника найдется n граней с одинаковым числом сторон.

Математика как наука и ее школьные суррогаты

Вс. Шереметевский

«Dans ses lecons il (Эйлер) faisait sentir à ses disciples que la geometre (математика вообще) n'est pas une science isolée, et la leur presentait comme la base et la clef de toutes les connaissances buminaines» (Euler: «Institutiones calculi differentialis». 1787, Eloge par M. de Condorcet, p. X).

Журнал продолжает публикацию материалов, посвященных интересным вопросам истории математического образования. В этом номере публикуется (с сокращениями) статья, напечатанная в журнале «Русская мысль», №5, 1895 г. Материал представила Р. З. Гушель.

Еще со времен Платона математике в школе придают значение весьма высокое, но и крайне одностороннее. Ее ценят как гимнастику ума, как драгоценный материал для упражнения в строго-логическом мышлении. И нельзя не признать, что с этой формальной стороны курс элементарной математики может вполне оправдать возлагаемые на него надежды. Конечно, ни один из учебных предметов не дает такого простого, строго определенного материала для упражнения в правильно расчлененном логическом мышлении, для выработки диалектического навыка, как математика. В этом отношении хорошо поставленный курс геометрии, т.е. пройденный не спеша, без излишних подробностей, развитой самостоятельной работой учащихся над разнообразными доказательствами теорем, с успехом заменяет курс логики. Понятно поэтому, что математика во всякой общеобразовательной школе, при всех сменах взглядов и направлений, стояла и будет стоять на первом плане как предмет неоспоримой важности для умственного развития учащихся. В виду этой общепризнанности значения математики с формальной стороны мы и не будем на нем останавливаться, а займемся обратною стороной медали.

Дело в том, что высокая стоимость математики со стороны формальной всегда отодвигала на задний план ее материальную ценность — загораживала значение математики со стороны ее содержания. Если благодетелен сам процесс обучения, то не все ли равно, чему обучать! Рано умерший, но много сделавший немецкий математик Hankel, вооруженный глубоким знанием истории науки, так говорит по этому поводу, забывая свою обычную сдержанность[1]): «В том виде, в каком математика преподается в большинстве школ нашего обширного отечества (конечно, немецкого), она, бесспорно, суха, неимоверно суха, почти так же суха, как латинские склонения. Но как эти последние не составляют языкознания, так и школьные элементы математики не составляют математической науки. Математика только тогда получит широкое распространение в обществе и будет по достоинству оценена, когда в школе перестанут довольствоваться одной азбукой этой науки, когда откажутся от несчастной мысли, что математика в школе служит только одной формальной цели. Цель математики в ней самой, в ее содержании, упускать это из виду так же странно, как изучать историю лишь для укрепления памяти».

Это пренебрежение материальным значением математики, выдвигая на первый план методику предмета и отодвигая на второй ее содержание, внесло в это содержание такие аномалии, которые не мыслимы в других предметах учебного курса.

Что бы вы сказали, если бы в наших гимназиях проходили физику по трактату Аристотеля, географию — по Страбону, естественную историю — по Плинию, а, между тем, курс элементарной математики представляет целый ряд подобных анахронизмов. Наши учебники геометрии — лишь видоизменения евклидовых «*Элементов*», написанных за 300 лет до Р. Х., наконец, самый распространенный курс алгебры заканчивается «новейшими» открытиями начала XVII века.

Все, заканчивающие свои занятия математикой вместе с курсом средней школы, так и не заглядывают в великое здание науки, остаются в его подвалах, еще не свободных от традиционного мрака. Главная, центральная часть величественного здания, где в светлых переходах и смелых аркадах так много простора и света, остается на недосягаемой высоте, лежит вне программы, так называемой, общеобразовательной школы. Эта часть, под ничего не говорящим названием высшей математики, остается для громадного большинства образованных людей каким-то неведомым «черным континентом», отпугивающим предполагаемой недоступностью и сухостью своих обширных областей.

А, между тем, все, что делает математику основою современного естествознания, все, чем так быстро движется вперед современная техника, все то, что выпало на долю нашей науки в созидании и культуре XIX века — все это заключено в пределах, так называемой, высшей математики. Не удивительно, что давно уже раздаются голоса за включение ее элементов в программу средней школы, после предварительной очистки ее от бесполезного, а часто и вредного, педантического балласта[2].

---

[1]Hankel: «Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten». II Aufl. Tübingen, 1885, p. 6.

[2]Три года тому назад в математической комиссии при учебном отделе О. Р. Т. З. оживленные дебаты были вызваны предложением произвести в курсе математики нашей средней школы целый ряд сокращений с целью очистить его от веками накопившегося мертвого груза; сопоставление посильных выводов из двадцатилетней практики референта с весьма авторитетными мнениями еще более опытных товарищей по профессии обнаружило такое живое сочувствие к основной идее внесенного «билля о реформе», которое решительно опровергало ходячее мнение о косности, присущей педагогам. Еще не окончились прения (занявшие несколько заседаний) по отдельным пунктам реферата как в известном петербургском журнале «*Русская школа*» (1891 г., №2) на-

А пока этого не сделано, почти все образованное общество будет чувствовать себя чужим в созидаемом вокруг него мире науки и техники, будет только суеверно дивиться достигнутым результатам, не понимая их главной основы, не умея оценить положенного на них труда. Это непонимание ведет к шаткости понятий, неустановленности миросозерцания, и, по временам, уродливо проявляется в легкомысленном доверии общества к разным научным фальсификациям, вроде опровержений вращения земли и т.п. Страдают от такого положения вещей интересы науки. Те сухие выжимки ее, которые дает средняя школа под именем элементарной математики, не дают понятия о сущности и значении математики, как науки. Общеобразовательная школа не выполняет, в этом отношении, своей главной задачи — дать возможность понимать, хотя бы в общих чертах, направление, содержание и значение научной работы *во всех* главных отраслях знания. Лишь под условием пополнения этого пробела, молодой человек, вооруженный официальным аттестатом зрелости, обнаружит эту зрелость сознательным выбором той или иной специальности, притом руководясь не только смутным инстинктом, но и пониманием характера и цели предстоящей работы. А математика очень и очень нуждается в большом контингенте работников, чтобы удовлетворить предъявляемым ей требованиям. Быть может, никогда не чувствовалось такой настоятельной потребности разобраться в громадном материале все нарастающего экспериментального знания путем его теоретической, следовательно и математической, разработки, как в настоящее время — в конце доживаемого нами XIX века.

Коль скоро мы уясним себе, что составляет главный объект изучения в нашей науке, мы увидим, что и самое выделение «высшей» математики есть случайное, ни чем не оправдываемое, обусловленное лишь преходящими традициями, в силу которых различные главы науки распределяются между средней и высшей школой. Лишь отрывочность, исключительная отсталость среднеучебного курса математики породила эту своеобразную терминологию; мы не встречаем ее в учебных предметах, поставленных рациональнее: ведь никто не слыхал о высшей и низшей истории, элементарной и высшей географии. Это потому, что ни в одном учебном предмете средней школы не стараются, как в математике, искусственными урезками загородить учащегося от главного, существенного содержания науки.

Но раз это так, нам придется начать издалека, чтобы выяснить сущность математики и, в то же время, место и значение ее в общей сумме научного знания.

Биолог, чтобы ориентироваться в бесконечном разнообразии природы, в длинной веренице ее созданий, живых организмов, прибегает к классификации их, выделяя существенные признаки каждого из массы второстепенных. Так поступим и мы, чтобы расчленить великий мир науки на составляющие его отдельные отрасли знания — эти организмы, созданные мыслью человека. Классифицируя их, попытаемся определить, какое место в их ряду занимает математика, какой существенный признак выделяет ее из этого ряда и обусловливает ее значение, насколько оно

чал печататься ряд весьма интересных статей г. Шохор-Троцкого на ту же тему о «реформе». Почти полное совпадение их главных выводов и приведенных автором оснований с мнениями членов нашей комиссии обнаружило, что единодушие было не случайным и сложилось на почве более общих, уже назревших, потребностей, не раз обнаруживавшихся и раньше в спорадических указаниях нашей педагогической литературы.

определяется содержанием науки.

Правда, мир знания, как и мир природы, плохо поддается классификации, в этом расчленении великого целого и раскладывании его по занумерованным клеткам есть нечто искусственное, навязываемое нами в силу потребности, быть может, несовершенства нашего мышления. Возьмем же такую классификацию, которая, как и современные системы биологов, стремилась бы не разделить, а объединить классифицируемые объекты, как звенья цепи, связанные между собою постепенным видоизменением признаков. Мы воспользуемся несколько измененной, так сказать, модернизированной системой основателя позитивной философии. Эта школа теперь не в моде, но даже решительные из ее противников не откажут Конту в анализирующем таланте классификатора. В его «*Иерархии позитивных наук*[3]» видим, прежде всего, две главные группы: конкретных и абстрактных наук.

Первые берут объект изучения таким, каков он в действительности. Так минералогия имеет дело лишь с теми минералами, которые действительно встречаются в природе; история изучает явления жизни в той обстановке, при таких условиях, которые действительно имели место.

Абстрактные науки исследуют соотношения между свойствами изучаемого объекта и условиями его существования независимо от того, имеются ли эти условия и сам объект в действительном мире; здесь мы можем сами творить эти объекты изучения и ставить их в зависимость от тех или других, нами же скомбинированных, условий, с целью определить законы этой зависимости. Так химик, разложив минерал на составные части, изучает свойства полученных элементов при таких условиях опыта, которые, быть может, никогда не осуществляются в природе; он может предсказать свойства веществ еще не открытых, и сам факт открытия интересует химика как проверка его выводов. Так политическая экономия пользуется фактами экономической истории как материалом для вывода общих законов производства, распределения и потребления ценностей; как скоро эти законы достаточно обоснованы, они дают возможность предвидеть и изучать последствия произвольной комбинации экономических условий независимо от того, наблюдались ли они в жизни того или другого народа.

Отвлекаясь от того разнообразия условий, от той сложности обстановки, при которой изучаемый факт является в действительности, ставя явление в упрощенную нами обстановку, мы упрощаем и свойства самого явления; отсюда возможность тщательно изучить зависимость этих свойств от каждого от выбранных условий. Таким образом, конкретное явление, становясь объектом абстрактной науки, теряет свои частные, индивидуальные черты, т.е. мы изучаем идеализированный схематический тип явления, отвлеченный нами от его конкретных выражений, встречаемых в действительности.

Чем больше число условий, от которых мы отвлекаемся, чем малочисленнее будут факторы явления, тем больше шансов достичь конечной цели исследования — установить не только качественную, но и строго определенную количественную зависимость изучаемого объекта от определяющих его факторов; тогда получится возможность взвесить действие каждого из них отдельно и предвидеть с мате-

[3]Conte: «Cours de Philosophie positive». Paris, 1869. 3-e edition. T. I, 56.

матической точностью результаты данной комбинации условий. Отсюда — чем отвлеченнее наука, тем точнее ее выводы, тем надежнее ее предсказания.

Из всех абстрактных наук в наименьшей степени обладает этими свойствами та обширная группа, которая в системе Конта фигурирует под общим именем социальной физики. Исследуя законы жизни человека как члена общества, имея дело с явлениями наиболее сложными, она начинает собою ряд абстрактных наук, представляя первую, наименьшую, степень отвлечения.

Но изучение законов социальной жизни человека, очевидно, требует всестороннего знания его организации, предполагает предварительное изучение менее сложного ряда явлений — жизни человека как индивидуума. Сосредоточиваясь на них только — стало быть, отвлекаясь от всего, что связано с отношениями человека к другим людям, — мы переходим на вторую ступень отвлечения — антропологию (в смысле более широком, чем общепринятый, т.е. включая физиологию и психологию). Она представляет науку о законах жизни человека как известным образом организованного типа.

Отвлекаясь от тех особенностей, которые отличают человека в ряду других организмов, перейдя к общим законам жизни не человека только, а организованных живых существ вообще, мы будем на третьей ступени абстракции — биологии.

Явления жизни можно рассматривать или как некоторое частное видоизменение, или как особенно сложный агломерат процессов, подчиняющихся более общим законам взаимодействия тел и их частиц, которые составляют объект изучения физики и химии, образующих четвертую ступень абстракции.

Схематический тип, основа всякого явления, есть движение — движение известных масс под действием некоторых сил. Отвлекаясь от частных признаков тех или других сил, рассматриваемых в физике и химии, изучая общие законы движения под действием каких бы то ни было сил, мы вступаем в область механики — пятой ступени абстракции. Движение есть изменение протяжения с течением времени, так что элементарные понятия, с которыми имеет дело механика, суть протяжение, время, масса и сила. Из этих элементарных основ всякого явления отвлечемся от всех, кроме первой, будем изучать свойства протяжения. Законы пространственных соотношений составляют содержание шестой абстрактной науки — геометрии. Остается последний шаг на пути отвлечения, и мы поднимемся на последнюю ступень контовской схематической лестницы абстрактных наук.

С какими бы элементарными объектами изучения мы ни имели дело — будет ли это сила или протяжение, масса или время, — мы можем, отвлекаясь от различающих их признаков, выделить одно общее их свойство: это — свойство изменяться, увеличиваясь или уменьшаясь, свойство, в силу которого мы называем их величинами. Самая общая из абстрактных наук и будет наука о величинах — математика.

Как известно, это древнее название науки ничего не говорит о ее содержании; оно свидетельствует только о том глубоком уважении, которым она была окружена еще на своей родине, в древней Греции. Во времена Платона слово $\mu\alpha'\vartheta\eta\sigma\iota\varsigma$, $\mu\alpha\vartheta\eta'\mu\alpha$, означая учение, науку вообще, еще не имело современного специального значения; оно получило его в школе последователей Аристотеля, и мысль применять общий термин к частному случаю встретила общее признание; математика — это наука, наука по преимуществу, подобно тому, как Св. Писание есть библия, $\beta\iota\beta\lambda o\varsigma$ — книга из книг. Отсюда же и неопределенность значения. Древние понимали под математикой арифметику, геометрию, астрономию и музыку (квадривий средневековых школ); часто и в настоящее время причисляют к математике и геометрию, и механику и даже астрономию, следуя традиции, выразившейся во французском переводе $\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha\tau\iota\chi\eta$ — mathematiques во множественном числе. Конт, желая выделить, как предел научной абстракции, науку о величине вообще, называет ее mathematique — в единственном числе. В этом тесном смысле математики отвлеченных величин и мы будем понимать древнее название нашей науки; причин, заставляющих нас выделить из нее даже геометрию, мы еще раз коснемся в дальнейшем изложении.

В ряду семи абстрактных наук, если начать его с математики, как наиболее отвлеченной, и окончить социальною физикой Конта, каждая наука стоит в прямой зависимости от всех предыдущих и служит, в свою очередь, основой всех последующих менее абстрактных. Нельзя иметь дела с величинами массы, силы, времени, не зная свойств величин вообще, — другими словами, нельзя изучать механику, не зная математики, физиологию без физики и т.д. Выводы каждой науки этого ряда лишь постольку достоверны, поскольку они согласны с выводами более общей науки; они достигают полной достоверности, если основаны на математике, которой законы совпадают с законами самого мышления. В таком смысле прав был Конт, говоря, что в каждой отрасли учения о природе мы имеем науку постольку, поскольку встречаем в ней математику. В силу очевидной подчиненности каждого члена научного ряда всем членам более абстрактным (отсюда и контовская терминология — hiererchie des sciences) никто не отрицает, что усвоение математики должно предшествовать изучению всякой другой менее абстрактной науки; вопрос лишь в размерах математической подготовки, обыкновенно ограничивают ее одною элементарной математикой. Мы желали бы показать ошибочность этой школьной традиции, опираясь не на одни утилитарные соображения, а перенеся вопрос на более общую почву; богатство приложений для того или другого отдела математики есть дело времени, изменяющееся с каждым новым открытием и в области самой математики, и в сфере ее приложений; но, присматриваясь ближе к самой сущности содержания и метода математики, мы увидим, что, игнорируя, так называемую, высшую математику, мы игнорируем не только существенную часть, но и *всю* математику, как принципиальную основу мирознания.

Мы видели, что величина — объект изучения занимающей нас науки — является крайним продуктом абстракции, крайним в том смысле, что, отбрасывая процессом отвлечения все частные признаки, мы достигаем в понятии о величине понятия, почти лишенного всякого содержания, объекта, лишенного свойств, изучение которых могло бы составить науку. Это сказывалось всякий раз, как подходили к математике не со специальной технической точки зрения, а с более общей. Эйлер, более чем кто либо из геометров XVII в. интересовавшийся общими вопросами познания, чувствуя необходимость дать более содержательное, хотя бы и менее общее определение математики, сузил ее до «науки об измерении величин». Но непосредственное измерение есть дело просто механического искусства, а не науки. Необходимая поправка к определению Эйлера дана была еще за 100 лет до него Гоббсом, и, наконец, вместе с другими идеями этого философа более знакомого юристам, чем математикам, вошла в систему Конта. Основатель позитивизма определяет математику как науку о косвенном измерении величин, т.е. таком, при котором искомая величина определяется по данным (измеренным непосредственно), от которых она стоит в известной зависимости.

Но чтобы объединить все эти определения, стоит только вернуться к началу. Определяя математику, как науку о величине, мы должны только помнить, что это понятие — величина — характеризуется одним только свойством — изменяемости (способностью становиться больше или меньше). Отсюда мы точнее и ближе определим математику как *науку о законах изменения величин.* Это определение, как увидим, только по форме разнится от определения позитивиста Конта и совпадает с воззрениями метафизика Лейбница, которые он выразил в одной из первых своих работ[4], т.е. за 150 лет до Конта. Оно вскрывает нам и главный объект математики как науки. В самом деле, изменение величин, как совершенно произвольное, было бы процессом, лишенным всякой закономерности, если бы они изменялись независимо одна от другой. Поэтому основное понятие математики, представляющее центр тяжести всей науки, развитие которого выполняет все ее содержание, есть понятие о зависимости изменения одной величины от изменения другой.

Это понятие Джевсон[5] весьма удачно выражает терминами «изменяющиеся» и «изменяемые» величины; в математике им соответствуют «*аргумент* или независимое переменное» и его «*функция* или зависимое переменное».

Если одна величина стоит в функциональной зависимости от другой, то при изменении этой последней (независимого переменного) первая (т.е. функция) будет изменяться по известному закону; таким образом, каждое частное значение независимого переменного вполне определяет соответствующее значение функции этого переменного.

В этом смысле стоимость купленного товара есть функция двух независимых переменных — его количества и цены; площадь круга есть функция одного переменного — радиуса; величина дроби есть функция величины числителя и знаменателя, т.е. двух независимых переменных; расстояние, пройденное падающим телом, есть функция времени, протекшего от начала падения; сумма есть функция ее слагаемых и, наконец, всякое математическое выражение есть функция всех входящих в него переменных. Вообще, если для определения каждого частного значения функции (y) нужно знать значения нескольких переменных величин ($x, z, t...$), то y будет функцией многих независимых переменных и сам факт функциональной зависимости можно выразить так: $y = f(x, z, t...)$.

Возвращаясь к определению математики как науки о законах изменения величин, мы видим теперь, что ее можно рассматривать как учение о функциях. По существу это определение не разнится от контовского «косвенного измерения величин», ибо последнее предполагает функциональную зависимость искомой величины

[4]«De principio individui» (Baumann., l. c., t. II, 3).

[5]Джевсон: «Основы науки». Пер. Антоновича.

от данных, уже измеренных. Оно вполне исчерпывает содержание математики и достаточно широко, чтобы объять ее обычные подразделения[6], вместо того чтобы прилагаться лишь к высшей математике и служить, таким образом, для искусственного отделения ее от элементарной, которая, будто бы, имеет дело только с величинами постоянными.

Взгляд на математику с этой точки зрения открывает и основы того значения, которое она имеет в общей сумме научного знания, поскольку оно определяется содержанием науки.

Какое бы мировоззрение ни лежало в основе наших отношений в природе, сущность процесса мировой жизни выразится основным понятием — изменения. Будем ли мы понимать мир только как движение вещества, подобно материалистам, откажемся ли, как позитивисты, от всякого представления о нем, выходящего из рамок наблюдения и опыта, или с крайними идеалистами будем отрицать существование чего бы то ни было, кроме нашего «я», одно несомненно послужит исходной точкой всякого вывода, с любой точки зрения не будет подлежать спору: мы знаем, что нечто изменяется, ибо ощущаем изменения нашего «я» — элементарные раздражения, впечатления, слагающиеся в представления, понятия, их комбинации — все наше знание. В окружающей нас природе нет ничего, кроме движения больших или меньших масс, нет ни света, ни тепла, ни звуков, ни цветов; вся эта краса мира есть наше сознание, мы вносим ее в мир, претворяя в образы механические раздражения, получаемые извне. Нельзя указать, где кончается внешний мир и начинается мир наших представлений, так что, изучая природу, мы познаем и самих себя. Но мировой процесс и в макро- и в микрокосме есть процесс изменения. Изучение этого изменения необходимо сводится к исследованию законов, определяющих изменение одних его факторов в зависимости от других. Анализ всякого явления неизбежно приводит к одному основному общему субстрату — изменению по закону функциональной зависимости. Путем индукции открыть закон явления, выразить зависимость, лежащую в его основе в форме математической функции, и, таким образом, перенести исследование в область непогрешимой дедукции математического анализа — вот конечная цель, идеал всякого научного исследования. Чем абстрактнее наука, тем ближе она к этому идеалу; его уже достигли геометрия и механика, на пути к нему физика; для биологии же и, тем более, социальных наук он представляется отдаленною, едва различимою целью бесконечно длинной дороги прогресса. Правда, и в наименее абстрактных науках можно указать отделы, довольно далеко продвинувшиеся в этом направлении (физиология, статистика, политическая экономия и др.), но значение математики со стороны ее содержания определяется не большим или меньшим числом приложений, возможных при настоящем состоянии науки, а принципиально вытекает из знаменательного совпадения объекта изучения математики с существенной основой всякого явления. Не могу не привести, как патетическое выражение этой

[6]Оставляя в стороне высший анализ, который всегда понимался как учение о функциях, возможно было бы и отделы низшего анализа определить с этой точки зрения: алгебру — как теорию преобразования неявных функций в явные, общую арифметику — как теорию преобразования выражений явной функции.

мысли, известные слова Лапласа: «Если бы какой-нибудь ум знал все силы, в данный момент действующие в природе, и взаимное положение существ, из которых она состоит, и если бы притом он был достаточно всеобъемлющ, чтобы подвергнуть все эти данные математическому анализу, тогда такой ум постиг бы в одной формуле движения величайших мировых тел и мельчайшего атома; для него не было бы ничего неизвестного — будущее и прошедшее было бы перед его взором настоящим».

Чем ближе наука к поглощению ее математикой, тем большее число подробностей оставляет она в стороне, тем проще получаемый остов явления; математическое исследование дает схематическое изображение мирового процесса вместо пестрой картины природы — геометрический план мироздания.

Возвратимся теперь из области широких обобщений в тесный заколдованный круг школьной науки. Если вся математика есть, в сущности, учение о функциях, то ясно, что и элементарный курс должен группироваться вокруг основного понятия о функциональной зависимости. Чем раньше оно будет вызвано и осторожнее выращено в сознании учащихся, тем лучше. А сделать это гораздо легче, чем утаивать его по мудрым правилам школьной традиции. Оно как бы напрашивается на внимание учащихся с первых глав арифметики, когда приходится говорить об изменении результатов четырех действий, величины дроби в зависимости от величины числителя и знаменателя, вообще о прямой и обратной пропорциональности и т.д. Я не стану перечислять всех отделов обычного элементарного курса от арифметики до тригонометрии, которые были бы освещены с новой, лучшей, точки зрения введением понятия о функции; такая работа уместна лишь на страницах специальных изданий. Да, сверх того, главное дело не в том, что от этого много выиграет усвоение элементарного курса, а в том расширении кругозора, которое захватит в сознании будущего «образованного» человека главное центральное понятие математики, которому она обязана своим высоким положением в мире знания. Этот большой шаг вперед сломал бы лед школьного преподавания, под которым прозябает математика наших среднеучебных заведений, но он еще не раздвинул бы узких рамок программы.

В какую сторону подвинуть их, какая именно из теорий, так называемой, высшей математики должна стать драгоценною собственностью каждого образованного человека, сделавшись естественным заключением курса общеобразовательной школы? Попробуем ответить.

Математика трактует о законах изменения величин, обусловливаемых функциональной зависимостью между ними. Но чтобы сделать величину объектом математического изучения, чтоб иметь меру ее изменения, мы прибегаем к измерению; мы ищем отношение ее к однородной с нею величине, принятой за единицу, и счет этих величин, содержащихся в измеряемой ею величине, дает *число*, то символическое понятие, заменяющее величину, над которым и оперирует математика. Число не носит на себе никаких признаков величины, от измерения которой произошло, сохраняя только общее всем величинам свойство изменяемости.

Но будет ли изменение числа представлять точную картину процесса изменения величины, символизированное отвлечение которой оно представляет?

Все значение математики в изучении мирового процесса, очевидно, обусловлено удовлетворительным ответом на этот вопрос. Если процессы изменения числа и величин, наблюдаемых в природе, существенно разнородны, то наука, трактующая только о числе, не подвинет нас ни на шаг в познании природы; она займет изолированное положение среди мира науки.

Проследим же в самых общих чертах историю развития этого вопроса, такого высокого принципиального значения, что она почти совпадает с общей историей математики.

Через науку всей классической древности красною ниткой проходит воззрение, совершенно определенно выраженное Аристотелем; мы находим у него две категории величин, разделенных такой логической бездной, через которую тонко анализирующий ум эллина и не пытался искать перехода. Числа отнесены к категории величин *раздельных*(διωρισμε'νον). Длины линий и другие величины протяжения, времени — короче, все величины, наблюдаемые в природе, — соединены в другую категории величин — *сплошных* (συνεχε'ς). В своих «*Элементах*» Евклид все предложения, доказанные для величин геометрических — стало быть, сплошных, — считает необходимым доказывать снова, как скоро они прилагаются к числам, т.е. величинам раздельным, и обратно. Все, что известно об одной категории величин, не дает права делать никаких аналогичных заключений о величинах другой категории. Геометрия древних поэтому совершенно чужда всяким числовым соотношениям; она развивается путем артистически-тонкой работы диалектической логики, стройно развертываясь в ряд чисто конструктивных предложений. То, что мы условились называть собственно математикой, представляло собрание более или менее интересных предложений о свойствах чисел; αριϑμετικη, будучи изолирована от величин, даваемых наблюдением, не могла быть основою науки о природе.

Геометрию мы унаследовали целиком от греков, но наша арифметика и алгебра представляют создания другого, тоже родственного нам, арийского племени, проявившего интенсивную деятельность математической мысли как раз в эпоху, последовавшую за окончательным распадом античной культуры и заглохшую к исходу средних веков. Я говорю об индусах. Учение о числовых соотношениях было их излюбленной наукой; оно — их создание, от системы поместной десятичной нумерации до таких предложений теории чисел, которые в Европе были впервые доказаны лишь светилами математики конца XVIII века, от теории отрицательных чисел до решения квадратных уравнений. Геометрия стояла на заднем плане. Но напрасно было бы искать в математике индусов той точности определений, строгой раздельности понятий, той безукоризненной логики доказательств, которой мы и теперь учимся в античной геометрии. Их заменял род интуитивного вдохновения, принципы наглядности и симметрии, подкрепляемые изобретательностью богатой восточной фантазии. Понятно, что индусские математики смело прилагали предложения из области теории чисел к соотношениям между величинами протяжения. Та строгая раздельность понятий, перед которой останавливался ум эллина, дисциплинированный в школах софистов, совсем не существовала для богато одаренной, но все же детски наивной, восточной мысли. Плодом этого незаконно логического смешения понятий были, между прочим, начала приложения чистой математики к геометрии. Но основная трудность этим, конечно, не устранялась, а только обходилась.

Семитическое племя арабов, через которых Европа средних веков впервые познакомилась с обеими ветвями математики — древне-эллинской и индусской, — выказало беспримерную способность быстрого усвоения, ассимиляцию математических учений, но не внесло ничего нового в принципы науки.

Старое затруднение, задержавшее развитие античной науки, досталось разрешить новой европейской математике. Вся работа математической мысли с эпохи Возрождения и до начала XVIII века идет, главным образом, на устранение раскола между понятиями о числе и величине сплошной. Она выразилась в прогрессивном расширении понятия о числе и целым рядом подготовительных трудов, которые завершились изобретением понятия анализа бесконечно малых, радикально решившего задачу, завещанную Европе античной наукой, и сделавшего математику основой изучения природы.

Очертим же существенное содержание этой задачи и основную идею ее решения.

Величина называется сплошной, если, переходя от одного значения к другому, она пробегает весь ряд промежуточных значений; она обладает, иначе говоря, свойством изменяться непрерывно. Так, если на прямой неопределенной длины наметим отрезок, лежащий между двумя точками, то, отодвигая одну из этих точек от другого неподвижного конца отрезка, мы будем увеличивать его непрерывно до какой хотим определенной длины, в конце которой остановим движение точки; передвигаясь из первоначального положения до нового, конечная точка отрезка проходит через *все* промежуточные точки; длина отрезка изменяется непрерывно: это — величина сплошная.

Когда мы изменяем число, то простое самонаблюдение легко обнаруживает резкую особенность происходящего при этом психического процесса. Чтобы число 5 увеличить до 9, мы можем прибавить к 5 или сразу 4, или прибавить 4 раза по 1, или 8 раз по 1/2, увеличивать 5, придавая постепенно произвольные малые придатки, очень малые доли единицы, но мы не получим непрерывного изменения. Число может изменяться только скачками, бóльшими или меньшими, — число есть величина раздельная. Если бы изобразить процесс изменения хотя бы числа 5 графически, то к отрезку в 5 каких-нибудь единиц длины мы прилагали бы части этой единицы, пока не получили отрезок в 9 единиц длины; между концами первого и последнего отрезков получился бы ряд точек с промежутками, ничем не заполненными; расширяя понятие о числе — от целых и дробных переходя к иррациональным числам, — мы можем вдвинуть в эти промежутки новые точки, но это не сделает изменение числа непрерывным.

Число всегда изменяется скачками, но этот процесс изменения тем ближе подойдет к изменению величины сплошной, представит тем более полную его картину, чем меньше будут придаваемые нарастания; скачки приращения сгладятся окончательно, если сделаем их, наконец, бесконечно малыми. Тогда число теряет свою, как бы кристаллическую, структуру, становится пластичным, и мы получаем возможность в процессе его изменения иметь слепок, точную картину изменения любой сплошной величины. Поэтому счисление бесконечно малых есть та часть математики, которой она обязана своим значением, своим краеугольным положением в здании современной науки.

Его элементы и должны стать достоянием общеобразовательной школы.

Это, во-первых, снимает с понятия о числе, связывающее его условие неподвижности, уясняет его свойства как величины переменной, и дает об основном понятии математики гораздо более законченное представление, чем модные вылазки в область фиктивных числовых обобщений со всеми ее субтилитетами; во-вторых, освещает с надлежащей точки зрения исследование тех непрерывных изменений, которые и теперь, например в курсе физики, не обходятся без неизбежного, только замаскированного, понятия о бесконечно малых; в-третьих, выдвигает геометрию из заколдованного круга евклидовых построений, открывая заканчивающим курс общеобразовательной школы широкие перспективы аналитической геометрии, т.е. систематического обобщения сплошных геометрических и раздельных числовых величин. Из аналитической геометрии достаточно усвоить общие основные понятия о координатах и уравнениях геометрических мест, насколько они нужны для иллюстрации понятия о функции и основных элементах счисления бесконечно малых[7].

Вот те pia desideria, осуществление которых (конечно, не скорое по условиям и общественной, и школьной жизни) есть только вопрос времени, ибо с каждым новым успехом математики как науки, отодвигается от нее все дальше и дальше ее бледное школьное отражение. Уже и теперь более или менее ясно сознается потребность вывести математику школы из области анахронизмов, внести в элементы общего образования представление о ней как о науке нового времени и указать хоть исходные пункты тех путей, по которым движется современная наука в ее бесконечном развитии.

Не следует ли заранее подумать о том, как достигнуть цели, не увеличивая, а уменьшая шансы того переутомления, которое унылой тенью легло на наше школьное юношество, подумать — не одним специалистам, ибо это вопрос не математического, а общего образования. Чтобы его детальное обсуждение не было бесполезной работой, необходимо начать его на более общей почве. Когда в наше время висящего над школой подозрения в непроизводительной трате детских сил поднимается вопрос о расширении курса, необходимо санкционировать саму постановку этого вопроса аппеляцией к суду всего образованного общества. Если есть специальные задачи, решение которых должно его интересовать, так это, прежде всего, задачи школьной педагогики; ведь дети, ей вверяемые, — это достояние, равно драгоценное для всех. И не школе придется оплакивать растрату этого живого общественного капитала.

[7]Обсуждение сообщения, о котором говориться в примечании 2, закончилось предложением о дополнении среднеучебного курса указанными в тексте элементами высшей математики, причем был сообщен и набросок программы. И это предложение, в общем, не вызвало возражений. Решено было обсудить детали вопроса.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд готов сотрудничать с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд собирается поддерживать образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание Фонд постарается оказать образовательным инициативам в провинции, в виде как издательской поддержки, так и финансовой помощи. В планы Фонда входит издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Стоимость подписки на каждый из номеров 1 — 4 за 2000 год (включая стоимость пересылки) — 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому Вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала «Математическое образование», номер журнала за 1999 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском ОСБ №6901, к/с 30101810600000000342 БИК 044525342

Вы также можете заказать необходимое Вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3 — 4 (6 — 7) за 1998 г. и 2 — 3 (9 — 10) за 1999 г. — 40 руб.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.
Адрес страницы фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru
Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.