Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год четвертый

№ 2 (13)

Апрель - июнь 2000 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 2 (13), 2000 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 2 (13), апрель – июнь 2000 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2000 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.10.2000.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 6 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Ортоцентр треугольника и кубические кривые

А. Руинский

А. Руинский — преподаватель математики колледжа Тель Хай (Верхняя Галилея, Израиль), автор нашего журнала (№2-3 (9-10), 1999 г.) Статья продолжает тему взаимосвязей замечательных точек треугольника и кубических кривых, начатую в предыдущих номерах журнала статьями В. Прасолова и А. Мякишева.

Введение.

Ортоцентр треугольника (точка пересечения высот) — одна из популярнейших точек геометрии. Одно перечисление известных свойств, связанных с ним, заняло бы не одну страницу. Но одна область геометрии ортоцентра почти не исследована. Речь идет о геометрических местах точек, заметаемых ортоцентром треугольника.

В данной работе сделана попытка исследования различных геометрических мест, связанных с ортоцентром.

Постановка задачи.

Задача, рассматриваемая в статье, формулируется следующим образом:

Дана некоторая окружность. Пусть две вершины треугольника ABC находятся в покое, причем одна (C) произвольна, а другая (B) лежит на данной окружности. Третья вершина треугольника (A) движется по данной окружности. Определить линию, заметаемую ортоцентрами всех треугольников.

Несмотря на очевидную ограниченность задачи, ее результатом является интересное семейство кубических кривых. Эти кривые, которые (насколько известно автору) подробно не исследовались, имеют ряд интересных геометрических свойств, связывающих их с некоторыми известными линиями.

Глава 1. Прямая кубика ортоцентров.

Напомним определения и основные свойства двух известных кривых, имеющих отношение к нашему исследованию.

(A) Строфоида и циссоида.

(a) Прямая строфоида.

(1) Определение. Даны две взаимно перпендикулярные прямые m и l, пересекающиеся в точке C, и точка B, принадлежащая прямой m. Точка $P \in l$ движется по прямой l. Геометрическое место точек E и F, лежащих на прямой PB, и удовлетворяющих условию: $PE = PF = PC$, называется *прямой строфоидой.*

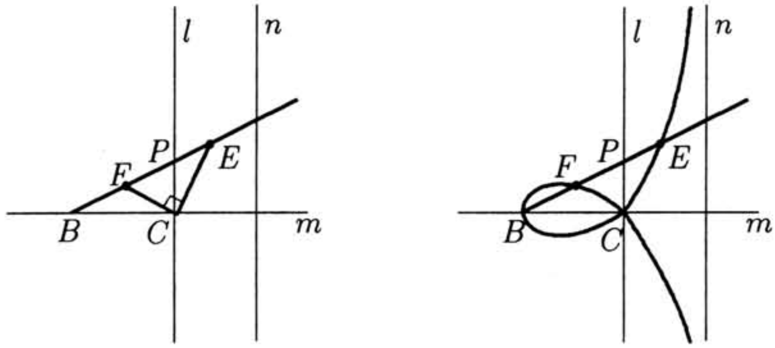


Рис. 1

(2) Основные понятия.
Точка B — *полюс.*
Точка C — *узловая.*
$a = BC$ — *параметр строфоиды (длина петли).*
Прямая l — *ведущая.*
Прямая m — *ось симметрии.*
Прямая n — *асимптота.*
E и F — *пара соответственных точек.*

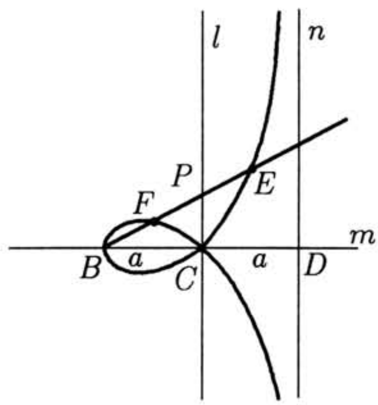


Рис. 2

(3) Уравнения. Если ось x совпадает с прямой m, а узловая точка C с началом координат, то декартово уравнение строфоиды:

$$y^2 = x^2 \cdot \frac{a + x}{a - x}$$

В полярной системе координат строфоида задается уравнением: $\rho = -\frac{a \cdot \cos 2\varphi}{\cos \varphi}$.

(б) Циссоида Диокла.

(1) Определение. Пусть C — точка окружности. Через точку B, диаметрально противоположную C проводим прямую $l \perp CB$. Через произвольную точку A окружности проводим прямую CA, пересекающую прямую l в точке G.

Геометрическое место точек E, удовлетворяющих условию $\vec{GE} = -\vec{CA}$, называется *циссоидой* (рис. 3).

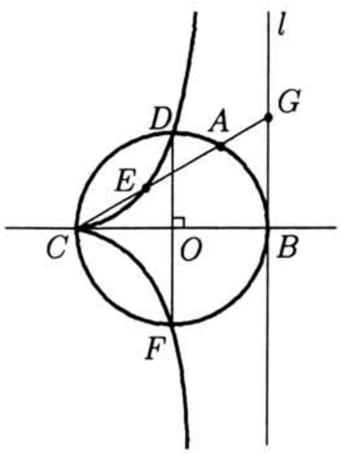


Рис. 3

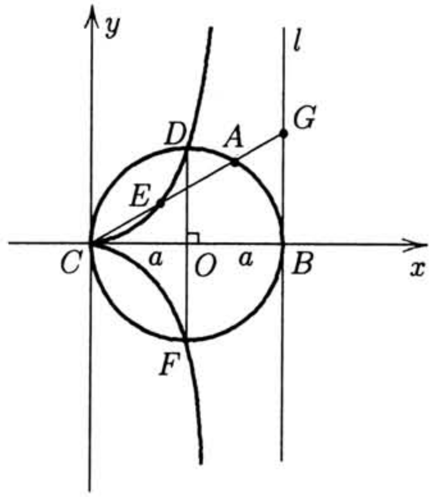


Рис. 4

(2) Основные понятия.

Точка C — *полюс (точка возврата)*.

Прямая l — *асимптота*.

Прямая BC — *ось симметрии*.

$a = OC = R$ — *параметр циссоиды* (рис. 4).

(3) Уравнения. Если ось x совпадает с прямой CB, а полюс C с началом координат, то декартово уравнение циссоиды:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

В полярной системе координат циссоида задается уравнением: $\rho = \frac{2a \cdot \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.

(Б) Прямая кубика ортоцентров.

Пусть вершина A треугольника ABC движется по окружности с центром O. Рассмотрим случай, при котором одна из покоящихся вершин треугольника (B) лежит на окружности, а другая (C) на прямой BC.

Теорема 1. Пусть точка A движется по канонической окружности $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$, а точки $B(-a; 0)$ и $C(c; 0)$ лежат на оси абсцисс. Тогда геометрическое место ортоцентров $\triangle ABC$ есть кривая третьей степени (кубика), уравнение которой

$$y^2 = (x - c)^2 \cdot \frac{a + x}{a - x}.$$

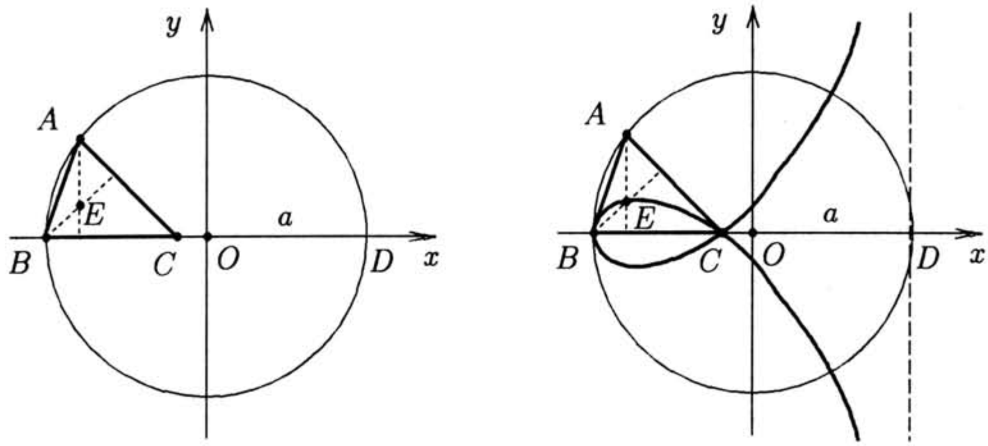


Рис. 5

Доказательство. (а) Пусть E — ортоцентр $\triangle ABC$. Тогда $x_E = x_A$. Угловой коэффициент прямой AC равен $m_{AC} = \frac{y_A}{x_A - c}$. Тогда коэффициент высоты, опущенной на AC — $m_{BE} = \frac{c - x_A}{y_A}$, а ее уравнение $y = \frac{c - x_A}{y_A}(x + a)$.

(б) Таким образом координаты точки E являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_A \\ y = \frac{c - x_A}{y_A}(x + a) \end{cases}, \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{cases} x_E = x_A \\ y_E = \frac{c - x_A}{y_A}(x_E + a) \end{cases}.$$

Выразим координаты точки A через координаты точки E.

$$\begin{cases} x_A = x_E \\ y_A = \frac{c - x_E}{y_E}(x_E + a) \end{cases}.$$

Поэтому $x_A^2 + y_A^2 = a^2 \Rightarrow x_E^2 + \frac{(c - x_E)^2}{y_E^2}(x_E + a)^2 = a^2$.

Простым преобразованием получим искомое уравнение:

$$y^2 = (x - c)^2 \cdot \frac{a + x}{a - x}$$

Теорема доказана.

Замечание. Для удобства изложения, будем называть кубику ортоцентров *прямой кубикой с полюсом B и узловой точкой C*.

(В) Частные случаи.

(а) Если $c = 0$, то кубика — *строфоида*, уравнение которой $y^2 = x^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$. Таким образом геометрическое место ортоцентров треугольников ABO — строфоида.

(б) Если $c = a$, то кубика — *окружность* $x^2 + y^2 = a^2$.

(в) Если $c = -a$, то уравнение кубики имеет вид $y^2 = \frac{(a+x)^3}{(a-x)}$. Тогда движением на a единиц вправо, получим: $y^2 = \frac{[a+(x-a)]^3}{a-(x-a)} = \frac{x^3}{2a-x}$. Последнее уравнение описывает *циссоиду Диокла*.

(г) Если $c = \frac{a}{2}$, получим: $y^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$. Перемещая узловую точку в начало координат, получаем уравнение: $y^2 = x^2 \cdot \frac{\frac{3}{2}a + x}{\frac{a}{2} - x}$, определяющее трисектрису Маклорена.

(Г) Элементарные свойства.

(а) Из уравнения $y^2 = (x-c)^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$ следует $\frac{a+x}{a-x} \geqslant 0 \Rightarrow -a \leqslant x < a$.

(б) Если $-a < c \leqslant a$, то кубика пересекает ось абсцисс в двух точках $x = -a$ и $x = c$.

Если $c > a$ или $c \leqslant -a$, то кубика пересекает ось абсцисс один раз (в точке $x = -a$).

Замечание. Интересно, что уравнению кубики $y^2 = (x-c)^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$ всегда удовлетворяют две точки оси абсцисс: $(-a; 0)$ и $(c; 0)$. Но с другой стороны очевидно, что при $c > a$ или $c \leqslant -a$ не существует $\triangle ABC$, ортоцентр которого — точка C. Т. е. уравнение $y^2 = (x-c)^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$ определяет кубику и точку $(c; 0)$, которая не обязательно лежит на кривой.

Интересно, что аналогичная проблема есть в уравнениях двух известных кривых четвертого порядка — *улитки Паскаля* и *конхоиды Никомеда*. Например, уравнение улитки Паскаля: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = c^2(x^2 + y^2)$. Точка $(0; 0)$, удовлетворяющая уравнению, не обязательно лежит на кривой.

В случае $c > a$ или $c \leqslant -a$ будем называть $(c; 0)$ *мнимой узловой точкой.*

(в3) У всех кубик, кроме окружности $x^2 + y^2 = a^2$, есть асимптота $x = a$.

(в4) Все кубики пересекают ось ординат в точках $(0; \pm c)$.

(Д) Форма кубики.

(а) $c < -a$. Мнимая узловая точка C, полюс B. Форма напоминает циссоиду. С удалением точки C от окружности , ветви «раскрываются»(рис. 6).

(б) $-a < c < 0$. Узловая точка C, полюс B. Форма напоминает строфоиду. Петля маленькая. С приближением точки C к центру окружности, петля увеличивается, а при приближении к полюсу, петля стягивается в точку (рис. 7).

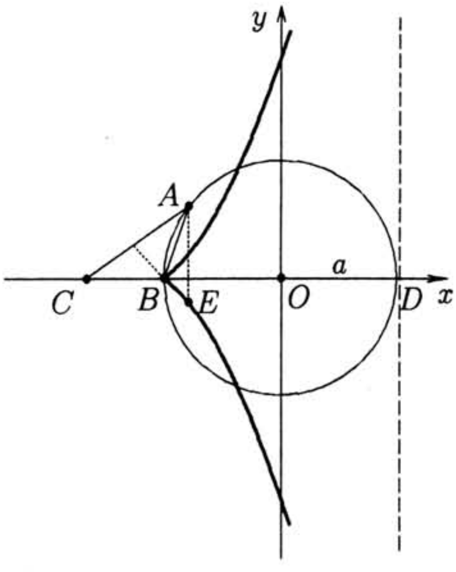


Рис. 6

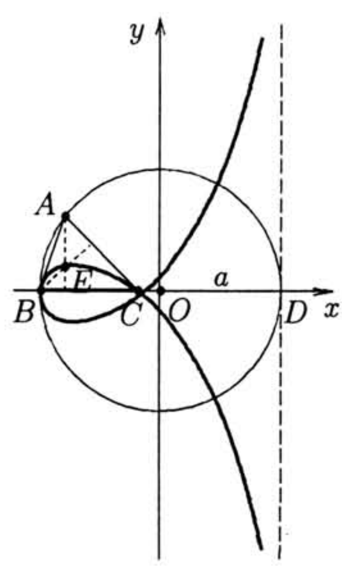


Рис. 7

(в) $0 < c < a$. Узловая точка C, полюс B. Форма напоминает строфоиду. Петля большая. С приближением точки C к центру окружности, петля уменьшается, а при приближении к асимптоте, петля стремится к окружности (рис. 8).

(г) $c > a$. Мнимая узловая точка C, полюс B. Кроме полюса B кубика не имеет общих точек с окружностью. С удалением точки C от окружности ветви «раскрываются»(рис. 9).

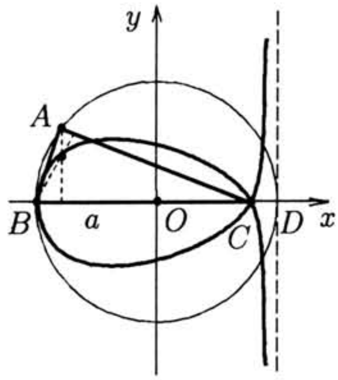


Рис. 8

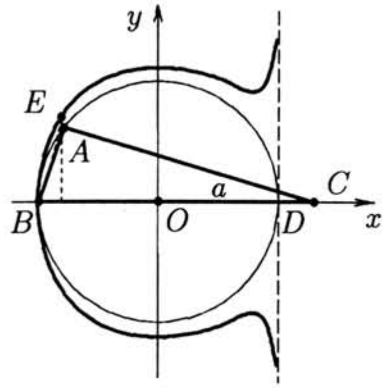


Рис. 9

(E) Геометрические свойства кубики.

(а) Соответственные точки первого рода.

Продлим сторону AC до пересечения с окружностью в точке A_1. Пусть F — ортоцентр треугольника A_1BC. Очевидно, что точки E и F лежат на одной кубике. Также очевидно, что прямая EF проходит через полюс B. Будем называть точки E и F *соответственными точками первого рода*.

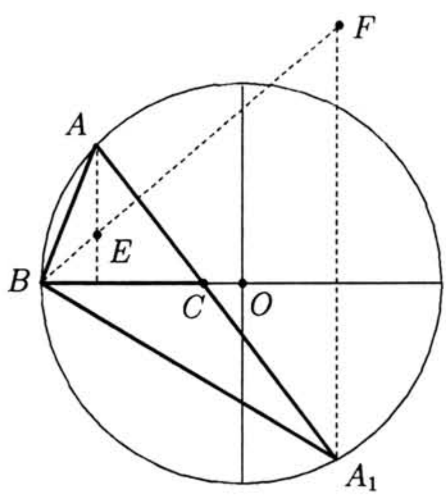


Рис. 10

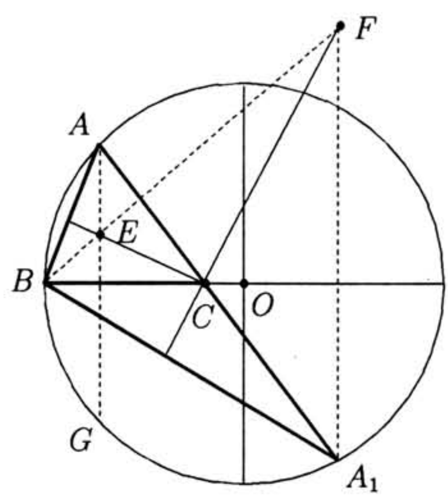


Рис. 11

Теорема 2. Произведение расстояний соответственных точек кубики от ее полюса — есть величина постоянная, равная квадрату отрезка между полюсом и узловой точкой.

Доказательство. Проведем CE до пересечения с AB. Т.к. E — ортоцентр $\triangle ABC$, то $\angle BAE = \angle BCE$. Аналогичным образом, соединяя C и F, получим

$\angle BA_1C = \angle BFC$. Продолжим высоту $\triangle ABC$, проведенную из вершины A до пересечения с окружностью в т. G. Т.к. $AG \perp BO$, то дуги AB и BG равны. Тогда $\angle BAE = \angle BA_1C$. Таким образом $\angle BCE = \angle BFC$. Понятно, что тогда $\triangle BCE \sim \sim \triangle BFC$. Поэтому $\frac{BE}{BC} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow BE \cdot BF = BC^2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Рассмотрим окружность с центром B и радиусом $BC = r$. Очевидно $BE \cdot BF = r^2$.

Таким образом, при инверсии кубики, относительно данной окружности кубика переходит в себя. Т.е. полюс кубики является ее инверсным центром.

Замечание 2. У циссоиды Диокла ($c = -a$), узловая точка совпадает с полюсом.

Таким образом, циссоида Диокла — единственная прямая кубика, у которой нет центра инверсии.

(б) Связь кубики с прямой строфоидой. Соответственные точки второго рода.

Пусть точка A_2 — диаметрально-противоположная точке A (рис. 12). И пусть G — ортоцентр треугольника A_2BC. Ясно, что точки E и G лежат на одной кубике. Будем называть точки E и G *соответственными точками второго рода*.

Очевидно, что для строфоиды и только для нее соответственные точки первого и второго рода совпадают.

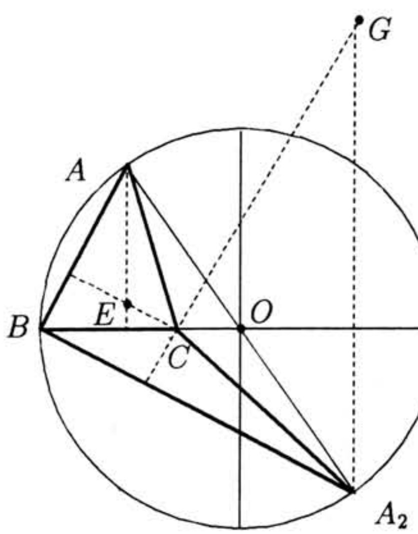


Рис. 12

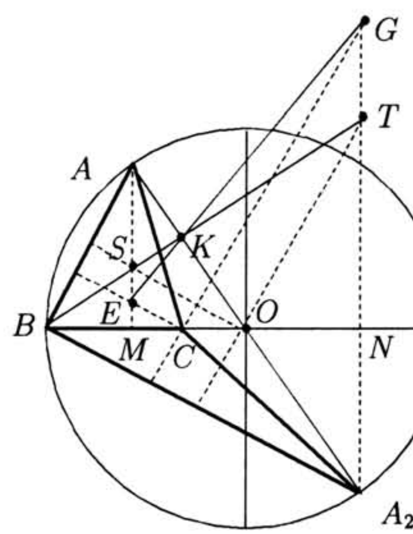


Рис. 13

Построим точки S и T — ортоцентры $\triangle AOB$ и $\triangle A_2OB$ (рис. 13). Понятно, что точки S и T лежат на строфоиде, узловая точка которой O, а полюс B.

Т.к. S и T — соответственные точки и первого и второго рода, то прямая ST проходит через полюс B. Поскольку $CE \| OS$ и $CG \| OT$, возможно другое определение прямой кубики.

Пусть C некоторая точка оси строфоиды, E и F ее соответственные точки. Из точек E и F опустим перпендикуляры на ось BD, а из точки C проведем прямые параллельные OE и OF, пересекающие указанные перпендикуляры в точках E_C и F_C. Понятно, что геометрическое место точек E_C и F_C определяет прямую кубику.

Таким образом кубика ортоцентров может определяться через строфоиду.

Для соответственных точек второго рода есть ряд интересных свойств. Приведем их без доказательства.

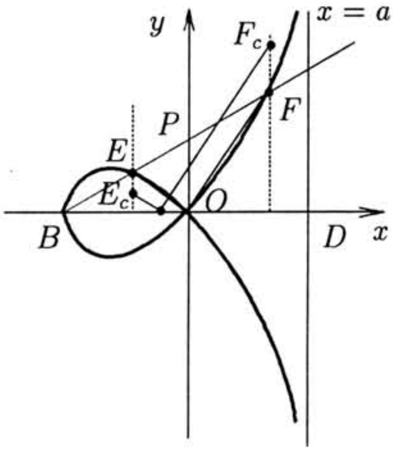


Рис. 14

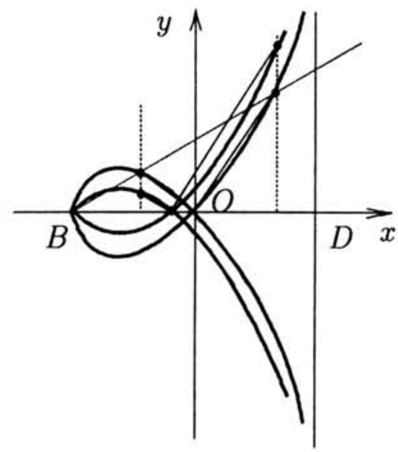


Рис. 15

Теорема 3. Произведение расстояний точек второго рода произвольной кубики от соответствующих точек строфоиды есть величина постоянная, равная квадрату расстояния между узловой точкой кубики и узловой точкой строфоиды, т.е. $SE \cdot TG = OC^2$.

Теорема 4. Прямые, соединяющие соответственные точки второго рода любой кубики, пересекаются в одной точке, лежащей на диаметре AA_2 и на окружности, диаметр которой BO (т. K на рис. 16).

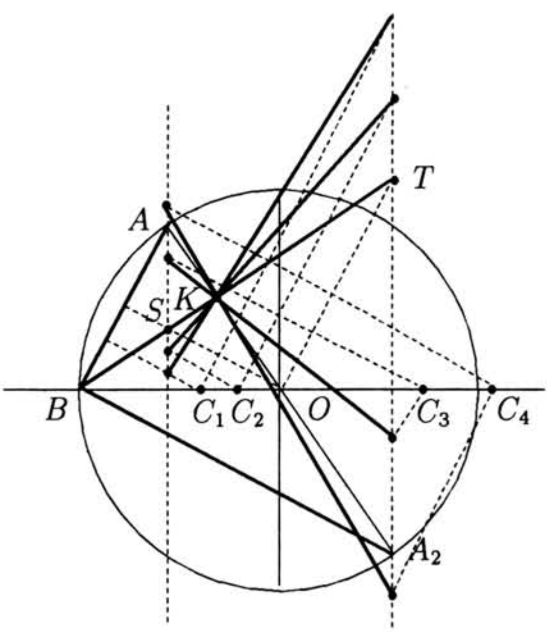


Рис. 16

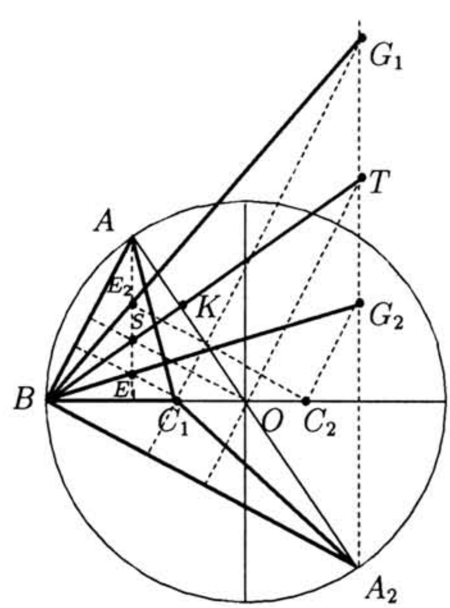


Рис. 17

Теорема 5. Пусть C_1 и C_2 — узловые точки двух кубик, симметричные относительно центра производящей окружности, а $E_1; G_1$ и $E_2; G_2$ — пары соответственных точек второго рода.

Тогда прямые E_1G_2 и E_2G_1 пересекаются в общем полюсе B (см. рис. 17).

Глава 2. Наклонные кубики ортоцентров.

(A) Наклонная строфоида.

(1) Определение. Определение *наклонной строфоиды* отличается от определения прямой строфоиды тем, что ведущая прямая (l) наклонена к оси x (см. рис. 18.).

(2) Основные свойства.

Существует бесконечно много видов наклонной строфоиды, получающихся при разных наклонах ведущей прямой.

Единственная асимптота, как и у прямой строфоиды, параллельна l и проходит через точку, симметричную полюсу B относительно начала координат (т. D).

Наклонная строфоида пересекает асимптоту в точке, лежащей на оси y (см. рис.).

(3) Уравнение в прямоугольной системе координат.

Если уравнение ведущей прямой $Ax + By = 0$ и параметр равен a, то искомое уравнение:

$$\left(x^2 + y^2\right) \cdot (Ax + By) + aA\left(x^2 - y^2\right) + 2aBxy = 0.$$

Очевидно , что в случае $B = 0$, получим $x\left(x^2 + y^2\right) + a\left(x^2 - y^2\right) = 0$, т.е. уравнение прямой строфоиды. Если $B \neq 0$, то $k = -\frac{A}{B}$ — угловой коэффициент ведущей ($y = kx$) и уравнение наклонной строфоиды приобретает вид:

$$\left(x^2 + y^2\right)(kx - y) + ka\left(x^2 - y^2\right) - 2axy = 0.$$

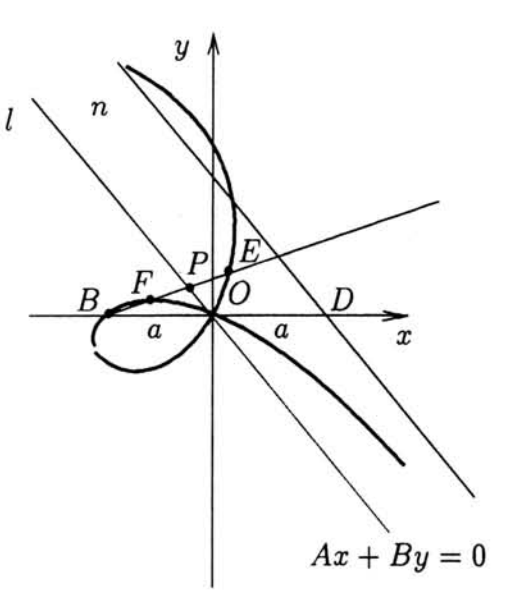


Рис. 18

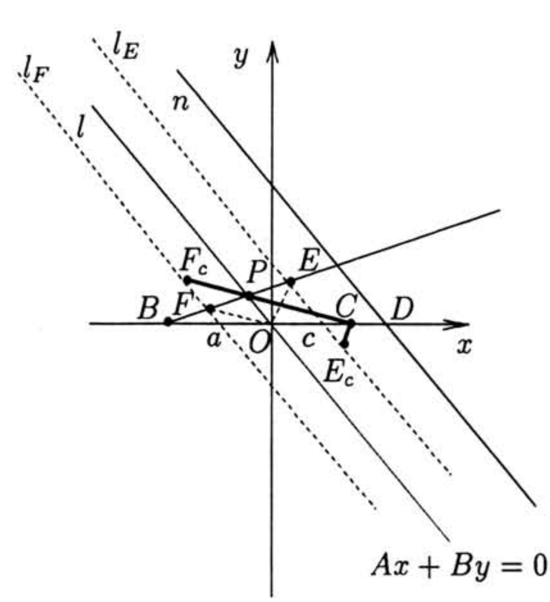


Рис. 19

(Б) Семейство наклонной строфоиды.

(1) Определим кривую с помощью наклонной строфоиды способом, аналогичным тому, которым определялась прямая кубика ортоцентров с помощью прямой строфоиды. Пусть C — некоторая точка прямой BO (ось x), E и F — соответственные точки строфоиды. Через точку C проведем прямые параллельные прямым OE и OF, а через E и F проведем прямые $l_E \| l_F \| l$ (см. рис. 19).

Точки пересечения прямых параллельных OE и OF с прямыми l_E и l_F (точки E_c и F_c) определяют кривую, задаваемую данной наклонной строфоидой и точкой C.

Понятно, что это определение обобщает определение прямой кубики через прямую строфоиду.

(2) Найдем уравнение полученной кривой.

(a) Пусть уравнение наклонной строфоиды:

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot(Ax+By)+aA\left(x^2-y^2\right)+2aBxy=0$$

и координаты точек: $C\,(c;0)$, $E\,(x_E;y_E)$ и $E_C\,(\tilde{x};\tilde{y})$.

Поскольку $CE_C \| OE$, уравнение прямой CE_C: $y=\frac{y_E}{x_E}\,(x-c)$.

С другой стороны уравнение прямой l_E: $A\,(x-x_E)+B\,(y-y_E)=0$.

Пересечением указанных прямых будет E_C и таким образом:

$$x_E\tilde{y}-y_E\tilde{x}+cy_E=0 \qquad \text{и} \qquad A\,(\tilde{x}-x_E)+B\,(\tilde{y}-y_E)=0.$$

Выражая x_E и y_E, и подставляя в уравнение строфоиды, получим уравнение искомой кривой:

$$\left((x-c)^2+y^2\right)\cdot(Ax+By)+aA\left((x-c)^2-y^2\right)+2aB\,(x-c)\,y=0.$$

При $B=0$, получается прямая кубика: $y^2=(x-c)^2\cdot\frac{a+x}{a-x}$.

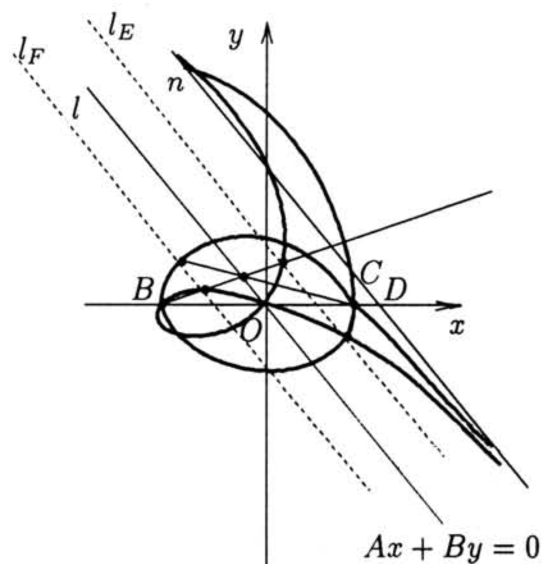


Рис. 20

Если $B \neq 0$ и $k = -\frac{A}{B}$, то уравнение искомой кривой:

$$\left((x-c)^2 + y^2\right)(kx - y) + ka\left((x-c)^2 - y^2\right) - 2a\,(x-c)\,y = 0.$$

Замечание. Можно показать, что общей асимптотой всех кубик данного семейства, является асимптота образующей их наклонной строфоиды.

(B) Наклонная строфоида как кубика ортоцентров.

Пусть вершина A треугольника ABC движется по окружности с центром O. Рассмотрим случай, при котором одна из покоящихся вершин треугольника (B) лежит на окружности, а другая (C) на окружности, построенной на отрезке BO как на диаметре. Понятно, что тогда $OC \perp BC$ и C — середина хорды, проходящей через B и C.

Покажем, что в этом случае, геометрическое место ортоцентров $\triangle ABC$ есть наклонная строфоида с узловой точкой C.

Теорема 6. Пусть точка A движется по окружности радиуса a, точка B лежит на окружности, а точка C — середина произвольной хорды BD. Тогда геометрическое место ортоцентров $\triangle ABC$ есть наклонная строфоида с узловой точкой C и ведущей прямой OC (O — центр окружности).

Доказательство. (а) Пусть E — ортоцентр $\triangle ABC$ (рис. 21). Тогда $AF \perp BC$ и $CG \perp BA$. Очевидно, что $AF \| OC$.

Произведем параллельный перенос точки B на вектор $\vec{OC}$ и соединим полученную точку B_1 с ортоцентром E. Точку пересечения B_1E и OC обозначим P. Понятно, что при движении ортоцентра E точка P будет перемещаться по прямой OC. Поэтому, если $PE = PC$, то точка E заметает строфоиду.

(б) Пусть E_1 — образ E при параллельном переносе на вектор $\vec{CO}$. Очевидно, что $E_1 \in AF$.

Проведем прямую E_1O, пересекающую сторону AB в точке M. Ясно, что ввиду параллельного переноса $E_1M \| EC$ и $E_1M \perp AB$. Но т.к. E_1M проходит через центр окружности, то $BM = MA$.

Тогда $\triangle AE_1B$ — равнобедренный и $\angle BE_1M = \angle AE_1M$. Отсюда $\angle PEC = \angle AEC = \angle PCE$ и $PE = PC$. Очевидно, что B_1 — полюс строфоиды и $B_1C = a$ — ее параметр. Теорема доказана.

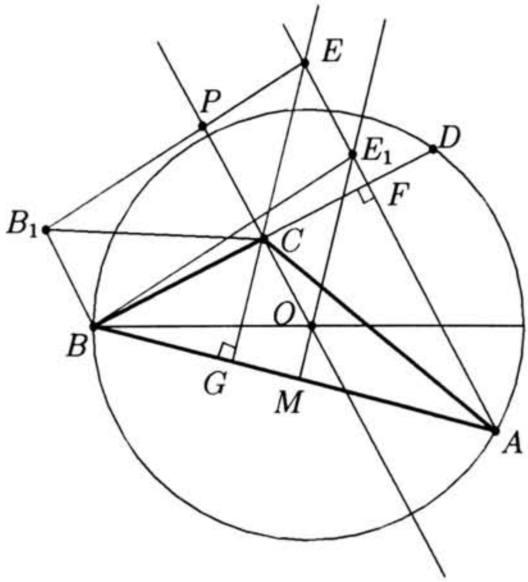


Рис. 21

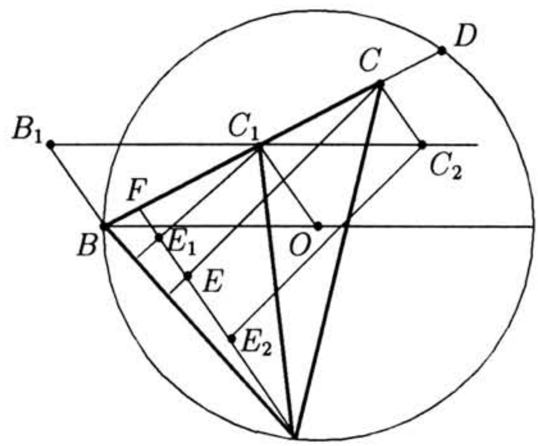


Рис. 22

(Г) Семейство наклонной строфоиды как кубика ортоцентров.

Теорема 7. Пусть точка A движется по окружности, точка B лежит на окружности, а точка C на хорде BD. Тогда геометрическое место ортоцентров $\triangle ABC$ есть наклонная кубика, происходящая от наклонной строфоиды.

Доказательство. Пусть E — ортоцентр $\triangle ABC$ (рис. 22). Проведем $OC_1 \perp BD$ и построим E_1 — ортоцентр $\triangle ABC_1$. Понятно, что: $CE \| C_1E_1$, $AF \| OC_1$ и E, $E_1 \in AF$.

По предыдущей теореме точка E_1 заметает строфоиду с полюсом B_1, узловой точкой C_1 и ведущей OC_1. Через точку проведем прямую, параллельную OC_1 и пересекающую B_1C_1 в точке C_2.

Пусть $E_2 \in AF$ — образ точки E при параллельном переносе на $\overrightarrow{CC_2}$. Ясно, что кривая, заметаемая E, конгруэнтна кривой, заметаемой E_2. Но кривая, заметаемая E_2, — кубика происходящая от наклонной строфоиды, заметаемой E_1. Теорема доказана.

Замечание. Две предыдущие теоремы решают проблему кубик, образуемых ортоцентрами треугольников, вершина C которых лежит на *секущей*, проходящей через вершину B.

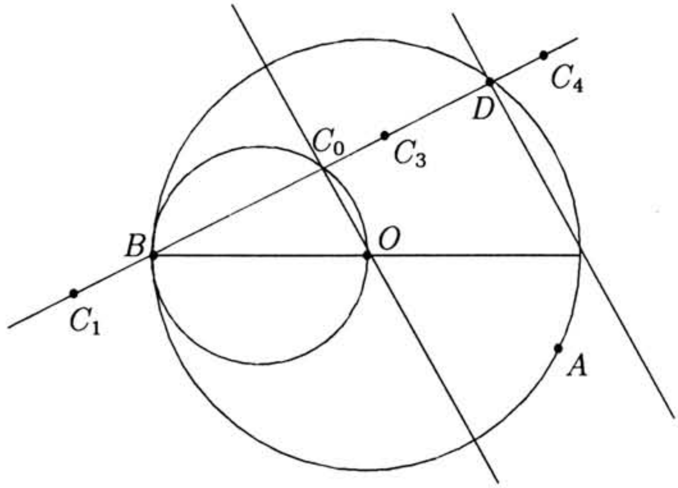


Рис. 23

Для точки C_0 — середины хорды BD кубика ортоцентров — наклонная строфоида. Для всех других точек секущей BD (C_1; C_2; C_3; ...), кроме точек B и D, кубики ортоцентров — производные данной строфоиды.

Ясно, что любая точка окружности с диаметром BO есть узловая точка строфоиды ортоцентров.

Таким образом, для любой точки плоскости (C), кроме точек *касательной* в точке B, кривая ортоцентров есть строфоида (прямая или наклонная) или кубика, производимая строфоидой.

Общее уравнение этих кубик:

$$\left((x-c)^2+y^2\right)\cdot(Ax+By)+aA\left((x-c)^2-y^2\right)+2aB\,(x-c)\,y=0.$$

Будем называть эти кривые — *кубиками ортоцентров первого рода* или *квазистрофоидами.*

Замечание. Понятно, что в тривиальном случае (C принадлежит производящей окружности), кривая ортоцентров — окружность.

(Д) Кубика ортоцентров второго рода.

(а) Уравнение. Пусть вершина C лежит на касательной к производящей окружности в точке B. Найдем уравнение кривой, заметаемой ортоцентрами треугольников ABC.

Для удобства дальнейшего изложения выберем систему координат так, чтобы ось x совпадала с касательной, а точка C с началом координат (рис. 24). Пусть $CB=b$ и радиус окружности $r=a$. Тогда уравнение вертикальной высоты $X=x_A$, а уравнение высоты, выходящей из C:

$$Y=\frac{b-x_A}{y_A}\cdot X.$$

Продолжая стандартным методом, получим уравнение

$$\left(x^2+y^2\right)(x-b)+2axy=0.$$

Это уравнение определяет кубику ортоцентров второго рода.

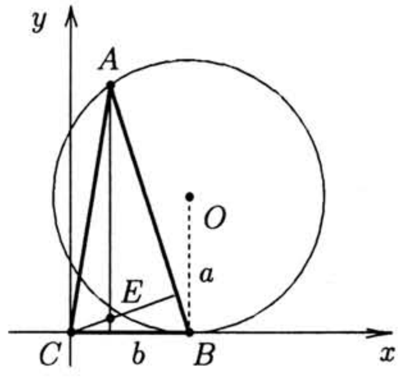


Рис. 24

(б) Асимптота. Выразим y в уравнении кубики и получим:

$$y = \frac{-ax \pm x\sqrt{a^2 - (x-b)^2}}{x-b}.$$

Очевидно, что у кубики вертикальная асимптота $x = b$. С другой стороны, из геометрических соображений очевидно, что $a - b \leqslant x \leqslant a + b$. Поэтому, других асимптот у кубики нет. Точка пересечения кубики с асимптотой — $B(b; 0)$.

(в) Форма кубики второго рода.

(в1) $b < a$. C — узловая точка. Петля увеличивается при сближении точек C и B (рис. 25).

(в2) $b = a$. C — точка возврата (рис. 26).

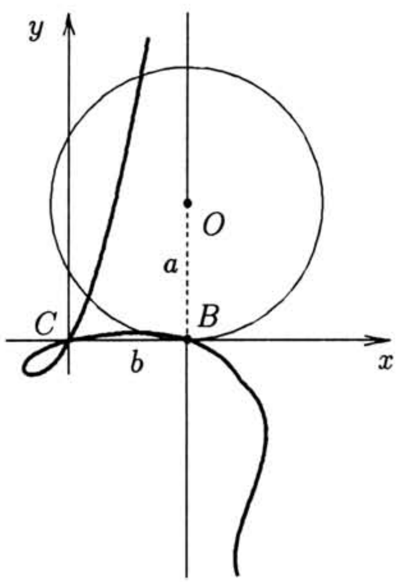


Рис. 25

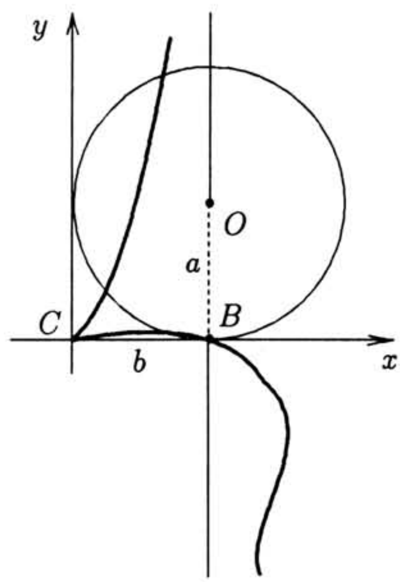


Рис. 26

(в3) $b > a$. C — узловая точка. Петли нет. С увеличением b кубика «распрямляется» (рис. 27).

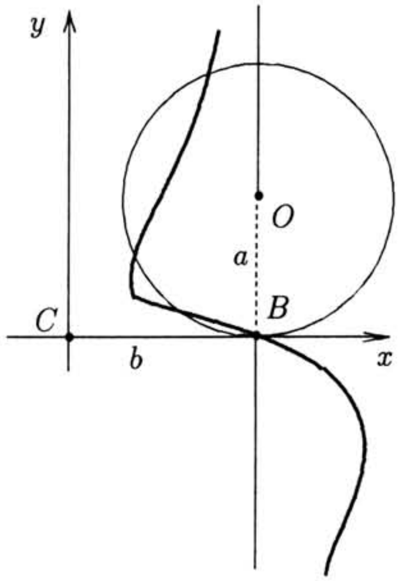


Рис. 27

(г) Чем отличаются кубики первого и второго рода. Понятно, что знакомство с кубиками ортоцентров второго рода завершает решение основной задачи, поскольку проанализированы все возможные положения точки C. В этой части исследования будут выявлены различия между кубиками ортоцентров первого и второго рода и будет показано, что кубика второго рода не принадлежит семейству строфоид.

(1) Точка пересечения с асимптотой. Напомним общее уравнение кубики первого рода:

$$\left((x-c)^2+y^2\right)\cdot(Ax+By)+aA\left((x-c)^2-y^2\right)+2aB\,(x-c)\,y=0.$$

Общей асимптотой кубик этого семейства является прямая:

$$A\,(x-a)+By=0.$$

Очевидно, что если $B=0$, получается прямая кубика: $y^2=(x-c)^2\cdot\frac{a+x}{a-x}$ и асимптота $x=a$. В этом случае кубика не пересекает асимптоту.

Если $B\neq 0$, то уравнение кубики:

$$\left((x-c)^2+y^2\right)(kx-y)+ka\left((x-c)^2-y^2\right)-2a\,(x-c)\,y=0,$$

а уравнение асимптоты: $y=k\,(x-a)$, где $k=-\frac{A}{B}$. Заметим, что $k\neq 0$, что ясно из геометрических соображений.

Покажем, что в этом случае, кубика пересекает асимптоту в единственной точке $(c;k\,(c-a))$. Действительно, подставляя $y=k\,(x-a)$ в уравнение кубики, получаем:

$$ka\left((x-c)^2+k^2\,(x-a)^2\right)+ka\left((x-c)^2-k^2\,(x-a)^2\right)-2ka\,(x-c)\,(x-a)=0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-c)^2-(x-c)\,(x-a)=0.$$

Ясно, что $x = c$ — единственное решение данного уравнения.

Поскольку $k \neq 0$, прямая соединяющая узловую точку кубики первого рода с ее точкой, лежащей на асимптоте ($x = c$), не перпендикулярна асимптоте.

С другой стороны, кубика второго рода $(x^2 + y^2)(x - b) + 2axy = 0$ пересекает свою асимптоту в точке $B(b; 0)$. При этом прямая соединяющая узловую точку кубики второго рода с ее точкой, лежащей на асимптоте ($x = a$), всегда перпендикулярна асимптоте.

(2) Уравнение наклонной кубики первого рода с узловой точкой в начале координат и вертикальной асимптотой. Перенесем начало координат в узловую точку кубики:

$$\left(x^2 + y^2\right)(kx - y + kc) + ka\left(x^2 - y^2\right) - 2axy = 0.$$

Произведем поворот кубики на угол: $\varphi = 90° - \alpha$, где $\operatorname{tg}\alpha = k$. Понятно, что тогда асимптота $y = k(x - a)$ станет вертикальной.

Ясно, что $\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ и $\cos\varphi = \sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$. Воспользуемся формулами поворота, выражающими «старые» координаты через «новые»

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\varphi + \tilde{y}\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(k\tilde{x} + \tilde{y}) \\ y = -\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}(-\tilde{x} + k\tilde{y}) \end{cases},$$

где φ — угол поворота.

После подстановки получим искомое уравнение:

$$x^2\left(x + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}(a+c)\right) + y^2\left(x - \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}(a-c)\right) + \frac{2a}{\sqrt{k^2+1}}xy = 0.$$

При $c = 0$, получается уравнение наклонной строфоиды:

$$x^2\left(x + \frac{ka}{\sqrt{k^2+1}}\right) + y^2\left(x - \frac{ka}{\sqrt{k^2+1}}\right) + \frac{2a}{\sqrt{k^2+1}}xy = 0.$$

Так как уравнение кубики второго рода с узловой точкой в начале координат и вертикальной асимптотой: $(x^2 + y^2)(x - b) + 2axy = 0$, то во всех случаях кубики первого и второго рода суть разные кривые (случай $a = 0$ не имеет смысла).

Глава 3. Связь кубик ортоцентров с параболой.

Одним из способов получения интересных геометрических мест точек является способ оснований перпендикуляров. Сущность его заключается и том, что из некоторой точки плоскости опускают перпендикуляры на все касательные некоторой кривой. Основания этих перпендикуляров заметают кривую. Примерами таких геометрических мест, описанными в литературе являются:

Улитка Паскаля — геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на касательные данной окружности.

Лемниската Бернулли — геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из центра равносторонней гиперболы на ее касательные.

Циссоида Диокла — геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из вершины параболы на ее касательные.

Докажем следующую теорему, для которой последний пример является частным случаем.

Теорема 8. Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из произвольной точки плоскости C (но не из фокуса параболы) на касательные к этой параболе, есть кубика ортоцентров, узловая точка которой — C.

Доказательство. (а) Осью параболы $y^2 = 2px$ является ось абсцисс, фокусом — точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, вершиной — начало координат, а директрисой — прямая $x = -\frac{p}{2}$.

Пусть $C(u; v)$ — некоторая точка плоскости. Уравнение касательной в произвольной точке $(x_1; y_1)$ параболы: $y_1 y = px + px_1$ или

$$y_1 y = px + \frac{y_1^2}{2}.$$

Тогда уравнение перпендикуляра, опущенного из C на касательную:

$$y - v = -\frac{y_1}{p}(x - u).$$

Пусть $E(x_E; y_E)$ — точка пересечения касательной и перпендикуляра, опущенного из C. Тогда $y_1 y_E = px_E + \frac{y_1^2}{2}$ и $y_E - v = -\frac{y_1}{p}(x_E - u)$. Исключив y_1, получим уравнение искомой кривой:

$$x(x-u)^2 + \frac{p}{2}(y-v)^2 + y(x-u)(y-v) = 0.$$

(б) Если $C\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ — фокус параболы, то $x\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + xy^2 = 0$. Это равенство возможно только при $x = 0$ и искомая линия — прямая.

(в) Если $v = 0$ (точка C — лежит на оси параболы), то:

$$x(x-u)^2 + y^2\left(x - u + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Перенесем начало координат в точку C и получим: $x^2(x+u) + y^2\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0$. Последнее уравнение определяет прямую кубику ортоцентров.

Известные кривые получаются при $u = 0$ — циссоида, $u = -\frac{p}{2}$ — прямая строфоида, $u = -\frac{3p}{2}$ — трисектриса Маклорена.

(г) Рассмотрим общее уравнение

$$x\,(x-u)^2 + \frac{p}{2}\,(y-v)^2 + y\,(x-u)\,(y-v) = 0$$

и перенесем начало координат в точку C. Получаем: $x^2\,(x+u) + \frac{p}{2}y^2 + xy\,(y+v) = 0$ или

$$x^2\,(x+u) + y^2\left(x + \frac{p}{2}\right) + vxy = 0.$$

(г1) Если $u \neq \frac{p}{2}$, то уравнение определяет общую кубику ортоцентров первого рода.

(г2) Если $u = -\frac{p}{2}$, то $x^2\left(x - \frac{p}{2}\right) + y^2\left(x + \frac{p}{2}\right) + vxy = 0$ — строфоида, в общем случае — наклонная.

(г3) Если $u = \frac{p}{2}$, то $\left(x^2+y^2\right)\left(x + \frac{p}{2}\right) + vxy = 0$. Уравнение определяет кубику ортоцентров второго рода.

Таким образом, для точек фокальной хорды параболы (кроме самого фокуса) и только для них искомое геометрическое место — кубику ортоцентров второго рода.

(д) Асимптота всех полученных кубик в системе координат, перенесенной в узловую точку $x = -\frac{p}{2}$. Таким образом, асимптота перпендикулярна оси параболы и отстоит от точки C на $\frac{p}{2}$ влево.

Глава 4. Инверсии кубики ортоцентров.

В этой главе мы познакомимся с интересными свойствами, связывающими кубику ортоцентров с кониками. Эти свойства частично изложены в моей статье «Инверсии равносторонней гиперболы» (Математическое просвещение, выпуск 4, 2000 г.). В процессе изложения мы будем часто пользоваться свойствами инверсии из данной статьи.

(а) Формулы преобразования координат. Пусть $x^2 + y^2 = r^2$ — окружность инверсии и $I_r^O\,(x;y) = (\tilde{x};\tilde{y})$. Тогда $\tilde{x} = \frac{xr^2}{x^2+y^2}$, $\tilde{y} = \frac{yr^2}{x^2+y^2}$. «Старые» координаты преобразуются в «новые» аналогичным образом. Поскольку в данной статье нас будут интересовать только формы инверсных образов, то не нарушая общности можно принять $r = 1$ и $\tilde{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\tilde{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$.

(б) Инверсные образы эллипса, гиперболы и параболы.

Теорема 9. Инверсный образ эллипса, гиперболы и параболы относительно любой окружности, центр которой лежит на данной конике, есть кубика ортоцентров.

Доказательство. Рассмотрим уравнение произвольной коники, проходящей через начало координат, и повернутой так, чтобы касательная в начале координат была перпендикулярна оси x (т.е. совпадала с осью y). Общий вид этого уравнения: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx = 0$ (свободный член и коэффициент при y равны нулю).

В справедливости этого легко убедиться, дифференцируя неявную функцию $f\,(x;y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx = 0$.

Произведем инверсию данной кривой относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$. Уравнение образа:

$$\frac{Ax^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{Bxy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{Cy^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{Dx}{x^2+y^2} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$Dx\left(x^2 + y^2\right) + Ax^2 + Cy^2 + Bxy = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x^2\left(Dx + A\right) + y^2\left(Dx + C\right) + Bxy = 0.$$

Полученное уравнение определяет кубику первого рода (при $A \neq C$) и кубику второго рода (при $A = C$). Поскольку, для любой точки коники уравнение приводимо к указанному виду, теорема доказана.

Замечание 1. Так как полученные уравнения инверсного образа задает кубику с вертикальной асимптотой и узловой точкой (действительной, мнимой или точкой возврата в начале координат, то выполняется следующее утверждение:

Узловая точка кубики лежит на ее прообразе в центре окружности инверсии, асимптота кубики параллельна касательной коники в центре окружности инверсии.

Замечание 2. В случаях когда коника — окружность или пара прямых инверсным образом будет: окружность или пара прямых или кубическая форма, задающая объединение прямой и окружности.

Замечание 3. Рассмотрим подробнее случай, при котором образ коники — кубика второго рода. Если $A = C$, то уравнение прообраза:

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bxy + Dx = 0.$$

Известно, что поворот коники, приводящий ее к форме, не содержащей xy, ориентирует оси эллипса, гиперболы и параболы параллельно осям координат. Несложно убедиться, что для формы: $A\left(x^2 + y^2\right) + Bxy + Dx = 0$ поворот следует произвести на $45°$. Но тогда ясно, что в точке коники, относительно которой инверсный образ есть кубика второго рода, касательная наклонена к оси (или осям) коники под углом $45°$.

Интересно, что у любого эллипса таких точек — четыре, у параболы — две, а у гиперболы либо четыре, либо нет вовсе. Последнее объясняется тем, что углы наклона касательных гиперболы к ее действительной оси больше угла наклона ее асимптот. Поэтому среди инверсных образов равносторонней гиперболы, относительно центров, расположенных на ней, нет кубик второго рода (в упомянутой статье доказано, что инверсные образы равносторонней гиперболы — строфоиды). Нет кубик второго рода и среди инверсных образов гипербол, действительная ось которых меньше мнимой.

Замечание 4. Приведем без доказательства следующую уточняющую теорему:

Теорема 10. Инверсный образ эллипса относительно любой окружности, центр которой лежит на данном эллипсе, есть кубика ортоцентров с мнимой узловой точкой (без петли), инверсный образ параболы — кубика ортоцентров с точкой возврата, инверсный образ гиперболы — кубика ортоцентров с действительной узловой точкой (с петлей).

Замечание. Интересно, что инверсный образ коники относительно ее фокуса есть улитка Паскаля. В этом случае наблюдается аналогичная картина: образ эллипса — улитка Паскаля без петли, параболы — улитка Паскаля с точкой возврата (кардиоида), гиперболы — улитка Паскаля с петлей.

(в) Инверсные центры кубики ортоцентров.

Определение. Линию Ф будем называть *инверсно-симметричной*, если существует инверсия, переводящая линию Ф в себя. Центр такой инверсии будем называть *инверсным центром линии.*

На основании свойств инверсии из уже упоминавшейся статьи легко обосновать следующие утверждения:

1. Любая кубика ортоцентров, кроме циссоиды Диокла, инверсно-симметрична.
2. У кубик с точкой возврата, кроме циссоиды Диокла, есть один и только один центр инверсии.
3. У прямых кубик с узловой точкой (действительной или мнимой) есть один и только один центр инверсии.
4. У наклонных кубик с узловой точкой (действительной или мнимой) есть два центра инверсии.

(г) Заключительная теорема.

Теорема 11. На любой линии, инверсной эллипсу, гиперболе или параболе, лежит одна и только одна точка, являющаяся центром инверсий, переводящих данную линию обратно в эллипс, гиперболу или параболу.

Все остальные инверсии, центры которых лежат на линии, переводят последнюю в кубики ортоцентров.

Эта теорема является обобщением теоремы 7 из статьи «Инверсии равносторонней гиперболы».

Теорема о четырехвершиннике

Н. С. Астапов

В статье изучается общий четырехвершинник, частными случаями которого являются треугольник, а также плоский и пространственный четырехугольники. Доказана основная теорема о связи длин сторон, величин плоских углов и величины двугранного угла четырехвершинника. Следствиями этой теоремы являются многие замечательные теоремы о треугольнике и четырехугольнике.

Сначала напомним определение четырехвершинника, о некоторых изумительных свойствах которого можно прочитать в ([1], с. 317; [2]).

Определение. Назовем четырехвершинником произвольные четыре точки пространства, последовательно соединенные отрезками.

Четырехвершинник может быть пространственным четырехугольником (частью "каркаса" тетраэдра), четырехугольником с самопересечением сторон и вырожденным, часть или все вершины которого совпадают или лежат на одной прямой. Четырехвершинник — естественное обобщение понятия четырехугольника: произвольный выпуклый и вогнутый четырехугольники являются плоскими четырехвершинниками. Поэтому утверждения, верные для любых четырехвершинников справедливы также для любых четырехугольников и треугольников (вырожденных четырехвершинников). Отрезки, соединяющие соседние вершины четырехвершинника назовем сторонами, а соединяющие несоседние — диагоналями. Далее будем считать, что четырехвершинник ABCD задан порядком обхода своих вершин A, B, C, D, причем $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = m$, $BD = n$, $\angle BAD = \angle A$, $\angle BCD = \angle C$, $\angle ADB = \delta_1$, $\angle BDC = \delta_2$, $\angle ADC = \delta$ и $\hat{n}$ — величина двугранного угла при ребре n.

Теперь сформулируем и докажем теорему, следствиями которой являются теорема Птолемея, формула Герона и много других интересных утверждений.

Теорема о четырехвершиннике. *Для любого четырехвершинника справедливо равенство*

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd(\cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\hat{n}). \qquad (1)$$

Доказательство. Возможны следующие случаи взаимного расположения вершин в пространстве.

1) Часть вершин совпадает. В этом случае справедливость равенства (1) проверяется подстановкой длин сторон и величин углов непосредственно в равенство. Например, рассмотрим четырехвершинник, у которого совпадают ровно две вершины A и C (такой четырехвершинник пригодится при выводе формулы Герона). Подставляя $b = a$, $d = c$, $m = 0$, $\angle A = \angle C$ и $\hat{n} = 0$ в равенство (1), убеждаемся

в его справедливости. Если величины углов не определены, то их можно выбрать (доопределить) соответствующим образом, например, если $a = b = c = d = 0$, то можно считать $\angle A = \angle C = \hat{n} = 0$ или $\angle A = \angle C = \pi/2$, $\hat{n} = \pi$. Убедитесь самостоятельно в справедливости равенства (1) для других случаев вырожденных четырехвершинников.

2) Все вершины различны. Запишем аналог теоремы косинусов для трехгранного угла ([3], с. 131) при вершине D

$$\cos\delta - \cos\delta_1 \cos\delta_2 = \sin\delta_1 \sin\delta_2 \cos\hat{n}. \tag{2}$$

Заметим, что формула (2) справедлива для любого расположения лучей DA, DB и DC в пространстве. Так, если все три луча лежат в одной плоскости, то есть $\cos\hat{n} = \pm 1$, то формула (2) превращается в формулу сложения для косинусов. Пользуясь теоремой косинусов для левой части и теоремой синусов для правой части равенства (2), получим

$$\frac{c^2 + d^2 - m^2}{2cd} - \frac{n^2 + d^2 - a^2}{2nd} \cdot \frac{n^2 + c^2 - b^2}{2nc} = \frac{ab}{n^2} \sin\angle A \sin\angle C \cos\hat{n}$$

или

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2m^2n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) - a^2b^2 - c^2d^2 =$$
$$= 4abcd \sin\angle A \sin\angle C \cos\hat{n}. \tag{3}$$

Так как $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle C$, то $n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2) = a^2b^2+c^2d^2+a^2c^2+b^2d^2-4abcd\cos\angle A\cos\angle C$. Подставив это выражение в (3), после сокращений имеем (1). Отметим, что равенство (3) тоже справедливо для любых четырехвершинников.

Следствие 1. Любому двугранному углу четырехвершинника (а таких углов шесть — по числу сторон и диагоналей) соответствует равенство, аналогичное равенству (1), например, для любого четырехвершинника справедливо равенство

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd(\cos\angle B\cos\angle D + \sin\angle B \sin\angle D\cos\hat{m}), \tag{4}$$

где углы B и D опираются на диагональ m.

Следствие 2 (теорема Бретшнейдера или теорема косинусов для четырехугольника). *Для любого четырехугольника (в том числе и невыпуклого) с последовательными сторонами a, b, c, d и диагоналями m и n справедливо равенство*

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C), \tag{5}$$

где $\angle A$ и $\angle C$ — величины двух противоположных углов.

Доказательство. По крайней мере один из углов $\hat{n}$ или $\hat{m}$ равен π (проверьте!). Если $\hat{n} = \pi$, то утверждение этой теоремы следует сразу из формулы (1). Если $\hat{m} = \pi$, то (смотрите следствие 1) справедливо равенство $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle B + \angle D)$, где углы B и D опираются на диагональ m и являются противоположными углами четырехугольника.

Другое доказательство теоремы Бретшнейдера и некоторые следствия из нее (теорема Птолемея, теорема Помпею) можно найти в [4, стр. 40]. Заметим, что обратная теорема Птолемея для плоскости (если $mn = ac + bd$, то четырехугольник $ABCD$ — выпуклый и вписанный или все точки A, B, C, D лежат на одной прямой) и неравенство Птолемея для плоскости (для любых четырех точек плоскости справедливо неравенство $mn \leqslant ac + bd$) также являются следствиями теоремы Бретшнейдера.

Следствие 3 (обратная теорема Птолемея). *Если длины сторон и диагоналей четырехвершинника удовлетворяют равенству $mn = ac + bd$, то или все вершины лежат на одной прямой или четырехвершинник является выпуклым четырехугольником, около которого можно описать окружность.*

Доказательство. Вычитая из равенства $(mn)^2 = (ac + bd)^2$ равенство (1), получим $2abcd(1 + \cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\hat{n}) = 0$ или (случай равенства нулю хотя бы одной из сторон четырехвершинника рассмотрите самостоятельно)

$$1 + \cos(\angle A + \angle C) = -\sin\angle A\sin\angle C(1 + \cos\hat{n}).$$

Левая часть этого равенства неотрицательна, а правая неположительна, так как $\sin\angle A \geqslant 0$ и $\sin\angle C \geqslant 0$. Следовательно, $\angle A + \angle C = \pi$ и $\sin\angle A = 0$ или $\sin\angle C = 0$, то есть все вершины лежат на одной прямой. Если же $\cos\hat{n} = -1$, то все вершины лежат в одной плоскости, причем вершины A и C лежат по разные стороны от прямой BD. Учитывая равенство $\angle A + \angle C = \pi$, заключаем, что $ABCD$ — выпуклый вписанный четырехугольник.

Упражнение 1. Докажите, что для любого четырехвершинника справедливо неравенство

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A - \angle C) \leqslant m^2n^2 \leqslant a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C).$$

Упражнение 2. Докажите, что четырехвершинник является плоским тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух равенств

а) $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C)$ или

б) $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A - \angle C)$.

Причем в случае а) точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD ($\hat{n} = \pi$) или обе лежат на BD, а в случае б) точки A и C лежат по одну сторону от прямой BD ($\hat{n} = 0$) или обе лежат на BD.

Упражнение 3 (неравенство Птолемея). Докажите, что для любого четырехвершинника справедливо неравенство $|ac - bd| \leqslant mn \leqslant ac + bd$, причем равенство достигается в том и только в том случае, если все вершины лежат на одной прямой или на одной окружности. Таким образом, из отрезков ac, bd и mn всегда можно построить треугольник (возможно, вырожденный), причем противолежащий стороне mn угол φ вычисляется, благодаря (1), по формуле $\cos\varphi = \cos\angle A\cos\angle C + \sin\angle A\sin\angle C\cos\hat{n}$. Сравните полученное решение с чисто геометрическим решением задачи 159 ([5], стр. 286).

Упражнение 4. Докажите, что равенство (1) можно записать, не используя синусов, в виде $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd[\cos\angle A\cos\angle C(1 + \cos\hat{n}) - \cos(\angle A +$

$\angle C)\cos\hat{n}]$, а равенство (3) — в виде

$$a^2c^2+b^2d^2-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)-a^2b^2-c^2d^2=16S_{adn}S_{bcn}\cos\hat{n}.$$

Упражнение 5. Докажите, что если в четырехвершиннике $\hat{n}=\hat{m}=90^\circ$, то справедливы равенства

а) $\cos\angle A\cos\angle C=\cos\angle B\cos\angle D$,

б) $(a^2+d^2-n^2)(b^2+c^2-n^2)=(a^2+b^2-m^2)(c^2+d^2-m^2)$,

в) $(a^2-c^2)(b^2-d^2)=(n^2-m^2)(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2-m^2)=4l^2(n^2-m^2)$,

где по теореме Эйлера l — расстояние между серединами диагоналей m и n ([1], с.333, [6], с. 12).

Так как для любого плоского четырехвершинника выполняется одно из двух равенств $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle A\pm\angle C)$ и, кроме того, одно из двух других равенств $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(\angle B\pm\angle D)$, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. *Для любого плоского четырехвершинника, ни одна из сторон которого не равна нулю, выполняется равенство* $\cos(\angle A\pm\angle C)=$ $=\cos(\angle B\pm\angle D)$, *где надо выбрать один из двух знаков.*

Упражнение 6. *Докажите, что для такого плоского четырехвершинника знаки выбираются по правилу:*

оба $+\iff ABCD$ — *выпуклый четырехугольник;*

разные знаки $\iff ABCD$ — *невыпуклый четырехугольник без самопересечения сторон;*

оба $-\iff$ *четырехвершинник* $ABCD$ *является плоским невыпуклым с пересечением сторон, причем если* $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$, *то пересекаются стороны* AD *и* BC, *а если* $\angle A+\angle D=\angle B+\angle C$, *то пересекаются стороны* AB *и* DC.

Следствие 5 (формула Герона). Рассмотрим четырехвершинник $ABCD$, у которого совпадают ровно две вершины A и C, и обозначим через S_{adn} площадь треугольника со сторонами a, d, n. Подставляя $b=a$, $d=c$, $m=0$ и $\hat{n}=0$ в равенство (3) и учитывая, что $S_{adn}=\frac{1}{2}ad\sin\angle A=\frac{1}{2}bc\sin\angle C$, имеем $2a^2d^2+2a^2n^2+2n^2d^2-a^4-d^4-n^4=16S^2_{adn}$ или

$$(a+d+n)(-a+d+n)(a-d+n)(a+d-n)=16S^2_{adn},$$

Обозначая через $t=(a+d+n)/2$ полупериметр треугольника, получим формулу Герона $S_{adn}=\sqrt{t(t-a)(t-d)(t-n)}$.

Следствие 6 (формула для площади произвольного, в том числе и невыпуклого, четырехугольника). По крайней мере одна из диагоналей четырехугольника лежит внутри четырехугольника. Обозначим ее через n. Тогда $\hat{n}=\pi$ и, пользуясь формулой (3), запишем следующие равенства

$$2a^2d^2+2a^2n^2+2n^2d^2-a^4-d^4-n^4=16S^2_{adn},$$

$$2b^2c^2+2b^2n^2+2c^2n^2-b^4-c^4-n^4=16S^2_{bcn},$$

$$a^2c^2+b^2d^2-2m^2n^2+n^2(a^2+b^2+c^2+d^2-n^2)-a^2b^2-c^2d^2=-16S_{adn}S_{bcn}.$$

Вычитая из суммы первых двух равенств удвоенное третье, получим формулу

$$16S^2_{abcd} = 4m^2n^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2, \tag{6}$$

связывающую площадь произвольного четырехугольника с длинами его сторон и диагоналей. Подставляя выражение (5) в равенство (6), имеем $16S^2_{abcd} = 4a^2c^2 + 4b^2d^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 - 8abcd\cos(\angle A + \angle C)$ или

$$S^2_{abcd} = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(\frac{\angle A + \angle C}{2}), \tag{7}$$

где $p = (a+b+c+d)/2$ — полупериметр четырехугольника. Формулу (7) можно вывести и не обращаясь к формуле Герона. Для этого обозначим $W_n = S_{adn}S_{bcn}\cos\hat{n}$ и заметим, что W_n имеет геометрический смысл произведения площади одного из треугольников со стороной n и площади (со знаком) проекции другого треугольника на плоскость первого. Следовательно, площадь S_{abcd} любого (проверьте!) четырехугольника со сторонами a, b, c, d удовлетворяет соотношению $S^2_{abcd} = W_a + W_b + W_c + W_d$. Отсюда, применяя равенство (3), выведем формулу (6), а затем с помощью равенства (5) получим формулу (7). Другой вывод формулы (7) и некоторые следствия из нее можно найти в ([7], с. 88).

Упражнение 7 (еще один вывод формулы Герона). Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, d, n можно выразить формулой

$$S_{adn} = \sqrt{W_a + W_d + W_n}.$$

Итак, формула (7) получена с помощью равенств, справедливых для любых, в том числе вырожденных, четырехвершинников и четырехугольников. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 7 (неравенство Брахмагупты). *Площадь любого четырехугольника удовлетворяет неравенству*

$$S_{abcd} \leqslant \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

причем, если достигается равенство, то все вершины лежат на одной окружности или на одной прямой (вырожденный четырехугольник).

С помощью следствия 7 легко доказать, что из всех четырехугольников с заданными сторонами наибольшую площадь имеет вписанный четырехугольник. Так как для вписанного четырехугольника справедлива, благодаря (7), формула Брахмагупты

$$S_{abcd} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \tag{8}$$

а около треугольника (вырожденного четырехвершинника: $d = 0$) можно описать окружность,то формула (8) справедлива и для треугольника, то есть формула Герона является следствием формулы Брахмагупты.

Формулы (1) и (3) можно применять и для вычисления двугранных углов в тетраэдре. Например, обозначим длины противоположных ребер тетраэдра через

a и c, b и d, m и n причем так, чтобы ребра a, b и n имели общую вершину. Тогда из соотношения (3) получим необходимое и достаточное условие

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2m^2n^2 + n^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - n^2) - a^2b^2 - c^2d^2 > 0$$

для того, чтобы двугранный угол при ребре n тетраэдра был острым.

Упражнение 8. Пользуясь теоремой Эйлера (для любого тетраэдра справедливо равенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - m^2 - n^2 = 4l^2$, где l — расстояние между серединами ребер m и n), докажите, что тетраэдр с двумя прямыми противоположными двугранными углами не может иметь ровно два равных ребра. Можно ли из четырех равных равнобедренных треугольников построить тетраэдр с двумя прямыми двугранными углами?

Таким образом, теорема о четырехвершиннике позволяет единообразно отвечать на некоторые вопросы относительно треугольников, четырехугольников и тетраэдров и является еще одним связующим звеном между задачами планиметрии и стереометрии. С ее помощью однотипно доказываются разнородные, казалось бы, утверждения (неравенство Птолемея, формула Герона, формула для площади произвольного четырехугольника) и потому она является полезным инструментом для составления и решения различных геометрических задач.

Указания к упражнениям.

1. Воспользуйтесь равенством (1) и неравенствами
   $\sin\angle A \geqslant 0$, $\sin\angle C \geqslant 0$, $|\cos\hat{n}| \leqslant 1$.
2. Для плоского четырехвершинника $|\cos\hat{n}| = 1$.
3. $|\cos(\angle A \pm \angle C)| \leqslant 1$.
4. $S_{adn} = \frac{1}{2}ad\sin\angle A$, $S_{bcn} = \frac{1}{2}bc\sin\angle C$.
5. а) Рассмотрите разность равенств (1) и (4);
   б) Примените теорему косинусов к равенству пункта а);
   в) Перегруппируйте члены равенства из пункта б).
6. Используйте результаты упражнения 2.
7. Используйте равенство (3).
8. Можно. $3m^2 = 3n^2 = 4a^2 = 4b^2 = 4c^2 = 4d^2$.

Литература.

1. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвертая — Геометрия. — М.: Физматгиз, 1963. — 568 с.

2. Астапов Н. С., Жуков А. В. Замечательный четырехвершинник. // Квант. — 1996. — 1. — С. 45-47.

3. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 10–11 классов. — 3-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1992. — 464 с.

4. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии (планиметрия). — М.: Наука, 1982. — 160 с.

5. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. — М.: Мир. 1978.

6. Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). — М.: Учпедгиз., 1962. — 164 с.

7. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. I. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1991. — 320 с.

Астапов Николай Степанович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск
старший научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук, доцент
e-mail: nika@hydro.nsc.ru

О периодичности суммы периодических функций

Микаелян Л. В., Седракян Н. М.

Авторы имеют большой опыт работы с школьниками математических классов г. Еревана. В заметке, дающей прекрасный материал для факультативных занятий по началам анализа, изучается вопрос о периодичности суммы конечного числа непрерывных периодических функций.

В школьной программе по математическому анализу сведения о периодических функциях очень скудные, в частности не анализируется такой вопрос: когда сумма двух периодических непрерывных функций является периодической? В этой заметке детально рассматриваются этот и некоторые другие вопросы, связанные с периодическими функциями. Мы надеемся, что заметка будут полезна при более глубоком изучении периодических функций в школьных математических кружках.

Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\dots$, $f_n(x)$ — периодические непрерывные функции, определенные на всей числовой оси. Что можно сказать о периодичности суммы $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$? Для ответа на этот общий вопрос нам понадобится изучить некоторые свойства периодических функций, которые мы сформулируем в виде лемм и следствий из них.

Вопросы, связанные с периодичностью, ответы на которые содержатся в школьных учебниках, в заметке используются как известные факты.

Лемма 1. Если периодическая функция $f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ не имеет наименьшего положительного периода, то для любого $\varepsilon > 0$ существует положительный период меньше ε.

Доказательство. Пусть T_1 — некоторый положительный период функции $f(x)$. Из условия леммы следует, что существует положительный период $T_2 < T_1$. Аналогично существует положительный период $T_3 < T_2$ и т.д.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Отрезок $[0; T_1]$ разделим на n равных частей так, чтобы $\frac{T_1}{n} < \varepsilon$. Рассмотрим числа $T_1 > T_2 > \ldots > T_n > T_{n+1}$. Очевидно, что существуют T_i и T_j (не уменьшая общности можно предположить, что $i < j$), принадлежащие одной и той же части отрезка $[0; T_1]$. Рассмотрим $T = T_i - T_j > 0$ $(i < j)$. Очевидно, $T = T_i - T_j \leq \frac{T_1}{n} < \varepsilon$. С другой стороны, число T является периодом функции $f(x)$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Приведем определение всюду плотного множества.

Определение. Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, если любой интервал $(\alpha; \beta)$ содержит число из множества X.

Лемма 2. Если периодическая функция $f(x)$ не имеет наименьшего положительного периода, то множество периодов функции $f(x)$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $(\alpha; \beta)$ некоторый интервал. Покажем, что существует период функции $f(x)$, принадлежащий этому интервалу. По лемме 1 существует период T_0 такой, что $0 < T_0 < \frac{\beta - \alpha}{2}$.

Рассмотрим числа $\ldots, -3T_0, -2T_0, -T_0, T_0, 2T_0, 3T_0, \ldots$. Разность соседних чисел этой последовательности не больше $2T_0 < \beta - \alpha$, следовательно, одно из этих чисел принадлежит интервалу $(\alpha; \beta)$.

С другой стороны, любое число этой последовательности — период функции $f(x)$. Лемма доказана.

Вообще говоря, в этот факт довольно трудно поверить. Поэтому приведем пример функции, множество периодов которой всюду плотно в $\mathbb{R}$.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \text{ — рационально,} \\ 0 & \text{если } x \text{ — иррационально,} \end{cases}$$

Эта функция довольно известна и носит имя Дирихле. Легко заметить, что любое рациональное число является ее периодом.

Следствие 1. Множество периодов функции $f(x)$ или всюду плотно в $\mathbb{R}$, или состоит из чисел вида nT_0 $(n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0)$, где T_0 — наименьший положительный период функции $f(x)$.

Следствие 2. Если непрерывная периодическая функция $f(x)$ не имеет наименьшего положительного периода, то она постоянна.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{T}_f$ множество периодов функции $f(x)$. Пусть x_1 и x_2 произвольные точки. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что при $x \in (x_2 - \delta;\ x_2 + \delta)$ имеет место неравенство $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$.

По лемме 2 существует $T \in \mathcal{T}_f$ такое, что $T \in (x_2 - \delta - x_1;\ x_2 + \delta - x_1)$ или $x_1 + T \in (x_2 - \delta;\ x_2 + \delta)$, следовательно, $|f(x_1 + T) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. функция $f(x)$ постоянная.

Из следствия 2 немедленно вытекает

Следствие 3. Отличная от постоянной непрерывная периодическая функция имеет наименьший положительный период.

Следствие 4. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет два периода T_1 и T_2 такие, что $\frac{T_1}{T_2}$ иррациональное число, то функция $f(x)$ постоянная.

Доказательство. В самом деле функция $f(x)$ не имеет наименьшего положительного периода, иначе $T_1 = nT_0$ и $T_2 = mT_0$, с $m, n \in \mathbb{Z}$ а T_0 — наименьший положительный период функции $f(x)$ и $\frac{T_1}{T_2}$ — рациональное число. Значит, по следствию 2, $f(x)$ — постоянная.

Лемма 3. Если T — наименьший положительный период непрерывной функции $f(x)$ и число a таково, что $\frac{a}{T}$ иррациональное, то T является также наименьшим положительным периодом для функции $f(x + a) - f(x)$.

Доказательство. Очевидно, что T является периодом функции $f(x + b)$, следовательно, T является периодом также и для функции $f(x + b) - f(x)$. Покажем, что функция $f(x + a) - f(x)$ не имеет положительного периода меньше T.

Допустим противное. Пусть $0 < T_1 < T$ — период функции $f(x + a) - f(x)$, тогда

$$f(x+a+T_1) - f(x+T_1) = f(x+a) - f(x) \quad \text{или} \quad f(x+a+T_1) - f(x+a) = f(x+T_1) - f(x).$$

Последнее означает, что число a является периодом функции $f(x+T_1)-f(x)$. С другой стороны, T также период этой непрерывной функции и, так как $\frac{a}{T}$ иррациональное, то, по следствию 4, $f(x+T_1)-f(x)$ — постоянная. Значит, $f(x+T_1) = f(x)+C$. Отсюда нетрудно получить, что $f(x+nT_1) = f(x)+nC$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, так как непрерывная периодическая функция ограничена, то $C = 0$ и, следовательно, T_1 является периодом функции $f(x)$, что противоречит тому, что T — наименьший положительный период функции $f(x)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Если отношение $\frac{a}{T}$ рационально (не целое), то утверждение леммы 3 вообще говоря, не верно. Приведем пример.

Если график функции $y = f(x)$ с периодом $T = 1$ имеет вид, изображенный на рис. 1, то график функции $y = f(x+\frac{1}{2}) - f(x)$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2.

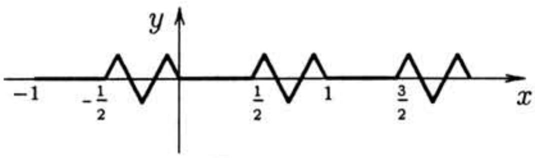


Рис. 1

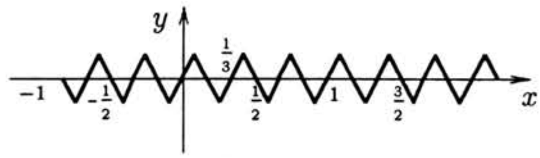


Рис. 2

Откуда видно, что эта функция будет иметь период $T_1 = \frac{1}{3} < T = 1$.

Теперь можно сформулировать основной результат этой работы.

Теорема. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_n$ наименьшие положительные периоды непрерывных периодических функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ $(n \geq 2)$, соответственно, причем отношения $\frac{T_i}{T_j}$ $(i \neq j)$ иррациональные при любых i и j. Тогда функция $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ не может быть периодической.

Доказательство. Применяем математическую индукцию. Пусть $n = 2$. Предположим, что сумма непрерывных периодических функций $f(x) = f_1(x)+f_2(x)$ — периодическая и $T \neq 0$ — ее период.

Рассмотрим функцию $h(x) = f(x+T_1) - f(x) = f_2(x+T_1) - f_2(x)$. С одной стороны, T — период функции $f(x)$, значит он является периодом и для функции $h(x)$. С другой стороны, по условию теоремы, отношение $\frac{T_1}{T_2}$ — иррационально. Следовательно, по лемме 3, T_2 — период функции $f_2(x+T_1) - f_2(x) = h(x)$. Иными словами, T_2 и T — периоды одной и той же функции $h(x)$. Поэтому отношение этих чисел $\frac{T}{T_2}$ рационально.

Аналогично из равенства $f(x+T_2) - f(x) = f_1(x+T_2) - f_1(x)$ вытекает рациональность отношения $\frac{T}{T_1}$.

Итак, мы получили рациональность отношения $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1}{T} \cdot \frac{T}{T_2}$, что противоречит условию. Таким образом, утверждение теоремы доказано при $n = 2$.

Допустим, что теорема верна при всех p, удовлетворяющих условию $2 \leq p \leq k$, и предположим, что функция $g(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_{k+1}(x)$ периодична, вопреки утверждению теоремы. Тогда функция

$$g(x+T_{k+1}) - g(x) = \left(f_1(x+T_{k+1}) - f_1(x)\right) + \ldots + \left(f_k(x+T_{k+1}) - f_k(x)\right)$$

тоже периодична. По условию, числа $\frac{T_{k+1}}{T_i}$ иррациональны для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Из леммы 3 следует, что период функции $f_i(x+T_{k+1}) - f_i(x)$ равен T_i и мы можем применить предположение индукции к функции $g(x+T_{k+1}) - g(x)$, из которого вытекает ее непериодичность. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теперь исследуем вопрос о свойствах сумм непрерывных периодических функций.

Рассмотрим функции, которые отличны от постоянных. Каждому числу $a > 0$ поставим в соответствие класс $\mathcal{F}_a$ непрерывных отличных от постоянных непрерывных функций, которые имеют своими наименьшими положительными периодами числа ra, где r — положительное рациональное число. Покажем, что $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b = \emptyset$, если $\frac{a}{b}$ — иррационально.

Предположим, что $f \in \mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b$. Тогда $f(x)$, будучи непостоянной непрерывной периодической функцией, имеет в качестве периодов числа $r_1 a$ и $r_2 b$ ($r_a, r_b \in \mathbb{Q}$), что противоречит иррациональности отношения $\frac{a}{b}$.

Нетрудно проверить, что сумма функций из одного класса либо постоянна, либо принадлежит тому же классу. Действительно, если $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in \mathcal{F}_a$ и числа $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — наименьшие положительные периоды этих функций, то $T_k = \frac{m_k}{n_k}a$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $m_k, n_k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что $m_1 m_2 \ldots m_n a = m_1 m_2 \ldots m_{k-1} n_k m_{k+1} \ldots m_n T_k$ — период любой из функций $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, будет периодом суммы $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$. Теперь возможны два случая:

а) эта сумма не имеет наименьшего положительного периода, т.е. она постоянна (следствие 2);

б) имеет наименьший положительный период.

Пусть этот период равен T. Тогда $mT = m_1 m_2 \ldots m_n a$, где $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\frac{T}{a} \in \mathbb{Q}$, т.е. $g \in \mathcal{F}_a$.

Итак, в сумме непрерывных периодических функций сумму всех функций из одного класса можно заменить постоянной, или функцией того же класса. Значит для непрерывных периодических функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ имеет место равенство:

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = C + f_{a_1}(x) + f_{a_1}(x) + f_{a_2}(x) + \ldots + f_{a_k}(x),$$

где $f_{a_i}(x) \in \mathcal{F}_{a_i}$ и $\frac{a_i}{a_j} \notin \mathbb{Q}$ для любой пары $i \neq j$. По доказанной теореме эта сумма будет периодической только в том случае, если в правой части равенства будет не более одного слагаемого, отличного от константы.

Заканчивая заметку, сформулируем ряд задач, решение которых поможет более глубоко усвоить прочитанный материал.

1. Предположим, что множество периодов функции $f(x)$ всюду плотно в $\mathbb{R}$. Верно ли что $f(x)$ имеет два периода T_1 и T_2, отношение которых иррационально?

2. Существует ли отличная от постоянной функция, отношение двух периодов которой — иррациональное число?

3. Пусть T_1 и T_2 — периоды функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $\frac{T_1}{T_2}$ — иррационально. Верно ли, что функция $f_1(x) + f_2(x)$ не периодическая?

4. Приведите пример непрерывных периодических функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ с наименьшими положительными периодами 1, 1,5 и 3, сумма которых равна нулю.

5. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ — непрерывные периодические функции с наименьшими положительными периодами $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$, соответственно. Причем, $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \equiv 0$ $(n \geq 3)$. Верно ли, что T_n делится нацело на T_1, T_2, $\ldots$, T_{n-1} (т.е. $\frac{T_n}{T_i} \in \mathbb{N}$)?

6. Пусть функция $f(x)$ при любом значении переменной x удовлетворяет соотношениям:

1) $f(x + a + b) + f(x) = f(x + a) + f(x + b)$,

2) $|f(x)| \leq C$,

где a, b, C — фиксированные положительные числа и $a, b \in \mathbb{Q}_+$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

Математический Анализ, 9 класс

А. Л. Городенцев

Мы снова обращаемся к учебному курсу известной московской физико-математической школы №57 — в номере 1 за 1997 был опубликован специальный курс математики для 9 класса в листках. Автором настоящего курса математического анализа является доктор физико-математических наук, автор нашего журнала (№№2-3 (9-10) за 1999 г.) Алексей Львович Городенцев.

Это курс математического анализа для девятого класса, рассчитанный на школьников, не обладающих никакими предварительными математическими познаниями вне стандартной программы, но для которых занятие математикой является одним из жизненных приоритетов, и они готовы решать по 1 - 2 задачи *каждый день* и обсуждать свои достижения с преподавателями и друзьями, будучи движимы при этом «одними только» молодецким задором, интересом к предмету, удовольствием от общения, чувством удовлетворения от *собственных* математических открытий и растущей уверенностью в собственных силах, возникающей от *самостоятельного* решения задач. Поддержание и укрепление всех этих жизнерадостных ощущений — главная задача преподавателей. Никаких других оснований, способных «убедить» нормального ребёнка освоить этот курс не существует — давление при помощи отметок не оправдано и бессмысленно, а посулы того, что этот курс поможет в сдаче каких-либо экзаменов суть обман.

Курс состоит из листков с задачами. Каждый школьник получает свой листок, решает задачи, *записывает* свои решения, отдает их на прочтение преподавателю, и затем решения обсуждаются (с каждым школьником лично). Уроки, собственно, состоят из этих обсуждений — две пары сдвоенных уроков в неделю. Очень важно на *каждом* занятии поговорить с *каждым* школьником (опыт показывает, что это реально только когда на одного преподавателя приходится не более 5-7 учеников). Когда основной материал листка освоен, школьнику выдаётся следующий листок, и т. д. Скорость освоения материала у каждого ученика своя. Более сильные решают листок (в среднем) за неделю, менее сильные - за две. Если кто-то надолго «застрял» на каком-то листке, преподавателю требуется выяснить в чём состоят проблемы, и деликатно помочь их преодолеть — самое главное не повредить при этом ни одному из перечисленных выше «стимулов» к занятиям.

Задачи, с которыми надо разобраться в первую очередь, помеченны кружочком. Они обычно нетрудны и содержат базисные примеры и вводные конструкции

— тут от каждого ученика следует добиваться полной ясности. Задачи помеченные звёздочкой, напротив, весьма трудны, и их решение не обязательно для понимания основного курса; предполагается, что школьник будет долго заниматься понравившейся ему трудной задачей, возможно, возвращаясь к ней потом, решив какие-то следующие листки, и применяя, соответственно, какие-то новые идеи — такого рода «длительную осаду» следует всячески поощрять. Все листки делятся на *основные* (с целыми номерами) и *дополнительные* (с дробными номерами). Хотелось бы, чтобы все ученики умели решать все непомеченные звёздочками задачи из всех основных листков. Дополнительные листки тоже выдаются всем желающим, но рассчитаны они на наиболее продвинутых школьников, значительно вырывающихся вперёд, и решать их следует параллельно решению основных листков (все дополнительные листки довольно трудны и выходят за рамки стандартных программ).

Несмотря на наличие нескольких связующих сюжетов, пронизывающих весь курс насквозь и обсуждаемых с различных точек зрения практически в каждом листке, заинтересованный преподаватель без труда сможет выделить из курса несколько автономных тем, представленных сериями из 3–5 листков (суммирование, комбинаторика, арифметика, множества, действительные числа, последовательности, графы, открытые и замкнутые множества, цепные дроби и т. д.), и внедрить их в свой собственный курс или использовать как отдельную тему для факультатива и/или кружка.

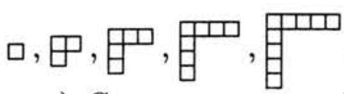
Почти все наши задачи и методологические приёмы не новы, я безмерно признателен всем их авторам, и приношу свои извинения за то, что я не в состоянии их перечислить, а тем более, указать точные ссылки. Множество задач происходит из Задачника Кванта. Сюжет про графы целиком заимствован из аналогичного курса С. А. Дориченко (см. Математ. Обр. 1997, № 1, с. 38–75), сюжеты про суммирование — из книжки «Числа и Суммы» (см. Математ. Обр. 1999, № 2-3, с. 2–57), задачи про действительные числа, последовательности и по общей топологии вещественной прямой очень близки к оригинальным листкам Н. Н. Константинова, от которых, собственно, и берёт начало тот подход к преподаванию математики, которому мы стараемся следовать.

Этот курс был пройден в одном из девятых математических классов московской школы № 57, — как и само появление настоящих листков, это было бы невозможно без активного участия Рины Анно, Пети Ахметьева, Серёжи Дориченко, Оли Кряжевой, Мити Михалина, Гриши Рыбникова, Жени Смирнова, Коли Степанова и Кости Трушкина; я пользуюсь случаем горячо поблагодарить их за эту нашу совместную работу.

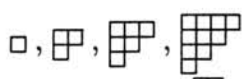
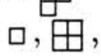
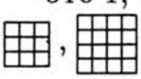
Листок №1. Геометрическое суммирование

... Достопочтеннейший Дионисий, зная что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука ... Все числа, как ты знаешь, состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь, до бесконечности. Так вот, среди них находятся: квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа самого на себя — число же это называется стороной квадрата; затем кубы ... Каждое из возрастающих от единицы чисел, начиная с трёх, является первым после единицы многоугольником и имеет столько углов, сколько в нём содержится единиц, стороной же его будет 2. Так, 3 будет треугольником, 4 — четырёхугольником, 5 — пятиугольником и т. д.

из книги Диофанта Александрийскго «Арифметика»
и его же учения «О многоугольных числах»

1∘1. Рассмотрим последовательность  , ... (древние греки называли Г-образные фигурки *гномонами*). Сколько клеток в k-той фигурке и чему равна суммарная площадь первых k гномонов?

1∘2. Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел? Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел? Вычислите суммы 300 нечётных чисел, начиная с 57 и 200 чётных чисел, начиная с 444.

1∘3. Треугольные числа Диофанта:  — это 1, 3, 6, 10, ... Четырёхугольные числа:   — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Чему равно $T_n + T_n$? Выразите T_n через n.

1∘4. Найдите сумму первой тысячи натуральных чисел.

1∘5°. (пифагорова таблица умножения). Докажите тождество $mk = km$ (т. е. что $\underbrace{k + k + \cdots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{k}$). Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1.1?

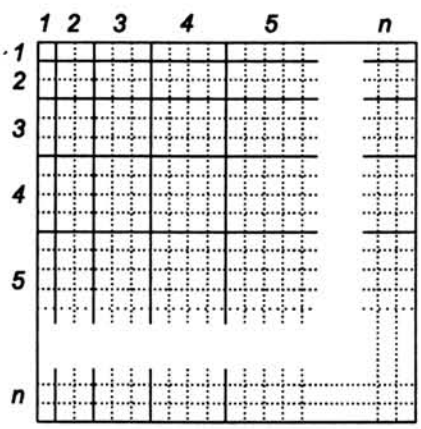


Рис. 1.1. *Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.*

1∘6. Сколько клеток в k-том, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» гномоне, вершина которого представляет k^2, а стороны суть произведения k на $1, 2, \ldots, (k-1)$?

1∘7. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3+5=2^3$, $7+9+11=3^3$, $13+15+17+19=4^3$, ...

1∘8. Вычислите суммы:
а) $1^3+2^3+\dots+n^3$; **б)** $T_1+2T_2+\dots+nT_n$;
в*) $1^2+2^2+\dots+n^2$; **г*)** $T_1+T_2+\dots+T_n$.

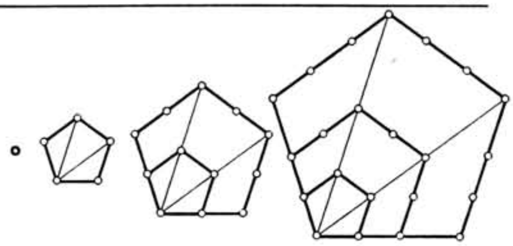


Рис. 1.2. *Пятиугольные числа.*

1∘9*. Вычислите суммы квадратов первых n чётных чисел и первых n нечётных чисел.

1∘10. Пятиугольные числа Диофанта: $P_1=1$, $P_2=5$, $P_3=12$, $P_4=22$, ... изображены на рис. 1.2. Чему равно P_k-P_{k-1}? Выразите P_n через n.

Листок №2. Суммирование разностей

Арифметическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор занумерованных чисел: $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots$, в котором разность $d=a_k-a_{k-1}$ между двумя соседними числами одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

2∘1°. Будет ли арифметической прогрессией последовательность с k-тым членом, равным:
а) $\underbrace{11\dots1}_{k}$, **б)** $\dfrac{1+2+\dots+k}{k}$, **в)** k-тому натуральному числу, оканчивающемуся на 13?

2∘2°. Выразите n-тый член произвольной арифметической прогрессии через первый член и разность. Чему равно 91-е натуральное число, большее 444, с остатком 43 от деления на 57?

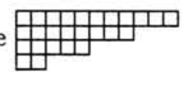
2∘3. В некой арифметической прогрессии $a_m=-a_n$ для каких-то $m<n$. При каких m, n эта прогрессия содержит нуль и под каким номером?

2∘4°. Какие из перечисленных ниже свойств набора чисел $a_0, a_1, \dots, a_n$ необходимы, а какие — достаточны для того, чтобы этот набор был арифметической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних), есть среднее арифметическое двух соседних;
б) $2a_i=a_{i-2}+a_{i+2}$ при всех $2\leqslant i\leqslant n-2$;
в) $a_i=2a_{i-1}-a_{i-2}$ при всех $2\leqslant i\leqslant n$;
г) сумма a_i+a_{n-i} одна и та же для всех $0\leqslant i\leqslant n$.

2∘5°. Выразите сумму всех элементов конечной арифметической прогрессии[1]
а) через два крайних члена и количество слагаемых;
б) через начальный член, количество слагаемых и приращение.

2∘6. Найдите сумму всех трёхзначных чисел с остатком 7 от деления на 43.

2∘7. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы размера $m\times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых равна S.

[1] на клетчатой бумаге прогрессию, скажем, 2, 5, 8, 11, удобно рисовать в виде 

2∘8. Как связаны арифметические прогрессии с m-угольными числами Диофанта? Чему равно n-тое m-угольное число?

2∘9*. Можно ли разбить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в объединение (возможно, бесконечного) набора попарно непересекающихся бесконечных арифметических прогрессий с разностями $d_1, d_2, \ldots$, удовлетворяющими неравенству $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < 0,9$?

Суммирование разностей. Часто сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ удаётся вычислить, представив каждое слагаемое в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел некоего другого набора $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$. Более общим образом эта идея выглядит так: заменим каждое b_i подходящей суммой $b_i = \pm c_{i1} \pm c_{i2} \pm \cdots \pm c_{im_i}$ так, чтобы при подстановке в исходную сумму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ бо́льшая часть c_{ij} либо сокращалась, либо легко складывалась.

2∘10. Вычислите суммы:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)}$;

б) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n\,(n+1)$;

в) $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n}$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия с разностью d);

г) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$;

д) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n\,(n-1)\,(n+2)$;

е) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$.

2∘11. Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

2∘12. Пользуясь предыдущей задачей, вычислите сумму k-тых степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Листок №3. НОД, НОК и деление с остатком

В решениях задач этого листка словосочетания «простое число» и «простые множители» запрещены.

Прошу — забудь всё, чему ты учился в школе; потому что ты этому не научился.
(Э. Ландау, «Основы анализа»)

3∘1°. Какое наименьшее расстояние можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) длины **а)** 13 *см* и 29 *см*; **б)** 21 *см* и 30 *см*?

3∘2. Пусть $A, B \in \mathbb{Z}$ — два фиксированных целых числа. Обозначим через $\mathfrak{I} \subset \mathbb{Z}$ множество всех чисел n, которые можно отложить на числовой прямой от нуля, используя шаблоны[1] A и B. Пусть D — это *наименьшее положительное* число в $\mathfrak{I}$. Верно ли, что:

а) A, B, а также суммы, разности и любые целые кратные чисел из $\mathfrak{I}$ лежат в $\mathfrak{I}$?

б) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, A и B) нацело делятся на D?

[1] иначе говоря, $\mathfrak{I}$ состоит из всех чисел n, представимых в виде $n = k\,A + m\,B$ с целыми k и m

в) Все числа из $\mathfrak{I}$ (в частности, D) нацело делятся на любой общий делитель чисел A и B?

НОД и НОК. Наибольшее натуральное число D, которое делит каждое из чисел A_1, A_2, ..., A_n, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Аналогично, наименьшее натуральное число K, которое делится на все числа A_i называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

3∘3. Рассуждая как в зад. 3∘2, покажите, что $\text{нод}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делится нацело на любой другой общий делитель чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и представляется в виде $z_1A_1 + +z_2A_2 + \cdots + z_nA_n$ с целыми z_ν. Верно ли, что $\text{нод}(A \pm B, B) = \text{нод}(A, B)$?

3∘4. Докажите, что $\text{нок}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ делит нацело любое другое общее кратное чисел A_i и что $\text{нок}(A, B) \cdot \text{нод}(A, B) = A \cdot B$.

3∘5. алгоритм Евклида Пусть $A > B$ — два фиксированных натуральных числа. Определим последовательность чисел E_0, E_1, E_2, E_3, ... правилами: $E_0 = A$, $E_1 = B$, $E_k =$ (остатку от деления E_{k-2} на E_{k-1}) при $k \geqslant 2$. Докажите, что все числа E_ν лежат в множестве $\mathfrak{I}$ из зад. 3∘2 и монотонно убывают до тех пор, пока очередное $E_{\nu+1}$ не обратится в нуль (т. е. пока $E_{\nu-1}$ не разделится нацело на E_ν). Как связано это последнее ненулевое E_ν с $\text{нод}(A, B)$?

3∘6. Вычислите $\text{нод}(A, B)$ и подберите целые x, y так, чтобы $x\,A + y\,B = \text{нод}(A, B)$, для следующих пар (A, B): **а)** $(17, 13)$; **б)** $(44\,863, 70\,499)$; **в)** $(8\,385\,403, 2\,442\,778)$.

Взаимная простота. Если $\text{нод}(a, b) = 1$ для $a, b \in \mathbb{Z}$, то числа a, b называются *взаимно простыми*.

3∘7. Докажите, что взаимная простота a и b равносильна существованию таких $x, y \in \mathbb{Z}$, что $a\,x + b\,y = 1$, и равносильна возможности представить любой $z \in \mathbb{Z}$ в виде $z = a \cdot k + b \cdot m$ с подходящими $k, m \in \mathbb{Z}$.

3∘8. Пусть c взаимно просто с a, а b – любое. Докажите, что

а) если произведение ab делится на c, то b делится на c;

б) если b делится как на a, так и на c, то b делится и на произведение ac.

3∘9. Верно ли, что $\text{нок}(a, b)/a$ и $\text{нок}(a, b)/b$ взаимно просты при любых $a, b \in \mathbb{N}$?

3∘10. Верно ли, что $\forall\, a \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много $b \in \mathbb{N}$, таких что $b + a$ и $b - a$ взаимно просты? Всегда ли взаимно просты a и $a + 1$?

3∘11. Найдите *все* целые решения уравнений:

а) $1537\,x + 1387\,y = 1$ **б)** $5\,x + 7\,y = 11$ **в)** $26\,x + 32\,y = 60$ **г)** $169\,x + 221\,y = 26$

3∘12. Чему равно k-е натуральное число, одновременно дающее остатки:

а) 1, 2, 3 от деления, соответственно, на 2, 3 и 5?

б) 2, 4, 6, 8 от деления, соответственно, на 5, 9, 11 и 14?

Листок №4. Равносоставленность и площади

4∘1. Нарисуйте на листе клетчатой бумаги оси координат и отметьте точки $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(2, 2)$, $D(2, 5)$, $E(0, 5)$, $F(-7, 7)$, $G(-5, 4)$. Допустим, что на закрашивание одной клетки тратится 1 пиколитр чернил. Сколько чернил уйдёт на закрашивание многоугольников: CED, ADE, AEC, ECG, $ABDE$, $GCEF$, $ACEFG$?

4∘2. Рассмотрим на координатной плоскости точки $O(0,0)$ и $A(4,3)$. Достройте отрезок OA до квадрата $OABC$ и вычислите $S(OABC)$ и $|OA|$.

4∘3. Чему равен квадрат расстояния от начала координат до произвольной точки P с координатами (p_1, p_2) и чему равен квадрат расстояния между P и другой произвольной точкой $Q(q_1, q_2)$?

4∘4. Нарисуйте ГМТ с координатами (x, y), удовлетворяющими соотношениям:
а) $x^2 + y^2 = 1$ **б)** $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$ **в)** $x^2 + y^2 + 1 = 2\,(y - 3\,x)$

4∘5. Вершины параллелограмма $ABCD$ имеют координаты $A(1,5)$, $B(-3,2)$, $C(4,-1)$. Найдите координаты вершины D и $S(ABCD)$.

4∘6*. Вершины параллелограмма $OAPB$ имеют координаты $O(0,0)$, $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Выразите координаты вершины P и $S(OAPB)$ через a_1, a_2, b_1 и b_2.

Свойства площадей. Многие плоские фигуры $\mathfrak{F}$ имеют площадь $S(\mathfrak{F})$. Например, площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab. Площади равных фигур равны. Фигуры равной площади называются *равновеликими*. Если фигура $\mathfrak{F}$ разрезана прямолинейным разрезом на две части $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и из трёх фигур $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ какие-то две имеют площадь, то её имеет и третья, причём $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F}_1) + S(\mathfrak{F}_2)$. Две фигуры называются *равносоставленными*, если одну из них можно конечным числом прямолинейных разрезов разбить на части, из которых складывается другая фигура. Площади равносоставленных фигур равны.

4∘7. Равновелики ли на рис. 4.1 параллелограммы соответствующим прямоугольникам? Выразите площадь параллелограмма через основание и высоту.

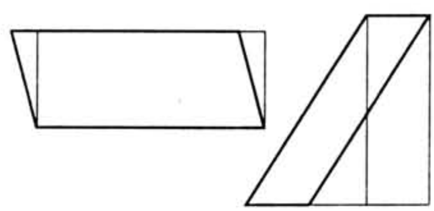


Рис. 4.1.

4∘8. Выразите площади треугольника и трапеции через высоты и основания.

4∘9. Существует ли такой треугольник с высотами h_1, h_2, периметром P и площадью S, что:
а) $P > 1\,\text{м}$ $S < 1\,\text{см}^2$? **б)** $S > 1\,\text{м}^2$ $P < 1\,\text{см}$?
в) $h_1 \geqslant 1\,\text{м}$ $h_2 \geqslant 1\,\text{м}$ $S \leqslant 1\,\text{см}^2$?

4∘10. Пусть длины последовательных сторон (скажем, по часовой стрелке) произвольного выпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d. Может ли его площадь быть больше, чем **а)** $(ab+cd)/2$? **б)** $(ac+bd)/2$?

4∘11. Выразите площадь произвольного четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями через длины диагоналей.

4∘12. Выразите площадь треугольника через длины сторон и радиус
а) вписанного **б)** вневписанного
круга.

4∘13. Зависит ли сумма расстояний от точки, лежащей внутри правильного треугольника, до его сторон от выбора этой точки?

4∘14. Верно ли, что медианы разрезают треугольник на 6 равновеликих треугольников?

4∘15*. Треугольник разрезали на три меньших, соединив вершины с некой внутренней точкой. Верно ли, что они равновелики только если эта точка — пересечение медиан?

Листок №$4\frac{1}{2}$(дополнительный). Геометрия на клетчатой бумаге

$4\frac{1}{2}$∘1*. Математический бильярд — это квадрат $ABCD$ с точечными лузами в вершинах. Точечный шар выпустили из середины стороны AD в направлении точки E, которая делит противоположную сторону в отношении $BE : EC = 43 : 57$. Попадёт ли он когда-нибудь в лузу? Если нет – почему, если да – после скольких отражений[1] от стенок?

$4\frac{1}{2}$∘2*. Существует ли параллелограмм площади 4 кл. с центром в узле клетчатой бумаги, не содержащий никаких других узлов ни внутри, ни на границе?

Формула Пика сопоставляет любому (не обязательно выпуклому) несамопересекающемуся многоугольнику $\mathfrak{M}$ с вершинами в узлах клетчатой бумаги число

$$\Pi(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{ число узлов внутри } \mathfrak{M}\,) + \frac{1}{2}(\text{ число узлов на границе } \mathfrak{M}\,) - 1\,.$$

и утверждает, что $S(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M})$. Она доказывается в следующих двух задачах:

$4\frac{1}{2}$∘3. Многоугольник $\mathfrak{M}$ разрезали прямолинейным разрезом на два многоугольника $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ тоже с вершинами в узлах. Верно ли, что $\Pi(\mathfrak{M}) = \Pi(\mathfrak{M}_1) + \Pi(\mathfrak{M}_2)$?

$4\frac{1}{2}$∘4. Последовательно докажите формулу Пика для:

а) прямоугольника со сторонами по линиям клеток;
б) для прямоугольного треугольника с катетами по линиям клеток;
в) для любого треугольника;
г) для выпуклого многоугольника;
д*) в общем виде.

$4\frac{1}{2}$∘5. Может ли треугольник с площадью 1 кл. и вершинами в узлах содержать узлы строго внутри себя? Может ли он иметь сколь угодно большой периметр?

$4\frac{1}{2}$∘6. Верно ли, что любой отрезок с концами в узлах, но не содержащий узлов внутри себя, можно достроить до треугольника площади 1 кл. с вершинами в узлах?

$4\frac{1}{2}$∘7. Может ли параллелограмм с площадью 1 кл. и вершинами в узлах накрывать какие-либо узлы кроме вершин? Может ли расстояние между наиболее удалёнными друг от друга вершинами такого параллелограмма быть сколь угодно большим?

$4\frac{1}{2}$∘8. Прямая ℓ соединяет узлы с координатами $(0, 0)$ и (p, q), причём между этими узлами на прямой ℓ нет других узлов. Есть ли среди не лежащих на ℓ узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой ℓ.

$4\frac{1}{2}$∘9. задача о кузнечиках Трёх кузнечиков посадили в точки с координатами $(0, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$ и позволили прыгать друг через друга в первом квадранте по следующему правилу: в каждый момент один из векторов, соединяющих начало координат с кузнечиками, находится между двумя другими, и любой из двух «крайних» кузнечиков может центрально симметрично отразиться от этого «среднего». Покажите, что:

[1] предполагается, что при каждом ударе о стенку «угол падения равен углу отражения»

а) начало координат и кузнечики всегда находятся в вершинах параллелограмма единичной площади, и никаких других целых точек этот параллелограмм не накрывает;

б) кузнечики могут побывать только в точках с взаимно простыми координатами;

в) для каждой точки с взаимно простыми координатами имеется единственный способ прыгания, приводящий одного из кузнечиков в эту точку.

$4\frac{1}{2}\circ 10^*$. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле а радиус в 1999^{2000} раз меньше ширины клеток. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного (кроме накрывающего начало) круга?

$4\frac{1}{2}\circ 11$. Пусть p_1, p_2 — любые, а q_1, q_2 — положительные числа. Опишите все случаи, когда $\dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$. Какими неравенствами связаны эти три дроби в остальных случаях?

Листок №5. Важные квадратичные соотношения

5○1. Пользуясь тем, что из четырёх одинаковых прямоугольных треугольников с катетами a, b и гипотенузой c можно сложить квадрат как на рис. 5.1, докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

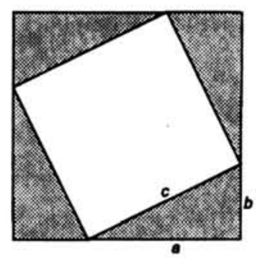


Рис. 5.1.

5○2. Докажите, что у пифагоровых штанов на рис. 5.2 квадрат гипотенузы равносоставлен сумме квадратов катетов (этот факт известен как *теорема Пифагора*).

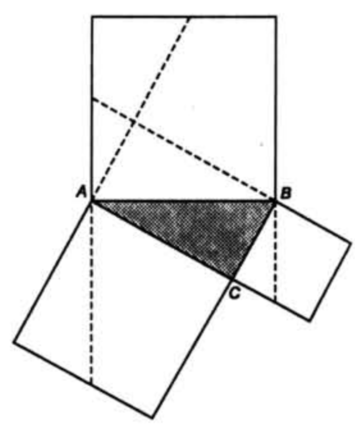


Рис. 5.2.

Среднее геометрическое (или среднее пропорциональное) двух положительных чисел m и n — это такое положительное число q, что $q^2 = mn$ (или иначе $n : q = q : m$).

5○3. Докажите, что если положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $c^2 = a^2 + b^2$, то можно построить единственный треугольник со сторонами a, b и c, и этот треугольник автоматически будет прямоугольным.

5○4. Докажите, что на рис. 5.3 квадрат высоты прямоугольного треугольника равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть отрезки, на которые высота разбивает гипотенузу.

5○5. Докажите, что на рис. 5.4 квадрат катета равносоставлен прямоугольнику, стороны которого суть гипотенуза и её отрезок, заключённый между этим катетом и высотой.

5○6. Двумя способами — с помощью предыдущих задач и через подходящие подобные треугольники — выясните, выполняются ли в произвольном прямоугольном ΔABC с гипотенузой AB и высотой CH соотношения:

а) $|AH| : |CH| = |CH| : |HB|$; **б)** $|AH| : |AC| = |AC| : |AB|$

в) $|BH| : |CB| = |CB| : |AB|$.

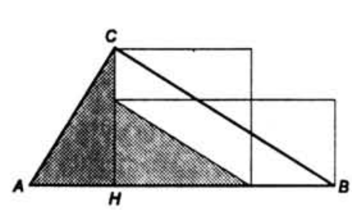


Рис. 5.3.

5○7. Глядя на рис. 5.5 циркулем и линейкой постройте арифметическое и геометрическое средние двух отрезков $a = AP$ и $b = PB$. Докажите, что геометрическое среднее двух положительных чисел не превосходит арифметического, и опишите все случаи их равенства.

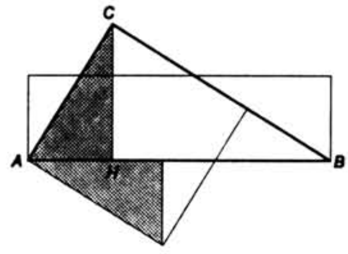


Рис. 5.4.

5○8. Даны отрезок длины 1 и отрезок длины a. Циркулем и линейкой постройте отрезок, длина которого равна
а) $\sqrt{3}$, **б**) $\sqrt{19}$, **в**) $\sqrt{a}$, **г**) a^2.

5○9. Дан квадрат. Циркулем и линейкой постройте новый квадрат, площадь которого относится к площади данного как $m : n$.

5○10. Даны отрезки длины 1, p и q. Циркулем и линейкой постройте корни уравнений $x^2 + px - q = 0$ и $x^2 - px - q = 0$.

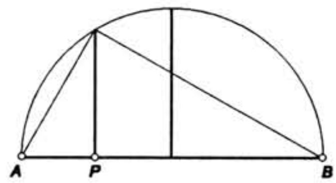


Рис. 5.5.

5○11. Докажите, что в любом $\triangle ABC$ с высотой AH выполнено соотношение $|AB|^2 - |AC|^2 = |BH|^2 - |CH|^2$.

5○12. Выразите сумму квадратов диагоналей параллелограмма через его стороны.

5○13. Выразите диаметр круга, вписанного в равнобокую трапецию, через её основания.

5○14. Выразите **а**) медиану **б**) высоту **в***) биссектрису **г***) площадь произвольного треугольника через длины его сторон.

Листок №6. Геометрические прогрессии

В банке живут бактерии и каждый день их число удваивается, так что за неделю банка заполняется бактериями целиком. За сколько дней бактерии заполнят полбанки?

Геометрическая прогрессия — это (конечный или бесконечный) набор занумерованных *ненулевых* чисел $\dots, g_1, g_2, g_3, \dots$, в котором отношение $q = g_k/g_{k-1}$ между двумя соседними числами одинаково для всех k; оно называется *знаменателем* прогрессии.

6∘1°. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-тый член которой равен:
а) $0,\underbrace{0\dots0}_{k}3$; **б)** 3^{-k}; **в)** $\underbrace{33\dots3}_{k}$; **г)** $\sqrt[k]{3}$; **д)** $g'_k \cdot g''_k$, где g'_k, g''_k – геометрические прогрессии;
е) ϑ^{a_k}, где $\vartheta \neq 0$, и a_k — арифметическая (скажем, целочисленная) прогрессия.

6∘2. Можно ли разбить $\mathbb{N}$ в объединение **а)** конечного **б)** бесконечного набора попарно непересекающихся бесконечных геометрических прогрессий?

6∘3. Какие из перечисленных ниже свойств набора положительных чисел $g_0, g_1, \dots, g_n$ необходимы, а какие достаточны для того, чтобы этот набор был геометрической прогрессией?
а) любой элемент (кроме крайних) есть среднее геометрическое двух соседних;
б) $g_i^2 = g_{i-2}g_{i+2}$ при всех $2 \leqslant i \leqslant n-2$; **в)** $g_i g_{n-i}$ одинаково для всех $0 \leqslant i \leqslant n$.

6∘4. Верно ли, что $a^m - b^m$ делится на $(a-b)$, буде эта разность ненулевая? Если да, то чему равно частное? Что можно утверждать про $a^m + b^m$?

6∘5. Вычислите сумму $1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Обобщение: выразите сумму всех элементов конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

6∘6. Найдите суммы:
а) $1 + 2\,q + 3\,q^2 + \dots + (n+1)\,q^n$, **б)** $1\cdot 2 + 2\cdot 3\,q + 3\cdot 4\,q^2 + \dots + (n+1)(n+2)\,q^n$.

6∘7. Из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/час вышел Толя, а через три часа вслед за ним со скоростью 7 км/час отправился Коля и – со скоростью 12 км/час – его собачка Жучка, которая догнала Толю, мгновенно развернулась и побежала назад к Коле, встретив его, снова развернулась и снова догнала Толю и т. д. Какое расстояние пробежит Жучка пока Коля догонит Толю? Какая прогрессия при этом просуммировалась?

6∘8. Догнав Толю, Коля стал делиться с ним завтраком: в первую минуту он разделил его пополам и успел съесть треть своей половины, а Толя свою – целиком. В следующие полминуты Коля разделил пополам остатки своей доли и опять успел съесть треть, а Толя – всё. Далее процесс повторялся (и каждая следующая стадия происходила вдвое быстрее предыдущей). Через какое время завтрак будет съеден и какая его часть достанется Коле, а какая – Толе?

6∘9. Назовём *суммой* бесконечной убывающей положительной геометрической прогрессии $g_0, g_1, g_2, \dots$ наименьшее число, большее любой конечной суммы $g_0 + \dots + g_n$. Докажите, что такое число существует и выразите его через начальный член и знаменатель прогрессии.

6∘10. К большему катету прямоугольного треугольника со сторонами $1, 2, \sqrt{3}$ подклеили равную ему по длине гипотенузу подобного треугольника. Затем к большему катету второго треугольника аналогичным образом подклеили гипотенузу третьего треугольника, подобного первым двум, и так далее до бесконечности. Чему равна площадь получающегося завитка?

6∘11. Всегда ли при делении натуральных чисел «уголком» получится либо конечная, либо бесконечная *периодическая* десятичная дробь? Можно ли таким образом получить дроби

а) $0,575757\ldots$; **б)** $19,9919991999\ldots$; **в)** $2,43575757\ldots$?

6∘12. Докажите, что периодическая дробь $\overline{0,a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m\,b_1\ldots b_m\,\ldots}$ есть результат деления числа $\overline{a_1\ldots a_n\,b_1\ldots b_m} - \overline{a_1\ldots a_n}$ на число $\underbrace{9\ldots9}_{m}\underbrace{0\ldots0}_{n}$.

Листок №7. Как организовать полный перебор

Чтобы управиться с классом, его надо выстроить по росту и перекликнуть по алфавиту.
(из Школьных Заповедей)

7∘1. Сколько различных **а)** двух- **б)** четырёх- **в)** n-буквенных слов[1] можно написать тридцатью тремя буквами русского алфавита?

7∘2. Можно ли закодировать русский алфавит азбукой Морзе так, чтобы каждая буква передавалась не более, чем четырьмя сигналами? Какое число сигналов на символ достаточно отводить для передачи 3000 различных иероглифов?

7∘3. Сколько всего разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах `ОК, рок, урок, шнурок`?

7∘4. Как изменится ответ в зад 7∘1, если потребовать, чтобы буквы не повторялись?

7∘5. Можно ли упорядочить все сто двухразрядных чисел от 00 до 99 так, чтобы каждые два соседних числа отличались ровно в одной цифре, причём ровно на единицу? Тот же вопрос про трёх- и n-разрядные числа.

Факториалы. Произведение $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot1$ обозначается $n!$ (читается «n-факториал»). По определению, $\boxed{0! = 1! = 1}$.

7∘6. При каких n: **а)** $n! \geqslant 3^n$; **б)** $2^n \geqslant n^3$?

Математическая индукция — это способ доказать бесконечную серию занумерованных утверждений за два хода: **(1)** – *база индукции* – доказывается утверждение №1; **(2)** – *индуктивный переход* – доказывается, что при любом n из утверждения №n вытекает утверждение №$(n+1)$.

7∘7. Верно ли, что при разрезании выпуклого n-угольника на треугольники по диагоналям число получившихся треугольников будет одним и тем же, как бы не резали? Чему оно может равняться? Какова сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

7∘8. На сколько кусков разбивается плоскость n прямыми, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны?

[1] слова не обязаны быть осмысленными и буквы в словах могут повторяться

7∘9. Всегда ли плоскость, разбитая на части прямыми и окружностями, раскрашивается в два цвета так, чтобы имеющие общую сторону куски были разноцветными?

7∘10*. Даны n точек. Верно ли, что они либо лежат на одной прямой, либо их соединяет не менее n разных прямых?

7∘11. Сколько разных m-буквенных слов можно написать n-буквенным алфавитом, если буквы в словах **а)** могут **б)** не могут повторяться?

7∘12. В бесконечный лабиринт на рис. 7.1 падает шарик и под действием тяжести проваливается вниз, случайным образом поворачивая налево-направо. На на каждой из комнат верхних 11 этажей напишите, сколькими различными путями шарик может до неё добраться.

7∘13. Для $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в $(1+x)^k$ и $(a+b)^k$. Сформулируйте и докажите теорему, сравнивающую полученные ответы с ответами зад. 7∘12.

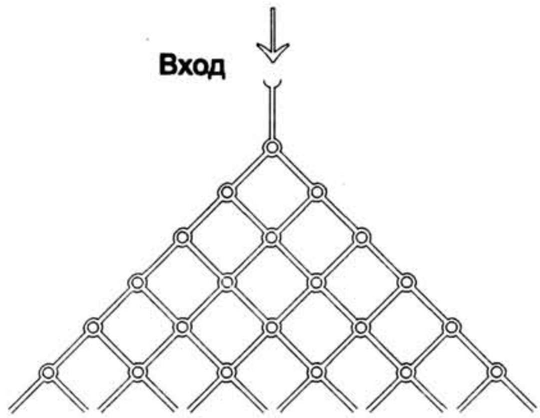


Рис. 7.1. *Лабиринт Паскаля*

7∘14. Число $x+1/x$ является целым. Будет ли целым x^n+1/x^n ? (Начните с $n = 2, 3, \dots$)

Листок №$7\frac{1}{2}$(дополнительный). Знакомьтесь, граф ...

Граф — это конечное множество точек на плоскости (*вершин графа*), некоторые из которых соединены отрезками (*рёбрами графа*). Количество выходящих из данной вершины A рёбер называется *степенью* вершины и обозначается $\deg A$.

$7\frac{1}{2}$∘1. (лемма о рукопожатиях). Выразите сумму степеней всех вершин произвольного графа через общее число его рёбер.

$7\frac{1}{2}$∘2. В любом ли графе с более чем одной вершиной есть пара вершин одинаковой степени?

$7\frac{1}{2}$∘3. Все 28 Петиных одноклассников имеют по различному числу друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

$7\frac{1}{2}$∘4. (уроки демократии - 1). Каждый из 450 думцев врезал по физиономии ровно одному своему коллеге. Наберётся ли среди них 150, из которых никто никого по лицу не бил?

$7\frac{1}{2}$∘5*. (теорема Холла). В некой компании n юношей и при каждом $k = 1, 2, \dots, n$ для любых k юношей в этой компании найдётся не менее k девушек, знакомых хотя бы с одним из рассматриваемых k юношей. Можно ли просватать всех юношей за знакомых девушек?

Путь в графе — это последовательность его вершин $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ и рёбер $[A_1, A_2]$, $\dots, [A_n, A_{n+1}]$, соединяющих соседние вершины в этой последовательности; число n называют *длиной* пути. Если все рёбра пути различны и начальная вершина совпадает с конечной: $A_1 = A_{n+1}$, то путь называют *циклом*. Граф называют *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём. Связный граф без циклов называется *деревом*.

$7\frac{1}{2}$○6°. Нарисуйте какое-нибудь дерево. Пусть между любыми двумя вершинами графа имеется ровно один путь из неповторяющихся рёбер. Является ли это условие

а) необходимым **б)** достаточным для того, чтобы граф был деревом?

$7\frac{1}{2}$○7°. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

$7\frac{1}{2}$○8°. (остовы). Всегда ли из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево с тем же множеством вершин, что и исходный граф[2]?

$7\frac{1}{2}$○9*. **(теорема Кели).** Докажите, что полный[3] граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

$7\frac{1}{2}$○10°. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы он остался связным?

$7\frac{1}{2}$○11. Могут ли степени всех вершин несвязного n-вершинного графа быть $\geqslant (n-1)/2$?

$7\frac{1}{2}$○12. Из столицы выходит 101 авиалиния, из г. Дальний — одна, а из остальных городов — по 100. Можно ли, пусть с пересадками, долететь из столицы в Дальний?

$7\frac{1}{2}$○13. (эйлеровы графы). Докажите, что в связном графе тогда и только тогда есть цикл, проходящий ровно один раз по каждому рёбру, когда степени всех вершин чётны.

Плоские графы — это графы, рёбра которых не пересекают друг друга нигде кроме вершин. Части, на которые делит плоскость такой граф, называются *гранями графа*.

$7\frac{1}{2}$○14. Докажите, что грани плоского графа тогда и только тогда раскрашиваются в два цвета так, чтобы грани с общим ребром получались разноцветными, когда этот граф эйлеров (см. зад. $7\frac{1}{2}$○13).

$7\frac{1}{2}$○15. Многоугольник разрезают на треугольники непересекающимися (нигде кроме вершин) диагоналями. Может ли при этом получиться меньше двух треугольников с парой сторон, бывших сторонами исходного многоугольника?

Листок №$7\frac{2}{3}$(дополнительный). Разные задачи о графах

$7\frac{2}{3}$○1. (формула Эйлера). Всегда ли $в - р + г = 2$ в плоском связном графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями[4]? Справедливо ли это равенство для вершин, рёбер и граней произвольного выпуклого многогранника[5]?

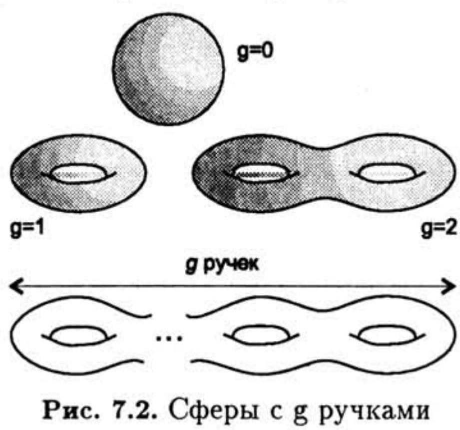


Рис. 7.2. Сферы с g ручками

$7\frac{2}{3}$○2. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его рёбра не пересекались?

$7\frac{2}{3}$○3*. Как изменится формула Эйлера, если граф с непересекающимися рёбрами нарисован не на сфере, а на **а)** торе («сфере с ручкой»)?

---

[2]такое дерево называется *остовом* графа

[3]граф называется *полным*, если любая его вершина соединена с любой другой ровно одним ребром

[1]ср. с зад. 4○3 и 4○4

б) кренделе («сфере с 2 ручками»)? **в**) сфере с g ручками? (См. рис. на пред. стр.)

$7\frac{2}{3}$∘4. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и проложить попарно непересекающиеся тропинки от каждого дома к каждому колодцу?

$7\frac{2}{3}$∘5. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют отрезками любые две из ещё не соединённых точек так, чтобы эти отрезки не пересекались нигде кроме отмеченных точек. Тот, кто не может сделать ход, — проиграл. Зависит ли исход этой игры от того, как ходят соперники?

$7\frac{2}{3}$∘6*. Трёхзначный кодовый замок откроется как только будут последовательно набраны три правильные цифры подряд (вне зависимости от того, какие цифры набирались до этого). Можно ли, набирая по одной цифре в секунду, открыть такой замок за 17 минут?

$7\frac{2}{3}$∘7. В некой компании поровну юношей и девушек и каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что всех их можно переженить друг на друге в рамках этих знакомств.

k-дольные графы. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром. Граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами и не меньше.

$7\frac{2}{3}$∘8. Равносильна ли двудольность отсутствию циклов нечётной длины?

$7\frac{2}{3}$∘9. В любом ли k-дольном графе есть путь из ровно k разноцветных вершин?

$7\frac{2}{3}$∘10. Существует ли граф с n вершинами $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и n рёбрами $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, такими что A_i соединяется ребром с A_j тогда и только тогда, когда b_i и b_j выходят из одной вершины? Если да, то какова степень каждой вершины?

$7\frac{2}{3}$∘11. Города страны соединены $k \cdot m$ прямыми авиалиниями, и некие m юридических лиц вознамерились прихватизировать ровно по k линий, однако антимонопольная служба зорко следит за тем, чтобы ни в одном из городов ни одному лицу не досталось бы сразу две линии, выходящие из этого города. Возможно ли осуществить такую прихватизацию?

$7\frac{2}{3}$∘12. В кубической коробке $n \times n \times n$ лежали n^3 единичных кубиков. Кубики высыпали, каждый просверлили по диагонали, затем все плотно нанизали на нить и связали в кольцо (соединили вершину первого кубика с вершиной последнего). При каких n получившееся «ожерелье» можно обратно убрать в коробку?

$7\frac{2}{3}$∘13*. В гости ожидается либо n, либо m человек, причём $\text{НОД}(n, m) = 1$. На какое минимальное число секторов нужно разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как n, так и m одинаковых кусков?

$7\frac{2}{3}$∘14*. Всегда ли среди 50 человек найдутся двое с чётным (возможно, нулевым) числом общих знакомых среди 48 остальных?

---

[2]который есть не что иное, как связный граф с непересекающимися рёбрами, нарисованный на сфере

Листок №8. Множества и отображения

(памятка начинающему пользователю)

Понятие *множества* в анализе, подобно понятию *прямой* в геометрии, определяется не конструктивно, а «как объект, удовлетворяющий аксиомам» (этот список *аксиом теории множеств* мы пока не будем уточнять). Как *прямая* и *точка* формализуют известные пространственные образы, так *множества* формализуют житейские представления о совокупностях предметов произвольной природы. Множество состоит из *элементов*. Элементы могут быть любые: числа, стулья, другие множества ... Принадлежность элемента a множеству A обозначается $a \in A$. Единственное множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Все элементы в любом множестве, по определению, *различны*. Множество задано, как только про любой объект можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент $a \in A$ лежит также и в B. Для любых двух множеств A и B множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $A \setminus B$, состоящее из всех элементов множества A, которые не содержатся в B, называется их *разностью*.

8○1. Сколько всего подмножеств у множества, содержащего n элементов?

8○2. Какие из перечисленных ниже свойств справедливы для любых множеств A, B и C:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **б)** $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

в) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$ **г)** $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

д) $A \setminus C = B \setminus C \Rightarrow A = B$ **е)** $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

ж) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **з)** $A \cap C = B \cap C \Rightarrow A = B$

8○3. Выражаются ли:

а) пересечение через разность? **б)** разность через пересечение и объединение?

Отображение $A \xrightarrow{f} B$ из множества A в множество B — это правило, сопоставляющее *каждому* элементу $a \in A$ *ровно один* элемент $f(a) \in B$, зависящий от a и называемый *образом* a. Подмножество $f(A) \subset B$, состоящее из образов элементов множества A, называется *образом* отображения f. Отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $A \xrightarrow{g} B$ *равны*, если $f(a) = g(a) \quad \forall a \in A$. Отображение $B \xrightarrow{g} A$ называется *обратным* к отображению $A \xrightarrow{f} B$, если $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ и одновременно $f(g(y)) = y \quad \forall b \in B$; в этой ситуации отображение f (и отображение g) называют *обратимым* и пишут $g = f^{-1}$. Отображение $A \xrightarrow{f} B$ называется *отображением «на»* (или *сюръективным*, или *эпиморфным*, или *наложением*), если у каждого элемента $b \in B$ есть прообраз в A, т. е. $f(A) = B$. Отображение называется *отображением «в»* (или *инъективным*, или *мономорфным*, или *вложением*), если никакие два элемента из A не переходят в один и тот же элемент B, т. е. $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Отображение, являющееся одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (или *изоморфизмом*, или *биекцией*).

8○4. Нарисуйте все отображения: **а)** из $\{0, 1, 2\}$ в $\{0, 1\}$; **б)** из $\{0, 1\}$ в $\{0, 1, 2\}$.

8○5. Из отображений: $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$; $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{Z}$ (с $p \in \mathbb{Z}$); $\mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto px,} \mathbb{R}$ (с $p \in \mathbb{R}$)

выберите все **а)** биекции, **б)** инъекции, **в)** сюръекции.

8∘6. Равносильна ли взаимная однозначность обратимости?

8∘7. Достаточно ли для того, чтобы f было обратно к g, только одного условия
а) $f(g(b)) = b \ \ \forall\, b \in B$? **б)** $g(f(a)) = a \ \ \forall\, a \in A$?

8∘8. Некое число делится на 2, но не делится на 4. Каких делителей у него больше: чётных или нечётных?

8∘9. Каких треугольников с целыми длинами сторон больше: с периметром 1999 или 2002?

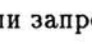
Листок №9. Как сравнивать множества

По пыльной тропинке далёкой планеты бредёт стадо семиногих пятихвосток.
Сколько ног приходится на каждую сотню хвостов ?
(детская загадка)

9∘1. Сколько всего разных **а)** любых **б)** инъективных **в)** сюрьективных **г)** биективных отображений можно построить из n-элементного множества в m-элементное?

Прообразы. Если задано отображение $A \xrightarrow{f} B$, то $\forall\, b \in B$ множество $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid f(a) = b \,\} \subset A$ называется *полным прообразом* b, а его элементы — *прообразами* b. У разных $b \in B$ может быть разное число (в том числе и нуль) прообразов. Если каждый $b \in B$ имеет ровно m прообразов, то отображение f называется *m-листным накрытием*[1].

9∘2. Как изменятся ответы в зад. 7∘3, если букву **о** и букву **к** обе заменить буквой **ы**? Сколько слов можно получить переставляя буквы в словах: **а) кок**, **б) курок**, **в) СССР**, **г) колобок**, **д) рефрижератор**, **е)** $\underbrace{\text{аа}\ldots\text{а}}_{\alpha}\underbrace{\text{бб}\ldots\text{б}}_{\beta}$, **ж)** $\underbrace{a_1a_1\ldots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2a_2\ldots a_2}_{m_2}\ldots\underbrace{a_ka_k\ldots a_k}_{m_k}$?

Диаграмма Юнга — это картинка типа , состоящая из выровненных по левому краю горизонтальных клеточных полосок, длина которых сверху вниз не возрастает.

9∘3. Имеется 5 разноцветных чашек, 7 разноцветных соломинок, 4 одинаковых стакана и 6 одинаковых кусков сахара. Сколькими способами можно разложить[2]: **а)** сахар по чашкам? **б)** соломинки по чашкам? **в***) сахар по стаканам? **г***) соломинки по стаканам?

9∘4. Как изменятся ответы в зад. М⋄3, если запретить пустые ёмкости?

9∘5. Сколько имеется одночленов степени d от **а)** двух **б)** трёх **в)** n переменных?

9∘6. Цело ли число $1000!/10!^{100}$?

9∘7. Сколько получится слагаемых, если тупо раскрыть скобки у $(a+b+c)^3$? Какие одночлены и с какими коэффициентами останутся после приведения подобных?

---

[1] в частности, однолистные накрытия — это в точности взаимно однозначные отображения

[2] две раскладки одинаковы, если они получаются друг из друга передвиганием ёмкостей по столу без изменения их содержимого.

9∘8. Между какими из перечисленных ниже множеств имеется изоморфизм? Постройте эти изоморфизмы явно. Сколько элементов в каждом множестве?

а) значки, которые можно высвечивать, зажигая ровно 12 лампочек на прямоугольном табло, имеющем 5 рядов по 4 лампочки в каждом;

б) способы раскладывания 8 одинаковых кусков сахара по 13 разным чашкам;

в) слова, которые получаются при перестановке букв в слове ааааааабббббббббббб;

г) маршруты из зад 7∘12, приводящие шарик в 12-ю комнату на 20-м этаже (этажи и комнаты нумеруются сверху вниз и слева направо, начиная с нулевого номера);

д) одночлены a^8b^{12}, которые получатся если тупо раскрыть скобки у $(a+b)^{20}$ и не приводить подобные слагаемые;

е) диаграммы Юнга высоты $\leqslant 8$ и ширины $\leqslant 12$.

9∘9*. Грани кубика раскрашивают в 6 фиксированных разных цветов (разные – в разные). Сколько разных кубиков может получиться?

9∘10*. Как изменится ответ, если шестью цветами раскрашивать не кубик, а тетраэдр?

9∘11*. Сколько разных игрушек получится, если в предыдущих двух задачах склеивать крашеные кубики (соотв. тетраэдры) по два грань к грани?

Листок №10. Мультиномиальные коэффициенты

10∘1. Сколько слагаемых получится, если раскрыть скобки и привести подобные у выражения $(a+b+c)^5$? Будут ли среди них a^2bc^2 и ab^2c^3, и если да, то с каким коэффициентом?

10∘2. Какие одночлены и с какими коэффициентами получатся после раскрытия скобок и приведения подобных у **а)** $(1+x)^n$; **б)** $(a+b)^n$; **в)** $(x_1+x_2+\dots+x_m)^2$; **г)** $(x_1+x_2+\dots+x_m)^n$; **д)** $(1+x_1+x_2+\dots+x_m)^n$.

Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний. Коэффициент при x^k, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых у $(1+x)^n$, называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k}$ (обратите внимание, что $\binom{n}{k}=0$ при $k<0$ и $k>n$ и $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\binom{0}{0}=1$). Количество слов, которые можно получить, переставляя буквы в n-буквенном слове аа...абб...б, содержащем k букв а и $(n-k)$ букв б, называется *числом сочетаний* из n по k и обозначается C_n^k.

10∘3°. Докажите, что $\binom{n}{k}=C_n^k$ и совпадает с числом путей из зад. 7∘12, ведущих в k-тую комнату на n-том этаже. Верно ли, что $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$?

10∘4°. Выразите $\binom{n}{k}$ явно через n и k и вычислите для $0\leqslant n\leqslant 15$ и всех $0\leqslant k\leqslant n$.

10∘5. Из произвольной последовательности чисел $A_0, A_1, \dots, A_n$ строят новую последовательность $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, \dots, A_{n-1}^{(1)}$, состоящую из сумм соседних элементов: $A_i^{(1)} = A_i + A_{i+1}$. Затем строят следующую последовательность $A_0^{(2)}, A_1^{(2)}, \dots, A_{n-2}^{(2)}$ с $A_i^{(2)} = A_i^{(1)} + A_{i+1}^{(1)}$ и т. д. пока не получится последовательность $A_0^{(n)}$, состоящая из одного числа. Выразите его через исходные числа $A_0, A_1, \dots, A_n$ явной формулой.

Треугольник Паскаля — это бесконечный вниз числовой треугольник на рис. 10.1. Его строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в каждой строке — слева направо, также начиная с нуля; k-е число n-того этажа — это $C_n^k = \binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \ddots & & \ddots & \ddots
\end{array}
$$

Рис. 10.1. *Треугольник Паскаля*

10∘6. Найдите в треугольнике Паскаля числа: натуральные $1, 2, 3, \ldots$, треугольные: T_1, $T_2, T_3, \ldots$ и «пирамидальные» $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$ (они составляются из треугольных по правилу $\Pi_k \overset{\text{def}}{=} T_1 + T_2 + \cdots + T_k$). Вычислите сумму[1]: $C_k^0 + C_{k+1}^1 + \cdots + C_{k+n}^n$.

10∘8. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$; **б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n$.

10∘9. Вычислите суммы: **а)** $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots$ **б)** $C_n^0 + C_{n+1}^2 + C_{n+2}^4 + \cdots$ **в)** $C_n^1 + 2\,C_n^2 + \cdots + n\,C_n^n$ **г)** $C_n^0 + 2\,C_n^1 + \cdots + (n+1)\,C_n^n$ **д*)** $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

10∘10. Выразите $(n+1)^{k+1} - n^{k+1}$ в виде многочлена от n. Покажите, что сумма k-тых степеней первых n натуральных чисел является многочленом $(k+1)$-ой степени от n. Найдите его старший коэффициент и свободный член.

10∘11*. Для $k = 5$ выпишите многочлены из зад. 10∘10 явно.

Листок №$10\frac{1}{2}$(дополнительный). Две вариации на тему биномиальных коэффициентов

«... при помощи этой формулы я смог сложить десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа...»
(Якоб Бернулли (1654–1705), «Ars Conjectandi», издано в 1713 г., посмертно)

$10\frac{1}{2}$∘12. Любое ли целое число граммов можно отвесить на чашечных весах, пользуясь набором гирь в $1\,г$, $3\,г$, $9\,г$, $27\,г$, ... (по одной гире каждого веса)?

***m*-ичная позиционная система счисления** использует m цифр, коими служат символы: $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{m-1}$. Под n-разрядным числом m-ичной системы мы понимаем любую последовательность из n m-ичных цифр (возможно, начинающуюся с нулей). Для $\ell \in \mathbb{N}$ запись $\ell = \overline{\mu_0\mu_1\ldots\mu_{n-1}}$ означает, по определению, что $\ell = \mu_0 + \mu_1\,m + \mu_2\,m^2 + \cdots +$

[1] С этой задачей связана такая многомерная геометрия:

10∘7*. Двумерная пирамида высоты k — это треугольник: $\Pi_k^{(2)} \overset{\text{def}}{=} T_k$. Трёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку треугольников $\Pi_k^{(3)} \overset{\text{def}}{=} T_1 + T_2 + \cdots + T_k$. Четырёхмерная пирамида высоты k состоит из сложенных в стопку вдоль «четвёртой координатной оси» трёхмерных пирамид: $\Pi_k^{(4)} \overset{\text{def}}{=} \Pi_1^{(3)} + \Pi_2^{(3)} + \cdots + \Pi_k^{(3)}$. Что такое m-мерная пирамида высоты k и сколько m-мерных кубиков уйдёт на её постройку? Из двух двумерных пирамид складывается прямоугольник: $T_k + T_k = k \times (k+1)$. Можно ли из шести трёхмерных пирамид $\Pi_k^{(3)}$ сложить параллелепипед $k \times (k+1) \times (k+2)$? Из скольких m-мерных пирамид высоты k следует пытаться собирать m-мерный параллелепипед и каковы будут его размеры?

$+\mu_{n-1}\, m^{n-1}$. Количество всех n-разрядных чисел m-ичной системы с суммой цифр k мы будем обозначать через $\beta_m(n,k)$.

$10\frac{1}{2}\circ 13$. Запишите десятичные числа 43, 57 и 1999 в 2-ичной, 3-ичной и 16-ричной системах.

$10\frac{1}{2}\circ 14$. Покажите, что при заданном натуральном $m \geqslant 2$, каждое натуральное число ℓ может быть единственным образом записано в m-ичной позиционной системе счисления, т. е. что существует единственный набор целых чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, лежащих в пределах от 0 до $m-1$ включительно и с $\mu_{n-1} \neq 0$, такой что $\ell = \mu_0 + \mu_1\, m + \mu_2\, m^2 + \cdots + \mu_{n-1}\, m^{n-1}$.

$10\frac{1}{2}\circ 15$. Сколько всего n-разрядных чисел в m-ичной системе и чему равно $\beta_2(n,k)$?

$10\frac{1}{2}\circ 16^*$. Докажите, что $\beta_m(n,k)$ равно коэффициенту при x^k в разложении

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}\right)^n$$

и удовлетворяет соотношениям $\beta_m(n,k) = \beta_m(n,\, n\,(m-1)-k)$ и

$$\beta_m(n,k) = \beta_m(n-1,k) + \beta_m(n-1,k-1) + \cdots + \beta_m(n-1,k-m+1)\,.$$

$10\frac{1}{2}\circ 17^*$. Суеверные люди считают счастливым каждое шестиразрядное десятичное число, у которого сумма трёх первых цифр равна сумме трёх последних. Сколько таких «счастливых» чисел? ([2])

Числа Бернулли B_k начинаются с $B_0 \overset{\text{def}}{=} 1$ и определяются реккурентно[3] формулой

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\left(C_{k+1}^0 B_0 + C_{k+1}^1 B_1 + \cdots + C_{k+1}^{k-1} B_{k-1}\right).$$

$10\frac{1}{2}\circ 18^*$. Покажите, что сумма k-тых степеней первых $(n-1)$ натуральных чисел равна

$$\frac{1}{k+1}\left(C_{k+1}^0 B_0\, n^{k+1} + C_{k+1}^1 B_1\, n^k + \cdots + C_{k+1}^{k-1} B_{k-1}\, n\right).$$

$10\frac{1}{2}\circ 19^*$. Вычислите первые 14 чисел Бернулли и сумму $1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + (n-1)^{10}$.

$10\frac{1}{2}\circ 20^*$. Что Вы можете сказать про числа Бернулли с нечётными номерами?

$10\frac{1}{2}\circ 21^*$. Как ведут себя знаки чисел Бернулли?

Листок №11. Арифметика вычетов

$11\circ 1$. (остаток суммы и произведения). Выразите остатки от деления на n чисел $A+B$ и AB через остатки a и b самих чисел A, B.

$11\circ 2$. Найдите последнюю цифру и остаток от деления на 7 у 1998^{1999} и $1998^{1999^{2000}}$

[2] Подсказка: их $\beta_{10}(6,27)$.

[3] Предупреждение: «явного» выражения B_n через n не существует!

11∘3. Верно ли, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7, а $2^{70} + 3^{70}$ — на 13?

11∘4. Может ли квадрат натурального числа давать остаток 2 от деления на 6? Какие остатки могут давать квадраты натуральных чисел от деления на 8?

11∘5. Имеет ли уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,xyz$ ненулевые решения в целых числах?

11∘6. Верно ли, что: **а**) $a^2 + b^2 \vdots 7 \Rightarrow a \vdots 7$ и $b \vdots 7$? **б***) $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 7 \Rightarrow abc \vdots 7$?

в*) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \vdots 9 \Rightarrow abcde \vdots 9$?

Арифметика вычетов по модулю 7 (или ***7-арифметика***) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ состоит из семи «чисел» — остатков от деления на 7 (мы будем обозначать их $[0]_7, [1]_7, \dots, [6]_7$). По определению, $[x]_7 + [y]_7$ есть остаток от деления на 7 суммы $x + y$, а $[x]_7 \cdot [y]_7$ — остаток произведения xy.

11∘7. Составьте для 7-арифметики таблицы сложения и умножения и проверьте, что эти операции подчиняются обычным переместительному, сочетательному и распределительному законам. Дайте определение противоположного числа $-a$ и обратного числа a^{-1} к данному числу $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Составьте таблицы противоположных и обратных чисел. Справедливы ли в 7-арифметике тождества $(-1) \cdot a = -a$ и $(-a) \cdot (-b) = ab$?

11∘8. Дайте определение n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и составьте таблицы сложения и умножения для 5-, 6- и 8-арифметик. Верно ли, что при умножении в n-арифметике
а) у всех ненулевых чисел есть обратные **б**) «минус» на «минус» даёт «плюс»
в) $a \neq 0$ и $b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$ **г**) $ab = ac$ и $a \neq 0 \Rightarrow b = c$ **д**) $a \neq 0 \Rightarrow a^n \neq 0\ \forall\, n \geqslant 1$
е) степени $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$ любого $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ всегда «зацикливаются»?

11∘9. Вычислите сумму всех чисел n-арифметики. Делится ли $1^3 + 2^3 + \cdots + 28^3$ на 29?

11∘10. **(позиционные признаки делимости).** Вычислите остатки всех степеней десятки от деления на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7 и скажите, как глядя на цифры десятичной записи данного числа (скажем, $\overline{abcdefghi}$) узнать, делится ли оно на 2, 5, 4, 3, 9, 11, 7?

11∘11. У каких чисел 5-, 6- и 8-арифметик есть обратные (такие числа называются *обратимыми*)? Укажите эти обратные явно.

11∘12. Докажите, что следующие свойства $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ попарно эквивалентны:
а) a обратим; **б**) отображение умножения на a: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto ax} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ взаимно однозначно;
в) $ax = 0 \Rightarrow x = 0$; **г**) $ax = ay \Rightarrow x = y$; **д**) $\forall y\ \exists x\ :\ ax = y$; **е**) $\text{НОД}(a, n) = 1$.

11∘13*. **(теорема Вильсона).** Чему равно произведение всех ненулевых чисел n-арифметики при простом и составном n? Верно ли, что натуральное число $p \geqslant 2$ просто, если и только если оно делит $(p-1)! + 1$?

11∘14*. **(гомоморфизм Фробениуса).** Пусть p – простое. Докажите, что C_p^k делится на p при всех $1 < k < p$ и что в p-арифметике выполнено тождество $(a+b)^p = a^p + b^p$.

11∘15*. **(малая теорема Ферма).** Докажите, что для любого $a \in \mathbb{N}$ и простого p степень a^p имеет тот же остаток от деления на p, что и a.

Листок №12. Простые числа и разложение на множители

Число $p \in \mathbb{Z}$ называется *простым*, если оно делится только на ± 1 и $\pm p$.

12∘1. Найдите все простые числа, которые одновременно представляются в виде суммы и в виде разности двух простых чисел.

12∘2. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

12∘3. Существуют ли на числовой прямой сколь угодно длинные отрезки, не содержащие ни одного простого числа?

12∘4*. Верно ли, что среди чисел вида **а)** $2^{2^k}-1$ **б)** $1\overbrace{00\ldots00}^{k}3$ **в)** $\overbrace{33\ldots33}^{k}1$ имеется бесконечно много составных?

12∘5. (основное свойство простых чисел). Пусть $p \in \mathbb{Z}$ простое. Докажите, что $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$ произведение ab делится на p только если a или b делится на p. Бывают ли непростые числа p с таким свойством?

12∘6. Пусть $p > 0$ простое. Существуют ли $x, y \in \mathbb{N} : x^2 = p\,y^2$?

12∘7*. Существуют ли $n \geqslant 1$ различных простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и рациональные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, для которых $\lambda_1\sqrt{p_1}+\lambda_2\sqrt{p_2}+\cdots+\lambda_n\sqrt{p_n}$ рационально? Это весьма трудная задача. Попытайтесь решить её хотя бы для $n = 1, 2, 3$.

12∘8. (факториальность $\mathbb{Z}$). Докажите, что любое целое число z можно представить в виде произведения $z = \pm p_1 p_2 p_3 \cdots p_s$, в котором все сомножители суть натуральные простые числа (не обязательно разные), и любые два таких разложения (например, полученные разными способами) могут различаться *только порядком следования множителей*.

12∘9. Разложите на простые множители все числа A, B из зад. 3∘6.

12∘10. Сколько различных натуральных делителей у числа: **а)** 27; **б)** 35; **в)** 67500; **г)** $p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots p_s^{m_s}$ (p_ν — попарно разные простые).

12∘11. Найдите все кратные 30 числа с ровно тридцатью натуральными делителями.

12∘12*. Перечислите все $n \in \mathbb{N}$, имеющие не менее $\sqrt{n}$ натуральных делителей.

12∘13. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что несократимая дробь p/q (где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) может быть корнем уравнения $f(x) = 0$, только если $a_0 \,\vdots\, q$ и $a_n \,\vdots\, p$.

Функция Эйлера. Обозначим через $\varphi(n)$ количество обратимых чисел в n-арифметике (т. е. количество всех не превосходящих n натуральных чисел, взаимно простых с n, см. зад. 11∘12). Отображение $n \mapsto \varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

12∘14*. Изобразим числа n-арифметики $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ точками, зафиксируем какое-либо одно число $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и из каждой точки $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ проведём стрелку в точку ax. Докажите, что если a обратим, то на этой картинке движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы, причём каждый цикл, содержащий хоть одно обратимое число, весь состоит из обратимых чисел, и все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину.

12∘15*. (теорема Эйлера). Используя предыдущую задачу, докажите, что для любых взаимно простых $a, b \in \mathbb{N}$ число $a^{\varphi(b)}$ имеет остаток 1 от деления на b.

12∘16*. Вычислите $\varphi(n)$ для **а**) $n = 36$ **б**) $n = p^k$ (p – простое) **в***) $n = p_1 p_2 p_3 \cdots p_s$ **г***) $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots p_s^{m_s}$ (p_ν попарно разные простые).

Листок №13. Бесконечные множества

13∘1°. Придумайте множество A, вложение $A \xhookrightarrow{\varphi} A$ и наложение $A \xrightarrow{\psi} A$, которые, однако, не являются *биекциями*. Возможно ли такое для конечного множества A?

13∘2. Толя рисует на доске 10 крестиков, после чего Коля стирает один из них, затем Толя рисует ещё 10 крестиков, а Коля стирает ещё один крестик и т. д. На первую пару ходов уходит 1 сек., на вторую — пол секунды, на третью — четверть и т. д. Толя выигрывает, если через 2 сек. на доске будет хоть один крестик; в противном случае выигрывает Коля. Кто победит при правильной игре?

13∘3. Бесконечный направо и вниз лист клетчатой бумаги сплошь заполнен крестиками и ноликами. Всегда ли, глядя на этот лист, можно построить последовательность крестиков-ноликов, не совпадающую ни с одной из строк?

Счётные множества. Множество M называется *счётным*, если оно изоморфно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Иначе говоря, множество M счётно, если все его элементы можно занумеровать разными натуральными числами, так что все натуральные числа будут при этом израсходованы.

13∘4. Счётно ли множество: **а**) простых **б**) целых **в**) рациональных чисел?

13∘5. Счётно ли множество точек координатной плоскости, обе координаты которых
а) целые **б**) рациональные?

13∘6. Всегда ли бесконечное подмножество счётного множества счётно?

13∘7. Является ли счётным объединение **а**) счётного множества с конечным множеством;
б) конечного числа (например, двух или трёх) счётных множеств;
в) счётного множества счётных множеств?

13∘8. Пусть при отображении множеств $A \xrightarrow{f} B$ у каждого $b \in B$ имеется непустое
а) конечное **б**) конечное или счётное множество прообразов.
Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

13∘9. Счётно ли множество **а**) конечных **б**) бесконечных слов из букв **а** и **б** ?

13∘10. Счётно ли множество всех: **а**) конечных **б**) счётных подмножеств счётного множества?

Мощность. Про изоморфные множества говорят, что они *равномощны*. Если множество A изоморфно некоторому подмножеству множества B, но не изоморфно самому B, то говорят, что B *мощнее* A.

13∘11*. Докажите, что множество отображений из произвольного множества A в любое множество, содержащее не менее двух элементов, мощнее, чем A.

13∘12*. Докажите, что множество всех подмножеств непустого множества A мощнее, чем A.

13∘13. Постройте биекцию между отрезком $[0,1]$ и полуинтервалом $[0,1)$.

13∘14*. (теорема Кантора - Бернштейна). Докажите, что если множество B равномощно подмножеству множества A, а множество A равномощно подмножеству множества B, то A и B равномощны.

О противоречиях. Высказывание *противоречиво*, если из него следует *ложное утверждение* (т. е. высказывание типа «A и не A»). Из ложного утверждения следует всё что угодно.

13∘15*. (уроки демократии - 2). Был, помнится, в Думе такой меж депутатами разговор:

г-н Ж: «Я точно знаю, что на следующей неделе думу распустят»

г-н З: «В какой же день?»

г-н Ж: «Об этом не будет известно заранее».

Покажите, что высказывания депутата Ж противоречивы.

13∘16*. Докажите противоречивость следующих двух понятий:

а) «множество всех множеств»;

б) «множество всех множеств, которые можно описать фразой, содержащей не более 2000 типографских знаков».

Листок №14. Действительные числа и БДД

Бесконечная десятичная дробь (БДД) — это конечная влево и бесконечная вправо последовательность десятичных цифр вида $\pm\overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0,b_1b_2\dots b_m\dots}$. Куски слева и справа от запятой называются *целой* и *дробной* частями данной БДД. Если БДД имеет лишь конечное множество ненулевых цифр, то она называется *конечной*; у такой БДД все цифры правее некоего разряда — нули, и их обычно не пишут.

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ получается из множества всех БДД путём отождествления друг с другом некоторых пар БДД по следующему правилу: две БДД, по определению, изображают одно и то же действительное число, если и только если они одного знака и существует номер $i\in\mathbb{Z}$, такой что цифры этих дробей во всех разрядах левее i-того совпадают, в i-том разряде различаются ровно на единицу, и дробь с большей i-той цифрой имеет справа от i-того разряда одни нули, а с меньшей — одни девятки. Иными словами, $\overline{b_\beta\dots b_{i-1}\,b_i\,9999\dots}=\overline{b_\beta\dots b_{i-1}\,(b_i+1)\,0000\dots}$ как действительные числа. Если действительное число имеет два представления в виде БДД, то представление, оканчивающееся нулями, мы будем называть *стандартным* и использовать по умолчанию именно его.

14∘1. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчётно.

Неравенства. Положительные БДД *больше* отрицательных. Для сравнения двух положительных БДД их стандартные представления записывают друг под другом, выровнив по запятой; *меньшей* считается БДД с меньшей самой левой из несовпадающих цифр. Для отрицательных БДД наоборот: $-a<-b\Leftrightarrow a>b$.

Ограниченность. Число $b\in\mathbb{R}$ называется *верхней гранью* для данного множества действительных чисел $M\subset\mathbb{R}$, если $b\geqslant x\quad\forall x\in M$. Множество $M\subset\mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если у него есть верхняя грань. Аналогично определяются *нижняя* *грань* и *ограниченность снизу*. Множества ограниченные одновременно и сверху и снизу называются просто *ограниченными*.

14∘2°. Не употребляя отрицаний, дайте определения:
а) числа, не являющегося нижней гранью данного множества $M \subset \mathbb{R}$;
б) множества, неограниченного сверху;
в) неограниченного множества.

Максимальные элементы. Число $m \in M$, такое что $m \geqslant x \quad \forall x \in M$, называется *максимальным элементом* множества $M \subset \mathbb{R}$. Максимальный элемент в множестве нижних граней данного множества M называется *точной нижней гранью* (сокращённо: тнг) и обозначается $\inf M$ (от латинского «infimum»).

14∘3°. Дайте определение *минимального* элемента и *точной верхней грани* (сокращённо: твг) данного множества $M \subset \mathbb{R}$ (она обозначается $\sup M$ — от латинского «supremum»).

14∘4. Каждое ли ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет максимальный элемент?

14∘5. Вычислите твг множеств: **а)** $\{0,3\,;\ 0,33\,;\ 0,333\,;\ 0,3333\,;\ 0,33333\,;\ \dots\}$;
б) сумм $1+q+q^2+\cdots+q^m$ с фиксированным $0<q<1$ (скажем, $q = 1/2$) и любым $m \in \mathbb{N}$.

14∘6. Верно ли, что любая бдд $b \in \mathbb{R}$ есть твг множества:
а) всех бдд, меньших b;
б) всех конечных бдд, меньших b;
в) всех конечных бдд, являющихся начальными кусками b.

14∘7. (теорема о полноте). Докажите, что каждое ограниченное сверху подмножество в $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань, а каждое ограниченное снизу – точную нижнюю.

14∘8. (сложение и умножение). Суммой бдд $a, b \in \mathbb{R}$ называется твг чисел вида $\alpha+\beta$, где $\alpha < a$ и $\beta < b$ — всевозможные *конечные* бдд. Аналогично, произведение ab двух *положительных* бдд — это твг чисел вида $\alpha\beta$ с *конечными положительными* $\alpha < a$ и $\beta < b$ (на неположительные бдд произведение распространяется по стандартному правилу «$-$» на «$-$» даёт «$+$»). Докажите, что эти определения корректны (т. е. нужные твг существуют), дают для конечных a и b то же, что и раньше, и проверьте, что $a(b+c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

14∘9. (корни). Пусть $b \in \mathbb{R}$ есть твг конечных бдд β с $\beta^2 < 5$. Докажите, что b существует и вычислите b^2.

Листок №$14\frac{1}{2}$(дополнительный).Об упорядочении

Три уровня порядка. Множество называется *частично упорядоченным* (чумом), если про некоторые пары его элементов a, b можно сказать $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$, так что при этом выполнены три свойства:

(1) $a \leqslant a\ \forall a$, **(2)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant a \Rightarrow a = b$, **(3)** $a \leqslant b$ и $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$.

Подмножество $[\dots x] \overset{\text{def}}{=} \{\, m \in M \mid m \leqslant x \,\}$ чума M называется *начальным отрезком* M *до* x. чум называется *упорядоченным* (или *линейно упорядоченным*), если отношение порядка определено *для любой* пары элементов. В линейно упорядоченном множестве можно ввести отношение $a < b$ означающее, что $a \neq b$ и $a \leqslant b$; тогда $\forall a, b$ будет выполнена альтернатива: либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Элемент $\mu \in M$ ЧУМа M называется *минимальным*, если $\forall x \in M$ из неравенства $x \leqslant \mu$ вытекает равенство $x = \mu$. Линейно упорядоченное множество называется *вполне* или *индуктивно* упорядоченным, если в любом его подмножестве имеется *минимальный* элемент. Два вполне упорядоченных множества называются *подобными*, если между ними имеется взаимно однозначное соответствие, *сохраняющее порядок*. Классы подобных вполне упорядоченных множеств называются *трансфинитными числами*.

$14\frac{1}{2}$◦1°. Выясните, какие из указанных ниже отношений «$\preccurlyeq$» на множествах M являются упорядочениями и какого типа: **а)** $M = \mathbb{N}$ и $a \preccurlyeq b \iff b$ делится на a; **б)** то же для $M = \mathbb{Z}$; **в)** $M = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ с обычным $\leqslant$ для чисел; **г)** то же для $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\infty \geqslant n \ \forall n \in \mathbb{N}$; **д)** M есть множество всех подмножеств некоторого множества A и $a \preccurlyeq b \iff a \subseteq b$; **е)** M есть множество вершин ориентированного графа Γ и $a \preccurlyeq b \iff$ в Γ есть ребро $\overrightarrow{ab}$.

$14\frac{1}{2}$◦2°. Дайте определение максимального элемента ЧУМа и приведите пример ЧУМа с несколькими максимальными элементами.

$14\frac{1}{2}$◦3°. Верно ли, что любой начальный отрезок произвольного ЧУМа линейно упорядочен?

$14\frac{1}{2}$◦4. (принцип трансфинитной индукции). Пусть множество M вполне упорядочено, и про его элементы высказано некое утверждение $\mathfrak{U}$, которое истинно для минимального элемента множества M, и при всех $m \in M$ из того, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall x < m$, следует, что $\mathfrak{U}$ истинно для m. Докажите, что $\mathfrak{U}$ истинно $\forall m \in M$.

$14\frac{1}{2}$◦5. Может ли вполне упорядоченное множество быть подобно своему начальному отрезку, отличному от всего множества?

$14\frac{1}{2}$◦6. Докажите, что отношение $a \preccurlyeq b \iff$ «a подобно начальному отрезку b» вполне упорядочивает трансфинитные числа.

Полные ЧУМы. ЧУМ M называется *полным*, если для каждого линейно упорядоченного подмножества $U \subset M$ существует элемент $m \in M$, такой что $u \leqslant m \ \forall u \in U$.

$14\frac{1}{2}$◦7*. (теорема о неподвижной точке). Докажите, что любое отображение $M \xrightarrow{f} M$ из полного ЧУМа в себя, обладающее свойством $x \leqslant f(x) \ \forall x \in M$, имеет неподвижную точку (т. е. $f(x_0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$).

Аксиома выбора входит в список аксиом «строгой» теории множеств и утверждает, что в любом множестве непустых множеств можно выбрать по одному элементу из каждого множества (иначе говоря, для любого множества $\mathfrak{M}$, элементы которого сами суть непустые множества, существует отображение f из $\mathfrak{M}$ в объединение всех множеств $M \in \mathfrak{M}$, такое что $f(M) \in M \ \forall M \in \mathfrak{M}$).

$14\frac{1}{2}$◦8*. Выведите из аксиомы выбора и зад. M◇7 следующие два утверждения[1]:

а) (лемма Цорна). В любом полном ЧУМе есть максимальный элемент.

б) (теорема Цермело). Любое множество можно вполне упорядочить.

[1]решение этих (весьма трудных) задач не стыдно подглядеть в книгах: *Ван Дер Варден. Алгебра*. М. «Мир» (1976), стр. 246–249 или *П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.*. М. «Наука» (1977), стр. 80–83.

Листок №15. Континуум

Координатные пространства. Координатная прямая $\mathbb{R}^1$ — это множество всех действительных чисел. Аналогично, координатные плоскость $\mathbb{R}^2$, 3-мерное пространство $\mathbb{R}^3$, ... , n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$, ... суть множества упорядоченных пар (x_1, x_2), троек (x_1, x_2, x_3), ... , n-ок $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ... чисел $x_i \in \mathbb{R}$. Множество $\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \ \forall i \in \ \}$ называется *единичным n-мерным кубом* в $\mathbb{R}^n$.

15◦1. Сколько у n-мерного куба **а**) вершин; **б**) рёбер; **в**) $(n-1)$-мерных граней, **г***) k-мерных граней $(0 \leqslant k \leqslant (n-1))$.

15◦2. Нарисуйте 3-мерную развёртку и общую 2-мерную проекцию 4-мерного куба.

Несчётность и континуальность. Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно. Про множество, равномощное единичному отрезку говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

15◦3. Всегда ли $N \setminus M$ равномощно M, если M счётно, а N несчётно?

15◦4. Можно ли нарисовать несчётное множество попарно непересекающихся
а) интервалов на прямой? **б***) восьмёрок[1] на плоскости? **в***) букв Т на плоскости?

15◦5. Имеют ли мощность континуума: **а**) множество бесконечных слов из букв а и б; **б**°) любой отрезок $[a, b]$ (с $a < b$); **в**) любой непустой интервал (a, b); **г**) вся прямая; **д**) m-мерный куб; **е**) множество бесконечных последовательностей вещественных чисел?

Целые и рациональные числа. БДД с нулевой дробной частью называются *целыми*. На координатной прямой множество целых БДД $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ получается откладыванием от 0 всевозможных целых кратных единичного отрезка. БДД $r \in \mathbb{R}$ называется *рациональной*, если $\exists\, k, m \in \mathbb{Z} : kr = m$ в $\mathbb{R}$. Подмножество рациональных БДД $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ на числовой прямой изображается откладыванием от 0 всевозможных отрезков, соизмеримых[2] с единичным.

15◦6. Докажите, что конечные БДД рациональны. Верно ли, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существуют $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, такие что $\alpha - \varepsilon < r_1 < \alpha < r_2 < \alpha + \varepsilon$?

15◦7. Докажите, что множества: **а**) иррациональных **б***) трансцендентных[3] действительных чисел имеют мощность континуума.

Дедекиндовы сечения. Разбиение $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ в объединение двух непересекающихся подмножеств, таких что $a_1 < a_2$ для любых $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$.

15◦8. Докажите, что для любого сечения $\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$ имеет место равенство $\sup A_1 = = \inf A_2$ и выполняется ровно одна из трёх возможностей: либо в A_1 есть максимальный элемент, либо в A_2 есть минимальный элемент, либо действительное число $\sup A_1 = \inf A_2$ иррационально.

15◦9. Забудем на время про БДД, будем понимать $\mathbb{Q}$ как множество обыкновенных дробей p/q с $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ и назовём действительным числом Дедекинда любое сечение

---

[1] *восьмёркой* называется любая пара соприкасающихся внешним образом окружностей

[2] два отрезка называются *соизмеримыми*, если они допускают общую единицу измерения — третий отрезок, который целое число раз укладывается в каждом из них

[3] число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с рациональными коэффициентами; числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*

$\mathbb{Q} = A_1 \sqcup A_2$, в котором A_1 не имеет максимального элемента. Дайте определение суммы и произведения действительных чисел Дедекинда (это должно быть сечение нужного типа) и установите сохраняющий арифметические операции изоморфизм между множеством дедекиндовых действительных чисел и множеством действительных чисел, определённом в предыдущем листке посредством БДД[4].

15∘10. Исходя только из дедекиндова определения действительных чисел (т. е. не пользуясь БДД, но в терминах сечений) докажите теорему о полноте (ср. с зад. 14∘7) и определите квадратные корни (ср. с зад. 14∘9).

Листок №16. Окрестности и покрытия

16∘1. (лемма о вложенных отрезках). Имеется последовательность отрезков, каждый из которых содержится в предыдущем. Может ли пересечение всех этих отрезков быть пустым?

16∘2. Изменится ли ответ, если отрезки заменить интервалами?

16∘3. Группа естествоиспытателей в течении 6 часов наблюдала за (неравномерно) ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый наблюдатель следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 метр. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти
а) 5 *м* ? **б)** 10 *м* ? **в)** 12 *м* ?

16∘4. (лемма о конечном покрытии). Докажите, что в любом покрытии отрезка интервалами найдётся конечный набор интервалов, покрывающий весь отрезок.

16∘5. Из любого ли покрытия отрезка интервалами можно удалить часть так, чтобы оставшиеся интервалы тоже составляли покрытие, но каждую точку накрывало бы не более двух из них?

16∘6. Изменится ли что-нибудь в предыдущих двух задачах, если отрезок заменить интервалом?

16∘7. Всегда ли из покрытия отрезка **а)** конечным **б)** любым множеством содержащихся внутри него отрезков можно выкинуть часть отрезков так, чтобы оставшиеся по-прежнему покрывали исходный отрезок и их суммарная длина не превышала бы его удвоенной длины?

Внутренние точки и открытые множества. Для любого положительного числа ε будем называть ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ интервал

$$D_\varepsilon(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{\, x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \,\}$$

длины 2ε с центром в x_0. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется *внутренней точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если у неё есть ε-окрестность, целиком содержащаяся в M. Множество называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Иначе говоря, $U \subset \mathbb{R}$ открыто, если

[4] ПОДСКАЗКА: сопоставьте каждому классу эквивалентных БДД $\alpha \in \mathbb{R}$ сечение $\mathbb{Q} = \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha \,\} \sqcup \{\, q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant \alpha \,\}$

$\forall\, u \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 : D_\varepsilon(u) \subset U$ (величина ε может зависеть от точки u). Пустое множество тоже, по определению, считается открытым.

16∘8°. Убедитесь, что промежутки $(-\infty, a)$, $(a, -\infty)$ и (a, b) открыты. Можно ли разбить интервал в объединение двух непересекающихся открытых множеств?

16∘9. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств открыто.

16∘10. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств открыто. Так ли это для пересечений бесконечных наборов?

16∘11. Докажите, что всякое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов, в числе которых допускаются и неограниченные интервалы типа $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, +\infty)$.

Изолированные точки и дискретные множества. Точка $a \in M \subset \mathbb{R}$ называется *изолированной точкой* множества M, если некоторая её ε-окрестность не содержит никаких других точек из M. Множество, все точки которого изолированы, называется *дискретным*.

16∘12. Может ли бесконечное дискретное множество быть:
а) ограниченным? **б)** несчётным?

Листок №$16\frac{1}{2}$(дополнительный). Предельные точки множеств

Предельные точки. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M \subset \mathbb{R}$, если *любая* её ε-окрестность $D_\varepsilon(x_0)$ содержит какую-нибудь точку $x \in M$, отличную от x_0.

$16\frac{1}{2}$∘1. Постройте бесконечное множество $M \subset \mathbb{R}$, множество предельных точек которого: **а)** пусто; **б)** состоит из одной точки; **в)** состоит из двух точек; **г)** совпадает с $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

$16\frac{1}{2}$∘2. Может ли множество предельных точек быть множеством всех чисел вида $1/k$ с $k \in \mathbb{N}$?

$16\frac{1}{2}$∘3. Может ли бесконечное ограниченное множество не иметь предельных точек?

Замкнутые множества. Множество $Z \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если их у него вообще нет). Непустые ограниченные замкнутые множества называются *компактами*.

$16\frac{1}{2}$∘4°. Докажите, что отрезок и прямая — замкнуты, а интервал и луч — нет. Бывают ли дискретные незамкнутые множества? А бесконечные дискретные компакты?

$16\frac{1}{2}$∘5°. Разбивается ли отрезок в объединение двух непересекающихся непустых замкнутых множеств? Перечислите все одновременно открытые и замкнутые подмножества в $\mathbb{R}$.

$16\frac{1}{2}$∘6. Докажите, что множество $Z \subset \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus Z = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \notin Z \,\}$ открыто.

$16\frac{1}{2}$∘7. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

$16\frac{1}{2}\circ 8$. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто. Так ли это для бесконечных наборов?

$16\frac{1}{2}\circ 9$. (лемма о вложенных компактах). Докажите, что любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ имеет непустое пересечение: $\bigcap K_\nu \neq \varnothing$.

$16\frac{1}{2}\circ 10^*$. (лемма о конечном покрытии). Докажите, что $K \subset \mathbb{R}$ компакт тогда и только тогда, когда любое его покрытие интервалами содержит конечное подпокрытие.

Канторово множество. Определим по индукции последовательность компактов $K_\nu \subset [0,1]$ следующим образом. Каждый K_ν является объединением 2^ν отрезков: $K_{\nu+1}$ получается из K_ν выкидыванием открытой (т. е. без концевых точек) средней трети из каждого отрезка, входящего в K_ν, а $K_0 = [0,1]$. Пересечение $\mathfrak{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_\nu K_\nu$ называется ***канторовым множеством*** (в честь Георга Кантора). Иначе $\mathfrak{K} \subset [0,1]$ можно определить как множество всех чисел $\varkappa \in [0,1]$, которые в троичной системе счисления можно записать при помощи БДД, не содержащей 1, причём не требуется, чтобы эта запись была стандартной (т. е. она может оканчиваться на одни двойки).

$16\frac{1}{2}\circ 11$. Докажите, что канторово множество имеет мощность континуума, но покрывается конечным набором интервалов со сколь угодно малой суммой длин.

$16\frac{1}{2}\circ 12$. Содержит ли канторово множество: **а)** интервалы? **б)** изолированные точки?

Конденсация несчётных множеств. Элемент $a \in M$ произвольного несчётного множества $M \subset \mathbb{R}$ называется его ***точкой конденсации***, если $D_\varepsilon(a) \cap M$ несчётно $\forall\, \varepsilon > 0$.

$16\frac{1}{2}\circ 13^*$. Докажите, что множество точек $b \in M$, не являющихся точками конденсации, конечно или счётно.

$16\frac{1}{2}\circ 14^*$. Может ли множество точек конденсации иметь изолированные точки?

$16\frac{1}{2}\circ 15^*$. Докажите, что множество точек конденсации замкнуто.

$16\frac{1}{2}\circ 16^*$. Докажите, что любое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}$ или пусто, или конечно, или счётно, или имеет мощность континуума.

Листок №17. Радикальные преобразования

... здесь вам не университет: тут головой думать надо!
(из армейского юмора)

Напомним, что через $|a-b|$ (читается «модуль a минус b») обозначается расстояние между точками a и b на числовой прямой $\mathbb{R}^1$. Таким образом, $|a-b| = |b-a|$ равно той из двух разностей $(a-b)$, $(b-a)$, которая неотрицательна. Вместо $|a-0| = |0-a|$ пишут просто $|a|$.

$17\circ 1^\circ$. Из перечисленных ниже утверждений верные докажите, а неверные опровергните и, по возможности, исправьте: **а)** $\dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < \dfrac{\alpha+a}{\beta+b} < \dfrac{a}{b}$ (где $\alpha, a \in \mathbb{Z}$ и $\beta, b \in \mathbb{N}$);

б) $a \leqslant b$ и $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \dfrac{a}{\beta} \leqslant \dfrac{b}{\alpha}$ $\forall\, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; **в)** $|a-b| + |b-c| = |a-c|$ $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$;

г) $|a| - |b| \leqslant |a-b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **д)** $|a| + |b| \geqslant |a+b|$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$; **е)** $\sqrt{x^2} = x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$17\circ 2$. Без помощи калькулятора выясните, что больше:

а) $\sqrt{37}-6$ или $1/10$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ или $\sqrt{5}-2$; **в)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ или 5; **г)** $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$.

17∘3. Какие из перечисленных ниже пар чисел обратны друг другу:
а) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$; **б)** $\left(2\sqrt{20}+9\right)^{100}$ и $\left(2\sqrt{20}-9\right)^{100}$; **в)** $\left(7+5\sqrt{2}\right)^3$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^3$;
г) $\left(7+5\sqrt{2}\right)^4$ и $\left(7-5\sqrt{2}\right)^4$; **д)** $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt[3]{9}-3$ и $3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4$.

17∘4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: **а)** $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; **б)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$;
в) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}+1}$; **г)** $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; **д)** $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; **е*)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}$; **ж*)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}}$.

17∘5. (формулы Виета). В произведении $(x-\vartheta_1)(x-\vartheta_2)\cdots(x-\vartheta_m)$ раскрыли скобки и сгруппировали слагаемые по степеням x. Чему будет равен коэффициент при x^k? Из скольких слагаемых он состоит?

17∘6. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть:
а) $1+\sqrt{7}$; **б)** $5-2\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

17∘7. Какими должны быть α, β, чтобы $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=a+\sqrt{b}$ для данных a, b? Выделяя полный квадрат или куб, избавьтесь от наружнего радикала в выражениях:
а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{28+10\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{67+12\sqrt{7}}$; **г)** $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$; **д)** $\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$;
е) $\sqrt[3]{37+30\sqrt{3}}$; **ж)** $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; **з)** $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$; **и)** $\sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}}$.

17∘8. Пусть $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$. Верно ли, что при $\alpha\neq\beta$ числа $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ либо оба рациональны, либо оба нет?

17∘9. Рациональны ли числа: **а)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; **в)** $\left(\sqrt{5}+1\right)^3-\left(\sqrt{5}-1\right)^3$;
г) $\left(1+\sqrt{2}\right)^5+\left(1-\sqrt{2}\right)^5$; **д)** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{11}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{11}$; **е)** $\left(\sqrt{3}+1\right)^{10}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{10}$.

17∘10. Вычислите первую тысячу знаков после запятой у
а) $\left(12-\sqrt{143}\right)^{2000}$; **б*)** $\left(7+\sqrt{48}\right)^{1999}$; **в*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2000}$; **г*)** $\left(7+\sqrt{50}\right)^{2001}$.

17∘11*. Чётна или нечётна целая часть числа $\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}$?

Листок №18. Графики и кривые

18∘1. Функция $y=f(x)$ имеет график, изображённый на рис. 18.1. Нарисуйте (поточнее) графики функций:
а) $2f(x)$; **б)** $f(2x)$; **в)** $f(x+2)$; **г)** $f(x)+2$; **д)** $f(-x)$;
е) $f(|x|)$; **ж)** $-|f(-|x|)|$; **з)** $3-f(x)$; **и)** $3f(x)+2$;
к) $f\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$; **л)** $f\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)$; **м)** $3-2f(3-2x)$;
н) $1-\left|f\left(\dfrac{1-|x|}{3}\right)\right|$; **о)** $x\,f(x)$; **п)** $\dfrac{1}{f(x)}$; **р)** $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

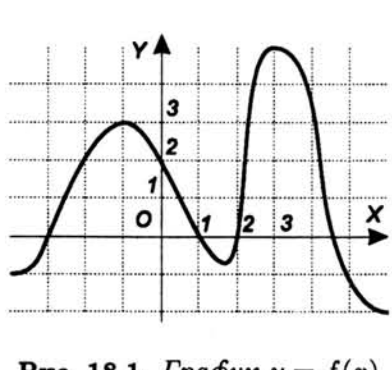


Рис. 18.1. *График* $y=f(x)$

18∘2. Решите неравенство $\Big|\,3\,\big|\,1-2\,|x-1|\,\big|-5\,\Big|\geqslant 2$.

18∘3. Выразите функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$, если известно, что график g получается из графика f

а) параллельным переносом на вектор $(3,5)$;

б) сжатием в 2 раза к оси OY;

в) симметрией относительно оси OX;

г) симметрией относительно прямой $x=3$;

д) растяжением в 3 раза от прямой $y=-1$;

е) центральной симметрией относительно начала координат;

ж) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;

з) гомотетией с коэффициентом $-1/3$ относительно точки $(-3,2)$.

18∘4. Постройте графики: **а)** $\frac{1}{x}$; **б)** $1-\frac{2}{x+1}$; **в)** $\frac{x+1}{x-1}$; **г)** $\frac{2x+3}{2-3x}$; **д)** $\frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$.

18∘5. Постройте графики: **а)** x^2; **б)** $3-2(x-5)^2$; **в)** ax^2+bx+c, где $a \neq 0$.

18∘6. Где лежат середины любого семейства параллельных хорд данной параболы?

18∘7. Чтоб познакомиться с Машенькой, Вовочка стёр в её тетрадке оси координат у графиков **а)** $y=x^2$ **б)** $y=1/x$. Как Машеньке точно восстановить их циркулем и линейкой?

18∘8. Множество всех решений (x,y) уравнения $\Phi(x,y) = 0$ представляет собой кривую на рис. 18.2. Нарисуйте (поточнее) кривые, заданные уравнениями:
а) $\Phi(x+2,y-1)=0$; **б)** $\Phi(y,x)=0$; **в)** $\Phi(-x,-y)=0$; **г)** $\Phi(2x,y)=0$; **д)** $\Phi\left(\frac{x}{2},2y\right)=0$; **е)** $\Phi(|y|,x)=0$; **ж)** $\Phi(x+y,x-y)=0$.

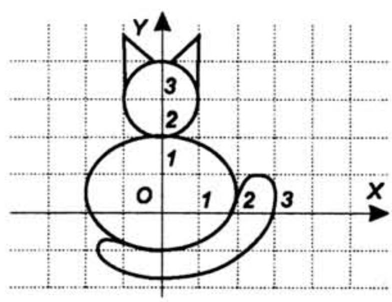


Рис. 18.2. Кривая $\Phi(x,y)=0$

18∘9. Напишите какое-нибудь уравнение, задающее кривую, получающуюся из показанной на рис. 18.2 кривой $\Phi(x,y)=0$:

а) параллельным переносом на вектор $(-2,3)$;

б) растяжением в 2 раза от оси OX;

в) симметрией относительно оси OY;

г) симметрией относительно прямой $y=-2$;

д) центральной симметрией относительно начала координат;

е) гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат;

ж) поворотом на $45°$ вокруг начала координат; **з)** сжатием в 3 раза к прямой $x=1$;

и) гомотетией с коэффициентом $-\frac{1}{3}$ относительно точки $(1,-1)$.

18∘10. Нарисуйте кривые: **а)** $x^2-y^2=1$; **б)** $4x^2+9y^2=36$; **в)** $16x^2-25y^2=400$.

18∘11. Напишите уравнение, задающее

а) окружность радиуса 3 с центром в точке $(-5,2)$;

б) гиперболу $y=1/x$, сдвинутую и повёрнутую так, что её центр находится в точке $(-5,2)$, а асимптоты составляют углы в $45°$ с осью OX;

в) параболу $y=x^2$, сдвинутую и повёрнутую так, что её вершина находится в точке $(-1,-1)$, а ось идёт под углом $45°$ к оси OX.

Листок №19. Получение оценок

Матанализ есть искусство получения точных результатов посредством приближённых оценок.
(из профессорско - преподавательского фолькльора)

19∘1. (неравенство Бернулли). Верно ли, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\,\alpha \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ и произвольного действительного $\alpha > -1$?

19∘2. Укажите какое-нибудь[1] $m\in\mathbb{N}$, чтобы при всех целых $n \geqslant m$ выполнялась оценка:
а) $1000\cdot 2^n < n!$; **б)** $100\cdot n^2 < 2^n$; **в)** $10\cdot n^3 < 2^n$; **г)** $n^{10} < 2^n$; **д)** $\left(1+10^{-4}\right)^n > 10^6$;
е) $\left(1-10^{-4}\right)^n < 10^{-6}$; **ж)** $1/(k+1)+1/(k+2)+\cdots+1/(k+n) > 1/2$.

Оценки функций. Функция $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, заданная на некотором множестве X, называется *ограниченной сверху* (соотв. *ограниченной снизу* и просто *ограниченной*) на X, если таковым является множество её значений $f(X)\subset\mathbb{R}$. Иначе говоря, f ограничена сверху, если $\exists\, c\in\mathbb{R} : f(x) < c \quad \forall\, x\in X$; f ограничена снизу, если $\exists\, c\in\mathbb{R} : f(x) > c \quad \forall\, x\in X$; f ограничена, если $\exists\, c_1, c_2\in\mathbb{R} : c_1 < f(x) < c_2 \quad \forall\, x\in X$.

19∘3. Исследуйте каждую из функций: $x^3-10\,x$, $\dfrac{x^3-x+1}{x^4+1}$, $\dfrac{x^4-x+1}{x^4+1}$, $\dfrac{x^5-x+1}{x^4+1}$ на ограниченность **а)** на отрезке $[-100,100]$; **б)** на всей прямой.

19∘4. Какие из перечисленных ниже функций ограничены на своей области определения и с какой стороны: **а)** $\sqrt{x^2+1}-x$; **б)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{5\,x}{\sqrt{2\,x+1}-\sqrt{2\,x-1}}$; **г)** $\dfrac{3+2\,x}{3\,x-2}$.

19∘5. Ограничены ли сверху последовательности:
а) $a_n = C_n^{100}/n^{100}$? **б)** $b_n = \left(1+1/n\right)^n$?

Оценки рядов. Бесконечные суммы типа $\sum\limits_{\nu\geqslant 1} a_\nu = a_1+a_2+a_3+\cdots$ называются *рядами*. Конечная сумма первых m членов такого ряда $s_m = \sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu = a_1+a_2+\cdots+a_m$ называется его *частичной суммой*. Ряд *неотрицательных* действительных чисел называется *сходящимся*, если множество значений его частичных сумм ограничено сверху; твг этого множества называется *суммой* ряда. Если частичные суммы не ограничены, то говорят, что ряд *расходится*.

19∘6. Докажите, что сумма положительной убывающей бесконечной геометрической прогрессии сходится и выразите её (если Вы до сих пор этого не сделали) через первое слагаемое и знаменатель.

19∘7. Верно ли, что любая ε-окрестность любого числа содержит бесконечно много рациональных чисел? Можно ли покрыть все рациональные числа системой интервалов, суммарная длина которых меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$?

19∘8. (число e). Докажите, что число $e \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{k\geqslant 0} 1/k! = 1+1+1/2+1/6+1/24+\cdots$

а) существует ; **б)** удовлетворяет неравенствам $2,7 < e < 2,8$; **в***) иррационально.

19∘9. (гармонический ряд). Сходится ли ряд: $\sum\limits_{k\geqslant 1} 1/k = 1+1/2+1/3+1/4+\cdots$?

---

[1] подчеркнём, что «какое-нибудь» вовсе не означает «как можно меньшее»

19∘10. Сходиться ли ряд, составленный из квадратов членов гармонического ряда?

19∘11. (задача о стирке). Имеется 10 *кг* грязного белья и 10 *кг* чистой воды. При погружении любой части белья в любое количество воды грязь распределяется в их общей массе равномерно. Можно ли уменьшить количество грязи в белье более чем в **а)** 3 **б***) 2000 раз?

19∘12*. Из гармонического ряда выкинули все слагаемые, в десятичной записи которых участвует цифра 9. Докажите, что сумма оставшихся слагаемых не превышает 100.

Листок №20. Последовательности

Последовательность элементов множества X — это отображение $\mathbb{N} \xrightarrow{x} X$. Вместо $x(n)$ обычно пишут x_n и называют его *n-тым членом* последовательности. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ коротко обозначается через (x_n). Отметим, что *последовательность* не следует путать с *множеством* её значений, и неверно думать о последовательности как о «занумерованном множестве». Всюду в этом листке речь будет идти о *числовых* последовательностях, т. е. о последовательностях $\mathbb{N} \xrightarrow{x} \mathbb{R}$.

20∘1°. Дайте определения числовых последовательностей: **а)** ограниченной; **б)** неограниченной; **в)** монотонно возрастающей; **г)** монотонно невозрастающей.

20∘2. Изобразите последовательности и исследуйте их на ограниченность и монотонность: **а)** $x_n = 1$; **б)** $x_n = n$; **в)** $x_n = (-1)^n/n$; **г)** $0, 1/2, 0, 1/3, 0, 1/4, \ldots$; **д)** $x_n = (n-3)/(2n+5)$; **е)** $x_n = (n^2+1)/(2n+1)$; **ж)** $x_n = (n+1)/(2n^2-1)$.

20∘3. Дайте определение *подпоследовательности* последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Пределы. Число p называется *пределом* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит все члены этой последовательности, кроме конечного числа; более формально это записывается так: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \quad |x_n - p| < \varepsilon$. Обозначение: $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to p$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой есть предел, называется *сходящейся*, а у которой нет — *расходящейся*.

20∘4°. Без отрицаний скажите, что значит, что $q \in \mathbb{R}$ не есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и что значит, что (x_n) расходится. Бывают ли неограниченные сходящиеся последовательности?

20∘5°. Может ли последовательность не иметь ни одного или иметь несколько пределов?

20∘6. Выясните, какие из последовательностей сходятся и для сходящихся найдите предел и явно укажите для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ какой-либо номер N, после которого все x_n заведомо лежат в ε-окрестности предела

а) $1/2, -1, 1/4, ; -1/3, 1/8, -1/5, \ldots$; **б)** $1/n$; **в)** $(-1)^n$; **г)** $2^n/n!$; **д)** $((-1)^n \cos n)/n^2$; **е)** $n/(n^2+1)$; **ж)** q^n, $q \in \mathbb{R}$; **з)** $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $q \in \mathbb{R}$; **и)** $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **к)** $\sqrt{n^2+n} - n$;; **л)** $(n^a)/(b^n)$; **м***) $\sqrt[n]{n}$.

20∘7*. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + {}^1\!/_n\right)^n = e$ (число e определялось в зад. M◇8).

20∘8°. Дайте определение тому, что при $n \to \infty$ **а)** $a_n \to +\infty$, **б)** $a_n \to -\infty$, **в)** $a_n \to \infty$. Верно ли, что $(a_n) \to \infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1} = 0$?

20∘9. Можно что-либо утверждать о сходимости последовательностей: $a_n \pm b_n$; $a_n \cdot b_n$ b_n/a_n; a_n/b_n (у двух последних предполагается, что $a_n, b_n \neq 0 \; \forall\, n \gg 0$), если известно, что последовательность b_n ограничена, а a_n стремится **а)** к 0 **б)** к ∞?

Предельные точки. Число p называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если любая его ε-окрестность $D_\varepsilon(p)$ содержит бесконечно много членов этой последовательности; иначе это записывается так: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$ $\exists\, n \geqslant N : |x_n - p| < \varepsilon$.

20∘10°. Убедитесь, что эти два определения действительно эквивалентны. Обязана ли предельная точка быть пределом? А предел — предельной точкой?

20∘11. Может ли множеством всех предельных точек последовательности быть:
а) $\varnothing$? **б)** n различных точек ($n = 1, 2, \ldots$)? **в)** $\mathbb{Z}$? **г)** $\mathbb{Q}$? **д)** $\mathbb{R}$?

20∘12. У последовательности (a_n) нет предельных точек. Верно ли, что $a_n \to \infty$?

20∘13. Обязана ли сходиться **а)** произвольная **б)** ограниченная последовательность, у которой есть ровно одна предельная точка?

20∘14. Слева или справа от любого $x \in \mathbb{R}$ лежит лишь конечное число членов последовательности (a_n). Верно ли, что (a_n) либо сходится либо стремится к $\pm\infty$?

Листок №21. Пределы последовательностей

21∘1. (теоремы Больцано - Вейерштрасса). Любая ли ограниченная последовательность: **а)** имеет предельную точку? **б)** содержит подпоследовательность, имеющую предел? **в)** если монотонно неубывает (или монотонно невозрастает), то имеет предел?

21∘2. Пусть (a_n) и (b_n) имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$. Докажите, что **а)** $a_n \pm b_n$, **б)** $a_n \cdot b_n$, **в)** $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, а если $\beta \neq 0$, то и **г)** $1/b_n$, **д)** a_n/b_n тоже сходятся, и выразите их пределы через α и β.

21∘3. Вычислите пределы (при $n \to \infty$) или докажите расходимость последовательностей: **а)** $(3n^3 - 5n + 7)/(5n^3 + 7n^2 - 11)$; **б)** $\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - 5n}$;
в) $\sqrt{n^2 + 2n^3} - \sqrt{2n^2 + n^3}$; **г)** $\sqrt[n]{n!}$; **д*)** $\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$;

е*) $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ радикалов}}$; **ж*)** $(1 - 1/n)^n$; **з*)** $(1 + 3/n)^n$.

21∘4. Будем называть *перемешиванием* последовательности $\mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$ её композицию с произвольным взаимно однозначным отображением $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Влияет ли перемешивание на сходимость/расходимость и значение предела (в том числе, когда $a_n \to \pm\infty, \infty$)?

21∘5. (критерий Коши). Последовательность a_n называется *последовательностью Коши*, если $\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon \;\forall\, n_1, n_2 > N$. Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

21∘6*. Две последовательности Коши (a_n) и (b_n) называются *эквивалентными*, если любое перемешивание последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ тоже является последовательностью Коши. Назовём действительным числом Коши класс эквивалентных рациональных последовательностей Коши. Определите сумму и произведение действительных чисел Коши и докажите, что множество действительных чисел Коши изоморфно (с сохранением операций) множеству действительных чисел, определённых через БДД или дедекиндовы сечения (см. зад. 15○9).

Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ произвольных чисел $a_i \in \mathbb{R}$ называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ имеет конечный предел (он называется *суммой ряда*). Сходящийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если его ряд абсолютных величин $\sum\limits_{i\geqslant 1} |a_i|$ тоже сходится; в противном случае ряд называют *условно сходящимся*.

21○7. Убедитесь, что для ряда неотрицательных чисел новое определение сходимости, данное в этом листке, согласуется с определением из позапрошлого листка.

21○8. Чему равен $\lim\limits_{i\to\infty} a_i$, если ряд $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i$ сходится?

21○9. Сходится ли ряд $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$ **а)** абсолютно? **б)** условно?

21○10. (критерий Коши). Докажите, что ряд $\sum\limits_{i\geqslant 1} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : |a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}| < \varepsilon$ для всех номеров $n_2 > n_1 > N$.

21○11*. Докажите, что при помощи подходящего перемешивания слагаемых условно сходящегося ряда его сумму можно сделать равной любому наперёд заданному числу, а также сделать ряд расходящимся.

21○12. Можно ли перемешать слагаемые ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ так, чтоб он стал сходиться?

21○13*. Изменяется ли сумма абсолютно сходящегося ряда при перемешивании слагаемых?

Листок №$21\frac{1}{2}$(дополнительный). Цепные дроби

$21\frac{1}{2}$○1°. (продолжение зад. $4\frac{1}{2}$○9 о кузнечиках). Нарисуем в первом координатном квадранте луч $y = \alpha x$ с *иррациональным* $\alpha > 0$ и рассмотрим ломаные, ограничивающие выпуклые оболочки целых точек, лежащих, соответственно, выше и ниже этого луча (см. рис. 21.1). Занумеруем вершины T_i нижней ломаной чётными, а верхней — нечётными целыми индексами подряд слева направо так, чтобы $[T_0T_2]$ был первым невертикальным ребром на нижней ломаной, и обозначим через (p_n, q_n) координаты точки T_n, а через a_n — число кусков, на которые делится ребро $[T_{n-2}T_n]$ лежащими на нём целыми точками. Попросим теперь кузнечиков в зад. $4\frac{1}{2} \circ 9$ прыгать из начального положения так, чтобы прыжок каждый раз совершал тот крайний кузнечик, который находится по ту же сторону от луча $y = \alpha x$, что и средний. Убедитесь, что кузнечики побывают во всех целых точках обеих граничных ломаных (и только в этих точках), и докажите что:

а) последовательности $\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)$ и $\left(\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)$ монотонны;

б) $\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$

в) $\begin{cases} p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n \\ p_{n-2} q_n - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n \end{cases}$

г) $\dfrac{1}{q_n\,(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \alpha$.

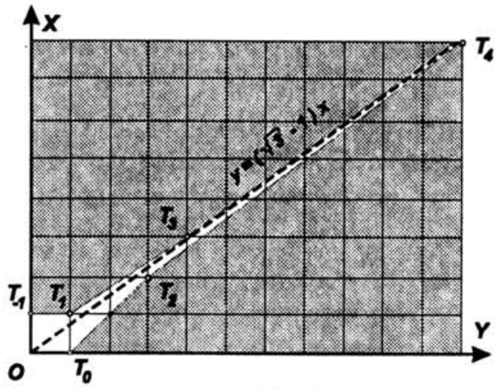


Рис. 21.1.

$21\frac{1}{2}\circ 2$. Что изменится, если в зад. $21\frac{1}{2}\circ 1$ взять $\alpha \in \mathbb{Q}$?

$21\frac{1}{2}\circ 3$. Для произвольного действительного $\alpha > 0$ образуем последовательности (a_n) и (r_n), полагая $\forall\ i \geqslant 0\ a_i = [r_i]$ (целая часть r_i), $r_{i+1} = (r_i - a_i)^{-1}$ и $r_0 = \alpha$. Как связаны числа a_i с одноимёнными числами из зад. $21\frac{1}{2}\circ 1$?

Цепная дробь — это конечное или бесконечное выражение $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots))$ (см. рис. 21.2). Величины a_i называются *элементами* цепной дроби (последний элемент конечной цепной дроби всегда предполагается отличным от 1). Если $a_i \in \mathbb{R}$ и существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots)) = \alpha$, то дробь (21.2) называется *сходящейся*, а α называется её *значением*. Будем называть цепную дробь *канонической*, если $a_0 \in \mathbb{Z}$, и $a_i \in \mathbb{N}$ при $i \geqslant 1$.

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

Рис. 21.2.

$21\frac{1}{2}\circ 4$. Докажите, что все бесконечные канонические цепные дроби сходятся, и, сопоставляя каноническим цепным дробям (как конечным, так и бесконечным) их значения, мы получаем биекцию между множеством таких дробей и $\mathbb{R}$.

$21\frac{1}{2}\circ 5$. Вычислите $1+1/(2+1/(3+1/(1+1/(2+1/(3+\cdots)))))$. Всякая ли периодическая каноническая дробь удовлетворяет квадратному уравнению с целыми коэффициентами?

$21\frac{1}{2}\circ 6$. Разложите в канонические цепные дроби числа **а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\sqrt{5}$, **в)** $\sqrt{43}$, **г)** $\sqrt{57}$.

Остатки и конвергенты. Любой начальный отрезок $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/a_n)\ldots))$ цепной дроби (21.2) можно формально свернуть в обыкновенную дробь p_n/q_n, последовательно выполнив (без «сокращений») все предписанные справа налево действия. Так, $p_0/q_0 = a_0/1$, $p_1/q_1 = (a_0 a_1 + 1)/a_1$ и т. д. Такая p_n/q_n называется n-той *подходящей дробью* (или *конвергентой*) цепной дроби (21.2). Если (21.2) сходится, то числа $r_n \in \mathbb{R}$, такие что $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots)) = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + \ldots + 1/(a_{n-1} + 1/r_n)\ldots))$, называются её *остатками*; иными словами, $r_n = a_n + 1/(a_{n+1} + 1/(a_{n+2} + \ldots))$.

$21\frac{1}{2}\circ 7$. Как связаны конвергенты канонической цепной дроби с (p_n, q_n) из зад. $21\frac{1}{2}\circ 1$?

$21\frac{1}{2}\circ 8$. Какие из соотношений зад. $21\frac{1}{2}\circ 1$ верны для цепных дробей с произвольными $a_i \in \mathbb{R}$? Докажите, что если (21.2) сходится к α, то $\alpha = (r_n p_{n-1} - p_{n-2})\,/\,(r_n q_{n-1} - q_{n-2})$ $\forall n$.

$21\frac{1}{2}$○9*. Докажите, что цепная дробь (21.2) с положительными $a_i \in \mathbb{R}$ сходится тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum a_i$.

Листок №$21\frac{2}{3}$(дополнительный). Квадратичные иррациональности

$21\frac{2}{3}$○1. Пусть иррациональное $\alpha \in \mathbb{R}$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Проверьте, что все остатки r_n канонического разложения α в цепную дробь также являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами. Верно ли, что:

а) у всех этих уравнений один и тот же дискриминант?

б) множество коэффициентов этих уравнений ограничено?

$21\frac{2}{3}$○2. (теорема Лагранжа). Докажите, что вещественное число тогда и только тогда является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, когда его каноническое представление цепной дробью периодично.

Диофантовы приближения. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Рациональное число p/q ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) называется *наилучшим приближением* к α, если для любого другого рационального числа $m/n \neq p/q$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) со знаменателем $m \leqslant q$ имеет место строгое неравенство $|\alpha n - m| > |\alpha q - p|$.

$21\frac{2}{3}$○3°. Докажите, что любое иррациональное $\alpha \in \mathbb{R}$ обладает наилучшими приближениями со сколь угодно большим знаменателем, а также что все наилучшие приближения несократимы и исчерпываются подходящими дробями канонического разложения α в цепную дробь.

$21\frac{2}{3}$○4°. Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много несократимых дробей x/y с $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству
$\left|\alpha - x/y\right| < 1/y^2$.

$21\frac{2}{3}$○5. Нарисуйте кривые $x^2 - y^2 = 1$ и $x^2 - 3\,y^2 = 1$. Есть ли на них целые точки кроме $(\pm 1, 0)$, и если да, то конечно ли множество таких точек?

$21\frac{2}{3}$○6. Для любого ли натурального d, не делящегося на квадраты, можно подобрать $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы **а)** неравенство $x^2 - dy^2 \leqslant m$ **б)** уравнение $x^2 - dy^2 = m$ имело бесконечно много целых решений (x, y) с $x, y \neq 0$?

Квадратичные расширения, норма и сопряжение. Пусть $d \in \mathbb{N}$ не делится на квадраты; положим $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \overset{\text{def}}{=} \{\, x + y\sqrt{d} \mid x, y, \in \mathbb{Q}\}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] \overset{\text{def}}{=} \{\, p + q\sqrt{d} \mid p, q, \in \mathbb{Z}\}$. Отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \xrightarrow{\alpha \mapsto \overline{\alpha}} \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, переводящее $\alpha = x + y\sqrt{d}$ в $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{d}$ называется *сопряжением*, а отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \xrightarrow{N} \mathbb{Q}$, переводящее α в $N(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \alpha\overline{\alpha} = x^2 - dy^2$ называется *нормой*.

$21\frac{2}{3}$○7°. Проверьте, что $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ замкнуты относительно сложения, вычитания и умножения. Для $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ выразите α^{-1} через $\overline{\alpha}$ и $N(\alpha)$. Верно ли, что:

а) $\overline{\alpha_1 \pm \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \pm \overline{\alpha_2}$? **б)** $\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}$? **в)** $N(\overline{\alpha}) = N(\alpha)$? **г)** $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$? **д)** $\vartheta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ тогда и только тогда обратим в $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, когда $N(\vartheta) = \pm 1$? **е)** множество всех элементов $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1 замкнуто относительно умножения?

$21\frac{2}{3}\circ 8^*$. (уравнение Пелля). Пусть целое $d \geqslant 2$ не делится на квадраты; *уравнение Пелля*: $x^2 - dy^2 = 1$ описывает все числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ с нормой 1; у него, разумеется, есть 2 тривиальных решения $(\pm 1, 0)$, и вместе с каждым решением (x, y) решениями будут и все $(\pm x, \pm y)$. Решение (x_0, y_0) с ***натуральными*** x_0, y_0 называется ***фундаментальным***, если вещественное число $x_0 + y_0\sqrt{d}$ минимально среди всех чисел $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$. Докажите, что:

а) фундаментальное решение (x_0, y_0) существует и единственно;

б) x_0/y_0 есть подходящая дробь канонического разложения $\sqrt{d}$ в цепную дробь;

в) все $x + y\sqrt{d}$ с нормой 1 и $x, y \in \mathbb{N}$ исчерпываются числами $\left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^n$ с $n \in \mathbb{N}$.

$21\frac{2}{3}\circ 9$. Найдите фундаментальные решения и опишите все целые решения уравнений[1]:

а) $x^2 - 5y^2 = 1$; **б)** $x^2 - 19y^2 = 1$; **в)** $x^2 - 43y^2 = 1$; **г)** $x^2 - 57y^2 = 1$.

---

[1] если Вы любите программирование, то можете написать программу, раскладывающую заданное число из $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ в цепную дробь, а также программу, отыскивающую фундаментальное решение уравнения Пелля

К столетию московского совещания по вопросам о средней школе

Р. З. Гушель

Продолжаем публикацию материалов по истории математического образования в России. Р. З. Гушель, известная нашим читателям по публикации в №2-3 (9-10), 1999 г., подготовила подборку к столетию московского совещания по средней школе. Знаменательно, что статья публикуется накануне первой в постсветское время Всеросийской Конференции по математическому образованию, которая состоится в Дубне 18 – 23 сентября 2000 г. Об этой конференции будет рассказано в следующем номере нашего журнала.

Система среднего образования в России второй половины XIX столетия была почти исключительно классической. Древние языки занимали ведущее положение в программе мужской гимназии, а поступить в университет можно было только после ее окончания. Преподавание математики носило в достаточной степени догматический характер.На нее смотрели в первую очередь как на "гимнастику ума".

Но уже к концу века положение стало меняться. Все громче раздавались голоса педагогов, предлагавших значительно сократить преподавание древних языков и за счет этого увеличить время на изучение естествознания, русского и новых языков. Что касается математики, то ведущие отечественные педагоги считали, что ее содержание требовало значительного обновления за счет введения элементов так называемой высшей математики и некоторых других разделов.

Активно обсуждался вопрос о предоставлении выпускникам средних учебных заведений всех типов равных прав при поступлении в университет, по крайней мере, на некоторые факультеты (речь шла только о мужских школах).

В 1899 году по инициативе вновь назначенного министра народного просвещения Н. П. Боголепова была Высочайше учреждена Комиссия по вопросу о средней школе. Она должна была начать работу в первые месяцы 1900 года. Министр разослал в округа циркуляр (см. ниже), в котором отметил некоторые недостатки средней школы и предложил попечителям делегировать лучших педагогов для участия в работе этой Комиссии.

Некоторые попечители, получив циркуляр, собрали в своих округах совещания, посвященные обсуждению сформулированных в этом документе проблем. Именно так поступил и попечитель Московского учебного округа, известный математик профессор П. А. Некрасов.

Совещания в Московском округе проходили осенью 1899 года. В них принимали участие видные педагоги средних школ и методисты. Были среди них и математики: Н. А. Рыбкин, Ф. И. Егоров, А. М. Воронец, К. К. Мазинг и другие. Работали здесь и многие видные московские ученые, в том числе К. А. Андреев, Н. В. Бугаев, Б. К. Млодзеевский, П. А. Некрасов и другие.

В том же 1899 году материалы Совещания были опубликованы в шести выпусках. Последний из них содержал ответы профессоров московских вузов на вопросы заранее подготовленной анкеты. Предложенная анкета касалась необходимости и направления реформы системы среднего образования (см. ниже). Свои ответы представили 65 профессоров разных специальностей, в том числе и математики.

На Совещании было разработано пять различных моделей мужских средних учебных заведений. (Такое большое число моделей объясняется, в частности, степенью представленности древних языков в их учебных планах.) Для каждой модели были составлены учебные планы и программы по всем предметам.

Одним из предлагавшихся типов средней школы была единая школа с фуркацией (профильной дифференциацией) в старшем ее звене. Страстным защитником единой школы и идеи фуркации был профессор Н. В. Бугаев (1837 – 1903). Среди его предложений было и введение специальных лицейских классов для лиц, окончивших гимназию и желавших продолжить учебу в университете (см. ниже).

П. А. Некрасов (1853 – 1924) посвятил свое выступление цели и значению преподавания математики, отвергая существовавшую в школе того времени цель: "усвоение последовательности и логичности выводов и доказательств" (см. ниже). Он особенно подчеркивал необходимость выявления приложений математики и осуществления межпредметных связей ее с другими дисциплинами, в первую очередь, с физикой.

Говоря об обновлении содержания образования, П. А. Некрасов обратил особое внимание на значение комбинаторики. Он считал необходимым непременно сохранить этот раздел в средней школе.

Б. К. Млодзеевский (1858 – 1923) в объяснительной записке к составленной им программе по математике много внимания уделил роли и месту задач в курсе средней школы. В частности, он отметил, что в курсе геометрии преобладали задачи на вычисление в ущерб задачам на построение и доказательство, что делало геометрию лишь "подспорьем алгебры" (см. ниже).

Среди решений Совещания 1899 года были и фуркация школы, и введение элементов высшей математики, и усиление межпредметных связей математики с другими учебными предметами, и многое другое. (Мы не коснулись здесь тех вопросов, обсуждавшихся на Совещании, которые не имеют непосредственного отношения к преподаванию математики.)

Собравшаяся через несколько месяцев в С.-Петербурге Комиссия в целом пришла к тем же выводам, что и Совещание в Москве. А ее решения не были претворены в жизнь потому, что в 1901 году Н. П. Боголепов был убит, а его преемник не стал ничего менять в существовавшей системе образования.

Однако вопрос о праве реалистов на поступление в университет снят не был. Специальная комиссия разрабатывала учебные планы для дополнительного, восьмого, класса реальных училищ, после окончания которого реалист мог бы поступить в университет. В 1907 году эти программы были введены, и по ним реальные училища работали вплоть до 1917 года. Комиссию, составлявшую программу по математике, возглавил профессор К. А. Поссе (1847 – 1928). По аналитической геометрии и началам анализа эта программа давала значительно больше, чем любая из отечественных программ последнего тридцатилетия XX века. И на ее основе было написано немало учебников и методических разработок, которые могли бы быть интересны и сегодня.

Ниже предлагается небольшая подборка материалов Совещания, связанных с преподаванием математики. Сюда входят: циркуляр Н. П. Боголепова, фрагменты выступлений П. А. Некрасова, Н. В. Бугаева и Б. К. Млодзеевского, а также анкета для профессоров Московского университета и фрагменты ответа на нее профессора К. А. Андреева.

Лицам, заинтересовавшимся этими вопросами, можно порекомендовать следующую литературу:

1. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 1-6.

2. Труды Высочайше учрежденной комиссии по вопросу об улучшениях в средней общеобразовательной школе. СПб., 1900. Вып. 1-8.

3. Щербина К. М. Математика в русской средней школе. Киев, 1908.

4. Гушель Р. З. Современные проблемы... столетней давности // Математика в школе. 1999. №5. С. 29-32.

5. Программа по математике для дополнительного класса реальных училищ // Журнал Министерства Народного Просвещения. 1907. №1.

I. Циркуляр Н. П. Боголепова

В текущем году г. Министром Народного Просвещения, тайным советником Н. П. Боголеповым был разослан попечителям учебных округов циркуляр от 8 июля 1899 г., за №16212, следующего содержания:

“Среди педагогов и родителей учащихся в гимназиях и реальных училищах давно слышатся жалобы на разные недостатки этих учебных заведений. Указывают, например, на отчужденность от семьи и бюрократический характер средней школы, вносящий сухой формализм и мертвенность в живое педагогическое дело и ставящий в ложные взаимные отношения преподавателей и учеников; – на невнимание к личным особенностям учащихся и пренебрежение воспитанием нравственным и физическим; – на нежелательную специализацию школы с самых младших классов, обрекающую детей на известный род занятий, прежде чем выяснились их природные способности и склонности; – на чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников, особенно в низших классах; – на несогласованность программ между собою и с учебным временем и на значительное наполнение их требованиями второстепенными или даже излишними; – на недостаточное преподавание русского языка, русской истории и русской литературы и слабое ознакомление с окружающей природой, что, взятое вместе, лишает школу жизненного и национального характера; – на излишнее преобладание древних языков и неправильную постановку их преподавания, благодаря которой не достигается цель классического образования, несмотря на отводимое этим языкам значительное количество часов; – на недостаточную умственную зрелость оканчивающих курс гимназии, что препятствует успешному ходу их университетских занятий; – на неудовлетворительную подготовку прошедших курс реальных училищ для обучения в высших специальных учебных заведениях и вообще на слабую постановку преподавания предметов в этих училищах. Указывают и на многие другие слабые стороны средней школы; но перечислять их было бы излишне.

Хотя в жалобах на наши средние учебные заведения многое преувеличивается, а многое вызывается ошибочным представлением о всесильном значении школы и невниманием к той совокупности жизненных условий, в какие она поставлена, я, тем не менее, не могу не признать в этих жалобах известной доли справедливости. Однако, прежде принятия каких-либо мер к устранению существующих недостатков средней школы, я считаю необходимым ознакомиться с суждениями по возбужденному вопросу наиболее опытных и выдающихся педагогов.

С этой целью я предполагаю зимой текущего года созвать в С.-Петербурге особую комиссию. Желая иметь в ее среде представителей от вверенного Вашему Превосходительству округа, покорнейше прошу Вас заблаговременно избрать 2-4 лиц из числа наиболее опытных, образованных и даровитых руководителей или преподавателей средней школы, стараясь, по возможности, чтобы они явились выразителями потребностей обеих общеобразовательных русских школ (гимназии и реального училища) и разных направлений, господствующих среди педагогов вверенного Вам округа.

В руководство избранным Вами лицам при их подготовительных работах покорнейше прошу Ваше Превосходительство сообщить следующие указания, которые будут, между прочим, даны предполагаемой комиссии.

1) Задача комиссии должна будет состоять в том, чтобы а) обсудить всесторонне существующий строй средней школы с целью выяснить его недостатки и указать меры к их устранению при условии сохранения основ классической гимназии и реального училища, как главных типов этой школы в России, и б) если бы при обсуждении первого вопроса возникли предположения о видоизменении существующих типов или о создании какого-либо нового типа, то подвергнуть рассмотрению и эти предложения, но отдельно от первого вопроса.

2) Заключения комиссии не только должны быть выражены в форме общих положений, основательно мотивированных, но и соединены с подробною разработкою этих положений, которая давала бы ясное представление о возможном их практическом осуществлении. Необходимо при этом, чтобы ожидаемые заключения были основаны не столько на отвлеченных рассуждениях, сколько на наблюдениях образованных и опытных педагогов над действительной жизнью нашей средней школы.

3) Обсуждая желательные перемены в существующем строе классической гимназии и реального училища, комиссия должна руководиться соображением, что к этой цели нужно идти постепенно и осторожно, ибо учебное дело не терпит грубой ломки. Следуя этой точки зрения, необходимо при этом иметь в виду, что современные условия русской жизни настоятельно требуют умножения разного рода

профессиональных учебных заведений, приготовляющих своих воспитанников непосредственно к практической деятельности. Этот путь постепенного улучшения классической и реальной школы и возможно большего распространения профессионального образования в нашем отечестве откроет широкую возможность свободного и правильного распределения учащихся по их призванию, подготовке и условиям жизни, между различными видами учебных заведений и даст естественное направление тем молодым силам, которые ныне, за отсутствием или трудностью иного выхода, искусственно привлекаются в средние общеобразовательные школы, не имея к тому соответственных склонностей.

4) Среди других вопросов особое внимание должно быть уделено комиссией вопросу о физическом воспитании учащихся. В виду этого, комиссии предстоит обсудить, какие меры следует принять с указанной целью и, в частности, как можно достигнуть такого распределения занятий, которое давало бы возможность ученикам, смотря по их возрасту, употреблять на отдых между уроками, на физические упражнения и игры больше времени, чем это допускается теперь. Основательное выяснение вопроса о физическом воспитании учащихся я считаю одной из самых важных задач комиссии. Если бы было признано, что эту задачу нельзя разрешить без сокращения учебных программ, то я нахожу такое сокращение меньшим злом, чем пренебрежение физической стороной воспитания, тем более, что в действующих ныне программах найдется немало второстепенных вопросов, которыми можно пожертвовать ради сохранения здоровья учащихся без ущерба для главной цели — достижения известной степени умственной зрелости и усвоения основных сведений по преподаваемым наукам. Необходимо только, чтобы вопрос о сокращениях решался не одними специалистами, которые, естественно, склонны придавать первостепенное значение таким сведениям, которые, с педагогической точки зрения, нередко оказываются второстепенными.

5) Еще большего внимания заслуживает вопрос о нравственном воспитании в широком смысле. Хотя именно в этой стороне своей жизни школа больше всего находится в зависимости от нравственного уровня семьи и общества, она, тем не менее, должна сделать с своей стороны все возможное, чтобы развивать в своих воспитанниках волю, направляемую религиозными и нравственными началами.

Поэтому комиссия должна обсудить, какие средства могли бы содействовать развитию в воспитанниках искреннего религиозного чувства, искренней привязанности и преданности своему ГОСУДАРЮ и отечеству, чувства долга, чести, правдивости, уважения к авторитетам т.д., имея в виду не одну систему формальных предписаний, но и меры, проникающие в повседневную жизнь школы."

По получении приведенного выше циркуляра, г. попечитель Московского учебного округа П. А. Некрасов, руководясь желанием, чтобы избрание от учебного округа в состав комиссии 2-4 представителей средней школы было наиболее удачным и соответствовало действительным жизненным потребностям, которые сознаны местными опытными педагогами, признал необходимым мнения и заключения этих педагогов по возбужденным г. Министром вопросам выяснить путем предварительных совещаний с ними и затем уже решать вопрос об избрании упомянутых представителей... На первых же заседаниях, происходивших под председательством г. попечителя, выяснилась потребность для удобства ведения дела разделиться на несколько групп, сообразно с рубриками циркуляра г. Министра и с теми направлениями, которые выразились во мнениях различных лиц относительно реформы средней школы...

Для разрешения всех вопросов, возбужденных в циркуляре г. Министра, происходили под председательством г. попечителя округа общие собрания, в которых принимали участие все члены совещаний и впоследствии сотрудники групп... По ходу дела в этих собраниях явилась необходимость выделить : А) комиссии — для детальной разработки некоторых вопросов, касающихся одинаково всех типов средней школы, и В) группы, с подразделением некоторых из них на подгруппы, — для обсуждения вопросов по различным отдельным типам учебных заведений. Комиссии и группы образовались такие:

А) Комиссии.

1-ая — по вопросу о физическом воспитании...

2-ая — по вопросу о функциях педагогического совета...

3-ья — по вопросу об экзаменах и отметках...

4-ая — по вопросу о преподавании Закона Божия...

5-ая — по вопросу о профессиональных училищах и о возможности перехода в них для учеников общеобразовательных школ...

В) Группы.

1) группа по организации классической гимназии, тип I ...

2) группа по организации гимназии, тип 2...

3) группа по организации гимназии, тип 3...

4) группа по организации реального училища... Эта группа по вопросам о преподавании отдельных предметов выделила из себя следующие подгруппы :

а) подгруппа гуманитарных наук;

в) подгруппа физико-математических наук; председатель А. Ф. Леонович, секретари А. М. Воронец и М. П. Чижевский;

с) подгруппа графических искусств...

5) группа по вопросу о видоизменении существующих типов средней школы или о создании нового типа. Группа эта подразделялась на две подгруппы:

а) подгруппа по организации единой прогимназии без греческого языка;

в) подгруппа по организации нового типа средней школы — единой общеобразовательной школы...

Труды всех происходивших совещаний распределены междv шестью выпусками настоящего издания в таком порядке;

В 1 выпуске помещены труды общих собраний и комиссий.

Во 2 выпуске помещены труды 1-ой группы.

В 3 выпуске помещены труды 2 и 3 групп.

В 4 выпуске помещены труды 4 группы с ее подгруппами.

В 5 выпуске помещены труды 5 группы.

В 6 выпуске помещены ответы профессоров Императорского Московского Университета и Императорского Технического училища на вопросы, предложенные им о средней школе, и краткий обзор этих ответов...

Главным редактором всего издания состоял помощник попечителя Московского учебного округа В. Д. Исаенков.

Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. I. С. I-VIII.

II. Записка заслуженного профессора Н. В. Бугаева “К вопросу о средней школе” (фрагменты).

Наша учебная система признает школы двух различных типов: классическую и реальную.

Эта система неудовлетворительна ни в педагогическом, ни в социальном отношении.

Лица, стоящие за эту систему, очень красноречиво выступают против раздвоения школы, когда это раздвоение под именем бифуркации предлагается в возрасте около двадцати лет. К сожалению, их красноречие не отличается последовательностью.

Как они не замечали, что, выступая против раздвоения школы в возрасте около двадцати лет, они с своей стороны предлагали и ввели плохую бифуркацию в возрасте около десяти лет?

Непригодность подобной бифуркации с детского возраста признана всеми.

Разве могут родители с детского возраста решить, какие наклонности обнаружатся у детей в период их полового развития и сознания? Не имея возможности справиться с этими вопросами, родители должны были часто действовать наудачу. Они сами должны были решать, приготовляют ли они своего сына к деятельности инженера или филолога...

Всякий понимает, какому мучительному истязанию подвергли родителей, заставляя их домашними средствами и кустарными способами решать трудные вопросы психологии и социологии.

Социальными последствиями такой системы было то, что появилась масса неудачников, людей без призвания и разумных целей...

Мы считаем полезным повсеместное устройство учебных заведений с четырехлетним курсом БЕЗ ДРЕВНИХ ЯЗЫКОВ. При настоящей организации эти школы соответствуют прогимназиям и городским училищам.

Каким же условиям должна удовлетворять рационально устроенная школа? Она должна быть школою ЕДИНОЮ и разумною.

Для этого она должна избегать предопределять с детского возраста будущую деятельность учащегося. Она должна быть приспособлена ко всевозможным формам высшего и профессионального образования, она должна считаться с историческими условиями культуры и национальными условиями народа. Она должна принимать во внимание самые разнообразные индивидуальные особенности учащегося и удовлетворять потребностям государства и общества...

В четыре года учащиеся должны приобрести основательные познания по русскому языку. Только после этого они могут с успехом продолжать свое обучение в гимназиях. Только тогда они не встретят затруднений при усвоении всевозможных грамматик.

По окончании этой школы та часть, которая пожелает ограничить свое общее образование этою школою, может поступать в различные низшие профессиональные, технические и ремесленные училища. Те же, которые пожелают продолжать свое общее образование, могут поступать в гимназии с трехлетним курсом.

В этих гимназиях из древних языков должен преподаваться только один латинский язык в таком размере, чтобы окончивший курс гимназист мог свободно без словаря читать на латинском языке легкие исторические сочинения.

Желающие окончить свое общее образование гимназией поступают в средние технические и профессиональные школы.

Желающие же продолжить свое общее образование и подготовиться к поступлению в университеты и высшие специальные школы поступают в лицей с двухлетним курсом.

Эти лицеи должны состоять из двух отделений: отделения, в котором центром тяжести преподавания являются точные науки, и отделения, в котором преподавание сосредоточивается около древних языков, истории и литературы.

Окончившие курс лицея по отделению точных наук могут поступать на медицинский и физико-математический факультеты, а также в высшие специальные школы; окончившие же курс на отделении словесных наук могут поступать на факультеты юридический и историко-филологический.

В отделении словесном дается широкое развитие изучению обоих классических языков.

Выгоды этой системы состоят в том, что здесь предоставляется более позднему возрасту решение вопроса о том, какую дорогу желает выбрать учащийся для своего дальнейшего развития. Огромный контингент учащихся будет проходить только четырехклассные училища. Эти люди будут стремиться скорее выступить в жизнь в качестве полезных деятелей, не претендующих на высокие общественные положения. К ним будут принадлежать ученики, родители которых по своим экономическим средствам не пожелают долго держать детей в школе.

Всевозможные льготы по обучению в гимназиях должны быть даваемы только тем, которые хорошо окончили курс прогимназии. Этими льготами должен пользоваться учащийся до тех пор, пока он заслуживает их по своим успехам, способностям и прилежанию. Право на государственные льготы должны давать не столько бедность, сколько способности и трудолюбие ученика...

Латинский язык в известной мере еще сохраняет свое значение при изучении различных наук. Научная естественно-историческая и медицинская терминология связаны с латинским языком. Кроме того, латинский язык является ключом для лучшего теоретического и практического понимания и усвоения многих новых живых языков, принадлежащих к романской ветви. Вот почему еще долго он будет сохранять некоторое значение в школьной системе.

Гимназическое образование должно быть окончено в три года. Оно тянется в настоящее время очень долго.

За гимназией должны начинаться уже более специализированные занятия. Для этого должны существовать такие учебные заведения, которые составляют переходную ступень между гимназиями и высшими школами.

Эти учебные заведения должны подготовлять воспитанников к университетам и высшим специальным школам не только по содержанию преподаваемых в них предметов, но и самому способу преподавания в них.

В настоящее время существует резкий переход между способами преподавания в гимназиях и в университетах. В гимназиях практикуется ежедневное приготовление и ежедневная проверка уроков. Привыкнув к такому способу обучения, гимназист сразу теряется в университете, где ему излагают науку, не подчиняя его ежеминутному контролю на занятиях.. Бывший гимназист теряется в университете, когда встречается с новым способом занятий, и часто не умеет располагать и толково пользоваться своим временем для успешного прохождения университетских курсов.

Задача лицеев и должна состоять в том, чтобы последовательно подготовлять и приучать своих воспитанников к занятиям в университете и в высших специальных школах. Самое преподавание в лицеях должно частию состоять из занятий, похожих на гимназические с репетициями и семинариями, частию из занятий, похожих на университетское преподавание с лекциями и самостоятельными работами. В лицее должны иметь место и уроки, и лекции...

В университетах не было бы такого числа скитальцев по факультетам, которые не могут выяснить своего призвания и не желают работать. Ленивый и неспособный к научной работе застрял бы в лицее и в нем уже убедился бы, что наука ему не по силам, а родителям его не по средствам...

В низшей школе должен быть обязателен один иностранный язык для лиц, желающих продолжать свое обучение в гимназии. Желающие могут и в прогимназии начать изучение обоих иностранных языков.

... Считаю также полезным обратить внимание на одно обстоятельство нашей школы, очень вредное в педагогическом отношении. Наша средняя школа так распределяет занятия, что она как бы желает захватить у учащегося все время. Она так располагает свои требования, что ученик не имеет возможности дать простор своим индивидуальным наклонностям. Настоящему добросовестному ученику нет времени заниматься чем-нибудь помимо школы. Эти попытки в пользу школы наложить секвестр на все время не дают родителям возможности обучать детей другим предметам помимо школы...

Школа стремится придать своим занятиям один шаблонный характер, обезличивает учащихся своими однообразными требованиями.

Родители часто справедлива сожалеют, что теперешнему школьнику закрыты все способы проявить индивидуальные наклонности. Это ведет к тому, что в ученике развивают только пассивные способности и добродетели. Активной же стороне духа не дают никакого развития.

Вот почему наша школа воспитывает такую массу людей без характера и почина. Это большая педагогическая ошибка. По-моему, в человеке дороже знаний должна цениться его способность самостоятельно, активно и энергично добывать эти знания, а это достигается только тогда, когда школа оставляет учащемуся свободное время для проявления самостоятельности и личной энергии.

Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., Вып. 5. Приложения. С. 15-21.

III. Мнение П. А. Некрасова о цели и значении преподавания математики в гимназиях

Принадлежа к лицам, признающим положение преподавание математики особенно в гимназиях и отчасти в реальных училищах ненормальным, я убежден, что среди многих причин неудовлетворительности преподавания математики одна из главных кроется в самом направлении этого преподавания. Это направление во многих отношениях держит математику в стороне от действительных научных интересов, ставя ей в гимназии слишком одностороннюю схоластическую цель; "усвоение последовательности и логичности выводов и доказательств". Учебные планы и программы гимназий, учебные руководства и пособия составлены в духе этой односторонней цели, которой не противоречат одобренные задачники с фантастическим, часто нелепым и сложным материалом в их содержании. При этом забывают, что математика не есть формальная логика и отвлеченная схоластическая эквилибристика, а наука и вместе с тем величайший из научных методов миропознавания, что таковою она является не в высших только частях, но и в ее элементах.

Установленная учебными планами цель преподавания математики ныне достигается в гимназиях удовлетворительно, а иногда и превосходно, и много абитуриентов гимназий считают себя особенно подготовленными на математический факультет... И однако результаты обнаруживаются самые плачевные, как только такому математику приходится применять свои познания к самому простому конкретному научному факту. Беспомощность абитуриентов гимназии или реального училища в подобных случаях хорошо характеризована...

Математическую подготовку в нынешних гимназиях можно сравнить с таким знанием древнего языка, когда грамматика вызубривается исправно, а древняя литература, представляющая существенный интерес, остается совершенно недоступною.

Перейду затем к вопросу о том, как исправить это ненормальное положение преподавания математики в гимназиях и реальных училищах. Соображения по этому поводу давно высказывались профессорами Московского университета. Летом текущего года на съезде в Петербурге попечителей округов и начальников высших учебных заведений удачно высказался по этому поводу бывший ректор Одесского университета и профессор физики Ф. Н. Шведов. Мои взгляды в этом отношении сходятся с мнениями большей части университетских преподавателей, компетентных в этом деле.

Не расширяя в средней школе объема программы математики, не осложняя, а напротив, по форме упрощая содержание задач, как материала для упражнений по математике, можно повысить развитие абитуриентов гимназии, ставя единственную правильную цель преподавания математики: усвоение ее, как науки и как научного метода миропознавания. Из этой научно-практической цели должны исходить учебные планы, программы и все направление преподавания математики; к достижению этой цели должны стремиться учебники, учебные пособия и особенно задачники по математике. Преподавая математику, необходимо как можно чаще и практичнее сближать (особенно в задачах) ее, как научный метод миропознавания, с теми конкретными научными фактами и явлениями, к которым она применима. Заимствуя для этой цели явления из разных наук (географии, статистики, физики, механики, астрономии и пр.), нужно облекать вопросы об этих явлениях в форму простых и научно выраженных математических задач. Если явления еще не могут быть усвоены учениками в систематическом изложении, то перед этим затруднением не нужно останавливаться, т.к. можно и даже крайне желательно сообщать ученикам на уроках математики пропедевтическое объяснение явлений, достаточное для усвоения содержания задачи и ее математической конструкции. Так, задачи, связанные с изменение температуры, могут быть предлагаемы ранее систематического изучения теплоты. В этом направлении можно заимствовать содержание математических задач из явлений звука, света, теплоты, электричества, магнетизма и вообще из разных областей мироведения, пропедевтически истолкованных ради математических упражнений... Необходимо также предоставить физико-математическим факультетам университетов оказывать влияние на направление преподавания математики в гимназиях, передавая на предварительное заключение этих факультетов вопросы об одобрении учебных пособий по математике, и дав этим факультетам право обращаться к попечителям округов о замеченных по их наблюдениям над студентами недостатках преподавания математики в той или другой гимназии.

Пропедевтическое ознакомление на уроках математики с различными явлениями из области мироведения, в изучении которых играет роль математика, не только уяснит ученику истинное, а не фантастическое значение математического метода, но, сверх того, само по себе будет иметь благотворное влияние на ученика в другом отношении: пропедевтическое ознакомление более возбуждает умственную самостоятельность ученика, нежели изучение систематическое, но пассивное. При возбужденной же самостоятельности последующее систематическое изучение может сделаться более сознательным и полным живого интереса. При этом ныне преследуемая в гимназиях односторонняя цель преподавания, т.е. усвоение последовательности и логичности выводов и доказательств, разовьется и окрепнет сама собой, без особенных усилий, и притом в здравой, а не в схоластической форме.

При обсуждении постановки преподавания математики и сокращения программ этого предмета в гимназиях не следует упускать из виду педагогического и научно-философского значения разных отделов математики. Мне приходилось слышать, что теория сочетаний и бином Ньютона предлагаются иногда, как отделы, которые можно было бы сократить. Соглашаясь на другие сокращения, выскажусь решительно против сокращения теории сочетаний. Теория эта по особенному значению своему принадлежит к таким отделам, преподавание которых в гимназии следует непременно сохранить и поставить в лучшие условия. Теория сочетаний представляет средство для развития одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому, и изощрение ее желательно. Но, кроме этого соображения, за сохранение теории сочетаний в курсе гимназии говорят не менее важные научные соображения. Входя через бином Ньтона в связь со всеми отделами анализа и давая элементарные основы для исчисления вероятностей, в то же время теория сочетаний есть одна из немногих и очень важных глав элементарной математики, принадлежащих аритмологии, крайне подавляемой в курсе гимназии анализом. Между тем, аритмология, как математический метод миропознавания имеет не менее важное значение, чем анализ...

Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 3. Приложения. С. 207-211. (Перепечатано с сокращениями)

IV. Из объяснительной записки профессора Б. К. Млодзеевского к составленной им программе по математике

... Для того, чтобы преподавание математики приносило в школе всю ту пользу, какую оно может принести, необходимо, чтобы теоретический курс был поставлен на первое место и чтобы решение задач служило только пособием к изучению теории. Хотя такой взгляд на отношение между теорией и задачами высказывается и в ныне действующих программах, но на самом деле задачи получили преобладающее значение во всех отделах курса. Это влияние стоит в несомненной связи с тем значением, которое имеют задачи как на окончательных, так и на переводных испытаниях. Так как умение решать задачи сделалось главною мерою познания и способности учеников, то, естественно, что и преподаватели, и учащиеся начали обращать главное внимание на решение задач в ущерб основательному изучению теоретического курса. Таким образом, в курсе арифметики, в сущности, простой учебный материал был осложнен задачами, с условиями, крайне запутанными, бесполезными для уяснения теории, не имеющими практического приложения, вся трудность которых заключалась в искусственном нагромождении условий и осложнений выкладок.

В алгебре, геометрии и тригонометрии преобладание значения задач привело к тому, что особенное внимание было обращено на изучение тех отделов, которые давали более материала для задач, в ущерб отделам, более важным в теоретическом отношении и более пригодным для развития в учениках привычки правильного и серьезного мышления. Вместе с тем, благодаря недостатку сближения между различными предметами курса, материал для алгебраических задач до сих пор мало заимствуется из геометрии и физики, заключающих в себе обильный источник примеров на все отделы алгебры, вследствие чего даже хорошие ученики редко бывают в состоянии справляться с нетрудною физическою или геометрическою задачей, требующею применения алгебры.

Особенно неблагополучно отразилось преобладание задач на вычисление в геометрии. В настоящее время все отделы, не дающие непосредственного материала для упражнений на вычисления, доведены до наименьшего объема, и, таким образом, геометрия в значительной степени утратила свое образовательное значение, как учение о пространственных соотношениях, и как бы превратилось в подспорье алгебры. Такое неправильное положение дела отразилось как на планиметрии, где ученики имеют в геометрии круга и треугольника лишь самые элементарные сведения, едва знакомы с простейшими геометрическими местами и совсем не упражняются в геометрических построениях, так и в стереометрии, где первая часть, самая важная для выработки ясных пространственных представлений, проходится лишь вскользь, и ученики спешат перейти к учению о поверхностях и объемах, чтобы там остановиться исключительно на вычислениях. Точно так же и в тригонометрии на первый план выступило решение треугольников, тогда как гониометрия, несомненно, дает в образовательном отношении гораздо более ценный материал.

Таким образом, для успешного преподавания математики необходимо, чтобы задачи не имели преобладающего значения и служили лишь к пояснению теории и к приобретению навыка в пользовании полученными знаниями...

Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 3. С. 157-162.

V. Анкета для профессоров Императорского Московского университета

1. В какой мере и в каком направлении желательно усилить преподавание новых языков в гимназиях?

2. Можно ли допускать в университет, на некоторые факультеты, учеников реальных училищ, при условии восьмилетнего курса и при условии основательного изучения новых языков?

3. Если возможно допускать на некоторые факультеты учеников реальных училищ, то какие требования необходимо, по мнению г. профессора, предъявить к реалистам, сверх основательного изучения новых языков; например, не желательно ли ввести в курс реальных училищ латинский язык и в каком размере?

4. Не представляется ли желательным, при сохранении, примерно, в семи классах гимназии преподавания общеобразовательного характера, видоизменить преподавание в VIII классе и, может быть, продолжить его в IX классе — так, чтобы это преподавание носило подготовительный для университета характер (на манер французских лицеев)? При условии осуществления такого лицейского преподавания, не представляется ли возможным сделать сокращение университетского курса, примерно, на один год, если будет прибавлен IX класс в гимназии?

5. Какие недочеты замечаются в познаниях по общеобразовательным предметам и в общем развитии абитуриентов гимназий, затрудняющие им занятия университетскою наукою?

6. Не желательно ли с целью отбора абитуриентов, пригодных к высшему образованию, установить особый экзамен для поступления в университет? Где и в какой форме должен происходить этот экзамен?

7. Какие другие указания имеет сделать г. профессор по поводу желательных улучшений в области среднего образования?

Из ответа ординарного профессора К. А. Андреева

На 1 вопрос. Усиление преподавания новых языков в наших гимназиях в высшей степени желательно... Научить читать на иностранном языке сравнительно легкую прозу и можно, и для общего образования очень важно... Желательно, чтобы преподавание новых языков, а именно французского и немецкого, в крайнем же случае — одного из них, было в наших гимназиях обязательно и имело бы целью чтение прозаических сочинений лучших авторов. Это преподавание должно вестись через все классы от первого до последнего...

На 2 и 3 вопросы. Главным критериумом, определяющим право на поступление в университет, должна быть умственная зрелость — навыки в употреблении своих умственных способностей и родного языка. Вследствие этого в университет могут быть принимаемы воспитанники всякой школы, которая по своим программам и планам преподавания может доводить учащихся до этой зрелости и усвоить им эти навыки. К сожалению, ни наши гимназии, ни наши реальные училища, в настоящем их состоянии, в должной мере этому не удовлетворяют. Несмотря на многолетнюю дрессировку детского ума на грамматических подробностях по древним языкам, большинство поступающих в университеты молодых людей отличаются слабою способностью к строгому логическому суждению и ясному, отчетливому изложению мыслей, а также недостатком умения наблюдать и классифицировать факты и выводить из них правильные заключения... Если воспитание или, вернее, дрессировка ума и может достигаться упражнениями на таком учебном материале, какой дают древние и новые языки, а также математика, то воспитание характера, наблюдательности, способности к самостоятельным выводам и умозаключениям, к систематизированию своих мыслей и передачи их в ясном изложении — возможно только при хорошем обучении родному языку, родной речи и при достаточном ознакомлении с литературою своего языка и с окружающей действительностью.

... Я полагаю, что в университет могут быть принимаемы ученик реальных училищ наравне с гимназистами, по крайней мере, на физико-математический и медицинский факультеты...

Относительно необходимости при этом восьмилетнего курса для реальных училищ я имею большое сомнение...

Нельзя не согласиться, что в настоящее время оканчивающие курс гимназии, в среднем выводе, оказываются более развитыми, чем оканчивающие в реальных училищах, но я думаю, что было бы крайне ошибочно приписывать этот окончательный результат без достаточной проверки его причин, одному лишь преимуществу гимназической школьной системы... Большинство наших культурных семей отдают своих детей в гимназии вовсе не по причине предпочтения классической системы, а единственно из желания не закрывать им дороги к высшему образованию...

На 4 вопрос... Переносить установившуюся уже грань между обучением элементарным и занятиями наукой, без достаточного на то основания, может быть и опасно. Легко может случиться, что одна сторона проиграет, а другая ничего не выиграет. Возьмем для примера аналитическую геометрию. Я не сомневаюсь, что в случае преподавания этой науки в гимназиях ученики (преимущественно лучшие) будут ознакомлены с главными свойствами линий 2 порядка и зазубрят даже приемы для исследования этих свойств из уравнений, но я уверен, что самое значение науки, как совершенно особого метода, ими усвоено не будет. В университете же, если этот предмет не будет проходиться сызнова, неизбежно встретятся затруднения при усвоении начал механики, анализа и астрономии. Дело сведется, таким образом, на то, что часть материала без его одухотворения будет перенесена из университета в школу, дух же научности за этим материалом не последует. И причина этому понятна: никогда ум человеческий, работающий по указке, по подсказу и задаванию урока, не будет в то же время самостоятельно, критически обдумывать и оценивать проходимое.

Еще труднее согласиться с мыслью об уменьшении университетского курса на один год. Чтобы университетский курс был достаточно законченным, чтобы студенты могли ознакомиться с самым тесным циклом наук факультета или его отделения и усвоить себе методы исследований, наблюдений, критических проверок и применений, четыре года есть самый меньший срок занятий...

На 5 вопрос. Недочеты в познаниях по тем предметам, преподавание которых уже вполне установлено в средней школе, еще не составляют существенной важности. Некоторые пробелы этого рода при добром желании могут быть восполнены самостоятельно уже в университете. Несравненно важнее недочеты, проистекающие от полного или почти полного отсутствия в средней школе некоторых факторов, имеющих несомненное значение для общего установленного развития. На первом месте следует указать на то, что ученики гимназий не получают в школе почти никаких сведений об окружающей нас природе.

Большинство из них... обречены оставаться никак не в большем умственном общении с физическим миром, чем люди, вовсе не получившие образования. Отсюда такие недостатки умственного развития, как отсутствие наблюдательности, неумения определять предмет суждения и с достаточной многосторонностью его рассматривать. Отсюда же и бедность воображения, неспособность воссоздать в мыслях предмет по его признакам или описанию его частей.

Все эти недостатки могли бы быть исправлены... Этого можно достигать не иначе, как одновременно в двух направлениях: во-первых, преподаванием естествознания, и, во-вторых, усилением преподавания отечественной литературы, преимущественно, новейшей.

Недостатки сведений по естествознанию и по русской литературе и составляют, по моему мнению, самые существенные недочеты в действующей теперь системе среднего образования.

На 6 вопрос. Вопрос об отборе из числа оканчивающих курс в среднем учебном заведении лиц, годных для университета, представляется мне имеющим место лишь в том случае, если это учебное заведение не предназначено приготовлять учащихся к университету... Если нынешние реальные училища будут поставлены в такие условия, в которых их абитуриенты также могут быть признаны обладающими достаточной умственной зрелостью и общим развитием, то и для них ни в каком отборе не будет надобности...

На 7 вопрос. Желательные изменения в области среднего образования, с моей точки зрения... заключаются в следующем:

1) Преобразование общего плана преподавания латинского языка с отнесением начала этого преподавания на 3 класс и с перенесением центра тяжести с грамматического изучения языка на изучение авторов.

2) Сокращение числа уроков, отводимых на латинский язык, и отмена преподавания греческого языка.

3) Усиление и расширение исторических познаний классической древности, а также вообще истории умственной культуры человечества.

4) Замена греческого языка одним или двумя новыми с целью достижения свободного чтения прозаических произведений.

5) Введение преподавания естествознания.

6) Усиление преподавания русского языка и литературы, преимущественно, в практическом направлении, с целью приучения владеть мыслью и словом. Последнее считаю самым существенным.

Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 6. С. 48-54

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, ул. Солдатская, д. 8, корп. 2, к. 69.

Контактные телефоны: (095) 362-82-56, (095) 261-53-12.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2000 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2000 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810600000000342, БИК 044525342

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents