Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 2 (17)

Апрель - июнь 2001 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

N 2 (17), 2001 г.

Москва

Contents

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

N 2 (17), апрель – июнь 2001 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2001 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 29.08.2001.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

ТЕЗИСЫ ПО АЛГЕБРЕ

А. Н. Земляков

Публикуем окончание второй части «тезисов по алгебре»— учебных материалов ФМШ №18 (ныне СУНЦ) при МГУ. Вторая часть тезисов соответствует второй четверти обучения на одногодичном потоке. (Первая часть тезисов опубликована в №4(15), 2000 г., начало второй части — в №1(16), 2001 г.)

Содержание.

Глава VII. Геометрические построения и расширения полей

§ 11. Алгебраическая теория геометрических построений

«Музыку я разъял как труп. Поверил
Я алгеброй гармонию.»
(А. С. Пушкин, «Моцарт и Сальери»)

124. Оказывается, вопрос о разрешимости уравнений в квадратных радикалах тесно связан с построениями на плоскости с помощью циркуля и линейки, и начнем с соответствующих изысканий.

125. Любая задача на построение сводится к получению каких-то отрезков (сторон, радиусов и т.д.) или точек (вершин, центров, точек касания и т.п.). Раз и навсегда нарисовав на плоскости перпендикулярные оси Ox и Oy, можно сказать, что отыскание точки $(x; y)$ эквивалентно отысканию ее координат — отрезков x и y. Таким образом, все искомые элементы в задачах на построение можно считать отрезками — $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Условившись, ради определенности, откладывать их на оси Ox от точки O, мы можем сказать, что задача на построение заключается в построении чисел $x_1, \ldots, x_n$ (или точек $(x_1; 0), \ldots, (x_n; 0)$).

126. Аналогично, данные задачи на построение можно считать отрезками на оси Ox. Выбрав один из них за единичный отрезок, мы сможем сказать, что данные — это числа $1, a_1, \ldots, a_m$.

127. Итак, задача на построение состоит в переходе с помощью конечного числа применений циркуля и односторонней линейки от данных элементов $1, a_1, \ldots, a_m$ к искомым $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

128. Часто в задаче на построение задан только один отрезок, 1, и требуется построить (точнее, достаточно построить) тоже только один отрезок, x.

Примеры задач типа «$1 \rightsquigarrow x$».

А. *Удвоение куба.* Зная ребро куба, построить ребро другого куба, имеющего вдвое больший объем: по $a = 1$ построить x, т.ч. $x^3 = 2a^3 = 2$, то есть $x = \sqrt[3]{2}$.

Б. *Построение правильного n-угольника = деление окружности на n равных дуг.* Центр окружности можно считать находящимся в начале координат O, а радиус — равным 1. Требуется построить точки с полярными координатами $(1, k \cdot \frac{2\pi}{n})_p$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Очевидно, достаточно построить только точку $(1, \frac{2\pi}{n})_p$, а она вполне определяется своей координатой $x = \cos\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, имеем задачу: «$1 \rightsquigarrow x = \cos\frac{2\pi}{n}$».

В. *Квадратура круга.* Требуется построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга: по $R = 1$ построить x, т.ч. $x^2 = \pi R^2 = \pi$, т.е. $x = \sqrt{\pi}$.

Пример задачи типа «$(1, a) \rightsquigarrow x$».

Г. *Трисекция угла.* Данный угол α требуется разделить на 3 равные части. В этой задаче данными можно считать 1 и $\cos\alpha$, искомым — $x = \cos\frac{\alpha}{3}$. В частном случае $\alpha = \frac{\pi}{3}$ можно ограничиться в качестве данного только одним отрезком, 1, ибо отрезок $\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2}$ можно сразу построить.

129. *Следующий шаг.* Выясним, какие алгебраические операции с данными (или известными) отрезками (числами) можно реализовать (осуществить) с помощью циркуля и линейки.

Список осуществимых операций

(1) $a, b \mapsto a+b, a-b$;

(2) $a \mapsto ma$ $(m \in \mathbb{N})$;

(3) $a \mapsto \frac{a}{n}(n \in \mathbb{N})$;

(4) $a \mapsto \frac{m}{n}a = \alpha a,\ \alpha \in \mathbb{Q}$;

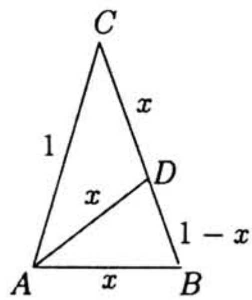
(5) $a, b, c \mapsto x = \frac{ab}{c}$ (в частности, $x = ab$ при $c = 1$ и $x = \frac{a}{c}$ при $b = 1$);

(6) $a, b \mapsto \sqrt{ab}$ (в частности, $x = \sqrt{a}$ при $b = 1$).

Хватит. **Пример:** Теорема Пифагора дает построение $a, b \mapsto \sqrt{a^2+b^2}$, но такая операция есть композиция операций (5), (1) и (6).

130. Операций (1)–(6) уже достаточно для решения многих (а в действительности *всех разрешимых!!*) задач на построение.

Классический пример. *Деление окружности на 10 равных дуг*, т.е. построение $1 \rightsquigarrow \cos 36°$.



Рассмотрим треугольник ABC с углами $C = 36°$, $A = B = 72°$. Проведем биссектрису AD; получим треугольник ABD, подобный ABC. С одной стороны, если $AC = 1$, то $AB = x = 2\cos 36°$. С другой стороны,

$$CD = AD = AB = x \Rightarrow BD = 1 - x,$$

и из подобия находим:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Теперь строим $1 \rightsquigarrow \cos 36° = \frac{x}{2}$.

131. Итак, напрашивается следующий способ решения задачи на построение вида «$(1, a_1, \dots, a_m) \rightsquigarrow x$».

1. С помощью геометрического анализа составляем алгебраическое уравнение $P(x) = 0$, связывающее данные $1, a_1, \ldots, a_m$ с искомым x.

2. Решаем уравнение $P(x) = 0$ — выписываем x в явном виде (если сможем).

3. Если формула для x содержит только перечисленные в тезисе 129 операции (1)–(6), то строим x стандартными приемами.

На практике этот способ редко бывает короче, чем «обычное», геометрическое решение, но он «универсален», и с его помощью можно доказать принципиальную возможность построения — например, именно так Гаусс доказал, что окружность циркулем и линейкой можно разделить на 17, на 257 и на 65 537 разных дуг (см. статью С. Г. Гиндикина «Дебют Гаусса» в «Кванте», № 1 за 1972 год; мы еще возвратимся к построениям Гаусса; заметим, что три упомянутых числа простые!).

132. Отступление. «Один слишком навязчивый аспирант довел своего руководителя до того, что тот сказал ему: «Идите и разработайте построение правильного многоугольника с 65 537 сторонами». Аспирант удалился, чтобы вернуться через 20 лет с соответствующим построением (которое хранится в архивах в Гёттингене).»

(Дж. Литлвуд)

§ 12. Геометрические построения и расширения полей

« — Чему же вас учили? — спросила Алиса.
— Сначала чихать и плясать, конечно, — ответил Мок-Тартль, — затем четырем действиям арифметики: Служению, Почитанию, Угождению и Давлению.»

(Льюис Кэррол)

133. В связи с предыдущими рассмотрениями возникают такие вопросы.

А. Нельзя ли расширить список осуществимых операций (например, как-нибудь добавить построение $a \mapsto \sqrt[3]{a}$)?

Б. Любое или не любое число $x \in \mathbb{R}$ можно построить, исходя из числа (отрезка) 1? Каково множество $\mathcal{P}$ построимых чисел?

134. *Первоначальное описание множества $\mathcal{P}$ чисел, построимых из 1.*

а) Из т. 129 (4) следует, что $\mathbb{Q} \subset \mathcal{P}$ (все рациональные числа построимы).

б) Из т. 129 (6), (4) вытекает, что для любого $a \in \mathbb{Q}$ квадратичное расширение $\mathbb{Q}[\sqrt{a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ состоит из построимых чисел: $\mathbb{Q}[\sqrt{a}] \subset \mathcal{P}$.

Отметим, что согласно определению поля и тому факту, что $\mathbb{Q}[\sqrt{a}]$ — поле, операции 129 (1)-(5) не выводят нас за пределы поля $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{a}]$.

в) Однако, если $a_1 = \alpha + \beta\sqrt{a} \in \mathbb{Q}_1$, то операции (6), (5) и (1) позволяют построить $\sqrt{a_1}$ и далее все числа вида $\alpha_1 + \beta_1\sqrt{a_1}$, где $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q}_1$, т.е. расширение $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_1[\sqrt{a_1}] \subset \mathcal{P}$. Если $\sqrt{a_1} \notin \mathbb{Q}_1$, то $\mathbb{Q}_2$ есть *существенное* расширение $\mathbb{Q}_1$ (т.е. $\mathbb{Q}_2 \neq \mathbb{Q}_1$).

Так можно продолжить далее, и получить весьма большой набор построимых чисел. Прежде вернемся к алгебре и уточним кое-что.

135. Рассмотрение геометрических построений циркулем и линейкой привело нас к общему понятию *квадратичного расширения* данного поля.

Теорема. Пусть F — поле (например, какое-то подполе поля $\mathbb{R}$), $a \in F$ — элемент такой, что уравнение $x^2 = a$ не имеет решений в F (при $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ это означает, что $\sqrt{a} \notin F$; в будущем такие элементы мы называем *неквадратичными элементами поля* F). Рассмотрим символ (при $F \subset \mathbb{R}$ — число $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$) $\sqrt{a}$ и вместе с ним множество

$$F[\sqrt{a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a} | \alpha, \beta \in F\}$$

всех «комплексных»символов $\alpha + \beta\sqrt{a}$. Определим в множестве $F[\sqrt{a}]$, задав их естественными формулами:

$$\begin{cases} (+) & (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{a}) + (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{a}) = \ldots (?), \\ (\cdot) & (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{a}) \cdot (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{a}) = \ldots (?). \end{cases}$$

Утверждение теоремы: $(F[\sqrt{a}], +, \cdot)$ — поле.

(Докажите это. Удобный способ *деления* в $F[\sqrt{a}]$ — «домножение» на сопряженный элемент:

$$\frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{a}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{a}}{\alpha^2 - \beta^2 a} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2 a} + \frac{-\beta}{\alpha^2 - \beta^2 a}\sqrt{a} = \alpha' + \beta'\sqrt{a}.$$

(Вопрос: почему $\alpha^2 - \beta^2 a \neq 0$?)

Определение. *Квадратичным расширением поля F по его неквадратичному элементу* $a \in F$ называется построенное в теореме поле $F[\sqrt{a}]$.

(Поскольку $F = \{\alpha + 0 \cdot \sqrt{a}\} \subset F[\sqrt{a}]$, $F[\sqrt{a}]$ действительно является расширением поля F.)

136. Определение. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *квадратичной иррациональностью* (над полем $\mathbb{Q}$), если $\exists\, n$ и $\exists$ положительные $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ такие что

$$\forall\, k \leqslant n \ a_k \in \mathbb{Q}_{k-1} \text{ и } \sqrt{a_k} \notin \mathbb{Q}_{k-1}, \text{ где }; \mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q},\ Q_1 = \mathbb{Q}_0[\sqrt{a_1}],\ \ldots,\ \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}_{n-1}[\sqrt{a_n}],$$

и при этом $\alpha \in \mathbb{Q}_n$. (Иными словами, существует *цепочка последовательных квадратичных расширений*, начинающаяся с $\mathbb{Q}$ и заканчивающаяся полем, содержащим α.) Наименьшее из чисел n, обладающих указанным выше свойством, называется *рангом* квадратичной иррациональности α и обозначается $\operatorname{rk}\alpha$ (в частности, $\alpha \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \operatorname{rk}\alpha = 0$).

Примеры квадратичных иррациональностей.

а) $\sqrt{3}$,	в) $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$,	д) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$,
б) $1 + \sqrt{2}$,	г) $\sqrt{2\sqrt{3}}$,	е) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

(Докажите, что эти числа являются квадратичными иррациональностями, укажите их ранги и соответствующие цепочки расширений.)

137. Рассмотрения тезисов 129 и 134 показывают, что справедлива

Теорема. Множество $\mathcal{P}$ чисел, построимых, исходя из 1, является полем, причем это поле содержит множество $\mathbb{Q}_\infty$ всех квадратичных иррациональностей: $\mathcal{P} \supset \mathbb{Q}_\infty$.

Таким образом, чтобы доказать, что построение $1 \rightsquigarrow x$ осуществимо, *достаточно* показать, что $x \in \mathbb{Q}_\infty$. Поэтому мы подробнее рассмотрим свойства множества $\mathbb{Q}_\infty$ всех квадратичных иррациональностей.

138. Прежде всего отметим, что существуют сколь угодно длинные цепочки квадратичных расширений $\mathbb{Q}$, например

$$\mathbb{Q}_0 = Q \subset Q_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset Q_2 = Q_1[\sqrt{\sqrt{2}}] \subset \cdots .$$

Конечно, существуют и более сложные цепочки расширений, однако при их построении каждый раз нужно устанавливать неквадратичность соответствующих элементов, а это не совсем просто.

Примеры квадратичных и неквадратичных элементов в $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

неквадратичные: $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2},\ 3,\ 5,\ 5+2\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$ и т.д.,

квадратичные: $4,\ 3+2\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2}$ и т.д. (докажите соответствующие утверждения про выписанные числа).

Таким образом, числа $\sqrt{1+\sqrt{2}},\ \sqrt{5+2\sqrt{2}},\ 3+4\sqrt{1+\sqrt{2}},\ \sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}$ будут квадратичными иррациональностями ранга 2, а числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $1+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ — квадратичными иррациональностями ранга 1.

Конечно, существуют квадратичные иррациональности сколь угодно большого ранга n — например, $\operatorname{rk} \sqrt[2^n]{2} = n$ (докажите). Можно доказать, что если $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ — последовательность простых чисел, то $\alpha = \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \sqrt{p_3} + \cdots + \sqrt{p_n}$ — квадратичная иррациональность ранга n (попробуйте).

139. Теорема. Квадратичные иррациональности образуют поле — подполе $\mathbb{Q}_\infty$ поля $\mathbb{R}$: если $x, y \in \mathbb{Q}_\infty$, то $x \pm y,\ xy,\ \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}_\infty$.

(Докажите. Указание: если $a \in F$ — квадратичный элемент, т.е. $a = c^2$, то можно рассмотреть *фиктивное* расширение $F[\sqrt{a}] = \{\alpha + \beta\sqrt{a} \mid \alpha, \beta \in F\}$. Оно совпадает с расширяемым полем F.)

140. Справедлива следующая

Теорема. Любая квадратичная иррациональность является алгебраическим числом (т.е. корнем некоторого полиномиального уравнения с целыми коэффициентами — см. первую часть тезисов): $\mathbb{Q}_\infty \subset \mathbb{A}$. (Напомним, что через $\mathbb{A}$ мы обозначаем множество всех алгебраических чисел).

(Попробуйте доказать эту теорему. Заметим, что эта теорема следовала бы из того, что $\mathbb{A}$ — кольцо, и из тривиального факта, что $x \in \mathbb{A} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} \in \mathbb{A}$ — каким образом?)

Итак, *трансцендентные числа* (т.е. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$) «заведомо» не являются квадратичными иррациональностями — скажем, $\pi \notin \mathbb{Q}_\infty$, так как $\pi \notin \mathbb{A}$ (однако это не означает пока что, что π *непостроимо*, т.е. что $\pi \notin \mathcal{P}$). Возникает вопрос: может быть, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{A}$, т.е. любое алгебраическое число является квадратичной иррациональностью?!

141. Рассмотрим простейшую кубическую иррациональность — число $\sqrt[3]{2}$. В т. 14 было указано, что $\sqrt[3]{2}$ не является квадратичной иррациональностью ранга 1; но, быть может, $\sqrt[3]{2}$ просто имеет более высокий ранг (скажем, 17)?

Итак, предположим, что $\sqrt[3]{2}$ — квадратичная иррациональность какого-то (неизвестного) ранга n и попытаемся найти противоречие.

Отступление. «„Редукция к абсурду», которую так любил Евклид, является едва ли не самым изящным орудием математика. Это намного более красивый прием, чем любой шахматный гамбит — шахматист, чтобы добиться успеха, может пожертвовать пешку или даже фигуру; математик же идет на риск проигрыша всей партии.»

(Г. Х. Харди)

142. Итак, пусть $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}_\infty$ и $\operatorname{rk} \sqrt[3]{2} = n$. Поскольку $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, $n \geqslant 1$. Пусть $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{n-1} \subset \mathbb{Q}_n$ — соответствующая цепочка квадратичных расширений, такая что $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}_n$ и $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}_{n-1}$.

Поле $\mathbb{Q}_n$ есть $\mathbb{Q}_{n-1}[\sqrt{a}]$, где a — неквадратичный элемент $\mathbb{Q}_{n-1}$, и

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{n-1}.$$

Отсюда

$$2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 a) + (3\alpha^2\beta + \beta^3 a)\sqrt{a} = u + v\sqrt{a}.$$

Поскольку $2 \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_{n-1}$, $2 - u \in \mathbb{Q}_{n-1}$, а так как $v\sqrt{a} = 2 - u$ и $v \in \mathbb{Q}_{n-1}$, то должно быть $v = 0$, т.е. $u = 2$ (в противном случае $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}_{n-1}$).

Рассмотрим теперь число $x = \alpha - \beta\sqrt{a}$. Очевидно, $x^3 = u - v\sqrt{a}$, а поскольку $v = 0$ и $u = 2$, мы имеем: $x^3 = 2$, и $x = \sqrt[3]{2}$ (т.к. $x \in \mathbb{R}$). Таким образом,

$$\sqrt[3]{2} = \alpha + \beta\sqrt{a} = \alpha - \beta\sqrt{a},$$

откуда $2\beta\sqrt{a} = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому $\sqrt[3]{2} = \alpha + 0\sqrt{a} = \alpha$. Следовательно, $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}_{n-1}$, что противоречит исходному предположению!

143. Подведем итог. Во-первых, множество $\mathcal{P}$ построимых чисел содержит множество $\mathbb{Q}_\infty$ квадратичных иррациональностей. Во-вторых, существует много чисел (например, $\sqrt[3]{2}$ или π), не являющихся квадратичными иррациональностями. В третьих, к сожалению, мы не можем сказать, что упомянутые числа не являются построимыми (или являются таковыми). Поэтому в самый раз вернуться к геометрическим построениям и посмотреть, можно ли циркулем и линейкой построить числа, не являющиеся квадратичными иррациональностями?

§ 13. Разрешимость задач на построение

«Лемуан в отношении черчения циркулем различает две подготовительных операции:
(1) Помещение ножки циркуля в данную точку.
(2) Помещение ножки циркуля в произвольную точку прямой.»
(А. Адлер)

144. Теперь мы выясним, можно ли, исходя из числа 1, с помощью циркуля и линейки, построить какие-нибудь числа, отличные от квадратичных иррациональностей над полем $\mathbb{Q}$. Иными словами, мы попытаемся выяснить, каково, в точности, множество $\mathcal{P}$ тех чисел x, для которых задача на построение «$1 \rightsquigarrow x$»разрешима.

145. Прежде всего отметим, что при геометрических построениях иногда (и довольно часто) приходится брать или строить произвольный вспомогательный элемент — отрезок или точку. В силу произвольности мы всегда можем (и будем) выбирать в качестве таких вспомогательных элементов рациональные отрезки и точки с рациональными координатами: ход и результат построения при этом измениться не может, но зато мы освободимся от неконтролируемых добавок в множество построенных чисел — от игры случая и воли.

Заметим, что если приходится выбирать точки вне уже начерченных линий или отрезки, отличные от уже построенных, то, в силу всюду плотности множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, подобный произвол также можно считать «рациональным».

146. Еще один вид «произвола» в построениях — когда выбирается произвольная вспомогательная точка на одной из уже построенных линий — мы рассмотрим чуть позже.

147. Программа дальнейших исследований такова: поскольку любое геометрическое построение есть последовательность конечного числа элементарных, простейших шагов, мы перечислим все такие шаги и затем выясним, какие числа присоединяются к уже построенным на каждом из элементарных шагов. Напомним, что все построения выполняются на плоскости с зафиксированной прямоугольной системой координат Oxy.

148. *Список всех элементарных шагов* (из которых, в той или иной последовательности, состоит любое геометрическое построение).

А. Взятие произвольного отрезка x_0 или точки $(x_0; y_0)$.

Б. Проведение прямой $ax + by = c$ через две имеющиеся точки A и B.

В. Проведение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ через имеющуюся точку $(x_0; y_0)$ с известным (заданным или построенным) радиусом R.

Г. Взятие точки пересечения двух построенных прямых.

Д. Взятие точки пересечения проведенных прямой и окружности.

Е. Взятие точки пересечения двух проведенных окружностей.

Ж. Взятие произвольной точки на уже проведенной линии.

149. Введем следующую терминологию.

1. Отрезок x принадлежит полю F, если $x \in F$.

2. Точка $(x; y)$ принадлежит полю F, если $x \in F$ и $y \in F$.

3. Прямая или окружность принадлежит полю F, если все коэффициенты уравнения этой линии (см. выше) принадлежат полю F.

150. Лемма. Если на некотором шаге построения все имеющиеся на чертеже элементы (отрезки, точки, прямые, окружности) принадлежат некоторому полю F, то после следующего элементарного шага все новые (взятые или построенные) элементы либо снова принадлежат F, либо принадлежат какому-нибудь квадратичному расширению $F[\sqrt{a}]$ поля F.

Доказательство этого утверждения проведем в три этапа (т. 151–153).

151. Заметим, что любое подполе F поля $\mathbb{R}$ обязательно содержит поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (объясните), и в силу соглашения 145 для элементарного шага А утверждение леммы выполнено.

Аналогично 145, условимся при «произвольном взятии» Ж выбирать произвольную вспомогательную точку $M(x_0; y_0)$ на проведенной линии так, чтобы $x_0 \in \mathbb{Q}$. Если точку M мы берем на прямой, то из уравнения прямой получаем, что $y_0 \in F$ (поясните). Если же M берется на окружности, то координата y_0 вычисляется из квадратного уравнения (получающегося из уравнения окружности), коэффициенты которого принадлежат полю F. Следовательно, y_0 принадлежит либо F, либо какому-нибудь квадратичному расширению F (поясните).

152. Для элементарного шага В утверждение леммы тривиально — коэффициенты уравнения проведенной окружности, конечно, принадлежат полю F.

Уравнение прямой, проходящей через точки $A = (x_A; y_A)$ и $B = (x_B; y_B)$, выглядит так:

$$\frac{x - x_A}{y - y_A} = \frac{x - x_B}{y - y_B}.$$

Переписывая его в виде $ax + by = c$, легко обнаружить, что $a, b, c \in F$, и лемма 150 для шага Б тем самым проверена.

153. Координаты точек пересечения в элементарных шагах Г, Д, Е вычисляются из систем уравнений соответствующих линий.

В случае Г система — линейная, с коэффициентами из поля F. Решая ее (например, подстановкой), получим, что ее решение — точка $(x; y)$ — принадлежит полю F.

Чтобы решить систему Д, сделаем подстановку $y = \alpha x + \beta$ (или $x = \alpha y + \beta$) уравнения прямой в уравнение окружности — получим квадратное уравнение относительно x (или y) с коэффициентами из поля F. Следовательно, x и y принадлежат либо полю F, либо некоторому квадратичному расширению F

Наконец, вычитая из одного уравнения системы Е другое, получим линейное уравнение. Далее рассуждаем, как в случае Д.

154. Итак, лемма 150 доказана. Поскольку при решении задачи на построение типа «$1 \rightsquigarrow x$» мы начинаем с поля $F = \mathbb{Q}$, из леммы сразу же вытекает такая

Теорема. Любое построимое число является квадратичной иррациональностью: $\mathcal{P} \subset \mathbb{Q}_\infty$!

155. Из теорем 137 и 154 следует

Основная теорема геометрических построений (ОТГП). Отрезок $x \in \mathbb{R}$ можно построить с помощью циркуля и линейки, исходя из отрезка 1, тогда и только тогда, когда число x является квадратичной иррациональностью. Иными словами, множество $\mathcal{P}$ построимых чисел *совпадает* с множеством $\mathbb{Q}_\infty$ квадратичных иррациональностей: $\mathcal{P} = \mathbb{Q}_\infty$.

Таким образом, чтобы выяснить, разрешима или нет задача на построение «$1 \rightsquigarrow x$», достаточно установить, является или нет число x квадратичной иррациональностью: $x \in \mathcal{P} \ \Leftrightarrow\ x \in \mathbb{Q}_\infty$!!

§ 14. Неразрешимые задачи на построение и неразрешимость уравнений в квадратных радикалах

«Но Плотник проронил слезу
И отвечал «Едва ли!»»
(Льюис Кэррол)

156. Применим доказанную теорему ОТГП (т. 155) к нескольким классическим задачам на построение. Схема дальнейших исследований такова (см. т. 131): выписываем уравнение $P(x) = 0$ на искомый отрезок x, а затем выясняем, является ли корень x квадратичной иррациональностью или нет — в зависимости от этого задача на построение «$1 \rightsquigarrow x$» будет разрешимой с помощью циркуля и линейки или нет. (В этом состоит связь между вопросами о разрешимости уравнений в квадратных радикалах и о разрешимости задач на построение!)

157. *Удвоение куба:* «$1 \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{2}$». Из ОТГП и изысканий т. 141–142 следует, что эта задача не может быть решена циркулем и линейкой!

158. Трисекция угла. Мы рассмотрим задачу о трисекции угла $\alpha = 60°$, т.е. построение «$1 \rightsquigarrow x = \cos 20°$». Число x удовлетворяет уравнению:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \ \Leftrightarrow\ 8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

(Мы использовали известную формулу $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.) Легко проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней (кандидатов на корни всего 8 — проверьте их). Можно найти $x = \cos 20°$ по формулам дель Ферро – Эйлера:

$$\cos 20 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\right),$$

однако особого энтузиазма это изящное соотношение не вызывает. Пойдем в обход — попытаемся воспользоваться косвенной информацией: тем, что x является корнем неприводимого над $\mathbb{Q}$ кубического уравнения.

159. Теорема. Кубические уравнения с рациональными коэффициентами, неприводимые над полем $\mathbb{Q}$ (т.е. не имеющие рациональных корней), неразрешимы в квадратных радикалах, т.е. их корни не являются квадратичными иррациональностями (в частности, их *комплексные* корни не являются *комплексными* квадратичными иррациональностями).

160. Комментарий. Мы на время оставим построения и займемся доказательством теоремы 159. Поскольку кубические уравнения могут иметь и комплексные корни, мы вводим понятие *комплексной квадратичной иррациональности* $z_0 \in \mathbb{Q}_\infty^{\mathbb{C}}$ — они определяются точно так же, как в т. 136 действительные квадратичные иррациональности, только отбрасывается требование, чтобы неквадратичные элементы a_k, по которым строится захватывающая z_0 цепочка квадратичных расширений, были положительными.

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_0[\sqrt{a_1}] \subset \mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_1[\sqrt{a_2}] \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_n, \quad z_0 \in \mathbb{Q}_n.$$

Если a_m — первое отрицательное из a_k, то поле $\mathbb{Q}_m$ будет уже подполем поля $\mathbb{C}$, как и все следующие поля $\mathbb{Q}_k$. Следующие же a_k могут быть уже комплексными.

Плоскость Oxy, на которой мы делаем построения, можно считать комплексной плоскостью $\mathbb{C}$, ее точки можно отождествить с комплексными числами; тогда можно говорить о построимых комплексных числах.

С помощью геометрической интерпретации операций в $\mathbb{C}$ нетрудно проверить построимость с помощью циркуля и линейки комплексных чисел $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt{z}$ по данным $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Теорема 137 справедлива и для комплексных построимых чисел и квадратичных иррациональностей.

161. Для доказательства теоремы 159 нам пригодится следующая

Лемма о сопряжении. Пусть $F_1 = F[\sqrt{a}]$ — какое-нибудь квадратичное расширение произвольного поля F. Тогда *отображение сопряжения*

$$* : F_1 \longrightarrow F_1 : \ z = \alpha + \beta\sqrt{a} \mapsto \widetilde{z} = \alpha - \beta\sqrt{a}$$

обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} (+) & \widetilde{z_1 + z_2} = \widetilde{z}_1 + \widetilde{z}_2, \\ (\cdot) & \widetilde{z_1 z_2} = \widetilde{z}_1 \cdot \widetilde{z}_2, \\ (\text{И}) & \widetilde{z} = z \ \Leftrightarrow \ z = \alpha + 0 \cdot \sqrt{a} \in F. \end{cases}$$

(Докажите; сравните с тт. 55, 57, 58.) Абель и Галуа при доказательстве неразрешимости уравнений степени 5 и выше в радикалах рассматривали расширения полей, более общие, по сравнению с квадратичными. Для таких расширений они исследовали т.н. *группы автоморфизмов Галуа* — отображений расширенного поля $F_1 \supset F$ в себя, обладающих выписанными свойствами $(+)$, $(\cdot)$, (И). С помощью теории групп Галуа и устанавливается упомянутая неразрешимость! (Отметим, что группы Галуа — это частный случай *сохраняющих групп* преобразований — см.

записки Летней школы[1]; именно, автоморфизмы Галуа сохраняют операции сложения и умножения — свойства (+) и ($\cdot$), — а также оставляют инвариантным подполе $F \subset F_1$ (свойство (И).)

162. Лемма о сопряженном корне. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) — корень полиномиального уравнения $P(x) = 0$ с рациональными коэффициентами, причем z_0 принадлежит квадратичному расширению $F[\sqrt{a}]$ какого-то поля $F \subset \mathbb{C}$. Тогда сопряженное к z_0 в расширении $F[\sqrt{a}]$ число $z_1 = \widetilde{z}_0 \in \mathbb{C}$ также является корнем рассматриваемого уравнения $P(x) = 0$.

(Выведите эту лемму из предыдущей; сравните с леммой о комплексных корнях действительного уравнения.)

163. *Доказательство теоремы 159.* Пусть уравнение

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

имеет рациональные коэффициенты — $p, q, r \in \mathbb{Q}$ — и неприводимо, т.е. не имеет рациональных корней. Требуется доказать, что корни z_1, z_2, z_3 этого уравнения не являются (комплексными) квадратичными иррациональностями.

Предположим противное, т.е. что хотя бы один из корней является квадратичной иррациональностью. Выберем из этих корней тот, который является квадратичной иррациональностью самого меньшего ранга. Пусть, скажем, это будет z_1 : $\operatorname{rk} z_1 = n$, $\operatorname{rk} z_{2,3} \geqslant n$ (удобно считать, что для $z \notin \mathbb{Q}_\infty^{\mathbb{C}}$ ранг равен $\operatorname{rk} z = \infty$). В силу неприводимости уравнения $n \geqslant 1$; рассмотрим цепочку квадратичных расширений:

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{n-1} \subset \mathbb{Q}_n$$

такую, что $z_1 \in \mathbb{Q}_n$, $z_1 \notin \mathbb{Q}_{n-1}$. Поле $\mathbb{Q}_n$ есть расширение $\mathbb{Q}_{n-1}[\sqrt{a}]$ поля $\mathbb{Q}_{n-1}$ по неквадратичному элементу $a \in \mathbb{Q}_{n-1}$ и мы имеем:

$$z_1 = \alpha + \beta\sqrt{a}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{n-1},\ \beta \neq 0.$$

По лемме 162 число $\widetilde{z}_1 = \alpha - \beta\sqrt{a}$ также является корнем рассматриваемого уравнения, а поскольку $\beta \neq 0$, $\widetilde{z}_1 \neq z_1$ ($\alpha - \beta\sqrt{a} \neq \alpha + \beta\sqrt{a}$). Пусть, например, $\widetilde{z}_1 = z_2$.

Из первой формулы Виета для нашего уравнения находим:

$$z_3 = -p - z_1 - z_2 = -p - (\alpha + \beta\sqrt{a}) - (\alpha - \beta\sqrt{a}) = -p - 2\alpha \in \mathbb{Q}_{n-1}$$

(т.к. $-p \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_{n-1}$, $-2\alpha \in \mathbb{Q}_{n-1}$). Следовательно, z_3 — квадратичная иррациональность, причем $\operatorname{rk} z_3 \leqslant n-1$, а это противоречит допущению $\operatorname{rk} z_3 \geqslant n$. Теорема доказана.

164. *Трисекция угла в 60°.* Из теоремы 159 и ОТГП вытекает неразрешимость этой задачи!

(Можно показать неразрешимость трисекции угла α для всех α, кроме счетного множества исключительных углов — например, $\alpha = 90°$.)

[1]Записки Летней школы 1975 г. будут опубликованы в одном из ближайших номеров журнала.

165. *Построение правильного 7-угольника:* «$1 \rightsquigarrow x = \cos\frac{2\pi}{7}$». Рассмотрим комплексное число $z_0 = (1, \frac{2\pi}{7})_p = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Очевидно, оно является построимым (на плоскости Oxy) тогда и только тогда, когда построимо действительное число $x = \cos\frac{2\pi}{7}$. Так как $z_0^7 = 1$, число z_0 удовлетворяет уравнения 6-ой степени:

$$(z^7 - 1) = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \;\Rightarrow\; z_0^6 + z_0^5 + z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0.$$

Разделив обе части уравнения на z^3 и положив $z + \frac{1}{z} = w$, получим кубическое уравнение:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = w^2 - 2,\; z^3 + \frac{1}{z^3} = w(z^2 + \frac{1}{z^2} - 1) \;\Rightarrow\; w(w^2-3) + (w^2-2) + w + 1 = 0,$$

т.е.

$$w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0.$$

Два кандидата на рациональные корни этого уравнения $w = \pm 1$ отвергаются проверкой, и уравнение неприводимо. Согласно теореме 159 и ОТГП число $w_0 = z_0 + \frac{1}{z_0}$ непостроимо, а отсюда следует, что и z_0 непостроимо (поясните). Итак, правильный 7-угольник нельзя построить с помощью циркуля и линейки!

(Заметим, что $z_0 + \frac{1}{z_0} = w_0 = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}} = 2\cos\frac{2\pi}{7} = 2x_0 \in \mathbb{R}$.)

Дальнейшие изыскания по части построения правильных многоугольников мы изложим чуть позже.

166. *О квадратуре круга:* Неразрешимость этой задачи вытекает из доказанной в 1883 г. Линдеманом трансцендентности числа π (откуда следует трансцендентность числа $\sqrt{\pi}$ (поясните)) и из теоремы 140.

167. Сформулируем для справки *критерий неразрешимости в квадратных радикалах уравнений 4-ой степени.*

Теорема. Если для данного уравнения 4-ой степени с рациональными коэффициентами разрешающее (или резольвентное — см. тт. 120, 123. Б) кубическое уравнение неприводимо, то это уравнение 4-ой степени неразрешимо в квадратных радикалах.

168. Нетрудно видеть, что корни приводимого уравнения степени 3 будут построимыми. То же самое можно сказать и про уравнение степени 4, разрешающее или резольвентное уравнение которого приводимо.

Таким образом, составив уравнение задачи на построение «$1 \rightsquigarrow x$», в случае степеней 3 и 4 мы можем установить как неразрешимость, так и разрешимость этой задачи.

169. *Небольшой список неразрешимых задач на построение.*

А. Построение треугольника по трем биссектрисам.

Б. Построение треугольника по данным «a», «c» и $B - C$.

В. Построение отрезка данной длины внутри данного угла, проходящего через данную точку.

Г. Построение квадрата, пары соседних вершин которого лежат на двух данных окружностях (эта задача приводит к уравнению степени 4).

170. Заключительное замечание. Если в задаче задан не один отрезок, а несколько, т.е. в задачах типа «$(1, a_1, a_2, \dots, a_m) \rightsquigarrow x$», то можно провести аналогичное исследование. При этом вместо поля $\mathbb{Q}$ нужно начинать с минимального поля $\mathbb{Q}'$, содержащего все данные числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ (т.е. с самого начала нужно присоединить к полю $\mathbb{Q}$ все числа a_k). Далее можно определить квадратичные иррациональности над полем $\mathbb{Q}'$ (вместо $\mathbb{Q}$); все важнейшие теоремы (137, 154 и 155) доказываются совершенно аналогично.

§ 15. Построение правильных многоугольников

«Нормальные герои
Всегда идут в обход!»
(Р. Быков, «Айболит 66»)

171. Рассмотрим подробнее задачу о построении правильного n-угольника; для краткости мы будем опускать слово «правильный». Мы уже научились с помощью алгебры строить 10-угольник (т. 130) и установили неразрешимость задачи о построении 7-угольника (т. 165).

Проблема. При каких n задача о построении n-угольника будет разрешима (циркулем и линейкой), а при каких — нет?

Проставьте в таблице плюсики под разрешимыми задачами и минусы — под неразрешимыми — там, где сможете.

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\cdots$
$x =$	+	+	+	+	+	−	+	·	+	·	·		·	·	·		·		·	·	

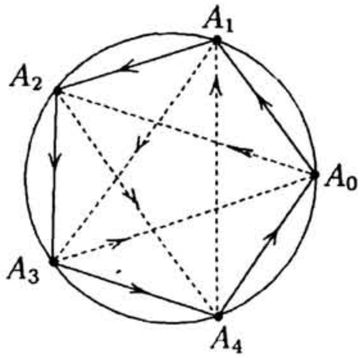
(Вы должны суметь проставить $\pm$ тем n, под которыми стоят точки — проверьте!)

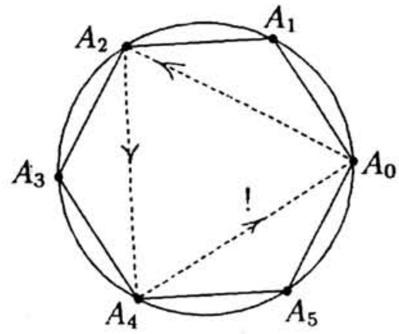
Мы хотим уловить закономерности этой таблицы — выяснить, как ее нужно заполнять.

172. Конечно, раз наша задача сводится к построению $1 \rightsquigarrow \cos\frac{2\pi}{n}$, можно написать уравнение на $x = \cos\frac{2\pi}{n}$ (как это сделать?), но что потом ?! Вернемся к геометрии.

Пусть требуется построить n-угольник $A_0A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_0$ — вписать его в данную окружность. Вершину A_0 можно взять произвольным образом, и мы будем считать ее положение зафиксированным. Для построения всего n-угольника достаточно построить вершину A_1 — остальные вершины получаются последовательным откладыванием дуги A_0A_1 от точки A_1. Вместо A_1 можно взять и вершину A_{n-1}.

При $n = 5$ весь 5-угольник можно восстановить и по вершине A_2 — опять–таки, откладывая дугу A_0A_2 (при этом мы совершим двойной обход окружности), — и по вершине A_3 — точно так же.





При $n = 6$ весь 6-угольник можно восстановить только по вершинам A_1 или A_5 (вершина A_2 не годится!). *Вопрос:* как зная n и k, выяснить, можно ли весь n-угольник восстановить по A_0 и A_k откладыванием дуги A_0A_k, или нельзя?

173. Итак, чтобы построить n-угольник, зная вершину A_0, достаточно построить такую вершину A_k, чтобы все остальные вершины получались последовательным откладыванием по окружности дуги A_0A_k. Каждую такую вершину A_k будем называть *решением* задачи о n-угольнике. Чтобы построить n-угольник, нужно циркулем и линейкой найти хотя бы одно решение.

Мы не будем отыскивать решения, а пойдем *в обход*: посмотрим каково *число решений* $\alpha(n)$ задачи о n-угольнике.

Найдите $\alpha(n)$ при n =4,7,8,10,12,100.

174. Теорема. $\alpha(n)$ равно количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. (Докажите.)

Замечание. Упомянутое количество называется функцией Эйлера и обозначается $\varphi(n)$, так что мы будем вместо $\alpha(n)$ писать $\varphi(n)$.

175. *Свойства функции Эйлера.*

А. Если m и n взаимно простые, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Б. Если p простое, то $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$.

В. Если разложение n на простые множители имеет вид

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}, \qquad \text{то} \qquad \varphi(n) = ?$$

176. Теперь соберем и сопоставим экспериментальные данные. Заполните следующую таблицу.

n	=	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\cdots$
$\varphi(n)$	=	1	2	2	4	2	6															$\cdots$
x	=	+	+	+	+	+	−	+	−	+	·	+	·	−	+	+	·	−	·	+	+	$\cdots$

В последней строке — данные таблицы из тезиса 171. Сопоставьте их с числами из предыдущей строчки. Не можете ли Вы поставить знаки вместо точек? (Впервые это сделал Гаусс, но он шел *совсем в обход!*). Заполните 3 следующие столбца ($n = 22, 23, 24$) — верный ли знак получился для $n = 24$?

177. Итак, возникает *гипотеза*: задача о n-угольнике разрешима тогда и только тогда, когда ...?

178. Если эта гипотеза верна, то из свойства А функции Эйлера вытекает такая

Теорема. Пусть задачи о m- и n-угольниках разрешимы, причем m и n взаимно простые. Тогда и задача о (mn)-угольнике разрешима.

Докажите эту теорему (независимо от гипотезы 177).

179. Оказывается, гипотеза 177 справедлива: имеет место следующая

Теорема Гаусса. Задача о n-угольнике разрешима тогда и только тогда, когда $\varphi(n)$ является степенью двух: $\varphi(n) = 2^k$.

Подумайте, как можно было бы доказать эту теорему.

Наводящий вопрос. Сколько решений имеют такие задачи:

а) вписать окружность в треугольник,

б) построить общую касательную к двум данным окружностям,

в) задача Аполлония (построение окружности, касающейся трех данных окружностей)?

Чуть позже мы вернемся к обсуждению доказательства теоремы Гаусса. Посмотрим, что из нее следует.

180. Из теоремы 178 вытекает, что для решения проблемы 171 достаточно выяснить, при каких n вида $n = p^k$ разрешима задача о n-угольнике; здесь P — простое число.

Следствие из теоремы Гаусса. При $n = p^k$ задача о n-угольнике разрешима $\Leftrightarrow$

(А) $p = 2$ (т.е. $n = 2^k$) или

(Б) $p = 2^l + 1$ (и простое), а $k = 1$ (т.е. $n = p$).

Докажите это утверждение.

181. Лемма. Если число l имеет хотя бы один нечетный делитель, то число $2^l + 1$ составное. (Докажите.)

Отсюда вытекает, что простые числа вида $p = 2^l + 1$ в действительности обязаны иметь вид:

$$p = F_m = 2^{2^m} + 1.$$

Эти числа F_m (где $m = 0, 1, 2, \ldots$) называются ***числами Ферма***. Отсюда и из т. 180 получаем

Следствие. Если p — простое, то задача о построении правильного p-угольника разрешима $\Leftrightarrow$ $p = 2$ или p — простое число Ферма.

Первые числа Ферма суть 3, 5, 17, 257 — все они, очевидно, простые.

Следствие из следствия. Можно построить правильный 17-угольник, но нельзя построить 13-угольник, 11-угольник, 19-угольник, 23-угольник.

182. Следующее число Ферма $F_4 = 65\,537$ тоже, как нетрудно проверить, является простым. При $m = 5$ мы впервые получим составное число Ферма: $F_5 = 4\,294\,967\,297$ делится на 641 (это заметил Эйлер; проверьте!).

В настоящее время[2] известно еще 36 составных чисел Ферма — это F_m при $m =$6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 23, 36, 38, 39, ..., 452, 1945 (F_{1945} делится

[2]Это сведения на 1975 год. Спустя четверть века информация о простых и составных числах Ферма, конечно, пополнилась (самые последние новости можно найти в Интернете!).

на $5 \cdot 2^{1947} + 1$!). Про остальные числа Ферма пока неизвестно, простые они или составные (первое из этих таинственных чисел — F_{17}).

183. Из наших рассмотрений вытекает такая

Теорема. Общий вид чисел n, для которых правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой, таков:

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m,$$

где $k \geqslant 0$, а p_i — различные простые числа Ферма.

Таким образом, в настоящее время известно всего $32 = 2^5$ построимых правильных многоугольников с нечетным числом сторон; конечно, непостроимых правильных многоугольников бесконечно много — скажем, при $n = 3^{1+l}$ или $n = 13l$. (Пока что неизвестно, конечно или бесконечно число простых чисел Ферма. Кстати, отметим, что то же относится и к числам $C_n = n^{n^n} + 1$ — известно только[3], что среди чисел от 1 до $10^{10^{17}}$ имеется ровно два простых C_n: это 2 и 17.)

184. Теорему 183 впервые доказал (в возрасте 17 лет) Гаусс; он начал с построения правильного 17-угольника и рассуждал алгебраически — изучал разложение на неприводимые над полем $\mathbb{Q}$ сомножители так называемого многочлена деления круга: $P_n(x) = x^n - 1$. Подробнее по этому поводу см. в статье Гиндикина («Квант», № 1 за 1972 год) или в книжке М.М. Постникова «Теория Галуа» (см. также невышедшую пока[4] книжку В. Алексеева о неразрешимости).

Мы вывели теорему 183 из недоказанной нами теоремы 179 (названной в честь Гаусса). Идея ее геометрического доказательства примерно такова[5].

185. *Идея доказательства необходимости в теореме 179.* Мы исходим из окружности Γ и точки A_0 на ней, и хотим построить одно из решений A_k задачи о n-угольнике (см. т. 173). Любая прямая или окружность пересекает Γ ровно в двух точках, и если мы на предыдущем шаге построения построили m точек, то на следующем шаге можем построить на Γ ровно $2m$ точек (все точки предыдущего шага из соображений симметрии можно считать равноправными). Поскольку мы исходим из одной точки — A_0, — то на s-том шаге мы получаем на Γ ровно 2^s точек. Поскольку решения A_k одно не хуже другого, на каком-то шаге мы сразу получим все эти $\varphi(n)$ решений. Следовательно, $\varphi(n) = 2^s$, ч.т.д.

---

[3]Это тоже сведения на 1975 год!

[4]Ныне уже давно вышедшую.

[5]Эта идея была мне подсказана в 1974 г. профессором А. А. Кирилловым.

§ 16. Структуры полей на плоскости и в пространстве

«Дарвин играл на трубе перед своими тюльпанами. Результат этого эксперимента оказался отрицательным.»
(Дж. Литлвуд)

186. Получив столь изящные результаты с помощью квадратичных расширений поля $\mathbb{Q}$, естественно попробовать порасширять поле $\mathbb{R}$ — может быть, что-нибудь получится? Начнем.

Неквадратичными элементами $\mathbb{R}$ являются отрицательные числа: $-a$, где $a > 0$. Расширение $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}[\sqrt{-a}]$ не дает ничего нового по сравнению с комплексными числами, т.е. $\mathbb{C} = \mathbb{R}[\sqrt{-1}] = \mathbb{R}[i]$; действительно, в каждом из расширений $\mathbb{R}[\sqrt{-a}]$ существует элемент u такой, что $u^2 = -1$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{-a}.$$

Если *обозначить* его через i, то любой элемент $z = \alpha + \beta\sqrt{-a} \in \mathbb{R}[\sqrt{-a}]$ можно записать в виде

$$\alpha + \beta\sqrt{-a} = \alpha + \beta\sqrt{a} \cdot i = x + yi.$$

А при такой записи умножение в $\mathbb{R}[\sqrt{-a}]$ *точно такое же*, как в $\mathbb{C}$ (сложение же и подавно такое же).

187. Присоединим к $\mathbb{R}$ не $\sqrt{-a}$, а корень какого-нибудь фиксированного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Иными словами, введем символ I и будем считать, что $I^2 + pI + q = 0$, т.е. $I^2 = -pI - q$. Расширение $\mathbb{R}[I]$ будет состоять из всех «сложных символов» вида $\alpha + \beta I$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, которые складываются обычным образом, а перемножаются по правилу:

$$(\alpha_1 + \beta_1 I)(\alpha_2 + \beta_2 I) = (\alpha_1\alpha_2 - q\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - p\beta_1\beta_2)I$$

(раскрываем скобки и заменяем I^2 на $-pI - q$). Символы $\alpha + \beta I$ можно интерпретировать как точки $(\alpha; \beta)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, поэтому мы обозначим $\mathbb{R}[I]$ через $\mathbb{R}^2_{p,q}$ — плоскость с двумя операциями (например, $\mathbb{R}^2_{0,1} = \mathbb{C}$).

Теорема. Для любых p и $q \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2_{p,q}$ — кольцо с единицей.

Доказательство. Очевидно. В самом деле, ...

Вопрос. Является ли $\mathbb{R}^2_{p,q}$ полем?

188. *Пример.* Умножение в $\mathbb{R}^2_{1,0}$ задается соотношением $I^2 = -I$. Но тогда $I \cdot (I + 1) = 0$. В поле так не бывает (что $z_1 \neq 0$ и $z_2 \neq 0$, а $z_1 z_2 = 0$). Поэтому $\mathbb{R}^2_{1,0}$ — кольцо, но не поле.

Докажите, что $\mathbb{R}^2_{p,q}$ не является полем всякий раз, когда $p^2 - 4q \geqslant 0$.

189. Рассмотрим оставшийся случай, когда $p^2 - 4q < 0$. В этом случае можно в лоб доказать, что $\mathbb{R}^2_{p,q}$ — поле (т.е. что у любого элемента $z \in \mathbb{R}^2_{p,q}$ существует обратный). Мы пойдем в обход. Имеем:

$$I^2 + pI + q = 0 \ \Rightarrow\ \left(I + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4} = -a,$$

где $a > 0$. Рассмотрим элемент

$$i = \frac{p}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} I.$$

i — это обозначение, однако предыдущая выкладка доказывает, что $i^2 = -1$. каждое (p, q)-число, т.е. вектор $z = \alpha + \beta I = (\alpha; \beta)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, разложим по векторам i и $1 = (1; 0)$. Иначе говоря, представим z в виде

$$z = x + yi.$$

Умножение в $\mathbb{R}^2_{p,q}$ при таком представлении будет точно такое же, как в поле $\mathbb{C}$, поэтому кольцо $\mathbb{R}^2_{p,q}$ является полем. Это поле можно представить себе как «косое» поле комплексных чисел — координаты $(x; y)$ — это косоугольные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha; \beta)$, а i направлено к единице не под прямым углом. (Окружностями $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$ в этом случае служат эллипсы, а умножение $z \mapsto zz_0$ соответствует повороту вдоль этих эллипсов — так называемому эллиптическому повороту плоскости.)

190. Таким образом, в случае $p^2 < 4q$ кольцо $\mathbb{R}^2_{p,q}$ является полем, но это поле не является для нас чем-то новым — оно *изоморфно* полю комплексных чисел $\mathbb{C}$ (т.е. между $\mathbb{R}^2_{p,q}$ и $\mathbb{C}$ существует естественное биективное соответствие, при котором сумме и произведению в $\mathbb{R}^2_{p,q}$ соответствуют сумма и произведение в $\mathbb{C}$).

191. Подведем *общий итог*. С помощью расширения $\mathbb{R}$ и присоединения к $\mathbb{R}$ корня квадратного уравнения мы получили структуры колец на плоскости; однако мы не получили на плоскости новых по сравнению с $\mathbb{C}$ структур полей. Поэтому оставим расширения и посмотрим, нельзя ли *как-нибудь иначе* ввести *новую* структуру поля на плоскости.

192. Определение. Структурой поля на плоскости $\mathcal{P}$ называется пара операций $(+, \cdot)$ на плоскости такая, что выполнены все аксиомы поля.

Если на плоскости $\mathcal{P}$ введена какая-то структура поля, то это по крайней мере означает, что на $\mathcal{P}$ выделены две точки, 0 и 1.

Определение. Структура поля на плоскости называется *естественной*, если выполнены следующие «естественные» требования:

А. Сложение $(+)$ в $\mathcal{P}$ совпадает с обычным сложением векторов, направленных из 0 в точки $z \in \mathcal{P}$.

Б. Точки прямой (01) образуют подполе $\mathcal{P}$, совпадающее с полем действительных чисел (т.е. (01) — «действительная ось» в $\mathcal{P}$).

В. Умножение точек $z \in \mathcal{P}$ на действительные точки $x \in (01) = \mathbb{R}$ соответствует умножению вектора $\overrightarrow{0z}$ на действительные числа $x \in \mathbb{R}$.

Теперь мы выясним, существует ли на плоскости структуры поля, являющиеся *естественными* (от неестественных структур трудно искать чего-нибудь полезного и хорошего) и существенно отличными от $\mathbb{C}$ (т.е. не изоморфными $\mathbb{C}$).

193. Пусть на $\mathcal{P}$ задана какая-то естественная структура поля. Возьмем $z \in \mathcal{P}$ т.ч. $z \notin \mathbb{R}$ и рассмотрим элемент $z^2 \in \mathcal{P}$. Поскольку векторы 1 и z не коллинеарны, вектор z^2 можно разложить по ним:

$$z^2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot z = \alpha + \beta z.$$

Таким образом, z удовлетворяет уравнению $z^2 - \beta z - \alpha = 0$. Поскольку любой элемент $w \in \mathcal{P}$ можно разложить по 1 и z, а умножение в этом представлении,

$$w = x + yz$$

совпадает с умножением в $\mathbb{R}^2_{-\beta,-\alpha}$ (см. т. 187), ответ на вопрос из предыдущего тезиса отрицательный: наша структура изоморфна $\mathbb{R}^2_{p,q}$, причем должно быть $p^2 < 4q$ (в противном случае $\mathbb{R}^2_{p,q}$ не поле — см. т. 188), а в таком случае $\mathbb{R}^2_{p,q}$ изоморфно полю $\mathbb{C}$ (см. т. 189).

194. Итак, мы не преуспели в построении на плоскости какого-нибудь *нового* (по сравнению с $\mathbb{C}$) *поля* (точнее, мы даже доказали, что на плоскости *нельзя* ввести естественную структуру поля, не изоморфную комплексной структуре). Посмотрим теперь, нельзя ли в пространстве ввести структуру поля — аналогичную $\mathbb{C}$ (если с помощью $\mathbb{C}$ мы получили весьма замечательные результаты, то с помощью поля в пространстве, наверное, можно построить нечто совсем грандиозное!).

195. Рискнем: предположим, что в пространстве *можно* ввести *естественную структуру поля*, т.е. операции сложения и умножения точек z пространства S такие, что выполнены *аксиомы поля* и *требования естественности* А, Б, В из тезиса 192.

Возьмем $z \in S$ т.ч. $z \notin \mathbb{R}$ и рассмотрим $z^2 \in S$.

Существуют две возможности:

I. z^2 принадлежит плоскости, проходящей через точки 0, 1 и z (т.е. векторы 1, z и $w = z^2$ компланарны).

II. Векторы 1, z и z^2 не лежат в одной плоскости (не компланарны).

196. Допустим, что имеет место случай II. Тогда рассмотрим $z^3 \in S$. Этот вектор можно разложить по некомпланарным векторам 1, z, z^2:

$$z^3 = \alpha z^2 + \beta z + \gamma \cdot 1 \;\Rightarrow\; z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma = 0.$$

Многочлен $t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma \in \mathbb{R}[t]$ имеет хотя бы один корень $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и разлагается на действительные сомножители:

$$(z - \varepsilon) \cdot (z^2 + Az + b) = 0.$$

Так как $z \notin \mathbb{R}$, $z \neq \varepsilon$, то и $z - \varepsilon \neq 0$. Поскольку S — поле, отсюда и из последнего равенства следует, что

$$z^2 + \alpha z + B = 0 \;\Rightarrow\; z^2 = -Az - B \cdot 1,$$

т.е. векторы z^2, z и 1 компланарны, что противоречит предположению (допущению о том, что имеет место случай II).

197. Итак, если $z \in S$, $z \notin \mathbb{R}$, то всегда имеет место случай I, т.е. z^2 принадлежит плоскости $\mathcal{P}_z$, натянутой на векторы 1 и z. Тогда z^2 выражается через 1 и z:

$$z^2 = \alpha z + \beta \;\Leftrightarrow\; z^2 - \alpha z - \beta = 0.$$

Дискриминант последнего уравнения отрицателен (в противном случае многочлен $t^2 - \alpha t - \beta$ разлагается на действительные сомножители:

$$t^2 - \alpha t - \beta = (t - \varepsilon_1)(t - \varepsilon_2),$$

откуда при $t = z \in S$ получаем

$$(z - \varepsilon_1)(z - \varepsilon_2) = 0,$$

в то время как $z - \varepsilon_1 \neq 0$ и $z - \varepsilon_2 \neq 0$); следовательно, выделяя в нем полный квадрат, находим такой элемент $u \in \mathcal{P}_z$, что $u^2 = -1$. Таким образом, уравнение $u^2 + 1 = 0$ имеет в поле S бесконечно много корней (по корню в каждой плоскости $\mathcal{P}_z$)! Противоречие!!

198. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема. В трехмерном пространстве не существует естественной структуры поля.

Замечания. Конечно, «неестественных» структур поля в пространстве сколько угодно: например, любая биекция $\mathbb{R}$ в S задает структуру поля в S; однако операции этих структур не имеют разумной геометрической интерпретации, и соответствующие поля бесполезны.

С другой стороны, в рассуждениях тт. 196–197 мы использовали только тот факт, что в S имеется структура *кольца без делителей нуля,* т.е. кольца, в котором справедливо утверждение

$$z_1 z_2 = 0 \;\Rightarrow\; z_1 = 0 \vee z_2 = 0.$$

Следовательно, в пространстве нельзя ввести даже структуру кольца без делителей нуля!

199. *Тезис последний.* Мы проиграли, и на этом печальном факте (на теореме 198) закончим изучение *алгебры чисел, полей и уравнений*.

Заключение

«А все-таки она вертится!»
(Галилео Галилей)

200. Однако, не надо особенно печалиться — в 1843 году Гамильтон придумал, как в 4-мерном пространстве (в множестве наборов $(a_1; a_2; a_3; a_4)$ действительных чисел) ввести структуру «почти поля» — некоммутативного кольца с однозначным делением. Это — так называемые *кватернионы*. Поль Дирак (сравнительно недавно) обнаружил, что с помощью кватернионов очень удобно описываются фундаментальнейшие элементарные частицы — электроны! Этим замечательным примером связи между *геометрией, физикой* и *алгеброй* мы закончим изучение *алгебры* — с тем, чтобы потом подойти, напротив, из *геометрии* к *алгебре*.

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

ГДЕ ОШИБКА?

А. В. Жуков

Предлагаем вниманию читателей окончание учебного пособия, посвященного анализу ошибок школьников в математических рассуждениях и способам их предотвращения и обнаружения. Автор пособия — Александр Владимирович Жуков — преподаватель детского компьютерного клуба, г. Москва. Сокращенный вариант пособия был опубликован в журнале "Домашний лицей", №№1 – 3 за 2000 г., посвященном актуальным вопросам образования и воспитания школьников. Адрес редакции журнала "Домашний лицей": 117630, Москва, Старокалужское шоссе, 1; подписной индекс в каталоге Роспечати — 71605.

Оглавление второй части пособия представляет собой часть оглавления первой части, опубликованной в предыдущем номере журнала, — включены только те названия параграфов и пунктов первой части, примеры из которых обсуждаются во второй части.

Содержание.

На ошибках учатся, ...
но лучше учиться на ошибках других.

ЧАСТЬ II. ОШИБКА, Я ТЕБЯ ЗНАЮ! (Обсуждение «решений»)

1. Откуда звон? (Ошибки призрачного знания)

Коварные степени

1. Из равенства $2^{2+x} = 3^{2+x}$ следует $2 + x = 0$, откуда $x = -2$.

2. Из данного уравнения не следует равенство $2x + x = 3$. Приведем правильное решение. Обозначим $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = y$, тогда исходное уравнение запишется так: $y^2 + y - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 0$. Его корни $y_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Годится только положительный корень, поскольку показательная функция $y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$ не может принимать отрицательные значения. Из равенства $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ получаем $x = 1$.

3. Напомним, что в «многоэтажных» степенях вида a^{b^c} порядок выполнения операций начинается с «вершины»: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$, а не наоборот: $a^{b^c} \neq \left(a^b\right)^c$. В «решении» ошибка возникла при использовании неверного тождества $3^{x^2} = 3^x \cdot 3^x$. Приведем правильное решение. Прологарифмировав исходное равенство, получим $x(\log_3 2+1) = \log_3 2+x^2$. Решив это квадратное уравнение относительно x, находим два корня $x_1 = \log_3 2$, $x_2 = 1$.

Не бывает несущественных деталей

1. Для того, чтобы число a было арккосинусом числа x, конечно, необходимо выполнение равенства $\cos a = x$, но, кроме этого, нужно еще помнить и о весьма немаловажной «детали»: число a должно также удовлетворять неравенствам $0 \leqslant a \leqslant \pi$. Ни при каких целых значениях n выражение $\frac{3}{2}\pi + 6\pi n$ промежутку $[0, \pi]$ не принадлежит, следовательно, исходное уравнение корней не имеет.

2. Указанная функциональная зависимость выполняется лишь до тех пор, пока из бака не выльется вся вода, то есть при $0 \leqslant t \leqslant \frac{V_0}{a}$. Линейной функцией называется функциональная зависимость вида $y(x) = kx + b$, справедливая для всех x из числового промежутка $(-\infty, \infty)$, поэтому вывод в «решении» ошибочен.

3. В определении показательной функции $y(x) = a^x$ константа $a > 0$, поэтому «ответ» в задаче неверен.

Очевидное — невероятное?

1. Отрезок DM в общем случае не является высотой пирамиды.

Приведем одно из возможных правильных решений. Введем систему координат, показанную на рисунке, тогда вершины тетраэдра будут иметь координаты $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $C(0,0,c)$; $D(0,0,0)$, а у точки M все три координаты будут одинаковыми: $M(m,m,m)$. Найдем уравнение плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + 1 = 0$, проходящей через точки A, B, C. Поскольку координаты точек A, B, C удовлетворяют уравнению этой плоскости, то

$$\begin{cases} A_1a + 1 = 0, \\ B_1b + 1 = 0, \\ C_1c + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $A_1 = -\frac{1}{a}$, $B_1 = -\frac{1}{b}$, $C_1 = -\frac{1}{c}$, и искомое уравнение плоскости принимает вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Точка M тоже принадлежит этой плоскости, поэтому $\frac{m}{a} + \frac{m}{b} + \frac{m}{c} = 1$, откуда

$$m = \frac{abc}{ab+bc+ac} \qquad \text{и} \qquad DM = m\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}abc}{ab+bc+ac}.$$

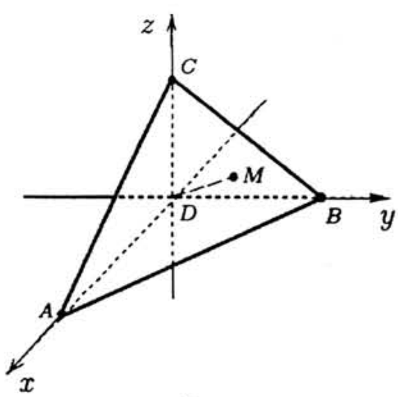


Рис. 1

Заметим, что метод координат — довольно эффективный инструмент решения многих стереометрических задач, он часто выручает там, где «пробуксовывает» геометрическая интуиция и где вообще порой бывает трудно отыскать хоть какое-то «чисто геометрическое» решение.

Ложные аналогии

1. Если одна из функций положительная, а другая — отрицательная на их общей области определения, то сформулированный вывод неверен (проверьте для функций $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$, заданных на отрезке $[0, 1]$.)

2. Аналогия с числами, для которых справедливо сформулированное в начале *«решения»* утверждение, не выполняется для произвольных функций. Приведем правильное решение. Точки экстремума найдем из условия

$$y'(x) = \cos x(5 - \sin x) - \cos x(1 + \sin x) = 0,$$

откуда $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, n — целое. Знак производной $y'(x) = \cos x(4 - 2\sin x)$ определяется знаком функции $\cos x$, отсюда заключаем, что в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое число, функция $y(x)$ принимает наибольшее значение $y_{max} = 8$, а при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — наименьшее значение $y_{min} = 0$.

4. Все ли у вас в порядке с логикой?

«Шиворот-навыворот»

1. В «решении» содержится логическая ошибка. Несмотря на то, что в результате преобразований исходного выражения получилось верное тождество, обратный вывод совсем не очевиден. Предложим два способа правильных рассуждений.

Способ I. Обозначим $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38} = x$ и возведем обе части этого равенства в куб. В итоге после очевидных преобразований получим, что число x должно удовлетворять уравнению

$$x^3 - 3x - 17\sqrt{20} = 0.$$

«В лоб» решить это кубическое уравнение, не зная предыстории его появления, не просто. Однако, из условия задачи можно сделать вывод, что значение $x = \sqrt{20}$, вероятно, служит его корнем. Действительно, значение $x = \sqrt{20}$ обращает кубический трехчлен в нуль, что позволяет записать

$$x^3 - 3x - 17\sqrt{20} = (x - \sqrt{20})(x^2 + \sqrt{20}x + 17)$$

(второй сомножитель в этом выражении можно получить, например, поделив $x^3 - 3x - 17\sqrt{20}$ на $x - \sqrt{20}$ «столбиком»). Далее убеждаемся в том, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + \sqrt{20}x + 17$ отрицателен, следовательно, этот квадратный трехчлен действительных корней не имеет. Таким образом, полученное единственное решение $x = \sqrt{20}$ кубического уравнения и доказывает требуемое тождество.

Способ II. Обозначим $a = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}$; $b = \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$ и заметим, что $a > 0$, $b > 0$, $ab = 1$,

$$a^2 = \sqrt[3]{(17\sqrt{5}+38)^2} = \sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})^3} = 9 + 4\sqrt{5},$$

$$b^2 = \sqrt[3]{(17\sqrt{5}-38)^2} = \sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})^3} = 9 - 4\sqrt{5}.$$

Следовательно, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 20$. Извлекая квадратный корень из обеих частей равенства $(a+b)^2 = 20$ с учетом того, что $a + b > 0$, имеем $a + b = \sqrt{20}$, что и требовалось доказать.

2. В «решении» допущена логическая ошибка типа «шиворот-навыворот». Приведем правильное доказательство. Поскольку $(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geqslant 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geqslant 4ab$, то, учитывая неотрицательность чисел a и b, из последнего неравенства выводим требуемое следствие $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

«Уравнение пропало!»

2. Исходное уравнение равносильно уравнению $|x-1| = |x-2|$, которое имеет единственный корень $x = \frac{3}{2}$.

Ох уж эти параметры!

1. В «решении» отсутствует обратный ход рассуждений. Осуществив проверку подстановкой найденных значений параметра c в исходную систему уравнений, убеждаемся в том, что лишь при $c = 1$ и $c = -3$ система имеет (нулевое) решение при всех значениях b, а при $c = 0$ она имеет решение только для $b = 2$. Следовательно, значение $c = 0$ в ответе лишнее.

Осторожно: «соображения симметрии»

1. Равенство $x = y$ совсем не следует из симметрии системы, а лишь не противоречит ей. Для доказательства того, что других решений не существует, можно привлечь соображения монотонности. Монотонно возрастающая функция $f(t) = t^3 + e^t$ не может принимать равные значения в двух разных точках ее области определения, поэтому из первого уравнения следует $x = y$.

2. Для обоснования единственности полученного решения здесь удобно привлечь метод векторной алгебры. Обозначим $\vec{a} = (\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x})$; $\vec{b} = (\sqrt{1+y}, \sqrt{1-y})$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. Из уравнений системы следует, что $\vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{6}, \sqrt{2})$, поэтому $|\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{2}$. Но тогда $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, и получается, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены. Поскольку они имеют одинаковую длину, то $\vec{a} = \vec{b}$, отсюда $\sqrt{1+x} = \sqrt{1+y}$, $\sqrt{1-x} = \sqrt{1-y}$ и, окончательно, $x = y$ при $1 \geqslant x \geqslant -1$.

Могучие «мелочи»

В приведенных «ответах» неправильно используются логические скобки.

1. В первой задаче «ответ» читается: «$x = 1$ и $x = 3$», что абсурдно (для записи ответа можно привлечь знак совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$, или записать: «$x = 1$ или $x = 3$»).

2. В «ответе» второй задачи неясно, какие значения y соответсвуют определенным значениям x. Приведенная в «ответе» форма записи допускает решения $(1;1)$, $(3;3)$, что неверно. Приведем правильную форму записи с использованием логических скобок:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Предпочтительнее, однако, более компактная запись ответа: $(1;3)$, $(3;1)$.

3. Последний знак системы (фигурную скобку) следует заменить на знак совокупности (квадратную скобку). Решением системы

$$\begin{cases} 4 < x < 5, \\ -5 < x < -3 \end{cases}$$

является пустое множество, исходная же система неравенств имеет решение: $(-5;-3) \cup (4;5)$.

5. «Сюрпризы» модуля

Модуль в тумане

1. В «решении» допущена ошибка, основанная на неправильном толковании модуля от некоторого выражения $f(x)$:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ошибка! Правильно следовало бы написать

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

В частности, в рассматриваемой задаче

$$|x^2 + 3x| = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{если } x^2 + 3x \geqslant 0, \\ -x^2 - 3x, & \text{если } x^2 + 3x < 0. \end{cases}$$

Поскольку в первом случае $x^2 + 3x \geqslant 0$ при $x \in (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$, то, решив неравенство $x^2 + 3x + x^2 - 2 \geqslant 0 : x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$, следует взять общую часть полученных числовых множеств: $x \in (-\infty, -3] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$. Во втором случае $x^2 + 3x < 0$ при $x \in (-3, 0)$ и общая часть с множеством решений неравенства $-x^2 - 3x + x^2 - 2 \geqslant 0$ задается числовым интервалом $x \in (-3, -\frac{2}{3})$. Объединяя решения, полученные в этих двух случаях, находим окончательный ответ $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$. Хотя он и совпал с ранее полученным ответом, но, в отличие от него, имеет совершенно другой — законный! — статус.

2. Ошибка заключена в тождестве $|x| - |y| = |x - y|$. В его ошибочности можно убедиться, положив, например, $x = 1$, $y = 2$. Приведем правильное решение.

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y \\ y - x, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

При положительных x, y выражение $|x+y| = x+y$ всегда больше любой из разностей $x - y$ или $y - x$, поэтому $|x + y| > |x - y|$.

6. «Зри в корень»!

1. Многие забывают об отрицательном решении -4096.

2. а) «Ответ» не верен для отрицательных значений переменной x.

б) Здесь решающие демонстрируют психологическое затруднение, связанное с терминологическим нюансом. Фразы «число, квадрат которого равен x^2» и «квадратный корень из x^2» не эквивалентны: если в первом случае допускаются два числовых значения (равные между собой по модулю: положительное и отрицательное), то во втором — только одно: $|x|$.

3. Здесь также наблюдается психологическая трудность, которую решающие формулируют так: «операции извлечения квадратного корня и возведения во вторую степень взаимообратны, поэтому не важно, в какой последовательности их применять, все равно в результате должно получиться одно и то же: $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = |x|$.»

Дело в том, что эти операции не всегда взаимообратны. Если операция возведения в квадрат может быть применена к любому (положительному или отрицательному) числу, то операция извлечения квадратного корня может быть применена только к неотрицательным числам. Итак, $(\sqrt{x})^2 = x$ в области определения квадратного корня, т.е. при $x \geqslant 0$.

4. Допущенные в этом примере ошибки прокомментированы выше: здесь $10 - 5\sqrt{5} < 0$.

5. В «решении» не учтена область определения исходного выражения $x + 3 \geqslant 0$. С учетом этого ограничения ответ к задаче: $x \geqslant -3$.

6. Во-первых, заметим, что фраза «уравнение решить нельзя» означает совершенно не то, что фраза «уравнение решений не имеет». Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что оно корней не имеет. Таким образом, выражение «уравнение решить нельзя» аппелирует к довольно глубоким разделам высшей математики, связанным с теорией доказательств, и о которой многие из абитуриентов вряд ли имеют хоть какое-то представление. А коль скоро это так, то высказывание «это уравнение решить нельзя» может быть воспринято как признание отвечающим собственной беспомощности.

Во-вторых, понятие арифметического корня распространяется лишь на неотрицательные значения подкоренных выражений. Из отрицательных чисел возможно извлечение корня нечетной степени (см. [8]). Ответ к задаче: $x = -17$.

7. В основе ошибки лежит довольно тонкая терминологическая особенность: если выражение $\sqrt[3]{y}$ определено на всей числовой оси, то выражение $y^{\frac{1}{3}}$ — лишь на множестве неотрицательных чисел (см. [8]). Отождествление этих выражений на всей числовой оси может привести к парадоксам: $-1 = \sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$. Выражение $\sqrt[3]{-27}$ имеет смысл, а выражение $(-27)^{\frac{1}{3}}$ — нет, поэтому решение $x = -17$ должно быть отброшено.

7. Хорошо ли вам знакома теорема Виета?

1. В случае $p = 0$, $q > 0$ уравнение $x^2 + px + q = 0$ действительных корней не имеет, а комплексные корни отличаются друг от друга знаком.

2. При $q < 0$ уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, и, согласно теореме Виета, эти корни разных знаков.

3. Уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ действительных корней не имеет, комплексные же корни друг с другом по величине не сравниваются.

8. Графики

Сложно ли построить график сложной функции?

1. а) Область определения функции $y = \lg(-x) : -x > 0$, отсюда $x < 0$. График функции $y = \lg(-x)$ показан на рисунке 2 а).

б) Функция $y = |x^2 - 1|$ определена на всей числовой оси, на приведенном же в «решении» рисунке имеется промежуток $(-1, 1)$ на оси Ox, для которого значения функции не определены. График функции $y = |x^2 - 1|$ показан на рисунке 2 б).

в) Нужно учитывать область определения функции $y = x^{\frac{1}{\lg x}} : x > 0, x \neq 1$. График этой функции показан на рисунке 2 в).

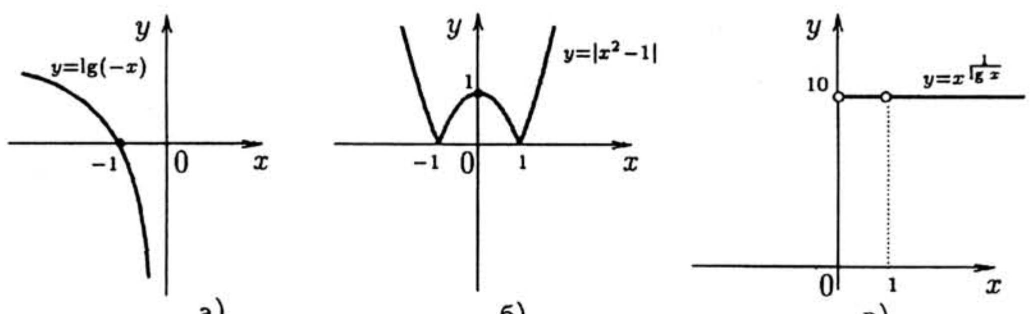


Рис. 2

2. Обнаружить ошибку в данном случае помогает «меченый атом»: возьмем («пометим») конкретную точку на оси Ox, например, $x = 0$, тогда значение функции $y = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ в этой точке не совпадает с ординатой соответствующей точки на построенном в «решении» графике. Приведем правильное решение. Запишем функциональную зависимость в виде $y = 2\cos 2(x + \frac{\pi}{6})$. График этой функции получается из графика функции $y = \cos x$ последовательно сдвигом на $\frac{\pi}{6}$ единиц влево, сжатием в два раза вдоль оси Ox и растяжением в два раза вдоль оси Oy (см. рис. 3).

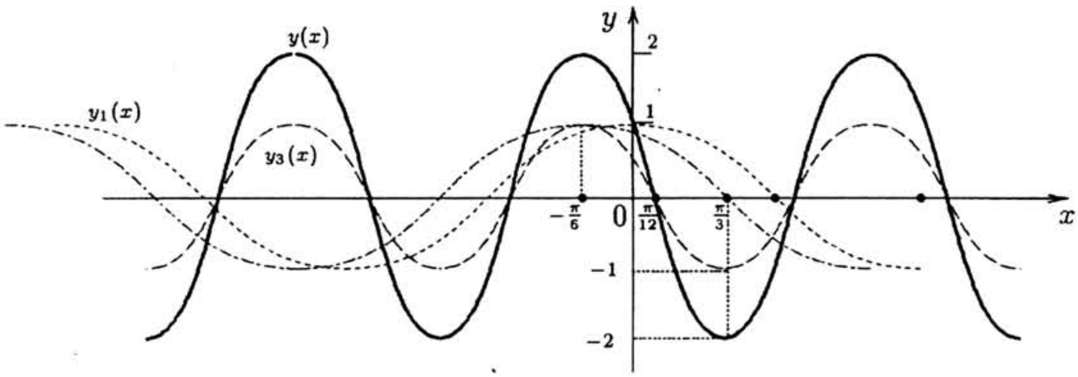


Рис. 3

Графическое решение уравнений

1. Корень уравнения найден правильно, но графический метод не может служить обоснованием решения. Приведем правильное решение.

Перепишем уравнение в виде $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$. Производная функции $y(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ равна $y'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3}$, и, следовательно, $y' < 0$ при всех x. Значит, функция $y(x)$ убывающая на всей числовой оси. Замечаем, что $y(1) = 1$, поэтому корень $x = 1$ единственный.

2. Этот пример убедительно показывает, что графический метод не может служить обоснованием решения — в данном случае он привел к потере корней (неаккуратный чертеж, вообще говоря, может привести к появлению лишних корней).

Рассматриваемый пример подробно разбирается в статье Н. Виленкина «Три точки, три точки ... » в журнале «Квант», 1980, №1, стр. 48-50. Как показано в этой статье, графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются не в одной, а в трех точках с абсциссами $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$ (проверьте!) и в третьей точке с абсциссой x, удовлетворяющей уравнению $\left(\frac{1}{16}\right)^x = x$. С помощью аппарата производных в статье доказывается теорема: если $1 > a \geqslant e^{-e}$, то графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ имеют одну точку пересечения, если же $e^{-e} > a > 0$, то — три точки пересечения. Их можно увидеть, построив графики этих функций в увеличенном масштабе.

9. Уравнения

Щедроты четной степени

1. Возведение обеих частей уравнения в квадрат порождает уравнение, в общем случае не равносильное данному, но являющееся его следствием. Напомним, что если все корни одного уравнения являются корнями второго уравнения, то второе

уравнение называется *следствием* первого. Два уравнения называются *равносильными*, если они имеют одни и те же решения. Если число a — корень уравнения $f(x) = g(x)$, то выполняется тождество $f(a) = g(a)$, следовательно, будет выполняться тождество $[f(a)]^2 = [g(a)]^2$ и, значит, число a является корнем уравнения $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$. Обратное, однако, неверно: последнему уравнению удовлетворяют также корни «постороннего» уравнения $f(x) = -g(x)$.

Правильное решение мы получим, если первый значок равносильности $\Leftrightarrow$ в «решении» заменим на значок следствия $\Rightarrow$, а затем подстановкой найденных решений в исходное уравнение выберем те из них, которые этому уравнению удовлетворяют. Так, «корень» $x_1 = 1$ оказывается «лишним», а корень $x_2 = 23$ выдерживает испытание.

2. Уравнение $x^2-24x+80 = 0$ является следствием исходного уравнения, поэтому нужно проверить, удовлетворяют ли его корни исходному уравнению. В «решении» была допущена характерная ошибка, когда найденные корни подставлялись не в исходное уравнение, а лишь проверялось условие их принадлежности области допустимых значений. В действительности «корень» $x_1 = 4$ исходному уравнению не удовлетворяет, а корень $x_2 = 20$ подходит.

3. Поскольку, согласно определению арифметического корня $\sqrt{\sin x} \geqslant 0$, то в правой части исходного равенства должна стоять неотрицательная величина, отсюда $\cos x < 0$. Из полученного множества решений $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ этому условию удовлетворяют лишь значения $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Заметим, что в общем случае при возведении в квадрат уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

посторонние «корни», принадлежащие ОДЗ, не появятся, если при этом учитывать ограничение $g(x) \geqslant 0$.

Бойтесь операций, «дары» приносящих

1. «Корень» $x_2 = -2$ получен от щедрот второй степени — он не удовлетворяет уравнению $x = \sqrt{2x^2 + x - 2}$, так как в правой части этого уравнения должна находиться неотрицательная величина. «Корень» $x_1 = 1$ не удовлетворяет ограничению, накладываемому на основание логарифма $\log_x y$: $x > 0, x \neq 1$. Итак, исходное уравнение корней не имеет.

2. Поскольку значения функции $\sin t$ ограничены промежутком $[-1, 1]$, то этому промежутку должны принадлежать и значения $x = \sin(\arcsin x)$: $|x| \leqslant 1$. «Корень» $x_1 = -4$ является посторонним.

3. В «решении» допущен целый «букет» ошибок, приведших не только к появлению лишних «корней», но и к потере истинных корней. Посторонние «корни» появились, во-первых, из-за игнорирования области определения функции $y = \frac{1}{\tan x}$. Значения x, при которых $\cos x = 0$, в эту область не входят и должны быть отброшены. Во-вторых, из свойств арифметического корня следует ограничение

$\frac{1}{2\tan x} = -\sqrt{1-\sin^2 x} \leqslant 0$, поэтому из полученных решений должно быть отброшено множество «корней», для которых $\tan x > 0$. После такой «прополки» остаются лишь корни $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n$ — целое.

Потеря корней произошла из-за неправильного раскрытия выражения $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$. На самом деле $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$ и следует рассмотреть две возможности: 1) $\cos x \geqslant 0$ (этот случай разобран в «решении») и 2) $\cos x < 0$. В последнем случае дополнительно появляются решения, являющиеся корнями уравнения $-1+\frac{1}{2\sin x} = 0$, а именно: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k$ — целое. Из этого множества следует взять лишь те корни, для которых $\tan x < 0$, то есть $x = -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi, k$ — целое. Окончательно все найденные решения можно представить одной формулой: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Союз неразрозненных частей

1. При $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, m — целое, функция $\tan x$ не определена, поэтому эти «корни» должны быть отброшены. В «решении» также произошло некорректное избавление от знаменателя — не при всех найденных значениях корней выражение в знаменателе дроби имеет смысл. Область допустимых значений знаменателя $187\pi^2 + 36\pi x - 36x^2 > 0$, отсюда $-\frac{11}{6}\pi < x < \frac{17}{6}\pi$. Из найденных ранее «корней» этому промежутку принадлежат значения $-\frac{7}{6}\pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi, 2\pi, \frac{13}{6}\pi$, которые единственно лишь должны быть включены в ответ.

Небезобидные «тождественные» преобразования

1. Использованные в преобразованиях «тождества» $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$ и $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 0$ справедливы не для всех значений x: первое имеет смысл для всех $x \neq 1, x \neq -1$, второе — для всех $x \neq 1$. Таким образом, ни один из найденных в «решении» корней не подходит — уравнение корней не имеет.

2. Использованное в преобразованиях тождество $\lg_2(x+1) - \lg_2(x+1) = 0$ справедливо лишь при $x > -1$, поэтому корень $x_1 = -8$ является посторонним.

3. Использование в «решении» равенства $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan\frac{x}{2}$ приводит к расширению области допустимых значений x: если в выражении слева в этом равенстве $x \neq \pi n$, то справа — $x \neq \pi(2n+1)$, n — целое. Учитывая этот факт, из найденного решения следует искючить множество корней $x = 2\pi n$, n — целое.

Части равносильны, а целые — нет

1. Непосредственная проверка показывает, что значение $x_1 = 0$ — посторонний корень.

Невосполнимые потери

1. В «решении» допущена стандартная ошибка, сопутствующая потере корней: прежде чем сокращать обе части уравнения $f(x)g(x) = h(x)g(x)$ на общий множитель $g(x)$, нужно убедиться в том, что $g(x) \neq 0$, в противном случае корни уравнения $g(x) = 0$ следует учесть вместе с корнями уравнения $f(x) = h(x)$.

В данном случае произведено неправомерное сокращение обеих частей уравнения

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos x + \sin x)$$

на общий множитель $\cos x + \sin x$, вследствие чего произошла потеря корней, являющихся решением уравнения $\cos x + \sin x = 0$. Последнее уравнение равносильно уравнению $(\cos x + \sin x)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k$ — целое.

2. «Тождественное» преобразование $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ сузило область допустимых значений переменной x: функция $\tan\frac{x}{2}$ определена при $x = 2\pi n$, n — целое, а выражение в правой части этого «тождества» — нет. Проверка показывает, что как раз значения переменной $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют исходному уравнению, а они оказались безвозвратно потерянными.

Системы уравнений

1. Ошибка заключается в попытке воспользоваться одним и тем же уравнением, а именно вторым уравнением системы, дважды — сначала для нахождения значения y а затем для нахождения значения x, что в конечном итоге привело к появлению посторонних решений $(-\frac{11}{3}, 1), (\frac{16}{9}, \frac{10}{3})$.

2. В «решении» нарушены логические связи между исходной системой и выводимыми из нее следствиями. Приведем правильное решение. Система, равносильная исходной, после произведенных операций сложения и вычитания уравнений имеет вид $\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 11) = 0, \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 9) = 0. \end{cases}$

Последняя система равносильна совокупности следующих систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 11 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 11 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 - 9 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \mp 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\sqrt{11}, \\ y = \pm\sqrt{11} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}}, \\ y = \mp\frac{1}{\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}}. \end{cases} \end{array}\right.$$

10. Неравенства

Неравенства — не равенства

1. В основе допущенной ошибки лежит ложная аналогия между решением данного неравенства и решением уравнения $\tan x = 1$.

Правильное решение. На интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ решением неравенства $\tan x \leqslant 1$ является промежуток $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$. С учетом периодичности функции $y = \tan x$ заключаем, что множество решений неравенства $\tan x \leqslant 1$ представляется объединением всех промежутков вида $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Сформулированное утверждение справедливо лишь на одном из интервалов монотонности функции $y = \tan x$, в общем же случае оно неверно. В этом можно убедиться, взяв, например, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{3\pi}{4}$.

3. В основе допущенной ошибки лежит ложная аналогия между решением данного неравенства и решением уравнения $(\frac{1}{3})^x = 4$. Из свойств показательной функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ следует, что неравенство $(\frac{1}{3})^x < 4$ выполняется при $x > \log_{\frac{1}{3}} 4$.

4. Значения $x \leqslant 0$ не входят в область определения логарифмической функции. Правильный ответ: $x \in (0, 2)$.

5. В «решении» допущено две ошибки. Первая ошибка связана с неправильным представлением о характере поведения логарифмической функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$; вторая ошибка заключается в игнорировании области определения логарифмической функции: решения $x < 0$ в любом случае должны быть отброшены.

Правильное решение.

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{x}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1).$$

6. Здесь также наблюдается ложная косвенная аналогия с уравнениями. Известно, что метод подбора иногда выручает при нахождении корней уравнений. Например, поэкспериментировав с несколькими целыми числами, можно обнаружить, что уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Поскольку кубическое уравнение не может иметь больше трех корней, то таким образом найдены все решения. Подобные эксперименты с неравенствами, как правило, безыдейны, потому что охватить бесконечное множество решений, обычно удовлетворяющих неравенству, в принципе невозможно. Приведем правильное решение. Обозначим через x разность арифметической прогрессии, тогда $b = a + x$, $c = a + 2x$, $d = a + 3x$ и нужно сравнить величины $a(a + 3x)$ и $(a + x)(a + 2x)$. Первое выражение равно $a^2 + 3ax$, а второе — $a^2 + 3ax + 2x^2$. Поскольку их разность $2x^2 \geqslant 0$, то $a(a + 3x) \leqslant (a + x)(a + 2x)$ или $ad \leqslant bc$.

На что умножаем?

1. Приведем правильное решение.

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 13 \geqslant x, \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 13 \leqslant x, \\ x < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0, 13]$.

2. Приведем правильное решение. Учитывая, что $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$, преобразуем левую часть неравенства: $\frac{(x+5)(x-1)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0$. Последнее неравенство удобно решать методом интервалов (см. [2]), рассмотрев знаки выражений в скобках на каждом из промежутков $(-\infty, -5)$, $[-5, 1]$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, \infty)$ числовой оси.

Ответ: $x \in [-5, 1] \cup (2, 3)$.

Иррациональные неравенства

1. Приведем правильное решение. $2\sqrt{x^2 + x - 2} > 2x - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 4(x^2 + x - 2) > (2x-1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 < 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{9}{8} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -2 \\ x \geqslant 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{9}{8} \\ x \leqslant -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty, -2] \cup (\frac{9}{8}, \infty)$.

2. Приведем правильное решение. В области допустимых значений $2 - x > 0$, $x \neq -1$ исходное неравенство равносильно следующей совокупности

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}} \geqslant \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + x > 0, \\ \frac{1}{2-x} \geqslant \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \\ 1 + x < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{\sqrt{13}-3}{2} \\ x < -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{\sqrt{13}-3}{2}, 2\right)$.

Логарифмические неравенства

1. Выражение $\sqrt{8} - 2$ хотя с виду и смотрится «внушительно», но на самом деле оно меньше единицы, а потому в области допустимых значений исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 2x - 1 \leqslant 1, \\ 1 + 2x - x^2 \geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 \geqslant 1, \\ 0 < 1 + 2x - x^2 \leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ 2 \leqslant x < 1 + \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(\frac{1}{2}, 1] \cup [2, 1+\sqrt{2})$.

2. В «решении» не учтена область допустимых значений $x > 0$, $x \neq 1$. Правильный ответ: $(0,1) \cup (1,2]$.

11. Начала анализа

Капризный инструмент

1. Производная не может быть определена в тех точках, в которых не определена исходная функция. Правильный ответ: $f'(x) = 4$ при $x \notin \{-2, -1, 0\}$.

2. При отыскании наибольшего и наименьшего значений функции обязательно нужно исследовать точки, в которых производная не существует. В рассматриваемом примере функция не имеет производной в точке $x = 0$, следовательно, эта точка должна рассматриваться как один из возможных «претендентов». Следует рассмотреть также и точки — концы отрезка $[-2, 1]$. При $x = -2$ имеем $y = 4$, при $x = 1$ получаем $y = 7$. Итак, на отрезке $[-2, 1]$ наименьшее значение функции достигается в точке $x = 0$ и равно $y_{\min} = 0$, наибольшее значение функции $y_{\max} = 7$ дотигается в точке $x = 1$.

3. Производная $y'(x)$ не определена в точках $x_k \in (0, \frac{\pi}{2})$, в которых $\tan x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k, k = 0, 1, 2, \ldots$, поэтому вывод о возрастании $y(x)$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ неправомочен. Функции $y(x)$ и $y_1(x)$ в точках x_k терпят разрывы: если при возрастании аргумента на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ функция $y_2(x) = \tan x$ возрастает, то функция $y_1(x)$ при возрастании $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ многократно пробегает множество значений от $-\infty$ до $+\infty$.

Случай с параболой Нейля

1. В основе ошибки лежит довольно тонкая терминологическая особенность, отмеченная в п. «Зри в корень!» (задача 7). Обойти ее можно следующим образом. При отрицательном x имеем $(\sqrt[3]{x^2})' = (\sqrt[3]{(-x)^2})' = ((-x)^{\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Итак, в точке $x_0 = -8$ находим $y(-8) = 4$, $y'(-8) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = -\frac{1}{3}$ и уравнение касательной имеет вид $y = 4 - \frac{1}{3}(x + 8)$.

Кривая названа параболой Нейля в честь английского математика Уильяма Нейля (1637 — 1670), в 1657 году сумевшем вычислить длину ее дуги. (Рекомендуем прочитать статью И. Быстрого «Площадь сегмента параболы Нейля» — «Квант», 1980, № 6, стр. 14-15).

Применим формулу Ньютона-Лейбница

1. Формула Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ верна, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a, b]$. В рассматриваемом случае $\int\limits_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{y+1}\Big|_0^x$ только при $x > -1$ (при $y = -1$ подынтегральная функция терпит разрыв). Полученный в «решении» ответ следует откорректировать с учетом ограничения $x > -1$. Правильный ответ в задаче: $\varnothing$.

ЧАСТЬ III. НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ СОВЕТЫ

«Экзаменационное задание составляется так, чтобы абитуриент, решая его, имел возможность допустить хотя бы одну ошибку».

(Из студенческого юмора).

Среди способов борьбы с ошибками отдельно можно выделить специальные профилактические мероприятия, предшествующие экзамену, и приемы самоконтроля, непосредственно применяемые на самом экзамене.

Ошибки, не являющиеся ошибками

Среди огромного разнообразия задач, предлагающихся на вступительных экзаменах, нет-нет да и появляются задачи, правильность решения которых вызывает споры не только у абитуриентов, но и у самих экзаменаторов. К их числу, например, принадлежат показательно-степенные уравнения вида

$$(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)}. \tag{1}$$

Перелистывая даже весьма авторитетные пособия для поступающих, можно обнаружить разные мнения, что же следует считать корнями уравнения (1). В популярном «Сборнике задач по математике для поступающих в ВТУЗы» под редакцией М. И. Сканави (М.: Высшая школа, 1993, стр. 125) мы находим: «корнями уравнения $(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)}$ считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} u(x) > 0, \\ u(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

и те значения x, для которых $u(x) = 1$, если при этих значениях определены $f(x)$ и $g(x)$». Следуя этому указанию, значение $x = 3$ нельзя признать корнем уравнения

$$(x-3)^x = 3 - x, \tag{2}$$

хотя в другом пособии — «Практикум абитуриента. Алгебра и тригонометрия» под редакцией А. А. Егорова (Приложение к журналу «Квант», 1995, № 3 — Бюро «Квантум», стр. 112-113) значение $x = 3$ объявляется корнем уравнения (2). В этом же пособии по поводу последнего уравнения дается «рекомендация»: «При $x < 3$ основание степени отрицательно, и поэтому такие x рассматривать не следует...». Если же мы теперь откроем книгу [3] на странице 62, то прочитаем, что показательно-степенное уравнение

$$(x+5)^{x^2+x-2} = 1 \tag{3}$$

в качестве одного из своих корней имеет $x = -6$ — значение неизвестного, при котором основание степени в (3) отрицательно.

Как же поступать горемычному абитуриенту при такой разногласице мнений?

Конечно, мудрая приемная Комиссия не станет включать в перечень экзаменационных задач показательно-степенные уравнения, раз они вызывают столько кривотолков. Но уж если это произошло, то она должна морально подготовиться к разбору аппеляционных заявлений, в которых аргументированно — с сылкой на авторитетный источник, будет указано, почему данное уравнение решалось именно так, и не иначе.

От себя же мы рекомендуем решать показательно-степенные уравнения вида (1) во всей возможной полноте, включая в множество корней и те значения неизвестного, при которых

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{и определены} \quad f(x),\ g(x); \\ 0 & \text{и} \quad f(x)g(x) \neq 0, \\ < 0 & \text{и} \quad f(x),\ g(x) \quad \text{принимают целые значения.} \end{cases}$$

Профилактика ошибок

Каждый врач знает, что болезнь легче предотвратить, чем вылечить. Точно так же, ошибку в математической работе легче предотвратить, чем оперативно выявить и устранить. Что же способствует предупреждению ошибок? Прежде всего, хорошо продуманная система подготовки к экзамену и поведения на самом экзамене, а также арсенал приемов и средств защиты от ошибок — если не устраняющих их вовсе, то, по крайней мере, уменьшающих вероятность появления.

Научная организация труда

Решающее значение на результаты экзаменов оказывает доэкзаменационная подготовка. Если вы решили заниматься самостоятельно, то обязательно уясните программу вступительных экзаменов в выбранное вами учебное заведение, очертите перечень пособий, привлекаемых для систематического изучения и повторения предмета, составьте план подготовки и постарайтесь его в дальнейшем неукоснительно выполнять. Учтите: хорошие и прочные знания, а также практическая отработка основных методов и приемов решения задач существенно предохранят вас от возможных математических ошибок. Более того, грамотные и умелые действия экономят весьма дефицитное время на экзамене, освобождая его для необходимого самоконтроля.

Во время письменного экзамена по математике полезно планировать время решения как всего задания, так и каждой задачи в отдельности. При планировании нужно учитывать свои индивидуальные возможности. Если некоторая тема, скажем, решение уравнений или систем уравнений, вами усвоена очень хорошо и не вызывает никаких трудностей, то решать задачу на эту тему следует планировать в первую очередь. В расчет можно принимать и общую статистику. Следующая табличка, составленная по материалам журнала «Математика в школе» (1, 1996, стр. 42-45), показывает, какой процент абитуриентов, поступающих на математический факультет Московского педагогического государственного университета в 1995 году, не справился с задачами по отдельным темам программы.

текстовые задачи	30%
стереометрические задачи	90%
задачи на исследование функций с помощью производных	27%
тригонометрические уравнения	38%
логарифмические уравнения	15%

Из таблички видно, что стереометрические задачи вызвали у поступающих больше всего проблем. Это довольно типичная ситуация, характерная для многих ВУЗов. Решение задач такого уровня сложности следует планировать на самый конец экзаменационной работы.

При планировании решения каждой отдельной задачи обязательно следует предусмотреть время на тщательное и скрупулезное изучение условия задачи, ее решение на черновике, проверку решения и переписывание на чистовик.

Глубокое уяснение условия задачи — обязательный и важный этап решения, на него нужно планировать в среднем 2-4 минуты. Хорошее представление о том, что дано в задаче и что требуется найти, не только ускоряет поиск нужного ответа, но и предохраняет от множества ошибочных шагов и неверных рассуждений.

Проверка решения — также обязательный этап выполнения экзаменационной работы, причем этап весьма важный и ответственный. На проверку решения каждой задачи нужно планировать в среднем 5-6 минут (в особых случаях можно и больше). Как бы хорошо ни была решена ваша задача, какие оригинальные идеи ни были бы использованы при этом — весь ваш огромный и кропотливый труд, все ваши старания пойдут насмарку, если в работе попадется хотя бы одна «невзрачная» или «пустяковая», как вам может показаться, ошибка. Чем бы ни объяснялась эта ошибка — плохим почерком, рассеянностью, невнимательностью — признать задачу решенной правильно она уже не позволит.

Приемы, предохраняющие от ошибок

Как уже отмечалось, лучше всего от ошибок предохраняют знание и владение стандартными методами решения основных классов задач. Вместе с тем, желательно владеть также рядом вспомогательных «тактических уловок» или «маленьких хитростей», уменьшающих вероятность появления ошибок. Укажем на некоторые из них.

1. *«Щадящие» вычисления.*

а) Предположим, нужно умножить 44 на 37 «в столбик». Стандартный путь предполагает два умножения 7×44 и 3×44 и сложение полученных результатов со сдвигом второго слагаемого на один разряд влево. Однако, пользуясь перестановочностью операции умножения, можно искать произведение 37×44, которое, в отличие от предыдущего случая, требует всего лишь одного умножения 4×37 (сложение требует таких же затрат). Данный прием годится во всех случаях, когда один из сомножителей имеет одинаковые цифры. Он экономит затраты «мыслительной энергии» и, следовательно, уменьшает шансы допустить ошибку.

б) Выполняя умножение многозначных чисел «в столбик», при суммировании цифр промежуточных результатов старайтесь группировать их по десяткам.

в) Экономьте «мозги», а не бумагу. Не надо стараться проделывать несколько сложных операций «в уме».

2. Чем длиннее выкладки, тем больше вероятность допустить ошибку. Борьба со сложностью должна происходить на всех уровнях — не только при вычислениях, но уже на этапе выбора рациональной схемы решения. Вот классический пример [3]. Находя производную функции $y(x) = -\frac{3}{x}$, абитуриент решил применить схему дифференцирования дроби

$$y'(x) = -\frac{(3)'x - 3(x)'}{x^2} = -\frac{0-3}{x^2} = \frac{3}{x^2},$$

хотя гораздо проще применить здесь схему дифференцирования степенной функции

$$y(x) = -3x^{-1}: \quad y'(x) = -3(-1)x^{-2} = \frac{3}{x^2}.$$

Решение следующей задачи обнаруживает более «тонкий» пример.

Задача. В прямоугольном треугольнике ACB даны катеты $BC = a$ и $CA = b$. В треугольник вписан квадрат $CFED$, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла треугольника. Найти сторону квадрата.

Решение. Диагонали квадрата являются биссектрисами его углов. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника мы имеем (см. указанные на чертеже обозначения)

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{p} = \frac{a+b}{m+p} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

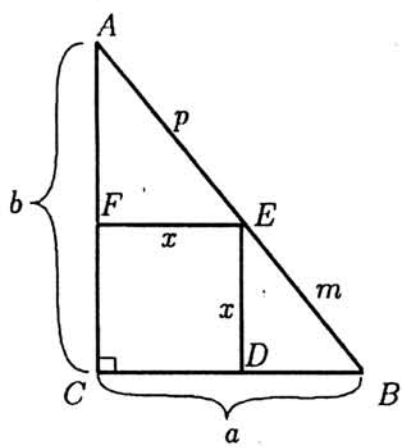


Рис. 4

откуда $m = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$. Рассматривая далее треугольник BED, получим

$$x^2 + (a-x)^2 = m^2 = \frac{a^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2}.$$

Решая это уравнение, находим для искомой стороны квадрата два значения $x = \frac{ab}{a+b}$ и $x = \frac{a^2}{a+b}$, одно из которых, очевидно, лишнее, и нужно еще потрудиться, чтобы узнать, какое именно (включать в ответ сразу оба значения было бы грубой ошибкой).

Этих трудностей и шанса допустить ошибку можно было бы избежать, изначально выбрав более простую схему решения. Английский философ IV века Уильям Оккам советовал: «Сущности не следует умножать без необходимости». Зачем в нашей задаче придумывать квадратное уравнение, если можно обойтись без него — более простым линейным уравнением? Из подобия треугольников ABC и AEF имеем $\frac{a}{x} = \frac{b}{b-x}$, откуда находим $x = \frac{ab}{a+b}$.

Обратим попутно внимание на прием, помогающий диагностировать неверное решение $x = \frac{a^2}{a+b}$. Величина стороны вписанного квадрата не должна зависеть от того, какой из катетов прямоугольного треугольника обозначен через a, а какой через b: поменяв буквы a и b местами, мы должны получить тот же самый ответ. В формуле $x = \frac{a^2}{a+b}$ этого сделать нельзя, значит она неверна.

3. Профилактике ошибок в геометрических задачах способствуют грамотно выполненные чертежи. Приведем несколько полезных советов, заимственных из [5].

«Если условие позволяет — черти (хотя бы примерно) в масштабе».

«Избегай чертить частные случаи (прямоугольный, равнобедренный или равносторонний треугольник, равные окружности и т. п.), если они не предусмотрены условием задачи — глядя на такой чертеж, ты скоро «поверишь», что так будет всегда и твоя мысль будет направлена на ложный след».

«В стереометрии делай большой чертеж на всю страницу с невидимыми пунктирными линиями».

«Искаженное в объемном рисунке сечение построй рядом в натуральном виде — прямой угол станет действительно прямым, подобие треуглольников станет явным и т. п.»

«Элементы разных плоскостей и сечений выделяй цветными карандашами».

В цитируемой статье приведено 45 важных «заповедей АБИТУРИЕНТА». Мы рекомендуем вам прочитать эту замечательную статью полностью и взять указанные в ней полезные советы на вооружение.

Приемы самоконтроля

Существует несколько стандартных приемов самоконтроля. Хотя ни один из них не дает стопроцентной гарантии, но владение этими приемами во многих случаях помогает успешно бороться с ошибками.

1. Подстановка частных значений.

Ошибки в тождественных преобразованиях часто можно выявить подстановкой вместо букв-переменных нескольких числовых значений. Например, взяв в равенстве $\sin 3\alpha + \sin\alpha = \sin 4\alpha$ значение угла $\alpha = \frac{\pi}{6}$, получим $1 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, что неверно. Следовательно, исходное тождество ложно.

Если ошибка допущена в каком-то месте длинной цепочки преобразований, то локализовать эту ошибку помогает прием, названный в [6] «меченым атомом». Проиллюстрируем его на следующем примере.

1. Докажите тождество (МГРИ, 1989)

$$\frac{\cot(\pi+\alpha)+\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\tan(2\alpha)\tan\alpha}+\frac{2}{\sin(2(\pi+\alpha))}=\frac{2}{\tan\alpha}.$$

Выполним преобразования левой части:

$$\frac{\cot\alpha+\tan\alpha}{1+\tan(2\alpha)\tan\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}=f_1(\alpha)=$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin(2\alpha)\sin\alpha}{\cos(2\alpha)\cos\alpha}}+\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha}=f_2(\alpha)=$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha(\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha)}+\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=f_3(\alpha)=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\alpha+\alpha)}=f_4(\alpha)=$$

$$=\frac{\cos\alpha(2\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha\cos 3\alpha}=f_5(\alpha)=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos 3\alpha}=f_6(\alpha).$$

Полученное выражение явно не похоже на $\frac{2}{\tan\alpha}$, поскольку $f_6(\alpha) = = \dfrac{2}{\tan\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}$, а множитель $\dfrac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}$, вообще говоря, не равен 1. Где же была допущена ошибка? Запустим в цепочку $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = = \dots = f_6(\alpha)$ «меченый атом»: возьмем какое-нибудь значение α, например $\alpha = \frac{\pi}{6}$, и будем подставлять его последовательно в $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, ..., $f_6(\alpha)$. Имеем: $f_1(\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}$, $f_2(\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}$, $f_3(\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}$, $f_4(\frac{\pi}{6})$ — не определено, поскольку знаменатель выражения $f_4(\alpha)$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$ обращается в 0. Анализ перехода $f_3(\alpha) \to f_4(\alpha)$ показывает, что ошибка возникла вследствие применения неверного тождества $\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha = \cos 3\alpha$, на самом же деле должно быть $\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha = \cos(2\alpha-\alpha) = \cos\alpha$, и дальше уже получается то, что нужно.

На практике можно использовать разновидность этого приема, учитывающую «степень уверенности» решающего в правильности тех или иных преобразований. Если, скажем, отдельные тригонометрические тождества усвоены хорошо и их правильное применение не вызывает никаких сомнений, то имеет смысл сосредоточить свое внимание на «узких местах» — на тех тождествах, в использовании которых нет четкой уверенности, и где особенно велика вероятность «сбоя».

«Меченый атом» с успехом работает при диагностике ошибок во многих задачах. Мы им воспользовались, например, обсуждая решение задачи 2 из п. «Сложно ли построить график сложной функции?», он может быть также полезен для контроля правильности преобразований уравнений и неравенств. Поскольку решениями неравенств обычно являются целые промежутки на числовой оси, то в этом случае рекомендуется запускать даже не один «меченый атом», а целый их «пучок», формируя его из разных «меченых» точек числовой оси.

2. (МГИЭТ-ТУ, 1995). Решите неравенство $x \leqslant \dfrac{2}{x-1}$.

«Решение.»

$$x \leqslant \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leqslant 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 1) \cup (1, 2].$$

Взяв не входящую в ответ и удовлетворяющую исходному неравенству «меченую» точку $x = -3$, обнаруживаем, что уже на первом шаге, при избавлении от знаменателя, произошла потеря решений. Полезно взять также и несколько других точек на числовой оси — как входящих, так и не входящих в полученный ответ, «близкие» и «далекие» числа. Они позволяют в какой-то мере проконтролировать, не упущены ли в решении другие промежутки и не вкрались ли в ответ посторонние числа. Решая неравенства, особое внимание нужно обращать на границы полученных в ответе промежутков — в этих точках либо должно достигаться равенство, либо обязана проходить граница области допустимых значений неравенства. Если нет ни того, ни другого, значит где-то допущена ошибка. Например, промежуток [2,4] не может быть признан решением неравенства $\sqrt{9 - 2x - x^2} \leqslant x$, поскольку в граничной точке $x = 2$ промежутка выражение в левой части неравенства равно 1, а в правой 2, и, кроме этого, значение $x = 2$ не ограничивает область допустимых значений неравенства.

2. Проверка на правдоподобие.

В процессе решения задачи не мешает иногда задавать себе вопросы: какого порядка число должно получиться в ответе? Правдоподобен ли полученный результат?

Одна из распространенных ошибок, порожденных невнимательностью, — потеря «неприметной» точки $\cdot$ — знака умножения. Так, например, произведение $2 \cdot \frac{1}{4}$ может «превратиться» в неправильную дробь $2\frac{1}{4}$. Но в первом случае мы имеем число, меньшее 1, а во втором — большее 2, поэтому и подавно $2 \cdot \frac{1}{4} < 2\frac{1}{4}$.

Предположим, решая уравнение $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$, получили ответ $x = 11$. Этот ответ явно ошибочен, ведь при $x = 11$ имеем $4^{\sqrt{12}} < 4^4 = 64 \cdot 4 < 64 \cdot 2^3 < 64 \cdot 2^{\sqrt{12}}$.

В задаче о нахождении площади S кругового сегмента высоты $h = 1$ *м* в круге радиуса $r = 2$ *м* получен ответ $S = 4{,}2$ *м*^{2}. Правдоподобен ли он? Нет, так как (см. рис.) $S < \frac{1}{4}S_{\text{круга}} \approx \frac{1}{4}\pi r^2 \approx 3$ [*м*^{2}].

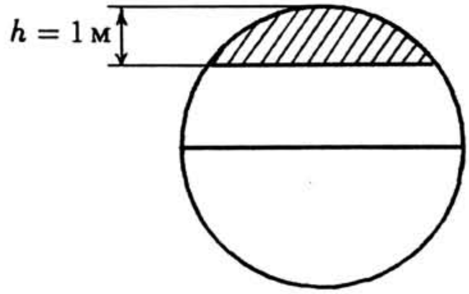


Рис. 5

Контроль на правдоподобие — более изысканный прием, чем подстановка частных значений, он требует определенных навыков и развитой интуиции.

Иногда неправдоподобный результат удается отсеять, проанализировав физические размерности величин: длину, площадь, объем, время, скорость и т. д. Если, скажем, для выражения объема вы вывели «формулу» $V = x^2 \cdot \frac{a}{b+c}$, где a, b, c, x — некоторые длины, измеряемые, скажем, в метрах, то, как нетрудно проверить, размерность величины V будет «метры квадратные» и, стало быть, для выражения объема полученная формула никак не годится.

3. Наблюдения за симметрией.

Как мы уже знаем (см. п. «Осторожно: соображения симметрии»), симметрия в условиях задачи должна влечь за собой симметрию ответа. Предположим, в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = \frac{7}{8}, \\ x^2 + y + z^2 = \frac{7}{8}, \\ x + y^2 + z^2 = \frac{7}{8} \end{cases}$$

получен ответ:

$$\left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{8}}{4}, \frac{-1+\sqrt{8}}{4}, \frac{-1+\sqrt{8}}{4} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{8}}{4}, \frac{-1-\sqrt{8}}{4}, \frac{-1-\sqrt{8}}{4} \right); \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Правильный ли этот ответ? Несмотря на то, что найденные значения неизвестных удовлетворяют исходной системе уравнений, правильным его назвать никак нельзя, поскольку он не полный. Замечаем, что вид исходной системы уравнений не изменится, если переменные x, y, z переставить местами, а ответ этим свойством не обладает. Следовательно, наряду с решением $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ он должен содержать по крайней мере еще два решения: $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

Советы общего плана

Совпадение вашего ответа с ответами соседей не гарантирует отсутствия в вашем решении ошибок.

Самые коварные ошибки — ошибки, маскирующиеся в тогу очевидности. Их легко допустить, но самостоятельно обнаружить бывает не так просто. Особенно трудно обнаружить ошибки их автору. Говорят: «ошибке не все равно, кто ее обнаружит».

При проверке своего решения наблюдается «эффект залипшего реле»: многократный проход в поисках ошибки по одной и той же схеме решения не привносит ничего нового по сравнению с однократным проходом. Ошибки лучше всего искать не по «горячим следам». Оставьте решение на время, переключите свое «реле» на другие задачи. Когда вы опять вернетесь к предыдущему решению, то это уже будет как бы взгляд «со стороны» и ошибка обнаружится сравнительно быстро.

При целенаправленном поиске ошибки желательно выкладки проделать заново и, по возможности, другим способом. Так, опытные бухгалтеры сумму чисел в таблице подсчитывают сначала по строкам, а затем по столбцам.

Полезные советы организаторов школьных математических олимпиад [9]:

«Если задача решилась слишком легко, то, скорее всего, вы не поняли условие или где-то ошиблись.

Решив задачу, сразу оформляйте решение. Это поможет проверить рассуждения и освободить мысли для других задач.

Каждый переход мысли надо формулировать, даже если он кажется очевидным».

Доказывая неравенство, абитуриент воскликнул: «Так это же известное неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим!» Экзаменатор про себя отметил эрудированность абитуриента, а вслух произнес: «Прекрасно! А теперь для полной гармонии попробуйте это доказать!».

Если вы используете формулу или теорему, которых нет в школьной программе, то будьте готовы их объяснить и доказать.

Часто в задачах содержатся «психологические ловушки» — правильное решение оказывается вовсе не там, куда уверенной поступью направляется интуиция. Особенно опасны «психологические ловушки» на устных экзаменах — они рассчитаны на ложные аналогии при не совсем твердых знаниях, на стремление отвечающих лихо щегольнуть уверенным ответом, на «залипание реле» на предыдущем ответе и на многие другие нюансы человеческой психики.

Лучшее средство от «психологических ловушек» — стратегия поведения в соответствии с поговоркой «семь раз подумай, один раз ответь». Помните также, что «опытную птицу на мякине не проведешь». «Нюх» на ошибку можно выработать, только достаточно практикуясь.

Что же делать, если досадный факт уже свершился, и вы, ошарашенный, беспомощно барахтаетесь в «ловушке»? Главное — не терять голову, ибо, поддавшись алармистским эмоциям, можно еще больше «наломать дров». Берите пример со спортсмена-биатлониста, который, набрав штрафные очки, по пути к финишу мобилизует свои внутренние резервы и очко за очком хладнокровно наверстывает упущенное. Помните: громоздкий результат в ответе должен насторожить. Наоборот, красивый и лаконичный — не должен убаюкать вашу бдительность.

Лучше ошибаться, подвергая сомнению правильное решение, чем допустить фатальную оплошность, принимая ложь за истину.

Здоровое сомнение не повредит. Возьмите на вооружение девиз контролеров на общественном транспорте: «мы доверяем, но мы проверяем!».

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Литцман. Где ошибка? М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит-ры, 1962, 192 с.

[2] 2. Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. К. Розов. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. М.: Наука, 1976, 640 с.

[3] И. И. Мельников, И. Н. Сергеев. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М.: МП Азбука, 1994, 352 с.

[4] А. В. Самусенко, В. В. Казаченок. Математика: типовые ошибки абитуриентов. Минск: Вышейшая школа, 1995.

[5] Е. Ирошников. Воспоминания ... о предстоящих экзаменах. /«Квант», 1976, № 9, с. 59—62.

[6] В. Матизен. Найдем ошибку. /«Квант», 1980, № 10, с. 43—46.

[7] Л. Штернберг. Контроль геометрических решений. /«Квант», 1995, № 4, с. 55—56.

[8] В. А. Гусев, А. Г. Мордкович «Математика. Справочные материалы. Книга для учащихся». М.: Просвещение, 1988, 416 с.

[9] Московские математические олимпиады 60 лет спустя. /Под ред. Ю. С. Ильяшенко и В. М. Тихомирова. — М.: Бюро «Квантум», 1995, с. 12—13.

[10] И.С.Григорьева. Такой простой знак равенства. /«Математика в школе», 2000, № 10, с.53-54.

Жуков Александр Владимирович,
кандидат технических наук,
преподаватель детского компьютерного клуба
sunshi@online.ru

Автор выражает благодарность преподавателю Новосибирского государственного университета Николаю Степановичу Астапову и его супруге Наталии Константиновне Ноланд за обсуждение материалов данной статьи и за ее набор в системе LaTex.

О некоторых свойствах точки Лемуана

А. Мякишев

Алексей Геннадьевич Мякишев — преподаватель математики в Московском Химическом Лицее, автор нашего журнала (№1(8) 1999 г., №4(11) 1999 г.). В настоящей статье изучаются экстремальные свойства одной из замечательных точек треугольника — точки Лемуана. Рассмотрен также ряд смежных задач. Частично, начиная с параграфа 5 (не включая "выхода на школьный уровень"), статья опубликована в американском электронном журнале "Forum Geometricorum", см. http://forumgeom.fau.edu/

1. Об одном доказательстве экстремального свойства точки Лемуана

Хорошо известны следующие две экстремальные задачи планиметрии:

1. *Среди всех точек в плоскости треугольника ABC найти такую, чтобы сумма квадратов расстояний от нее до вершин треугольника была бы минимальной*. Ответом является точка M — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC (см. [13], з. 640; [14], з. 81 а)).

2. *Среди всех точек в плоскости треугольника ABC найти такую, чтобы сумма квадратов расстояний от нее до сторон треугольника была бы минимальной*. В этом случае решением служит точка L — *точка Лемуана* треугольника ABC (см. [8], з. 11.22; [13], з. 665; [14], з. 81 б)).

Напомним, что точку Лемуана (Рис. 1) можно определять или как точку пересечения *симедиан* треугольника ABC (прямых, симметричных медианам треугольника относительно соответствующих биссектрис его углов) т.е. как точку, *изогонально* сопряженную точке пересечения медиан (см., напр., [8], стр. 121) или же как такую точку внутри треугольника, что прямая, проходящая через нее и вершину A делит отрезок BC в отношении c^2/b^2 (в числителе и знаменателе — квадраты длин соответствующих сторон треугольника), проходящая через B — отрезок CA в отношении a^2/c^2, через C — отрезок AB в отношении b^2/c^2 — иначе говоря, как точку, имеющую *барицентрические координаты* $(a^2; b^2; c^2)$ в базисе треугольника ABC (см. [3], [9], стр. 30).

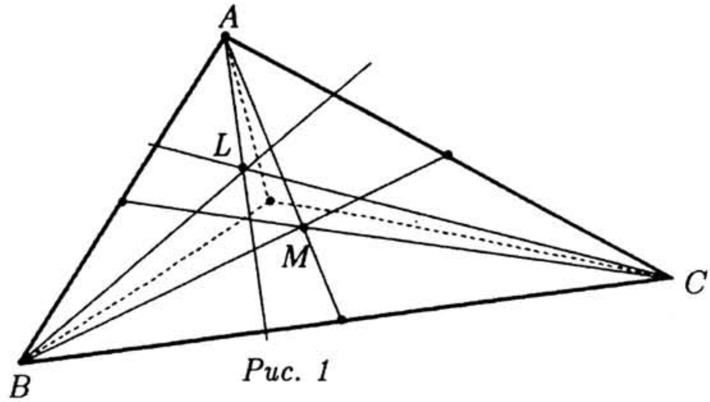


Рис. 1

Учитывая «родственность» обеих задач, а также тот факт, что точки M и L изогонально сопряжены, хотелось бы *найти такое доказательство второго утверждения, которое являлось бы непосредственным следствием первого.* Однако, заглянув в решения, приведенные в книжках [8], [13], [14], мы обнаружили, что если исходить из них, никакая связь между двумя задачами не прослеживается (или глубоко скрыта). Нам удалось отыскать доказательство, которое, как кажется, эту связь выявляет. Более того, используя идеи этого доказательства, удалось сформулировать и решить несколько интересных и содержательных, с нашей точки зрения, задач. Сначала мы приведем *вспомогательные утверждения*, на которых основаны последующие рассуждения.

1. Теорема Лагранжа

Напомним, что *моментом инерции относительно точки X для системы материальных точек $m_1A_1, \dots, m_nA_n$* называют выражение $J_X = \sum\limits_{i=1}^{n} XA_i^2 m_i$ (см. [3], [9] стр. 28). Оказывается, что если точка Z — центр масс нашей системы материальных точек (см. [3], [9] стр. 26), то справедливо соотношение

$$J_X = J_Z + (m_1 + \dots + m_n)\,XZ^2,$$

называемое теоремой Лагранжа (см. [9], з. 14.17).

2. Теорема Лагранжа для треугольника

Экстремальное свойство центра тяжести треугольника. С помощью теоремы Лагранжа первая задача (о нахождении точки, в которой достигается минимум сумм квадратов расстояний до вершин) решается мгновенно: действительно, рассмотрим систему $1A, 1B, 1C$ (центром масс которой является M — точка пересечения медиан: см. [2], з. 14.4) и произвольную точку X. Применив теорему Лагранжа, получим, что

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2$$

— в дальнейшем это соотношение мы будем называть *теоремой Лагранжа для треугольника*.

Очевидно, что сумма квадратов расстояний от точки до вершин, стоящая в левой части, не меньше аналогичной суммы, стоящей справа, причем равенство возможно лишь в случае совпадения обеих точек.

3. Векторное определение центра тяжести

Легко показать (см. [7]), что M является точкой пересечения медиан треугольника ABC тогда и только тогда, когда для любой точки X плоскости выполнено следующее векторное равенство:

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 3\overrightarrow{XM}.$$

Для этого достаточно воспользоваться тем, что M — центр тяжести, если и только если $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ (т.к. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ и т.д.). Далее представим $\overrightarrow{XA} = \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}$ и т.д., а затем сложим три этих равенства.

Заметим, что теорему Лагранжа для треугольника можно просто вывести с помощью векторов, используя свойства скалярного произведения — следует рассмотреть сумму

$$\left(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{XM} + \overrightarrow{MC}\right).$$

4. Теорема Якоби

Эта теорема (см. [3]; [9], з. 14.18) показывает, что момент инерции относительно точки Z — центра масс системы — может быть выражен специальным образом:

$$J_Z = \frac{1}{M}\sum_{i<j} m_i m_j A_i A_j^2,$$

где M — суммарная масса всей системы.

5. Одно свойство педального треугольника

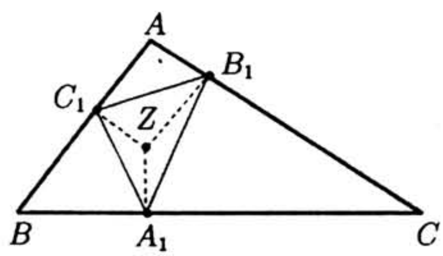


Рис. 2

Как обычно, педальным треугольником для данного треугольника ABC относительно точки Z назовем треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями высот, опущенных из точки на стороны (или их продолжения) треугольника — при этом $A_1 \in BC$ и т.д. (Если Z лежит на описанной около исходного треугольника окружности, то педальный треугольник вырождается в прямую — т.н. *прямую Симпсона*: см. [8], з. 5.85). Нам понадобится следующее его свойство:

Точка Z является центром тяжести своего педального треугольника тогда и только тогда, когда она совпадает с точкой Лемуана исходного треугольника.

Из этой теоремы следует, что точку Лемуана можно определить как точку, которая является центром тяжести своего педального треугольника. Доказательство в одну сторону можно найти, например, в [8] (см. з. 5.132). Мы же воспользуемся формулой для барицентрических координат точки Z в базисе своего педального треугольника, если известны длины сторон исходного треугольника и координаты точки относительно него: $Z_{A_1B_1C_1} = \left(\frac{a^2}{x}; \frac{b^2}{y}; \frac{c^2}{z}\right)$. Из нее вытекает справедливость как прямого, так и обратного утверждения.

6. Барицентрические координаты в базисе педального треугольника

Не ограничивая общности, будем считать точку Z *внутренней* точкой треугольника (другими словами, рассмотрим случай, когда координаты положительны). Обозначим длины перпендикуляров, опущенных из точки Z на стороны треугольника ABC как h_1, h_2, h_3 (где, например, h_1 — перпендикуляр на BC и т.д.) и вспомним, что барицентрические координаты можно вычислять как площади соответствующих треугольников (см. [3], [9]). Поэтому можно считать (с точностью до умножения на некоторую ненулевую константу — барицентрические координаты обладают свойством *однородности*), что $x = a \cdot h_1; y = b \cdot h_2; z = c \cdot h_3$. С другой стороны, вычисляя координаты точки Z в базисе педального треугольника также как площади, но по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними» (с учетом того, что $\sin \angle C_1ZB_1 = \sin(\pi - A) = \sin A$ и т.д.), получим, что $x_1 = h_2h_3 \sin A$; $y_1 = h_1h_3 \sin B$; $z_1 = h_1h_2 \sin C$. Умножим и разделим первую координату на h_1, вторую — на h_2, третью — на h_3, а затем сократим все три на произведение расстояний. Получим, что

$$x_1 = \frac{\sin A}{h_1}; y_1 = \frac{\sin B}{h_2}; z_1 = \frac{\sin C}{h_3}.$$

Заменим перпендикуляры на координаты точки в базисе ABC, и воспользуемся тем, что по теореме синусов (и однородности) длины сторон можно заменить синусами соответствующих углов.

7. Принцип Вейерштрасса

Любая непрерывная функция $F: R^n \to R^1$, определенная на каком-либо ограниченном замкнутом множестве (в частности, на всяком замкнутом шаре), достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значения. В [12] дается вполне строгое доказательство для функций одной переменной, а общий случай рассматривается в любом приличном учебнике по математическому анализу.

8. Доказательство экстремального свойства точки Лемуана

Для любой точки плоскости Z рассмотрим функцию $F(Z) = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ (где, к примеру, h_1 — расстояние от точки Z до стороны BC данного треугольника). Очевидно, что она является *непрерывным* отображением плоскости в прямую — поскольку ясно, что *близким* точкам плоскости соответствуют *близкие же* значения сумм квадратов (настолько ясно, что, думается, нет никакой надобности прибегать к $\varepsilon - \delta$ формализму). Допустим, удалось показать, что если некоторая точка Z_0 *отлична* от точки Лемуана L (т.е., $Z_0 \neq L$), то найдется некоторая точка Z_1, такая, что $F(Z_1) < F(Z_0)$. Тогда отсюда все сразу следует: действительно, рассмотрим круг (вместе с границей) достаточно большого радиуса, содержащий треугольник ABC. Согласно 4, функция F должна достигать на нем в какой-то точке своего минимального значения, и, если предыдущее утверждение верно, этой точкой может являться лишь только точка Лемуана (т.к. для всех других значение функции можно понизить; при достаточно большом радиусе круга значения

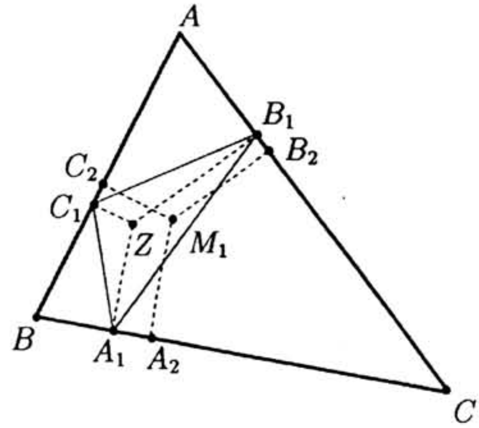


Рис. 3

функции *вне* круга явно превосходят ее значения, например, во внутренних точках исходного треугольника — отметим, что нам совершенно не важно для доказательства, можно или нет понизить значение в самой точке Лемуана). Далее остается устремить радиус круга к бесконечности.

Обоснуем теперь ключевое положение *об уменьшении значений функции* F.

Итак, рассмотрим произвольную точку $Z_0 \neq L$ и опустим из нее перпендикуляры на стороны треугольника ABC. Получим педальный треугольник $A_1B_1C_1$ относительно точки Z_0. Пусть Z_1 — центр тяжести этого треугольника (если точка Z_0 оказалась на описанной окружности, и треугольник вырождается в отрезок, то, как и в общем случае, Z_1 — центр масс системы точек A_1, B_1, C_1, нагруженных единичными массами). В силу 3, $Z_1 \neq Z_0$, и тогда, по свойству 2,

$$F(Z_0) = Z_0A_1^2 + Z_0B_1^2 + Z_0C_1^2 > Z_1A_1^2 + Z_1B_1^2 + Z_1C_1^2.$$

Если все три отрезка, проведенные из Z_1 к вершинам педального треугольника, окажутся перпендикулярны сторонам исходного треугольника, это будет означать, что в правой части неравенства стоит просто $F(Z_1)$. Если же нет, то опустим из точки Z_1 перпендикуляры к сторонам изначального треугольника, получив три точки A_2, B_2, C_2. С одной стороны, $Z_1A_2 \leqslant Z_1A_1$ и т.д., причем одно из этих неравенств *строгое* (поскольку катет прямоугольного треугольника всегда меньше гипотенузы), и, следовательно,

$$Z_1A_1^2 + Z_1B_1^2 + Z_1C_1^2 > Z_1A_2^2 + Z_1B_2^2 + Z_1C_2^2,$$

а с другой — выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, есть просто $F(Z_1)$. Воспользовавшись транзитивностью отношения «>», получим, что $F(Z_0) > F(Z_1)$.

2. О двух ГМТ, связанных с суммой квадратов расстояний

1. ГМТ, связанное с суммой квадратов расстояний до вершин треугольника

Рассмотрим следующую задачу:

На плоскости задан треугольник ABC. Найти ГМТ X, таких что

$$AX^2 + BX^2 + CX^2 = d,$$

где d — некоторая положительная константа.

Это — хорошо известная задача (см. [5]). Воспользовавшись теоремой Лагранжа для треугольника, сразу получим, что $3XM^2 = d - (MA^2 + MB^2 + MC^2)$, где M — точка пересечения медиан исходного треугольника. Выражение в скобках, конечно, также есть константа (обозначим ее m), которую легко выразить через длины сторон треугольника. Например, по теореме Якоби (для системы $1A; 1B; 1C$ с центром тяжести в M) имеем: $m = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ (можно было вместо теоремы Якоби воспользоваться формулой, выражающей медианы через стороны). Таким образом, $XM^2 = \frac{d-m}{3}$, и ответ у этой задачи такой:

если $d < m$, то искомое ГМТ есть пустое множество;

если $d = m$, то ГМТ состоит из одной точки — центра тяжести треугольника;

если же $d > m$, то имеем окружность с центром в M радиуса $\sqrt{\frac{d-m}{3}}$

2. ГМТ, связанное с суммой квадратов расстояний до сторон треугольника (или их продолжений)

Теперь попробуем отыскать ГМТ с постоянной суммой квадратов до сторон треугольника. Пусть h_a — расстояние от точки X до стороны (или ее продолжения) треугольника и т.д. Спрашивается, какое множество точек будет удовлетворять условию $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = d$. (В обозначениях первого параграфа, множество точек X, таких что $F(X) = d$.) Пусть $F(L) = l$. Ясно, что если $d < l$, то решением будет пустое множество, а в случае $d = l$ получим точку Лемуана L. Прежде чем перейти к наиболее интересному случаю, выразим l через длины сторон исходного треугольника (удобно еще ввести R — радиус описанной окружности).

Вернемся к рисунку 2. Пусть $C_1B_1 = a_1$ и т.д. Из предыдущей задачи следует, что $l = \frac{a_1^2+b_1^2+c_1^2}{3}$. Поскольку около четырехугольника AC_1B_1L можно описать окружность (и ее диаметр равен AL), то, по теореме синусов, примененной к треугольнику AC_1B_1, $a_1 = AL \cdot \sin\angle A$. Применив снова теорему синусов, но к треугольнику ABC, получим, что $a_1 = \frac{a \cdot AL}{2R}$. Точно так же можно выразить и две другие стороны педального треугольника. Следовательно,

$$l = \frac{1}{12R^2}\left(a^2 \cdot AL^2 + b^2 \cdot BL^2 + c^2 \cdot CL^2\right).$$

Выражение в скобках есть момент инерции для системы $a^2A; b^2B; c^2C$ относительно ее центра масс L, т.е. $l = \frac{J_L}{12R^2}$. По теореме Якоби, $J_L = 3\frac{a^2b^2c^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Вернемся к случаю $d > l$ и проведем дальнейшие вычисления в *трилинейных координатах*. (Напомним, что трилинейными координатами точки относительно треугольника ABC называют тройку чисел, образованную расстояниями от этой точки до сторон треугольника, взятую с точностью до множителя. При этом, если точка расположена вне треугольника, одно из расстояний нужно брать со знаком «минус». Подробнее о трилинейных координатах можно прочитать в [6]; [7].) Итак, пусть точка X имеет трилинейные координаты $(p; q; r)$ относительно исходного треугольника ABC. Это означает, что существует некоторое число $k \neq 0$, такое, что расстояния до сторон треугольника равны, соответственно, $kp; kq; kr$. Это число можно найти из условия $k(ap + bq + cr) = 2S_{ABC}$, рассмотрев сумму (а в случае внешней точки — и разность) площадей соответствующих треугольников. Тогда нам нужно найти ГМТ точек, трилинейые координаты которых удовлетворяют условию:

$$k^2\left(p^2 + q^2 + r^2\right) = l, \quad \text{или} \quad p^2 + q^2 + r^2 = t\,(ap + bq + cr)^2,$$

где $t = \frac{l}{4S^2}$. Последнее равенство приводится к виду:

$$\left(ta^2 - 1\right)p^2 + \left(tb^2 - 1\right)q^2 + \left(tc^2 - 1\right)r^2 + (2tbc)qr + (2tac)\,pr + (2tab)\,pq = 0.$$

Последнее уравнение, согласно [6], является уравнением некоторой *коники* в трилинейных координатах. Точнее, пусть некоторое множество точек удовлетворяет уравнению

$$up^2 + vq^2 + wr^2 + 2fpq + 2gpr + 2hpa = 0,$$

и

$$U = vw - f^2; V = wu - g^2; \quad W = uv - h^2; F = gh - uf; \quad G = hf - vg; H = fg - wh,$$

и

$$\Phi = Ua^2 + Vb^2 + Wc^2 + 2Fbc + 2Gac + 2Hab.$$

Тогда:

$\Phi > 0$ соответствует уравнению *эллипса*;

$\Phi < 0$ соответствует уравнению *гиперболы*;

$\Phi = 0$ соответствует уравнению *параболы*.

В нашем случае

$$U = \left(tb^2 - 1\right)\left(tc^2 - 1\right) - t^2b^2c^2 = 1 - t\left(b^2 + c^2\right);$$
$$V = 1 - t\left(a^2 + c^2\right); W = 1 - t\left(a^2 + b^2\right);$$
$$F = t^2a^2cb - \left(ta^2 - 1\right)tbc = tbc; G = tac; H = tab.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi \;&=\; \left(1 - t\left(b^2 + c^2\right)\right)a^2 + \left(1 - t\left(a^2 + c^2\right)\right)b^2 + \\ +\;& \left(1 - t\left(a^2 + b^2\right)\right)c^2 + 2t\left(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2\right) = \end{aligned}$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + t\left(2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - \left(b^2 + c^2\right)a^2 - \left(a^2 + c^2\right)b^2 - \left(a^2 + b^2\right)c^2\right).$$

Очевидно, что множитель при t обращается в нуль, поэтому искомое геометрическое место точек есть эллипс.

3. О последовательности точек, сходящихся к точке Лемуана

Метод, которым было доказано ключевое утверждение первого параграфа, естественным образом ведет к следующей гипотезе:

Пусть на плоскости фиксирован некоторый треугольник ABC. Выберем произвольным образом какую-нибудь точку Z_0 плоскости и рассмотрим педальный треугольник $A_1B_1C_1$ относительно нее. Обозначим через Z_1 центр тяжести этого треугольника. Затем рассмотрим педальный треугольник (опять-таки к исходному) относительно точки Z_1. В свою очередь, Z_2 — его центр тяжести. И т.д. Получим последовательность точек $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$. Оказывается, вне зависимости от выбора начальной точки, она всегда будет сходиться к точке Лемуана L исходного треугольника: $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = L$ (сходимость понимается, конечно, в смысле обычной евклидовой метрики на плоскости).

Для доказательства рассмотрим отображение $\Phi : R^2 \to R^2$, которое каждой точке плоскости ставит в соответствие центр тяжести педального треугольника, соответствующего этой точке. (И назовем его *преобразованием Лемуана*.) Понятно, что это отображение является *непрерывным* (т.к. соседние точки переводит в соседние). Тогда последовательность, описанная выше, в терминах функции Φ предстанет в виде

$$\left\{Z_0, \Phi(Z_0),\ \Phi(\Phi(Z_0)) = \Phi^2(Z_0),\ \Phi^3(Z_0), \ldots\right\}.$$

Оказывается, достаточно показать, что всякая такая последовательность *сходится*, а отсюда немедленно будет следовать, что сходиться она будет именно к *точке Лемуана*, вне зависимости от выбора начальной точки. И в самом деле, предположим, что сходимость установлена и $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = Z$. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^n(Z_0) = Z \Rightarrow \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \Phi^n(Z_0)\right) = \Phi(Z).$$

Следовательно, в силу непрерывности функции Φ,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^{n+1}(Z_0) = \Phi(Z); \Rightarrow Z = \Phi(Z),$$

т.е., что точка Z есть *неподвижная точка* отображения Лемуана. Но в первом параграфе фактически было показано, что у этого отображения имеется *только одна* неподвижная точка, а именно точка Лемуана L. Более того, если вдуматься в ситуацию и немного развить эту мысль, то станет ясно, что все упирается в доказательство того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} |Z_nZ_{n+1}| = 0$, и вот почему. Очевидно, что последовательность $\{Z_n\}$ является ограниченной (уже на первом шаге можно выбрать *очень* большой круг, *вне* которого сумма расстояний от любой точки до сторон треугольника *больше* начальной, а последовательность устроена так, что эти суммы для ее элементов убывают). Тогда, согласно теореме *Больцано-Вейерштрасса*, она имеет какие-то предельные точки, и можно построить подпоследовательности, к ним сходящиеся. Если любая сходящаяся подпоследовательность будет иметь один и тот же предел, то исходная последовательность будет иметь лишь одну предельную точку, к которой и будет сходиться. Выберем какую-нибудь сходящуюся подпоследовательность и применим к ней описанный выше трюк. В предположении стремления к нулю расстояний между соседними точками он также пройдет, т.к. при больших значениях n $Z_{n+1} = \Phi(Z_n)$ сколь угодно близка к точке Z_n и потому

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^{n_k}(Z_0) = \lim_{k\to\infty} \Phi^{n_k+1}(Z_0).$$

Наконец, разберемся с сходимостью к нулю расстояний между соседними точками. Вернемся для этого к доказательству ключевого утверждения об уменьшении значений функции F (чтобы не писать заново одно и то же). Первую сумму квадратов обозначим H_1 , вторую — L_1 , третью — H_2, и, далее, по аналогии, продолжая строить педальные треугольники и выбирать в них центры тяжести, соответствующие суммы квадратов последовательно будем обозначать L_2, H_3, $L_3, \ldots$ и т.д.

Пусть, далее, $3\,|Z_0Z_1|^2 = r_1; 3\,|Z_1Z_2|^2 = r_2; \ldots$ и т.д. Также будем считать, что точки нашей последовательности ни на каком шаге не попадут в точку Лемуана, т.к. тогда процесс стабилизируется в ней и доказывать станет нечего. Применяя затем многократно теорему Лагранжа для треугольника и переход от одного неравенства к другому, как в доказательстве ключевого утверждения, в новых обозначениях будем иметь: $H_1 = L_1+r_1$; $H_2 < L_1$; $H_2 = L_2+r_2$; $H_3 < L_2$ и т.д., причем все величины, входящие в неравенства и равенства, положительны. Из этих условий, легко получить, что $H_1 > L_1 > H_2 > L_2 > \cdots$, что означает, в силу теоремы Вейерштрасса о сходимости убывающих ограниченных снизу последовательностей (в данном случае — нулем), сходимость обеих последовательностей $\{H_n\}$; $\{L_n\}$, причем к одному и тому же пределу (пределу *всей* последовательности). Тогда

$$r_i = H_i - L_i \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} H_n - \lim_{n\to\infty} L_n = 0.$$

4. О некоторых других последовательностях, сходящихся к замечательным точкам

1. Еще одна последовательность, сходящаяся к точке Лемуана

Известно, что если мы опишем около треугольника ABC окружность, проведем из вершин его прямые через точку Лемуана до пересечения с описанной окружностью в точках A_1, B_1, C_1, то точка Лемуана треугольника, образованного точками пересечения прямых с окружностью, совпадает с точкой Лемуана исходного треугольника (см. [8], з. 5.134). Из предыдущей теоремы следует, что если мы в описанной выше конструкции станем опускать перпендикуляры на стороны треугольника A_1, B_1, C_1, и т.д. — то опять получим последовательность, сходящуюся к точке Лемуана исходного треугольника.

2. Последовательность, сходящаяся к центру тяжести

Если некоторую точку Z соединить отрезками с вершинами треугольника ABC, затем провести через вершины отрезка прямые, перпендикулярные этим отрезкам, то треугольник, образованный точками пересечения прямых называют *антипедальным* треугольником точки Z. Рассмотрим антипедальный треугольник

$A_1B_1C_1$ точки M — центра тяжести треугольника ABC. Понятно, что треугольник ABC является педальным *относительно* треугольника $A_1B_1C_1$ и потому точка M превращается в точку Лемуана L для треугольника $A_1B_1C_1$.

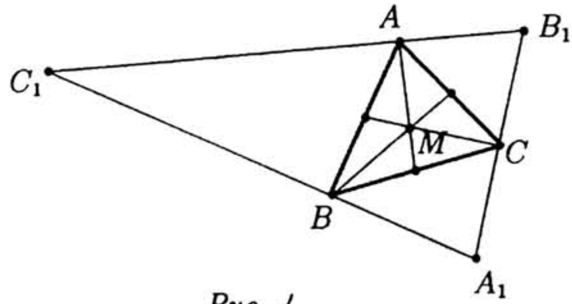


Рис. 4

Значит, последовательности, образованные центрами тяжестей педальных треугольников *антипедального треугольника точки M* будут сходиться к центру тяжести M треугольника ABC.

3. Последовательности, сходящиеся к точкам Жергонна

Точкой *Жергонна* называют точку пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности. Несложно показать, что она имеет барицентрические координаты $G = \left(\tan\frac{A}{2}; \tan\frac{B}{2}; \tan\frac{C}{2}\right)$. *Треугольником Жергонна* называют треугольник, образованный точками касания вписанной окружности. Очевидно, что $\angle A_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)$ и т.д. (поскольку около четырехугольников типа BC_1A_1I можно описать окружность)

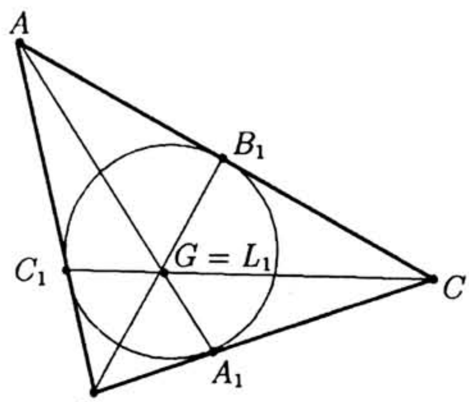


Рис. 5

Оказывается, *точка Жергонна исходного треугольника является точкой Лемуана его треугольника Жергонна.* (В [5] дано геометрическое обоснование этому факту. Ниже мы приведем доказательство, основанное на геометрии масс.) Поэтому, чтобы построить последовательность, сходящуюся к точке Жергонна, в нашей конструкции нужно опускать перпендикуляры на стороны треугольника Жергонна.

Заметим, что рассмотрев вместо вписанной окружности *вневписанную*, мы получим *добавочную точку Жергонна* (т.к. вневписанных окружностей всего три, то имеем целых три точки и три треугольника!) и *добавочный треугольник Жергонна.* Для них можно сформулировать аналогичное утверждение. Покажем, что точка Жергонна действительно является точкой Лемуана треугольника Жергонна.

Лемма о переходе. Пусть прямые AA_1, BB_1 , CC_1 пересекаются в точке Z, а точка Z_1 имеет в базисе $A_1B_1C_{1_{ABC,Z}}$ координаты (x, y, z), а точка Z имеет в базисе ABC координаты (p, q, r). Тогда в базисе $ABCZ_1$ будет иметь координаты:

$$Z_1 = \left(p\left(\frac{y}{p+r}+\frac{z}{p+q}\right); q\left(\frac{x}{q+r}+\frac{z}{p+q}\right); r\left(\frac{x}{q+r}+\frac{y}{p+r}\right)\right).$$

Доказательство несложно. Нужно «растащить» массы x, y, z, сосредоточенные в вершинах $A_1B_1C_1$ по вершинам основного треугольника таким образом, чтобы центр масс этой системы (т.е. точка Z_1) не изменился. Например, массу x в вершине A_1 следует разбить на такие массы x_1, x_2 в вершинах B и C соответственно, чтобы $x_1 + x_2 = x; \frac{x_1}{x_2} = \frac{q}{r}$, откуда получим, что $x_1 = \frac{qx}{q+r}$; $x_2 = \frac{rx}{q+r}$ и т.д. *Точка Лемуана треугольника Жергонна является точкой Жергонна исходного треугольника.* Поскольку координаты и точки Лемуана и точки Жергонна известны, и известны также углы треугольника Жергонна, то, в данном случае, $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$ и т.д. и $p = \tan\frac{A}{2}$ и т.д. Согласно лемме, нужно показать, что

$$\tan\frac{A}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}\right) = \tan\frac{A}{2}$$

и т.д. (с точностью до умножения на постоянный множитель). Но

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

и т.д.

$$\Rightarrow\left(\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}\right) = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

5. Об орбитах точек при преобразовании Лемуана

1. Физическая интерпретация задачи о сходимости

Доказав, что рассмотренные в пункте третьем последовательности действительно сходятся к точке Лемуана, автор задумался над тем, насколько неординарным является этот факт. Что будет, например, если взять вместо точек M и L «родственную» пару H (точка пересечения высот) и O (центр описанной окружности)? В самом деле, H и O изогонально сопряжены (точно также, как и M, L), а педальный треугольник точки O является серединным, и в нем, как легко видеть, O будет играть роль ортоцентра H (аналогично, L для своего педального треугольника превращается в M) — поэтому пары $(M; L)$ и $(H; O)$, на первый взгляд, просто *близнецы* в смысле задачи о сходимости точек, связанных с педальным треугольником.

Но, составив нехитрую программу, автор сразу убедился, что аналогии здесь весьма поверхностные. Как показал компьютер, последовательности, в которых вместо центров тяжести педальных треугольников берутся их ортоцентры, совсем даже и не стремятся к точке O, а *расходятся*. Более того, незначительное отклонение начальной точки от «стационарной» точки O сильно влияет на вид последовательности — т.е. возникает ситуация как бы *неустойчивого равновесия* или *системы с детерминическим хаосом* (подробнее о явлениях такого рода можно прочитать в увлекательной книге [10], где они разобраны на хорошем качественном уровне).

С другой стороны, компьютер подтвердил теоретический прогноз о сходимости центров тяжестей педальных треугольников к точке Лемуана — на экране монитора можно было отчетливо это видеть, причем, вне зависимости от выбора начальной точки, после семи-восьми итераций элементы последовательности и точка Лемуана становились практически неразличимы.

Созерцая эти «веселые картинки», автор чисто экспериментальным путем обнаружил, что орбиты точек при преобразовании Лемуана (т.е. точек типа $Z_0, \Phi(Z_0)$, $\Phi^2(Z_0), \ldots$ и т.д.) лежат на неких *гладких кривых*. Естественно, ему захотелось определить точный вид этих кривых.

Коль скоро в описанных выше ситуациях точка O как бы «отталкивает» от себя элементы последовательности, а точка L «притягивает» их, возникла мысль отыскать *физическую модель, связанную с последовательностями, сходящимися к точке Лемуана*.

Немного поразмыслив, автор пришел к выводу, что уместным здесь представляется исследовать *поведение грузика, соединенного пружинами с тремя бесконечными стержнями, образующими в пересечении треугольник*. Дадим точную формулировку.

Пусть на плоскости фиксирован треугольник ABC. Рассмотрим следующее поле сил: пусть на груз единичной массы, помещенный в произвольную точку плоскости, действует сила, равная сумме векторов, выходящих из этой точки перпендикулярно сторонам треугольника и с концами на его сторонах (или их продолжениях), рис. 6.

По *векторному определению центра тяжести* (см. первый параграф, *вспомогательные утверждения*) результирующий вектор пройдет через центр тяжести педального треугольника.

Кроме того, точка Лемуана L исходного треугольника будет *единственной особой точкой* построенного поля сил (или *положением равновесия*) — т.е. точкой, в которой вектор силы *равен нулю* (поскольку точка Лемуана есть центр тяжести своего педального треугольника, и точка с таким свойством единственна). Последнее свойство дает нам полное право назвать это поле сил *полем Лемуана* (и было бы непоследовательно назвать его как-нибудь иначе или оставить без имени). Теперь нужно составить уравнение движения материальной точки в поле Лемуана, решить его и определить траектории движения.

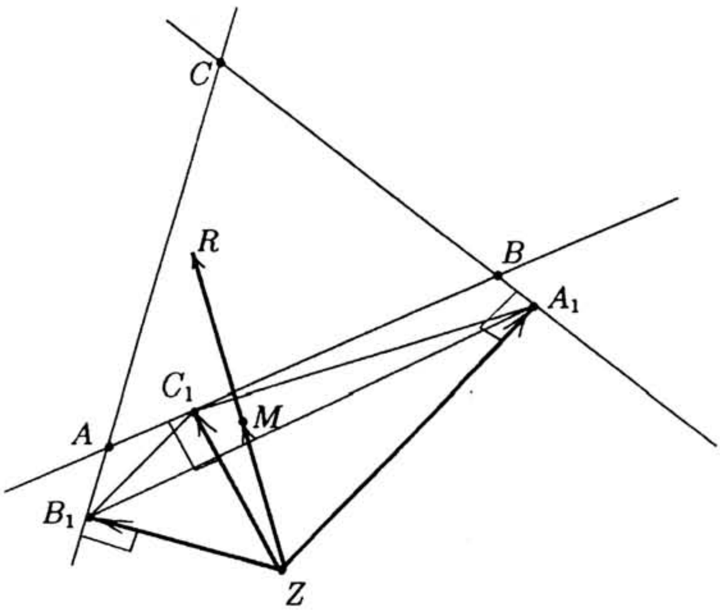


Рис. 6

Забегая вперед, отметим, что в общем случае произвольного треугольника эти траектории не будут совпадать с кривыми, на которых лежат искомые орбиты. Однако с помощью самого уравнения движения, как выяснится, уравнения кривых находятся совсем просто.

2. Уравнение движения материальной точки в поле Лемуана (уравнение Лемуана)

Введем стандартную прямоугольную систему координат, поместив ее начало в вершину треугольника и направив одну из осей вдоль стороны треугольника. (Эта система — далеко не лучшая для нашей задачи, но нужно же с чего-то начинать.)

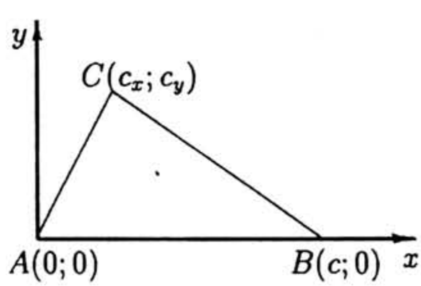


Рис. 7

Итак, пусть вершины треугольника имеют координаты $A(0;0), B(c;0), C(c_x;c_y)$, а некоторая точка плоскости — $Z\,(x;y)$.

Несложно показать, что если известно уравнение прямой $Px+Qy+R=0$, то вектор $\overrightarrow{H}$, соединяющий точку Z с ее проекцией на эту прямую, имеет следующие координаты:

$$\begin{cases} h_x = -\frac{P}{P^2+Q^2}\,(Px+Qy+R); \\ h_y = -\frac{Q}{P^2+Q^2}\,(Px+Qy+R). \end{cases}$$

Обозначим векторы с началом в точке Z и с концами в проекциях этой точки на прямые, проходящие через стороны треугольника AB, AC и BC , как $\overrightarrow{H_c}$; $\overrightarrow{H_b}$; $\overrightarrow{H_a}$ соответственно. Тогда вектор $\overrightarrow{F_Z} = \overrightarrow{H_c} + \overrightarrow{H_b} + \overrightarrow{H_a}$ и есть вектор исследуемого поля сил, приложенный к точке Z. Простым подсчетом получим, что:

$$\begin{cases} h_{c_x} = 0; \\ h_{c_y} = -y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{b_x} = \frac{-c_y}{c_x^2+c_y^2}\left(c_y x - c_x y\right); \\ h_{b_y} = \frac{c_x}{c_x^2+c_y^2}\left(c_y x - c_x y\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{a_x} = \frac{-c_y}{c_y^2+(b-c_x)^2}\left(c_y x + y\left(c - c_x\right) - c c_y\right); \\ h_{a_y} = \frac{c_x-b}{c_y^2+(b-c_x)^2}\left(c_y x + y\left(c - c_x\right) - c c_y\right); \end{cases}$$

Введем, далее, обозначения:
$\alpha = \frac{c_y^2}{c_x^2+c_y^2} + \frac{c_y^2}{c_y^2+(b-c_x)^2}$;
$\beta = -\frac{c_y c_x}{c_x^2+c_y^2} + \frac{c_y(c-c_x)}{c_y^2+(c-c_x)^2}$;
$\gamma = 1 + \frac{c_x^2}{c_x^2+c_y^2} + \frac{(c-c_x)^2}{c_y^2+(c-c_x)^2}$;
$d_x = \frac{c c_y^2}{c_y^2+(c-c_x)^2}$; $d_y = \frac{c c_y(c-c_x)}{c_y^2+(c-c_x)^2}$.
Тогда компоненты вектора $\overrightarrow{F_Z}$ имеют вид:

$$F_x = -(\alpha x + \beta y) + d_x; \quad F_y = -(\beta x + \gamma y) + d_y.$$

Согласно закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе. Таким образом, считая массу точки единичной, мы получили *уравнение движения в поле сил Лемуана*:

$$x'' = -(\alpha x + \beta y) + d_x; \quad y'' = -(\beta x + \gamma y) + d_y.$$

Параллельным переносом начала координат в положение равновесия (т.е. в точку Лемуана) — см. [1]; [2] — это уравнение приводится к виду:

$$x'' = -(\alpha x + \beta y); \quad y'' = -(\beta x + \gamma y),$$

или, в матричной форме,

$$\overrightarrow{r}'' = -A\overrightarrow{r}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{r}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

Такие уравнения относятся к типу *уравнений малых колебаний вблизи положения равновесия* (см. [1]; [2]).

3. Собственные значения

Для того, чтобы решить наше уравнение, сначала следует найти *собственные значения* матрицы A (см. [1]; [2]), т.е. решить уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \lambda)(\gamma - \lambda) - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \left(\alpha\gamma - \beta^2\right) = 0.$$

Пусть корни этого уравнения λ_1; λ_2. Тогда справедливо следующее утверждение:

Теорема о сумме собственных значений уравнения Лемуана: $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$.

В самом деле, по теореме Виета,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha + \gamma = 1 + \left(\frac{c_x^2 + c_y^2}{c_x^2 + c_y^2}\right) + \left(\frac{c_y^2 + (c - c_x)^2}{c_y^2 + (c - c_x)^2}\right) = 3.$$

Упражнение (теорема о невырожденности матрицы А). Покажите, что

$$\det A = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{c_y^2}{a^2 b^2}(a^2 + b^2 + c^2) > 0 \text{ (где } a = BC;\ b = AC;\ c = AB);$$

Найдем теперь *дискриминант характеристического уравнения*:

$$D = (\alpha + \gamma)^2 - 4\left(\alpha\gamma - \beta^2\right).$$

С одной стороны, $D = 9 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)$; С другой же —

$$D = \alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2 - 4\alpha\gamma + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geqslant 0.$$

4. Случай одинаковых собственных значений: $D = 0$.

В этом случае, очевидно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$ и должна выполняться система:

$$\begin{cases} \beta = 0; \\ \alpha = \gamma; \end{cases}$$

Введем обозначения: $c_x = m; c_y = n; c - c_x = p$. В этих обозначениях первое уравнение перепишется в виде

$$\frac{m}{m^2 + n^2} = \frac{p}{p^2 + n^2} \Leftrightarrow m\left(p^2 + n^2\right) = p\left(m^2 + n^2\right) \Leftrightarrow (m - p)\left(mp - n^2\right) = 0;$$

а второе, после несложных преобразований (проверьте!) — в виде

$$n^4 - n^2\left(m^2 + p^2\right) - 3m^2p^2 = 0.$$

В случае $m = p$ имеем $n^4 - 2n^2m^2 - 3m^4 \Leftrightarrow n = \sqrt{3}m = \sqrt{3}p$, т.е. $c_y = \sqrt{3}c_x$; $b = 2c_x$ что, очевидно, соответствует *правильному* треугольнику. В другом же случае система не имеет решений (проверьте!). Поэтому мы доказали следующий факт:

Равенство собственных значений означает правильность исходного треугольника ABC.

Упражнение: Покажите, что система

$$\begin{cases} \beta = 0; \\ \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

соответствует случаю *прямоугольного* или *равнобедренного треугольника с вершиной* C.

5. Случай различных собственных значений: $D > 0$.

Имеем $\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{D}}{2}$. Понятно, что корень со знаком «плюс» — положительный. Покажем, что и другой корень больше нуля.

$$3 > \sqrt{D} \Leftrightarrow 9 > D \Leftrightarrow 9 > 9 - 4\left(\alpha\gamma - \beta^2\right) > 0 \Leftrightarrow \det A > 0.$$

Последнее неравенство, как мы уже выяснили, действительно выполняется. Поэтому справедливо утверждение:

Собственные значения нашего уравнения всегда положительны.

Покажем, что для *прямоугольного* треугольника $\lambda_1 = \alpha = 1; \lambda_2 = \gamma = 2$. Действительно, в этом случае $\beta = 0$; $a^2 + b^2 = c^2$ (где $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$); и характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma = 0. \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha;\ \gamma.$$

Далее,

$$\alpha\gamma = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{c_y^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2 + c^2) = 2\frac{c_y^2c^2}{a^2b^2};$$
$$\alpha = \frac{c_y^2}{b^2} + \frac{c_y^2}{a^2} = \frac{c_y^2\left(a^2 + b^2\right)}{a^2b^2} = \frac{c_y^2c^2}{a^2b^2}.$$

Разделив первое равенство на второе, получим $\frac{\alpha\gamma}{\alpha} = \gamma = 2$. Так как $\alpha + \gamma = 3$, то $\alpha = 1$.

6. Решение уравнения Лемуана

Согласно [1], [2], некоторым *поворотом* системы координат относительно ее начала — точки Лемуана, уравнение можно привести к виду:

$$\begin{cases} x'' = -\lambda_1 x; \\ y'' = -\lambda_2 y, \end{cases} \quad \text{где } \lambda_{1,2} > 0 \text{ — собственные числа матрицы} A.$$

Оси такой системы координат называют *главными осями* уравнения малых колебаний.

Заметим, что в случае *равнобедренного* или *прямоугольного* треугольника (т.е $\begin{cases} \beta = 0; \\ \alpha \neq \gamma; \end{cases}$) мы получаем уравнение в главных осях одним лишь сдвигом начальной системы координат в точку Лемуана (без поворота!), которая, очевидно, расположена на высоте треугольника. Это означает, что в данной ситуации одна главная ось совпадает с высотой треугольника, опущенной из вершины (равнобедренного треугольника либо прямого угла), а вторая — параллельна стороне (основанию равнобедренного треугольника либо гипотенузе). Более того, так как в прямоугольном треугольнике точка Лемуана лежит на *середине* высоты, опущенной из вершины прямого угла (см. [8], з.5.130), то в таком треугольнике ось, перпендикулярная высоте, будет проходить через ее середину.

В главных осях уравнение легко решается:

$$x = C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_2 t; \qquad y = C_3\cos\omega_1 t + C_4\sin\omega_2 t;$$

Здесь $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ — т.н. *собственные* частоты уравнения малых колебаний. Используя начальные условия

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ x'(0) = 0; \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

окончательно получим:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega_1 t; \\ y = y_0 \cos \omega_2 t, \end{cases}$$

причем $\omega_i > 0$; $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 3$.

7. Траектории движения

Из решения видно, что *траектории* движения точки в поле Лемуана всегда ограничены некоторым прямоугольником, причем в случае *совпадающих* собственных частот это будут отрезки прямых. Известно, что если собственные частоты *различны*, и их отношения *рациональны*, то траектория образует т.н. *фигуры Лиссажу*. Если же отношение *иррационально*, то траектория заполняет прямоугольник *всюду плотно*, т.е. пройдет рядом с любой его точкой и сколь угодно близко к ней. При компьютерном моделировании, казалось бы, отсюда вытекает, что на мониторе мы увидим светящийся прямоугольник. Но, так как компьютер «не понимает», что такое иррациональное число, то он все равно покажет фигуру Лиссажу (см. [4]).

8. Орбиты центров тяжести

Основная работа проделана, и теперь настало время «собирать урожай», т.е. получать следствия.

Лемма о координатах центра тяжести педального треугольника в главных осях. Поскольку центр тяжести $M_Z(x_m; y_m)$ есть конец *третьей части* вектора силы с началом в точке $Z(x_0; y_0)$, то его координаты находятся из системы:

$$\begin{cases} 3(x_m - x_0) = -\omega_1^2 x_0 \Rightarrow x_m = \frac{x_0}{3}(3 - \omega_1^2) = \frac{1}{3}\omega_2^2 x_0; \\ 3(y_m - y_0) = -\omega_2^2 y_0 \Rightarrow y_m = \frac{y_0\left(3 - \omega_2^2\right)}{3} = \frac{1}{3}\omega_1^2 y_0, \end{cases}$$

т.к. сумма квадратов частот равна 3.

Из этой леммы немедленно следует, что *координаты орбит центров тяжестей в главных осях образуют последовательность* $\left\{x_0\left(\frac{\omega_2^2}{3}\right)^n\right\}; \left\{y_0\left(\frac{\omega_1^2}{3}\right)^n\right\}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $0 < q < 1$, то мы получили еще одно доказательство того, что последовательность, образованная центрами тяжестей педальных треугольников, сходится к точке Лемуана. Кроме того, мы видим, что эти точки лежат на кривой, параметрически задаваемой в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 u^t; \\ y = y_0 w^t \end{cases} \qquad \text{где} \quad u = \frac{\omega_2^2}{3};\ w = \frac{\omega_1^2}{3}.$$

Можно считать, что x_0, y_0 положительны. (Этого всегда можно добиться, изменив, если нужно, направление осей на противоположное). Следовательно,

$$\begin{cases} \ln \frac{x}{x_0} = t \ln u; \\ \ln \frac{y}{y_0} = t \ln w; \end{cases} \Rightarrow y = C_1 x^{C_2} \ \text{ где } \ C_2 = \frac{\ln w}{\ln u}.$$

Орбиты теперь определены.

В случае совпадения собственных частот (т.е. когда исходный треугольник правильный), последовательность, образованная центрами тяжестей педальных треугольников, находится на прямой. Если же частоты различны, — то на графике некоторой степенной функции.

Подчеркнем, что для нахождения орбит нам не понадобилось решение самого уравнения, но только его вид в главных осях.

В заключение этого пункта, используя лемму о координатах центра тяжести, докажите два интересных свойства центров тяжестей педального треугольника.

Центр тяжести педального треугольника в случае правильного исходного треугольника.

Центр тяжести педального треугольника точки Z делит пополам отрезок, соединяющий точку Z с центром основного треугольника.

Точки пересечения прямой, проходящей через точку Z и через центр тяжести педального для нее треугольника — точку M_Z, с главными осями.

Пусть прямая ZM_Z пересекает главные оси в точках X_Z, Y_Z соответственно. Тогда выполняются равенства:

$$\frac{ZM_Z}{M_ZX_Z} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \qquad \frac{ZM_Z}{M_ZY_Z} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2};$$

и в прямоугольном треугольнике эти отношения равны 2 и 1/2.

9. Геометрический смысл главных осей

Теорема о двух перпендикулярных прямых, не меняющих направления центров тяжестей педальных треугольников. Посмотрим еще раз на формулы, полученные в лемме о центрах тяжести:

$$\begin{cases} x_m = \frac{1}{3}\omega_2^2 x_0; \\ y_m = \frac{1}{3}\omega_1^2 y_0. \end{cases}$$

Из этих формул следует, что если точка $Z(x_0; y_0)$ попала на одну из главных осей (т.е. $x_0 = 0$ или $y_0 = 0$), то центр тяжести педального треугольника относительно этой точки также останется на той же оси. То есть, справедлива следующая теорема:

В любом треугольнике существуют две перпендикулярные прямые, проходящие через точку Лемуана L и не меняющие направления центров тяжестей педальных треугольников для точек, попадающих на эти прямые.

Автор статьи потратил довольно много времени в поисках *геометрического смысла* главных осей — т.е. пытаясь ответить на вопросы: *Как построить главные оси циркулем и линейкой? С какими замечательными точками треугольника они связаны?* Долго перечислять, сколько замечательных прямых, проходящих через замечательные точки, было подвергнуто компьютерному анализу (с помощью превосходной программы «Живая геометрия») — и все впустую. Решающую идею подсказал И. Ф. Шарыгин (за что я ему крайне признателен). Оказалось, что он уже однажды размышлял над этой задачей, и пришел к выводу, что указанные прямые есть *биссектрисы углов*, образованных некоторыми замечательными прямыми, т.е. искать нужно было не сами прямые, а их биссектрисы.

После того, как стало ясно, что именно нужно искать, все сразу и нашлось — сначала помог, опять-таки, компьютер, а после обнаружилось и строгое математическое обоснование. Решение проблемы, как выяснилось, связано с *изодинамическими* и *изогональными* центрами треугольника (сами названия как бы на эту связь намекают, не правда ли?) Напомним определения и некоторые свойства этих точек.

10. Точки Аполлония (изодинамические центры) и точки Ферма-Торричелли (изогональные центры)

Для любого треугольника найдутся две такие точки, что *педальные* относительно них треугольники *правильные*. Это — т.н. точки *Аполлония* или изодинамические центры треугольника. Обозначим их A_1, A_2. Точки, *изогонально* им сопряженные, называют точками Ферма-Торричелли — F_1, F_2. *Антипедальные* относительно них треугольники также *правильные*. Кроме того, прямые A_1A_2 и F_1F_2 пересекаются в точке Лемуана L (причем прямая A_1A_2 содержит еще и центр описанной окружности O). Назовем первую из них *изодинамической осью треугольника*, а вторую — *изогональной*. (Доказательства вышеперечисленных свойств, а также и многих других читатель найдет, например, в [5], [6], [7[, [15]).

Переходим к основному утверждению этого пункта:

Главные оси уравнения Лемуана есть биссектрисы углов, образованных пересечением изодинамической и изогональной осей треугольника.

Или, выражаясь немного иначе:

Изогональная и изодинамическая оси симметричны относительно главных осей.

На рисунке 8 видно, что педальный треугольник точки A_1 *гомотетичен* антипедальному треугольнику точки F_1, что отнюдь не является случайным совпадением — этот факт справедлив для любой пары изогонально сопряженных точек (см. [5]; [6]). Доказательство основано на двух леммах.

Лемма об общей окружности педальных треугольников изогонально сопряженных точек (см. [5]; [6]; [7]).

Пусть точки X и Y изогонально сопряжены. Тогда педальные треугольники этих точек имеют общую описанную окружность, причем ее центр расположен на середине отрезка XY

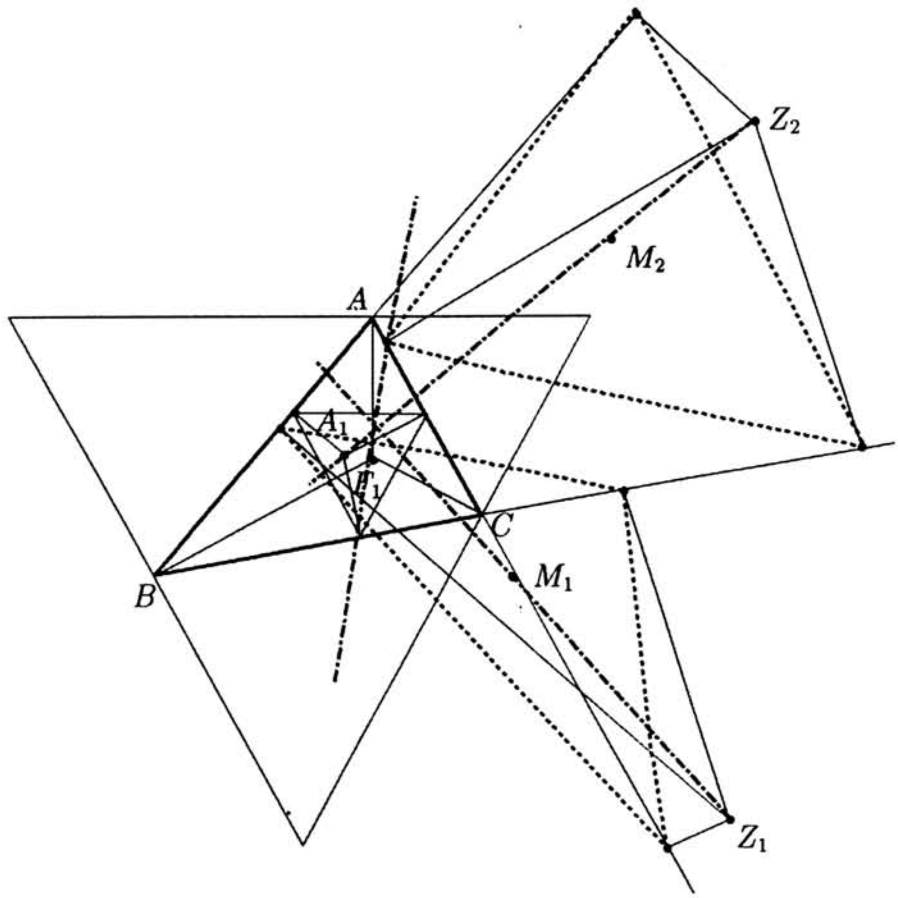


Рис. 8

Следствие

Первая точка Аполлония A_1, центр тяжести педального треугольника точки Аполлония M_{A_1} и первая точка Ферма-Торричелли лежат на одной прямой, причем центр тяжести есть середина A_1F_1. Действительно, точки A_1, F_1 изогонально сопряжены, а педальный треугольник точки A_1 — правильный, поэтому его центр тяжести совпадает с центром описанной около него окружности.

Лемма о симметричных точках.

Пусть точка M_P является центром тяжести педального треугольника точки P, а точка Q выбрана таким образом, что M_P является серединой PQ. Тогда точки P и Q симметричны относительно главных осей.

В самом деле, пусть точки P и Q имеет координаты $P = (x_P; y_P)$; $Q = (x_Q; y_Q)$. Согласно *лемме о координатах* центра тяжести, $M_P = \left(\frac{\omega_2^2}{3}x_P; \frac{\omega_1^2}{3}y_P\right)$. Тогда

$$2 \cdot \frac{\omega_2^2}{3}x_P = x_P + x_Q \Rightarrow x_Q = \frac{x_P}{3}\left(2\omega_2^2 - 3\right) = \frac{x_P}{3}\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right).$$

Аналогично,

$$2 \cdot \frac{\omega_1^2}{3}y_P = y_P + y_Q \Rightarrow y_Q = \frac{y_P}{3}\left(2\omega_1^2 - 3\right) = \frac{y_P}{3}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right).$$

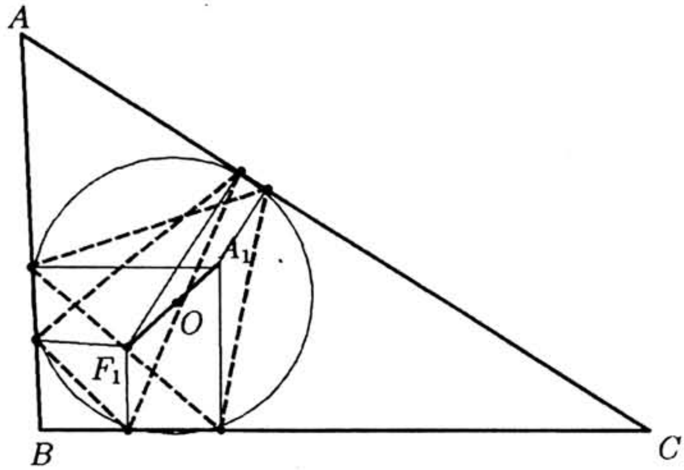


Рис. 9

Отсюда следует равенство $\frac{x_P}{y_P} = -\frac{x_Q}{y_Q}$, как раз и означающее симметрию точек P и Q относительно главных осей. Наша *основная теорема* теперь доказана, поскольку, как видим, первая точка Аполлония и первая точка Ферма-Торричелли оказались симметричны относительно главных осей, а точки эти лежат, соответственно, на изодинамической и изогональной оси треугольника.

К сказанному остается добавить, что автору так и не удалось пока найти *чисто* геометрического доказательства этой теоремы — а хотелось бы. Может быть, читателю повезет больше?

11. Выход на «школьный» уровень

Всегда приятно, окончив работу, потребовавшую использования более-менее серьезного математического аппарата, в «остатке» получить одну-другую симпатичную задачу, способную скрасить досуг любителя элементарной геометрии. (Под «симпатичной» мы подразумеваем задачу с достаточно емкой и естественной формулировкой, допускающую короткое, но сразу не очевидное, решение «школьными» средствами.) В данном случае задачи получились вот какие:

Правильный треугольник и центры тяжести педальных треугольников.

Пусть O — центр правильного треугольника ABC, Z — произвольная точка плоскости, а M — центр тяжести треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных из точки Z на стороны (или их продолжения) треугольника ABC. Докажите, что M является серединой отрезка ZO.

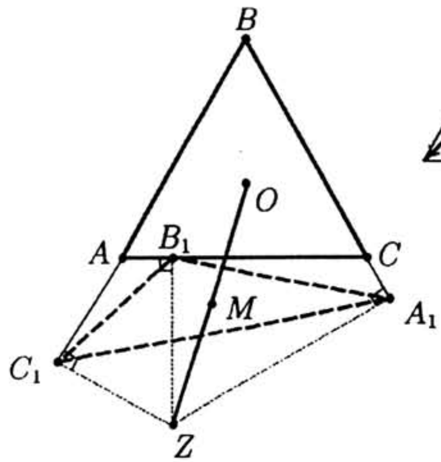


Рис. 10

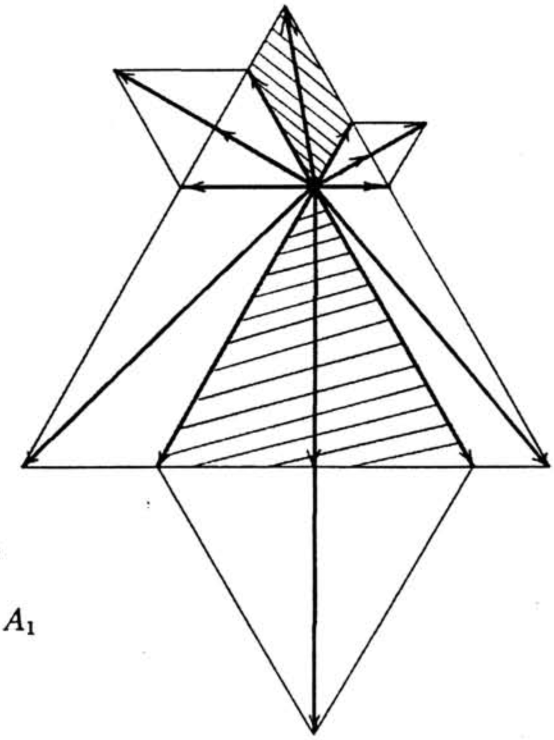


Рис. 11

Прямоугольный треугольник и центры тяжести педальных треугольников.

Через середину высоты прямоугольного треугольника, опущенную из вершины прямого угла, проведена перпендикулярная ей прямая. Проведем прямую через произвольную точку Z и точку M — центр тяжести соответствующего педального треугольника. Пусть X — точка пересечения этой прямой с серединным перпендикуляром к высоте, а Y — с прямой, проходящей через высоту. Покажите, что $ZM : MX = MY : ZM = 2 : 1$.

Решение первой задачи. Вспомнив векторное определение центра тяжести, легко понять, что задача сводится к следующей:

Пусть имеется правильный треугольник ABC. Тогда для любой точки Z плоскости справедливо векторное равенство $\overrightarrow{S} = 2\overrightarrow{S_\perp}$, где $\overrightarrow{S}$ есть сумма векторов с началом в точке Z и концами в вершинах треугольника, а $\overrightarrow{S_\perp}$ — сумма векторов с началом в точке Z и концами в основаниях перпендикуляров, опущенных из точки Z на стороны треугольника.

Здесь удалось отыскать решение по типу знаменитого древнего метода «Смотри!» — достаточно рассмотреть шесть векторов, лежащих на прямых, проходящих через точку Z, параллельно сторонам треугольника. (Идея такого решения навеяна одной изящной задачей из книжки В.В. Произволова - см. [11], стр. 53.)

Что касается задачи о прямоугольном треугольнике, поиск его геометрического решения мы оставляем читателю (по-видимому, оно окажется не столь эффектным, как предыдущее).

Москва, сентябрь 2000 — январь 2001.

Литература

[1] Арнольд В.И. «Математические методы классической механики». М., «Наука», 1979 г.

[2] Арнольд В.И. «Обыкновенные дифференциальные уравнения». М., «Наука», 1975 г.

[3] Болтянский М.Б., Балк В.Г. «Геометрия масс». М., «Наука», 1987 г.

[4] Гальперин Г.А. «Мой друг Андрей Ходулев». // «Математическое просвещение», выпуск 4, 2000 г.

[5] Ефремов Д. «Новая геометрия треугольника». Одесса, 1902 г.

[6] Kimberling Clark. «Triangle centers and central triangles». Winnipeg, Canada, 1998 г.

[7] Прасолов В.В. «Точки Брокара и изогональное сопряжение». М., МЦНМО, 2000 г.

[8] Прасолов В.В. «Задачи по планиметрии. Часть 1». М., «Наука», 1991 г.

[9] Прасолов В.В. «Задачи по планиметрии. Часть 2». М., «Наука», 1991 г.

[10] Пригожин И. «Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы». Ижевск, 1999 г.

[11] Произволов В.В. «Задачи на вырост». М., «Мирос», 1995 г.

[12] Тихомиров В.М. «Рассказы о максимумах и минимумах». М., «Наука», 1986 г.

[13] Шарыгин И.Ф. «Геометрия. Задачник 9-11». М., «Дрофа», 1996 г.

[14] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум». М., «Наука», 1970 г.

[15] Руинский А. «Заметки об окружности Аполлония.»// «Математическое образование», выпуск 2-3 (9-10), 1999 г.

Автор: Мякишев Алексей Геннадьевич
Преподаватель математики в
Московском Химическом Лицее
e-mail: alex_geom@mtu-net.ru

Обучение математике в западных странах: изменения, результаты и проблемы

Дж. Малати

Джордж Малати — доктор педагогических наук, профессор университета Йоенсуу, Финляндия. "Профессор года" Финляндии в 1994 году. По решению Совета высшего образования Финляндии университет Йоенсуу назначен центром повышения качества математического образования в Финляндии. Главный интерес профессора Малати — разработка стратегии эффективного обучения математики, причем критерием эффективности является достижение понимания. В предлагаемой статье профессор Малати рассматривает ситуацию, сложившуюся в современном западном математическом образовании, характеризующуюся всеобщим снижением качества образования, анализирует причину ее возникновения и предлагает пути по ее преодолению. Статья представлена автором на русском языке. Сохранен авторский стиль.

1.1. Короткая и неполная предпосылка

На западе, с 17 века и почти до конца 19 века математическое образование по количеству учащихся и по составу его содержания развивалось медленно. Другими словами, развитие шло по принципам эволюции.

В конце 19 века и в начале 20 века появилась весьма серьезная проблема. Эта проблема была связана с основанием общенародной элементарной школы и ее быстрым расширением до уровня обязательного обучения. За короткое время демократическое движение привело массы детей не только в элементарную школу, но и в среднюю школу (Bidwell and Clason 1970).

Обучение массы детей требовало принятия в школу массы людей в качестве учителей, хотя их подготовка и предпосылки не были достаточными.

С другой стороны, учебники были написаны довольно знаменитыми и выдающимися математиками, особенно учебники по геометрии. Для элементарной школы учебники были по арифметике, а для средней школы по арифметике, алгебре и геометрии (и тригонометрии). Из-за того, что было немало учителей, которые не понимали содержания этих учебников, в обучении арифметике и алгебре механическая тренировка занимала центральное место, а в геометрии — зубрежка.

Всю первую половину 20 века специалисты в области обучения математике боролись за то, чтобы в обучении математике понимание математики было возможным.

После второй мировой войны были сделаны разные попытки для того, чтобы усовершенствовать содержание школьной программы. Из попыток 50-х годов 3 имеют особое значение для нашего обсуждения.

Одна из этих трех была попытка перевода начал анализа из курсов высшего образования в школьную программу высших классов средней школы. Эта попытка произошла по желанию математиков и до сих пор в какой-то мере продолжается.

Вторая попытка была чисто педагогической и произошла в начале 50-х годов как преобразование других попыток, которые произошли в начале века. По этим попыткам хотели представить математику как только один предмет через один учебник. Со временем заметили, что обучение математике не получается без еженедельных уроков по разным отраслям математики. Другими словами, обучение математике не получается без непрерывного развития математического мышления по разным отраслям. В начале 50-х годов в одном учебнике попытались излагать разные отрасли математики через общие не математические темы. В этот раз эта попытка касалась только первого класса средней школы (возраст 13 лет). До сих пор существуют такие учебники, которые написаны по этой идее и для таких детей. Руководители этой работы были специалистами в области методики преподавания математики. Следует отметить, что в 50-х годах название "педагогика математики" (Mathematics Education) расширилось вместо названия "методы преподавания математики" (Methods of Teaching Mathematics).

Третья попытка нашего обсуждения началась в 1952 году в университете Иллинойса. Эта попытка началась в ответ на критику обучения математике в США, где сравнение с успехом в России имело особое влияние. Руководители Иллинойского проекта объявили, что для вечных проблем обучения математике нет никакого выхода, пока это обучение идет по традиционной программе (UICSM Project Staff 1956,655). Эта попытка на самом деле открыла дверь для ряда изменений в обучении математике, которые привели к сегодняшнему кризису в обучении математике на Западе. Поэтому об этой попытке будем говорить более подробно.

1.2. Более подробно и истоки проблем

По проекту Иллинойса была создана новая программа для высших четырех классов средней школы (9-12 классов) (UICSM Project Staff 1956, 660). В этом проекте приняли участие специалисты в области математики, инженерного дела и обучения математике. Наряду с ними приняли участие учителя средней школы (UICSM Project Staff 1956, 656). По этому проекту хотели представить математику как единую абстрактную структуру. Это было сделано с помощью общих понятий современной математики (UICSM Project Staff 1956, 660). Некоторые из этих понятий были уже использованы в русских учебниках даже со времени учебников Киселева (Киселев, 1940). При этом имеется в виду изучение коммутативности и ассоциативности при сложении и умножении чисел.

Следует отметить, что при этом проекте евклидова геометрия еще имела место в программе как часть учебного материала десятого класса (UICSM Project Staff 1956, 661).

Хотя проект Иллинойса не получил особого внимания, запуск Советским Союзом первого в мире спутника в 1957 году сделал из идеи проекта Иллинойса предпосылки для общего движения в обучении математике на Западе. С этого времени стиль работы в области обучения математике изменился. Запуск спутника был слишком сильным ударом для американского государства и американского народа. До сих пор этот удар помнится в США, особенно в научных кругах. Как пример читателю предлагаю читать доклады разных крупных американских специалистов на симпозиуме по спутнику 1997 года, то есть через сорок лет после запуска спутника (Center for Science, Mathematics, and Engineering Education 1997).

В 1957 в США руководителям нового движения "новая математика" (New Math) дали все, что они хотели для того, чтобы найти выход из национального кризиса. С другой стороны, эти руководители были готовы принимать всякие радикальные предложения для модернизации школьной математики.

В 1959 году Дьедоне В. (Dieudonne), нашел себе необыкновенную возможность для внедрения линейной алгебры в среднюю школу. Для этого внедрения он предлагал исключить евклидову геометрию из учебной программы (Dieudonne 1961, 35). Хотя он сам объяснил, как он любил евклидову геометрию, и хотя много математиков были против этого предложения, уже в начале 60-х годов евклидова геометрия исчезла из учебников математики. Дело в том, что в то время Дьедонесский лозунг "Евклиду надо уйти" и разные другие лозунги имели особое влияние во время "революции в математике". Интересно заметить, что особенно в США, где слово "революция" считалось вообще плохим словом и еще особенно в то время "революция в математике" было лозунгом американского профессора М. Стон (Stone 1961a, 1961б).

1.3. Революция или переворот?

Десять лет — было достаточное время для того, чтобы новая программа получила резкую критику. Народ, который не понял содержания этой программы, объявил, что детский уровень вычисления снизился. У математиков были другие более серьезные критики. В США Морис Кляйн (Kline) с самого начала критиковал постоянно новую программу и еще больше других математиков. В 1973 году он использовал народное мнение в названии своей критической книги (Kline 1973). Эта книга помогла в том, что новая программа исчезла на Западе в 1980 году.

Стоит отметить, что хотя книга Кляйна называлась "Почему Джонни не умеет складывать", кроме примеров первых трех страниц, в содержании книги нет ничего другого, связанного с этим названием. Так как эти примеры были написаны в анекдотическом ироническом стиле в согласии с народным мнением, влияние книги было широким и сильным, в том числе на политиков, особенно в США. Один из известных примеров Кляйна найдем на третьей странице его книги в следующем виде: "Родитель спрашивал своего восьмилетнего ребенка: "Сколько будет 5+3?" Ответ был: "5+3=3+5" по коммутативному закону. Удивленный родитель формировал вопрос по-другому: "А сколько яблок будет — 5 яблок и 3 яблока?" Ребенок не понял, что “и” обозначает плюс и потому он спрашивал: “Имеете ли вы в виду 5 яблок плюс 3 яблока?” Родитель с надеждой быстро сказал “да” и ожидал ответ. “Господи” — сказал ребенок — “Какая разница — яблоки, медведи или книги; 5+3=3+5 во всяком случае”.

В 1980 году уже новая тенденция появилась с новым лозунгом “возврат к основам” (Back-To-Basics). Это на самом деле один признак того, что новая математика была не революцией, а переворотом.

2.1. Что принес “возврат к основам” в обучении математике?

По названию нового движения можно думать, что на Западе вернулись к использованию разных учебников для разных отраслей математики. Также можно думать, что снова детям дали изучать евклидову геометрию.

Ни то ни другое не случилось, а просто возврат был к стилю изучения математики в начале XX века. То есть, в обучении математике механическая тренировка заняла центральное место, как и было в начале века, и по разным признакам положение было еще хуже.

2.2. Почему еще хуже?

Дело в том, что математическое вычисление стало характерным для обучения не только арифметике и алгебре, но и геометрии и другим областям. Алгебраические и геометрические теоремы предлагали над названием правил, а слово “доказательство” исчезло из текстов учебников и речи учителей. Цель обучения тригонометрии стала непонятной. Там только искали числа с помощью калькуляторов.

Коротко, обучение математике стало предлагаться через готовые правила, простые примеры по использованию этих правил и подобных упражнений. Разделы одного учебника стали независимы друг от друга. Таким образом стало возможно предлагать разные темы учебников одного и того же класса по-разному в зависимости от желания авторов. Например, разделы учебника могли касаться арифметики, геометрии, алгебры, геометрии, алгебры, арифметики, алгебры, алгебры — в таком порядке. Для этого класса эти же разделы могли бы предлагаться в другом учебнике по другому порядку. Как и математическая структура пропала из учебников, темы одной и той же отрасли математики предлагали также в другом порядке.

С этого времени роль математиков и даже “педагогов математики” в написании учебников уменьшилась, а роль учителей сильно увеличилась. Одна из причин поведения математиков и педагогов было то, что те из них, которые в течение предыдущих 10-20 лет интересовались написанием учебников, не были довольны новой тенденцией. Во время “новой математики” они руководили революцией, причем они получили широкую огласку, даже на международном уровне. Для них “возврат к основам” был неприемлемым приказом, который принес им тяжелую подавленность.

3.1. Ряд переворотов

В 60-х и 70-х годах абстрактный характер школьной программы средней школы был обоснован тем, что дети этого возраста получают удовольствие от общения с абстракцией. В реакции тенденции 80-х годов были обоснованы тем, что математика должна быть для всех (Damerow 1986).

Для лозунга "математика для всех" и другого близкого лозунга "ежедневная математика" нашли поддержку в жизни амазонских индейцев. От их простой жизни родился лозунг, у которого немало педантизма. Лозунг был "этноматематика", который представили в 1984 году (D'Ambrosio 1986).

В 1985 году еще новый лозунг начал занимать особенное место в обучении математике на Западе, этот лозунг был "проблема-решение" (Problem-Solving). С этим лозунгом можно думать, что дети начали изучать, скажем, алгебру или геометрию как структуру. Ничего подобного не было. Эти проблемы на самом деле были типа головоломок, наилучшие из которых достигли уровня занимательных задач.

3.2. Новые педагоги

Из-за того, что тип таких задач не требовал особенного знания алгебры или геометрии, педагоги, у которых не было никакого математического образования, начали интересоваться этими задачами и представлять себя как специалистов по новой тенденции в педагогике: "Проблема-решение". Еще некоторые из них стали считать себя специалистами в области обучения математике. В некоторых случаях они в молодости начали свою учебу на математических отделениях университетов, из которых они ушли из-за трудности математики для них. Интересно заметить, что с этого времени работа в группах (или в командах) увеличилась как тип организации уроков.

3.3. Ультрасовременная педагогика

С 80-х годов число таких педагогов, которые интересовались обучением математике без достаточного знания о математике, увеличивалось все время. Это оказало негативное влияние на математическое образование.

В 90-х годах рядом с работой в группах началась организация обучения математике в виде курсов. Таким образом, дети в последние 6 лет средней школы начали изучать математику с перерывами. В один период дети изучают какой-то курс по какой-то теме из какой-то отрасли математики и сдают экзамен по этому курсу. После этого у них может существовать какой-то перерыв в обучении математике, затем начинают изучать другой курс и так далее. Один перерыв иногда продолжается больше месяца. Хотя некоторые исследования показывают, что в странах, где такие ультрасовременные подходы в обучении математике, дети овладевают математикой хуже тех детей, которые изучают математику традиционным образом, эти ультрасовременные подходы продолжаются (Burghes 2000).

3.4. Техника решает все

В 80-х годах главной целью обучения математике стало найти правильный ответ для механических задач. Поэтому использование калькуляторов стало широко распространяться (Hembree and Dessart 1986). Прогресс техники дал возможность решать не только арифметические задачи калькуляторами, но и еще другие, в том числе и алгебраические. Из-за этого решение задач в высших классах средней школы стало зависимым от овладения алгоритмами использования калькулятором. Нажатие кнопки занимало большую часть времени математических уроков высших классов.

Использование электронных машин делает нас, как педагогов математики, современными деятелями в глазах родителей, где реклама продавцов подчеркивает значение этой современности.

С 60-х годов идеи использования компьютеров в обучении были у разных специалистов. Прогресс в компьютерной технике в 90-х годах привел к тому, что использование компьютеров в обучении математике начало быть видным (ICMI 1986). Все-таки это расширение идет медленно. Надо отметить, что в данном моменте использование компьютеров увеличивает проблемы обучения математике на Западе больше, чем помогает уменьшать их. Например, для решения геометрической проблемы компьютер используется как решающий инструмент, хотя компьютер на самом деле ничего не доказывает (Malaty 1998, 434).

О проблемах использования компьютеров не будем говорить больше. Дело в том, что в первую очередь надо говорить о первостепенных проблемах на Западе. А именно, мы хотим говорить о таких проблемах, о которых специалисты Запада не говорят на международных встречах. Наоборот, их речи на этих встречах больше всего создают впечатление, что на западе обучение математике идет только от успеха к успеху. Все-таки внутри каждой страны другие речи идут об обучении математике.

4. О чем идет речь?

О слабости сегодняшних студентов есть разные жалобы. Громче всех об этом говорят профессора университетов. Прежде всего они возлагают ответственность на слабость обучения математике в средней школе. Интерес к обучению математике в средней школе намного меньше, чем во время "новой математики" и раньше этого времени. Большинство студентов высших классов средней школы не выбирают математику как предмет для окончательного экзамена. В некоторых случаях они не изучают математики совсем в этих высших классах (Senior Secondary School). На последнем экзамене по математике в средней школе оценки "отлично" и "очень хорошо" уже потеряли свое значение. В большинстве случаев такие оценки даются только для того, чтобы приукрасить вид результатов. Хотя выпускной экзамен в средней школе по математике относительно легкий, в отдельных странах и в отдельные годы получение даже 10% от максимальных очков экзамена придется считать достаточным для того, чтобы сдать экзамен.

На университетской стороне: математическим отделениям не легко достать студентов, которых можно назвать сильными в математике. В некоторых случаях на эти отделения поступают только те студенты, которых другие отделения не приняли. В разных странах запада и в отдельные годы число поступающих на математические отделения может быть недостаточным для того, чтобы организовать учебу для них. Еще около 50% студентов математических отделений уходят на другие отделения или совсем из университета. Математические отделения университетов все время упрощают и уменьшают свои курсы, чтобы учебная программа совпадала с уровнем студентов.

Такие же проблемы есть на других университетских отделениях по смежным областям, особенно на отделениях физики. Такие же проблемы есть на отделении подготовки учителей математики. Это на самом деле одна из причин жалоб на уровень сегодняшних учителей математики на западе. Здесь надо отметить, что уже в некоторых странах для вакансии преподавателей математики не требуется от претендентов получения образования по математике.

Еще другая жалоба есть на уровень сегодняшних учителей элементарной школы по поводу преподавания математики и естественных наук. Дело в том, что хотя подготовка этих учителей идет обычно в университетах и нередко до уровня магистра, по математике и по обучению математике учеба содержит всего около 100 часов и даже меньше. Для этой учебы математика не включается в число вступительных экзаменов. Претендентам не надо сдавать окончательный школьный экзамен по математике или естественным наукам. От них также не требуется обучения этим предметам в высших классах средней школы. Несмотря на слабость этой предпосылки учителя элементарной школы преподают математику в первые годы обучения математике и даже до шести лет это продолжается. Эти учителя еще пишут учебники по математике для элементарной школы то есть до шести лет школьной жизни.

5. Проблемы учебников

Из-за того, что в данный момент авторами учебников являются наши сегодняшние школьные учителя, проблема содержания школьных учебников очень серьезная.

С одной стороны проблема касается уровня и характера содержания, а с другой стороны стиля изложения этого содержания. Без детального анализа рассмотрим несколько примеров.

Из задач одного учебника 7-го класса была дана следующая задача: найти площадь прямоугольного треугольника, у которого длина гипотенузы 8 см и длина соответствующей высоты 5 см (Asikainen, Kupiainen ja Koponen 1984, 188).

По этому учебнику учились в 80-х годах и учебник был переиздан 7 раз. По изученному правилу дети умножали 8 см на 5 см, делили произведение на два и получили частное 20 квадратных сантиметров. В таком порядке они именно делали. Учителя всегда одобряли ответ студентов. Когда я попросил учителей математики доказать, что такого треугольника не существует, в начале они не поверили, что это возможно. Те, которые решили эту проблему, с трудом это сделали с использованием теоремы Пифагора. Когда я попросил их найти другое решение — никак не получалось. Такие результаты я получал на моих курсах для учителей в течение более 10 лет.

В 1997 году я решил дать решить эту проблему учащимся средней школы через математический журнал Solmu (Malaty 1997). Единственное решение, которое я получил, было решение университетского студента математического отделения, где он использовал дифференцирование.

Эта ошибка была в учебнике 80-х годов для учащихся 7-го класса, в возрасте 13 лет. Что касается сегодняшних учебников посмотрим один пример.

Следующая задача имеет три части (Heinonen,Kupiainen ja Sainio 1997,14):

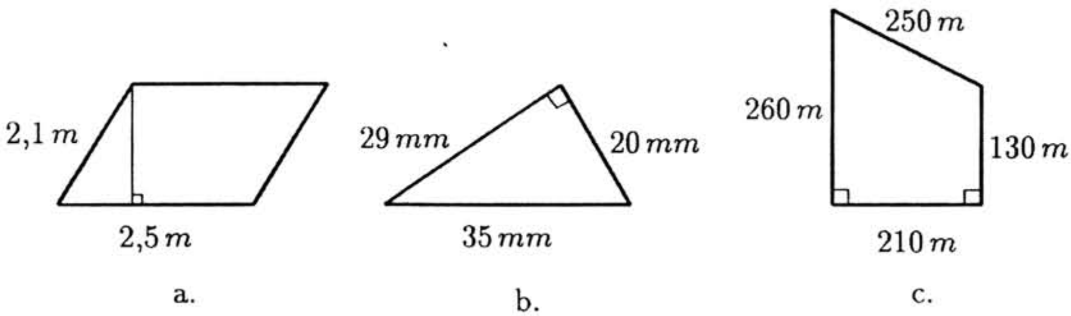


Рис. 1

В этой задаче от студентов учебник требует вычисления периметра и площади трех фигур. Здесь еще легче видеть, что из этих трех фигур две не существуют. Это сегодняшний учебник и еще для более старшего класса, чем предыдущий учебник. Это учебник для 9-го класса, то есть для учеников в возрасте 15 лет. Кто-то может сказать, что такие ошибки не серьезны поскольку они могут существовать в любом учебнике. Все-таки на западе такие ошибки встречаются в учебниках и, главное, что учителя там не замечают их. Во всяком случае, самых серьезных ошибок в наших учебниках пока не устранили; давайте посмотрим примеры таких ошибок из одного из учебников 7-го класса (Heinonen, Kupiainen ja Sainio 1995, 178).

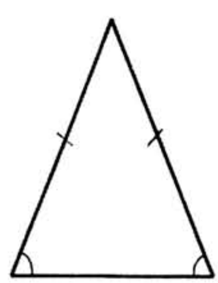


Рис. 2

Под этой фигурой написано: в равнобедренном треугольнике длины двух сторон равны и величины двух углов равны. После этого есть следующая фигура.

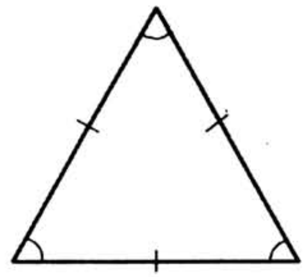


Рис. 3

В этот раз написано так: в равностороннем треугольнике длины всех сторон равны и величины всех углов равны. Здесь можно отметить, что учебник не дает детям понять, что равносторонний треугольник является равнобедренным треугольником.

Это пример того, что в наших учебниках импликации и дедукции нет, итак, структуры нет и настоящей математики нет. В наших учебниках трудно найти определения геометрических фигур и также трудно найти доказательства геометрических теорем. Фигуры учат отдельно друг от друга. Некоторые свойства, которые принадлежат определениям или теоремам, можно найти как правила. Слова "доказать" и "доказательства" не найдутся в наших учебниках. Таких слов не существует в программах западных стран, как, например, в стандартной программе США. Это на самом деле причина того, почему учителя на западе не используют газету "Квант" в их работе, хотя вариант газеты публикуется на английском языке в США.

Что касается геометрических построений, эти предлагаются в наших учебниках через готовые алгоритмы. В данных алгоритмах легко найти, что некоторые из них не построят ничего.

6.1. Заключение

Положение в обучении в других областях математики не лучше, даже можно сказать, хуже. Я брал геометрию как пример потому, что отсюда наши проблемы начались.

Уже 30-40 лет тому назад наши школы потеряли евклидову геометрию. Раньше через евклидову геометрию детей учили не только рассуждению и доказательству, но и развивали математический язык и алгебраическое мышление. Евклидова геометрия дала еще основание для изучения тригонометрии, аналитической геометрии и анализа. Это все через визуализацию евклидовой геометрии и в ней существует немало интуиции. Руководители "новой математики" не поняли, что формальная структура "новой математики" не достаточна для развития формального мышления. В частности, они не поняли, что линейная алгебра родилась у математиков, у которых у самих был большой опыт в евклидовой геометрии.

Все-таки во время "новой математики" эти руководители, учителя математики и даже школьников имели чувство гордости из-за того, что они связаны с "новой математикой" и "революцией математики".

Неудача "новой математики" дала политикам в 80-х годах уменьшить число школьных уроков по математике и сократить бюджет для работы в области обучения математике. В 80-х годах новое поколение учителей начало появляться в школах. Это поколение учителей, которые были сами школьниками во время новой математики. С одной стороны учителя не знали ничего об евклидовой геометрии и с другой стороны в учебниках уже не было ничего от элементов линейной алгебры.

Механическое образование 80-х годов и сложности нахождения фокусов решения задач типа "проблема-решение" были важными причинами того, что интерес студентов к изучению математики уменьшился. Это, в свою очередь, было одной из причин того, что изучение математики в высших классах средней школы стало менее обязательным.

В 90-х годах педагоги математики хотели узнать, почему интерес студентов к изучению математики уменьшился. К сожалению, исследования, которые проводились, не касались содержания школьной математики, а позиции школьников к математике и их представлений и верований о математике. Как методика таких исследований были опросы и интервью, педагоги, у которых нет образования в области математики, в том числе учителя элементарной школы участвовали в проведении таких исследований и получили ученую степень в области педагогики математики. Таким образом, им стало легче получить место в университетах как специалистам в области обучения математики, в том числе должности профессора. Отсюда происходит, что нередко на международных конференциях по обучению математики выступают такие специалисты, у которых нет математического образования.

Еще опасно, что в педагогике и педагогике математики место фразеологии увеличилось, в том числе в исследованиях. Из-за этого и другого ситуация в области обучения математике на западе сегодня очень сложная.

6.2. Ситуация сегодня

Когда вы посещаете нас, вы заметите, что во всех средних школах есть современная компьютерная лаборатория. Интернет и электронные почтовые адреса есть у всех детей даже в элементарной школе. В учебниках есть много задач типа "проблема-решение", некоторые из них можно назвать хорошими. Учебники еще цветные и красиво отпечатаны и на хорошей бумаге. Чего у нас нет, так это самой математики.

Молодые учителя были школьниками при похожих условиях. Причем они не слышали в школе о слове "доказательство", а об евклидовой геометрии не слышали даже в университете. В такой стране, как Великобритания, от учителя математики в средней школе не требуется получения образования по математике. Подготовка учителей опирается только на практическую тренировку в школах.

Из-за нехватки учителей математики в странах запада великобританский пример постепенно станет характерным для обучения математике в других странах запада. Великобританский профессор Джон Бери (John Berry) объяснил, почему он все время предлагает учителям средней школы проблему типа "проблема-решение" тем, что сегодняшние учителя не знают ничего об алгебре или геометрии. Он также предлагает использовать символические калькуляторы для решения алгебраических задач.

Сегодня, когда я прошу учителей 5-го и 6-го классов доказать, что сумма величин углов треугольника есть 180°, они реагируют следующим образом: что такое доказать? Разве это требует доказательства? Это же уже известно в математике. Это правило, а правило не нужно доказывать потому, что это — договор, это — закон.

В Финляндии, кроме подготовки учителей, мне придется проводить разные курсы для повышения квалификации учителей во всей стране. Для оценки знаний учителей каждый раз в начале курса я даю им несколько задач. Одна из этих задач следующая: вычисли с объяснением 9+(1+5). Около 80% учителей элементарной школы отвечают следующим образом: 9+(1+5)= 9+6=15. Остальная часть учителей решает эту задачу по-разному, но близко к следующему виду: 9+(1+5)=10+5=15. Здесь написано близко из-за того, что я не хочу говорить подробно о стиле математического текста у учителей. Все-таки надо отметить, что нередко наши учителя вместо знака равенства пишут знак импликации или никаких знаков не оставляют.

Интересно, что когда я задал эту задачу учителям средней школы, разница между ними и учителями элементарной школы не была большой. Самое интересное это то, что ни один из учителей элементарной или даже средней школы не написал следующего высказывания: 9+(1+5)=(9+1)+5. Дело в том, что даже термин “ассоциативность” уже учителя математики не помнят, его понятия. От этого примера читатель сам может делать выводы об уровне обучения алгебры у нас. Проблема обучения алгебре у нас — большая тема. Главное здесь, что все это дети учат, это подставление числа вместо букв для того, чтобы получить числовое значение. С 7-го класса учебники ознакомят детей с алгеброй, как исчислением букв. Из-за этого наши дети не могут решать настоящие алгебраические задачи.

Интересно заметить, что в подготовке учителей элементарной школы критика обучения на принципах бихевиоризма имеет особенное место. С другой стороны, они изучают длинный курс по обучению на принципах когнитивизма и конструктивизма. Когда 80% учителей элементарной школы пишут 9+(1+5)=9+6, они показывают, что обучение на практике осталось у них на уровне бихевиоризма. Это еще показывает, как напрасно надеяться на теоретическую педагогическую подготовку. Читателю хочу напомнить, что теории обучения на западе меняются все время, как в моде; например, Килпатрик утверждает, что конструктивизм в США это то, что называлось пятьдесят лет тому назад “прогрессивное воспитание” (Kilpatrick 1999).

6.3. Куда идем?

В конце этого доклада вернемся к первому примеру по геометрии в этом докладе. Имею в виду пример прямоугольного треугольника. Этот пример один коллега-геометр в одной западной стране прочитал в одной из моих статей (Malaty 1998). Он попросил своих коллег на отделении математики своего университета определить площадь треугольника с указанными выше условиями. Все без никаких сомнений дали ответ 20 кв.см. То есть они также вычислили площадь несуществующего треугольника.

Потеря математической структуры в учебниках математики на самом деле означает потерю настоящей математики как учебного предмета. Это то, что случилось с начала 80-х годов на западе. То, что постепенно приводит к потере математической культуры.

Если западные тенденции распространятся во всем мире, математическая культура не только перестанет развиваться, но и вообще исчезнет. А это опасно для всей человеческой культуры. Дело в том, что развитие человеческой культуры было всегда связано с развитием математической культуры.

Опасность распространения этих тенденций касается также западной культуры. К сожалению этого вообще не видят на западе. Неразумно они стараются влиять на другие страны, чтобы другие страны копировали их ошибки. В данном моменте иностранные научные работники помогают западным странам поддерживать развитие техники.

Надеемся, что западное математическое обучение не распространится подобно закусочным Mc Donalds. Результаты сравнительных исследований типа TIMSS помогают распространению западной педагогики. Тесты TIMSS отражают содержание западных учебников, где например ничего не касается доказательства. Это не только из-за того, с тестами трудно измерить такое умение, но и потому, что доказательство не принадлежит западным учебным программам.

В некоторых странах запада, в том числе в Великобритании, есть попытки вернуть в школу настоящую математику (London Mathematical Society 1995). Там эта попытка идет через сравнение с обучением математике в других странах, в том числе в России (Burghes 2000). Там они стараются также менять организацию уроков, чтобы уменьшать работу в группах и опираться на работу с классом в целом. Этот процесс идет как-то неплохо, но очень медленно. Дело в том, что разрушение культуры оказалось легким делом, а построение культуры снова — это, естественно, очень трудное дело.

Литература

Asikainen, V., Kupiainen, A., ja Koponen, R. 1984, Peruskoulun matematiikka 7 (Helsinki: Otava).

D'Ambrosio, U., 1986, Socio-cultural bases for mathematics education. In: Carss, M. (ed.), Proc. ICME 5, Birkhauser, pp. 1-6.

Bidwell, J. and Clason, R. 1970, Readings in The History of Mathematics Education (Washington D.C.: NCTM).

Burghes, D., 2000, Mathematics Enhancement Progrmmme (MER), The First Three Years, http://www.intermep.org/

Damerow, P. et al, 1986, Mathematics for All, Unesco, Paris.

Dieudonne, J., 1961, New thinking in school mathematics. In: New Thinking In School Mathematics, pp. 31-46 (Haris: OEEC).

Heinonen, M., Kupiainen, A., ja Sainio, E., 1995, Ylaasteen Plussa 1 (Helsinki: Otava).

Heinonen, M., Kupiainen, A., ja Sainio, E., 1997, Ylaasteen Plussa 3 (Helsinki: Otava).

Hembree, R. and Dessrt, D.J., 1986, Effects of hand-held calculators in pre-college mathematics aducation, J. Res. Math. Ed., 17, 83-99.

Center for Science, Mathematics, and Engineering Education, 1997, Reflecting on Sputnik: Linking the Past, Present and Future of Educationa Reform,
http://www.nas.edu/sputnik/papers.htm

ICMI, 1986, The Impact of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching, Cambridge University Press.

Kilpatrick, J., 1997, Five Lessons From The Math Era. In: Reflecting on Sputnik: Linking the Past, Present and Future of Educationa Reform,
http://www.nas.edu/sputnik/kilpatin.htm

Kilpatrick, J., 1999, Confronting Reform, The Legasy of R.L. Moore Project,
http://www.discovery.utexas.edu/rlm/reference/kilpatrick_conf.html

Kline, M., 1973, Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math (New York: St.Martin's Press).

London Mathematical Society, 1995, Tackling the Math Problem, London Mathematical Society, Report.

Malaty, G., 1997, Malatin tehtavat matematiikan luonteesta,
http://solmu.math.helsinki.fi/1997/2/malary.html

Malaty, G., 1998, Eastern and Western mathematical education: unity, diversity and problems. In: Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 3, pp. 421-436
Solmu,1997, http://www.math.helsinki.fi/Solmu/solmu3/malaty.html

UICSM Project Staff, 1956, The university of Illinois mathematics program. In:

1970, Readings in the History of Mathematics Education, pp. 655-663 (Washington DC: NCTM).

Stone, M., 1961a, The Revolution in Mathematics, American Mathematical Monthly.

Stone, M., 1961b, The Revolution in Mathematics, Liberal Education.

Wirszup, I., 1981, The Soviet Challenge. Educational Leadership.

George Malaty
Профессор, Доктор математического образования
Университет Joensuu, Финляндия
P.O.Box 111
80101 Joensuu Finland

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02 (телефон-факс).

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2001 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2001 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Сбербанке России, г. Москва, Лефортовском отделении №6901 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.