Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятый

№ 1 (20)

Январь-март 2002 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 1 (20), 2002 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (20), январь – март 2002 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2002 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия №015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 28.03.2002 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Пять лет возрожденного журнала "Математическое образование"

От издателя, от редакции

Кратко описана история возникновения третьей серии журнала "Математическое образование", приводится справка о членах редколлегии, рассказано о принципиальных моментах концепции журнала, сообщается о дальнейших планах и перспективах.

На сломе времен

С хронологической точки зрения судьба журнала "Математическое образование" удивительна. Каждая попытка его учреждения приходится на годы серьезных социально-политических потрясений в жизни российского/советского общества. Первая серия журнала была основана Московским педагогическим кружком в 1912 г. Журнал выходил с 1912 по 1917 г. и прекратил свое существование в смутное послеоктябрьское время. Вторая серия возникла в 1928 г. в качестве органа возрожденного Московского научно-педагогического кружка. Редакционный коллектив в значительной части состоял из лиц, причастных к выпуску первой серии; имелась определенная преемственность в содержании. Годы выпуска второй серии — 1928-1930 — совпадают с годами "великого перелома" — коллективизации советского сельского хозяйства. Анализируя содержание журнала за эти годы, можно предположить, что журнал ощутил на себе "закручивание гаек" в области идеологии: если в первых выпусках 1928 г. присутствовали статьи математические, методические, методологические, философские и т.п., то в последних выпусках 1930 г. никакого "свободомыслия" не наблюдается — остались только чисто математические и методические статьи. История создания первых двух серий журнала, побудительные мотивы и судьбы участников — все это, на наш взгляд, тема интересного историко-математического исследования, результаты которого мы надеемся со временем опубликовать.

Наконец, третья серия появилась в 1997 г., в период "постперестройки", когда перестали существовать многие организационные структуры советской эпохи, а на их месте начали создаваться новые, приспосабливающиеся к новым общественно-политическим и экономическим условиям. В частности, негосударственные издательства и средства массовой информации. Коллектив сотрудников третьей серии журнала не имеет личной преемственности по отношению к создателям первых двух серий — разрыв составил 2-3 поколения. Однако, есть определенная идейнаяя преемственность, что дает нам основание считать журнал именно возрожденным “Математическим образованием”.

Недалекая предыстория

За возрождение журнала взялся небольшой круг лиц, состоящий в основном из выпускников 80-х – 90-х годов механико-математического факультета МГУ (краткая справка о всех членах редколлегии приведена ниже). Эти люди всегда отличались высокой деловой и организационной активностью в области математического и естественнонаучного образования. Они, например, причастны к созданию первоначально неформального негосударственного математического высшего учебного заведения — Независимого Московского Унивеситета (НМУ), в настоящее время — Высшего Математического Колледжа, входящего в структуру Московского Центра Непрерывного Математического Образования (МЦНМО). Часть членов редколлегии приобрела издательский опыт, подготавливая к печати учебные материалы НМУ и создавая издательский центр НМУ, выросший ныне в весьма солидное и уважаемое издательство МЦНМО. Приобрели опыт и в возрождении существовавших ранее математических журналов — участвовали в создании первых номеров третьей серии журнала “Математическое просвещение”, выходящего ныне под эгидой МЦНМО.

Накапливая опыт по созданию и развитию некоммерческих организаций, нашли подходящую организационную структуру, обеспечивающую выпуск журнала “Математическое образование”. Так в 1996 г. родился Фонд математического образования и просвещения (ФМОП), ставший учредителем журнала. Отметим, что ФМОП, помимо выпуска журнала, ведет большую образовательную, просветительную, издательскую и организационную деятельность.

Наконец, долгая и кропотливая подготовительная работа завершилась в июле 1997 г. выпуском первого номера возрожденного журнала.

Краткая справка о членах редколлегии

Состав редакционной коллегии журнала за 5 лет не претерпел изменений. Представим кратко членов редколлегии с указанием их функций.

Бондал Алексей Игоревич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Математического Института Российской Академии Наук (МИРАН). Выпускник мехмата МГУ. Отвечает за материалы по алгебре.

Дориченко Сергей Александрович, заместитель главного редактора журнала. Выпускник Мехмата МГУ.

Дубовицкая Наталья Викторовна, ответственный секретарь редколлегии. Окончила мехмат МГУ, кандидат физико-математических наук. Ассистент кафедры математического моделирования Московского Энергетического Института.

Дубовицкий Александр Викторович, директор негосударственного предприятия “Дзета”. Выпускник мехмата МГУ. Отвечает за материалы по алгебре.

Имайкин Валерий Марсович, главный редактор журнала. Выпускник мехмата МГУ, кандидат физико-математических наук, Соросовский учитель математики.

Комаров Станислав Игоревич, издатель журнала, генеральный директор ФМОП. Выпускник мехмата МГУ, учитель математики школы №179 г. Москвы, Соросовский учитель математики.

Константинов Николай Николаевич, "патриарх" углубленного математического образования школьников. Выпускник физфака МГУ, кандидат физико-математических наук. Один из основателей системы математических классов в Москве. Один из основателей Турнира Ломоносова, имеющего 25-летнюю историю. Создатель международного математического Турнира Городов. Входит в руководство различных международных организаций, устраивающих математические соревнования школьников. Лауреат Международной премии им. П.Эрдеша. Научный руководитель экспериментальной московской школы №179, преподаватель математического анализа. В редколлегии осуществляет общее руководство. Является также членом редколлегий журналов "Квант" и "Математическое просвещение".

Саблин Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Московской Сельскохозяйственной Академии им. Тимирязева. Выпускник мехмата МГУ.

Из концепции журнала

1) Начало выхода журнала совпало с временем, когда в продаже практически отсутствовали популярные качественные пособия по дополнительному математическому образованию школьников (напомним, что в советский период такие пособия были широко и повсеместно представлены). Поэтому целесообразным было создание рубрики "Учебное пособие в журнале". В этой рубрике в одном или нескольких номерах полностью публиковались достаточно объемные пособия. В настоящее время рынок таких пособий постепенно насыщается, но рубрика сохранилась, сменив функцию: теперь в ней публикуются уникальные учебные материалы признанных центров математического образования, которые иначе вряд ли нашли бы дорогу к массовому читателю.

2) Редакция старается публиковать статьи крупных ученых-математиков, относящиеся к математическому образованию. Эти материалы часто не имеют формализованного характера, а представляют собой живые человеческие размышления.

3) Некоторый приоритет отдается авторам из провинции.

О реализации замыслов

Основные концептуальные замыслы успешно реализуются.

Полностью опубликованы на страницах журнала такие учебные пособия, как

И. Р. Шафаревич. Избранные главы алгебры (№№1–7);

Специальный курс математики московской школы №57 для 9 класса в листках (№1);

А. Городенцев и другие. Числа и суммы (№№2-3(9-10), 4(11));

А. В. Жуков. Где ошибка? (№№1(16), 2(17));

А. Н. Земляков, Тезисы по алгебре (№№4(15), 1(16), 2(17)); и многие другие. Отметим, что циклы статей *В. В. Прасолова*, *А. Мякишева*, *А. Руинского* можно считать своего рода учебными пособиями по различным темам углубленного математического образования.

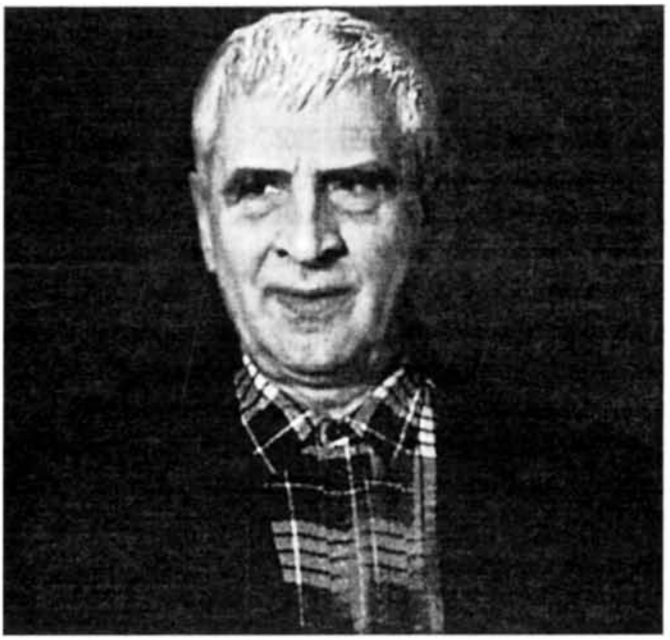
В журнале опубликованы статьи известных математиков *В. И. Арнольда*, *М. М. Постникова*, *И. Р. Шафаревича*, *В. П. Паламодова* (в последнем случае — курс лекций, прочитанных в НМУ). Широко представлены методические и историко-математические материалы. Обширна география публикаций: печатаются материалы авторов из Белорецка, Краснодара, Нижнего Новгорода, Новосибирска, Челябинска, Ярославля и т.д.

Научно-популярное приложение “Обозрение Z”

В редакцию приходит много “околоматематических” материалов, а также материалов, связанных с другими естественными науками. По мере накопления критической массы подобных материалов созрела идея выпуска научно-популярного приложения к журналу. Это приложение под названием “Обозрение Z” начало выходить с декабря 2000 г. В редакцию вошли *Н. В. Дубовицкая* (в 2000-2001 г.г. — главный редактор), *В. М. Имайкин*, *С. И. Комаров* (главный редактор с 2002 г.) и *В. Г. Попов*. Содержание приложения регулярно публикуется на страницах “Математического образования”.

Перспективы

Планируется постепенно создавать, на основе ФМОП и двух этих журналов, видео-электронно-полиграфическую базу учебных материалов по математике, естественным и гуманитарным наукам. Уже сейчас ФМОП готов на бесплатной основе предоставлять всем заинтересованным лицам учебные материалы, если это не требует дополнительных типографских и почтовых расходов, т.е. оттиски и, по специальной договоренности, электронные варианты статей, а также копии других имеющихся в распоряжении ФМОП материалов. Списки доступных материалов предполагается публиковать на страницах журнала и на Web-сайте ФМОП.



К 70-летию Н. Н. Константинова

От редакции, от издателя

2 января сего года исполнилось 70 лет Николаю Николаевичу Константинову. Публикуем краткую биографическую справку и поздравление от редакции. Предполагается со временем опубликовать ряд воспоминаний учеников и сотрудников Николая Николаевича. В настоящем номере (после поздравления редакции) публикуется небольшая заметка члена редколегии нашего журнала С. И. Комарова.

Н. Н. Константинов родился 2 января 1932 года. В 1949 году окончил московскую школу-десятилетку.

В 9-м классе посещал кружок биологии на биофаке МГУ. Большая часть занятий проходила на кафедрах университета: физиологии животных, динамики развития, генетики и др.

Однако в конце сороковых годов, став невольным свидетелем развернувшейся дискуссии о внутривидовой борьбе, а затем — печально знаменитой августовской сессии ВАСХНИЛ, переоценил значение биологии в своей жизни. Николай Николаевич вспоминает: "Биология не сделала меня умней — она была лишь объектом, а не собеседником. Математика же, которой я увлекся с 7-го класса, всякий раз, когда я делал глупость, сообщала мне об этом и делала это почти без задержки. Таким образом, она стала усилителем моих умственных способностей, и я решил — нужно поставить свой ум на математике... То, что я стал профессионалом в ней (постановке), привело меня к педагогической деятельности, которую мои друзья и ученики считают моим главным занятием."

Однако в 10-м классе Николай Николаевич стал готовиться к физической олимпиаде и благодаря агитации ее организаторов поступил на физфак МГУ. Закончив его, преподавал математику, а в 1959 году пошел в аспирантуру под руководством А. А. Ляпунова. Далее была работа в Институте теоретической и экспериментальной физики, в институте экономики АН СССР, а после начавшейся "перестройки" — в различных некоммерческих организациях: Координационном научно-методическом совете "Зодиак" при Академии наук, Независимом Московском университете (им же и учрежденном) и др.

Но, вероятно, не это самое важное в его многообразной кипучей деятельности. В аспирантские годы Николая Николаевича стали появляться в Москве, Новосибирске и других городах первые специализированные физико-математические школы для старшеклассников. Они явили собой радикальное дополнение к системе сложившихся еще с 30-х годов школьных кружков и олимпиад. И вот первые математические кружки Н. Н. Константинова "Альфа" и "Бета" 1960–1961 годов сменились под уговорами Кронрода работой в математических классах спецшкол. За сорок лет XX века многие тысячи учеников Н. Н. Константинова и привлеченных им преподавателей стали выпускниками этих физико-математических классов в 7 и 91, в 57 и 179 и других московских школах.

Но и это далеко не все. Кроме занятий в школьных классах, оставались и кружки с разнообразными олимпиадами и турнирами, турпоходы и слеты самодеятельной песни, подмосковные ногинские лесхозы и эстонские колхозы с математическими лагерями на озерах, экспедиции на Белое море и конференции в разных городах Европы. Наконец, не последнее место в этой активности отводилось и редакции нашего журнала "Математическое образование". Всего и не перечислишь. Мы и не будем пытаться, а поступим иначе.

Хотя сам Николай Николаевич как-то заявил, что пишет "... не для того, чтобы похвастаться (хотя своего не упущу!)...", нам кажется, что в воспоминаниях его учеников оживут многие яркие эпизоды их многолетнего общения. Постараемся сделать это в нескольких ближайших номерах журнала.

Всего самого наилучшего и счастливого Вам, Николай Николаевич!

Редакция журнала "Математическое образование"

* * *

Моя первая встреча с Николаем Николаевичем произошла весной 1975 года. Я получил первое в своей жизни письмо, адресованное мне персонально. В нем сообщалось, что я стал победителем городской олимпиады по математике, но вот на первое награждение не явился. Повторное состоится в ближайшее воскресенье в аудитории МГУ (не помню точно номер) — я и поехал. Сижу. Открывается дверь, быстрым шагом входит невысокий человек с портфелем в руках и начинает нас озирать снизу вверх (аудитория высокая). Потом говорит безо всяких предисловий: "Вы в прошлый раз не явились, а теперь я буду вас награждать. Учтите, что все хорошие книги уже раздали, есть те которые остались". После этого быстро раздает из пачки книжки. Мне достался, помню, большого формата фолиант в суперобложке "Проблемы кибернетики", то ли четвертый, то ли пятый том, правда, на русском языке. Я его потом иногда открывал, но так и не прочитал, он до сих пор хранится в библиотеке Фонда Математического Образования. А Константинов с кафедры уже говорит: "Награждение закончено — можно расходиться". Все и разошлись, кроме нескольких человек, которым захотелось послушать обещанный рассказ про математические школы. Послушали. "Ну, вот, — говорит Николай Николаевич, — завтра начинается собеседование по отбору в матклассы, кто хочет, записывайтесь, вот листок на столе".

Так и началось мое знакомство с Константиновым, я попал в 57-ю школу и в итоге стал математиком.

В год Московской олимпиады Алексей Бондал (член редколлегии журнала) привез меня в Эстонию, в летний математический лагерь, созданный Н.Н.Константиновым. После нескольких дней пребывания Николай Николаевич вдруг предлагает мне вести хозяйство всего лагеря. Так я стал эстонским завхозом на все восьмидесятые годы.

В 1990 году в августе я поехал с учениками по поручению Константинова искать новое место для нашего лагеря на границе Новогородской и Псковской областей, ибо из Эстонии нас фактически выгнали. Места были дикие, заболоченные (там Аракчеев создавал свои военные поселения). Посреди озера, окруженного болотами, в десяти километрах от ближайшего полузаброшенного селения остался разрушенный храм бывшего женского монастыря (в 1917 году всех монахинь вывезли). Там мы и пытались подыскать место для лагеря. Но не сложилось.

К середине августа я вернулся в Москву и в тот же день позвонил Николай Николаевичу. Он, как всегда, без лишних предисловий пригласил меня на следующий день встретиться... в Моссовете. Удивляюсь. Прихожу. После всех формальностей с пропусками усаживаемся в большом кабинете за столом под сукном. Появляется незнакомый мне человек, как оказалось, будущий префект Центрального округа г. Москвы А. И. Музыкантский. Смотрим какие-то документы, а Константинов говорит: "Вот, это Стас Комаров, он будет отслеживать все бумаги". Это были документы Учредительного Комитета Московского математического университета (позже он стал Независимым Московским университетом — НМУ). В списке членов Учредительного Комитета на первом месте я увидел фамилию Константинова с пометкой "председатель", а где-то в середине списка — свою фамилию с пометкой "заместителем председателя". Вот так я на следующие пять лет стал менеджером НМУ.

Итак, сначала — математик, потом — завхоз, потом — администратор. Все это — стиль Николай Николаевича Константинова.

С. И. Комаров

Методическое пособие по алгебре

А.Н.Земляков

Продолжаем публикацию учебных материалов ФМШ № 18 (ныне СУНЦ) при МГУ. В этом номере мы начинаем печатать первую часть пособия по алгебе на основе которого поводились занятия в летней школе ФМШ в 1975 году.

Часть I. Комбинаторика и теория групп.

Оглавление

Предисловие перед предисловием
Сорок лет спустя

Летняя физико-математическая школа при ФМШ №18 (ныне СУНЦ им. А. Н. Колмогорова) при МГУ им. М. В. Ломоносова работала с 1963 г. Инициатором организации и непременным и деятельным участником этой ЛФМШ был

Андрей Николаевич Колмогоров. В ЛФМШ приглашались школьники, добившиеся успеха на письменных и устных вступительных экзаменах в ФМШ, а также участники заключительного тура Всесоюзных (в то время) физической и математической олимпиад. Основная задача летней школы заключалась в отборе школьников, не просто проявивших действительный интерес к физике или (а чаще, **И**) математике, но и показавших *способности учиться, воспринимать новое.* Этим обусловливается выбор материала, изучаемого в ЛФМШ: содержание курсов, в данном случае, математики выбиралось так, чтобы разница в уровне предварительной подготовки школьников как можно меньше сказывалась на успешности учения в летней школе.

Карл Густав Юнг, виднейший психолог XX в., писал относительно школьного обучения: *«Если между ребенком и учителем установились хорошие личные отношения, то само по себе почти не имеет значения, насколько дидактические методы учителя соответствуют или не соответствуют новейшим требованиям. Ибо не в дидактическом методе кроется секрет успеха обучения»*[1]. Несколько утрируя, можно сказать, что при хороших (т. е. *нормальных*) отношениях учителя и учеников все равно, *чему учить*[2]. В летней школе немного не так — и в силу ее быстротечности, и потому, что собравшиеся ученики в основном не знакомы между собой и совсем не знакомы с преподавателями ЛФМШ. В связи с этим отбор содержания «летнего образования» играет особую роль. Нижеследующие материалы представляют один из возможных вариантов курса ЛФМШ по математике[3].

В начале курса изучаются элементы перечислительной комбинаторики на задачах о числе отображений конечных множеств, о числе подмножеств данного множества, об упорядоченных множествах и подмножествах, о разбиениях конечного множества на подмножества. Здесь же рассматривается понятие равномощности (эквивалентности) конечных и, главное, бесконечных множеств.

Основная дидактическая цель курса — на *интересном* и *доступном* материале познакомить школьников с одним из важнейших понятий современной алгебры — с понятием ***группы***. Тема начинается с самых простых и наглядных примеров: с групп самосовмещений (вращений в пространстве) прямоугольника, куба, правильного тетраэдра, правильных многоугольников. Эти группы выступают в качестве математической характеристики степени симметричности фигур. Интересные комбинаторные задачи связаны с геометрически различимыми раскрасками элементов «правильных» фигур. Связывая вращения фигур с перестановками их вершин (сторон, ребер, граней), мы подходим ко второму основному примеру: к группам подстановок из n элементов.

Эти группы изучаются подробно: рассматриваются разложения подстановок на циклы, отыскиваются порядки подстановок, определяются системы образующих, вводятся четные и нечетные подстановки. Красивая иллюстрация этих понятий (образующих, четности) — математическая теория игры «в пятнадцать».

---

[1]Юнг К. Г. Собрание сочинений: Конфликты детской души. — М.: Канон, 1994; с. 61.

[2]Как-то один мой бывший ученик по этому поводу заметил: а если отношения **не** хорошие, то тоже все равно, чему учить!

[3]Обычно их два; программы прочих курсов можно найти в статье: В. В. Вавилов, А. Н. Земляков «Из опыта работы ЛФМШ при МГУ» — «Математика в школе», 1979, № 4, с. 61–63

Имея перед собой конкретные примеры, школьники довольно свободно обращаются с общими понятиями группы, подгруппы, циклической группы и т. д. Интерпретация групп с помощью подстановок позволяет ознакомиться и с таким важным понятием, как *изоморфизм* групп. Среди примеров приложений теории групп отметим задачу о числе раскрасок вершин правильного p-угольника в n цветов, приводящую к *Малой теореме Ферма* (при простом p число $n^p - n$ всегда делится на p); аналогично получается и *теорема Вильсона* (при простом p число $(p-1)!+1$ делится на p).

Весь этот материал, несмотря на серьезность математического содержания, доступен и с интересом осваивается как после, в нынешней нумерации, 9-го класса, так и после 10-го. Для поступивших в одногодичный поток ФМШ летний курс является частью курса «зимнего»[4].

Учитывая растущую популярность такой формы занятий со школьниками, как летние школы и лагеря, полагаем, что публикация представленных материалов будет интересна преподавателям таких школ.

Предисловие

Это — первая часть курса АЛГЕБРА в одногодичном потоке ФМШ №18 при МГУ, проходимая в 10-х классах летней школы. Конкретной базой в данном случае являлась Московская летняя ФМШ 1975 года (1—24 июля). Программа приведена выше — как оглавление. Пособие состоит из конспекта лекций и собрания задач. Некоторые задачи снабжены поясняющими знаками над их номерами:

У — «устная» задача;

Т — более трудная задача;

К — задача, сводящаяся к предыдущим (одной или нескольким);

Д — необязательная (дополнительная) задача «для души»;

Л — трудная необязательная задача (на любителя).

Пояснения для преподавателей

Лекции предполагаются 1-часовыми, занятия — 2-часовыми. Задачи каждого занятия разделены на «порции»: 1-я на первый урок, 2-я — на второй, 3-я — на дом. Программа, пройденная в ЛФМШ-75 за 15 уроков (7 учебных дней) с 4-мя лекциями и 4-мя 2-часовыми контрольными работами (после каждой темы и зачетной), *очень* интенсивна. Ради конкретности материал при подготовке пособия не разбавлялся и не изменялся — все в точности соответствует упомянутой ЛФМШ. Хотя благодаря энергичной работе старших преподавателей (В.Н.Дубровского, Л.Э.Медникова и В.В.Рождественского) и энтузиазму школьников и младших преподавателей в ЛФМШ-75 эта программа была успешно выполнена; напряжение при указанном темпе весьма велико. Поэтому, возможно, при изучении этого материала в те же

[4] О нем см. «Тезисы по алгебре»: журнал «Математическое образование», 2000, № 4 (15), с. 2–5.

сроки его нужно либо растянуть и выбросить тему 3, либо сократить, опустив часть задач; однако не стоит его разбавлять (например, лекциями). Задачи каждой из порций 1 или 2 в принципе могут служить основой отдельного 2-часового занятия. Задачи со знаком «У» уместно после формулировки и нескольких минут на раздумье разбирать у доски. Условия контрольных работ и более развернутая программа («Перечень») приведены в конце пособия. Всего, кроме контрольных, здесь приведено 125 задач.

Замечание. Следует учесть, что по нынешним[5] программам в 9 классе общеобразовательной средней школы изучаются следующие вопросы:

1. Перестановки как порядки в множествах; формула для P_k.
2. Размещения как упорядоченные подмножества; формула для A_n^m.
3. Число всех подмножеств из n элементов (2^n).
4. Сочетания как k-элементные подмножества множества из n элементов и формула для C_n^k.
5. Рекуррентное соотношение для C_n^k и треугольник Паскаля.
6. Формула Ньютона для $(a+b)^n$.

(Перечисленные вопросы входят в задачи занятия 2.)

17 сентября 1975 года. А.Земляков.

[5]Образца 1975–80 гг. Комбинаторика, к сожалению, давно уже исключена из основной программы.

Тема 1. Множества, функции, комбинаторика

Лекция 1. Множества и функции

1. Множества

Множество — это любая совокупность элементов произвольной природы. Если x — элемент множества M, то пишут $x \in M$ («x принадлежит M»). Множество из конечного числа элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначают

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Числовые множества имеют стандартные обозначения.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — множество всех целых чисел,

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел.

Множество элементов, удовлетворяющих данному условию Y, обозначается

$$M = \{x \mid Y(x)\}$$

(«множество x т. ч. выполнено $Y(x)$»).

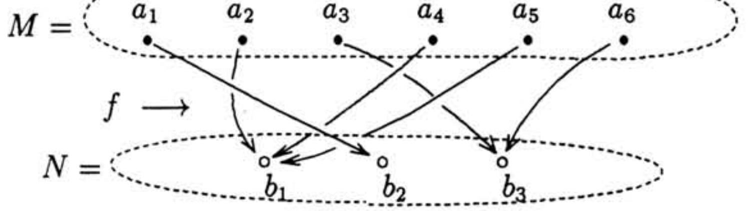
2. Функции

Пусть M и N — какие-то множества. *Функцией* или *отображением* $f : M \to N$ («множества M в множество N») называется любой тем или иным способом заданный закон, по которому каждому элементу $x \in M$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in N$; этот элемент y обозначается $f(x)$, причем пишут $x \mapsto f(x)$ («x переходит в $f(x)$»).

Если M и N — множества чисел, то функция $f : M \to N$ называется числовой. Самый удобный способ задания числовых функций — формула. Например, $f : x \mapsto x^2$ — квадратичная функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Если M и N — конечные множества, $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $N = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то имеется два удобных способа задать функцию $f : M \to N$.

1. Изобразим множества M и N условно как совокупности точек на плоскости, и из каждой точки $x \in M$ нарисуем стрелку в точку $y = f(x) \in N$. Такая картинка



полностью задает функцию $f : M \to N$ и называется *графом* функции f.

2. *Таблица* вида

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & x & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & f(x) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

тоже вполне определяет функцию f. Например, таблица предыдущей функции выглядит так:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_1 & b_3 & b_1 & b_1 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Отображения конечных множеств имеют много «житейских» интерпретаций. Скажем, рассмотренную только что функцию можно проинтерпретировать такими способами:

а) x — день недели (пнд, вт, ... , сбт), $y = f(x)$ — дежурный по комнате в день x;

б) x — один из 6 пионеров $a_1, \dots, a_6$, $y = f(x)$ — номер палатки, к которой живет x;

в) x — одна из 6 граней куба, $y = f(x)$ — цвет, которым окрашена грань x (всего цветов три — b_1, b_2, b_3);

г) x — день недели, $y = f(x)$ — основной предмет в этот день (физика, математика, физкультура).

Именно из-за подобных интерпретаций важно изучать отображения конечных множеств. Чаще всего мы будем говорить об «абстрактных» отображениях, не конкретизируя их. Наука о конечных множествах и их отображениях называется *комбинаторикой.*

3. Отступление. Словарь логических обозначений

а) «Кванторы»: $\forall$ — «для любого» («для всех»),
$\exists$ — «существует» («найдется»).

б) «Операции»: $\neg$ — «не» («неверно»),
$\vee$ — «или» (т. е. хотя бы одно),
$\wedge$ (или &) — «и»,
$\Longrightarrow$ — «следует» («вытекает»),
$\Longleftrightarrow$ — «тогда и только тогда, когда».

Пример. *Объединение* и *пересечение* множеств M и N определяются так:

$$M \cup N = \{x : \ x \in M \ \vee \ x \in N\},$$
$$M \cap N = \{x : \ x \in M \ \wedge \ x \in N\}.$$

4. Классификация функций

Определение 1. Функция $f : M \to N$ называется *инъективной* (иногда говорят «взаимно-однозначной»), если

$$\forall\, x_1, x_2 \in M \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

(«разные элементы M переходят в разные элементы N»).

Определение 2. Функция $f : M \to N$ называется *сюръективной* (иногда говорят «функцией M на N»), если

$$\forall\, y \in N\ \exists\, x \in M: \quad f(x) = y$$

(«в каждый элемент N переходит хотя бы один элемент M»). Двоеточие в последней формуле — вульгарное, но удобное обозначение для слов «такое, что».

Определение 3. Функция $f : M \to N$ называется *биективной* (или *биекцией*), если f одновременно инъективна и сюръективна (иногда биективные функции называют «взаимно-однозначными соответствиями»).

Примеры. 1. Функция f, рассмотренная выше, сюръективна, но не инъективна (почему?).

2. Изображенные ниже графы задают, соответственно, инъективную, но не сюръективную функцию f_1 и биекцию f_2.

Заметим, что инъективные отображения конечных множеств (и только они) допускают такую интерпретацию: x — школьник из множества школьников M, $y = f(x)$ — стул из множества стульев N, на котором сидит x (инъективность соответствует тому, что на одном стуле 2 человека не сидят).

Теорема. Если множества M и N конечны, то $\exists$ биекция $f : M \to N \iff M$ и N имеют одинаковое число элементов.

Доказательство — очевидно. В самом деле, ...

5. Сравнение множеств

С одной стороны, во всех бесконечных множествах вроде бы одинаковое число элементов — «бесконечное». С другой стороны, кажется, что действительных чисел гораздо больше, чем целых. Мы начнем разбираться с правильной постановкой таких вопросов, определив, что означает, что два произвольных множества M и N «имеют одинаковое число элементов».

Определение 4. Множества M и N называются *эквивалентными* (*равномощными*), если $\exists$ биекция $f : M \to N$. В таком случае пишут $M \sim N$.

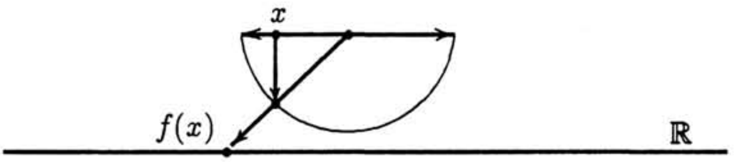
Примеры. 1. Если M и N конечны, то $M \sim N \iff M$ и N состоят из одинакового числа элементов.

2. Пусть $2\mathbb{N} = \{2, 4, \ldots, 2k, \ldots\}$ — множество всех четных чисел. Тогда $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$! Биекция $2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задается формулой $f(n) = 2n$ (тогда $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, $4 \to 8$, $\ldots$, $k \to 2k$, $\ldots$).

3. Интервал эквивалентен всей числовой прямой:

$$\longleftrightarrow \ \sim \ \mathbb{R} \ !$$

Биекция f устанавливается таким построением:



Проверьте, что это действительно биекция.

Вопрос. А существуют ли вообще не эквивалентные бесконечные множества?!

6. Парадокс Рассела

С понятием множества нужно обращаться осторожно.

Пример. Множество всех множеств $\mathfrak{M}$, очевидно, обладает свойством $\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$ (т. е. является своим собственным элементом). Пустое множество $\varnothing$, по определению, вообще не имеет элементов, поэтому $\varnothing \notin \varnothing$ (т. е. $\varnothing$ не является своим собственным элементом). Таким образом, имеется два типа множеств:

$$(1)\quad A \text{ т. ч. } A \in A \qquad \text{и} \qquad (2)\quad B \text{ т. ч. } B \notin B,$$

причем каждое множество принадлежит к одному из этих типов.

Рассмотрим множество всех множество второго типа:

$$C = \{B : \ B \notin B\}$$

Вопрос: к какому типу, (1) или (2), принадлежит множество C?
Ответ: ни к какому!!!

Занятие 1. Комбинаторика: F_n^m и A_n^m

Порция 1.

1$^{\text{У}}$. Будут ли следующие функции $f : R \to R$ ин-, сюр-, би-ективны?
а) $f(x) = 2x + 1$,
б) $f(x) = x^2$.

2$^{\text{У}}$. Эквивалентны ли множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$?

3. Выписать таблицы всех функций
а) $f : M = \{a_1, a_2\} \to N = \{b_1, b_2\}$,
б) $f : M = \{a_1, a_2\ a_3\} \to N = \{b_1, b_2\ b_3\}$.

Указать среди этих функций ин-, сюр-, би--ективные. **4.** Найти число F_2^m отображений

$$f : M = \{a_1, \ldots, a_m\} \to N = \{b_1, \ b_2\}$$

Начать с заполнения таблицы

$$\begin{array}{rcllllll} m & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ F_2^m & = & 2 & 4 & ? & ? & ? & \ldots \ . \end{array}$$

Сколько среди этих функций будет ин-, сюр-, би- ективных? (Интерпретация таких двузначных функций: (а) способы освещения кухни m лампочками $a_1, \dots, a_m$; горит — b_1, нет — b_2, (б) слова длины m из двух букв, b_1 и b_2; (в) последовательности исходов при m бросаниях монеты.)

Порция 2.

5. Найти число F_n^2 отображений

$$f : M = \{a_1,\, a_2\} \to N = \{b_1,\, \dots,\, b_n\}$$

Начать с заполнения таблицы

$$\begin{array}{ccccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ F_n^2 & = & 1 & 4 & ? & ? & ? & \dots & . \end{array}$$

6. Найти число A_n^2 инъективных отображений

$$f : M = \{a_1,\, a_2\} \to N = \{b_1,\, \dots,\, b_n\}$$

Заполнить сначала таблицу

$$\begin{array}{ccccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ A_n^2 & = & 0 & 2 & ? & ? & ? & \dots & . \end{array}$$

(Интерпретация: способы рассадить двух человек, a_1 и a_2, на n стульев, $b_1, \dots, b_n$.)

7. Найти число A_n^m инъективных отображений множества из m элементов в множество из n элементов ($m \leqslant n$).

Порция 3.

8. Найти число всех отображений множества из m элементов в множество из n элементов (обозначается F_n^m).

9. Пример. В множестве из 2 элементов $M = \{a_1,\, a_2\}$ имеется 4 подмножества: $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1,\, a_2\}$.

Определение. $A \subset M$ («A — подмножество M», «A содержится в M», «M содержит A») $\Leftrightarrow \forall x\ x \in A \Rightarrow x \in M$ («каждый элемент A является элементом M»).

Задача. Найти число всех подмножеств множества из n элементов (обозначается C_n; например, $C_2 = 4$).

10. Пример. В множестве из 3 элементов $M = \{a_1,\, a_2,\, a_3\}$ имеется ровно 3 двухэлементных подмножества: $\{a_1,\, a_2\}$, $\{a_1,\, a_3\}$, $\{a_2,\, a_3\}$.

Задача. Найти (двумя способами!) число C_n^2 двухэлементных подмножеств множества из n элементов. (Так, $C_3^2 = 3$; начните с C_4^2).

11. Сколькими способами n человек можно усадить

а) на n-местную скамью?

б) за круглый стол на n мест?

12. Найти число диагоналей выпуклого n-угольника.

13. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость n прямых?

14. Выяснить, будут ли эквивалентны друг другу следующие множества точек:

а) отрезок и полуинтервал —  и  ,

б) интервал и отрезок —  и  ,

в) прямая и окружность — $\mathbb{R}$ и  ,

г)^T отрезок и квадрат —  и  ,

д)^T множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (т. е. чисел вида m/n, где m и n — целые).

15. Множество M эквивалентно множеству N, а N, в свою очередь, эквивалентно множеству K. Верно ли, что M эквивалентно K?

Занятие 2. Комбинаторика: C_n^k и P_k

Порция 1.

Обозначение. C_n^k — число k-элементных подмножеств множества из n элементов.

1$^{\text{У}}$. Чему равны C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^n, $C_n^n - 1$, $C_n^0 + C_n^1 + \ldots C_n^n$?

На протяжении занятия будем считать, что числа C_n^k нам известны.

2. Сколькими способами n школьников можно разбить на 2 команды — M_1 из k математиков и M_2 из $n-k$ физиков?

3. Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4. Пусть мы знаем $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$. Как найти число C_{n+1}^k. (Интерпретация: добавим к n школьникам $(n+1)$-го!)

Порция 2.

С помощью рекуррентной формулы из задачи 4 можно вычислять C_n^k последовательно, составляя из этих чисел треугольную таблицу — так называемый треугольник Паскаля:

$n=0$					C_0^0										1				
$n=1$				C_1^0		C_1^1								1		1			
$n=2$			C_2^0		C_2^1		C_2^2						1		2		1		
$n=3$		C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3				1		3		3		1	
$n=4$	C_4^0		C_4^1		C_4^2		C_4^3		C_4^4		?		?		?		?		?
…	…		…		…		…		…		…		…		…		…		…

Вопрос: что напоминают строки $(1, 2, 1)$ и $(1, 3, 3, 1)$? (какие известные коэффициенты?)

5. Доказать формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

(«Раскрыть скобки» в произведении $\underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ раз}}$.)

6. Сколькими способами множество M из 10 элементов можно разбить на 3 подмножества, M_1, M_2, M_3 с числами элементов а) 2, 3, 5; б) 4, 3, 3?

7. Сколько других слов можно составить из ровно тех же букв, из которых составлены слова

а) Б И Н О М,

б) П О Л И Н О М,

в) М Н О Г О Ч Л Е Н?

Порция 3.

8. У мамы

а) 5 груш и 10 яблок,

б) 5 груш, 5 яблок и 5 лимонов.

Сколькими способами мама может выдавать Пете по фрукту в день в течение 15 дней?

9. Доказать, что $\forall n\ C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$.

10. Написать формулу для $(a+b+c)^n$ — вычислить коэффициенты $C_n^{k,l}$ при слагаемых вида $a^{n-k-l}b^kc^l$.

11. Пояснение. В множестве (или в подмножестве) порядок элементов несуществен: скажем, $\{a_1, a_3, a_2\} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Однако можно рассматривать *упорядоченные* множества — тогда $< a_1, a_3, a_2 > \neq < a_1, a_2, a_3 >$.

Задача. а) Сколько имеется упорядоченных k-элементных подмножеств множества из n элементов?

б) Сколько упорядоченных множеств можно составить из k данных элементов? (Это число называется числом **перестановок** из k элементов и обозначается P_k.)

12$^{\mathbf{K}}$. Написать явную формулу для C_n^k.

13. Доказать, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на число $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

14. Доказать, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два таких, что их разность делится на 10. Можно ли здесь 10 заменить на 11? На 9?

15. Доказать, что среди любых 10 человек найдутся двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании. Можно ли здесь 10 заменить на 9? На 11?

Занятие 3. Эквивалентность и счетность множеств

Порция 1.

0. Разбор задачи 1.15: $M \sim N \ \wedge \ N \sim K \Longrightarrow M \sim K$.

Определение (для будущего). *Композицией* функций

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{и} \quad g : B \longrightarrow C$$

называется функция

$$h = g \circ f : A \longrightarrow C,$$

заданная формулой

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (\forall x \in A).$$

$g \circ f$ — обозначение композиции. Задача 1.15 означает, что если f и g — биекции, то и их композиция будет биекцией.

1$^{\text{У}}$. Пусть $M \sim N$. Верно ли, что $N \sim M$?

Определение (для будущего). Для биективной функции $f : M \longrightarrow N$ *обратной* к f функцией f^{-1} называется отображение

$$h = f^{-1} : M \longrightarrow N,$$

определенное так:

$$h(y) = x \iff f(x) = y$$

(если f переводит x в y, то $h = f^{-1}$ переводит y в x).

2. Можно ли таким образом определить функцию, обратную к произвольной (не биективной) функции?

Займемся классификацией бесконечных множеств и попробуем выяснить, существуют ли неэквивалентные друг другу бесконечные множества.

Определение 1. Бесконечное множество M называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел — $M \sim \mathbb{N}$. Иначе говоря, M счетно, если существует биекция

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow M \ \ : \ \ n \longrightarrow f(n).$$

Обозначив $f(n)$ через a_n, видим, что M счетно $\iff$ элементы M можно занумеровать натуральными числами:

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

3. а) Доказать, что объединение любого конечного числа непересекающихся счетных множеств счетно.

б) Пусть $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $N = \{b_1, b_2, \dots\}$ — счетные множества. Доказать, что множество всех пар вида (a_k, b_l), т. е.

$$M \times N = \{(a_k, b_l) \,|\, a_k \in M, b_l \in N\}$$

счетно.

4. Доказать, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

5. Доказать, что множество $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ всех рациональных чисел счетно.

Порция 2.

Вопрос. А существуют ли несчетные бесконечные множества?

Определение 2. Говорят, что множество N *мощнее* множества M (пишут $N > M$ или $M < N$), если выполнены условия (а) $\exists$ инъективное отображение $f : M \longrightarrow N$ и

(б) не $\exists$ биекции $M \longrightarrow N$.

Если выполнено только условие (а), а про (б) ничего не известно, то говорят, что M *не мощнее* N ($M \leqslant N$ или $N \geqslant M$).

Пример. $\mathbb{N} \leqslant [0, 1)$. (Почему?)

Вопрос. Пусть $A \leqslant B$, $B \leqslant C$. Верно ли, что $A \leqslant C$?

Теорема. $\mathbb{N} < [0, 1)$.

Следствие. Существуют несчетные множества.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Допустим что $\mathbb{N} \sim [0,1[$, т.е. что множество точек полуинтервала $[0,1[$ счетно. Это означает, что числа этого промежутка можно перенумеровать:

$$[0,1[= \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Запишем каждое из чисел a_n в виде бесконечной десятичной дроби

$$a_n = 0,\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, \ldots\, a_{nk}\, \ldots$$

(a_{nk} — k-я цифра числа a_n после запятой) и расположим все эти дроби в бесконечную таблицу:

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \ldots, \\ a_2 & = & 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \ldots, \\ a_3 & = & 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \ldots, \\ a_4 & = & 0, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \ldots, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Задача 6. Придумать дробь $0, b_1b_2b_3b_4\ldots$ отличную от каждой из дробей выписанной таблицы (хотя бы в одном знаке!).

Число $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$ лежит на отрезке $[0,1[$, но не занумеровано! (Противоречие, доказывающее теорему, получено).

Итак, существуют множества, например, $[0,1[$ или $\mathbb{R}$, более мощные, чем множество натуральных чисел $\mathbb{N}$. Мощность множества всех действительных чисел $\mathbb{R}$ называют *континуумом* и обозначают c (пишут $\mathbb{R} \sim c$, $[0,1[\sim c$). Существуют мощности, бо́льшие c, и, вообще, сколь угодно больши́е мощности — см. задачи 11–15.

Порция 3.

7. Доказать, что

а) множество всех конечных последовательностей цифр 0 и 1 счетно,

б) множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 имеет мощность континуум (т.е. $\sim \mathbb{R}$).

$8^{\mathbf{K}}$. Доказать, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел имеет мощность континуум.

9. Доказать, что множества точек а) плоскости, б) пространства, — имеют мощность континуум (т.е. эквивалентны множеству точек прямой $\mathbb{R}$).

Указание: введите на плоскости (в пространстве) систему координат.

10. а) Доказать, что любое множество непересекающихся друг другом интервалов (или отрезков) на прямой не более чем счетно (т. е. конечно или счетно).

б) Можно ли на плоскости расположить более чем счетное множество непересекающихся друг с другом:

А) окружностей? Г) восьмерок 8?

Б) кругов? Д) букв П?

В) колец  ? Е) букв Т?

11[Л]. Доказать теорему Кантора: для любого множества M множество всех его подмножеств (оно обозначается 2^M) мощнее M: $2^M > M$.

Указание: предположите противное и получите противоречие, похожее на парадокс Рассела.

Замечание: Отсюда следует, что $2^C > c$, $2^{(2^c)} > 2^c$, и т. д.

12[Ш]. Существует ли множество A такое, что $A > \mathbb{N}$ и $A < c$?

13[Л]. Доказать теорему Кантора–Бернштейна: если $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$, то $A \sim B$.

14[Л]. Доказать, что если $A < B$ и $B > C$, то $A < C$.

15[Ш]. Всегда ли для двух множеств A и B можно сказать, что либо $A \leqslant B$, либо $B \leqslant A$?

Порция 4. Задачи на повторение комбинаторики.

16. а) Игральную кость (т.е. кубик с цифрами от 1 до 6 на гранях) бросают два раза и записывают выпавшие цифры K_1 и K_2. Сколько различных исходов — наборов (K_1, K_2) — имеет описанный «опыт»? В скольких из них сумма $K = K_1 + K_2$ равна 9? 10?

б) Решить ту же задачу в случае трех бросаний.

17. Сколькими способами натуральное число n можно представить в виде суммы k слагаемых, если порядок слагаемых в сумме считается существенным, а слагаемые — а) натуральные, б) целые неотрицательные? Рассмотрите сначала случаи $k = 2$ и $k = 3$.

18. Среди всех функций $f : \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \longrightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ найти число f таких, что

а) $f(x)$ принимает значение b_3 ровно 3 раза,

б) $f(x)$ принимает значение b_1 не более 2 раз,

в) $f(a_1)$ и $f(a_2)$ отличны от b_2.

19. Найти число семизначных телефонных номеров, в которых

а) встречается цифра 7,

б) встречается цифра 7, но нет подряд идущих семерок,

в) встречается комбинация цифр 777,

г) встречается комбинация цифр 17.

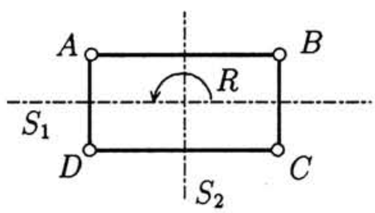
20. На ковре размерами 1м×1м сидит 51 муха. Доказать, что одним ударом хлопушки радиуса 1/7 м можно убить по крайней мере трех мух. Какой наименьший радиус может быть у хлопушки такой, что ею «одним ударом — семерых»?

Тема 2. Группы и комбинаторика

Лекция 2. Примеры групп

1. Группа самосовмещений прямоугольника

У прямоугольника $ABCD$ имеется ровно 4 самосовмещения — это осевые симметрии S_1 и S_2, центральная симметрия или поворот на 180° около центра — R, а также простейшее самосовмещение E — тождественное. Можно выписать, как переходят друг в друга вершины при этих самосовмещениях.



$X = A$	B	C	D
$E(X) = A$	B	C	D
$R(X) = C$	D	A	B
$S_1(X) = D$	C	B	A
$S_2(X) = B$	A	D	C

Если применять к прямоугольнику одно самосовмещение f, а вслед за ним — другое самосовмещение g, то их композиция $g \circ f$ есть некоторое третье самосовмещение прямоугольника. Например, при композиции $S_1 \circ R$ вершины переходят так:

$$\begin{array}{rcl} & & A \quad B \quad C \quad D \\ R & = & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & & C \quad D \quad A \quad B \\ S_1 & = & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & & B \quad A \quad D \quad C \end{array} \Longrightarrow S_1 \circ R = \begin{array}{c} A \quad B \quad C \quad D \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B \quad A \quad D \quad C \end{array}$$

— и мы видим, что $S_1 \circ R = S_2$. Эти композиции можно находить и геометрически — без помощи таблиц; например, $R \circ R = E$.

Можно заполнить *таблицу композиции*

$g \setminus f$	E	R	S_1	S_2
E	E	?	?	?
R	?	E		
S_1	?	S_2	?	
S_2	?			

Множество $G_\Pi = \{E, R, S_1, S_2\}$ рассмотренных самосовмещений с операцией композиции самосовмещений (аналогом умножения) называется *группой* самосовмещений прямоугольника.

2. Группа самосовмещений произвольной фигуры Φ

Определение 1. Движение фигуры Φ как твердого тела, переводящее Φ в себя, называется *самосовмещением* фигуры Φ. Самосовмещения принято рассматривать не как процессы, а как функции $f : \Phi \longrightarrow \Phi$, так что самосовмещения f_1 и f_2 одинаковы, если для любой точки M фигуры Φ $f_1(M) = f_2(M)$.

По двум самосовмещениям $f : \Phi \longrightarrow \Phi$ и $g : \Phi \longrightarrow \Phi$ можно построить их композицию

$$g \circ f : \Phi \longrightarrow \Phi : \quad M \mapsto g(f(M)).$$

Ясно, композиция самосовмещений — тоже самосовмещение.

Вопрос. Верно ли, что $f \circ g = g \circ f$?

Для каждого самосовмещения f естественным образом определяется *обратное* самосовмещение f^{-1}.

Множество всех самосовмещений фигуры Φ обозначается G_Φ. Это множество G_Φ с операцией композиции называется *группой самосовмещений фигуры* Φ.

Общие свойства группы G_Φ.

Г1. ∃ тождественное самосовмещение E, т. ч. $\forall M \; E(M) = M$. По отношению к композиции E характеризуется свойством

$$\forall f \in G_\Phi \qquad f \circ E = E \circ f = f.$$

Г2. $\forall f \in G_\Phi \; \exists f^{-1} \in G_\Phi \; f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = E$.

3. Группа самосовмещений куба G_K

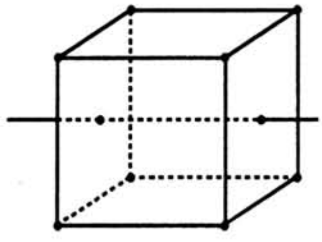
А) Найдем сначала число самосовмещений в G_K — *порядок группы* G_K.

1-й способ. Фиксированную грань куба Г можно перевести в любую из 6 граней, включая Г. Совместить Г с какой-то гранью Г′ можно 4-мя способами (ибо есть 4 поворота у Г — квадрата). Итого получается $6 \cdot 4 = 24$ самосовмещения.

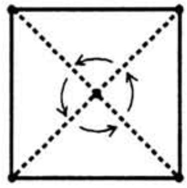
2-й и 3-й способы аналогичны, только рассматриваются не грани, а ребра или вершины. Конечно, ответ получится тот же самый: $12 \cdot 2$ или $8 \cdot 3$.

Б) Опишем теперь эти 24 самосовмещения простейшим образом — как повороты около каких —то осей. Перечислим оси.

а) Оси 4-го порядка:

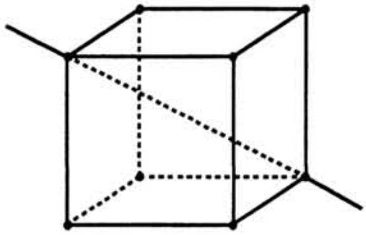


ВИД СБОКУ

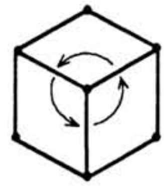


3 оси × 4 поворота = 12 самосовмещений.

б) Оси 3— го порядка:



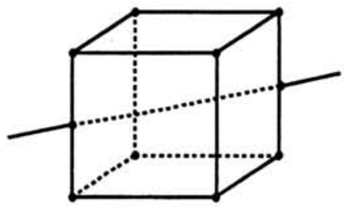
ВИД СБОКУ



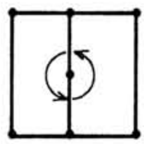
4 оси $\times$ 3 поворота $=$ 12 самосовмещений.

Мы уже насчитали $12 + 12 = 24$ поворота. Но есть еще!

в) Оси 2 — го порядка:



ВИД СБОКУ



6 осей $\times$ 2 поворота $=$ 12 самосовмещений.

Итак, получилось 36 самосовмещений! Где же «лишние»?

Вопрос. Сколько раз мы считали тождественное самосовмещение?

Таким образом, группа куба G_K состоит из 24 элементов.

4. Группы подстановок

Самосовмещение фигуры Φ как-то переставляет между собой вершины фигуры Φ, т. е. осуществляет биективное отображение всего множества вершин $\{M_1, \ldots, M_n\}$ на себя. Напрашивается такое обобщение.

Рассмотрим произвольное множество из n элементов, скажем,

$$A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Определение 2. *Подстановками* из n элементов $1, 2, 3, \ldots, n$ называются биективные отображения $f : A_n \longrightarrow A_n$.

Подстановки удобно задавать таблицами :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \qquad \text{где } a_k = f(k).$$

Всего имеется $A_n^n = P_n = n!$ подстановок из n элементов.

Композиция двух подстановок из n элементов — снова подстановка (почему?). Например, для $n = 3$ можно записать

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для каждой подстановки f определена обратная подстановка f^{-1}. Например, для $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Множество всех подстановок из n элементов обозначается S_n. Это множество S_n с операцией композиции называется *группой подстановок* из n элементов.

Общие свойства группы S_n.

(Г1) $\exists$ тождественная подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

обладающая свойством:

$$\forall f \in S_n \qquad f \circ e = e \circ f = f.$$

(Г2) $\forall f \in S_n\ \ \exists f^{-1} \in S_n: \qquad f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$

Эти два свойства совершенно аналогичны «общим свойствам» групп самосовмещений.

5. Уравнения в группах

В рассмотренных группах G_Φ и S_n есть операция композиции, сходная с умножением, имеется элемент e (или E), играющий роль единицы по отношению к этому «умножению», и для каждого элемента f есть обратный элемент f^{-1} — как бы $\frac{1}{f}$.

Задача. Даны элементы группы a и b; найти элемент x этой группы такой, что $a \circ x = b$.

В обычной арифметике для решения уравнения $ax = b$ мы делим обе части на a и находим $x = \frac{b}{a}$. В рассматриваемом случае поступим аналогично, только вместо деления на a умножим обе части соотношения $a \circ x = b$ на элемент a^{-1}:

$$a \circ x = b \ \Rightarrow\ a^{-1} \circ a \circ x = a^{-1} \circ b.$$

Так как $a^{-1} \circ a = e$, а $e \circ x = x$, получаем:

$$x = a^{-1} \circ b,$$

и задача решена (считается, что мы можем найти a^{-1} и $a^{-1} \circ b$).

При этом мы пользовались только свойствами (Г1) и (Г2); ну, еще мы переставили скобки, заменив $a^{-1} \circ (a \circ x)$ на $(a^{-1} \circ a) \circ x$.

Однако отнюдь не любая операция обладает свойством *ассоциативности* (сочетательности):

(А) $\qquad \forall\, a, b, c \qquad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$

Например, вычитание чисел не ассоциативно:

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c.$$

В наших случаях, однако, (А) выполнено — операция композиции всегда ассоциативна (потом докажете).

Предостережение. Уравнение $a \circ x = b$ нельзя решать так:

$$a \circ x = b \;\Rightarrow\; a^{-1} \circ a \circ x = b \circ a^{-1} \quad \text{и т. д.}$$

Если левую часть равенства мы «умножаем» на a^{-1} *слева*, то и правую часть нужно умножить на a^{-1} *слева*, так как мы не уверены в этом, что $b \circ a^{-1} = a^{-1} \circ b$. Вовсе не любая операция обладает свойством *коммутативности* (перестановочности):

(K) $\quad \forall\, a, b \quad a \circ b = b \circ a.$

Например, вычитание не коммутативно: вообще говоря,

$$a - b \neq b - a.$$

Композиция в «большинстве» групп G_Φ и S_n тоже *не коммутативна*. Простейший пример: в группе S_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}!$$

Занятие 4. Группы G_Φ и S_n

Порция 1.

1$^{\text{У}}$. Для функций f и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданных формулами

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = x^2,$$

найти композицию $f \circ g$ и $g \circ f$ (верно ли, что $f \circ g = g \circ f$?).

2$^{\text{У}}$. Как в группе (G_Φ или S_n) решить уравнения вида

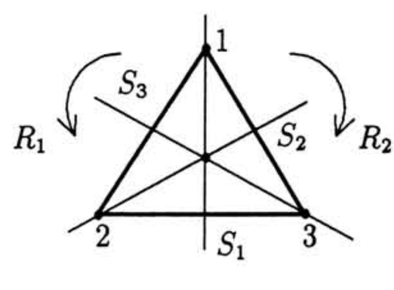
а) $x \circ a = b$,

б) $a_1 \circ x \circ a_2 = b$?

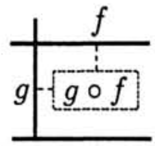
Вопрос. Сколько самосовмещений имеет правильный треугольник?

Введены стандартные обозначения для самосовмещений треугольника:

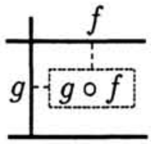
$$G_\Delta = \{E, R_1, R_2, S_1, S_2, S_3\}$$



3. Заполнить таблицу композиции в группе G_Δ:



(Разумно для этого нарисовать все графы соответствующих самосовмещениям треугольника подстановок вершин или выписать все их таблицы — например,



или $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

затем можно «вычислять» графы или таблицы композиций. Впрочем, можно находить $g \circ f$ и геометрически — чему, например, равны композиции $S_1 \circ S_2$? $R_1 \circ R_2$?

4. С помощью составленной таблицы решить в группе следующие уравнения, т. е. найти самосовмещения $x \in G_\Delta$ такие, что:

а) $S_1 \circ x = S_2$, а$'$) $x \circ S_1 = S_2$;

б) $S_1 \circ x \circ S_1 = R_1$, б$'$) $S_1 \circ x \circ S_2 = R_1$;

в) $x^2 = E$, в$'$) $x^2 = R_1$, в$''$) $x^2 = S_1$.

Здесь x^2 — обозначение для $x \circ x$. Аналогично через x^n мы будем обозначать композицию $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ раз}}$. Заметим, что для корректности такого обозначения нужна ассоциативность операции композиции!

Порция 3.

5. Доказать **лемму об ассоциативности композиции**: для любых трех отображений

$$f : A \to B, \qquad g : B \to C, \qquad h : C \to D$$

композиции

$$h \circ (g \circ f) \text{ и } (h \circ g) \circ f : \quad A \to D$$

совпадают: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, то есть

$$\forall\, x \in A \qquad (h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

(Из этой леммы следует желанная ассоциативность операций в группах G_Φ и S_n.)

6. Найти в группе S_7 композиции $a \circ b$ и a^3, если

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить также a^{-1}, b^{-1}, $a^{-1} \circ b^{-1}$, $(a \circ b)^{-1}$.

7. Верно ли в группах (G_Φ или S_n), что $(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$? Как написать «заведомо» правильную формулу для $(a \circ b)^{-1}$?

8. Для указанных ниже подставок x найти n такое, что $x^n = e$ (e — тождественная подстановка):

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

(Попробуйте придумать быстрый способ нахождения такого n — без вычисления степеней x^2, x^3, ...)

9. Решить в группе S_5 уравнения:

а) $x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

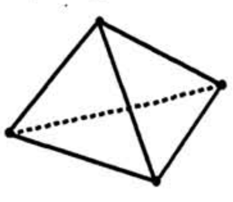
10. Найти порядок группы самосовмещений G_n правильного n-угольника (т. е. найти число самосовмещений в G_n). Указать оси симметрий и углы поворотов из группы G_n. (Начните с $n = 4, 5, 6$.)

Во всех следующих задачах требуется:

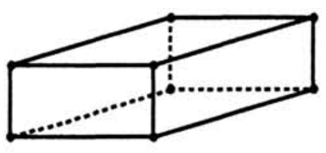
а) найти порядки указанных групп самосовмещений;

б) описать все самосовмещения из этих групп, т. е. указать оси и углы поворотов, при которых указанные фигуры переходят в себя.

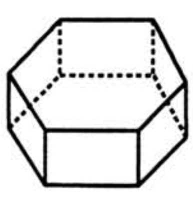
11. Группа $G_{\text{Т}}$ правильного тетраэдра



12. Группа $G_{\text{ПП}}$ прямоугольного параллелепипеда



13. Группа $G_{\text{Ш}}$ шестигранной гайки (т. е. правильной шестиугольной призмы)



14. Группа $G_{\text{О}}$ октаэдра

15. Группа

а) $G_{\text{Д}}$ додекаэдра,

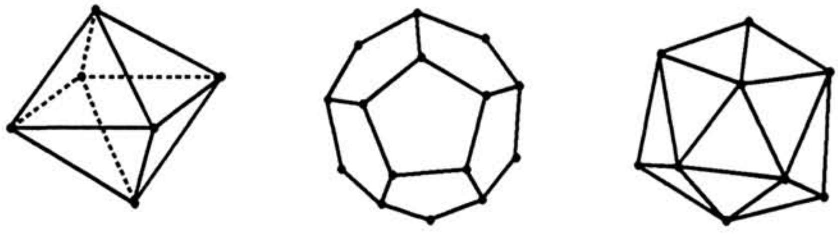
б) $G_{\text{И}}$ икосаэдра.

Октаэдр, додекаэдр, икосаэдр — это правильные многогранники, составленные, соответственно:

октаэдр — из 8 правильных треугольников, по 4 при вершине;

додекаэдр — из 12 правильных 5-угольников, по 3 при вершине;

икосаэдр — из 20 правильных треугольников, по 5 при вершине



ОКТАЭДР ДОДЕКАЭДР ИКОСАЭДР

Занятие 5. Комбинаторика подстановок и раскрасок

Порция 1.

Определение. Для подстановки $f \in S_n$ минимальное из чисел m таких, что $f^m = e$, называется *порядком* подстановки f и обозначается m_f.

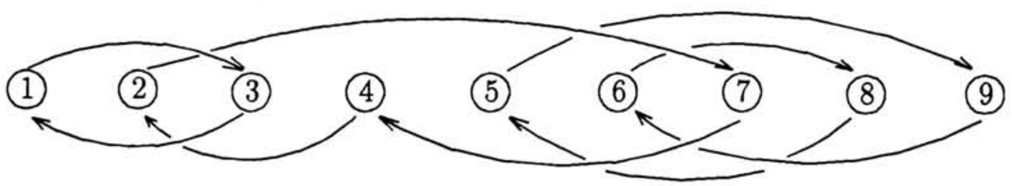
Вопрос. Почему такие m, что $f^m = e$, вообще есть?

Ответ (и удобный способ вычисления порядков).

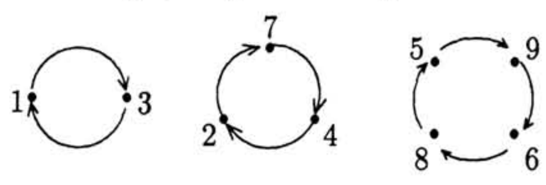
Нарисуем *граф подстановки* f. Например пусть

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_9.$$

Граф f удобно изобразить так:



Стрелки образуют замкнутые *циклы*. Эти циклы можно «расцепить» — получится так называемый *циклический граф* подстановки f:



Этот граф состоит из циклов порядков 2, 3 и 4. Теперь ясно, что порядок f равен ... ? (При этом не пришлось возводить f в степень 12!)

Аналогичным образом любую подстановку $f \in S_n$ можно *разложить* на циклы (т.е. построить ее циклический граф). Набор порядков циклов подстановки f называется также *типом* этой подстановки: тип $f = (k_1, \dots, k_s)$ Например, тип предыдущей подстановки — (2,3,4).

Пример. Подстановки из S_3 могут иметь такие типы:

(1,1,1) — это подстановка e,

(2,1) — таких подстановок три,

(3) — таких подстановок две.

1. Перечислить все типы и порядки подстановок из групп S_4, S_5, S_6.

2. Придумать в S_9 подстановки порядков 8, 9, 10, 15, 2, 3 и 11.

3. Как в общем случае по типу $(k_1, \dots, k_s)$ подстановки f найти порядок f? Можно ли, обратно, по порядку f найти тип f?

4. Найти общее число подстановок следующих типов:

а) $(2,3)$ в S_5,
б) $(2,4)$ в S_6,
в) $(3,3)$ в S_6,
г) $(2,3,4)$ в S_9;
д) $(1,1,3)$ в S_5;
е) $(3,3,4)$ в S_{10}.

5. В группе S_{10} найти число подстановок порядка а) 10, б) 2.

Порция 2.

Определение. Две раскраски $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ каких-то элементов (вершин, сторон или ребер, граней) фигуры Φ называются неразличимыми (эквивалентными), если существует такое самосовмещение фигуры Φ, которое раскраску $\mathcal{X}$ переводит в $\mathcal{Y}$:

$$\mathcal{X} \sim \mathcal{Y} \Leftrightarrow \exists\, f \in G_\Phi \quad f(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}.$$

Задача. Найти число различимых раскрасок семи вершин правильного 7-угольника в 7 различных цветов.

Решение задачи и общий метод отыскания числа раскрасок.

Прежде всего, закрепим раскрашиваемую фигуру и занумеруем раскрашиваемые элементы: $M_1, M_2, \dots, M_m$. В нашем случае $m = 7$. Если $K_1, K_2, \dots, K_n$ — имеющиеся краски (т. е. цвета), то *раскраску* $\mathcal{X}$ выделенных элементов можно трактовать как функцию

$$\mathcal{X} : \{M_1, \dots, M_m\} \to \{K_1, \dots, K_n\}.$$

Разноцветным раскраскам (т. е. раскраскам в различные цвета) соответствуют инъективные функции. Следовательно, число разноцветных «закрепленных» раскрасок равно числу инъективных отображений

$$\{M_1, \dots, M_m\} \to \{K_1, \dots, K_n\},$$

т. е. равно A_n^m. В нашем случае $n = 7$ и число закрепленных раскрасок равно $7!$.

Если теперь разрешить «самосовмещать» фигуру, то некоторые из закрепленных раскрасок окажутся неразличимыми. Из одной закрепленной раскраски $\mathcal{X}$ различными самосовмещениями фигуры можно получить N эквивалентных $\mathcal{X}$ раскрасок, включая самое $\mathcal{X}$, где N — число самосовмещений фигуры, т. е. порядок ее группы самосовмещений. Следовательно, при подсчете числа закрепленных раскрасок мы считали одну и ту же незакрепленную раскраску N раз. Следовательно, искомое число различных раскрасок равно числу закрепленных раскрасок, деленному на N. В нашем случае $N = 14$ и искомое число $K = 7!/14 = 6!/2 = 360$. Задача решена.

6. Найти число различимых разноцветных раскрасок граней правильного тетраэдра в 4 цвета.

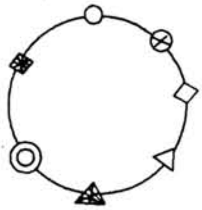
7. а) Найти число различимых игральных костей, т.е. кубиков с расставленными на его гранях цифрами от 1 до 6 — без каких-либо ограничений.

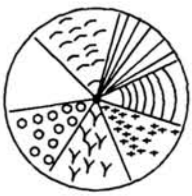
б) Найти число таких игральных костей, что сумма цифр на любых двух противоположных гранях равна 7 (т. е. настоящих игральных костей!).

8. Найти число различимых

а) погремушек из 7 различных шариков,

б) ковриков из 7 разноцветных лоскутков.





(В отличие от погремушек коврик нельзя переворачивать — по «определению» коврика.)

Порция 3.

9. Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — раскраски фигуры Ф. Верно ли, что:

а) если $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \sim \mathcal{Z}$, то $\mathcal{X} \sim \mathcal{Z}$?

б) если $\mathcal{X} \sim \mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y} \sim \mathcal{X}$?

10. Найти число различимых разноцветных раскрасок

а) ребер тетраэдра в 6 цветов;

б) вершин тетраэдра в 6 цветов (2 цвета остаются не использованными);

в) граней октаэдра в 8 цветов;

г) вершин куба в 8 цветов.

11. Найти число различимых раскрасок вершин правильного p-угольника в 2 цвета — белый и черный (при этом все вершины можно красить и одним цветом). Рассмотреть случаи $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

12. Указать все возможные порядки подстановок в группах S_n для $n = 7, 8, 9, 10, 11$. Для каждой из этих возможностей указать реализующие такие порядки типы подстановок.

13. Найти число подстановок следующих типов:

а) $(3,4,5,6)$ в S_{18};
б) $(3,3,5,7)$ в S_{18};
в) $(3,3,6,6)$ в S_{18};
г) $(3,3,3,5)$ в S_{14};
д) $(3,3,3,4,4)$ в S_{17};
е) $(2,2,2,2,2)$ в S_{10}.

14. В каждой из групп S_7, S_8, S_9 найти число подстановок порядков 6, 7, 10 и 12.

15. Порядки двух каких-то подстановок a и b равны 2.

а) Верно ли, что порядок их композиции $a \circ b$ тоже равен 2?

б) Может ли порядок $a \circ b$ равняться 1? 3? 4? 5? 6? 7? Если может, то приведите пример.

(**Вопрос:** каким самосовмещиниям правильного n-угольника соответствуют подстановки вершин порядка 2?)

Занятие 6. Образующие и подгруппы

Порция 1.

1. Указать в группе треугольника G_Δ два таких самосовмещения a и b, что любое другое самосовмещение $f \in G_\Delta$ представляется в виде композиции самосовмещений a и b в некотором количестве и порядке:

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k,$$

где все f_i — это либо a, либо b.

Определение. Описанные в задаче 1 самосовмещения a и b называются *образующими* группы G_Δ. Говорят также, что группа G_Δ *порождена* своими элементами a и b. Число образующих (или *порождающих элементов*) в группе может быть и 3, и 1, и больше 3-х.

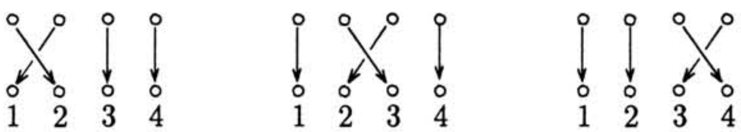
2. Придумать плоскую фигуру, группа самосовмещений которой состояла бы из 4-х элементов и имела бы ровно одну образующую a (тогда $G_\Phi = \{E, a, a^2, a^3\}$, $a^4 = \dots$).

3. Можно ли в группах S_3, S_4, S_5 указать ровно одну образующую?

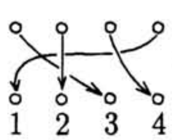
4. Доказать, что подстановки

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

порождают всю группу S_4. Нарисуем графы подстановок t_i:



Задачу 4 можно переформулировать так: для любой подстановки $f \in S_4$ граф f можно представить как «композицию» трех нарисованных графов t_i. Попробуйте сделать это для такого графа

$f =$  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

Порция 2.

Рассмотрим в группе G (G_Φ или S_n) какой-нибудь элемент a и все его степени

$$a^2,\ a^3,\ a^4,\ \dots,\ a^{m_a-1},\ a^{m_a} = e \quad (m_a \text{ — порядок } a).$$

Подмножество в G, состоящее из этих элементов,

$$H = H(a) = \{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \dots,\ a^{m_a-1},\ a^{m_a} = e\},$$

обладает таким свойством:

(П) Если $f \in H$ и $g \in H$, то $f \circ g \in H$ и $f^{-1} \in H$.

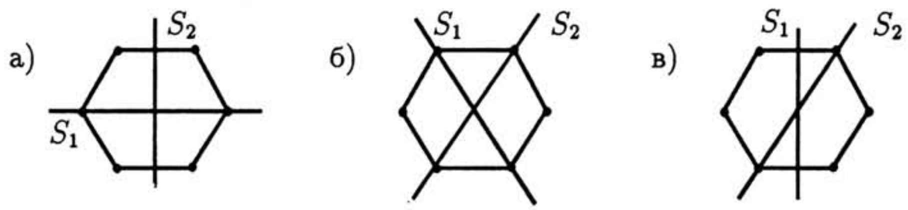
Почему? Очевидно, что $f \circ g \in H$, но почему $f^{-1} \in H$? Чему равны элементы $(a^2)^{-1}$? $(a^3)^{-1}$?

Определение. Подмножество H группы G, обладающее свойством (П), называется *подгруппой* группы G.

Рассмотренная подгруппа $H = H(a)$ называется *циклической подгруппой* в G, *порожденной элементом* a. Аналогично определяются подгруппы, порожденные двумя элементами — $H(a,b)$ — а также бо́льшим числом элементов.

5. Перечислить все циклические подгруппы в группах G_4, G_5 и G_6 правильных 4-, 5- и 6-угольников.

6. В группе G_6 найти (описать) подгруппу $H(S_1, S_2)$, порожденную симметриями S_1 и S_2 относительно таких осей:



Указание: поищите в 6-угольнике «подфигуру» Φ', которую симметрии S_1 и S_2 оставляли бы на месте.

Порция 3.

7. Пусть $m = m_a$ — порядок элемента a группы G. Сколько разных элементов имеется в подгруппе

$$H(a) = \{e,\ a,\ a^2,\ \ldots, a^{m_a - 1}\}?$$

(Т. е., есть ли среди выписанных элементов одинаковые?)

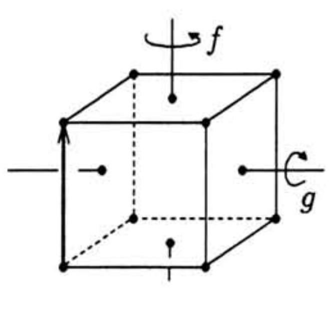
8. Найти в группе S_4 подгруппу $H(a,b)$, порожденную подстановками

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сколько элементов будет в $H(a,b)$?

Указание: проинтерпретировать подстановки a и b геометрически — самосовмещениями.

9. Рассмотрим в группе куба $G_{\text{К}}$ повороты f и g на 90° около указанных осей.



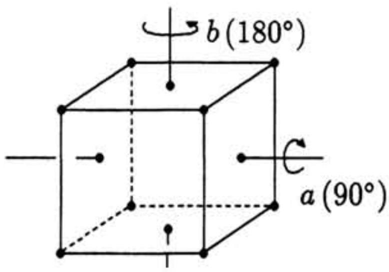
Вычислить следующие композиции:

а) $f \circ g$; б) $f^2 \circ g^2$;
б) $g \circ f$; г) $f^{-1} \circ g$;
в) $f \circ g \circ f^{-1}$; д) $f^2 \circ g$.

Найти оси и углы поворотов — этих композиций.

Указание: нарисуйте на одном из ребер куба стрелку и следите за тем, куда она попадает в результате композиции.

10. Рассмотрим повороты куба a и b около указанных осей на углы 90° и 180°.



Найти в группе куба $G_{\text{К}}$ подгруппу $H(a, b)$ (указать число ее элементов, а также все оси и углы). Построить фигуру Φ внутри куба так, чтобы ее группой самосовмещений была бы в точности подгруппа $H(a, b)$.

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

Алгебра логики

А. И. Саблин

Александр Иванович Саблин — старший преподаватель Московской Сельскохозяйственной Академии им. Тимирязева, член редакционной коллегии нашего журнала. Предлагаемая заметка содержит краткое мотивированное введение в алгебру логики высказываний. Она может быть использована всеми интересующимися математической логикой для первоначального знакомства с предметом.

1. Логические связки и логические формулы

Для того, чтобы ввести логические формулы и логические связки, рассмотрим следующую задачу:

Задача. Имеется следующий отрывок из произведения Жоржа Сименона:

“Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
— Говорит Мегрэ. Есть новости ?
— Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи. Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила...
— Все. Спасибо. Этого достаточно. — Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.”
Какой вывод сделал комиссар Мегрэ ?

Для решения этой задачи переведем ее на язык математической логики. Нетрудно заметить, что все сообщения инспекторов, а также имеющиеся предварительные знания комиссара Мегрэ, базируются на следующих высказываниях, которые мы будем называть *элементарными* (или *простыми*) *высказываниями*:

A = { Франсуа был пьян },

B = { Этьен убийца },

C = { Франсуа лжет },

D = { убийство произошло после полуночи }.

Все утверждения инспекторов получаются из высказываний A,B,C,D с помощью довольно стандартных языковых конструкций. А именно, если мы хотим сказать, что истинно хотя бы одно из высказываний A и B, мы используем союз "или", если мы хотим сказать, что оба высказывания A и B истинны, мы используем союз "и", если мы хотим сказать, что из истинности A следует истинность B, то мы используем конструкцию "если A, то B", и наконец, если мы хотим обозначить высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно, мы используем частицу "не". В математической логике для обозначения этих конструкций используются так называемые *логические связки*. Основные логические связки перечислены в следующей таблице вместе с их обозначениями и названиями, принятыми в математической логике:

Конструкция	Обозначение	Название
A или B	$A \vee B$	*дизъюнкция*
A и B	$A \& B$	*конъюнкция*
если A, то B	$A \to B$	*импликация*
не A	$\overline{A}$	*отрицание*

Таблица 1.

Используя обозначения для логических связок мы можем записать утверждения инспекторов и предварительную информацию, которой располагал комиссар, в виде следующих формул:

$$X = A \to (B \vee C),$$
$$Y = B \vee (\overline{A} \& D),$$
$$Z = D \to (B \vee C),$$
$$T = \overline{A} \to \overline{C}.$$

Формулы X, Y, Z, T называются в математической логике *сложными высказываниями*. По смыслу задачи эти высказывания истинны. Можем ли мы сделать из этого вывод об истинности исходных элементарных высказываний? Точнее, в задаче нас интересует высказывание B. Эту задачу можно решать по разному.

Один из способов состоит в следующем. Потенциально каждое элементарное высказывание, входящее в высказывания X, Y, Z, T, может быть как истинно, так и ложно. При этом, если мы присвоим эти значения (их называют *истинностными значениями*) произвольным образом, то мы можем определить истинностные значения и самих высказываний X, Y, Z, T. Это можно сделать на основании таблицы истинности для основных логических связок :

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \to B$	$\overline{A}$
и	и	и	и	и	л
и	л	л	и	л	л
л	и	л	и	и	и
л	л	л	л	и	и

Таблица 2.

Таблица 2 следует из описанных выше свойств языковых конструкций, соответствующих логическим связкам. В математической логике за основу берется сама таблица 2.

Нетрудно понять, что имеется конечное число способов присвоить истинностные значения четырем высказываниям A, B, C, D. А именно, таких способов 16. Действительно, есть 2 способа присвоить истинностное значение переменной A. В каждом из них имеется 2 способа присвоить значение переменной B. Всего 4. В каждом из этих 4-х есть 2 способа присвоить истинностные значения переменной C. Всего 8. В каждом из них есть 2 способа присвоить истинностные значения переменной D. Итого 16.

Выпишем все 16 способов и в каждом из них найдем истинностные значения формул X, Y, Z, T. Получим следующую таблицу :

A	B	C	D	$A \to (B \vee C)$	$B \vee (\overline{A} \& D)$	$D \to (B \vee C)$	$\overline{A} \to \overline{C}$
и	и	и	и	и	и	и	и *
и	и	и	л	и	и	и	и *
и	и	л	и	и	и	и	и *
и	и	л	л	и	и	и	и *
и	л	и	и	и	л	и	и
и	л	и	л	и	л	и	и
и	л	л	и	л	л	л	и
и	л	л	л	л	л	и	и
л	и	и	и	и	и	и	л
л	и	и	л	и	и	и	л
л	и	л	и	и	и	и	и *
л	и	л	л	и	и	и	и *
л	л	и	и	и	и	и	л
л	л	и	л	и	л	и	л
л	л	л	и	и	и	л	и
л	л	л	л	и	л	и	и

Таблица 3.

Нас интересуют только строчки, в которых все формулы истинны — они помечены знаком $*$. Таких строчек несколько, но в каждой из них интересующее нас высказывание В истинно. Таким образом мы можем сделать тот же вывод, который сделал комиссар Мегрэ: Этьен убийца.

2. Свойства логических формул

Описанное выше решение задачи про комиссара Мегрэ обладает тем недостатком, что целиком основано на переборе. При этом число рассматриваемых вариантов с ростом числа элементарных высказываний растет как 2^n, т.е. экспоненциально. Можно ли было как-то сократить перебор? Для ответа на этот вопрос рассмотрим другое решение.

Заметим, что разные логические формулы могут принимать совершенно одинаковые значения при присвоении входящим в них переменным любых возможных истинностных значений. Например:

A	B	$\overline{A\&B}$	$\overline{A}\vee\overline{B}$
и	и	л	л
и	л	и	и
л	и	и	и
л	л	и	и

Таблица 4.

В этом случае мы будем писать

$$\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B} \qquad (I)$$

и называть равенство (I) ***логическим тождеством.***

Нетрудно понять, что равенство (I) останется справедливым, если входящие в него простые высказывания A и B заменить на любые сложные высказывания. Таким образом логические тождества остаются справедливыми вне зависимости от того, являются ли входящие в них высказывания простыми или сложными.

Одни логические тождества могут быть получены из других. Поэтому среди всех логических тождеств можно выделить список "основных" таким образом, что все остальные могут быть из них получены.

Обычно в этом качестве берут следующие тождества:

Коммутативность:

1. $A\&B = B\&A$,
2. $A \vee B = B \vee A$.

Ассоциативность:

3. $(A\&B)\&C = A\&(B\&C)$,
4. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

Дистрибутивность:

5. $A\&(B \vee C) = (A\&B) \vee (A\&C)$,
6. $A \vee (B\&C) = (A \vee B)\&(A \vee C)$.

Идемпотентность:

7. $A\&A = A$,
8. $A \vee A = A$.

Закон поглощения:

9. $A \vee (A\&B) = A$,
10. $A\&(A \vee B) = A$.

Инволютивность:

11. $\overline{\overline{A}} = A$.

Законы де Моргана:

12. $\overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}$,

13. $\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B}$.

Все перечисленные тождества для высказываний легко доказать с помощью таблиц истинности. Кроме того, некоторые из них могут быть выведены из других. Например:

$$A\&(A \vee B) = (5) = (A\&A) \vee (A\&B) = (7) = A \vee (A\&B) = (9) = A$$

В скобках мы указываем используемые тождества.

Перечисленные свойства 1 — 13 являются аксиомами *булевой алгебры* или *булевой решетки*. Точнее, *булевой алгеброй* называется множество с двумя двуместными и одной одноместной операцией, такими, что выполняются свойства 1 — 13. Таким образом, высказывания с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания образуют булеву алгебру, называемую *алгеброй высказываний*. Другими примерами булевых алгебр являются алгебра подмножеств данного множества с операциями пересечения, объединения и дополнения и алгебра событий в теории вероятностей с операциями умножения, сложения событий и перехода к противоположному событию. Заметим, что свойства 1 — 13 сохраняются, если коньюнкцию и дизьюнкцию поменять местами.

В действительности набор равенств 1 — 13 можно дополнить. Для этого необходимо дать два новых определения. Логическую формулу будем называть *тождественно ложной*, если она принимает значение "ложь" при любых значениях входящих в нее переменных. Логическую формулу будем называть *тождественно истинной* или *тавтологией*, если она принимает значение "истина" при любых значениях входящих в нее переменных. В качестве общего обозначения для тождественно истинных формул будем использовать букву T, для тождественно ложных формул — букву F.

Для любого высказывания A справедливы следующие равенства :

14) $A \vee T = T$,

15) $A\&T = A$,

16) $A \vee F = A$,

17) $A\&F = F$,

18) $A \vee \overline{A} = T$,

19) $A\&\overline{A} = F$,

20) $\overline{T} = F$.

Теперь мы можем привести другое решение задачи о комиссаре Мегрэ. Необходимо показать, что из истинности высказываний X, Y, Z, T следует истинность высказывания B. Это соответствует тождественной истинности высказывания

$$V = (X\&Y\&Z\&T) \to B.$$

Мы докажем тождественную ложность $\overline{V}$, используя свойства 1 — 20 и равенство

21) $A \to B = \overline{A} \vee B$, сводящее импликацию к дизьюнкции и отрицанию. В скобках, как обычно, указываем все используемые тождества, за исключением коммутативности и ассоциативности. Заметим, что отсутствие скобок в "длинных" дизъюнкциях или конъюнкциях основано на ассоциативности.

Упростим сначала произведение $X\&Y\&Z$.

$$X\&Y\&Z = (21) = (\overline{A} \vee B \vee C)\&(B \vee (\overline{A}\&D))\&(\overline{D} \vee B \vee C) = (6) =$$
$$= B \vee ((A \vee C)\&\overline{A}\&D\&(D \vee C)) = (10) = B \vee (C\&\overline{A}\&D).$$

Мы воспользовались также следующими выкладками:

$$(A \vee C)\&\overline{A} = (5) = (A\&\overline{A}) \vee (C\&\overline{A}) = (19)$$
$$= F \vee (C\&\overline{A}) = (16) = C\&\overline{A}.$$

Далее получаем

$$\overline{V} = (21) = \overline{\overline{X\&Y\&Z\&T} \vee B} = (11, 13) \ = X\&Y\&Z\&T\&\overline{B} = (11, 13)$$
$$= (B \vee (C\&\overline{A}\&D))\&(A \vee \overline{C})\&\overline{B} = (5, 19, 16) =$$
$$= C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&(A \vee \overline{C}) = (5)$$

$= (C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&A) \vee (C\&\overline{A}\&D\&\overline{B}\&\overline{C}) = (19, 17) = F \vee F = (16) = F$, что и требовалось доказать.

Заинтересовавшемуся читателю можем посоветовать книгу Биркгофа и Барти "Современная прикладная алгебра", изданную в Москве в 1976 году издательством "Мир", а также классический учебник Э. Мендельсона "Введение в математическую логику" (Москва, "Наука", 1976).

Саблин Александр Иванович,
старший преподаватель Московской
Сельхозакадемии им. Тимирязева,
кандидат физико-математических наук.

email: sablin@imail.ru

Методы математической физики. Набла-исчисление (два варианта изложения). Окончание

В. В. Цукерман

Окончание статьи В.В.Цукермана, в которой разъясняется, что в определенных случаях с символами дифференцирования можно обращаться, как с компонентами обычных векторов, применяя известные формулы векторной алгебры. Во второй части статьи изложение ведется на основе тензорного исчисления.

II. Тензорное обоснование ∇-исчисления

§ 3. Понятие тензора. Векторная алгебра на основе тензорного исчисления

Для целей этого параграфа достаточно ограничиться случаем трехмерного пространства и рассматривать при этом лишь переходы от одного ортонормированного базиса к другому[1]. Обоснование ∇-исчисления получается на пути установления параллелизма в тензорной природе операций векторной алгебры и аналогичных операций, когда компоненты вектора заменяются операторами дифференцирования по соответствующим координатам.

Напомним необходимые понятия из тензорного исчисления. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1' &= q_{11}\mathbf{e}_1 + q_{12}\mathbf{e}_2 + q_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' &= q_{21}\mathbf{e}_1 + q_{22}\mathbf{e}_2 + q_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' &= q_{31}\mathbf{e}_1 + q_{32}\mathbf{e}_2 + q_{33}\mathbf{e}_3; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= q_{11}'\mathbf{e}_1' + q_{12}'\mathbf{e}_2' + q_{13}'\mathbf{e}_3', \\ \mathbf{e}_2 &= q_{21}'\mathbf{e}_1' + q_{22}'\mathbf{e}_2' + q_{23}'\mathbf{e}_3', \\ \mathbf{e}_3 &= q_{31}'\mathbf{e}_1' + q_{32}'\mathbf{e}_2' + q_{33}'\mathbf{e}_3' \end{aligned} \tag{2}$$

— формулы перехода от ортонормированного базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ к ортонормированному базису $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ и обратно (здесь обозначения единичных ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

[1] В этом случае теряется различие между ковариантными и контравариантными тензорами.

заменены на однородные обозначения $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначаем $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Имеют место соотношения

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ 1 & \text{при} \quad i = j, \end{cases} \tag{3}$$

где $i, j = 1, 2, 3$. Двухиндексная величина δ_{ij} называется символом Кронекера.

Имеют место равенства

$$q_{ij} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j), \qquad q'_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j). \tag{4}$$

Из формул (4) следует, что

$$q_{ij} = q'_{ji} \tag{5}$$

и, таким образом, матрицы

$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}, \qquad (q'_{ij}) = \begin{pmatrix} q'_{11} & q'_{12} & q'_{13} \\ q'_{21} & q'_{22} & q'_{23} \\ q'_{31} & q'_{32} & q'_{33} \end{pmatrix}$$

являются транспонированными по отношению друг к другу. Из соотношений (1), (2), (3) и (5) следует, что

$$\begin{aligned} q_{i1}q_{j1} + q_{i2}q_{j2} + q_{i3}q_{j3} &= \delta_{ij}, \\ q'_{i1}q'_{j1} + q'_{i2}q'_{j2} + q'_{i3}q'_{j3} &= \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$q_{1i}q_{1j} + q_{2i}q_{2j} + q_{3i}q_{3j} = \delta_{ij}. \tag{7}$$

В тензорном исчислении для записи сумм типа

$$q_{i1}q_{j1} + q_{i2}q_{j2} + q_{i3}q_{j3} = \sum_{k=1}^{3} q_{ik}q_{jk}$$

используется сокращенное обозначение — опускается знак $\sum$. Итак, обозначаем

$$\sum_{k=1}^{3} q_{ik}q_{jk} = q_{ik}q_{jk}.$$

Таким образом, обозначение двух индексов одной буквой (в данном случае k) означает суммирование соответствующих величин для значений 1, 2 и 3 совпадающего индекса (в приведенном примере для $k = 1, 2, 3$).

Такой способ обозначения называется *тензорным*, он постоянно используется в дальнейшем.

В тензорных обозначениях формулы (1), (2), (6) и (7) записываются в виде:

$$\mathbf{e}'_\mathbf{i} = q_{ij}\mathbf{e}_\mathbf{j}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1'}$$

$$\mathbf{e}_\mathbf{i} = q'_{ij}\mathbf{e}'_\mathbf{j}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2'}$$

$$q_{ik}q_{jk} = \delta_{ij} \tag{6'}$$

$$q_{ki}q_{kj} = \delta_{ij} \tag{7'}$$

Запишем разложение произвольного вектора $\mathbf{x}$ в двух разных базисах $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ и $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + x_3\mathbf{e_3} = x_j\mathbf{e_j},$$
$$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{e'_1} + x'_2\mathbf{e'_2} + x'_3\mathbf{e'_3} = x'_j\mathbf{e'_j}.$$

Умножаем эти равенства на $\mathbf{e}'_\mathbf{i}$, а затем на $\mathbf{e}_\mathbf{i}$ и учитываем выражения (4), получим:

$$x'_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + q_{i3}x_3 = q_{ij}x_j, \tag{8}$$

$$x_i = q'_{i1}x'_1 + q'_{i2}x'_2 + q'_{i3}x'_3 = q'_{ij}x'_j = q_{ji}x'_j. \tag{9}$$

Определение тензора непосредственно связано с формулами (1′) и (8).

Тензором нулевого ранга (нулевого порядка, нулевой валентности) называют постоянную величину, не зависящую от выбора базиса.

Тензором первого ранга (одновалентным тензором) называют совокупность трех чисел x_1, x_2, x_3 или, иначе говоря, одноиндексную величину x_i $(i = 1, 2, 3)$, заданную в каждом базисе, такую, что для двух разных базисов $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ и $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ соответствующие величины x'_i и x_j $(i, j = 1, 2, 3)$ связаны соотношениями (8)

$$x'_i = q_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, 3).$$

Таким образом, вектор (набор его координат) представляет собой тензор ранга 1. Разумеется, любой тензор ранга 1 можно рассматривать как вектор.

Тензором второго ранга называют двухиндексную величину a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, заданную в каждом базисе $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ и преобразующуюся при переходе к базису $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ по формулам

$$a'_{ij} = q_{is}q_{jt}a_{st} \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{10}$$

Напомним, что

$$q_{is}q_{jt}a_{st} = \sum_{s=1}^{3}\sum_{t=1}^{3} q_{is}q_{jt}a_{st}.$$

Тензором ранга r называют r-индексную величину $a_{i_1 i_2 \cdots i_r}$, заданную в каждом базисе $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ и преобразующуюся при переходе к другому базису $(\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3})$ по формулам

$$a'_{i_1 i_2 \cdots i_r} = q_{i_1 k_1} q_{i_2 k_2} \cdots q_{i_r k_r} a_{k_1 k_2 \cdots k_r}, \quad (i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, 3) \tag{11}$$

Проверим, что двухиндексная величина δ_{ij} (символ Кронекера, определенный в равенстве (3)) является тензором 2-го ранга. Действительно, на основе определения δ_{ij} и соотношения (6) легко найдем, что

$$\delta'_{ij} = q_{is}q_{jt}\delta_{st} = q_{is}q_{js} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим пример тензора 3-го ранга. В базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ введем трехиндексную величину ε_{ijk}, положив

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1, \\ \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ для всех других сочетаний индексов} \end{array}\right\} \tag{12}$$

(т.е. когда, по крайней мере, два индекса совпадают).

Во всех других базисах эту трехиндексную величину зададим с помощью правила: в базисах той же ориентации, что и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, значения ее определяются равенством (12), а в базисах противоположной ориентации знаки меняются на противоположные. Покажем, что введенная величина — тензор. Пусть $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ — базис той же ориентации, что и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} q_{1i}q_{2j}q_{3k}\varepsilon_{ijk} = & \\ & = q_{11}q_{22}q_{33} + q_{12}q_{23}q_{31} + q_{13}q_{21}q_{32} - \\ & - q_{13}q_{22}q_{31} - q_{12}q_{21}q_{33} - q_{11}q_{23}q_{32} = \\ & = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = < \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 > = 1 = \varepsilon'_{123}, \end{aligned}$$

где $< \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 >$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, равное 1, так как базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ той же ориентации, что и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Аналогичная проверка может быть проведена для всех сочетаний индексов.

Операции над тензорами

1° *Сложение тензоров одинакового ранга*

Пусть x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ — тензоры ранга 1. Образуем одноиндексную величину

$$z_i = x_i + y_i.$$

Величина z_i $(i = 1, 2, 3)$ очевидно является тензором ранга 1.

Пусть a_{ij} b_{ij} — тензоры ранга 2. Двухиндексная величина

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

является тензором ранга 2. Суть этих утверждений состоит в том, что величины z_i, c_{ij}, определенные в любом ортонормированном базисе, удовлетворяют соотношениям (8) и (10), соответственно.

Тензор z_i называют суммой тензоров x_i и y_i; тензор c_{ij} — суммой тензоров a_{ij} и b_{ij}. Сама операция, с помощью которой получены тензоры z_i и c_{ij}, называется сложением тензоров.

Аналогично определяется операция сложения для тензоров любого (одинакового) ранга.

Естественным образом определяются операции *вычитания* тензоров одинакового ранга и *суммирования* трех и более тензоров одинакового ранга.

2° *Умножение тензоров*

Эта операция применяется к любым двум (или нескольким) тензорам, заданным в определенном порядке.

Пусть x_i и a_{jk} тензоры ранга 1 и 2. Трехиндексная величина

$$c_{ijk} = x_i a_{jk}$$

является тензором ранга 3 и называется произведением тензоров x_i и a_{jk}. У величины c_{ijk} сначала записан индекс первого множителя, а затем индексы второго множителя (с сохранением порядка). То, что в качестве примера выбрано произведение тензоров первого и второго ранга, несущественно. Можно было по аналогии написать произведение тензоров любого ранга. Например, если в качестве первого множителя выбрать просто число α (тензор нулевого ранга), а в качестве второго — тензор a_{ij}, то получим тензор $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, называемый *произведением тензора* a_{ij} на число α.

Естественным образом определяется произведение трех и более тензоров.

Тензор c_{ij}, образованный с помощью векторов $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + x_3\mathbf{e_3}$ и $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e_1} + y_2\mathbf{e_2} + y_3\mathbf{e_3}$ по формуле $c_{ij} = x_i y_j$ носит название тензорного произведения векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тензорное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будем обозначать $\mathbf{xy}$ (без скобок, в отличие от скалярного произведения).

3° *Свертывание тензоров*

Пусть дан тензор a_{ijk}. Образуем одноиндексную величину

$$c_i = a_{ijj},$$

или в подробной записи

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ijj}.$$

Величина c_i оказывается тензором ранга 1, а сама операция суммирования по паре индексов тензора носит название *свертывания*. Свертывание можно определить в любом тензоре ранга не меньшего двух. Операция свертывания тензора снова приводит к тензору, ранг которого меньше ранга исходного тензора на два. Свертывание часто применяется к тензорам, полученным в результате умножения тензоров. Например, если $c_{ij} = x_i y_j$ — тензорное произведение векторов $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$, то свертка $c_{ii} = x_i y_i$ (или в более подробной записи $c_{ii} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$) представляет собой инвариант (тензор нулевого ранга), являющийся скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Пусть даны векторы $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$. Найдем компоненты тензора

$$u_i = \varepsilon_{ijk} x_j y_k. \tag{13}$$

Учитывая равенства (12), получим

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_{1jk}x_jy_k = \varepsilon_{123}x_2y_3 + \varepsilon_{132}x_3y_2 = x_2y_3 - x_3y_2, \\ u_2 &= \varepsilon_{2jk}x_jy_k = \varepsilon_{231}x_3y_1 + \varepsilon_{213}x_1y_3 = x_3y_1 - x_1y_3, \\ u_3 &= \varepsilon_{3jk}x_jy_k = \varepsilon_{312}x_1y_2 + \varepsilon_{321}x_2y_1 = x_1y_2 - x_2y_1 \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Этим доказано, что тензор $u_i = \varepsilon_{ijk}x_jy_k$ представляет собой векторное произведение $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. Из доказанного легко можно получить, что $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ и $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = 0$.

Итак, найдено тензорное представление для скалярного и векторного произведений векторов.

Укажем теперь тензорные представления для смешанного и двойного векторного произведений векторов.

Смешанное произведение векторов $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ и $\mathbf{z}(z_1, z_2, z_3)$ можно записать в виде

$$\mathbf{xyz} = (\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_iu_i.$$

Учитывая (13), найдем

$$< \mathbf{xyz} >= x_i\varepsilon_{ijk}y_jz_k = \varepsilon_{ijk}x_iy_jz_k. \qquad (14)$$

С формулой (14) непосредственно связаны равенства

$$< \mathbf{xyz} >=< \mathbf{yzx} >=< \mathbf{zxy} >= - < \mathbf{yxz} >= - < \mathbf{xzy} >= - < \mathbf{zyx} > .$$

Наконец, для двойного векторного произведения $\mathbf{v} = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$ имеем

$$v_i = \varepsilon_{ijk}x_ju_k = \varepsilon_{ijk}x_j\varepsilon_{kst}y_sz_t = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kst}x_jy_sz_t.$$

Введем тензор четвертого ранга

$$\rho_{ijst} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kst}. \qquad (15)$$

Легко установить, что у тензора ρ_{ijst} отличны от нуля следующие двенадцать компонент

$$\rho_{ijij} = 1, \quad \rho_{ijji} = -1, \quad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \qquad (16)$$

Таким образом, компоненты двойного векторного произведения могут быть получены в результате свертывания с инвариантным тензором ρ_{ijst} четвертого ранга:

$$v_i = \rho_{ijst}x_jy_sz_t. \qquad (17)$$

Учитывая равенства (16), легко найдем, что

$$v_i = x_jy_iz_j - z_jy_jz_i = (x_jz_j)y_i - (x_jy_j)z_i = (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}.$$

Этим дано тензорное доказательство формулы

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] = (\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{z}.$$

Из рассмотренного следует, что все формулы векторной алгебры имеют соответствующее тензорное представление.

§ 2. Тензорное поле и ∇-исчисление

Тензорным полем нулевого ранга называют скалярное поле $u(M) = u(x_1, x_2, x_3)$, т.е. числовую функцию, заданную в каждой точке M некоторой области (V).

Если в каждой точке M области (V) задан тензор первого ранга $a_i(M) = a_i(x_1, x_2, x_3)$, то говорят, что в области определено *тензорное поле первого ранга.* Тензорное поле первого ранга равнозначно векторному полю.

Аналогично, если в каждой точке M области (V) задан тензор 2-го ранга $a_{ij}(M) = a_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, то говорят, что в области (V) задано тензорное поле 2-го ранга.

Подобным образом определяется тензорное поле любого ранга. Рассмотрим совокупность трех операторов дифференцирования по координатам x_1, x_2, x_3:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Символически этот набор операторов записывают в виде «вектора»

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_3. \tag{18'}$$

Пользуясь формулами (9), найдем выражение для операторов дифференцирования (18) в новом базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + q_{12}\frac{\partial}{\partial x_2} + q_{13}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{1k}\frac{\partial}{\partial x_k},\\
\frac{\partial}{\partial x'_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + q_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} + q_{23}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{2k}\frac{\partial}{\partial x_k},\\
\frac{\partial}{\partial x'_3} &= \frac{\partial x_1}{\partial x'_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{31}\frac{\partial}{\partial x_1} + q_{32}\frac{\partial}{\partial x_2} + q_{33}\frac{\partial}{\partial x_3} = q_{3k}\frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Таким образом, хотя компоненты $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\frac{\partial}{\partial x_3}$ и не являются числами, но их преобразование при переходе к новому базису тождественно преобразованию тензора первого ранга. Поскольку с тензорной точки зрения существенна не природа величин, а закон их преобразования при переходе к другому базису, то ∇ естественно рассматривать как тензор 1-го ранга, т.е. как вектор. По этой причине ∇ называют векторным дифференциальным оператором.

Пусть $u(M) = u(x_1, x_2, x_3)$ — скалярное поле. Формулы (19) показывают, что набор величин

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

образует тензор 1-го ранга, т.е. вектор. Этот вектор, как известно, есть градиент скалярного поля $u(M)$. Вектор интерпретируется как произведение тензорного оператора первого ранга ∇ на скалярную величину:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u.$$

Можно, используя скалярное поле $u(M)$, получить тензор первого ранга

$$u\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad u\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad u\frac{\partial}{\partial x_3},$$

компонентами которого являются операторы дифференцирования по координатам, умноженные на число $u(M)$, зависящее от выбора точки M. Такой тензор обычно записывают в виде $u\nabla$. Итак, порядок сомножителей в записях ∇u и $u\nabla$ указывает, действует ли оператор ∇ на скалярное поле u или нет. В первом случае получаем вектор — $\operatorname{grad} u$, а во втором случае векторный дифференциальный оператор. Часто сохранение порядка сомножителей оказывается обременительным требованием и тогда для указания того, что ∇ не действует на поле $u(M)$ величина u снабжается индексом «*c*»: u_c. Тогда

$$\nabla u = u\nabla = \operatorname{grad} u,$$

$$\nabla u_c = u_c\nabla = u\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e_1} + u\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{e_2} + u\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e_3}.$$

Важно отметить, что с точки зрения закона преобразования при переходе к новому базису разницы между двумя этими случаями нет.

Пусть задано векторное поле

$$\mathbf{a}(M) = a_1(M)\mathbf{e_1} + a_2(M)\mathbf{e_2} + a_3(M)\mathbf{e_3}.$$

Образуем двухиндексную величину $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. В соответствии с формулами (19) величины $\frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ образуют тензор второго ранга. Построенный тензор называют градиентом векторного поля $\mathbf{a}(M)$ и обозначают $\operatorname{grad}\mathbf{a}$. Тензор $\operatorname{grad}\mathbf{a}$ интерпретируется как тензорное произведение тензоров 1-го ранга $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и a_j. Свертывание в тензоре $\operatorname{grad}\mathbf{a}$ дает:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Так как свертка в тензорном произведении двух векторов есть скалярное произведение этих векторов, целесообразно использовать запись

$$(\nabla, \mathbf{a}) = \operatorname{div}\mathbf{a}.$$

С помощью поля $\mathbf{a}(M)$ и векторного оператора ∇ можно получить тензор 2-го ранга другим способом, путем рассмотрения двухиндексной величины $a_j\frac{\partial}{\partial x_i}$. Компонентами этого тензора являются операторы дифференцирования, умноженные на координаты векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Свертывание в таком тензоре дает

$$a_i\frac{\partial}{\partial x_i} = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + a_3\frac{\partial}{\partial x_3} = (\mathbf{a}, \nabla)$$

— инвариантный оператор дифференцирования, смысл которого указан в ч. 1. Таким образом, порядок сомножителей ($(\nabla, \mathbf{a})$ или $(\mathbf{a}, \nabla)$) играет информационную роль и указывает лишь на то, действует ли оператор ∇на векторное поле $\mathbf{a}(M)$ или нет. Такая информационная роль порядка сомножителей возможна лишь потому, что обычное скалярное произведение векторов не зависит от порядка сомножителей. Можно было бы поступить иначе и отмечать тот факт, что ∇ не действует на векторное поле $\mathbf{a}(M)$ с помощью индекса «*c*». Тогда

$$(\nabla, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \nabla) = \operatorname{div} \mathbf{a},$$

$$(\nabla, \mathbf{a_c}) = (\mathbf{a_c}, \nabla) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Такой метод принципиально более удобен, так как может быть использован и тогда, когда манипулировать перестановкой сомножителей для информационных целей нельзя. С этим надо считаться в выражении

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k.$$

Если ∇ действует на векторное поле $\mathbf{a}(M)$, то в соответствии с формулами (13′) получаем вектор, имеющий компоненты

$$u_1(M) = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3},$$
$$u_2(M) = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1},$$
$$u_3(M) = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2},$$

т.е.

$$[\nabla, \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

При этом

$$[\mathbf{a}, \nabla] = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} a_j = -\varepsilon_{ikj} \frac{\partial}{\partial x_k} a_j = -[\nabla, \mathbf{a}] = -\operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

Если ∇ не действует на векторное поле $\mathbf{a}(M)$, то

$$[\nabla, \mathbf{a_c}] = \varepsilon_{ijk} a_k \frac{\partial}{\partial x_j}$$

есть векторный дифференциальный оператор с компонентами

$$a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$a_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial x_1},$$
$$a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Хотя природа величин $[\nabla, \mathbf{a}]$ и $[\nabla, \mathbf{a_c}]$ различна, закон их преобразования при переходе от одного базиса к другому одинаков.

Если векторная или скалярная величина T образована из чисел и векторов по формулам векторной алгебры, то те или иные векторные составляющие могут быть заменены на ∇, а скаляры и оставшиеся векторы на скалярные и векторные поля. Смысл построенной величине придает тензорная запись, возможная для любых выражений векторной алгебры. При этом остаются справедливыми все преобразования, допускаемые векторной алгеброй, поскольку они могут быть получены на тензорной основе. Важно отметить, что должно быть отдельно указано, на какие поля ∇ действует, а на какие не действует; от этого зависит интерпретация полученного результата. Если ∇ действует на произведение какого-либо типа векторных и скалярных полей, то из тензорной записи $T(\nabla)$ следует, что $T(\nabla)$ может быть заменено на сумму нескольких слагаемых, в каждом из которых все сомножители произведения (подверженного действию ∇), кроме одного фиксированы. При этом, такая замена может быть проделана как в начале выкладки, так и в конце ее. В окончательной записи ответа можно воспользоваться соглашением о порядке написания ∇ в качестве множителя и учесть, что ∇u, $(\nabla, \mathbf{a})$, $[\nabla, \mathbf{a}]$, есть соответственно $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, если на другие множители произведений, содержащих ∇u, $(\nabla, \mathbf{a})$ и $[\nabla, \mathbf{a}]$ оператор ∇ не действует.

В качестве примера выведем формулу для ротора векторного произведения векторных полей (формулу (9) из первой части):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =&[\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = (\nabla, \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{b} = \\ =&(\nabla, \mathbf{b})\mathbf{a_c} + (\nabla, \mathbf{b_c})\mathbf{a} - (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{b_c} - (\nabla, \mathbf{a_c})\mathbf{b} = \\ =&\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} + (\mathbf{b}, \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b} \operatorname{div} a - (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Сравним теперь два подхода к обоснованию ∇-исчисления. При всей похожести результатов имеются и некоторые различия. В части I (§§ 1, 2) не требовалось, вообще говоря, чтобы $T(\nabla)$ представляло собой выражение, полученное по формулам векторной алгебры из набора скалярных и векторных полей (хотя фактически рассматривался только этот случай). Несколько большая общность $T(\nabla)$ в ч. I по сравнению с ч. II не имеет серьезного значения. В части I $T(\nabla)$, $T(\nabla, \nabla)$ могли иметь смысл скалярного или векторного полей, а возможная операторная природа этих величин по существу не рассматривалась.

В ч. II $T(\nabla)$, $T(\nabla, \nabla)$ всегда являются выражениями, полученными по формулам векторной алгебры (для приложений этого вполне достаточно). Важным преимуществом тензорного обоснования ∇-исчисления является то, что здесь вполне допустима и операторная природа $T(\nabla)$. Так выражение

$$(\nabla, \nabla) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \Delta$$

можно рассматривать не указывая объекта, на который действует оператор Δ (инвариантный дифференциальный оператор 2-го порядка).

Многочисленные упражнения к ∇-исчислению можно найти, например, в [3].

Литература

[1] Г.Е. Шилов. Лекции по векторному анализу, М., 1954.

[2] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1953.

[3] В.И. Семянистый, В.В. Цукерман. Задачник-практикум по математической теории поля, «Просвещение», М., 1976.

Цукерман Виталий Владимирович
кандидат физико-математических наук
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного открытого
педагогического университета.

email: v.tsuckerman@usa.net

Международная олимпиада "ТУЙМААДА-2001" (математика)

Представлено А. Я. Беловым

Публикуем задачи и решения VIII Международной олимпиады школьников "Туймаада-2001" по математике. Задания подготовлены Методическим Советом Российской математической олимпиады школьников. Каждая задача оценивалась в 7 баллов. На выполнение заданий каждого дня отводилось 5 часов.

Первый день. Задачи

Высшая лига

1. Десять волейбольных команд сыграли между собой турнир; каждые две команды встретились ровно один раз. За выигрыш давалось 1 очко, за проигрыш – 0 (ничьих в волейболе не бывает). Докажите, что если команда, занявшая n-ое место, набрала x_n очков ($n = 1, \ldots, 10$), то $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 165$.

(Д. Терешин)

2. Решите в натуральных числах уравнение

$$(a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) = 199.$$

(Здесь (x, y) — наибольший общий делитель).

(С. Л. Берлов)

3. Существуют ли такие квадратные трехчлены P, Q, R, что для любых целых x и y найдется целое z, удовлетворяющее равенству $P(x) + Q(y) = R(z)$?

(А. С. Голованов)

4. Квадрат $ABCD$ со стороной 1 разбит на 10^{12} меньших квадратов (не обязательно равных). Докажите, что сумма периметров тех из этих квадратов, которые имеют общие точки с диагональю AC, не больше 1500.

(А. Я. Канель-Белов)

Первая лига

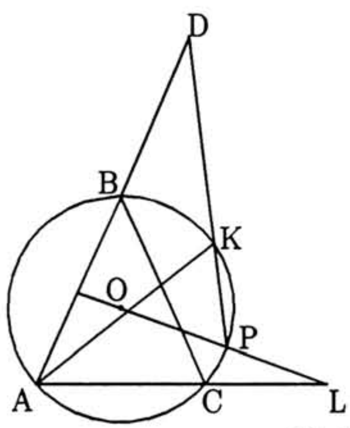
1. 16 шахматистов провели между собой турнир: каждые два шахматиста сыграли ровно одну партию. За победу в партии давался 1 балл, за ничью — 0,5 балла, за поражение — 0 баллов. Оказалось, что ровно 15 шахматистов поделили первое место. Сколько очков мог набрать шестнадцатый шахматист?

(Ю. Лифшиц)

2. Можно ли так расставить целые числа в клетках бесконечного клетчатого листа, чтобы каждое целое число встречалось хотя бы в одной клетке, а сумма любых 10 чисел, стоящих подряд по вертикали или по горизонтали делилась бы на 101?

(А. Я. Канель-Белов)

3. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность с центром в точке O. Через середину хорды AB и точку O проведена прямая. Она пересекает прямую AC в точке L и окружность – в точке P. Пусть биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке K, прямые AB и PK пересекаются в точке D (см. рисунок). Докажите, что точки L, B, D и P лежат на одной окружности.



(С. В. Попов)

4. Натуральные числа 1, 2, 3, ..., 100 содержатся в объединении N геометрических прогрессий (не обязательно с целыми знаменателями). Докажите, что $N \geq 31$.

(А. Голованов)

Решения задач первого дня

Высшая лига

1. Заметим, что

$$x_1+2x_2+\ldots+10x_{10} = (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10})+(x_2+x_3+\ldots+x_{10})+\ldots+(x_9+x_{10})+x_{10}.$$

Для любого $k = 1, 2, \ldots, 10$ число $x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{10}$ — это количество очков, набранных вместе k-й, $k+1$-й, ..., 10-й командами, т.е. это число не меньше, чем количество партий, сыгранных этими командами друг с другом. Между собой эти $10 - k + 1$ команд сыграли $(10 - k + 1)(10 - k)/2$ партий. Следовательно, $x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{10} \geq (10 - k + 1)(10 - k)/2$. Складывая полученные неравенства при $k = 1, 2, \ldots, 10$, имеем: $x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} \geq 10 \cdot 9/2 + 9 \cdot 8/2 + 8 \cdot 7/2 + \ldots + 3 \cdot 2/2 + 2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 0/2 = 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 165$.

2. Ответ: уравнение не имеет решений.

Докажем предварительно следующее утверждение: если числа x, y, z взаимно просты в совокупности (т.е. не имеют общего делителя, большего 1), то $(x, yz) = (x, y)(x, z)$. Действительно, ясно, что (x, yz) делится и на (x, y), и на (x, z). Поскольку эти два числа взаимно просты (если они имеют общий делитель, то на него же делятся и x, и y, и z), то (x, yz) делится на $(x, y)(x, z)$. Обратно, докажем, что $(x, y)(x, z)$ делится на (x, yz). Пусть какое-нибудь простое число p входит в разложение числа (x, yz) на простые множители в n-й степени. Тогда x делится на p^n, yz делится на p^n. Значит, для некоторого числа $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y делится на p^k, а z делится на p^{n-k}. Тогда (x, y) делится на p^k, (x, z) делится на p^{n-k}, и $(x, y)(x, z)$ делится на p^n. Таким образом, любое простое число входит в $(x, y)(x, z)$ в степени не меньшей, чем в (x, yz), т.е. $(x, y)(x, z)$ делится на (x, yz). Утверждение доказано.

Пусть теперь числа a, b, c удовлетворяют условию задачи. Заметим, что a, b и c взаимно просты в совокупности. Действительно, если все они делятся на какое-нибудь число $d > 1$, то на d делятся и числа $(a^2, b^2), (a, bc), (b, ac), (c, ab)$. Тогда 199 делится на d, т.е. $d = 199$, т.к. 199 — простое число. Но тогда $(a^2, b^2) \geq 199, (a, bc) \geq 199, (b, ac) \geq 199, (c, ab) \geq 199$, и $(a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) \geq 4 \cdot 199$ — противоречие с условием.

Таким образом, по доказанному выше,

$$199 = (a^2, b^2) + (a, bc) + (b, ac) + (c, ab) = (a, b)^2 + (a, b)(a, c) + (a, b)(b, c) + (a, c)(b, c) =$$

$$= ((a, b) + (a, c))((a, b) + (b, c)).$$

Таким образом, число 199 разложилось на два натуральных сомножителя, каждый из которых, очевидно, больше 1. Это противоречит простоте числа 199. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

3. Решение. Таких многочленов не существует.

Действительно, пусть три трехчлена P, Q, R удовлетворяют условию задачи. Не умаляя общности, мы можем считать, что трехчлен R имеет положительный старший коэффициент (в противном случае рассмотрим многочлены $-P$, $-Q$, $-R$ – для них выполнено такое же равенство). Ясно, что тогда положительный старший коэффициент имеет и трехчлен P (в противном случае взяв в качестве x такое число, что $P(x)$ меньше $m - Q(0)$, где m – наименьшее значение R, мы увидим, что $P(x) + Q(0)$ не является значением R ни в какой точке).

Найдем три различных значения трехчлена Q в целых точках. Их можно выбрать, например, из чисел $Q(-2)$, $Q(-1)$, $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$ (так как каждое свое значение квадратный трехчлен принимает не более двух раз).

Теперь рассмотрим число M, большее модулей всех этих трех значений $Q(s)$, $Q(t)$, $Q(u)$ многочлена Q. Укажем такое число N, что, если $R(t) > N$, то $|R(t+1) - R(t)| > 2M$. Пусть $R(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $R(x+1) - R(x) = 2ax + (a + b)$. Эта линейная функция не превосходит по модулю $2M$ только на некотором отрезке; и, так как на этом отрезке квадратный трехчлен R ограничен, можно указать такое число N, что значения, большие N по модулю, он принимает только вне этого отрезка.

Возьмем теперь такое x, что $P(x) > N + M$. Легко видеть, что не все три числа $P(x) + Q(s)$, $P(x) + Q(t)$, $P(x) + Q(u)$ будут значениями многочлена R в целых точках. Действительно, эти числа больше N и лежат на интервале $(P(x) - M, P(x)+M)$ длины $2M$. На вещественной оси может быть только два промежутка, на которых R принимает значения из интервала $(P(x)-M, P(x)+M)$; и на каждом из этих промежутков, как мы видели, значения R в целых точках отличаются не меньше чем на $2M$. Поэтому на интервал $(P(x) - M, P(x) + M)$ может попасть не более двух значений многочлена R в целых точках. Мы же предъявили три таких значения – противоречие.

4. Пусть $ABCD$ – исходный единичный квадрат. Прежде всего расклассифицируем квадратики по размерам. Назовем квадратик со стороной a квадратиком *k-го размера*, если $1/2^k \le a < 1/2^{k-1}$ $(k = 0, 1, \dots)$ Назовем квадратик K, имеющий общую точку с диагональю AC большого квадрата *интересным*, а его диагональ, параллельную AC – *главной*. Если главная диагональ квадратика K лежит внутри треугольника ABC, то квадратик K назовем *квадратиком первого типа*, иначе – *квадратиком второго типа* (а если она лежит на AC – отнесем квадратик к любому типу).

Лемма. Пусть K_1 и K_2 – интересные однотипные квадратики, d – минимум длин их диагоналей, P_1 и P_2 – проекции их центров на диагональ AC. Тогда $|P_1P_2| \ge d/2$.

Действительно, если $|P_1P_2| < d/2$, то проекции главных диагоналей этих квадратиков на AC содержат центры друг друга; поэтому та из двух диагоналей, которая лежит ближе к AC, должна пересекать оставшийся интересный квадратик.

Поскольку главная диагональ любого квадратика k-го размера не меньше, чем $D/2^k$ (D – длина диагонали AC), то расстояние между проекциями центров однотипных квадратиков k-го размера на AC не меньше, чем $D/2^{k+1}$ Следовательно, количество интересных квадратиков первого типа (а также второго типа) k-го размера не превосходит $2 \cdot 2^k$. Поэтому общее количество интересных квадратиков k-го размера не превосходит $4 \cdot 2^k$. Пусть n_k есть количество квадратиков k-го размера в разбиении, p_k – сумма их периметров. Тогда $p_k \le 8n_k 2^{-k}$ и общий периметр всех квадратиков не превосходит $\sum_{k\ge0} 8n_k 2^{-k}$.

Воспользуемся следующей технической леммой.

Лемма. Пусть последовательность целых неотрицательных чисел x_k удовлетворяет условию $x_k \le 4 \cdot 2^k$, $\sum_{k\ge0} x_k = 10^{12}$. Обозначим $Y = \sum_{k\ge0} 8x_k 2^{-k}$. Тогда $Y \le 1500$. (На самом деле, 1500 – неточная оценка, и в приводимом доказательстве получится оценка 1250.)

Действительно, рассмотрим минимальный номер k, для которого $x_k < 4 \cdot 2^k$. Если не все следующие члены последовательности равны 0, то мы можем вычесть из одного из них 1, и одновременно прибавить 1 к x_k. Эта операция, очевидно, не изменит величины X, но увеличит Y. Ясно, что за несколько таких операций мы сможем привести нашу последовательность к такому виду: $x_0 = 4 \cdot 2^0$, $x_1 = 4 \cdot 2^1, \ldots, x_{m-1} = 4 \cdot 2^{m-1}$, $0 \le x_m \le 4 \cdot 2^m$, а все следующие члены равны 0. Тогда $10^{12} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{m-1} + x_m \ge 4 \cdot (2^m - 1) = 2^{m+2} - 4$. Поэтому $m < 38$ (ясно, что $2^{40} - 4 > 10^{12}$), то есть $m \le 37$. Следовательно, $Y \le \sum_{k=0}^{37} 8x_k 2^{-k} \le 38 \cdot 32 < 1250$. Лемма доказана.

Из последней леммы немедленно следует утверждение задачи.

Первая лига

1. Ответ: последний игрок набрал 0 очков.

Пусть первые 15 шахматистов набрали по a очков, а последний набрал b очков (по условию $a > b$). Поскольку за каждую партию участвующие в ней игроки получают в сумме 1 балл, а партий было сыграно $16 \cdot 15/2 = 8 \cdot 15$, то $15a + b = 8 \cdot 15$. Следовательно, $15a \le 8 \cdot 15$ и $16a > 15a + b = 8 \cdot 15$. Таким образом, $7,5 < a \le 8$. Учитывая, что число a — целое или полуцелое, заключаем, что $a = 8$. Тогда $b = 0$, т.е. последний игрок проиграл все партии. Необходимо заметить, что такое действительно могло случиться: если первые 15 игроков сыграли все партии между собой вничью и выиграли у последнего, то они набрали по 8 очков и поделили первое место.

2. Ответ: нельзя.

Предположим, что требуемая расстановка существует. Рассмотрим две клетки в одной строке, между которыми расположены ровно 9 клеток. Если x и y — числа в этих двух клетках, а $a_1, a_2, \ldots, a_9$ — числа в клетках между ними, то по условию $x + a_1 + \ldots + a_9$ и $y + a_1 + \ldots + a_9$ делятся на 101. Следовательно, x и y дают одинаковые остатки от деления на 101. Аналогично, любые два числа в одном столбце, между которыми стоят ровно 10 чисел, дают одинаковые остатки от деления на 101. Рассмотрим какой-нибудь квадрат 10×10 на нашем клетчатом листе. Нетрудно убедиться, что, начав с любой клетки, и сдвигаясь каждый раз на 10 клеток по вертикали или на 10 клеток по горизонтали, мы всегда сможем попасть в выделенный квадрат. Поэтому каждое число, стоящее на листе, дает от деления на 101 такой же остаток, что и одно из чисел в этом квадрате. Значит, все расставленные числа дают не более 100 различных остатков от деления на 101. Тем не менее на листе должны присутствовать все целые числа, а они дают 101 разных остатков. Это противоречие доказывает, что требуемой расстановки чисел не существует.

3. Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180° - 2\alpha$.Поскольку L лежит на серединном перпендикуляре OP к отрезку AB, то $\angle PLB = \angle PLA = 90° - \angle BAL = 90° - \alpha$. Поэтому для вписанности четырехугольника $LPBD$ достаточно проверить, что $\angle PDB$ тоже равен $90° - \alpha$.

Пусть Q — точка пересечения прямой OP с окружностью, отличная от точки P. Тогда QP — диаметр окружности, и Q — середина дуги AB. Поскольку $\smile AB = 2\alpha$, то $\smile AQ = \alpha$, и поэтому $\smile AP = \smile QP - \smile AQ = 180° - \alpha$. Далее, поскольку

AK — биссектриса угла BAC, то $\breve{BK} = \breve{BC}/2 = \alpha$. Наконец, $\angle PDB = \frac{\breve{AP} - \breve{BK}}{2} = \frac{180^\circ - \alpha - \alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$, что и требовалось установить.

4. Очевидно, можно считать, что знаменатель каждой из наших прогрессий рационален. Действительно, если в этой прогрессии содержится хотя бы два натуральных числа (иначе неинтересно), то некоторая степень знаменателя – рациональное число. Пусть наименьшая из таких степеней – k-я. Тогда каждый k-й член нашей прогрессии, считая от первого рационального, рационален, а все остальные – нет. Значит, рациональные члены нашей прогрессии сами образуют геометрическую прогрессию, которую и можно было рассматривать с самого начала.

Рассмотрим теперь какое-нибудь простое число p, которому случается иногда делить член прогрессии. Показатели, с которыми p входит в последовательные члены прогрессии, образуют уже арифметическую прогрессию с целыми неотрицательными членами (разность этой прогрессии – показатель, с которым p входит в знаменатель; поэтому, в частности, мы можем считать, что наши геометрические прогрессии – конечные и все их члены – натуральные числа от 1 до 100).

Следовательно, если одна из геометрических прогрессий содержит $k+1$ член, в ней содержится число вида $p^a m$, где $a \geq m$ и m не кратно p.

Для каждой из наших прогрессий рассмотрим наибольшее из простых чисел, входящих в ее знаменатель в ненулевой степени, и член, делящийся на наибольшую степень этого простого числа. Этот член будет иметь вышеописанный вид, причем можно считать, что $p^{a+1}m > 100$, т.е. $\frac{100}{p^{a+1}} < m \leq \frac{100}{p^a}$.

Это рассмотрение показывает, что среди наших прогрессий нет прогрессии длины ≥ 8 (так как $2^7 > 100$), не более одной прогрессии длины 7 (так как единственная 6-я степень, не превосходящая 100 - это 2^6), не более одной прогрессии длины 6 ($a = 5$, $p = 2$, $m = 3$), не более двух прогрессий длины 5 ($a = 4$ и либо $p = 2$, $m = 5$, либо $p = 3$, $m = 1$), не более четырех прогрессий длины 4 ($a = 3$; при $p = 2$: $m = 7, 9, 11$, при $p = 3$: $m = 2$), и, наконец, не более 19 прогрессий длины 3 ($a = 2$; при $p = 2$: $m = 13, 15, \ldots, 25$; при $p = 3$: $m = 4, 5, 8, 9, 10, 11$; при $p = 5$: $m = 1, 2, 3, 4$; при $p = 7$: $m = 1, 2$).

Итак, если выбрать самые длинные 27=1+1+2+4+19 прогрессий, в них будет содержаться всего не более $96 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 19 \cdot 3$ чисел. Но числа $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$ были посчитаны здесь по два раза (а если какие-то по одному, то за каждое из таких чисел придется уменьшить суммарное количество членов на 1). Поэтому в объединении 27 самых длинных прогрессий содержится не более $96 - 3 = 93$ чисел. Так как все остальные прогрессии содержат не более чем по два числа, оставшиеся 7 чисел покрываются как минимум четырьмя прогрессиями. Таким образом, всего прогрессий не менее $27 + 4 = 31$.

Второй день. Задачи

Высшая лига

5. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

(Н. Седракян)

6. В квадрате $n \times n$ $(n > 2)$ стоят ненулевые числа. Известно, что каждое число ровно в k раз меньше, чем сумма всех чисел, стоящих с ним в одном "кресте" (т.е. в остальных $2n-2$ клетках той же строки и того же столбца) При каких k такое возможно?

(Д. Ростовский, А. Храбров, С. Берлов)

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи DA и CB пересекаются в точке Q, а лучи BA и CD – в точке P. Оказалось, что $\angle AQB = \angle APD$. Биссектриса угла $\angle AQB$ пересекает стороны AB и CD четырехугольника в точках X и Y соответственно, а биссектриса $\angle APD$ пересекает стороны AD и BC в точках Z и T соответственно. Описанные окружности треугольников ZQT и XPY пересекаются в точке K внутри четырехугольника. Докажите, что K лежит на диагонали AC.

(С. Л. Берлов)

8. Можно ли раскрасить все положительные действительные числа в 10 цветов так, чтобы любые два числа, десятичная запись которых отличается только в одном разряде, были разного цвета? (Десятичные записи, в которых все цифры, начиная с некоторой – девятки, не рассматриваются).

(А. Голованов)

Первая лига

5. Множество натуральных чисел разбито на непересекающиеся множества N_1 и N_2 такие, что разность чисел, лежащих в одном множестве, не является простым числом, большим 100. Найдите все такие разбиения.

(Н. Седракян)

6. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC $(AC = BC)$ отмечены точки P и Q такие, что $\angle PCQ \leq \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что $PQ \leq \frac{1}{2}AB$.

(фольклор)

7. На доске были выписаны несколько рациональных чисел. Дима списал на бумажку их дробные части. Потом все числа на доске возвели в квадрат, и Дима списал на другую бумажку дробные части получившихся чисел. Оказалось, что на Диминых бумажках написаны одинаковые наборы чисел (может быть, отличающиеся порядком). Докажите, что исходные числа на доске были целыми. (Дробная часть числа x – такое число $\{x\}$, $0 \leq \{x\} < 1$, что $x - \{x\}$ – целое.)

(А. Голованов)

8. Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть расстояние 70 км за 3 часа? Скорость пешехода 5 км/ч, скорость мотоцикла – 50 км/ч.

(фольклор)

Решения задач

Высшая лига

5. Рассмотрим произвольное натуральное число n. Пусть оно, для определенности, попало в множество N_1. Тогда число $n+103$ по условию должно попасть в множество N_2. Поэтому число $n+2$ должно попасть в N_1, так как $(n+103)-(n+2) = 101$ — простое число. Аналогично, если n попало в N_2, то и $n+2$ должно попасть в N_2. Итак, число $n+2$ обязано лежать в том же множестве, что и n. Следовательно, все нечетные числа лежат в том же множестве, что и число 1, а все четные числа — в том же множестве, что и число 2. Поскольку очевидно, что все натуральные числа не могут лежать в одном из множеств, то искомое разбиение существует ровно одно: одно из множеств содержит все нечетные числа, а другое — все четные.

6. Ответ: $k = -2$, $k = n-2$ или $k = 2n-2$.

Предположим, что k не совпадает ни с одним из этих значений.

Обозначим сумму чисел во всей таблице через S, сумму чисел в i-й строке через a_i, сумму в j-м столбце через b_j, а число, стоящее в таблице на пересечении i-й строки и j-го столбца — через x_{ij}. Тогда по условию

$$a_i + b_j = (k+2)x_{ij} \text{ при любых } i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

(в сумме $a_i + b_j$ число x_{ij} учитывается 2 раза, а все остальные числа "креста" — по одному разу). Зафиксируем некоторое i из множества $1, 2, \ldots, n$. Просуммировав равенство (1) по всем j от 1 до n, мы получим $na_i + S = (k+2)a_i$, или

$$(k+2-n)a_i = S, \text{ при любом } i = 1, \ldots, n.$$

Аналогично получаем, что

$$(k+2-n)b_j = S \text{ при любом } j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку $k \neq n-2$, то $a_i = b_j = \frac{S}{k+2-n}$ при любых $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда из (1) получаем, что $(k+2)x_{ij} = \frac{2S}{k+2-n}$. Учитывая, что $k \neq -2$, находим, что все числа таблицы равны между собой. Тогда, очевидно, $k = 2n-2$, что противоречит исходному предположению.

Осталось привести примеры таблиц, удовлетворяющих условию задачи для значений $k = -2$, $k = n-2$ и $k = 2n-2$.

Для $k = 2n-2$ условию удовлетворяет таблица, в которой все числа равны.

В случае $k = -2$ рассмотрим таблицу, у которой во всех клетках, кроме диагональных, стоит 1, а во всех клетках на диагонали стоит $1-n$. В такой таблице у любого "креста" с центром на диагонали сумма всех чисел, кроме центрального, равна $(2n-2)\cdot 1 = 2n-2 = -2\cdot(1-n)$, т.е. в k раз больше центрального числа. У любого "креста" с центром не на диагонали сумма всех чисел, кроме центрального, равна $(2n-4)\cdot 1+2(1-n) = -2 = -2\cdot 1$, т.е. тоже в r раз больше центрального числа. Таким образом, все кресты в этой таблице удовлетворяют требованию задачи.

В случае $k = n-2$ рассмотрим таблицу, у которой во всех клетках первого столбца стоит $1-n$, а в остальных клетках стоит 1. В такой таблице у любого "креста" с центром в первом столбце сумма всех чисел, кроме центрального, равна $(n-1)\cdot 1+(n-1)\cdot(1-n) = (n-2)(1-n)$, т.е. в k раз больше центрального числа. У любого "креста" с центром не в первом столбце сумма всех чисел, кроме центрального, равна $(1-n)+(2n-3)\cdot 1 = (n-2)\cdot 1$ — снова в k раз больше центрального числа. Таким образом, все кресты в этой таблице удовлетворяют требованию задачи.

7. Треугольники AQX и APZ подобны, так как $\angle AQX = \angle AQB/2 = \angle APD/2 = \angle APZ$ и $\angle QAX = \angle PAZ$ как вертикальные. Следовательно, $AQ/AP = AX/AZ$ или, иначе говоря, $AQ\cdot AZ = AP\cdot AX$. Заметим теперь, что $AQ\cdot AZ$ — это степень точки A относительно окружности, описанной около треугольника ZQT, а $AP\cdot AX$ — степень точки A относительно окружности, описанной около треугольника XPY. Значит, точка A лежит на радикальной оси этих двух окружностей.

По совершенно аналогичным соображениям на этой же радикальной оси лежит и точка C. Кроме того, две указанные окружности пересекаются в точке K, так что K тоже лежит на их радикальной оси. Таким образом, точки A, C, и K лежат на одной прямой, что и требовалось установить.

8. Рассмотрим для каждого положительного действительного числа x множество $A(x)$ всех чисел, отличающихся от него только в конечном числе разрядов. Тогда все положительные числа будут распределены по различным множествам такого вида, причем пересекаться между собой эти множества не будут. Действительно, если некоторое число z принадлежит одновременно двум множествам $A(x)$ и $A(y)$, то оно по конечному числу разрядов отличается и от x, и от y. Это значит, что x и y отличаются друг от друга только в конечном числе разрядов (так как они могут отличаться друг от друга только в тех разрядах, в которых хотя бы одно из них отличается от z). Но тогда $A(x) = A(y)$. Ясно, что элементы разных множеств построенного нами разбиения отличаются в бесконечном количестве разрядов. Поэтому нам достаточно раскрасить каждое множество в отдельности. Занумеруем цвета числами от 0 до 9 и сопоставим каждому положительному числу одно из них. Для этого в каждом из множеств разбиения выберем одно число x_0 и каждое число x в этом множестве сравним с x_0 поразрядно. Числа x и x_0 отличаются в конечном количестве разрядов. Пусть в k-м по счету несовпадающем разряде у числа x_0 стоит цифра a_k, а у числа x - цифра b_k. Тогда номером цвета, в который мы покрасим число x, будет остаток от деления на 10 суммы всех разностей $b_k - a_k$. Ясно, что при этом числа, отличающиеся ровно в одном разряде, будут окрашены в разные цвета.

Первая лига

5. См. решение 5 задачи высшей лиги.

6. Не умаляя общности, можно считать, что $\angle PCQ = \frac{1}{2}\angle ACB$ (ведь если утверждение задачи будет доказано для таких углов, оно автоматически будет выполняться и для всех меньших). Кроме того, мы считаем, что точка P ближе к A, а Q – к B (иначе точки P и Q можно переименовать), и что $PA \leq QB$.

Отметим середину M основания AB. Так как $\angle PCQ = \angle ACM$, углы $\angle MCQ$ и $\angle ACP$ также равны. Теперь, опуская их точки P перпендикуляр PR на сторону AC, получаем два подобных прямоугольных треугольника RCP и MCQ. Гипотенуза CP первого треугольника не меньше гипотенузы CQ второго (так как из двух наклонных больше та, которая дальше от перпендикуляра, а $PM \geq MQ$). Поэтому $MQ \leq RP$, $RP < AP$ (перпендикуляр короче наклонной), и, следовательно, $MQ < AP$, то есть $PQ = PM + MQ < PM + PA = AM = \frac{1}{2}AB$, что и требовалось доказать.

7. Условимся представлять каждое рациональное число в виде несократимой дроби. Заметим сразу, что знаменатели самой дроби и ее дробной части совпадают. (Действительно, если $q = \frac{a}{b}$, где a и b взаимно просты, то дробная часть $\{q\}$ имеет вид $\dfrac{a-kb}{b}$, и числа $a - kb$ и b тоже взаимно просты.) Предположим, что не все числа, выписанные на доске, были целыми. Тогда один из знаменателей дробных частей был отличен от 1. Рассмотрим произвольное простое число p, делящее этот знаменатель. Далее, из всех знаменателей выберем тот, который делится на наибольшую степень p. Пусть соответствующая ему дробь равна $x = \dfrac{a}{bp^k}$, где a и b не делятся на p. Тогда $x^2 = \dfrac{a^2}{b^2p^{2k}}$ — несократимая дробь, следовательно, знаменатель дробной части $\{x^2\}$ делится на p^2k. Но ни один из знаменателей дробных частей исходных чисел не делился на p в степени большей, чем k. Таким образом, эта дробная часть не могла оказаться на первой Диминой бумажке, хотя оказалось на второй. Полученное противоречие доказывает, что все числа на доске были целыми.

8. Докажем, что трое путешественников не смогут добраться до цели за три часа. Очевидно, можно считать, что их движение происходит без остановок. Ясно, что в начальный момент один из путешественников (скажем, C) начинает двигаться вперед пешком, в то время, как остальные двое (A и B) едут на мотоцикле. Поскольку C не успеет пройти весь путь пешком за три часа, то в некоторый момент мотоциклисты будут вынуждены разделиться: один из них (например, A) поедет обратно за C, а B пойдет вперед пешком. Пусть это произошло через t часов после начала движения. К этому моменту C прошел $5t$ км, A проехал $50t$ км, и они повстречаются через $(50t - 5t)/(50 + 5) = 9t/11$ часов после момента t. Теперь они вынуждены догнать B. За время $9t/11$ часов B успел пройти $45t/11$ км от места его высадки с мотоцикла, а A проехал до встречи с C $50 \cdot 9t/11 = 450t/11$ км. Таким образом, их разделяют $495t/11 = 45t$ км и они встретятся через $45t/(50 - 5) = t$ часов. Всего с момента начала движения пройдет $t + 9t/11 + t = 31t/11$ часов.

С момента высадки с мотоцикла до момента встречи с остальными путешественниками B прошел $5(9t/11 + t) = 100t/11$ км, поэтому все втроем встретились на расстоянии $100t/11 + 50t = 650t/11$ км от начала пути.

Итак, путешественники оказались все втроем в одной точке через $T_1 = 31t/11$ часов после начала движения, продвинувшись на $S_1 = 650t/11$ км. На этом участке пути (между двумя "встречами втроем") $S_1 = 650T_1/31$. После этого они могут снова разделиться на группы, затем опять встретиться и т.д. Аналогично предыдущим рассуждениям, можно получить, что расстояние между n-й и $n+1$-й точками, в которых путешественники встречаются втроем, связано со временем прохождения ими этого отрезка пути соотношением

$$S_n = 650T_n/31. \tag{1}$$

Заметим, наконец, что мы можем считать, что все три путешественника встретились в последний раз в точности в конце маршрута. Действительно, если идущий путник пришел в пункт назначения раньше, чем догоняющие его друзья, то ему следовало бы слезть с мотоцикла немного раньше с таким расчетом, чтобы прибыть туда одновременно с мотоциклистами (это только уменьшило бы общее время маршрута).

Таким образом, весь маршрут разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых расстояние и время связаны соотношением (1). Поэтому общее время, потраченное ими на преодоление $S = 70$ км, должно быть равно $T = 31S/650 = 31 \cdot 70/650 > 3$ часа. Следовательно, за три часа они не смогут достигнуть конечного пункта.

Описание способов деятельности как основа выявления содержания общего образования

В. М. Имайкин

Имайкин Валерий Марсович — кандидат физико-математических наук, Соросовский учитель математики 2000 г., главный редактор журнала "Математическое образование". В статье рассказано о некоторых итогах работы научно-педагогического коллектива школы №1314 г. Москвы по выявлению содержания общего среднего образования. В предлагаемой первой части статьи, представляющей собой расширенный вариант заметки [1], высказаны некоторые общие положения, главное из которых — различение понятий "содержание" и "учебный материал". Во второй части, которую предполагается опубликовать в одном из ближайших номеров журнала, итоги этой работы применительно к математике и естественно-научным предметам будут освещены более подробно.

Введение

На протяжении более 10 лет в нескольких школах Москвы, имеющих статус **экспериментальных площадок**, велась, для общего образования, разработка нового содержания, которое можно положить в основу новых Государственных стандартов общего среднего образования.

В настоящей статье освещаются некоторые результаты, полученные в Экспериментальной Общеобразовательной Гуманитарно-Методологической школе №1314 г. Москвы "Проектный Колледж" [2].

Коллектив разработчиков под общим руководством доктора психологических наук Юрия Вячеславовича Громыко работал в рамках специальной концепции, включающей гипотезы о **содержании образования** и устройстве **мегамашины образования**[1]. Эта концепция основана на **теории мышления и деятельности**, разрабатывавшейся рядом исследователей в нашей стране и за рубежом. В нашей стране основоположниками этого направления считаются А. А. Зиновьев

[1]Мегамашина образования представляет собой сложную организационно-деятельностную систему, обеспечивающую функционирование, воспроизводство и развитие процесса образования. В этой системе выделяется ряд ключевых позиций: разработчик содержания, методист, учитель, учащийся и т.д. Подробней см. [3].

и Г. П. Щедровицкий; в дальнейшем большая часть их последователей была объединена вокруг Московского Методологического Кружка. С основными идеями данного направления применительно к педагогической деятельности можно ознакомиться в работах [3-6].

Различение содержания и учебного материала

Переходя непосредственно к теме статьи, необходимо отметить, что упомянутая концепция требует отличать *учебный материал* — набор сведений, информацию, учебные тексты и т.п. — от содержания. Под *содержанием* понимается совокупность способов, образцов, техник мышления и деятельности, выработанных в человеческой культуре в самых разнообразных областях деятельности. Ниже будем называть указанную концепцию *концепцией деятельностного содержания* образования.

Изучение действовавших ранее, действующих в настоящее время и проектируемых новых учебных программ и образовательных сандартов показывает, что они снова и снова наполняются учебным материалом, а содержание, в указанном смысле, остается завуалированным.

Подробный анализ действующих ныне программ не входит в задачи данной статьи. Читатель может взять любую действующую программу для средней школы — по математике, физике, химии, биологии, истории, литературе — и убедиться, что ее "содержательная" часть составлена в терминах **учебного материала**.

Мы хотим отметить (ограничившись математикой), что, когда речь заходила о реформировании системы преподавания или обновлении **содержания**, обычно имелось в виду удаление части старого и введение некоторого нового **учебного материала**. В качестве примера проанализируем ряд публикаций нашего журнала по истории математического образования.

В докладе профессора А. К. Власова "Какие стороны элементарной математики представляют ценность для общего образования?", журнал "Математическое образование" (далее, для краткости, МО), №№1, 1914 г., 3, 1997 г., читаем: "... ценность для общего образования представляет не просто хорошо подготовленный логический аппарат и не простое умение или навык, а содержание логически обработанное и приобретенные при этой обработке умение и навык. Ложно будет поставлена задача образования, если тот или иной предмет преподавания рассматривать только как средство формального развития, не обращая особого внимания на жизненную ценность самого содержания. Если такова будет главная задача, то содержание постепенно может быть видоизменено, подменено другим малоценным или даже не имеющим никакой цены. Такое явление наблюдается, например, в эволюции содержания задач по математике." То, что в цитированном отрывке названо **содержанием**, в рамках концепции деятельностного содержания — **учебный материал**. Таким образом, в данном отрывке автор настаивает на важной роли и необходимости тщательного подбора учебного материала. Мы не возражаем и не полемизируем с автором, в данный момент наша цель лишь пояснение терминологии.

Приведем ряд цитат из подборок, составленных Ревеккой Залмановной Гушель (Ярославский педагогический университет, кафедра геометрии). Из статьи "По материалам всероссийских съездов преподавателей математики 1911 и 1915 годов" (МО, №2-3 (9-10), 1999 г.): "Планировалось также значительное обновление содержания образования. В программы по математике было решено ввести элементы аналитической геометрии, анализа, а для некоторых типов школ — и теории вероятностей.

... В программу по математике, составленную специальной комиссией во главе с профессором К.А.Поссе, были введены комплексные числа, конические сечения (и в прямоугольных, и в полярных координатах), большой раздел, посвященный дифференциальному исчислению, и ряд других вопросов."

Из статьи "К столетию Московского совещания по вопросам о средней школе" (МО, №2 (13), 2000 г.): "Все громче раздавались голоса педагогов, предлагавших значительно сократить преподавание древних языков и за счет этого увеличить время на изучение естествознания, русского и новых языков. Что касается математики, то ведущие отечественные педагоги считали, что ее содержание требовало значительного обновления за счет введения элементов так называемой высшей математики и некоторых других разделов."

Из статьи "Вопросы высшей математики в русской школе до 1917 года" (МО, №4 (15), 2000 г.): "В программы мужских гимназий, открытых в соответствии с первым университетским Уставом 1804 года, входили и элементы аналитической геометрии, и элементы анализа бесконечно малых. Анализ был исключен из гимназической программы в 1819 году, аналитическая геометрия — в 1845.

... К концу XIX столетия движение за обновление содержания математического образования и введения в среднюю школу элементов анализа, аналитической геометрии и некоторых других разделов математики приняло в педагогической среде достаточно массовый характер..."

Из статьи "О деятельности международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия" (МО, №3 (18), 2001 г.): "Из различных предметов, которые в настоящее время претендуют на то, чтобы им было уделено место в элементарном преподавании, следует, с одной стороны, указать на дифференциальное и интегральное исчисление, на аналитическую геометрию, на некоторые части начертательной и проективной геометрии, а также на изучение физики с математической точки зрения. С другой стороны, многие предполагают ввести в преподавание новые вопросы, носящие более специальный характер или же ввести новые, основные понятия (таковы понятия о функции, о группах, об ансамбле)."

Во всех цитированных отрывках мы видим, что, когда говорится о реформировании или обновлении содержания, с точки зрения нашей концепции, речь идет о добавлении новых массивов учебного материала или о замене некоторых старых массивов учебного материала новыми. О добавлении в школьный курс нового учебного материала говорится и в статье Вс. Шереметевского "Математика как наука и ее школьные суррогаты" ("Русская мысль", №5, 1895 г., МО №4 (11), 1999 г., с сокращениями): "... Счисление бесконечно малых есть та часть математики, которой она обязана своим значением, своим краеугольным положением в здании современной науки. Его элементы и должны стать достоянием общеобразовательной школы.

... Из аналитической геометрии достаточно усвоить общие основные понятия о координатах и уравнениях геометрических мест, насколько они нужны для иллюстрации понятия о функции и основных элементов счисления бесконечно малых."

В статье С. Н. Полякова "Методологическая постройка программ учебной математики" (МО №№1, 1928 г., 1 (12), 2000 г.) высказывается много соображений, близких к концепции деятельностного содержания. Однако, предлагаемый вариант программы формулируется все же в терминах учебного материала. Для примера:

"I концентр. (Развитие математической интуиции и навыков вычисления.)

... 3. Изучение прямолинейных и плоскогранных форм (призмы, четырехугольники, углы и окружность; пирамиды, треугольники, многоугольники). Вычисления с дробными числами; круговые диаграммы; составление и решение уравнений с целыми и дробными коэффициентами вида $ax \pm bx = c$, $ax \pm b = c$, $ax \pm b = cx$. Измерение и разложение прямолинейных фигур и объемов призм и пирамид. Пифагорова теорема. Технические расчеты и вычисления числовой величины формул."

Обратимся к современным материалам. В докладе Р. Г. Хазанкина "Математическое образование и средняя школа" (МО №3 (14), 2000 г.) говорится: "Я хочу сказать доброе слово именно вузовскому математическому образованию. Оно реформировалось моментально, в течение просто считанных месяцев. ... К примеру, читаются такие курсы, как "Дискретная математика", "Исследование операций", "Системный анализ", "Теория игр", "Теория принятия решений". Появились новые прикладные курсы по математике: "Финансовая математика", "Актуарная математика", "Теория риска" и пр."

Мы видим, что реформирование понимается как наполнение вузовских учебных программ новыми блоками учебного материала.

Деятельностное содержание присутствует неявно

Мы предполагаем, что сформулированные в терминах учебного материала программы включают деятельностное содержание неявно, опосредованно. А именно, подразумевается, что педагоги, осуществляющие преподавание по программам, являются носителями соответствующих образцов, способов, техник мышления и деятельности (восприняв их, в свою очередь, в процессе собственного обучения) и могут передать их учащимся. В упомянутых действующих учебных программах по предметам кое-что из деятельностного содержания неявно присутствует в разделах, описывающих знания, умения, навыки.

Опыт, однако, показывает, что учителя часто не осознают, каким именно деятельностным содержанием они сами владеют, соответственно, как и на каком материале это содержание должно быть передано учащимся. В итоге по результатам "прохождения" одного и того же материала может быть обнаружена передача совершенно разного содержания, часто совсем не того, которое планировалось (если планировалось).

Деятельностное содержание завуалировано различными наслоениями

Разумеется, говоря о реформировании математического образования и модификации его содержания, многие авторы не ограничиваются рамками учебного материала и высказывают идеи, созвучные концепции деятельностного содержания. Обратимся снова к публикациям по истории математического образования и к современным материалам.

Из статьи В. И. Арнольда "Математика и математическое образование в современном мире" (МО №2, 1997 г.): "Умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования. Успех приносит не столько применение готовых рецептов (жестких моделей), сколько математический подход к явлениям реального мира.

...Сила Витте заключалась ... в том способе мышления, который он называет "математикой-философией" и который заставляет человека с математическим образованием думать о всех реалиях окружающего мира с помощью (сознательного или бессознательного) мягкого математического моделирования... Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа каждого школьника...

Основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира... Искусство составлять и исследовать мягкие математические модели является важнейшей составной частью этого умения."

Из интервью "Н. Н. Константинов о математическом образовании" (МО №1 (4), 1998 г.): "**Вопрос:** ... о выпускнике средней школы, не математической. Что с точки зрения математического образования он должен иметь, если он дальше не будет специализироваться по математике?

Ответ: Кроме умения считать, я думаю, что самое полезное, если бы он получил некоторую логическую культуру...

А, скажем, изучение геометрии, ее теорем, скорее является частью эстетического воспитания человека. ... Геометрия — реальное прикосновение к прекрасному. Математика ведь далеко не для всех представляется прекрасной. Но для кого представляется, тот что-то от нее получает."

Из цитированного выше доклада А. К. Власова: "Одними простыми сведениями, как бы ни были они обширны, нельзя расширить своего кругозора, нельзя достичь общего образования. Надо эти сведения *пережить*, надо, чтобы в этом переживании что-то в прежнем кругозоре *уступило после борьбы* место чему-то новому, приводящему уже приобретенное в бо́льшую гармонию... Цель преподавания такой математики, хотя бы и элементарной, заключается в том, чтобы вызвать в учащемся математическое мышление соответственно корням этого мышления, как аналитическое, так и геометрическое... Такое мышление может быть различных степеней, начиная от элементарных, интуитивных навыков и восходя до сложных математических концепций. Где бы оно для данного лица ни кончалось, оно представляет для него ценность...

Идея бесконечного процесса, комплекс невыполненных действий как объект мысли и функциональное мышление — все это ценные стороны математики как образовательного предмета...

Геометрия как деятельность построения обостряет интуицию, обостряет наш внутренний взор, увеличивает емкость представления. ... Если деятельный момент построения введен в элементарное представление изучающего, то цель обучения достигнута, независимо от объема геометрического материала."

Из статьи В. А. Дементьева "В школу пришел физик" (МО №4 (11), 1999 г.): "Школьный учитель сам должен вести исследовательскую работу в своей или смежной области знания, тогда он сможет сам спланировать маленькое исследование в классе. Педвузы же пока исследователей не выпускают...

С целью достижения глубокого и прочного усвоения тренинговую часть учебного процесса в классе целиком посвятить решению прикладных задач. Это органически входит в логику любой естественнонаучной дисциплины: научные накопления (данные, теория и аппарат) нужны для выполнения прогнозов, для технического конструирования, для планирования, для ориентирования в реальной действительности. А все это и есть прикладные задачи. Вот такие задачи, доступные школьному уровню, и предлагается решать совместными усилиями в классе...

Прикладную задачу невозможно ни поставить, ни решить без интенсивной работы с физическими моделями."

В также цитированной выше статье С. Н. Полякова о составлении математических программ на основе методологического принципа говорится: "... Первым концентром будут методы наблюдения и описания комбинированного счета и основных форм трехмерного пространства, воспринимаемых путем движения и измерения...

Вторым концентром будут методы отвлечения и систематизации: методы мышления комплексами невыполненных действий, методы исследования простейших функциональных соотношений и методы геометрических преобразований...

Третий концентр методов — методы сложного функционального анализа и сложных обобщений..."

Из цитированной подборки "К столетию Московского совещания по вопросам о средней школе", раздел "Мнение П. А. Некрасова о цели и значении преподавания математики в гимназиях": "... Можно повысить развитие абитуриентов гимназии, ставя единственную правильную цель преподавания математики: усвоение ее как науки и как научного метода миропознавания. ... Преподавая математику, необходимо как можно чаще и практичнее сближать (особенно в задачах) ее как научный метод миропознавания с теми конкретными научными фактами и явлениями, к которым она применима. Заимствуя для этой цели явления из разных наук (географии, статистики, физики, механики, астрономии и пр.), нужно облекать вопросы об этих явлениях в форму простых и научно выраженных математических задач...

Теория сочетаний представляет средство для развития одной из важнейших способностей ума — способности представлять явления в разных комбинациях. Эта способность нужна в жизни всякому и изощрение ее желательно."

Из доклада Р. Г. Хазанкина “Математическое образование и средняя школа”, МО №3 (14), 2000г.: “...задуматься о возможности осторожных и продуманных изменений как в содержании, так и в методических технологиях школьного математического образования.

В первую очередь стоит подумать о введении в школьную программу элементов теории графов, в частности, как способа описания сложных структур, воспринимаемых при этом как единое целое. Тем более, что графы являются прекрасной базой для развития алгоритмического мышления...

Что такое математическая деятельность учителя и учащихся старшей школы? Это, прежде всего, решение задач, а не упражнений, их постановка, исследование, отыскание метода, его реализация, анализ результатов, попытка обобщения и т.д. Для интеллектуального роста задачи нужно “крутить”.

Учитель математики просто обязян быть исследователем, хотя бы на уровне школьных математических задач. Учиться выделять ключевые задачи, ключевые методы и ключевые идеи и вооружать школьника этими задачами, методами и идеями.”

Из статьи И. П. Костенко “Логика и жизнь (размышления читателя)”, МО №3 (18), 2001 г,: “Элементы анализа действительно нельзя включать в программу общеобразовательной школы, потому что они **всегда** останутся **непонятыми**...

Суть основ анализа — в новом **качестве** мышления... Необходимо длительное время привыкания к новой интуиции, к новой усложненной логике, плохо увязывающейся с интуицией.”

Анализируя приведенные выше примеры, отметим следующее обстоятельство. Деятельностное содержание завуалировано в этих цитатах методическими, психологическими, организационными, социальными и т.п. факторами. По нашему мнению, это не случайно. В живой педагогической практике любой фрагмент содержания, поскольку его надо передать учащимся, неразрывно связан с этими факторами.

Для выявления содержания **в чистом виде** необходимо занять специальную отстраненную позицию, положив мышление и деятельность как таковые в качестве объекта изучения. Назовем эту позицию *методологической*.

Аналогичная ситуация наблюдается при возникновении теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) — для создания этой теории надо было абстрагироваться от решения той или иной конкретной изобретательской задачи и положить в качестве объекта исследования закономерности развития технических систем. “Технические системы развиваются закономерно. Закономерности эти познаваемы, их можно использовать для сознательного совершенствования старых и создания новых технических систем, превратив процесс решения изобретательских задач в точную науку развития технических систем” [7] .

Деятельностное содержание может быть выявлено и явно описано

Итак, методологи, развивающие **теорию мышления и деятельности**, выявляют и описывают способы, образцы, техники мышления и деятельности в самых различных областях человеческой культуры. Определенная совокупность этих выявленных и описанных способов деятельности и является, на наш взгляд, **содержанием общего образования**. На ее основе могут быть разработаны **стандарты общего среднего образования**. Для этого надо составить список **базовых** способов деятельности, освоение которого на материале разных учебных предметов и означало бы для учащегося получение общего среднего образования. В более узком смысле упомянутая совокупность способов деятельности может служить основой построения межпредметных связей нового типа, см. следующий раздел.

Реализация этой программы связана с большими трудностями. Отметим два момента.

Во-первых, теория мышления и деятельности еще не является предметом широкого изучения. Ее результаты мало известны педагогической общественности. Как достаточно молодая наука, она еще не имеет обширной учебной литературы, устоявшихся лекционных курсов, которые могли бы быть включены в программы педагогических вузов. Оговоримся, что некоторые ее результаты могут быть рассеяны по другим вузовским курсам — психологическим, методическим и т.п. — это требует дополнительного анализа.

Во-вторых, для организации работ по такой программе нужен уникальный научно-педагогический коллектив, включающий методологов, квалифицированных специалистов по различным отраслям знания, учителей по разным предметам, учащихся разных возрастов плюс соответствующие организационно-финансовые и технические условия.

Из опыта работы по выявлению деятельностного содержания

Такой коллектив был сложен на базе Экспериментальной Общеобразовательной Гуманитарно-Методологической школы №1314 г. Москвы “Проектный Колледж”. На протяжении нескольких лет там шла интенсивная работа по выявлению и описанию деятельностного содержания образования; эта работа ведется и в настоящее время, будучи распределенной по нескольким организациям, см. подробности во второй части статьи.

В рамках этой программы автором проводились специально спланированные занятия по математике с учащимися Колледжа, а также с учащимися нескольких школ Советского района Ханты-Мансийского АО Тюменской области. В занятиях всегда принимали участие разработчики, занимающие методологическую позицию (в разные годы это были Губанова Т. М., Дмитриев Д. Б., Семин И. И., Сунцова Л. В.), учителя математики и, что также очень важно, учителя других предметов.

Главным моментом такого занятия являлась ситуация, когда учащиеся не могли справиться с поставленным заданием, хотя все необходимые сведения были в их распоряжении (более подробно о форме организации занятий, адекватной выявлению деятельностного содержания, см. [8]). Это благоприятный момент для изучения вопросов: каким способом деятельности учитель как специалист в данной области владеет в отличие от детей? как объективировать этот способ в качестве содержания образования? носит ли оно специфически-предметный (в смысле школьных учебных предметов) или надпредметный характер?

Такие вопросы исследовались в ходе анализа проведенных занятий. Некоторые, в итоге зафиксированные и описанные, способы деятельности носят специфически-предметный характер. Интересным, на наш взгляд, результатом является то, что многие выявленные в конкретном учебном предмете (в данном случае, математике) способы деятельности имеют на самом деле более общий, надпредметный характер. Это фиксировалось и описывалось при участии учителей разных предметов, которые совместно вырабатывали надпредметный, инвариантный стиль описания.

Таким образом, выявление и описание некоторого способа деятельности становится, в частности, основой построения межпредметных связей нового типа. Они, говоря вкратце, заключаются в том, что данный способ деятельности отрабатывается на материале разных предметов. Интерес для учителей-предметников представляет определение специфики, особенностей способа деятельности применительно к материалу своего предмета.

После приобретения определенного опыта становится не обязательным проводить специальные занятия для выявления и описания способов деятельности. Это можно делать при анализе текущих уроков, анализе учебных программ и учебных пособий по различным предметам. Но совместные обсуждения учителей разных предметов под руководством методолога должны сохраняться.

Литература

1. Имайкин В.М., Описание способов деятельности как основа выявления межпредметных связей и содержания общего образования, в сборнике “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”, М., МЦНМО, 2000.

2. Разработка и внедрение деятельностного содержания образования на экспериментальных площадках, М., Проектный Колледж, 2000.

3. Щедровицкий Г.П., Педагогика и логика, М., “Касталь”, 1993.

4. Щедровицкий Г.П., Избранные труды, М., 1995.

5. Щедровицкий Г.П., Философия. Наука. Методология, М., 1997.

6. Дмитриев Д.Б., Теоретико-методологические основы разработки стандартов образования, М., Проектный Колледж, 1996 (рукопись).

7. Альтшуллер Г.С., Алгоритм изобретения — ТРИЗ, “Обозрение Z”, №9-10, 2001 г.

8. Половкова М.В., Психолого-педагогические условия освоения задачной формы организации образовательного процесса в средней школе, автореферат диссер-

тации на соискание ученой степени кандидата психологических наук, Институт педагогических инноваций РАО, М., 2000 г.

Имайкин Валерий Марсович,
главный редактор журнала
"Математическое образование",
кандидат физико-математических наук.

email: ivm@dnttm.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д.3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

Страница Фонда в сети Internet: www.fmop.dnttm.ru

e-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2001 год (включая стоимость пересылки) – 35 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2001 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 30 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 40 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents