Константиновский сборник

Н. Н. Константинов

Математический анализ для школьников

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (06), апрель 2021 г.

Москва, 2021

Константиновский сборник

179

Н. Н. Константинов. Математический анализ для школьников

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (06), апрель 2021 г.

Москва, 2021

Приложение к журналу "Математическое образование"

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Редактор серии Комаров С.И.

Ответственный за выпуск Ибрагимова Н.Ю.

Набор и верстка: Ибрагимов Р., Ибрагимова Е., Ибрагимова К.

Выпуск 2 (06), 2021 г.

В настоящем выпуске представлен курс математического анализа Н.Н. Константинова в листках для старших классов математических школ. Курс был издан репринтным способом с одобрения методического объединения учителей математики школы 179 в 1971 году. Отдельным изданием публикуется впервые.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 20.04.2021. Объем 7,5 п.л. Тираж 200 экз. Цена свободная.

Прочтите предисловие!

Для того, чтобы активно овладеть конструкциями математического анализа, достаточно прорешать основную часть предлагаемого сборника. Основная часть состоит из заданий (листков) №№ I - 3, 6, I0, II, I3 - I5, I7 - I9, 28, 29, 3I - 33, 37, 38, 40 - 55, 58 - 64, 66, 69 - 76, 80, 8I, 83 - 86, 88 - 9I, 93, кроме дополнительных задач этих листков. Все остальные листки и дополнительные задачи основных листков служат двум целям: дать дополнительный интересный материал и придать курсу логическую законченность.

Тех, кто будет заниматься по этой книжке самостоятельно, я хочу тщательно уберечь от того, чтобы решать всё подряд. Математический анализ можно сравнить с домом, в котором вам предстоит жить. В доме есть фундамент. Так фундамент сделан не для того, чтобы в нём жить, а для того, чтобы весь дом не развалился. Бо́льшая часть дополнительного материала первой и второй части помещена в книжку не для того, чтобы их изучать, а для цельности. У вас всегда есть возможность заглянуть туда, если дом зашатается. Но не отвлекайтесь на фундамент, если у вас нет к этому специального интереса.

Каждая конструкция анализа должна быть в вас внутренне выращена до состояния полной свободы прежде, чем появятся основанные на ней новые конструкции. Нужно не торопясь решать задачи основных заданий, записывая все или почти все решения, и при этом добавлять приглянувшиеся дополнительные задачи. Важно, чтобы ваши решения кто-нибудь проверял - новички часто не замечают собственных ошибок.

Специально, чтобы вам не соскучиться, в книжку вставлено несколько неверных теорем. Конечно, лучше бы об этом не предупреждать, но против этого были возражения.

Для хорошего усвоения материала не обязательно решить самому абсолютно все задачи. Некоторым утверждениям можно просто поверить (если верится), некоторые доказательства можно узнать от друзей или из учебника. Но не забывайте, что чем больше вы сделаете самостоятельно, тем большему вы научитесь.

Первая страница репринтного издания курса

Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 2 (06), апрель 2021 г.

Содержание

Н. Н. Константинов. Математический анализ для школьников

Предисловие 1

Как эта книжка возникла 2

Часть 1. Описание действительных чисел 3

Часть 2. Построение действительных чисел 25

Часть 3. Начала теории множеств 37

Часть 4. Элементарные функции 47

Часть 5. Непрерывность и предел 75

Часть 6. Интеграл, производная, теория объемов и площадей 99

Предисловие.

Для того, чтобы активно овладеть конструкциями математического анализа, достаточно прорешать основную часть предлагаемого сборника. Основная часть состоит из заданий (листков) №№ 1–3, 6, 10, 11, 13–15, 17–19, 28, 29, 31–33, 37, 38, 40–55, 58–64, 66, 69–76, 80, 81, 83–86, 88–91, 93, кроме дополнительных задач этих листков. Все остальные листки и дополнительные задачи основных листков служат двум целям: дать дополнительный интересный материал и придать курсу логическую законченность.

Тех, кто будет заниматься по этой книжке самостоятельно, я хочу тщательно уберечь от того, чтобы решать всё подряд. Математический анализ можно сравнить с домом, в котором вам предстоит жить. В доме есть фундамент. Так фундамент сделан не для того, чтобы в нём жить, а для того, чтобы весь дом не развалился. Бóльшая часть дополнительного материала первой и второй части помещена в книжку не для того, чтобы их изучать, а для цельности. У вас всегда есть возможность заглянуть туда, если дом зашатается. Но не отвлекайтесь на фундамент, если у вас нет к этому специального интереса.

Каждая конструкция анализа должна быть в вас внутренне выращена до состояния полной свободы прежде, чем появятся основанные на ней новые конструкции. Нужно не торопясь решать задачи основных заданий, записывая все или почти все решения, и при этом добавлять приглянувшиеся дополнительные задачи. Важно, чтобы ваши решения кто-нибудь проверял – новички часто не замечают собственных ошибок.

Специально, чтобы вам не соскучиться, в книжку вставлено несколько неверных теорем. Конечно, лучше бы об этом не предупреждать, но против этого были возражения.

Для хорошего усвоения материала не обязательно решить самому абсолютно все задачи. Некоторым утверждениям можно просто поверить (если верится), некоторые доказательства можно узнать от друзей или учебника. Но не забывайте, что чем больше вы сделаете самостоятельно, тем большему вы научитесь.

Как эта книжка возникла.

Математический анализ можно преподавать таким способом, что основное внимание уделяется самостоятельному решению задач, в том числе доказательству основных теорем. Раз в два или три занятия (занятия двух- и трёхчасовые) ученикам выдаются очередные задания (листочки). Учащиеся решают задачи в классе и дома и сдают все решения преподавателям. При этом почти не применяется обычная форма урока с рассказом материала и проверкой усвоения методом опроса. Не задаются задания «выучить такую-то теорему» или «прорешать к следующему разу такие-то примеры». За сданные задачи не ставится отметка. Отметки ученики получают не за то, как они учатся, а за то, как выучиваются, что проверяется на контрольных и самостоятельных работах.

Из таких листочков с заданиями, переписанных подряд, однажды был составлен сборник, подобный предлагаемому (М.Л.Гервер, Н.Н.Константинов, А.Г.Кушниренко, «Задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся 9 и 10 классов», сборник «Обучение в математических школах», издательство «Просвещение», 1965 г.; в этом сборнике в ряде статей освещается методика преподавания анализа). Но преподавание в каждом классе отличается от других. Возникают новые задачи и новые варианты построения курса. Один из таких вариантов нашёл отражение в предлагаемом сборнике. Редактируя сборник, я старался учесть положительный опыт нескольких математических и физических классов московских школ №№ 7 и 57, при этом широко пользовался задачами, придуманными или собранными учителями этих классов, в особенности задачами И.Н.Бернштейна.

Часть 1. Описание действительных чисел.

Чтобы заниматься математическим анализом, нужно знать свойства действительных чисел. Из курса алгебры 8-го класса вы знаете, что действительные числа бывают рациональные и иррациональные, что среди рациональных чисел имеются целые, а среди целых натуральные (1, 2, 3, …). Вы умеете производить над числами арифметичесие операции и знаете многие свойства этих операций. Вы знаете также, что действительные числа упорядочены, то есть имеет смысл говорить, что одно число больше другого, и знаете многие свойства этого понятия. Нам понадобится много новых свойств действительных чисел. Мы будем выводить их, исходя из известных свойств. При это было бы весьма неприятно, если бы возникали сомнения, какие свойства считать известными, а какие требующими вывода. Наша математика тогда потеряла бы характер формальной игры с чёткими правилами. Чтобы она была такой игрой, мы выпишем полный список «известных» фактов – аксиом действительных чисел, и все остальные свойства (как бы они не казались «очевидными») будем формально выводить из этих аксиом. Полный список аксиом (основных свойств) действительных чисел содержится в листках 1–19. Кроме того, там приведено много вспомогательных (производных) свойств действительных чисел. Все производные свойства являются задачами, которые нужно решать, исходя из всех сформулированных до этого основных и производных свойств.

От учащихся требуется умение правильно строить логические рассуждения. Такие речевые обороты, как «следует», «или», «для любого», «найдётся» и т.п. нужно понимать в том точном смысле, как это принято в математике. Равенство понимается в следующем смысле: $a = b$ есть запись утверждения, что «a» и «b» – обозначения одного и того же объекта рассматриваемой теории, в случае равенства чисел – это обозначения одного и того же числа.

Листок 1. Сложение и вычитание.

Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел содержит элемент 0, и в этом множестве определены операции сложения и вычитания, то есть $a+b$ и $a-b$ суть вполне определённые числа, если a и b – числа.
При этом имеют место следующие основные свойства (аксиомы):
1) $a+b=b+a$
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$
3) $a+0=a$
4) Из $a-b=c$ следует, что $b+c=a$.
Замечание. Во всех аксиомах вхождение «свободной переменной буквы» означает, что аксиома есть верное утверждение при всех допустимых значениях этой буквы. Если про букву ничего не сказано, то допустимыми являются все предметы рассматриваемой теории, в данном случае все действительные числа.

Упражнения (производные свойства).

Задача 1. Доказать, что $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$.

Замечание. В сумме $a+b+c+d$ можно не ставить скобок, так как результат не зависит от того, как эти скобки поставлены. Точная формулировка этого утверждения в общем виде дана в листке 9, где вы будете иметь базу для доказательства этого факта. Во всех листках, кроме 1-го и 9-го, этим фактом разрешается пользоваться без оговорок.

Определение. $-a$ означает $0-a$ ($-a$ называется числом, *противоположным* для a).

Задача 2. $a+(-a)=0$.

Задача 3. Только одно число обладает свойством нуля, то есть существует только одно число x такое, что для любого a $a+x=a$.

Задача 4. Для чисел a и b существует только одно такое число x, что $a+x=b$ (то есть для данных a и b только одно число обладает свойством их разности; в случае $b=0$ этот факт означает, что только одно число обладает свойством противоположного числа для a).

Задача 5. $a-b=a+(-b)$.

Задача 6. Обосновать сокращение левой и правой части равенства на одно и то же слагаемое. Обосновать перенос слагаемого в другую часть равенства с противоположным знаком.

Задача 7. Если к обеим частям неверного равенства прибавить одно и то же число, то получится неверное равенство.

Задача 8. $-(-a)=a$.

Задача 9. Доказать, что $-(a+b-c+d-e)=-a-b+c-d+e$ (выражение $a+b-c+d-e$ нужно понимать так: $(((a+b)-c)+d)-e$).

Так обосновывается правило знаков при раскрытии скобок. В дальнейшем им разрешается пользоваться без оговорок.

Листок 2. Умножение.

В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел есть число 1, не равное 0, и определена операция умножение, то есть символ $a \cdot b$ обозначает определённое число, если a и b – числа. При этом выполняются аксиомы:
5) $a \cdot b = b \cdot a$
6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7) $a \cdot 1 = a$
8) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Упражнения.

Задача 10. $((ab)c)d = a(b(cd))$ (если между рядом написанными выражениями нет точки, она подразумевается).

Замечание. Аналогичное замечанию к упражнению 1 листка 1.

Задача 11. Только одно число обладает свойством единицы (то есть имеется только одно такое число x, что для любого a $ax = a$).

Задача 12. $2 \cdot 2 = 4$ («2» называется $1+1$, «3» называется $2+1$, «4» называется $3+1$). $a + a = 2a$.

Задача 13. $a \cdot 0 = 0$.

Задача 14. $a \cdot (-1) = -a$.

Задача 15. $(-1) \cdot (-1) = 1$; $(-a) \cdot (-a) = a^2$ (a^2 – это $a \cdot a$).

Задача 16. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Задача 17. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Задача 18. Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Этими и подобными задачами обосновываются все обычные правила раскрытия скобок и приведения подобных. В дальнейшем мы будем свободно пользоваться этими правилами.

Листок 3. Деление.

В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел определена операция деление на число, не равное 0, то есть для любых данных чисел a и b ($b \neq 0$) символ $a : b$ обозначает вполне определённое число. При этом выполнена аксиома:
9) Из $a : b = c$ следует, что $b \cdot c = a$.

Определение. $1 : b$ обозначается через b^{-1} и называется числом, *обратным* к b.

Упражнения.

Задача 19. $a \cdot a^{-1} = 1$.

Задача 20. Для чисел a и b ($a \neq 0$) существует только одно такое число x, что $a \cdot x = b$ (то есть для данных a и b только одно число обладает свойством их частного; в случае $b = 1$ этот факт означает, что только одно число обладает свойством обратного числа для a).

Задача 21. $a : b = a \cdot b^{-1}$ (при $b \neq 0$).

Задача 22. Обосновать сокращение левой и правой части равенства на один и тот же отличный от нуля сомножитель. Обосновать перенос сомножителя из одной части равенства в знаменатель другой части равенства.

Задача 23. Если обе части неверного равенства умножить на одно и то же число, то получится неверное равенство.

Задача 24. $(a^{-1})^{-1} = a$ (при $a \neq 0$).

Задача 25. Доказать, что $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{e}{f} = \dfrac{a\,c\,e}{b\,d\,f}$ ($b, d, f \neq 0$).

Так обосновываются обычные правила работы с дробями. В дальнейшем этими правилами разрешается пользоваться без оговорок.

Итак, я попросил вас доказать 25 теорем. Но среди них есть две неверных. Одну из них я хочу разобрать. Речь идёт о задаче 18: если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Дело в том, что этот факт не следует из аксиом 1–8. Для доказательства этого рассмотрим множество из четырёх элементов, которые мы обозначим через 0, 1, 2, 3. Определим операции сложения и умножения для них таблицами:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(то есть для того, чтобы произвести такую операцию, нужно произвести её в обычной арифметике, а затем взять остаток от деления на 4). Определите сами операцию вычитания так, чтобы выполнялась аксиома 4. Легко проверить, что для этих операций будут выполняться аксиомы 1–8. Значит, будут выполняться и следствия из этих аксиом, приведённые в упражнениях, так как в доказательствах вы не пользовались ничем, кроме аксиом. А утверждение задачи 18 в этой арифметике не выполнено, так как $2 \cdot 2 = 0$. Это и доказывает, что это утверждение не является следствием аксиом 1–8. Описанная арифметика из 4-х элементов с такими операциями «+» и «·» называется *4-арифметикой.*

Приведённое рассуждение – одно из типичных рассуждений для тех случаев, когда требуется установить, что какое-то утверждение не является следствием некоторой системы аксиом. Строится модель этой системы аксиом – в данном случае – 4-арифметика – то есть объект, для которого выполняются все эти аксиомы, а потому и их следствия, причём модель подбирается таким образом, чтобы рассматриваемое утвержение для неё не было верно.

Но утверждение задачи 18 можно доказать, если пользоваться аксиомой 9). Значит, мы восстановим истину, если переместим эту задачу в начало следующего листка.

Сделайте эту задачу, пользуясь аксиомой 9).

Следующая группа свойств относится к натуральным числам. Натуральные числа – это числа 1, 2, 3, 4, ... (2 равно по определению $1+1$, 3 равно по определению $2+1$, 4 равно по определению $3+1$ и т.д.). Загадочные слова «и т.д.» заменяют бесконечное описание. Натуральные числа – это те самые числа, к которым мы с детства привыкли, числа, которыми мы считаем. Но из аксиом 1–9 это не следует, так как в 2-арифметике все аксиомы 1–9 выполнены, между тем при счёте числами 0 и 1 не обойдёшься (в 2-арифметике $2 = 0$). Нужны новые аксиомы. Они вместе с некоторыми следствиями приведены в следующем (дополнительном) листке 4. Результатом этого листка является то, что к натуральным числам можно применять рассуждение по индукции. Затем в листке 8 говорится о том, что означает «считать» и почему можно считать с помощью натуральных чисел.

Следующая группа свойств относится к соотноошению между натуральными, целыми и рациональными числами. Целые числа охватывают натуральные, 0 и натуральные со знаком «$-$», рациональные – это частные от деления целых. Подробно об этом говорится в листке 5. Следствием этого листка является то, что с действительными числами можно обращаться во всех отношениях так, как вы привыкли в младших классах. В листках до 5-го включительно нет только двух вещей: нет понятий «меньше» и «больше» и ничего нет об иррациональных числах.

Теперь, если качественное описание ситуации с натуральными числами, приведённое на этой странице, вас устраивает (так же, как слова о целых и рациональных числах), пропустите листки 4 и 5 и переходите к листку 6, где говорится о порядке.

Листок 4д. Натуральные числа.

В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел выделено подмножество $\mathbb{N}$ натуральных чисел так, что при этом выполнены аксиомы:
10) 0 не входит в $\mathbb{N}$.
11) 1 входит в $\mathbb{N}$.
12) Если a входит в $\mathbb{N}$, то $a+1$ входит в $\mathbb{N}$.
13) Если 1 входит в множество M и для любого натурального числа a из того, что a входит в M следует, что $a+1$ входит в M, то все натуральные числа входят в M (*аксиома индукции*).

Замечание. В формулировке аксиомы индукции вместо того, чтобы говорить о том, что число входит в множество, можно говорить о том, что для числа выполняется свойство. Свойство числа x обозначается через $P(x)$; в зависимости от x $P(x)$ принимает значения «истина» или «ложь». Аксиому индукции можно схематически записать так:

$$\frac{P(1), P(x) \to P(x+1)}{P(x)}.$$

Упражнения.

Задача 26. -5 не есть натуральное число.

Задача 27. Сумма двух натуральных чисел есть натуральное число.

Задача 28. Произведение двух натуральных чисел есть натуральное число.

Задача 29. Если a и b натуральны, то $a+b \neq 1$.

Задача 30. Если x натурально и $x \neq 1$, то $x-1$ натурально.

Задача 31. $\frac{1}{3}$ не есть натуральное число.

Листок 5д. Целые и рациональные числа.

В множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел есть подмножество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а в нём подмножество $\mathbb{Z}$ целых чисел, а в нём множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел (замечу, что понятие «подмножество» не исключает возможности, что подмножество совпадает со всем множеством). При этом выполнены аксиомы:
14) Если a и b – натуральны, то $a - b$ целое.
15) Если x – целое, то найдутся натуральные a и b такие, что $a - b = x$.
16) Если a и b – целые и $b \neq 0$, то $\frac{a}{b}$ рациональное.
17) Если x рациональное, то найдутся целые a и b ($b \neq 0$) такие, что $x = \frac{a}{b}$.

Упражнения.

Задача 32. Сумма двух целых чисел есть целое число. Разность и произведение двух целых чисел суть целые числа. 0 и 1 суть целые числа.

Замечание. Мы видим, что целые числа есть объект, для которого выполняются аксиомы 1–8. Такой объект называется алгебраическим кольцом (коммутативным с 1; *коммутативностью* называется свойство, выраженное аксиомой 5).

Задача 33. Если x – целое, то имеет место одно и только одно из трёх обстоятельств: $x = 0$, x натурально, $-x$ натурально.

Замечание. Из этого следует, что целые числа представляют собой объединение трёх непересекающихся множеств: множества натуральных чисел, множества, состоящего только из 0, и множества натуральных чисел, взятых со знаком «$-$».

Задача 34. Сумма, разность и произведение двух рациональных чисел есть рациональное число. 0 и 1 суть рациональные числа (то есть множество рациональных есть алгебраическое кольцо).

Задача 35. Частное от деления двух рациональных чисел a и b ($b \neq 0$) есть рациональное число.

Замечание. Мы видим, что в множестве рациональных чисел выполняются аксиомы 1–9. Такой объект называется *полем.* Так как всё множество действительных чисел является полем, то можно сказать, что множество рациональных чисел является подполем поля действительных чисел.

Действительное число, которое не является рациональным числом, называется *иррациональным* числом. Заметим, что существование иррациональных чисел не следует из аксиом 1–17, так как поле рациональных чисел удовлетворяет этим аксиомам, а в нём нет иррациональных чисел.

Листок 6. Неравенства.

В множестве действительных чисел определено отношение «$<$» (меньше) так, что при этом выполняются следующие аксиомы (основные свойства):
18) Для любых двух чисел a и b имеет место одно и только одно из утверждений: «$a < b$», «$a = b$», «$b < a$».
19) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
20) Если $a < b$, то $a + c < b + c$.
21) Если $a < b$ и $0 < c$, то $ac < bc$.
Замечание. Наряду со значком «$<$» мы пользуемся значком «$>$» в следующем смысле: $a > b$ означает $b < a$.

Упражнения.

Задача 36. $1 > 0$.

Задача 37. Обосновать сокращение обеих частей неравенства на одно и то же слагаемое и перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Задача 38. $a > b$ титтк (тогда и только тогда, когда) $a - b$ положительно (положительно – значит больше нуля).

Задача 39. Если $a \neq 0$, то $a^2 > 0$.

Задача 40. Если $a > 0$, то $\dfrac{1}{a} > 0$.

Задача 41. Обосновать сокращение обеих частей неравенства на один и тот же положительный сомножитель.

Задача 42. Если $a > b$ и $c > d$, то $a+c > b+d$ (неравенства одинакового смысла можно складывать).

Задача 43. Если $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$.

Задача 44. Если $0 < a < b$, и $\sqrt[k]{b}$ и $\sqrt[k]{a}$ существуют, то $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$ (корни берутся положительные).

Дополнительные.

Задача 45. Всякое натуральное число положительно.

Задача 46. Всякое положительное целое натурально.

Задача 47. Доказать, что среди натуральных чисел $a < b$ титтк $b - a$ натурально.

Листок 7д. Задачи о независимости аксиом неравенств.

Задача 48. Доказать, что аксиому 21 нельзя доказать, исходя из аксиом 1–20.

Задача 49. Доказать, что аксиому 20 нельзя доказать, исходя из аксиом 1–19 и 21.

Задача 50. Доказать, что аксиому 19 нельзя доказать, исходя из аксиом 1–18, 20 и 21.

Указание.

Эти задачи можно решать с помощью моделей, аналогично тому, как это описано на стр. 7. За основу при построении модели можно взять поле рациональных чисел с обычными операциями, тогда все аксиомы 1–17 выполняются. Затем нужно придумать отношение «меньше», отличающееся от обычного, так, чтобы из аксиом 19, 20, 21 не выполнялась ровно одна, и именно так, независимость которой доказывается.

Дополнительная.

Задача 51. Придумать такое алгебраическое действие, то есть правило, по которому двум числам a и b однозначно сопоставляется третье, обозначаемое через $a\S b$, чтобы было:
1) $a\S b = b\S a$
2) $(a\S b)\S c = a\S(b\S c)$
3) $(a\S b) + c = (a + c)\S(b + c)$.
Если вы одно такое действие придумали, то придумайте ещё одно. Если же вы придумали вторую, то имейте в виду, что существует и третье. Запомните себе эту задачу на будущее.

Листок 8д. Счёт с помощью натуральных чисел.

Задача 52. Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел содежит первый (наименьший) элемент (для всего множества натуральных чисел наименьшим элементом является 1).

Задача 53. Докажите, что можно пользоваться следующей формой индукции:
Пусть $U(k)$ – свойство, зависящее от натурального номера k (свойство числа k). Если для всякого натурального k верно утверждение:
«Если для всех натуральных p, меньших k, верно $U(p)$, то верно $U(k)$»,
то $U(k)$ верно для всех натуральных k.

Задача 54. Ограниченное сверху множество, состоящее их натуральных чисел, имеет наибольший элемент.
(Множество M называется *ограниченным сверху*, если существует такое число C, что всякий элемент M меньше C).

Определение. N-отрезком натурального ряда называется множество натуральных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant x \leqslant N$.

Определение. *Взаимно-однозначным соответствием* множеств A и B называется правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один определённый элемент множества B так, что при этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие одному определённому элементу множества A.

Это определение является основой всякого счёта, так как даёт возможность заменить точным понятием взаимно-однозначного соответствия интуитивное представление об одинаковости числа элементов двух множеств. Такая замена нам необходима, так как мы должны сказать об этой одинаковости раньше, чем сказали, что такое счёт.

Определение. Если существует взаимно-однозначное соответствие множества M и N-отрезка натурального ряда, то множество M называется *конечным* и *содержащим N элементов.*

Задача 55. Если множество M содержит k элементов, и в то же время оно содержит p элементов, то $k = p$.

Задача 56. Если M и P – два непересекающиеся множества, сожержащие соответственно m и p элементов, то объединение этих множеств содержит $m + p$ элементов.

Листок 9д.
Суммирование N чисел.

Определение. Для всякого конечного множества $a_1, a_2, \ldots, a_p$, содержащего p элементов, определим их *сумму* $\sum_p(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ (иначе обозначаемую $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$) по следующему индуктивному правилу:
1) $\sum_1(a_1) = a_1$;
2) $\sum_{k+1}(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}) = \sum_k(a_1, \ldots, a_k) + a_{k+1}$.

Задача 57. Доказать, что по этому правилу можно вычислить сумму для любого конечного набора чисел.

Задача 58. $\sum_{p+k}(a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+k}) = \sum_p(a_1, \ldots, a_p) + \sum_k(a_{p+1}, \ldots, a_{p+k})$.

Задача 59. Для всякого натурального k $k = \sum_k(1, 1, \ldots, 1)$.

Задача 60. Определите аналогично произведение k сомножителей и докажите теорему, аналогичную 58.

Разложение натуральных чисел на множители.

Определение. Натуральное число k называется *составным*, если его можно представить как произведение $p \cdot n$, где p и n – натуральны и отличны от 1. Всякое натуральное число, отличное от 1 и не являющееся составным, называется *простым*.

Задача 61. Докажите, что в множестве всех натуральных чисел, кроме 1, наименьшим является 2.

Задача 62. Доказать, что 2 – число простое.

Задача 63. Доказать, что всякое составное число представляется как произведение конечного числа простых сомножителей.

Задача 64. Доказать, что разложение натурального числа на простые сомножители единственно (с точностью до перестановки сомножителей).

Листок 10. Содержательные задачи.

Задача 65. Если $a > 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$. Когда достигается равенство?

Задача 66. Какое наименьшее значение имеет выражение $a + \dfrac{9}{a}$ $(a > 0)$?

Задача 67. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического (в предположении, что среднее геометрическое существует).

Задача 68. (*Дополнительная.*) Аналогичное утверждение для среднего арифметического и среднего геометрического n чисел.

Задача 69. Доказать, что $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *слабо выпуклой*, если её значение в середине любого отрезка области задания меньше среднего арифметического её значений на концах этого отрезка.

Задача 70. Доказать, что функция $y = x^2$ слабо выпукла. Доказать, что функция $y = x^2 + px + c$ слабо выпукла.

Задача 71. Решить неравенство: $\dfrac{(x-2)(x+1)(x+3)}{(x-5)} > 0$.

Пояснение. Говорят, что число x_0 *удовлетворяет* неравенству, содержащему x, если в результате подстановки в это неравенство числа x_0 вместо x получается верное неравенство. *Решить неравенство*, содержащее x, – значит дать явное описание всех x, которые ему удовлетворяют.

Задача 72. Пусть трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два различных корня x_0 и x_1, причём a положительно и x_0 меньше x_1. Какой знак принимает трёхчлен для x, меньших x_0, какой для x между x_0 и x_1 и какой для x, больших x_1? Что можно сказать о знаке трёхчлена, который не имеет корней или имеет только один двойной корень?

Задача 73. Решить неравенство: $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} > 2$.

Листок 11. Модули.

Определение. *Модулем* числа x (обозначение $|x|$) называется число x, если $x \geqslant 0$, и число $-x$, если $x < 0$.

Задача 74. Доказать, что для любого x $|x| \geqslant 0$.

Задача 75. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей, модуль частного равен частному от деления модулей.

Задача 76. Доказать, что $|x-a| < b$ тогда и только тогда, когда $a-b < x < a+b$.

Задача 77. Доказать неравенство треугольника: $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.
Другая форма неравенства треугольника: $|a-b| \leqslant |a-x|+|b-x|$.
Модуль $a-b$ есть расстояние на числовой прямой между точками с координатами a и b. Неравенство треугольника выражает тот факт, что расстояние между точками не больше, чем сумма расстояний от них до третьей точки.

Задача 78. Доказать, что $|a-b| \geqslant |a|-|b|$.

Задача 79. Решить неравенство $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > 3$.

Задача 80. Нарисовать график функции $y = |x-1|+|x+1|$.

Задача 81. Подобрать a и b так, чтобы множество значений x, удовлетворяющих неравенству $|x-a| \leqslant b$ совпадало с отрезком с концами 1 и 2,5.

Задача 82. Даны три неравенства: 1) $|x-1| < 1$, 2) $|x-2| < 1$, 3) $|x-\frac{3}{2}| < 1$. Верно ли, что одно из этих неравенств есть следствие двух других?

Листок 12д.
Неравенства в геометрии.

В этих задачах предполагается, что вы будете пользоваться интуитивными представлениями о площади и длине и формулами, известными вам из геометрии. Но если подходить к делу строго, вы сейчас не имеете основ для решения этих задач, так как определения длины и площади не только не сформулированы, но их и нельзя сформулировать, опираясь только на те свойства действительных чисел, которые описаны в предыдущих листочках. В дальнейшем эти определения формулируются (см. листки 39, 97, 98).

Задача 83. Среди треугольников, вписанных в окружность, правильный имеет наибольшую площадь.

Задача 84. Какой треугольник из вписанных в данную окружность имеет наибольший периметр?

Задача 85. Среди прямоугольных треугольников с данной гипотенузой найти треугольник с наибольшим периметром.

Задача 86. Доказать, что в треугольнике сумма квадратов сторон меньше половины квадрата периметра.

Задача 87. Доказать, что в треугольнике меньшей медиане соответствует большая сторона.

Индукция в геометрии.

Задача 88. Дан выпуклый многогранник. Обозначим через Г число граней, через Р – число рёбер, через В – число вершин. Доказать, что $\text{Г} - \text{Р} + \text{В} = 2$.

Задача 89. На сколько частей делят плоскость k прямых в общем положении? (см. задачу 90)

Задача 90. На сколько частей делят пространство k плоскостей в общем положении? (k плоскостей (прямых) находятся в *общем положении*, если любые три (две) из них пересекаются в единственной точке, и ни в какой точке не пересекается четыре (три) из них).

Задача 91. Дан треугольник. Система точек, лежащая внутри него, называется *правильной*, если расширенная система точек, полученная присоединением к нашей системе вершин треугольника, обладает тем свойством, что никакие три точки этой системы не лежат на одной прямой. Треугольник *правильно разбит на треугольники*, если множество вершин этих треугольников совпадает с расширенной системой точек. Сколько треугольников в правильном разбиении, если дана правильная система из k точек?

Задача 92. На сколько частей делят выпуклый многоугольник его диагонали, если никакие три из них не пересекаются в одной внутренней точке многоугольника?

Листок 13. Упражнения на индукцию.

Задача 93. $1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Задача 94. $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Задача 95. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{k(k+1)}=?$

Задача 96. $1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{6^3}+\ldots+\dfrac{1}{6^k}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{6^{k+1}}\cdot\dfrac{6}{5}$.

Задача 97. $1+p+p^2+p^3+\ldots+p^k=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

Определение. *Арифметической прогрессией* называется последовательность вида $x_k=a+bk$ (нумерация начинается с 1).
Геометрической прогрессией называется последователность вида $x_k=a\cdot b^k$.

Задача 98. Доказать, что сумма k первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $C_k=\dfrac{x_1+x_k}{2}\cdot k$.

Задача 99. Доказать, что сумма k первых членов геометрической прогрессии выражается формулой $C_k=\dfrac{x_1-x_{k+1}}{1-b}$ (при $b\neq 1$).

Задача 100. Доказать формулу бинома Ньютона
$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p}x^p+\ldots+x^k.$$

Дополнительные.

Задача 101. Доказать, что при натуральном k $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^{k+1}>\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$.

Задача 102. Последовательность Фибоначчи образуется следующим образом: первые два числа равны единице, а дальше каждое число является суммой двух предыдущих.
Доказать, что
а) каждое пятое число последовательности Фибоначчи делится на 5;
б) для каждого k найдётся член, делящийся на k.

Задача 103. Рассмотрим числа
$$\begin{array}{llll}
1^k & & & \\
 & 2^k-1^k & & \\
2^k & & (3^k-2^k)-(2^k-1^k) & \\
 & 3^k-2^k & & \ldots \\
3^k & & (4^k-3^k)-(3^k-2^k) & \\
 & 4^k-3^k & & \\
4^k & & \ldots & \\
 & \ldots & & \\
\ldots & & & \\
(n-1)^k & & & \\
 & n^k-(n-1)^k & \ldots & \\
n^k & & &
\end{array}$$
Доказать, что все числа $(k+1)$-го столбца равны.

Листок 14. Важные задачи.

Задача 104. Доказать, что при действительном $a > -1$ и натуральном k
$$(1+a)^k \geqslant 1 + ka.$$

Задача 105. Доказать, что найдётся такое p, что для любого натурального $k > p$
$$1000 \cdot 2^k < k!.$$

Задача 106. Доказать, что $\exists p \, \forall k > p \; k^2 < 2^k$.
($\exists$ – обозначение для словосочетания «найдётся ... такое, что»,
$\forall$ – обозначение для словосочетания «для любого ... »).

Задача 107. Доказать, что $\exists p \, \forall k > p \; k^3 < 2^k$.

Задача 108. Доказать, что $\exists p \, \forall k > p \; k^{10} < 2^k$.

Задача 109. Даны числа a, b и c. Доказать, что существует такое k, что
$$k^3 + ak^2 + b > k^2 + c.$$

Задача 110. Доказать, что существует такое натуральное k, что
$$1,0001^k > 1000000.$$

Задача 111. Доказать, что существует такое натуральное k, что
$$0,999^k < 0,0000001.$$

Задача 112. Доказать, что для любого положительного числа ε найдётся число N такое, что для любого k, большего N:
$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2k+1}{3k+6} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Листок 15. Ограниченные множества.

Определение. Числовое множество M называется *ограниченным сверху*, если существует такое число C, что для всякого x из M $x < C$.

Определение. Числовое множество M называется *ограниченным снизу*, если существует такое число C, что для всякого x из M $x > C$.

Определение. Числовое множество M называется *ограниченным*, если существует такое число C, что для всякого x из M $|x| < C$.

Упражнения.

Задача 113. Сформулировать, что означает, что множество M не ограничено сверху.

Задача 114. Доказать, что для того, чтобы множество M было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено сверху и снизу.

Задача 115. Даны числовые множества A и B. Множество C образуем следующим образом: C состоит из всевозможных сумм $a + b$, где a принадлежит множеству A, b принадлежит множеству B. Доказать, что множество C ограничено тогда и только тогда, когда A и B оба ограничены.

Дополнительные.

Задача 116. *Гармоническим рядом* называется бесконечная сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\ldots$. Доказать, что сумма первых 500 членов гармонического ряда больше 5.

Задача 117. Обозначим через P_k сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Рассмотрим множество M чисел P_k при всевозможных натуральных k. Доказать, что M – неограниченное множество.

Задача 118. Если возвести в квадрат члены гармонического ряда, то сумма любого их количества не превышает 2.

Листок 16д. Дополнительные задачи на неравенства.

Задача 119. Доказать, что $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 100} < \dfrac{1}{12}$.

Задача 120. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} < \frac{3}{4}.$$

(k натурально)

Задача 121. В гармоническом ряде выброшены все слагаемые, в написании которых участвует цифра 9. Доказать, что сумма любого количества членов полученного ряда меньше 100.

Задача 122. Имеется неограниченное количество одинаковых кирпичей, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Первый кирпич кладётся на горизонтальную плоскость, второй кирпич кладётся на первый, третий на второй и так далее. Кирпичи можно класть друг на друга с некоторым сдвигом, но так, чтобы они не падали. Для каждой такой конечной постройки определим расстояние от середины проекции на плоскость верхнего кирпича до середины проекции нижнего. Будет ли множество всех таких расстояний ограничено?

Задача 123. Решить предыдущую задачу, если кирпичи могут иметь неодинаковый вес. Будем предполагать, однако, что каждый кирпич однороден, то есть его плотность во всех его точках одинакова (это предполагалось и в предыдущей задаче), и что плотности различных кирпичей заключены в пределах от 1 до 2.

Листок 17. Точные грани множества.

Определение. Пусть M – числовое множество. Число C называется *точной верхней гранью* множества M (ТВГ M, $\sup M$), если выполняются два условия:
1. для всякого x из M $x \leqslant C$,
2. для всякого $C_1 < C$ найдётся x из M такой, что $x > C_1$.

Аналогично определяется *точная нижняя грань* (ТНГ, inf) множества M.

Упражнения.

Задача 124. Сформулировать, что означает, что число C не является ТВГ множества M (не употребляя отрицаний).

Задача 125. Если каждое из множеств A и B имеет ТВГ, то объединение этих множеств имеет ТВГ.

Задача 126. Включаем в множество M всякое такое число x, которое можно представить как сумму двух положительных чисел. Доказать, что 0 является ТНГ множества M.

Задача 127. Число 3 является ТВГ множества сумм $a+b$, где $a<1$, $b<2$.

Задача 128. Если каждое из множеств A и B имеет ТВГ, то множество C, состоящее из всевозможных сумм $a+b$, где a – элемент множества A, b – элемент множества B, имеет ТВГ.

Задача 129. Верно ли то же самое для множества произведений ab?

Задача 130. Если множества A и B состоят только из положительных чисел и имеют ТВГ, то множество C произведений ab, где a – элемент множества A, b – элемент множества B, имеет ТВГ.

Задача 131. Если каждое из множеств A и B имеет ТВГ и ТНГ, то множество C произведений ab (a из A, b из B) имеет ТВГ и ТНГ.

Задача 132. Каждое множество может иметь только одну ТВГ.

Задача 133. Какой интервал заполняют суммы $a+b$, если $-2 < a < 2,5$; $-3 < b < 1,5$? (a и b могут принимать любые значения в указанных границах)

Листок 18. Аксиома полноты.

Вы видите, что в аксиомах 1–21 содержится уже так много сведений о действительных числах, что из этих аксиом следует большое количество содержательных фактов арифметики. Однако, некоторые привычные факты не получаются. Например, из этих аксиом не следует, что в множестве действительных чисел существует $\sqrt{2}$ (то есть число, квадрат которого равен 2). Действительно, множество рациональных чисел удовлетворяет всем аксиомам 1–21, между тем

Задача 134. Среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 2.

Из аксиом 1–21 не следует также, что каждый отрезок имеет длину (вопрос о длине разбирается в листке 39).

Далее, в листке 14 в задаче 110 требуется найти такое k, что k-тая степень числа 1,0001 больше 1000000. Напрашивается обобщение, что и для всякого $C > 1$ существует такое k. Действительно, если C рационально, это можно доказать. Но если про C ничего не сказано, то оказывается, что доказать это не удаётся. Это связано с тем, что в наших аксиомах слишком мало сказано о взаимоотношениях рациональных и иррациональных чисел. Например, нельзя доказать, что для всякого действительного x найдётся рациональное y, которое больше x.

Из всего этого видно, что для того, чтобы множество действительных чисел было таким, каким его принято считать, нужны ещё аксиомы. Оказывается, достаточно присоединить ещё одну аксиому (**Аксиому полноты**):

22) Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Эта аксиома не является следствием аксиом 1–21. Для доказательства этого факта достаточно

Задача 135. Привести пример такого множества рациональных чисел, которое ограничено сверху и не имеет ТВГ среди рациональных чисел.

Упражнения.

Задача 136. Доказать, что нет рационального числа, квадрат которого равен 5.

Задача 137. Всякое ограниченное снизу множество имеет ТНГ.

Задача 138. Пусть k натурально. Тогда если $\sqrt{k}$ есть рациональное число, то это число целое.

Листок 19. Следствия аксиомы полноты.

Задача 139. Аксиома Архимеда. Доказать, что для всякого действительного C найдётся натуральное N такое, что $N > C$.

Задача 140. Доказать, что для всякого положительного ε найдётся натуральное n такое, что $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Задача 141. Пусть $C > 1$. Доказать, что найдётся натуральное p такое, что $C^p > 1000$.

Задача 142. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся n такое, что для любого $k > n$

$$\frac{1000 \cdot 2^k}{k!} < \varepsilon.$$

Задача 143. Дано p, удовлетворяющее неравенству $0 < p < 1$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся n такое, что для любого $k > n$ $p^k < \varepsilon$.

Задача 144. Аксиома о вложенных отрезках.
Последовательность отрезков числовой прямой называется *вложенной*, если для всякого натурального k отрезок с номером $k + 1$ целиком принадлежит отрезку с номером k (в отрезок включаются его концы). Доказать, что для всякой вложенной последовательности отрезков найдётся точка, принадлежащая всем отрезкам.

Утверждения задач 139 и 144 названы в скобках аксиомами потому, что это название закрепилось на ними исторически. Это связано с тем, что во многих учебниках по анализу они включены в число аксиом (наряду с аксиомами 1–21 или им эквивалентными), а наша аксиома 22 в этих учебниках являестя теоремой.

Упражнения (дополнительные).

Задача 145. Доказать аксиому 22, используя аксиомы 1–21, аксиому Архимеда и аксиому о вложенных отрезках.

Задача 146. Построить на прямой систему попарно не пересекающихся отрезков единичной длины так, чтобы во всякой арифметической прогрессии нашёлся член, лежащий на одном из отрезков.

В последней задаче под «прямой» понимается арифметическая прямая, то есть просто множество всех действительных чисел. *Отрезком* $[a, b]$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$. *Длиной* непустого отрезка $[a, b]$ называется число $b - a$ (отрезок *непуст*, если $a \leqslant b$).

Часть 2. Построение действительных чисел.

Описание действительных чисел, данное в предыдущих листках, достаточно для построения анализа. Но это описание имеет некоторые недостатки. Прежде всего, ниоткуда не следует, что система действительных чисел, описываемая аксиомами 1–22, существует. Можно убедиться в её существовании, если эту систему построить. Но построить её можно, исходя из чего-то более простого. Обычно поступают так. Аксиоматически задают систему натуральных чисел. Затем строят из них целые числа, рациональные и, наконец, действительные. При этом убеждаются, что построенные числа удовлетворяют всем аксиомам 1–22. Тем самым существование действительных чисел основывается на существовании натуральных чисел, которое остаётся недоказанным. Так что таким способом доказывается не абсолютное существование действительных чисел, а так называемое относительное существование (существование в предположении, что существует другой объект). Но так как другого существования доказать нельзя, то и это считается достижением.

Вторым недостатком является сложность нашей системы аксиом, обилие аксиом и основных понятий, про которые в них говорится. Такое обилие в некоторых вопросах, связанных с обоснованием, неудобно. По этим причинам, мы в ближайших дополнительных листках кратко наметим путь построения действительных чисел, исходя из натуральных. Всем, кто не имеет специального интереса к этим вопросам, рекомендуется эти листки пропустить.

Но присутствие этих листков в этой книжке полезно и по той причине, что намеченный в них путь построения действительных чисел излагается во многих учебниках. Эти листки могут помочь тем ученикам, кто пользуется учебниками, уловить связи учебников с этой книжкой. Кроме того, увеличиваются возможности преподавателя, пользующегося книжкой, по-разному строить курс, выбирая соответствующий материал.

Листок 20д. Аксиомы Пеано.

Натуральный ряд есть множество, в котором выделен элемент «1» и определена операция «взятие непосредственно следующего», то есть для каждого натурального числа x определено одно определённое «непосредственно следующее за ним» число x', не равное x. При этом выполняются аксиомы:
1) Нет такого элемента x, что $x' = 1$.
2) Если $x' = y'$, то $x = y$.
3) Если 1 входит в множество M и для всякого x из того, что x входит в M, следует, что x' входит в M, то все натуральные числа входят в M.

Упражнение.

Задача 1. Докажите, что для каждого числа x, отличного от 1, существует непосредственно предшествующее число y (то есть такое, что $y' = x$).

Операция сложение для натуральных чисел определяется по индуктивному правилу (индукция по b): 1) $a+1 = a'$, 2) $a+b' = (a+b)'$ (сравните с индуктивным определением листка 9). Аналогично определяется умножение натуральных чисел.

Упражнения.

Задача 2. Доказать для натуральных a и b аксиомы 1) и 2) листка 1.

Задача 3. В каждом непустом подмножестве натурального ряда найдётся элемент, у которого нет непосредственно предшествующего в этом подмножестве.

Задача 4. Для любых неравных друг другу натуральных чисел x и y либо найдётся натуральное c такое, что $x = y + c$, либо найдётся натуральное c такое, что $y = x + c$.

На основе последней задачи в натуральном ряде вводится порядок.

Определение. $x < y$, если найдётся натуральное c такое, что $x + c = y$.

Упражнения.

Задачи 5, 6, 7, 8. Докажите, что это отношение «$<$» удовлетворяет аксиомам неравенств 18–21 (листок 6), причём мы сейчас считаем, что эти аксиомы сформулированы только для натуральных чисел, в связи с чем в аксиоме 21 не нужно требовать $c > 0$.

Листок 21д. Целые числа.

Теперь, беря за основу натуральный ряд, можно построить множество целых чисел. Для этого нужно, во-первых, расширить множество чисел, добавив к натуральным символ 0 и натуральные числа со знаком «$-$» (минус-натуральные). Затем нужно определить в построенном множестве операции сложение, вычитание и умножение так, чтобы получилось то, что нам надо. Эти определения операций не должны противоречить определениям сложения и умножения, уже введённым для натуральных чисел, и знак «$-$» перед натуральным числом должен обозначать противоположный элемент. Слова «что нам надо» уточняется тем, что мы формулируем систему аксиом, которым должна удовлетворять построенная система вещей. Эта система аксиом (будем называть её «аксиомы $\mathbb{Z}$») такова:

Аксиомы $\mathbb{Z}$.

В множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел выделены 2 различных элемента 0 и 1 и подмножество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, и определны операции сложение, вычитание и умножение так, что при этом выполняются аксиомы
1) – 8) листков 1 и 2,
10) – 13) листка 4 и
аксиома $\mathbb{Z}$): если x целое и $x \neq 0$, то x натурально или $-x$ натурально.

Упражнения.

Задача 9. Докажите, что аксиома 11 системы аксиом $\mathbb{Z}$ является следствием остальных аксиом $\mathbb{Z}$.

Задача 10. Определить сумму, разность и произведение в множестве целых чисел так, чтобы выполнялись аксиомы $\mathbb{Z}$ (при этом должен сохраниться смысл операций «$+$» и «$\cdot$», уже введённых для натуральных чисел, и $-k$, где k натурально, должно означать элемент, противоположный k).

Задача 11. Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Задача 12. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет не более одного решения (в области целых чисел).

Задача 13. Определите понятие «$<$» (меньше) в области целых чисел так, чтобы выполнялись аксиомы 18–21 для неравенств.

Задача 14. Докажите, что порядок, удовлетворяющий аксиомам 18–21, можно ввести только одним способом.

В дальнейшем, говоря о целых числах, мы будем иметь в виду систему вещей, для которых выполняются аксиомы $\mathbb{Z}$ (и их следствия, в частности можно считать, что введён порядок, удовлетворяющий аксиомам 18–21).

Листок 22д. Дроби.

Следующий шаг в расширении понятия числа – введение рациональных чисел. Мы должны добавить к целым числам новые объекты и определить в полученном множестве $\mathbb{Q}$ действия «$+$», «$-$», «$\cdot$», «:» так, чтобы смысл ранее введённых действий для целых чисел сохранился, и чтобы полученная система вещей (то есть множество и введённые в нём операции) удовлетворяла системе аксиом, описывающих рациональные числа (аксиомам $\mathbb{Q}$). Вот эти аксиомы:

Аксиомы $\mathbb{Q}$.

В множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел выделены два различных элемента 0 и 1, подмножество $\mathbb{Z}$, и в нём подмножество $\mathbb{N}$, так что при этом выполняются аксиомы
1) – 17) листков 1 – 5.

Для определения рациональных чисел сначала вводится понятие дроби.

Определение. *Дробью* называется упорядоченная пара целых чисел m, n $(n \neq 0)$ (упорядоченная – значит мы помним, какой элемент пары стоит на первом месте). Обозначение дроби – $\dfrac{m}{n}$.

Определение. Сумма и произведение дробей.
$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d} \overset{def}{=} \dfrac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$; $\quad \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d} \overset{def}{=} \dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$.
(операции «$+$» и «$\cdot$» для целых чисел известны)

Определение. Дроби $\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{p}{k}$ называются *эквивалентными*, если $m\cdot k = n\cdot p$ (обозначение: $\dfrac{m}{n}\sim\dfrac{p}{k}$).

Упражнения.

Задача 15. Соотношение $\sim$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам эквивалентности):
а) $x\sim x$, **б)** если $x\sim y$, то $y\sim x$, **в)** если $x\sim y$ и $y\sim c$, то $x\sim c$.

Задача 16. Теорема. Если в множестве M введено соотношение эквивалентности, то есть соотношение, удовлетворяющее аксиомам эквивалентности, то множество M разбивается на классы такие, что всякие два элемента, принадлежащие одному классу, эквивалентны, а всякие два элемента, принадлеащие разным классам, не эквивалентны (эти классы называются *классами эквивалентности*).

Листок 23д. Рациональные числа.

Соотношение эквивалентности, введённое в предыдущем листке, разбивает множество дробей на классы эквивалентности, по теореме предыдущего листка.

Определение. Эти классы эквивалентности называются *рациональными числами.*

Определение. Сумма рациональных чисел. Пусть x и y – рациональные числа. Выбираем дробь $\dfrac{a}{b}$ из класса x и дробь $\dfrac{c}{d}$ из класса y. Находим сумму этих дробей по определению предыдущего листка и объявляем *суммой* $x+y$ рациональное число (класс эквивалентности), в который входит полученная дробь.

Упражнения.

Задача 17. Определить аналогично произведение рациональных чисел.

Задача 18. Результаты сложения и умножения не зависят от того, какие представители классов эквивалентности выбраны.

Задача 19. Определите разность и частное рациональных чисел так, чтобы выполнялись аксиомы 4 и 9.

Сказанного недостаточно, чтобы считать рациональные числа более широким множеством, чем целые числа, потому что пока что это просто разные множества. Рассмотрим такие рациональные числа (классы эквивалентности), в которые входят дроби вида $\dfrac{p}{1}$. Каждому такому рациональному числу мы сопоставим целое число p. Теперь для операций над целыми числами появилось два определения: старое и новое, когда целое число p рассматривается как рациональное (класс эквивалентности), содержащее дробь $\dfrac{p}{1}$.

Задача 20. Докажите, что два определения операций для целых чисел приводят к соответствующим результатам.

Задача 21. Докажите, что аксиомы $\mathbb{Q}$ выполняются для построенного множества $\mathbb{Q}$.

Замечание. В дальнейшем рациональное число (класс эквивалентности), в которое входит дробь $\dfrac{p}{k}$, мы будем обозначать просто через $\dfrac{p}{k}$, а рациональное число, сопоставленное целому числу p, – просто через p. Это и есть обычная терминология, при которой не делаются различия между рациональным числом и представляющей его дробью и между рациональным числом с целым знаменателем и его числителем.

Листок 24д. Задачи о порядке для рациональных чисел.

Определение. Рациональное число x называется положительным, если одна из его записей $\frac{a}{b}$ обладает тем свойством, что a и b оба натуральны. Для рациональных чисел x и y мы говорим, что $x < y$, если $y - x$ положительно.

Задачи.

Задача 22. Доказать, что для рациональных чисел с таким порядком выполняются аксиомы 18–21 для неравенств.

Задача 23. Между двумя рациональными числами найдётся бесконечно много рациональных чисел.

Определение. Подобное соответствие. Взаимно-однозначное соответствие двух числовых множеств (определение взаимно-однозначного соответствия см. в листке 8) называется *подобным* соответствием, если оно сохраняет порядок, то есть из неравенства $x_1 < y_1$ следует неравенство $x_2 < y_2$ (x_2 и y_2 – элементы множества M_2, соответствующие элементам x_1 и y_1 множества M_1; M_1 и M_2 – два множества, подобное соответствие которых определяется).

Задача 24. Пусть M_1 – множество рациональных чисел, больших 0 и меньших 1. Можно ли установить подобное соответствие между множеством M_1 и множеством M_2 рациональных чисел, больших 0 и меньших 2?

Задача 25. Тот же вопрос, если M_2 есть множество рациональных положительных чисел.

Задача 26. Тонкий вопрос. Тот же вопрос, если M_2 есть объединение интервалов $0 < x < 1$ и $2 < x < 3$.

В качестве строительного материала для дальнейшего расширения системы чисел будут использованы «сечения», определение которых основано на упорядоченности рациональных чисел. Множество действительных чисел, которое будет построено, должно удовлетворять всем аксиомам действительных чисел 1–22.

Листок 25д. Сечения.

Определение. Если A и B – подмножества множества M, причём
1) каждый элемент множества M входит в одно и только одно из них,
2) в каждое из этих подмножеств входит хотя бы по одному элементу,
то говорят, что подмножества A и B образуют *разбиение* множества M.

Определение. Разбиение множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел (или любого множества, в котором есть порядок) на два подмножества A и B называется *сечением* множества $\mathbb{Q}$, если каждый элемент одного подмножества меньше каждого элемента другого подмножества. Подмножества, содержащее меньшие элементы, называется *нижним классом* сечения, другое подмножество – *верхним классом.*

Сечение обозначается так: $(X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$.
Для сечения имеются 4 логических возможности (4 типа):
1) в $X_{\text{Н}}$ есть наибольший элемент, в $X_{\text{В}}$ нет наименьшего;
2) в $X_{\text{Н}}$ нет наибольшего элемента, в $X_{\text{В}}$ есть наименьший;
3) в $X_{\text{Н}}$ нет наибольшего элемента, в $X_{\text{В}}$ нет наименьшего;
4) в $X_{\text{Н}}$ есть наибольший элемент, в $X_{\text{В}}$ есть наименьший.

Задачи.

Задача 27. Привести пример сечения 1-го типа, 2-го типа.

Задача 28. Доказать, что не существует сечений 4-го типа.

Задача 29. Доказать, что если существует подобное соответствие, которое требуется в задаче 26, то оно порождает сечение 3-го типа в множестве M_1.

Задача 30. Отнесём к классу $X_{\text{Н}}$ все отрицательные рациональные числа и все такие рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а к классу $X_{\text{В}}$ – все такие положительные рациональные числа, квадрат которых больше 2. Доказать, что это – сечение. Доказать, что оно 3-го типа.

Задача 31. Пусть $(X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$ – сечение. Тогда для любого положительного числа ε найдутся числа a из $X_{\text{Н}}$ и b из $X_{\text{В}}$ такие, что $|b-a|<\varepsilon$.

Листок 26д. Определение действительного числа как сечения.

Определение.
1. *Действительным числом* называется сечение множества рациональных чисел.
2. Действительные числа $x = (X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$ и $y = (Y_{\text{Н}}/Y_{\text{В}})$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда
а) либо $X_{\text{Н}} = Y_{\text{Н}}$, $X_{\text{В}} = Y_{\text{В}}$ (то есть когда они совпадают),
б) либо в $X_{\text{Н}}$ есть наибольший элемент a, в $Y_{\text{В}}$ есть наименьший элемент b и $a = b$,
в) либо в $Y_{\text{Н}}$ есть наибольший элемент a, в $X_{\text{В}}$ есть наименьший элемент b и $a = b$.

Определение. Сечение 3-го типа называется *иррациональным* числом; сечения 1-го и 2-го типов называются *рациональными действительными* числами (наибольший элемент $X_{\text{Н}}$ в случае б) и наименьший элемент $X_{\text{В}}$ в случае в) называются *рациональными* числами, соответствующими данному рациональному действительному числу).

Замечание. До задачи 43 включительно мы делаем различие между рациональными числами и рациональными действительными числами.

Определение. Пусть $x = (X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$ и $y = (Y_{\text{Н}}/Y_{\text{В}})$ – действительные числа. Говорят, что *x меньше y*, если найдётся два рациональных числа $p_1 \neq p_2$, принадлежащих одновременно $X_{\text{В}}$ и $Y_{\text{Н}}$.

Упражнения.

Задача 32. Пусть $x_1 = x_2$ и $x_1 < y$. Доказать, что $x_2 < y$. Почему для определения неравенства в области действительных чисел нужно это утверждение?

Задача 33. Доказать, что среди действительных чисел выполняется первая аксиома неравенств.

Задача 34. Доказать, что выполняется вторая аксиома (транзитивность).

Задача 35. Доказать, что между любыми двумя действительными числами найдётся бесконечно много рациональных чисел.

Замечание. В этом и следующем листках точнее была бы следующая терминология: сечения называются *эквивалентными* в случаях а), б) и в) определения **2.** настоящего листка. Это соотношение эквивалентности разбивает множество сечений на классы эквивалентности (каждый класс состоит из одного или двух сечений). Эти классы называются *действительными* числами. Поупражняйтесь в переводе других определений и задач на эту терминологию.

Листок 27д. Операции над действительными числами.

Определение. Пусть $x = (X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$ и $y = (Y_{\text{Н}}/Y_{\text{В}})$ – действительные числа. Определим сечение $c = (C_{\text{Н}}/C_{\text{В}})$ следующим образом: к классу $C_{\text{Н}}$ отнесём всякое такое рациональное число p, что найдётся a из $X_{\text{Н}}$ и b из $Y_{\text{Н}}$ такое, что $p < a + b$, а к классу $C_{\text{В}}$ – все остальные рациональные числа. (Докажите, что это сечение). Сечение c называется *суммой* x и y и обозначается через $x+y$ (если есть другое действительное число, равное c, то оно тоже называется *суммой* x и y).

Определение. Пусть $x = (X_{\text{Н}}/X_{\text{В}})$ и $y = (Y_{\text{Н}}/Y_{\text{В}})$. Если $X_{\text{Н}}$ состоит из элементов $Y_{\text{В}}$, взятых со знаком «$-$», то говорят, что число y *противоположно* числу x и пишут $y = -x$.

Упражнения.

Задача 36. Доказать, что $x + (-x) = 0$.

Задача 37. Рассмотрим сумму двух действительных чисел. Доказать, что если заменить слагаемые на равные им числа, то сумма не изменится (с точностью до равенства).

Задача 38. Определить произведение действительных чисел.

Задача 39. Доказать, что квадрат числа, определённого в задаче 30, есть сечение производимое двойкой.

Задача 40. Определить разность и частное действительных чисел.

Задача 41. Пусть x и y – рациональные числа, x_1 и y_1 – соответствующие им рациональные действительные числа. Тогда, если $x < y$, то $x_1 < y_1$.

Задача 42. Доказать, что сложение рациональных чисел и соответствующих им рациональных действительных чисел приводит к соответствующим результатам.

Задача 43. То же для умножения, разности и частного.

Замечание. Теперь мы не будем делать различия между рациональными числами и соответствующими им рациональными действительными числами.

Задача 44. Доказать, что в области действительных чисел верна аксиома 20 для неравенств («к обеим частям неравенства можно прибавить равные числа»).

Задача 45. Доказать, что верна аксиома 21 (об умножении неравенства на положительное число).

Задача 46. Доказать, что для действительных чисел верны аксиомы 1–9.

Задача 47. До сих пор рассматривались сечения в области рациональных чисел. Рассмотрим теперь сечения в области действительных чисел. Доказать, что они не бывают третьего типа.

Задача 48. Доказать для действительных чисел аксиому 22 о точной верхней грани.

Листок 28. Десятичная запись рационального числа.

Бесконечной десятичной дробью (бдд) называется запись вида $\pm A, a_1a_2\ldots$, где A – десятичная запись натурального числа или ноль, а $a_1a_2\ldots$ – бесконечная строчка (последовательность) цифр (цифры – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Если в этой строчке, начиная с некоторого места, все нули, то бдд называется *конечной десятичной дробью* (кдд); нули разрешается не писать. (А вы взялись бы написать все цифры какой-нибудь бдд? Разумеется, на практике заменяют написание бесконечной строчки каким-либо её конечным описанием. В теоретических вопросах отделываются загадочным предположением, что дробь вся написана). К A разрешается приписывать конечное число нулей слева, знак «+» перед бдд разрешается опускать.

Конечной десятичной дроби придаётся следующий арифметический смысл: $\pm A, a_1a_2\ldots a_k = \pm(A + \dfrac{a_1a_2\ldots a_k}{10^k})$.

Задача 49. Пусть $\frac{a}{b}$ – обыкновенная дробь (несократимая). Для того, чтобы её можно было представить как конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы в разложении b на простые множители были только двойки и пятёрки.
Указание: воспользоваться задачей 64 листка 9.

Из младших классов вы знакомы с правилом деления целых чисел уголком. Но там не доказывалось, что в результате деления получается частное.

Задача 50. Доказать, что если в результате деления a на b по правилам деления уголком получилась конечная десятичная дробь c, то $b \cdot c = a$.

Задача 51. Доказать, что если при делении уголком получилась бесконечная десятичная дробь, то она периодическая.

Определение. Пусть p – бдд. Если все десятичные знаки p, начиная с $(k+1)$-го, заменить нулями, то полученную дробь называем *десятичным приближением p по недостатку* с точностью до k-го знака и обозначают через $p(k)$. Если p – число положительное, то *десятичное приближение по избытку* с точностью до k-го знака получается прибавлением к $p(k)$ единицы на k-том месте после запятой: $p(k+) = p(k) + \frac{1}{10^k}$. Если p – отрицательное число, то $p(k+)$ получается из $p(k)$ вычитанием единицы в том же разряде.

Задача 52. Пусть a и b – положительные целые числа, и p – бдд, получающаяся при делении уголком a на b. Тогда всякое приближение по недостатку дроби $p \leqslant$ частного $\frac{a}{b}$, а всякое приближение по избытку больше этого частного.

Задача 53. Если a и b – положительные целые числа, то $\frac{a}{b}$ есть ТВГ множества чисел $p(k)$ при всевозможных k и в то же время ТНГ множества всех $p(k+)$ при всевозможных k. Если a и b разных знаков, то результат аналогичный, то ТВГ и ТНГ меняются местами.

Листок 29. Десятичная запись действительного числа.

Бесконечной десятичной дроби придаётся следующий арифметический смысл. Пусть $p > 0$ – бдд. Она считается равной ТВГ множества чисел $p(k)$ при всевозможных k. Если $p < 0$ (то есть перед ней стоит знак «$-$»), то она считается равной ТНГ чисел $p(k)$ при всевозможных k.

Задачи.

Задача 54. Доказать, что ТВГ и ТНГ, о которых идёт речь в определении, всегда существуют. В случае положительного p доказать, что ТВГ множества $p(k)$ равна ТНГ множества $p(k+)$, а в случае отрицательного p – аналогичный результат с заменой ТВГ на ТНГ и наоборот.

Задача 55. Если дроби a и b до некоторого места совпадают, а начиная с этого места в a идут цифры $l+1$ и дальше нули, а в b – цифры l и дальше девятки (такие дроби называются *близнецами*), то дроби a и b имеют одинаковый арифметический смысл.

Опишем правило, как по действительному числу p найди бдд. Для определённости рассмотрим случай $p > 0$. Найдём целое n такое, что $p - 1 < n \leqslant p$ и напишем: $n, \ldots$. Найдём цифру a_1 такую, что $p - 0,1 < n, a_1 \leqslant p$, и напишем: $n, a_1 \ldots$. Затем, действуя аналогично, припишем второй знак, и т.д. Формулировка индуктивного правила: если

$$p - \frac{1}{10^k} < n, a_1 a_2 \ldots a_k \leqslant p,$$

то a_k – k-тый знак нашей дроби.

Задача 56. Докажите, что n, о котором идёт речь в предыдущей формулировке, всегда существует и $\geqslant 0$, если $p > 0$.

Задача 57. Доказать, что если $p > 0$, то хотя бы один знак дроби, которая получается по предыдущей формулировке, $\neq 0$.

Задача 58. Доказать, что построенная бдд равна p.

Задача 59. Пусть x и y – две бдд, не близнецы. Если перед x стоит знак «$+$», а перед y – знак «$-$», то $x > y$. Если обе дроби начинаются с «$+$», то та из них больше, у которой первый различающийся знак больше, если же обе дроби начинаются с «$-$», то та дробь больше, у которой первый различающийся знак меньше.

Задача 60. Пусть $a > b > 0$ – две бдд. Тогда существует рациональное положительное число d и натуральное k такие, что при любом натуральном $p > k$ $a(p) - b(p) > d$.

Задача 61. Если $p > 0$ и $t > 0$ – две бдд, то ТВГ сумм $p(k) + t(k) =$ ТНГ сумм $p(k+) + t(k+)$. Если $p > 0$, $t < 0$, то ТВГ сумм $p(k) + t(k+) =$ ТНГ сумм $p(k+) + t(k)$.

Задача 62. Привести пример непериодической дроби.

Теорема о том, что всякая периодическая дроби есть изображение рационального числа, рассматривается в листке 70, задаче 82.

Листок 30д. Определение действительного числа через бдд.

В этом листке считается известным множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, то есть система вещей, удовлетворяющая аксиомам 1–21 (аксиомам $\mathbb{Q}$). Исходя из $\mathbb{Q}$, можно построить множество действительных чисел $\mathbb{R}$, используя в качестве строительного материала бесконечные десятичные дроби (а не сечения, как это делалось в листках 25-27).

Сохраняется определение бдд из листка 28. Сохраняется определение дробей-близнецов, данное в задаче 55.

Определение. Считаем дроби *эквивалентными*, если они близнецы. Кроме того, эквивалентны дроби $+0,000\ldots$ и $-0,000\ldots$. Классы эквивалентности называются *действительными числами*. Иными словами, если дробь не имеет близнеца, то она есть действительное число, если же у неё есть близнец, то каждое из двух близнецов является изображением одного действительного числа.

Мы знаем из листка 28, как изображать в виде бдд рациональные, в частности целые числа. Это делает возможным считать множество действительных чисел более широким множеством, чем множество рациональных чисел.

Определяем в множестве действительных чисел порядок по правилу, описываемому в задаче 59. Теперь имеет смысл говорить о точной верхней грани множества, так как в определении ТВГ используется только порядок.

Задача 63. Основная теорема. Доказать, что всякое ограниченное сверху множество M действительных чисел имеет ТВГ (в частности доказать, что ТВГ не зависит от того, какие из близнецов, представляющие числа из M, выбраны).

Теперь определим правила, как производить арифметические операции над бесконечными десятичными дробями.

Определение. Пусть p и t – какие-нибудь бдд. Если они обе со знаком «+», то $x+y$ есть ТВГ сумм $p(k)+t(k)$ при всевозможных k. Если p и t обе с «$-$», то $x+y$ есть ТНГ всевозможных сумм $p(k)+t(k)$. Если p с «+», t с «$-$», то $x+y =$ ТВГ сумм $p(k)+t(k+)$. Если p и t обе с «+» или обе с «$-$», то $x \cdot y =$ ТВГ произведений $p(k)\cdot t(k)$. Если же p и t имеют разные знаки, то $x\cdot y =$ ТНГ всевозможных произведений $p(k)\cdot t(k)$.

Задачи.

Задача 64. Доказать, что все ТВГ и ТНГ, используемые в этом определении, существуют и не зависят от выбора бдд p и t, представляющих числа x и y.

Задача 65. Определите сами вычитание и деление (трудная задача).

Задача 66. Убедитесь, что построенные действительные числа удовлетворяют всем аксиомам 1–22.

Часть 3. Начала теории множеств.

Понятия теории множеств используются уже в первых листках настоящего сборника для формулирования определений и задач. Но там это лишь речевые обороты, и их использование, я надеюсь, не вызвало трудностей.

В листке 8 сформулировано понятие взаимно-однозначного соответствия. Там через него определяется, что означает, что в двух множествах одинаковое количество элементов, причём к этому моменту мы ещё не умеем считать. Пока это понятие применятеся к конечным множествам, мы не получаем ничего интересного, кроме возможности точно высказаться о некоторых старых вещах. Но понятие взаимно-однозначного соответствия можно применять к бесконечным множествам.

Определение. Два множества A и B называются *количественно эквивалентными* или *равномощными*, если существует взаимно-однозначное соответствие между ними.

Для двух конечных множеств A и B можно установить их количественную эквивалентность, пересчитав их с помощью натуральных чисел. Для двух бесконечных множеств этот способ не годится, и мы будем пользоваться сформулированным определением.

Равномощность для бесконечных множеств обладает рядом непривычных свойств, например, всякое бесконечное множество равномощно некоторой своей части, и т.п.

Во всех дальнейших разделах этого сборника теоретико-множественные понятия используются на каждом шагу. На них всё основано в той же мере, как и на логике.

Сведения о множествах собраны главным образом в настоящей, 3-ей части. Но практически этот материал стоит разбросать между другими разделами. Первые задачи можно решать в районе 8-10 листков, а последние рекомендуется запомнить на конец курса, если они не получаются сейчас.

Подобные перестановки полезны и в других разделах.

Листок 31. Счётность.

Определение. Множество называется *счётным*, если можно установить взаимно-однозначное соответствие этого множества с множеством всех натуральных чисел.

Упражнения.

Задача 1. Множество всех целых чисел (положительных и отрицательных) счётно.

Задача 2. Множество всех положительных нечётных чисел счётно.

Задача 3. Множество всех простых чисел счётно.

Задача 4. Множество всех рациональных чисел счётно.

Задача 5. Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел счётно (упорядоченные пары (x, y) и (y, x) различны при $x \neq y$).

Задача 6. Множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц счётно.

Задача 7. Множество всевозможных конечных русских слов счётно («*русским словом*» в этой задаче называется произвольная последовательность букв русского алфавита).

Задача 8. Множество всевозможных конечных последовательностей рациональных чисел счётно.

Дополнительные.

Задача 9. *Восьмёркой* называется множество всех точек, принадлежащим двум касающимся и несовпадающим окружностям. На плоскости нарисовано некоторое множество восьмёрок, попарно не имеющих общих точек. Доказать, что множество этих восьмёрок конечно или счётно.

Задача 10. Если на плоскости нарисовано некоторое множество попарно не имеющих общих точек букв «Т», то это множество конечно или счётно.

Рассказы о множествах

Рассказ 1. Однажды ко мне пришло счётное множество гостей. Входя, каждый снял галоши и оставил их в прихожей. Когда гости разошлись, то каждый взял какую-нибудь пару галош, надел их и ушёл. А у меня в прихожей осталось ещё бесконечно много галош. Как я организовал уход гостей?
А в другой раз после того, как часть гостей ушла, галош в прихожей не осталось, и остальным пришлось уйти без галош. Но был и такой случай, когда после ухода гостей осталась ровно одна пара.

Рассказ 2. Даны три ящика A, B и C. В ящике A бесконечно много орехов, а ящики B и C пустые. Коля берёт из ящика A 10 орехов и перекладывает их в ящик B, после этого Петя берёт один орех из ящика B и перекладывает его в ящик C. Затем эти операции повторяются бесконечное число раз. Что будет в ящиках в результате бесконечного числа таких операций?
Прежде всего, вопрос поставлен нечестно. Нужно уточнить некоторые детали. Пусть в ящике A орехов счётное множество. Пусть операции занумерованы: $1, 2, \ldots$ (в том порядке, как они производятся). Можно сказать, что «орех x находится в ящике C в результате бесконечного числа операций», если найдётся такое натуральное число n, что на n-ном шагу Петя переложил орех x в ящик C. Теперь сами уточните, что означает, что в результате бесконечного числа операций орех находится в ящике B и в ящике A. А теперь подумайте над вопросом задачи.

Рассказ 3. Приходилось ли Вам разбирать какую-нибудь сложную вещь? Если приходилось, то Вы, вероятно, заметили странное явление: после того, как вещь починена, почему-то часть деталей остаётся неиспользованной, хотя всё собиралось правильно. Не думаете ли Вы, что в этом есть что-то общее с историей про галоши? И не говорит ли это о том, что если деталей много, то это «много» начинает приобретать некоторые свойства бесконечности?
Эти явления могут найти и практическое использование. Например, когда в магазине весь товар распродан, может оказаться, что всё-таки часть осталась. А бывает и так, что товара не хватило. Не означает ли это, что товара «много»?

Вы, конечно, можете считать, что всё, что здесь сказано, необычайно глупо. Не стану спорить. Но если у Вас «много» друзей, Вы можете жить за их счёт следующим образом: 1. Берёте у товарища рубль взаймы и тратите его как хотите. 2. Берёте у двух других товарищей по рублю, один рубль возвращаете первому товарищу, другой тратите как хотите. И так далее. В результате Вы непрерывно тратите чужие деньги, но никто не может пожаловаться, что Вы не возвращаете долги. Так что «глупо» – это ещё не значит «плохо». Правда, Вы можете возразить, что число друзей всё же конечно. Но ведь и жизнь Ваша конечна. Впрочем, последнее зависит от точки зрения.

Листок 32. Алгебра множеств.

Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

В частности, всё множество B является подмножеством самого себя. Люди придумали так называемое «пустое множество» - множество, не содержащее ни одного элемнта. Пустое множество тоже является подмножеством множества B (проверьте).

Определение. Множество C называется *объединением* множеств A и B (обозначается $A+B$), если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A или x входит в B» («или» не исключает того, что x входит одновременно в A и в B).

Определение. Множество C называется *пересечением* множеств A и B, если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A и x входит в B». Обозначение: $A \cdot B$.

Определение. Множество C называется *разностью* множеств A и B (обозначаение: $A-B$), если C состоит из тех и только тех элементов x, которые обладают следующим свойством: «x входит в A и не входит в B».

Определение. Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Упражнения (дополнительные).

Задача 11. Если $A-B=B-A$, то $A=B$.

Задача 12. $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Задача 13. $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$ (первый закон дистрибутивности).

Задача 14. $(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$ (второй закон дистрибутивности).

Пусть P – множество, A, B, … – его подмножества. Множество $P-A$, ,будем называть *дополнением* множества A (до P) и обозначать через $\overline{A}$.
Задача 15. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

Операции с бесконечным числом множеств.

Определение. Пусть M – множество, состоящее из множеств A. *Объединением* множества M множеств A (обозначение: $\bigcup A$) называется множество C такое, которое состоит из тех и только тех x, которые входят хотя бы в одно множество A.

Задача 16. Определите сами пересечение бесконечного числа множеств $\bigcap A$.

Задача 17. $(\bigcup A)\cdot C=\bigcup(A\cdot C)$; $(\bigcap A)+C=\bigcap(A+C)$

Задача 18. $\overline{\bigcup A}=\bigcap\overline{A}$; $\overline{\bigcap A}=\bigcup\overline{A}$

Задача 19. Сумма счётного множества счётных множеств есть счётное множество.

Листок 33. Мощность континуума.

Множество называется *несчётным*, если оно бесконечно и не счётно.

Задача 20. Теорема. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно.
Доказательство. Допустим противное. Тогда каждая последовательность получает свой номер. Строим теперь последовательность A по следующему правилу: на i-тое место в A ставим 0, если на i-том месте i-той последовательности стоит 1, и 1 – если там стоит 0. A не может совпадать ни с одной из последовательностей, участвующих в нумерации. Противоречие.

Задача 21. Вся числовая прямая равномощна интервалу $0 < x < 1$ (и, конечно, всякому другому интервалу).

Задача 22. Отрезок и интервал равномощны.

Задача 23. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству действительных чисел отрезка $[0, 1]$.

Задача 24. Множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.

Задача 25. Множество точек отрезка $[0, 1]$ равномощно множеству точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

Вспомогательные задачи.

Задача 26. Из всякого бесконечного множества можно выделить счётное подмножество.

Задача 27. Если A несчётно, а B счётно, то $A - B$ равномощно A.

Определение. Говорят, что множество A *более мощно*, чем множество B, если существует подмножество множества A, равномощное всему множеству B, и при этом не существует взаимно-однозначного соответствия множеств A и B.

Из приведённых утверждений видно, что множество точек отрезка более мощно, чем множество натуральных чисел. Про всякое множество, равномощное отрезку, говорят, что оно имеет мощность *континуума*.

Замечание. Слова «множества A и B равномощны», «A более мощно, чем B» и т.п. могут навести на преждевременное убеждение, что мощность множества – это что-то вроде числа, которое характеризует его «размеры», и что про любые два множества можно утверждать, что они либо равномощны, либо одно из них более мощно, чем другое. В действительности, теория таких «чисел» (так называемых «кардинальных чисел») существует, и в ней доказывается приведённое отверждение о сравнимости по мощности любых двух множеств. Но на первых порах занятия теорией множеств приходится обходиться без этого утверждения, и для нас пока принципиально возможно существование двух множеств, не сравнимых по мощности.

Листок 34д. Задачи о мощностях.

Задача 28. Теорема Кантора-Бернштейна (*трудная*)**.** Если множество A равномощно части множества B, а множество B равномощно части множества A, то A и B равномощны.

Если эта задача не получается, примите утверждение на веру и используйте его в дальнейших задах. Попробуте также применить эту теорему для решения тех задач предыдущего листка, которые не получились без неё.

Задача 29. Множество бесконечных последовательностей целых чисел имеет мощность континуума.

Задача 30. (*Трудная*). Множество бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

Задача 31. (*Трудная*). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

Задача 32. (*Трудная*). Если объединение счётного множества M множеств A имеет мощность континуума, то хотя бы одно из множеств A имеет мощность континуума.

Задача 33. (*Трудная*). Множество всех подмножеств данного множества более мощно, чем само множество.

Определение. Канторовское множество. Рассмотрим последовательность множеств. R_1 – это множество точек отрезка $[0,1]$. Разделим R_1 на три равные части, и среднюю треть без концов обозначим через I_1 (то есть I_1 есть интервал $1/3 < x < 2/3$). R_2 есть разность $R_1 - I_1$. I_2 есть объединение двух интервалов, которые являются средними третями двух отрезков, из которых составлено R_2. $R_3 = R_2 - I_2$. И т.д. R_k есть объединение 2^{k-1} отрезков, I_k есть объединение интервалов, являющихся средними третями этих отрезков, $R_{k+1} = R_k - I_k$. *Канторовским множеством* называется множество $K = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \ldots$ (пересечение множеств R_k при всевозможных натуральных k).

Задача 34. Доказать, что Канторовское множество имеет мощность континуума.

Решение задачи 31.
Пусть множество $M = A + B$ имеет мощность континуума. Установим взаимнооднозначное соответствие M и множества точек квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Для всякого x отрезка $[0,1]$ рассмотрим прямую, параллельную оси y и проходящую через эту точку x. Если для каждого x на такой прямой найдётся точка из A, то множество A имеет мощность континуума. Если же на некоторой прямой точек A не найдётся, то пересечение этой прямой с квадратом состоит только из точек множества B, и множество B имеет мощность континуума.

Листок 35д. Открытые и замкнутые множества.

В этом листке рассматриваются множества, являющиеся подмножествами некоторого основного множества – прямой или отрезка. Если множества рассматриваются на прямой, то *обобщённым интервалом* называется любой интервал, то есть множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ (a и b – произвольные действительные числа), либо полупрямая $x < a$, либо полупрямая $x > a$, либо вся прямая. Если множества рассматриваются на отрезке, то *обобщённым интервалом* называется любой интервал, целиком принадлежащий этому отрезку, либо полуинтервал, примыкающий к концам этого отрезка (то есть множества вида $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, где a и b – концы отрезка, c – любое число на этом отрезке), либо весь отрезок.
Пусть точка x принадлежит основному множеству. *Окрестностью* точки x (в этом основном множестве) называется любой обобщённый интервал, содержащий эту точку.

Определение. Точка x называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность точки x, целиком принадлежащая M.

Определение. Множество M называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Упражнения.

Задача 35. Пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.

Задача 36. Объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество.

Задача 37. Всякое открытое множество есть объединение конечного или счётного числа попарно непересекающихся обобщённых интервалов.

Определение. Точка x называется *предельной* для множества M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x.

Определение. Точка x называется *предельной* для множества M, если любая окрестность точки x содержит бесконечно много точек из M.

Задача 38. Докажите эквивалентность двух предыдущих определений.

Определение. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 39. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Задача 40. Пересечение любого множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Задача 41. Дополнение к открытому множеству есть замкнутое множество, дополнение к замкнутому множеству есть открытое множество.

Листок 36д. Ещё об открытых и замкнутых множествах.

Задача 42. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.

Задача 43. Если M_k – последовательность замкнутых множеств отрезка такая, что для любого n M_{n+1} содержится в M_n (такая последовательность называется *вложенной*), то найдётся такая точка, общая для всех множеств M_n.

Определение. Пусть M – подмножество прямой или отрезка. Точка x множества M называется *изолированной* точкой M, если существует окрестность точки x, в которой нет точек M, кроме x.

Задача 44. Доказать, что множество изолированных точек любого множества M конечно или счётно.

Определение. Замкнутое множество, не имеющее изолированных точек и не пустое, называется *совершенным.*

Задача 45. Всякое совершенное множество имеет мощность континуума.

Задача 46. Если совершенное множество не имеет внутренних точек и ограничено, то можно установить подобное соответствие между ним и Канторовским множеством (*подобное соответствие* – взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок).

Задача 47. Доказать, что для всякого положительного $a < 1$ найдётся пара точек x и y Канторовского множества такая, что $y - x = a$.

Задача 48. Будет ли верно это утверждение, если при построении Канторовского множества выбрасывать на каждом шагу из отрезков не треть, а какую-нибудь другую часть, например четверть или половину?

Определение. Множество M называется *нигде не плотным*, если для каждого интервала I числовой оси найдётся принадлежащий ему интервал D такой, что D не содержит точек M.

Задача 49. Замкнутое множество является нигде не плотным тогда и только тогда, когда оно не содержит отрезка.

Задача 50. Отрезок нельзя представить как объединение счётного множества нигде не плотных множеств.

Задача 51. Доказать, что множество рациональных чисел нельзя представить как пересечение счётного множества открытых множеств.

Задача 52. Множество различных замкнутых множеств отрезка имеет мощность континуума.

Задача 53. (*Трудная*). Отрезок нельзя представить как объединение счётного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.

Парадоксы.

Пример 1. Множество M называется *хорошим*, если среди его элементов нет множества M, то есть его самого. Очевидно, всякое множество должно быть либо хорошим, либо не хорошим. Рассмотрим множество X хороших множеств. Допустим, что X хорошее. Тогда, в качестве такового, X входит в число хороших множеств, то есть входит в X в качестве элемента, а это по определению означает, что X не хорошее. Если же X не хорошее, то в число хороших множеств оно не входит, то есть не входит в X, а это признак хорошего множества. Итак, если X хорошее множество, то оно не хорошее, а если X не хорошее множество, то оно хорошее. Противоречие.

Пример 2. Чтобы задать натуральное число, нужно истратить сколько-то типографских знаков. При этом разрешается употреблять математические знаки и словесные правила. Несомненно, существует число, которое нельзя задать, истратив меньше, чем 100 знаков. Среди таких чисел есть наименьшее. Фраза «наименьшее натуральное число, которое нельзя задать, истратив меньше, чем сто типографских знаков» определяет такое число, но содержит меньше, чем сто типографских знаков.

Попробуйте понять, где заключена двусмысленность в этом рассуждении.

Пример 3. Действительное число отрезка $[0, 1]$ называется *вычислимым*, если существует конечное правило (заданное в математических знаках или словесное), которое позволяет для каждого натурального N определить N-ный знак этого числа в десятичном разложении. Множество конечных русских фраз счётно, а потому и множество вычислимых чисел счётно. Занумеруем их. Затем выпишем их десятичные записи. По диагональному методу, как в решении задачи 20, строим дробь, не входящую в список. Мы эту дробь задали конечным словесным правилом, и в то же время её нельзя задать конечным словесным правилом. Противоречие.

На основании противоречий, полученных на предыдущей странице, можно доказать такую общую теорему:

Теорема. Верна любая теорема.

Доказательство.

Пусть теорема A относится к некоторой теории T. Допустим, что теорема A не верна. По правилам доказательств от противного, строим отрицание теоремы A и присоединяем его к исходным положениям (аксиомам) теории T. Теперь, исходя из этих предпосылок и пользуясь законными логическими рассуждениями, нужно получить противоречие. Для получения противоречия достаточно взять рассуждение пункта 1 предыдущей страницы. Мы получили противоречие, пользуясь только тем, что разрешается. Тот факт, что получилось противоречие, согласно правилам доказательства от противного, считается доказательством теоремы A.

В этом доказательстве есть одна странная деталь. Для получения противоречия нам не пригодилось предположение, что A не верно. Наше противоречие не имеет отношения к A. Но в правилах доказательства от противного не требуется, чтобы такая связь существовала. Даже если бы мы захотели ограничить область применимости доказательств от противного случаями, когда такая связь имеется, мы не смогли бы этого сделать, так как не имеем формального критерия, который позволяет эту связь обнаружить.

Эти примеры показывают, что в рассуждениях, которые мы считаем законными, что-то не так. Строго говоря, на имеющейся логической базе больше делать нечего, так как мы уже доказали все теоремы. Но такая математика не представляет никакой ценности, так как не позволяет отличать верные утверждения от неверных. Видимо, выход в том, чтобы заняться уточнением правил рассуждений, но это увело бы нас в сторону от курса анализа. Мы будем продолжать. При этом, как это принято во всех классических курсах анализа, будем уповать на то, что найденные противоречия лежат где-то в стороне, и теоремы, которые мы будем доказывать, следуют не из противоречий, заложенных в основах рассуждений, а из аксиом арифметики. К «основам рассуждений» я причисляю логику и теорию множеств.

Часть 4. Элементарные функции.

Пусть даны множество M и множество G (произвольной природы). Говорят, что на множестве M задана *функция* f со значениями в G, если дано правило, сопоставляющее каждому x из M ровно один y из G. Это записывается так: $y = f(x)$ (хотя в этой записи не фигурируют символы множества M и G, всегда подразумевается, что заданы). То же самое обозначает фраза: задано отображение $y = f(x)$ множества M в множество G. x называют *аргументом* функции.

Мы будем иметь дело, в основом, со случаем, когда M, так же как и G, – вся числовая ось или какая-то её часть, например, полупрямая, отрезок, интервал и т.п.

Пусть на множестве M задана функция f со значениями в G. Рассмотрим множество упорядоченных пар (x, y), где x принадлежит множеству M, y – множеству G (это множество называется *теоретико-множественным произведением* множеств M и G и обозначается через $M \times G$). В этом множестве рассмотрим подмножество пар вида $(x, f(x))$. Это подмножество называется *графиком* функции $y = f(x)$.
Если M и G – множества чисел, график можно изобразить на координатной плоскости x, y. *График* – это множество, принадлежащее координатной плоскости и обладающее следующим свойством: каждая прямая, параллельная оси y и проходящая через точку x, принадлежащую множеству M, пересекает график ровно в одной точке. Если наоборот на координатной плоскости дано множество, обладающее сформулированным свойством, то можно определить функцию, графиком которой является это множество.

Мы уже рассматривали последовательности (чисел и множеств), то есть объекты, занумерованные натуральными числами. Последовательность – это тоже частный случай функции, именно тот случай, когда M – множество натуральных чисел. Для этого случая применяют специальные обозначения: знак аргумента пишут не в скобках после знака функции, а внизу индекс: a_k вместо $a(k)$.

Мы будем рассматривать также функции двух и большего числа переменных: $c = f(x, y)$ и т.п. Для функции двух переменных должно быть задано два множества: M, которому принадлежит x, и N, которому принадлежит y; число c определяется для каждой упорядоченной пары (x, y). У такой функции два аргумента. Но можно считать, что у неё один аргумент: упорядоченная пара (x, y), и что эта функция определа на множестве $M \times N$.

Значение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ записывают так: $f(x_0)$. $f(x_0)$ – это число, поставленное в соответствие числу x_0 функцией $f(x)$.

Листок 37. Извлечение корня.

Основные факты:

Задача 1. Существует такое действительное число $x > 0$, что $x^2 = 2$. Такое число только одно (оно обозначается через $\sqrt{2}$).

Задача 2. Для каждого $y > 0$ существует и притом единственное число $x > 0$ такое, что $x^2 = y$ (x обозначается через $\sqrt{y}$).

Задача 3. Для каждого натурального p и действительного $y > 0$ существует и притом единственное число $x > 0$ такое, что $x^p = y$. Для каждого нечётного натурального p и любого действительного y существует и притом единственное число x такое, что $x^p = y$. Это x обозначается через $\sqrt[p]{y}$.

Докажите эти теоремы.
При этом Вам могут помочь следующие вспомогательные задачи:

Задача 4. Доказать, что найдётся квадрат целого числа, заключённый между числами $1999\ldots9000\ldots0$ (девяток 99, нулей 100) и $2000\ldots0$ (нулей 199).

Задача 5. Доказать, что найдётся квадрат целого числа, заключённый между числами $111\ldots1$ (1972 единицы) и $999\ldots9$ (1971 девятка).

Задача 6. Пусть дано число $a > 0$, и пусть оно увеличилось на $d > 0$ так, что получилось число $a + d$. Равенство $(a + d)^2 - a^2 = 2ad + d^2$ показывает, как меняется квадрат числа, если известно, как меняется само число. Но этим равенством неудобно пользоваться, так как в правой части стоит d не в первой степени. Это дело можно отчасти исправить. Найдите такое b и такое $c > 0$, чтобы при всех d, удовлетворяющих неравенству $0 < d < c$, выполнялось неравенство $(a + d)^2 - a^2 < d \cdot b$.

Задача 7. Рассмотрим арифметическую прогрессию a, $a + d$, $a + 2d$, … и последовательность квадратов этих чисел a^2, $(a+d)^2$, … Доказать, что разности между соседними членами этой последовательности образуют арифметическую прогрессию.

Задача 8. Даны числа $a > 0$ и $E > a^2$. В последовательности квадратов, построенной в предыдущей задаче, найдутся два соседних члена M и N такие, что $M \leqslant E$, $N > E$. Доказать, что если d маленькое, то и $N - M$ маленькое. Точнее: для всякого $p > 0$ найдётся d такое: что $N - M < p$.

Задача 9. Пусть $O < a < b$. Найдётся p такое, что $a < p^2 < b$.

Задача 10. Рассмотри множество M чисел x таких, что $x^2 < 2$. Доказать, что квадрат ТВГ этого множества **1)** не может быть < 2, **2)** не может быть > 2.

Задачи 11, 12. Задачи, аналогичные 9 и 10, но для корня произвольной натуральной степени из произвольного $y > 0$.

Листок 38. Задачи про корень.

Задача 13. Изобразить на одном графике в декартовой прямоугольной системе координат следующие функции:
$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^{100}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, $y = \sqrt[100]{x}$.

Задача 14. Вычислить $\sqrt{0{,}999\ldots9}$ (100 девяток) с точностью до $\dfrac{1}{2\cdot 10^{100}}$.

При работе с корнями часто бывают полезны следующие формулы:
$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})\cdot(\sqrt{a} + \sqrt{b})$;
$a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})\cdot((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2)$;
$a + b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})\cdot((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2)$.

Упражнения на эти преобразования можно встретить во многих задачниках. Вот пример, как с помощью первой из этих формул можно избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}.$$

При вынесении выражения из-под знака корня не забывайте, что корень чётной степени не бывает отрицательным, так что не верна формула: $\sqrt{a^2} = a$. А формула $\sqrt{a^2} = |a|$ верна при любых действительных a.

Дополнительные задачи.

Задача 15. Найти ТНГ разности $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ при всевозможных натуральных k. (В этой задаче сравниваются значения функции $y = \sqrt{x}$ в двух точках оси, отстоящих друг от друга на 1)

Задача 16. Найти ТНГ разности $\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}$ при всевозможных натуральных k.

Задача 17. Доказать, что ТНГ множества чисел вида $\sqrt[k]{k}$ при всевозможных натуральных $k > 1$ равна 1.

Задача 18. Доказать, что множество сумм вида $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ при всевозможных натуральных k ограничено.

Задача 19. То же самое для множества сумм вида $1 + \dfrac{1}{2\cdot\sqrt[100]{2}} + \ldots + \dfrac{1}{k\cdot\sqrt[100]{k}}$.

Задача 20. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $d > 0$, что для любого x такого, что $0 < x < d$, выполняется $1 + \dfrac{x}{k+\varepsilon} < \sqrt[k]{1+x} < 1 + \dfrac{x}{k}$.
Уточните график $\sqrt{x}$ вблизи значения $x = 1$.

Длина отрезка.

Рассматривается Евклидова плоскость. Пусть дан отрезок E – единица длины. Тогда каждому отрезку x ставится в соответствие действительное число $D(x)$ – длина этого отрезка, так что выполняются следующие свойства:

1) $D(E) = 1$;
2) $D(x) > 0$;
3) Если отрезки x и y равны (в том смысле, как понимается равенство в геометрии, то есть их можно совместить движением), то их длины равны;
4) Если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

Можно ли считать эти факты известными, или их нужно доказывать? Ответ зависит от того, что мы понимаем под «геометрией», точнее – от того, какие аксиомы положены в её основу. Одну и ту же геометрию можно строить по-разному. Различным может быть разделение на аксиомы и теоремы, но набор фактов в конечном счёте должен быть одинаковым (это и означает «одну и ту же геометрию»).

Если придерживаться аксиоматики Евклида (точнее – современной её интерпретации, см., например, книжку Д.Гильберта «Основания геометрии»), то геометрический мир строится первоначально без чисел. Но на каком-то уровне развития теории возникает возможность определить длину отрезка, так что выполняются выписанные свойства.

При другом способе построения геометрии понятие числа сразу включается в число основных геометрических понятий, и «длина» участвует в аксиомах. Такое изложение принято в книжке А.В.Погорелова «Элементарная геометрия. Планиметрия». Свойства 2 и 4 там сразу записаны в аксиомы, свойство 1 следует из аксиомы: «каково бы ни было положительное число m, на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить отрезок длины m (по этой аксиоме, существует отрезок длины 1, один из таких отрезков мы и обозначим через E). Свойство же 3 верно потому, что отрезки тогда и называются *совместимыми движением*, если их длины равны. Так что при этом способе изложения свойства длины $1-4$ можно считать данными.

Если же следовать Евклиду-Гильберту (и большинству учебников), то эти свойства нужно доказывать. В следующем листке намечается это доказательство. Но в нашей книжке не излагаются начала геометрии и не зафиксированы точно исходные положения. Поэтому в изложении геометрии имеются неизбежные неточности. Если Вы сейчас не хотите отвлекаться на геометрию, можете считать необходимые геометрические факты известными (неважно, откуда) и, пропустив следующие 2 листка, перейти к теме «измерение дуги».

Листок 39д. Измерение отрезка.

Определение. Пусть даны два отрезка: E – единица длины, и AB – отрезок, длину которого мы измеряем. *Длиной* D отрезка AB называется число, которое строится следующим образом: откладываем E от A в сторону B такое количество раз, что конец k-того отрезка (точка A_1) ещё принадлежит отрезку AB, а конец $(k+1)$-го отрезка уже не принадлежит ему. Затем откладываем от точки A_1 отрезок, равный 0,1 отрезка E, в сторону B такое количество раз K_1, что конец K_1-го отрезка принадлежит отрезку A_1B, а конец (K_1+1)-го отрезка не принадлежит ему, затем откладываем в ту же сторону 0,01 отрезка E и т.д. D определяем как БДД $k{,}K_1K_2\ldots$.

В этом определении используется ряд геометрических фактов:
1) На данной прямой от данной её точки в данную сторону можно отложить данный отрезок.
2) Должно быть понятно, что значит «в данную сторону». Это понятие должно обладать рядом подразумевающихся свойств, например: если я шагнул «в некоторую сторону», а из полученной точки ещё раз «в ту же сторону», то и в итоге я шагнул «в эту же сторону», и, вероятно, некоторыми другими.
3) Такое k, о котором идёт речь в определении, найдётся. Этот факт в книге Д.Гильберта считается аксиомой (она именно так и формулируется) и называется *аксиомой Архимеда.*
Эти вещи можете считать известными. Из всего этого следует, что длина отрезка всегда существует. Ещё можете считать известным следующий факт:
4) Система вложенных отрезков на прямой имеет хотя бы одну общую точку.
Нельзя считать, что последний факт доказан в листке 19 (задача 144), так как там он формулируется для мира чисел, а здесь для геометрического мира, который (как предполагается в этом листке) строится независимо от мира чисел.

Задачи.

Задача 21. (*Тонкий факт*). Длина отрезка всегда положительна.

Задача 22. Если точка C прямой AB лежит между точками A и B, то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC.

Задача 23. Каково бы ни было положительное число m, на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить отрезок длины m.

Задача 24. Если определена длина, обладающая свойствами $1)-4)$ предыдущей страницы, то она совпадает с длиной, определённой на этой странице.

На этой странице приводится конспективное изложение некоторых добавочных геометрических фактов, нужных для решения задач следующего листка и обычно слабо освещаемых в учебниках (в книге А.В.Погорелова «Элементарная геометрия. Планиметрия» имеется полное изложение вопроса).

Теорема 1. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.
Определения. *Ломаной* называется система отрезков $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$,…, $[A_{k-1}, A_k]$. Ломаная называется *замкнутой*, если A_k совпадает с A_1. Ломаная называется *несамопересекающейся*, если у составляющих её отрезков нет общих точек, кроме вышеперечисленных общих концов. Ломаная называется *выпуклой*, если для каждого её отрезка вся ломаная лежит по одну сторону от прямой, содержащей этот отрезок. Мы говорим, что точечное множество M *разделяет* точки A и B, если всякая ломанная, соединяющая A и B, пересекает M. Точечное множество называется *ограниченным*, если существует круг такой, что всё множество лежит внутри этого круга.
Теорема 2. Замкнутая несамопересекающаяся ломаная L делит плоскость на две части, одна из которых ограничена (эта часть называется *внутренней*, другая – *внешней*).

(«делит на две части» – это значит: множество всех точек плоскости, кроме точек L, разбивается на два непустых подмножества A и B, так что любые две точки из A можно соединить ломаной, не пересекающей L, и любые две точки из B можно соединить ломаной, не пересекающей L, и всякая ломаная, соединяющая точку из A с точкой из B, пересекает L).

Определение. Ломаная G_1: A_1, A'_2,A'_3,… A'_{k+1},A_k называется *объемлющей* для выпуклой ломаной A_1, A_2,… A_p,A_k (у них общие начальные и конечные точки), если обе ломаные лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_k и не существует точек ломаной G_1, принадлежащих внутренней области ломаной A_1,A_2,… A_p,A_k,A_1.

Теорема 3. Ломаная G_1, объемлющая выпуклую ломаную G, имеет длину, не меньшую, чем G. Если G и G_1 не совпадают, то длина G_1 больше длины G.

Теорема 4. Пусть окружность разбита точками A и B на две дуги; одна из них – дуга AmB. Пусть точки A_1,A_2,… A_k дуги AmB разбивают эту дугу на дуги $\overset{\frown}{AA_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$,… $\overset{\frown}{A_kB}$ так, что любые две дуги не имеют общих точек, кроме, быть может, концов. Тогда ломаная A,A_1,… A_k,B выпуклая. Наоборот, если вершины выпуклой ломаной лежат на окружности, то они разбивают соответствующую дугу на неналегающие дуги.

Листок 40. Измерение дуги окружности.

Определение. Пусть A и B – точки окружности, AmB – одна из дуг, на которые окружность разбита точками A и B. *Длиной дуги* AmB называется ТВГ множества длин всех выпуклых ломаных, имеющих концы A и B, и остальные вершины на дуге AmB.

Задачи.

Задача 25. Длина дуги существует.

Задача 26. Если дуга AmC разбита на дуги AB и BC, то длина AmC равна сумме длин дуг AB и BC.

Рассмотрим лучи OA и OB (O – центр окружности). Объдинение лучей OA и OB разбивает плоскость на две части; ту их них, которая содержит дугу AmB, обозначим через M. Рассмотрим множество D ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M точки A и B, и множество K ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M лучи OA и OB.

Задача 27. Для каждой дуги L из K найдётся дуга из D, которая не длиннее, чем L.

Задача 28. ТНГ множества длин ломаных множества K равна длине дуги AmB.

Очевидно, что длины двух окружностей относятся как радиусы (из подобия всех построений для этих двух окружностей). Поэтому можно утверждать, что длина дуги равна $k \cdot R$, где k одинаково для всех окружностей (R– радиус). Принято писать, что $k = 2\pi$, где $\pi = 3{,}1415926536\ldots$ (доказано, что это число иррациональное).

Определение. Радианная мера угла. Пусть дан угол. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в вершине этого угла и дугу этой окружности, на которую угол опирается как центральный. Длина этой дуги принимается за *радиальную меру угла.*

Теорема. (*дополнительная задача, не простая*).

Соответствие между радиальной и градусной мерой угла даётся формулой: $L = \pi \cdot \dfrac{A}{180}$, где L – радианная мера угла, A – градусная.
Этим результатом разрешается пользоваться без доказательства.

Задача 29. Если $0 < x < 2\pi$, то на единичной окружности найдётся дуга длины x.

Отображение $t(x)$ числовой прямой на окружность. Пусть O – окружность радиуса 1 с выделенной точкой A и выделенным положительным направлением обхода («против часовой стрелки»); для действительного числа x находим такое целое k, что $2\pi k \leqslant x < 2\pi(k+1)$; дугу длины $x - 2\pi k$ откладываем на окружности от точки A в положительном направлении; её конец есть точка $t(x)$.

179

Декартовы координаты на плоскости.

На этой странице (как и на двух следующих) излагается в виде краткого конспекта материал, который хорошо представлен во многих учебниках (см., например, Е.С.Кочетков и Е.С.Кочеткова «Алгебра и элементарные функции»).

Пусть на плоскости выбраны две взаимно-перепендикулярные прямые (оси координат), на каждой из них выделено положительное направление, и выбрана единица измерения длин (она может быть для каждой оси своя, но нам понадобится только случай, когда она общая). Точка пересечения O осей называется *началом координат*, одна из осей – осью *абсцисс* (осью Ox), другая – осью *ординат* (осью Oy).

Пусть на плоскости дана точка M. Проведём через неё прямые, параллельные осям. Рассмотрим точки пересечения X и Y этих прямых соответственно с осями Ox и Oy. Рассмотрим расстояние от точки O до точки X и возьмём его со знаком «+», если направление от точки O до точки X совпадает с положительным направлением оси Ox, и со знаком «-» – в противном случае. Полученное число называется *абсциссой* точки M и обозначается через x. Аналогично определяется *ордината* «y» точки M. Точка M с координатами x и y обозначается через $M(x, y)$.

Вектором на плоскости называется направленный отрезок. Два вектора называются *равными*, если их можно совместить параллельным переносом. Поместим начало вектора $\overline{a}$ в точку O; пусть при этом конец имеет координаты x и y. Числа x и y называются *проекциями* вектора. Пишут: $\overline{a} = \{x, y\}$, отождествляя тем самым вектор с упорядоченной парой его проекции. Вводится ещё вектор 0 (*нулевой*); его проекции: $\{0, 0\}$.

Для векторов вводятся операции сложения и вычитания: $\{x, y\} + \{m, n\} = \{x + m, y + n\}$, $\{x, y\} - \{m, n\} = \{x - m, y - n\}$. При этом выполняются аксиомы 1)– 4) (листок 1) и их следствия. Это определение *суммы* и *разности* векторов есть арифметическая запись обычных действий с векторами по правилу параллелограмма. Определяется также операция *умножения вектора на число*: $a \cdot \{x, y\} = \{ax, ay\}$. Нам понадобятся следующие два свойства этой операции: 1) $a \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = a\overline{x} + a\overline{y}$ и 2) $(a+b) \cdot \overline{x} = a\overline{x} + b\overline{x}$. (В этой записи буквы с чёрточками наверху – векторы, буквы без чёрточек – числа).

Вектор, параллельный оси, направленный в положительную сторону оси и имеющий длину 1, называется *единичным вектором* этой оси. Обозначим через e_1 и e_2 единичные векторы осей x и y. Пусть вектор $\overline{a}$ имеет проекции x и y. Тогда $\overline{a} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$.

Пусть теперь имеется две декартовых системы координат с одинаковым масштабом и общим началом: xOy и mOn, причём e_1 и e_2 – единичные векторы осей x и y, и d_1 и d_2 – единичные векторы осей m и n. Пусть $d_1 = \{x_1, y_1\}$, $d_2 = \{x_2, y_2\}$ в системе координат xOy. Если теперь некоторый вектор $\overline{B}$ имеет координаты m и n в системе mOn, то его координаты в системе xOy вычисляются (пользуясь свойствами 1) и 2) умножения вектора на число) по правилу: $\overline{B} = m \cdot d_1 + n \cdot d_2 = m \cdot (x_1 \cdot e_1 + y_1 \cdot e_2) + n \cdot (x_2 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2) = (m \cdot x_1 + n \cdot x_2) \cdot e_1 + (m \cdot y_1 + n \cdot y_2) \cdot e_2$.

Листок 41. Тригонометрические функции.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат xOy с одинаковым масштабом по осям и единичную окружность с центром в точке O. Выделим на окружности в качестве начала отсчёта углов точку пересечения с осью Ox и выберем положительное направление обхода окружности – от этой точки к точке пересечения её с положительным направлением оси y («против часовой стрелки»). Такую окружность принято называть *тригонометрическим кругом.*

Определение. Пусть α – действительное число. Рассмотрим точку $t(\alpha)$ (см. листок 40). Пусть x и y – координаты точки $t(\alpha)$. Полагают: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$. Ещё полагают в случае $x \neq 0$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, и в случае $y \neq 0$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$. Эти 4 функции от α называются *тригонометрическими функциями.*

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ является *периодической* с периодом T, если для всякого x из области её определения числа $x - T$ и $x + T$ тоже входят в область определения, и для всякого x из области определения $f(x) = f(x+T)$.

Задачи.

Задача 30. Все тригонометрические функции периодические с периодом 2π. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ периодические с периодом π.

Задача 31. Нарисовать на одном чертеже графики всех тригонометрических функций.

Задача 32. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (по традиции пишут $\sin^2 x$ вместо $(\sin x)^2$).

Задача 33. $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)$; $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$; $\sin x = -\sin(-x)$; $\cos x = \cos(-x)$; $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$; $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(-x)$. Какие свойства графиков выражены этими формулами?

Аргумент тригонометрической функции можно задавать в градусах и в радианах. Формула перевода – в листке 40.

Задача 34. Найти тригонометрические функции от $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 35. Расположить в порядке возрастания величины
$\sin(-55^\circ)$, $\sin 600^\circ$, $\sin 1295^\circ$, $\cos 654^\circ$, $\cos(-67^\circ)$, $\cos 295^\circ$.

Задача 36. Все величины предыдущей задачи выразить через тригонометрические функции углов, заключённых между 0 и 90°.

Задача 37. Решить неравенства: $\operatorname{tg} x > 1$; $\sin x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin^2 x < \cos x$.

Листок 42. Синус суммы двух углов.

Теорема.

Задача 38. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Указание. В системе координат xOy на тригонометрическом круге найдем точку $M = t(\alpha+\beta)$. Возьмём систему координат mOn с тем же началом O, тем же масштабом, тем же направлением положительного обхода тригонометрического круга этой системы и с осью Om, проходящей через точки O и $t(\alpha)$ ($t(\alpha)$ взято на круге системы xOy). Точка $t(\beta)$, взятая на круге системы mOn совпадает с M. Координаты единичного вектора оси m (в системе xOy) – $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, координаты единичного вектора оси n в системе xOy – $-\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Координаты точки M в системе mOn – $\cos\beta$ и $\sin\beta$. Теперь примените рассуждение конца страницы 54.

Задача 39. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Задача 40. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$.

Задача 41. $\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Задача 42. Докажите, что графики функций $\sin x$ и $\sin^2 x$ представляют собой подобные геометрические фигуры.

Задача 43. Доказать, что если $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$.

Задача 44. В каких пределах может изменяться выражение $\sin x\cdot\cos x$?

Задача 45. $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; (если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ определено).

Задача 46. $2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$.

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$.

Задача 47. $2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$.

Задача 48. $2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$.

Листок 43. Задачи по тригонометрии.

Задача 49. Если $x > 0$, то $\sin x < x$.

Задача 50. Если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $x < \operatorname{tg} x$.

Задача 51. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x > 0$. Доказать, что ТВГ множества значений этой функции равна 1.

Задача 52. Рассмотрим функцию $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x > 0$. Найти ТВГ множества её значений.

Задача 53. Пусть a и b – постоянные числа. Рассмотрим функцию аргумента x: $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$. Найти ТВГ множества всех её значений (при всех x).
Указание: воспользоваться вспомогательной задачей:

Задача 54. Если хотя бы одно из чисел a и b отлично от 0, то найдётся такое число t, что $\cos t = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задача 55. Нарисовать график функции $y = \sin \frac{1}{x}$, определённой при всех x, кроме $x = 0$.

Задача 56. Является ли ограниченным множество значений, принимаемых функцией $y = k \cdot \sin k$ при всевозможных натуральных k?

Листок 44. Колебание функции на интервале.

Определение. Пусть функция определена на каком-либо множестве G. Рассмотрим множество M всевозможных разностей $f(x_1)-f(x_2)$, где x_1 и x_2 – числа из множества G. ТВГ множества M называется *колебанием* функции $f(x)$ на множестве G и обозначается через $\text{У}(f(x), G)$. Если множество M сверху не ограничено, то говорят, что колебание равно *бесконечности.*
В большинстве предлагаемых задач G есть интервал.

Задачи.

Задача 57. $\text{У}(f(x),(a,b)) \geqslant 0$ и равно нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ постоянна на (a,b).
((a,b) – интервал $a < x < b$).

Задача 58. $\text{У}(f(x),(a,b)) = \text{ТВГ } f(x) - \text{ТНГ } f(x)$ на (a,b).

Задача 59. Если интервал (a',b') целиком принадлежит интервалу (a,b), то $\text{У}(f(x),(a',b')) \leqslant \text{У}(f(x),(a,b))$.

Задача 60. $\text{У}(f(x),(a,b)) + \text{У}(g(x),(a,b)) \geqslant \text{У}(f(x)+g(x),(a,b))$.

Задача 61. С помощью неравенства предыдущей задачи можно оценить колебание суммы двух функций, если известны колебания слагаемых. Нам нужно получить что-то аналогичное для произведения. Пусть известно, что на (a,b) функция $f(x)$, взятая по модулю, не превышает числа A, а функция $g(x)$ – числа B.
Тогда $\text{У}((f(x)\cdot g(x)),(a,b)) \leqslant \text{У}(f(x),(a,b))\cdot B + \text{У}(g(x),(a,b))\cdot A$.

Задача 62. Пусть на интервале (a,b) модуль $f(x)$ всюду больше положительного числа C. Тогда:
$$\text{У}\left(\frac{1}{f(x)},(a,b)\right) \leqslant \frac{\text{У}(f(x),(a,b))}{C^2}.$$

Листок 45. Примерная контрольная работа.

Задача 63. Пусть $f(x)$ определена всюду, (a,b) – интервал, $[a,b]$ – отрезок с теми же концами. Доказать, что $\text{У}(f(x),(a,b)) \leqslant \text{У}(f(x),[a,b])$.

Задача 64. Привести пример функции $f(x)$ и отрезка $[a,b]$ таких, чтобы в предыдущей задаче было строгое неравенство.

Задача 65. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что для каждого интервала A найдётся отрезок B такой, что $\text{У}(f(x),A) \geqslant \text{У}(f(x),B)$.

Задача 66. Пусть $f(x)$ определена на (a,b), k – положительное число. Доказать, что $\text{У}(k\cdot f(x),(a,b)) = k\cdot\text{У}(f(x),(a,b))$.

Задача 67. Пусть $f(x)$ определена на всей числовой прямой, p – действительное число. Определим функцию $g(x)$ правилом: $g(x) = f(x+p)$.
Дано: $\text{У}(f(x),(a,b)) = C$.
Указать такой интервал (m,n), чтобы было: $\text{У}(g(x),(m,n)) = C$.

Задача 68. Задача, аналогичная предыдущей, но $g(x)$ определяется правилом: $g(x) = f(p\cdot x)$.

Задача 69. Пусть M_1 и M_2 – два ограниченных числовых множества, причём известно, что для каждого x из M_1 найдётся y из M_2 такой, что $y \leqslant x$. Можно ли утверждать, что 1) ТНГ$M_2 \leqslant$ ТНГM_1, 2) ТНГ$M_2 <$ ТНГM_1?
Как изменится ответ, если дано, что для каждого x из M_1 найдётся y из M_2 такой, что $y < x$?

Листок 46. Вычисление колебаний.

В задачах, где требуется вычислить колебание, нужно ещё нарисовать график функции в указанном интервале.

Задача 70. Вычислить $У(\cos(x^2+2x),(0,3))$.

Задача 71. $У(\cos(\sin x),(-5,5))$.

Задача 72. $У(\sin^5 x,(1,\pi))$.

Задача 73. $У(x+\dfrac{x}{|x|},(-3,3))$.

Замечание. В последней задаче функция не определена в точке $x=0$, но это не мешает вычислить её колебание: просто при вычислении нужно выбросить из рассмотрения эту точку и считать, что функция рассматривается на множестве, которое получается выбрасыванием из интервала этой точки. В некоторых дальнейших задачах мы будем понимать колебание на интервале в таком расширенном смысле.

Задача 74. $У\left(\dfrac{1}{\sin^2 x+3},(10,20)\right)$.

Задача 75. $У(\sin\frac{1}{x},(\frac{1}{\pi},+\infty))$ (интервал $(a,+\infty)$ – это множество x таких, что $a<x$; аналогично понимается символ $-\infty$ в качестве левого конца интервала).

Задача 76. $У(x\cdot[\frac{1}{x}],(0,5))$ ($[x]$– *целая часть* x – наибольшее целое число, которое не больше x; $\{x\}$ – *дробная часть* x – определяется как $x-[x]$).

Задача 77. $У(\cos(x-\frac{1}{x}),(0,10))$.

Задача 78. $У\left(\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x},(0,10)\right)$.

Задача 79. $У(\sin\frac{1}{x},(\frac{1}{2},+\infty))$.

Задача 80. $У(x^2\cdot\sin\frac{1}{x},(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$.

Задача 81. Функция $M(x)$ определяется при всех $x>0$ по формуле:
$M(x)=У(f(y),(0,x))$. Оценить $У(M(x),(1,5))$ (выразить через величины, определяемые через функцию $f(x)$).

Листок 47. Колебание функции в точке.

Определение. Пусть дана функция $f(x)$ и точка a числовой оси. Для каждой окрестности D точки a (*окрестностью* точки a называется всякий интервал, содержащий эту точку) рассмотрим число $У(f(x), D)$. Рассмотрим множество всевозможных таких чисел при различных D. ТНГ этого множества называется колебанием функции $f(x)$ в точке a и обозначается через $У(f(x), a)$.

Уточнения. Если $f(x)$ определена при всех x, и для каждой окрестности D точки a $У(f(x), D)$ существует (является числом), то всё, что написано в определении, имеет смысл. Но можно требовать меньше и расширить область применимости определения.
1) Пусть функция определена на таком множестве M, что любая окрестность D точки a содержит хотя бы одну точку M. (В этом случае точка a называется *точкой прикосновния* множества M). Этого достаточно, чтобы для каждой окрестности D говорить о колебании функции на этой окрестности.
2) Если для каждой окрестности D точки a $У(f(x), D)$ не является числом, а является бесконечностью, то будем считать, что колебание $f(x)$ в точке a есть бесконечность. Если же хотя бы для одной окрестности колебание на ней является числом (конечным), то и колебание в точке тоже будет числом.

Задачи.

Задача 82. Изменится ли смысл определения, если брать 1) ТНГ по множеству симметричных относительно a интервалов? 2) если заменить интервалы отрезками? 3) симметричными отрезками?

Задача 83. Если $У(f(x), a)$ конечно, то найдётся окрестность точки a, в которой функция ограничена.

Определение. Если точка a входит в область определения функции $f(x)$ и $У(f(x), a) = 0$, то функция $f(x)$ называетя *непрерывной в точке a*.

Задача 84. Теорема об инерции знака. Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность точки a такая, что всюду в этой окрестности $f(x)$ отлична от 0 и имеет тот же знак, что и в точке a.

Листок 48. Колебание в точке(упражнения).

Нарисовать графики и вычислить колебание в указанной точке.

Задача 85. $У(\{x\}, 4)$
(определение функции $\{x\}$ – дробная часть от x – см. в задаче 76).

Задача 86. $У(2x \cdot [3 - x], 1)$.

Задача 87. $У(\cos(\cos \frac{1}{x}), 0)$.

Задача 88. $У(x^2 \cdot [x], 0)$.

Задача 89. $У((x^2 + 1) \cdot [x], 2)$.

Задача 90. $У(x \cdot \sin(1 + \operatorname{ctg}^2 x), 0)$.

Задача 91. $У\left(\dfrac{1}{1 + \cos^2 \frac{1}{x}}, 0\right)$.

Задача 92. $У(\sin \frac{1}{x}, 0)$.

Задача 93. $У(\{x\} + \sin \frac{1}{x}, 0)$.

Задача 94. $У(x^2 \cdot \sin(\operatorname{ctg} x), 0)$.

Задача 95. $У(x \cdot \sin \frac{1}{x}, 0)$.

Задача 96. $У(x^2 \cdot \cos \frac{2}{x}, 0)$.

Задача 97. $У(x^2 \cdot [x], 2)$.

Задача 98. $У((1 + x^2) \cdot \cos(\operatorname{ctg} x), 0)$.

Доказать.

Задача 99. $У(|f(x)|, a) \leqslant У(f(x), a)$.

Задача 100. Утверждение: "$У(f(x), 0) = \infty$" эквивалентно утверждению: "$У((f(x))^2, 0) = \infty$".

Задача 101. Дано: $У(f(x), 0) \geqslant 10$. Доказать, что $У((f(x))^3, 0) \geqslant 125$.

Задача 102. Дано: $g(x) = f(\frac{1}{x})$, $У(f(x), \frac{1}{2}) = 2$. Найти $У(g(x), 2)$.

Задача 103. Дано: $У(f(x), 3) = 1$, $g(x) = f(x^2)$. Найти $У(g(x), 9)$.

Задача 104. Дано: $g(x) = f(2x - 1)$, $У(g(x), 1) = 2$. Найти $У(2f(x) - 1, 1)$.

Листок 49. Определение a^p при $a > 0$ и рациональном $p > 0$.

Считается известным (см. листок 37), что для любого $a > 0$ и натурального p существует и притом только одно такое число $x > 0$, что $x^p = a$. Такое число обозначается через $\sqrt[p]{a}$ или $a^{\frac{1}{p}}$.

Задача 105. Доказать, что $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$.

Задача 106. Доказать, что $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$.

Задача 107. Доказать, что $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

Задача 108. Доказать, что $(a^{km})^{\frac{1}{kn}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$.

Определение. $a^p = \sqrt[n]{a^m}$, где $p = \frac{m}{n}$ $(p > 0)$.

Казалось бы, мы могли сформулировать это определение до задач 105–108. Но тогда это определение было бы некорректным, так как не исключалась бы зависимость результата от того, как число p представлено в виде дроби. Задача 108 исключает такую возможность.

Задача 109. $(a^{p_1})^{p_2} = (a^{p_2})^{p_1} = a^{p_1 \cdot p_2}$.

Задача 110. $a^{p_1+p_2} = a^{p_1} \cdot a^{p_2}$.

Задача 111. Пусть $a > 1$ и $p_1 < p_2$. Тогда $a^{p1} < a^{p_2}$.

Задачи, важные для дальнейшего.

Задача 112. Найти ТНГ множества чисел вида $2^{\frac{1}{n}}$, где n натурально.

Задача 113. Рассмотрим арифметическую прогрессию $p, p+d, p+2d, \ldots$ (p и d рациональные и положительные). Тогда числа $a^p, a^{p+d}, a^{p+2d}, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию, причём эта прогрессия возрастает и расстояния между её соседними членами тоже возрастают.

Задача 114. Разобьём отрезок $[2,3]$ на k равных частей, то есть построим арифметическую прогрессию $2, 2+d, 2+2d, \ldots$, которая начинается с 2 и кончается 3. Соответствующая геометрическая прогрессия $2^2, 2^{2+d}, 2^{2+2d}, \ldots$ начинается с 4 и кончается 8. Доказать, что k можно подобрать так, что расстояние между любыми соседями этой прогрессии будет $< 0,0001$. Указать одно из таких k.

Задача 115. Доказать, что для любых трёх чисел a, b и c, таких что $1 < b < c$ и $a > 1$, найдётся рациональное $p > 0$ такое, что в $b < a^p < c$.

Листок 50. Определение a^x при $a > 1$ и x действительном > 0.

Определение. a^x есть ТВГ множества всех чисел a^p, где p – рациональные числа, большие 0 и меньшие x.
(Докажите, что ТВГ всегда существует).

Задачи.

Задача 116. Доказать, что a^x – монотонно возрастающая функция от x (при $a > 1$, $x > 0$).

Для рациональных x мы сейчас имеем два определения a^x: то, которое приводится на предыдущем листке, и приведённое выше на этом листке.

Задача 117. Доказать, что новое определение для случая рационального x даёт тот же результат, что и старое определение, то есть что a^p равно ТВГ множества a^k при всевозможных положительных k, меньших p.

Задача 118. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (при $a > 1$, $x > 0$, $y > 0$).

Задача 119. $(a^x)^y = a^{xy}$ (в тех же предположениях).

Задача 120. Нарисовать графики 2^x и 10^x при $x > 0$.

Листок 51. Распространение функции a^2 на любое $a > 0$ и любое x.

Пусть $a > 1$. Положим $a^0 = 1$. При $x < 0$ положим $a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$.
Тем самым функция a^x при $a > 1$ определена при всех x.
Положим $1^x = 1$ при всех x.

Пусть $0 < a < 1$. Положим $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ при любом x.

Тем самым функция a^x определена при любом $a > 0$ и любом x. Функция a^x называется *показательной* функцией или *экспонентой.*

Задачи.

Задача 121. Доказать, что при $0 < a < 1$ при любом x $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Задача 122. Доказать, что при любом a функция a^x монотонна при всех x.

(Функция $f(x)$ называется *монотоно возрастающей*, если для любых x и y из области определения из неравенства $x < y$ следует неравенство $f(x) < f(y)$. Функция $f(x)$ называется *монотонно неубывающей*, если из неравенства $x < y$ следует неравенство $f(x) \leqslant f(y)$. Монотонно убывающая и монотонно невозрастающая функции определяются аналогично. Функция называется *монотонной*, если она одного из четырёх описанных видов).

Задача 123. Доказать, что всегда $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Задача 124. Доказать, что всегда $(a^x)^y = a^{xy}$.

Задача 125. Доказать, что $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ при любых $a > 0$, $b > 0$ и любом x.

Задача 126. Пусть $0 < a < b$, $x > 0$. Доказать, что
а) $a^x \leqslant b^x$, **б)** $a^x < b^x$.

Задача 127. Доказать, что любого $y > 0$ найдётся и притом только одно x такое, что $a^x = y$.

Задача 128. Нарисовать графики функции a^x при $a = 0{,}1; 0{,}5; 2; 10$.

Дополнительная.

Задача 129. Если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и монотонна, и для любых x и y выполняется равенство $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, то $f(x)$ есть показательная функция a^x, где $a = f(1)$.

Определения.

Пусть $y = f(x)$ – функция, заданная на множестве M со значениями в множестве G.

Определение 1. Пусть N – какое-либо подмножество множества M (в частности, может быть, всё M). Через $f(N)$ обозначается подмножество множества G, определяемое правилом: y входит в $f(N)$, если существует x из множества M такой, что $f(x) = y$. Множество $f(N)$ называется *образом множества* N при отображении f. Множество $f(M)$ называется *областью значений* функции f.

Определение 2. Для каждого y из множества G через $f^{-1}(y)$ обозначается множество всех таких x из множества M, что $f(x) = y$. Это множество называется *полным прообразом элемента* y при отображении f. Если N – произвольное множество, то через $f^{-1}(N)$ обозначается множество таких x из M, что $f(x)$ входит в N. $f^{-1}(N)$ называется *полным прообразом множества* N при отображении f.

Определение 3. Функция $x = g(y)$, определённая на множестве $f(M)$ такая, что каждому y из множества $f(M)$ поставлен в соответствие один определённый (для этого y) элемент x из множества M, такой что $f(x) = y$, называется *обратной* к функции $y = f(x)$. Если функция $f(x)$ такова, что полный прообраз каждого элемента y множества $f(M)$ состоит ровно из одного элемента, то обратную функцию можно обозначить через $x = f^{-1}(y)$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *взаимно-однозначным соответствием* множеств M и G, если полный прообраз каждого y из множества G (непустом) состоит ровно из одного элемента.

Листок 52. Обратная функция.

Задача 130. M – вся числовая прямая, G – отрезок $[-1,+1]$. $y = f(x) = \sin x$. Найти $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(A)$, где A – интервал $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

Задача 131. Пусть g – функция, обратная к f. Доказать, что для любого x из множества $f(M)$ $f(g(x)) = x$.

Задача 132. Верна ли теорема: если g – функция, обратная к f, то для любого x из множества M $g(f(x)) = x$?

Задача 133. Рассмотрим функцию $y = f(x) = x^2$ на всей числовой прямой. Найдите такое числовое множество N, чтобы выполнялись два условия:
1) $f(N)$ есть полупрямая $y \geqslant 0$,
2) если рассматривать функцию $f(x)$ только на этом множестве, то обратная функция $x = g(y)$ определяется однозначно.
Приведите пример трёх таких множеств N.

Задача 134. Если обратная функция определяется однозначно, то для всех x из множества M $f^{-1}(f(x)) = x$.

Задача 135. Пусть $y = f(x)$ – взаимно-однозначное соответствие числовых множеств M и G (x из множества M, y – из множества G). Доказать, что график функции $y = f^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно биссектрисы 1-го координатного угла в Декартовой системе координат xOy.

Задача 136. Построить графики функций, указывая области определения и области значений:
1) Степенные функции $y = x^a$ при $a = 1, 2, 3, 4, 100, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{100}, 0$ и при всех этих же значениях со знаком «$-$»,
2) Показательные функции a^x при $a = 2; 3; 10; 0{,}5; 0{,}1$. Укажите, какие из этих функций взаимно-обратны.

Листок 53. Контрольные задачи.

Задача 137. Нарисовать графики $y = 2^{-|x|}$, $y = (\frac{1}{2})^{-|x|}$.

Задача 138. Решить неравенство $x^y > 1$.
(Область определения функции двух переменных $f(x, y) = x^y$ есть полуплоскость $x > 0$, y любое).

Задача 139. Если $f(x)$ определена на некотором подмножестве M числовой оси и строго монотонна (то есть монотонно возрастающая или монотонно убывающая), то обратная функция определяется единственным образом и строго монотонна.

Задача 140. При каких a функция $y = x + ax^2$, рассматриваемая на всей числовой прямой, имеет единственную обратную?

Задача 141. При каких a функция $y = 2^x + ax$ монотонна на всей числовой прямой?

Задача 142. При каких a функция $y = x^3 + ax^2$ монотонна на всей числовой прямой?

Задача 143. $f(x) = x^2 + kx$. Каким должно быть k, чтобы полный прообраз интервала $(-1, 1)$ был интервалом? Дать описание всех таких k.

Задача 144. Доказать, что функция $y = a^x$ есть слабо выпуклая функция на всей числовой прямой (функция называется *слабо выпуклой*, если её значение в средней точке отрезка всегда меньше среднего арифметического её значений на концах этого отрезка, это определение приведено в листке 10).

Листок 54. Логарифмы.

Определение. Функция, обратная к функции $y = a^x$ ($a > 0$ и $a \neq 1$), обозначается $\log_a y$ (читается: *логарифм y по основанию a*).
Из задач предыдущих листков следует, что областью определения этой функции является полупрямая $y > 0$, причём функция определена однозначно.

Задача 145. Построить графики: $y = \log_{0,1} x$, $y = \log_{0,5} x$, $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$.

Задача 146. (В этой и следующих четырёх задачах x, y, a, b – положительны, причём $a \neq 1$ и $b \neq 1$).
Доказать, что $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

Задача 147. Доказать, что $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Задача 148. Доказать, что $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$, в частности $\log_a a^x = x$.

Задача 149. $a^{log_a x} = x$.

Задача 150. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b \cdot \log_b x$ (формула перехода к другому основанию).

Задача 151. Доказать, что если координатную плоскость, на которой нарисован график логарифмической функции, сжать к оси y в C раз, то это равносильно тому, чтобы сдвинуть этот график параллельно оси y.

Дополнительная.

Задача 152. Если функция $y = f(x)$ определена при всех $x > 0$, монотонна, $f(a) = 1$ ($a > 0$) и при всех положительных x и y $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, то $f(x) = \log_a x$.

Листок 55. Задачи на логарифмы.

Задача 153. Вычислить $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$, $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$, $\log_{5\sqrt{5}} \frac{1}{5}$, $9^{\log_3 8}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\cdot\log_3 11}$.

Задача 154. Доказать, что $\log_a x$ $(a > 1)$ есть слабо вогнутая функция (определение слабо вогнутой функции получается из определения слабо выпуклой функции заменой знака «$<$» на знак «$>$»).
$\log_a x$ $(a < 1)$ есть слабо выпуклая функция.

Задача 155. Нарисовать график функции $y = \dfrac{\log_2 x}{x}$ при $x > 0$. Найти точную нижнюю грань множества значений этой функции при $x > 2$.

Задача 156. Тот же вопрос о функции $y = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt[10]{x}}$.

Задача 157. При каких k функция $kx + \log_a x$ монотонна в области $x > 0$? Рассмотреть случаи $a > 1$, $a < 1$.

Листок 56д. О выпуклых функциях.

Определение. Функция $F(x)$ называется *выпуклой*, если для любого a и b из области определения выполняется условие: если соединить точки графика $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ отрезком D, взять точку x из области определения, лежащую между a и b, провести через точку x прямую, параллельную оси y и взять точку пересечения M этой прямой с отрезком D, то ордината точки M будет больше $f(x)$.
(Функция называется *вогнутой*, если «… ордината точки M будет меньше $f(x)$»).
Это определение отличается от определения *слабо выпуклой* (*слабо вогнутой*) функции тем, что здесь значения функции в точках a и b сравниваются со значением в любой внутренней точке отрезка $[a, b]$, а не только в его середине.

Задача 158. Если функция $f(x)$ определена на связной части числовой оси (то есть на всей числовой прямой, на полупрямой, на отрезке, интервале или полуинтервале), слабо выпукла и монотонна, то она выпукла.

До сих пор мы имели утверждения о слабой выпуклости (вогнутости) следующих функций: $y = x^2$, $y = x^2 + p \cdot x + c$ (задача 70, листок 10), $y = a^x$ (задача 144, листок 53) и $y = \log_a x$ (задача 154 предыдущего листка). На основании задачи 158, эти функции выпуклы (вогнуты) на всей области определения.

Задача 159. Доказать, что выпуклая функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

Задача 160. Доказать неравенство $k! > k^{\frac{k}{2}} (k > 2)$.

Листок 57д. Задачи о последовательностях.

Задача 161. Найти ТВГ и ТНГ последовательности $\dfrac{2k-1}{k^2+1}$.

Задача 162. Найти ТВГ и ТНГ последовательности $\dfrac{k}{2^k}$.

Задача 163. Найти ТВГ и ТНГ последовательности $\dfrac{2^k}{k!}$.

Задача 164. Найти ТНГ последовательности $\dfrac{\log_2 k}{k}$ $(k > 2)$.

Определение. *Колебанием числовой последовательности* A называется ТВГ множества всевозможных разностей $a_k - a_p$ (k и p – всевозможные натуральные числа). Обозначение: $Y(A, 0)$. (Если множество этих разностей не ограничено сверху, то колебание последовательности равно бесконечности).

Пусть A - последовательность. Отбросим k первых её членов. Колебание оставшейся последовательности обозначим через $Y(A, k)$. ТНГ множества всех чисел $Y(A, k)$ (при всевозможных натуральных k) называется *колебанием последовательности* A *на бесконечности* и обозначается через $Y(A, \infty)$. (Если при каждом k $Y(A, k)$ есть бесконечность, то считаем, что $Y(A, \infty)$ есть бесконечность).

Задача 165. Найти колебание на бесконечности для последовательностей из задач 161-164.

Задача 166. Что можно сказать о колебании на бесконечности для последовательности, про которую известно, что она монотонна и ограничена?

Задача 167. Доказать, что из каждой последовательности можно выделить монотонную последовательность (монотонно неубывающую или монотонно невозрастающую).

Задача 168. Доказать, что последовательность $a_k = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$ монотонно возрастает.

Задача 169. Дано: для любого k $|a_k| < 1$. $b_k = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{100} + \ldots + \dfrac{a_k}{10^k}$. Доказать, что $Y(\{b_k\}, \infty) = 0$.

Обратные тригонометрические функции (аркфункции).

Обозначения. Если $f(x)$ – функция $y = \sin x$, то полный образ числа y, $f^{-1}(y)$ обозначается обычно через $\operatorname{Arcsin} y$. Соответствующие обозначения для других тригонометрических функций: $\operatorname{Arccos} y$, $\operatorname{Arctg} y$ и $\operatorname{Arcctg} y$.

Определение. Рассматриваем функцию $y = \sin x$ на отрезке $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. На этом отрезке эта функция принимает каждое значение только один раз (монотонно возрастает). Поэтому обратная функция определяется однозначно. Она обозначается так: $x = \arcsin y$. Функцию $y = \cos x$ рассматриваем на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Обратную функцию для неё обозначаем так: $x = \arccos y$. Функцию $y = \operatorname{tg} x$ рассматриваем на интервале $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Обратную функцию обозначаем так: $x = \operatorname{arctg} y$. Функцию $y = \operatorname{ctg} x$ рассматриваем на интервале $0 < x < \pi$. Обратную функцию обозначаем так: $x = \operatorname{arcctg} y$.
$\arcsin x$ называется главным значением $\operatorname{Arcsin} x$, и аналогично для других функций.

Из всего, что до сих пор сказано про функцию $y = \sin x$, не следует, что она принимает все значения от -1 до 1. Без этого мы не можем утверждать, что функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Не можем сделать аналогичные утверждения и для других аркфункций. Это требуется доказывать.

Для доказательства существования какой-то точки можно пользоваться фактом, что на прямой от данной точки в данном направлении можно отложить отрезок данной длины.

Листок 58. Аркфункции (задачи).

Задача 170. На оси y внутри тригонометрического круга возьмём точку. Проведём через неё прямую, параллельную оси x. Эта прямая пересекает круг в двух точках.

Задача 171. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ определены на всей числовой прямой.

Задача 172. Нарисовать графики всех четырёх аркфункций.

Задача 173. Построить график функции $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}$ и сравнить с графиком функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Задача 174. Доказать равенства: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 175. Доказать тождество: $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

Задача 176. Верна ли формула: $\arcsin x = \operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$? Как правильно связать эти величины?

Задача 177. $\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \cdot \arcsin x + \pi \cdot k$ (k – любое целое),
$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2 \cdot \pi \cdot k$ (k – любое целое),
$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi \cdot k$ (k – любое целое),
$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi \cdot k$ (k – любое целое).
($\operatorname{Arcsin} x$ с большой буквы – полный прообраз числа x при отображении $x = \sin y$; $\arcsin x$ с маленькой буквы – главное значение этого полного прообраза).

Часть 5. Непрерывность и предел.

Листок 59. Определение непрерывности.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором числовом множестве M, содержащем точку x_0. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $d > 0$ такое, что для всякого x, принадлежащего множеству M, из неравенства $|x - x_0| < d$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Это – классическое определение непрерывной функции. Его автором является Коши.

Формальное замечание.
Слову «следует» классическая традиция придаёт следующий точный смысл: утверждение «из A следует B» считается верным в двух случаях: 1) если A неверно, или 2) B верно (это «или» не исключающее, то есть случай «A неверно и B верно» учтён и в 1) и во 2)), и неверным в одном: если A верно и B неверно. При этом не требуется никакой смысловой связи между A и B. Так что утверждение «если снег чёрен, то $2 \cdot 2 = 5$» считается истинным.
Для правильного пользования этим определением необходимо умение (и привычка) понимать его буквально.

Задачи.

Задача 1. Доказать эквивалентность этого определения и определения листка 47 («если точка a входит в область определения функции $f(x)$ и $Y(f(x), a) = 0$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a»).

Следующие две задачи желательно сделать, исходя из нового определения непрерывности (ср. с задачами 83 и 84 листка 47).

Задача 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то найдётся окрестность точки a (то есть интервал, содержащий точку a) такая, что в этой окрестности $f(x)$ есть ограниченная функция.

Задача 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то найдётся окрестность точки x_0 такая, что всюду в этой окрестности (конечно, только в тех точках, где $f(x)$ определена) $f(x) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

Листок 60. Теоремы о непрерывных функциях.

Если задачи этого листка покажутся вам трудными, порешайте сначала задачи из следующих трёх листков, а затем возвращайтесь к этому листку.

Задача 4. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка, и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то найдётся точка C, принадлежащая отрезку $[a, b]$, такая, что $f(C) = 0$.
Другая формулировка: если $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке, и ε - число, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$, то найдется точка C отрезка $[a, b]$ такая, что $f(C) = \varepsilon$.

Задача 5. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ (то есть существует число C такое, что для каждого x отрезка $[a, b]$ $|f(x)| < C$).

Задача 6. Теорема о достижении максимума. В условиях предыдущей задачи существует точка x_0 отрезка $[a, b]$ такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ для всякого x из отрезка $[a, b]$. (Такая точка x_0 называется *точкой максимума*; верна, конечно, и аналогичная теорема о минимуме).

Задача 7. Доказать, что в задачах 4, 5, 6 все данные существенные, то есть отбросив хотя бы одно из условий, мы получим неверное утверждение.

Указание. Для решения задач 4, 5, 6 можно пользоваться следующими фактами:
1) Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань;
2) Система вложенных отрезков имеет общую точку (задача 144, листок 19).
Использование этого факта основано на том, что мы рассматриваем такое свойство, которое, если верно для некоторого отрезка, то верно и хотя бы для одной из его половин.

Попробуйте сделать задачи 4, 5, 6 двумя способами: используя факт 1 и факт 2.

Листок 61. Разрывность.

Определение. Функция называется *разрывной* в точке x_0, если точка x_0 входит в область определения функции, и при этом функция не является непрерывной в точке x_0.

Задача 8. Привести пример функции, определённой при всех x, разрывной в точках вида $x = \dfrac{1}{k}$ (k - натуральное), а в остальных точках непрерывной (в том числе в точке $x = 0$).

Задача 9. Привести пример функции, определённой при всех x и разрывной во всех точках.

Задача 10. Привести пример функции, определённой при всех x и непрерывной ровно в одной точке (а в остальных точках разрывной).

Задача 11. Доказать, что не существует монотонной функции, разрывной во всех иррациональных точках.

Дополнительные.

Задача 12. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных точках и непрерывной во всех иррациональных.

Задача 13. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных, непрерывной во всех иррациональных точках и притом монотонной.

Логические упражнения.

Задача 14. Дайте определение функции, разрывной в точке x_0, не употребляя отрицаний. Дать два ответа: исходя из старого и из нового определений непрерывности.

Задача 15. Если в новом определении непрерывности не требовать, чтобы ε было больше нуля (то есть «… для любого действительного числа ε найдётся $d > 0$ такое, что …»), какие функции окажутся «непрерывными» согласно этому определению?

Задача 16. Аналогичный вопрос про условие $d > 0$.

Листок 62. Непрерывность операций.

Задача 17. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x)+g(x)$ и $f(x)-g(x)$ непрерывны в точке x_0.

Замечание. Функция $f(x)+g(x)$ определена для тех x, которые входят одновременно в область определения обеих функций $f(x)$ и $g(x)$. Из условий задачи следует во всяком случае, что $f(x)+g(x)$ определена в точке x_0. Решая задачу, можете считать (если это вам проще), что обе функции определены в некоторой окрестности точки x_0. Это замечание относится и к следующим двум задачам.

Задача 18. То же для произведения $f(x) \cdot g(x)$.

Задача 19. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Задача 20. Теорема о непрерывности суперпозиции. Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x)$ непрерывна в точке $g(x_0)$, то функция $p(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0. Функция $p(x)$ называется *суперпозицией* функции f и g. ($p(x)$ определена для всякого такого x_0, что 1) $g(x_0)$ определена и 2) $f(g(x_0))$ определена. Если вам это проще, считайте, что $g(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, а $f(x)$ – в некоторой окрестности точки $g(x_0)$).

Задача 21. Если функция $y = f(x)$ определена на отрезке A, монотонно возрастает или монотонно убывает и непрерывна, то функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $f(A)$.

Задача 22. Если $f(x)$ – монотонно неубывающая или монотонно невозрастающая функция, заданная на отрезке, и известно, что она пробегает все промежуточные значения (то есть из неравенства $f(a) < C < f(b)$ следует, что найдётся x_0 такое, что $f(x_0) = C$), то $f(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Листок 63. Непрерывность элементарных функций.

Задача 23. Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x = \frac{3}{2}$. Указать правило, как по ε найти d.

Задача 24. Доказать, что многочлен $y = a_0 \cdot x^k + a_1 \cdot x^{k-1} + \ldots + a_k$ есть всюду непрерывная функция.

Задача 25. Доказать, что функция $y = \sqrt[k]{x}$ $(x > 0)$ есть функция, непрерывная при всех $x > 0$.

Задача 26. Доказать, что функция $y = x^p$, где $x > 0$ и p – рациональное положительное число, непрерывна при всех $x > 0$. Доказать то же самое для случая $p < 0$.

Задача 27. Доказать, что функция $y = a^x (a > 1)$ непрерывна при всех x.

Задача 28. Доказать, что функция $y = \log_a x$ непрерывна при всех $x > 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Задача 29. Доказать, что функция $y = x^a$, где a – действительное число, непрерывна при всех $x > 0$.

Задача 30. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна при всех x.

Задача 31. Доказать, что функции $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках, где они определены.

Задача 32. Доказать, что функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны при всех x, при которых они определены.

Индуктивное определение элементарной функции.

1) Элементарными функциями являются константы $y = C$, функции $y = a^x$ $(a > 0)$, $y = \sqrt[p]{x}$ (p нечётное, x любое), $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$.
2) Если $f(x)$ и $g(x)$ – элементарные функции, то $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(g(x))$ – элементарные функции .
Это определение нужно понимать так: функция $f(x)$ является *элементарной*, если исходя из функций, элементарных в силу пункта 1, можно прийти к данной функции с помощью конечного числа шагов, на каждом из которых применяется одна из операций пункта 2 к функциям, элементарность которых уже установлена.

Задача 33. Проверьте, что все функции задач 23-32 элементарные.

Задача 34. Доказать, что все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.

Задача 35. (*Дополнительная*) Вспомните задачу 51 листка 7.

Листок 64. Контрольные задачи на непрерывность.

Задача 36. Функция $p(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать, что функция $f(x) = |p(x)|$ непрерывна в точке x_0.

Задача 37. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Доказать, что функция $F(x) = \max(f(x), g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Задача 38. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей прямой. Определим функцию $C(x)$ так: пусть $k > 0$ – фиксированное число. Положим $C(x) = f(x)$, если $|f(x)| \leqslant k$; $C(x) = k$, если $f(x) > k$, и $C(x) = -k$, если $f(x) < -k$. Доказать, что функция $C(x)$ всюду непрерывна.

Задача 39. Функция $f(x)$ разрывна в точке x_0. Можно ли утверждать, что функция $(f(x))^2$ разрывна в точке x_0?

Задача 40. $f(x) = p(x) + k(x)$. $p(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в этой точке. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Задача 41. $f(x) = p(x) + k(x)$. $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Задача 42. $f(x) = p(x) \cdot k(x)$. $p(x)$ непрерывна в точке x_0, $k(x)$ разрывна в этой точке. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Задача 43. $f(x) = p(x) \cdot k(x)$. $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0. Доказать, что $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Задача 44. Пусть $f(x)$ определена на всей числовой прямой и такова, что для любых x_1 и x_2 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant 0,5 \cdot |x_1 - x_2|$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно один корень.

Задача 45. Сколько решений имеет уравнение $\sin x = \dfrac{x}{100}$?

Задача 46. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке, и для любых x $f(x) = f(2x)$, то $f(x) = f(0)$.

Задача 47. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке, и для любых x и y $f(x+y) = f(x) + f(y)$, то для любого x $f(x) = x \cdot f(1)$.

Задача 48. Если $f(x)$ определена при всех x, непрерывна в каждой точке и для любых x и y $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, то $f(x) = f(1)^x$.

Дополнительные.

Задача 49. Если $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, то для всякого $d = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$) найдётся пара чисел x, y, такая, что $0 \leqslant x < y \leqslant 1$, $y = x + d$, $f(x) = f(y)$. Если же d не имеет вид $\frac{1}{k}$, то утверждение неверно.

Задача 50. Пусть $f(x)$ непрерывна, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(f(x)) = x$. Доказать, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ $f(x) = x$.

Листок 65д. Связь с множествами.

Задача 51. Пусть функция $f(x)$ определена на всей прямой или на отрезке. Пусть ε некоторое число. Тогда множество точек x таких, что $Y(f(t), x) < \varepsilon$, есть открытое множество (открытое – по отношению к области, на которой задана функция).

Задача 52. Пусть функция $f(x)$ определена на всей прямой или на отрезке и непрерывна всюду на этом множестве. Пусть C – некоторое число. Тогда множество точек, в которых значение этой функции меньше C, открыто, а множество точек, в которых значение $\geqslant C$, замкнуто (открытость и замкнутость по отношению к области определения).

Вспомогательная теорема.

Задача 53. Пусть A – отрезок, а C – множество интервалов такое, что каждая точка отрезка A принадлежит некоторому интервалу (такое множество интервалов называется *покрытием* отрезка A). Тогда найдётся конечное подмножество $C1$ множества C такое, что каждая точка отрезка A принадлежит одному из интервалов множества $C1$ (множество $C1$ называется конечным подпокрытием отрезка A).

Задача 54. Верна ли эта теорема, если заменить отрезок интервалом? Интервалы отрезками?

Попробуйте применить задачи 52 и 53 к теоремам листка 60.

Задача 55. Функция называется *ограниченной в точке* a, если существует окрестность точки a, в которой функция ограничена. Доказать, что множество точек, в которых функция неограничена, замкнуто.

Задача 56. Если функция определена на отрезке и ограничена в каждой его точке, то она ограничена на отрезке.

Задача 57. Множество точек непрерывности любой функции, заданной на всей числовой прямой, можно представить, как пересечение счётного числа открытых множеств. (Множество точек разрыва – как сумму счётного числа замкнутых).

Задача 58. Пусть функция определена на всей числовой прямой. Если для всякого C множество таких x, что $f(x) > C$, открыто, и множество таких x, что $f(x) < C$, тоже открыто, то $f(x)$ непрерывна.

Задача 59. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Предел.

Пусть функция $f(x)$ определена на числовом множестве M, и пусть x_0 – предельная точка множества M (то есть любая окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из M).

Определение. Число A называется *предело́м функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* x_0 (обозначение: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $d > 0$ такое, что для любого x из M, отличного от x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < d$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. Мы не придаём самостоятельного смысла словам: «x стремится к x_0» или «предел функции $f(x)$». Смысл имеет только всё сочетание слов: «предел функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0», и этот смысл высказан в вышеприведённом определении.

Связь с непрерывностью.
1) Если x_0 – предельная точка для множества M, на котором определена функция $f(x)$, и $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2) Если точка x_0 входит в область определения функции $f(x)$, и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0.
(Убедитесь в этом сравнением определения предела и классического определения непрерывности).

Определение. Число A называется *пределом* последовательности f_k, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что из неравенства $k > N$ следует неравенство $|f_k - A| < \varepsilon$. (Обозначение: $\lim\limits_{k} f_k$).

Пусть M – множество на прямой, не ограниченное сверху, $f(x)$ – функция, определённая на M.

Определение. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ *при* x *стремящемся к плюс бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число d, что для всякого x из M, которое больше d, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Пусть $f(x)$ определена на множестве M, и x_0 – предельная точка M.

Определение. *Бесконечность (без знака) является пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* x_0, если для любого ε найдётся $d > 0$ такое, что для всякого x из M, для которого $|x - x_0| < d$ (кроме $x = x_0$), $|f(x)| > \varepsilon$. (Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$).

Листок 66. Упражнения на определение предела.

Задача 60. Рассмотрим запись: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Символу a будем придавать один из четырёх смыслов: 1) a есть число, 2) a есть бесконечность, 3) a есть плюс бесконечность, 4) a есть минус бесконечность.
Символу A также будем придавать эти четыре смысла. Произвольно комбинируя указанные четыре смысла a с четырьмя смыслами A, получим 16 понятий (в том числе 3 старых). Дайте определение каждому из них (через ε, d).

Задача 61. Примем сокращения: $\forall$ – «для любого», $\exists$ – «найдётся ... такое, что ...».
Рассмотрим условия:
1. $\forall\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.
2. $\forall\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| > \varepsilon$.
3. $\forall\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$.
4. $\forall\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| > \varepsilon$.
5. $\forall\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.
6. $\forall\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| > \varepsilon$.
7. $\forall\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$.
8. $\forall\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| > \varepsilon$.
9. $\exists\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.
10. $\exists\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| > \varepsilon$.
11. $\exists\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$.
12. $\exists\varepsilon > 0\ \forall d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| > \varepsilon$.
13. $\exists\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| < \varepsilon$.
14. $\exists\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \forall x \neq x_0$ из $|x - x_0| < d$ следует $|f(x) - A| > \varepsilon$.
15. $\exists\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| < \varepsilon$.
16. $\exists\varepsilon > 0\ \exists d > 0\ \exists x \neq x_0\ |x - x_0| < d$ и $|f(x) - A| > \varepsilon$.

Среди этих условий найдите определения знакомых вам понятий и их отрицания. Про каждое из остальных условий скажите, что оно означает.
Составьте квадратную таблицу, у которой 16 строк, занумерованных числами 1-16 и 7 столбцов, занумерованных числами 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16. На пересечении k-той строки и n-ного столбца поставьте 1, если из k-того условия следует n-ное условие, и 0 в противном случае. В случае «1» вы должны уметь дать доказательство, а в случае «0» – привести пример.

Листок 67д. Верхний и нижний пределы.

Определение. Пусть точка x_0 предельная для множества M, на котором определена функция $f(x)$. Для каждой окрестности U точки x_0 рассмотрим множество всех значений функции $f(x)$ на этой окрестности, за исключением значения $f(x_0)$. Рассмотрим ТВГ этого множества; обозначим его через T_U. ТНГ множества T_U при всевозможных окрестностях U точки x_0 называется *верхним пределом функции* $f(x)$ *при* x *стремящемся к* x_0 и обозначется $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$.

Если для каждой окрестности U точки x_0 T_U есть плюс бесконечность, то $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ равен плюс бесконечности. Если множество T_U содержит хотя бы одно число (не плюс бесконечность), и не ограничено снизу, то $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ равен минус бесконечности.

Аналогично определяется нижний предел ($\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$).

Упражнения:

Задача 62. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела последовательности.

Задача 63. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела функции при x стремящемся к плюс бесконечности, к минус бесконечности, к бесконечности (без знака).

Задача 64. Пусть точка x_0 предельная для множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M (или, иначе, если мы исключаем из рассмотрения значение $f(x_0)$). Тогда, если $Y(f(x), x_0)$ существует (не является бесконечностью), то $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ существуют (являются числами), $Y(f(x), x_0)$ равно их разности.

Задача 65. Аналогичная теорема о колебании последовательности.

Листок 68д. Критерий Коши.

Задача 66. Пусть точка x_0 предельная для множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M. Тогда для того, чтобы существовал (конечный) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $Y(f(x), x_0) = 0$.

Задача 67. Вторая формулировка критерия Коши. Пусть точка x_0 предельная для множества M, на котором определена функция $f(x)$, сама же точка x_0 не входит в M. Тогда для того, чтобы существовал (конечный) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $d > 0$ такое, что для любых x_1 и x_2, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенствам $|x_1 - x_0| < d$ и $|x_2 - x_0| < d$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Определение. Последовательность a_k называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что для любых k и p, больших N, $|a_k - a_p| < \varepsilon$.

Задача 68. Критерий Коши для последовательности. Для того, чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Задача 69. Другая формулировка критерия Коши для последовательности. Для того, чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы ее колебание на бесконечности было равно нулю.

Задача 70. $a_k = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{1}{k}$. Доказать, что последовательность a_k фундаментальная.

Листок 69. Предельный переход в операциях.

Задача 71. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (тогда и их сумма определена в этой окрестности). Если существует (конечные) пределы $f(x)$ и $g(x)$ при x стремящемся к x_0, то функция $f(x)+g(x)$ имеет (конечный) предел при x стремящемся к x_0, и этот предел равен сумме пределов $f(x)$ и $g(x)$.
$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Задача 72. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для произведения и частного.

Задача 73. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для предела функции при x стремящемся к плюс бесконечности, к минус бесконечности, к бесконечности (без знака).

Задача 74. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы о пределах последовательностей.

Задача 75. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$. Тогда $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t))$ существует и равен $f(x_0)$.

Задача 76. Сформулируйте и докажите теорему, аналогичную предыдущей 1) для случая, когда $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = x_0$, 2) для случая, когда предел последовательности $x_k = x_0$.

Задача 77. Рассмотрим функцию $f(x) = a(x)^{b(x)}$.
Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = a_0 > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = b_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует и равен $a_0^{b_0}$.

Задача 78. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для случаев, когда $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = a_0$, $\lim\limits_{x\to\infty} b(x) = b_0$, когда a_k есть последовательность, и $\lim\limits_{k} a_k = a_0 > 0$ и т.п.

Листок 70. Задачи на последовательности.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ – последовательность. Если из неё вычеркнуть часть членов, так что их останется всё-таки бесконечное число, а остальные перенумеровать, сохраняя порядок и так, чтобы номера шли без пропусков, то полученная последовательность называется подпоследовательностью данной последовательности.

Задача 79. Если последовательность x_k имеет предел, то и всякая её подпоследовательность имеет тот же предел.

Задача 80. Если последовательность x_k имеет предел A, то и последовательность y_k, полученная из последовательности x_k перенумерованием, имеет предел A (*перенумерование* – взаимо-однозначное отображение множества натуральных чисел на себя).

Задача 81. Если последовательность x_k ограничена, то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность (*сходящуюся* – значит имеющую предел).

Определение. *Рядом* называется бесконечная сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$. Число C называется *суммой ряда*: $C = a_1 + a_2 + \ldots$, если последовательность частичных сумм этого ряда: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \ldots$ имеет пределом число C. В этом случае ряд называется *сходящимся*.

Задача 82. Доказать, что ряд $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots$ ($|p| < 1$) сходится. Найти его сумму.

Задача 83. Доказать, что ряд $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{k!} + \ldots$ сходится. Найти его сумму с точностью до $0,1$. Это число обозначается через e (*число Эйлера*).

Задача 84. Доказать, что e – иррациональное число.

Задача 85. Доказать, что последовательность $\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^k$ имеет предел.

Задача 86. (Трудная). Доказать, что этот предел равен e.

Листок 71. Новое определение непрерывности и предела функции.

В задачах этого листка понятия непрерывности и предела функции выражаются через понятие предела последовательности.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если x_k – последовательность, сходящаяся к x_0 (то есть имеющая пределом x_0), то начиная с некоторого k $f(x_k)$ имеет смысл, и можно говорить о пределе последовательности $f(x_k)$.

Задача 87. Для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности x_k, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_k)$ сходилась к $f(x_0)$.

Задача 88. Доказать, что в предыдущей задаче достаточно требовать, чтобы последовательность $f(x_0)$ сходилась (не указывая, что к $f(x_0)$).

Задача 89. Число A является пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 в том и только в том случае, если для любой последовательности x_k, имеющей пределом x_0, но не принимающей значение x_0, последовательность $f(x_k)$ имеет пределом число A.

Пусть функция $f(x)$ определена при всех x, больших некоторого a.

Задача 90. Число A является пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к плюс бесконечности, если для любой последовательности x_k, имеющей пределом плюс бесконечность, последовательность $f(x_k)$ имеет пределом число A.

Задача 91. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для других случаев предельного перехода (при x стремящемся к минус бесконечности и т.п.; перечень этих случаев – в задаче 60, листок 66).

Дополнительная.

Задача 92. Попробуйте доказать теоремы о непрерывных функциях (задачи 5 и 6 листка 60), используя задачу 81 (листок 70) и новое определение непрерывности.

Листок 72. Раскрытие неопределённостей.

Задача 93. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-3)^{10}\cdot(3x+2)^{20}}{(x-1)^{30}}$.

Задача 94. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(2+x)(3+x)-6}{x}$.

Задача 95. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-1}{x-1}$.

Задача 96. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0\cdot x^p + a_1\cdot x^{p-1}+\ldots+a_p}{b_0\cdot x^k + b_1\cdot x^{k-1}+\ldots+b_k}$ в зависимости от p, k, a_0 и b_0 (a_0 и b_0 отличны от нуля).

Задача 97. Найти предел отношения двух многочленов при x стремящемся к нулю в зависимости от коэффициентов.

Задача 98. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})$.

Задача 99. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$. Нарисовать график функции.

Задача 100. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

Задача 101. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^d}$ $(d>0)$.

Задача 102. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Задача 103. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Нарисовать график.

Задача 104. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$. Нарисовать график.

(Во всех этих задачах требуется не только найти предел в предположении, что он существует, но и доказать существование. Задачи на нахождение предела дроби, когда числитель и знаменатель оба стремятся к нулю или оба к бесконечности, называются *задачами на раскрытие неопределённостей* – вида *нуль делить на нуль* или *бесконечность на бесконечность*).

Листок 73. Пределы, связанные с экспонетой.

Задача 105. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = a > 1$. Если при этом:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)^{b(x)} = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} b(x) = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)^{b(x)} = +\infty$.

Задача 106. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Задача 107. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{a^x}$ в зависимости от a и k $(a > 1)$.

Задача 108. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^d}$ в зависимости от a и d $(d > 0)$.

Задача 109. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Задача 110. Доказать, что $\lim\limits_{k} \left(1 + \dfrac{x}{k}\right)^k = e^x$.

Задача 111. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Задача 112. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^p - 1}{x}$ (p – рациональное число).
Указание: воспользоваться задачей 95.

Дополнительные.

Задача 113. Доказать, что $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^k}{k!} + \ldots$.

Задача 114. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Задача 115. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_e(1+e^x)}{x}$ (логарифм x по основанию e называется *натуральным логарифмом* x и в дальнейшем обозначается через $\ln x$).

Листок 74. Асимптоты.

Определение. Если линейная функция $y = kx + c$ такова, что предел разности $(f(x) - (kx + c))$ при x стремящемся к плюс бесконечности (или к минус бесконечности) равен 0, то прямая $y = kx + c$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ справа (слева).
Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если эта функция неограничена в точке x_0 (то есть не существует окрестности точки x_0, в которой она ограничена).

Нарисовать графики и найти асимптоты:

Задача 116. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Задача 117. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$.

Задача 118. $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Задача 119. $y = \sqrt{x^2 + x}$.

Задача 120. $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{x + 2}{x - 3}}$.

Дополнительные.

Задача 121. $y = \ln(1 + e^x)$.

Задача 122. Существует ли прямая, которая лежит выше графика функции $y = x \cdot \ln x$?

Задача 123. Доказать, что графики функций $y = x^{100}$ и $y = e^x$ пересекаются по крайней мере в трёх точках.

Листок 75. Бесконечно малые.

Определение.
Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при x стремящемся к x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые при x стремящемся к x_0, определённые всюду в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0), $f(x)$ всюду в этой окрестности (кроме, быть может, точки x_0) отлично от нуля, и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

то говорят, что $g(x)$ есть бесконечно малая *более высокого порядка малости*, чем $f(x)$. В этом случае пишут: $g(x)=o(f(x))$ (o малое от f от x).

Задача 124. $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ и $\dfrac{a(x)+o(a(x))}{b(x)+o(b(x))}$ имеет одинаковое предельное поведение при x стремящемся к x_0 (то есть если первое выражение имеет предел, то и второе имеет тот же предел, если первое стремится к плюс бесконечности, то и второе стремится к плюс бесконечности и т.д.).

Определение. Говорят, что бесконечно малые $f(x)$ и $g(x)$ имеют *одинаковый порядок малости* при x стремящемся к x_0, если $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ определена всюду в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и имеет при x стремящемся к x_0 конечный предел, отличный от 0. Это записывается так: $f(x)=O(g(x))$ (O большое от $g(x)$). Если же этот предел равен 1, то $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми.* Это обозначается так: $f(x)\sim g(x)$.

Задача 125. Разность двух эквивалентных бесконечно малых имеет более высокий порядок малости, чем каждая из них.

Определение. Если бесконечно малая $f(x)$ имеет при x стремящемся к x_0 тот же порядок малости, что $(x-x_0)^k$, то говорят, что $f(x)$ имеет *k-тый порядок малости* при x стремящемся к x_0.

Задача 126. Пусть $f(x)=O(x-x_0)^k$, $g(x)=O(x-x_0)^p$, и $k<p$. Тогда $f(x)+g(x)=O(x-x_0)^k$. Какой порядок малости имеет функция $f(x)\cdot g(x)$?

Задача 127. Найти порядок малости $\sqrt{1+x}-1$ при x стремящемся к 0.

Задача 128. Найти порядок малости функций $y=1-\cos x$, $y=\operatorname{tg}x-\sin x$ при x стремящемся к 0.

Задача 129. (*Дополнительная.*) Найти k такое, что $(1+x)^a-1\sim kx$ (a – любое действительное число).

Листок 76. Производные некоторых функций.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.
Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 (обозначение: $f'(x_0)$) называется $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Геометрический смысл производной – тангенс угла наклона касательной графика в точке $(x_0, f(x_0))$ к оси x.

Другое определение производной. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется такое число k, что разность $f(x) - f(x_0) - k(x - x_0)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $x - x_0$.

В следующих задачах требуется нарисовать графики и вычислить $f'(x)$.
Задача 130. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^k$ (k - натуральное).

Задача 131. $f(x) = \sqrt{x}$ в области $x > 0$.

Задача 132. $f(x) = \sqrt[k]{x}$ (k натуральное) в области $x > 0$.

Задача 133. $f(x) = \sin x$.

Задача 134. $f(x) = \cos x$.

Задача 135. $f(x) = \arcsin x$ на интервале $-1 < x < 1$.

Дополнительные.

Задача 136. $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$.

Задача 137. $f(x) = a^x$ при любом x.

Задача 138. $f(x) = \ln x$ в области $x > 0$.

Задача 139. $f(x) = x^a$ в точке $x_0 = 1$.

Определения.

1. Пусть на связной части T числовой прямой (то есть на всей прямой, на полупрямой, на отрезке, полуинтервале или интервале) заданы две непрерывные функции $x = f(t)$ и $y = g(t)$. Пусть на плоскости зафиксирована декартова система координат xOy. Будем считать, что пара функций $f(t)$, $g(t)$ задаёт *отображение* множества T в плоскость, ставя каждому числу t из множества T точку плоскости с координатами $x = f(t)$ и $y = g(t)$. Образ множества T при таком отображении называется *кривой*, а само отображение – *параметрическим* заданием кривой.

2. *Окрестностью* точки плоскости будем называть любой круг с центром в этой точке.

3. Функция двух переменных $t = f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в этой точке и для любого $\varepsilon < 0$ найдётся окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ такая, что для всякой точки $M(x, y)$ этой окрестности, входящей в область определения функции, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

4. Отображение $Y = F(X)$ плоского множества M в плоское множество G называется *непрерывным* в точке $X_0(x_0, y_0)$, если для любой окрестности ε точки $Y_0 = F(X_0)$ существует окрестность точки X_0 такая, что в любой точке X этой окрестности, входящей в область определения функции, $F(X)$ входит в ε.
Убедитесь в том, что параметрическое задание кривой есть отображение множества T в плоскость, непрерывное в смысле определение 4, и что непрерывная функция двух переменных есть частный случай непрерывного отображения плоских множеств (именно, случай, когда G целиком принадлежит некоторой прямой).

5. Если отображение множества M в множество G взаимо-однозначно, непрерывно, и обратное отображение также непрерывно, то такое отображение называется *топологическим* или *гомеоморфным*.

Кривая Пеано.

Пусть T - отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$, I – квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Назовём их отрезком и квадратом нулевого ранга. Концам отрезка T поставим в соответствие две вершины квадрата: $f(0) = (0, 0)$, $f(1) = (1, 0)$. Разобъём квадрат I на 4 меньших квадрата (первого ранга) прямыми $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, а отрезок T на 4 отрезка (первого ранга) точками $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$. Положим $f(\frac{1}{4}) = (0, \frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{4}) = (1, \frac{1}{2})$. Ставим в соответствие отрезок $T_1 = [0, \frac{1}{4}]$ квадрату $I_1(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2})$, отрезок $T_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ – квадрату $I_2(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1)$, отрезок $T_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ – квадрату $I_3(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1)$, отрезок $T_4 = [\frac{3}{4}, 1]$ – квадрату $I_4(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2})$. Для каждого отрезка первого ранга соответствующего ему квадрата первого ранга повторим такое же построение. И так далее. Говоря точнее, действуем по индукции.

Пусть квадрат разбит на 4^k квадратов k-го ранга, а отрезок – на 4^k отрезков k-го ранга, указаны образы концов отрезков и установлено взаимно-однозначное соответствие множества отрезков k-го ранга и множества квадратов k-того ранга, так что каждому отрезку поставлен в соответствие квадрат, в вершинах которого лежат образы обоих концов этого отрезка. Строим отрезки и квадраты $(k+1)$-го ранга так же, как построены отрезки и квадраты 1-го ранга, и аналогичным образом указываем образы концов.

Если число t отрезка T – двоично-рациональное, то есть имеет вид $\dfrac{p}{2^k}$, то на некотором шагу этого процесса будет указан его образ.

Пусть t – не двоично-рациональное число. Тогда возьмём систему отрезков 1-го, 2-го, $\ldots$, k-того, $\ldots$ рангов, содержащих точку t, и соответствующие им квадраты. Эти квадраты пересекаются по единственной точке. Положим $f(t)$ равным этой точке.

Листок 77д. Непрерывность в геометрии.

Задача 140. Доказать, что не существует гомеоморфного отображения отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Задача 141. Город A и город B соединены двумя дорогами, несамопересекающимися и непересекающими друг друга (дороги можно считать ломаными). Из города A в город B одновременно выехали по разным дорогам две машины и одновременно прибыли в город B. При этом машины были связаны верёвкой длиной 20 метров, и верёвка не порвалась (машины могли двигаться неравномерно, не сказано даже, что они шли всё время вперёд).
Доказать, что два воза с сеном, каждый радиуса 11 метров, не могут одновременно пройти по разным дорогам один из A в B, другой из B в A, не задев друг друга.

Задача 142. Доказать, что отображение $f(t)$, построенное на предыдущей странице, является непрерывным отображением отрезка на квадрат.

Определение. Разбиение треугольника T на треугольники T_i называется *триангуляцией*, если любые два треугольника T_i и T_k либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. Все вершины участвующих в разбиении треугольников называются *вершинами разбиения*.

Задача 143. Пусть дан треугольник T и его триангуляция. Если вершины T занумерованы цифрами 1, 2, 3, а остальные вершины разбиения как-то занумерованы этими же цифрами, но на стороне 1, 2 треугольника T встречаются только цифры 1 и 2, на стороне 2, 3 – только цифры 2 и 3, на стороне 1, 3 – только цифры 1 и 3, то найдётся треугольник триангуляции, вершины которого занумерованы всеми тремя цифрами.
(Это утверждеие носит название «леммы Шпернера»).

Задача 144. Теорема о неподвижной точке. При непрерывном отображении на себя плоского замкнутого треугольника найдётся неподвижная точка (вместо треугольника можно взять квадрат или круг).

Задача 145. Доказать, что при всяком непрерывном отображении отрезка на квадрат найдётся точка квадрата, прообраз которой содержит по меньшей мере три точки.

Листок 78д. Ряды.

Определение.
Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + \ldots$ сходится (к числу), то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ называется *абсолютно сходящимся.* Если ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + \ldots$ расходится (сходится к бесконечности), а ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ *сходится,* то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ называется *условно сходящимся.*

Задача 146. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Задача 147. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ абсолютно сходится,
то ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots$, полученный перенумерацией ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$, тоже сходится, и притом к той же сумме.
(*Перенумерация* – взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел на себя).

Задача 148. Приведите пример условно сходящегося ряда.

Задача 149. Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ условно сходится, то перенумерованием можно изменить его сумму.
Точнее: для любого числа B существует перенумерация такая, что ряд в результате сходится к B. Существует перенумерация, в результате которой ряд сходится к плюс бесконечности, к минус бесконечности. Существует перенумерация, в результате которой ряд не сходится ни в одном из перечисленных смыслов.

Задача 150. Пусть ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ и ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots$ состоят из положительных членов, расходятся и монотонно убывают (то есть для любого k $a_k > a_{k+1}$, $b_k > b_{k+1}$). Положим $c_k =$ минимум из a_k и b_k. Доказать, что ряд $c_1 + c_2 + \ldots + c_k + \ldots$ расходится.

Задача 151. Дан ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$. Если существует положительное $p < 1$ такое, что для каждого k, начиная с некоторого, $\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right| < p$, то ряд абсолютно сходится.

Задача 152. Если $\lim\limits_{k} |a_k|^{\frac{1}{k}} = p < 1$, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ абсолютно сходится.

Листок 79д. Дополнительные задачи по теории функций.

Задача 153. Построить функцию, определённую на всей числовой прямой и такую, что на любом интервале она принимает все действительные значения.

Задача 154. Построить функцию, определённую на канторовском множестве, непрерывную во всех его точках и такую, что множество её значений есть отрезок.

Задача 155. Построить функцию двух переменных $c = f(x, y)$, определённую на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и такую, что она в каждой точке непрерывна как функция от x при фиксированном y и непрерывна как функция от y при фиксированном x, и при этом в некоторой точке разрывна как функция двух переменных.

Задача 156. (*Трудная*). Доказать, что функция, описанная в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывна.

Определение. Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$, …, определённых на некотором множестве M, называется *сходящейся на множестве M к функции $f(x)$*, если для любого x из M и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что для любого натурального $k > N$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение. Последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$, …, определённых на некотором множестве M, называется *равномерно сходящейся на множестве M к функции $f(x)$*, если для любого положительного ε найдётся N такое, что для любого натурального $k > N$ и любого x из M выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Задача 157. Привести пример сходящейся, но не равномерно сходящейся последовательности функций.

Задача 158. Пусть последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$, заданных на отрезке M и непрерывных на M, сходится равномерно к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ непрерывна на M.

Задача 159. Привести пример сходящейся последовательности непрерывных функций, такой что предельная функция не является непрерывной.

Задача 160. (*Трудная*). Доказать, что функция, о которой говорится в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывной.

Часть 6. Интеграл, производная, теория объёмов и площадей.

Интеграл. Определения.

1. Функция $y = C(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если на отрезке имеется конечное число точек a_i, таких что $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$, и на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ $C(x)$ равно константе C_i.
2. *Интегралом* от ступенчатой функции $C(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма $C_0 \cdot (a_1 - a_0) + C_1 \cdot (a_2 - a_1) + C_2 \cdot (a_3 - a_2) + \ldots + C_{k-1} \cdot (a_k - a_{k-1})$.
Эта сумма обозначается $\int\limits_a^b C(x)\,dx$.
3. Пусть $y = f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a, b]$, а $C(x)$ – ступенчатая функция, заданная на том же отрезке. $C(x)$ называется *нижней ступенчатой функцией* для $f(x)$, если на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $C(x) \leqslant f(x)$. Если при этом на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $C_i =$ ТНГ $f(x)$ на этом интервале, то $C(x)$ называется *нижней функцией Дарбу*. Аналогично определяется *верхняя ступенчатая функция* и *верхняя функция Дарбу*.
4. Интеграл от нижней функции Дарбу называется *нижней суммой Дарбу*, интеграл от верхней функции Дарбу называется *верхней суммой Дарбу*.
5. Пусть $f(x)$ – функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Число m включаем в множество M, если m равно интегралу от некоторой нижней ступенчатой функции функции $f(x)$. ТВГ множества M называется *нижним интегралом функции* $f(x)$ на $[a, b]$; обозначение: н$\int\limits_a^b f(x)\,dx$. ТНГ множества интегралов от верхних ступенчатых функций функции $f(x)$ называется *верхним интегралом функции* $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается в$\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
6. Если верхний и нижний интегралы совпадают, то функция называется интегрируемой на $[a, b]$ и верхний (он же нижний) интеграл называется просто *интегралом* и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Листок 80. Упражнения на определение интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

Задача 1.

а) Для того, чтобы существовала хотя бы одна нижняя ступенчатая функция функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ограничена снизу на $[a, b]$.

б) Для того, чтобы существовала нижняя функция Дарбу, необходимо и достаточно, чтобы функция была ограничена снизу.

в) Для того, чтобы существовали нижний и верхний интеграл функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ограничена.

Задача 2. Нижний интеграл $f(x)$ на $[a, b]$ равен ТВГ множества НСД (нижних сумм Дарбу) при всевозможных разбиениях отрезка $[a, b]$. Аналогично для верхних.

Задача 3. В определениях предыдущей страницы интеграл от ступенчатой функции определяется дважды: первый раз в пункте 2, второй раз – в пункте 6, где определяется интеграл для любой, в том числе ступенчатой функции. Доказать, что эти определения согласованы, то есть доказать, что ступенчатая функция интегрируема (в общем смысле), что её интеграл (в смысле пункта 6) равен выражению, которое определяет интеграл от ступенчатой функции в пункте 2.

Задача 4. Если к разбиению добавить одну точку, то НСД не уменьшится, ВСД (верхняя сумма Дарбу) не увеличится.

Задача 5. Для любых двух разбиений A и B существует разбиение C такое, что НСД$(C) \geqslant$ НСД(A) и НСД$(C) \geqslant$ НСД(B).

Задача 6. На данном отрезке $[a, b]$ для данной функции $f(x)$ всякая НСД$\leqslant$всякой ВСД.

Задача 7. Обозначим через НСД$_k$ НСД, получающуюся при разбиении отрезка $[a, b]$ на k равных частей. Доказать, что ТВГ НСД$_k$=ТВГ НСД по множеству всех разбиений. Аналогично для ВСД.

Задача 8. Доказать, что интеграл не изменится, если функцию изменить в конечном числе точек.

Листок 81. Основные свойства интеграла.

Рассматриваются функции, заданные на некотором связанном подмножестве M числовой прямой и ограниченные на каждом отрезке, входящем в это подмножество. Говоря о каком-либо интеграле, всегда предполагаем, что отрезок интегрирования целиком входит в множество M.

Задача 9. Доказать, что н$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx \geqslant$ н$\int\limits_a^b f(x)\,dx +$ н$\int\limits_a^b g(x)\,dx$. (Для верхних интегралов – обратное неравенство).

Задача 10. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их сумма тоже интегрируема на отрезке $[a,b]$ и интеграл суммы функций равен сумме интегралов от них.

Задача 11. Если интегрируемую функцию умножить на константу C, то получится интегрируемая функция, и интеграл умножится на C.

Задача 12. Доказать для интегрируемой функции формулу:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Мы придадим смысл интегралу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ также и в том случае, когда $b<a$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Убедитесь в том, что формула предыдущей задачи верна при любых неравенствах между a, b и c.

Задача 13. Если растянуть ось x в k раз и преобразовать соответствующим образом пределы интегрирования, то интеграл умножится на k: $k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$.

Листок 82д. Непосредственное вычисление интегралов.

Все задачи этого листка легко решаются с помощью теоремы Ньютона-Лейбница, рассматриваемой в дальнейшем. Но интересно, что многие интегралы можно вычислить до того, как развёрнута теория.

Этот листок (как и два предыдущих) можно решать ещё до теории непрерывных функций и пределов и в основном даже до задач, посвящённых элеменатрным функциям, сразу после части 1 настоящего сборника.

Задача 14. Вычислить $\int\limits_0^1 x\,dx$.

Задача 15. Вычислить $\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

Задача 16. Вычислить $\int\limits_0^1 x^3\,dx$.

Задача 17. В предыдущих трёх примерах вычислить интегралы в пределах от a до b.

Задача 18. Вычислить $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0 < a < b)$.

Задача 19. Вычислить $\int\limits_a^b x^k\,dx$.

Задача 20. Рассмотрим функцию $P(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$. Убедитесь в том, что функция $P(x)$ удовлетворяет функциональному соотношению $P(x) + P(y) = P(x \cdot y)$ и монотонна. Тогда, по задаче 152 (листок 54) $P(x) = \log x$ (но пока неизвестно, по какому основанию).

Задача 21. Вычислить $\int\limits_a^b e^x\,dx$.

Листок 83. Задачи о существовании интеграла.

Задача 22. Привести пример функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, ограниченной, и при этом неинтегрируемой на этом отрезке.

Задача 23. Привести пример таких двух функций, чтобы неравенство задачи 9 было строгим.

Определение. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *равномерно непрерывной* на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $d > 0$ такое, что для любых двух чисел x_1 и x_2, входящих в область определения и таких, что $|x_1 - x_2| < d$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 24. Всякая функция, непрерывная на $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Задача 25. Привести пример функции, непрерывной на всей числовой прямой, ограниченной и не равномерно непрерывной на всей прямой.

Задача 26. Доказать, что всякая функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная на этом отрезке, интегрируема на нём.

Задача 27. Доказать, что функция, определённая на отрезке $[a, b]$, ограниченная и кусочно непрерывная, интегрируема на этом отрезке.
(Функция называется кусочно непрерывной на отрезке, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, на каждом из которых функция непрерывна).

Дополнительная.

Задача 28. (*Трудная*). Для того, чтобы функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, была интегрируема на нём, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a, b]$ и чтобы при этом для каждого $\varepsilon > 0$ нашлась система (конечная или счётная) интервалов, покрывающая все точки разрыва функции $f(x)$ и такая, что сумма длин этих интервалов меньше ε.
(Про множество, которое обладает свойством, сформулированным здесь для множества точек разрыва, говорят, что оно имеет меру нуль.
Сумма бесконечного числа длин понимается как сумма ряда).

Листок 84. Теоремы об интегралах.

Задача 29. Теорема о среднем. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке. Тогда на этом отрезке найдётся такая точка x_0, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(x_0) \cdot (b-a)$.

Задача 30. Пусть функция $f(t)$ определена на некотором отрезке и интегрируема на нём. Рассмотрим интеграл как функцию его верхнего предела: $P(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ (a и x принадлежат отрезку, на котором определена $f(t)$).
Тогда $P(x)$ непрерывна во всех точках этого отрезка.

Задача 31. В условиях предыдущей задачи $P(x)$ имеет производную при всяком x, при котором $f(x)$ непрерывна. При этих x $P'(x) = f(x)$.

Дополнительные.

Задача 32. Вторая теорема о среднем. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $f(x)$ и $p(x)$, причём $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $p(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \cdot p(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$ (на самом деле, по задаче 28, достаточно требовать, чтобы $p(x)$ была интегрируемой), и $p(x) > 0$ при всех x. Тогда найдётся точка x_0 отрезка $[a, b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x) \cdot p(x)\,dx = f(x_0) \cdot \int\limits_a^b p(x)\,dx$.

Задача 33. Второе определение интеграла. Для того, чтобы число C было интегралом функции $f(x)$ от a до b, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $D > 0$, что как бы отрезок $[a, b]$ ни был разбит на произвольное число N отрезков D_i (длина отрезка D_i обозначается через d_i) и как бы на этих отрезках ни были выбраны точки x_i, будет выполняться неравенство:
$|d_1 \cdot f(x_1) + d_2 \cdot f(x_2) + \ldots + d_N \cdot f(x_N) - C| < \varepsilon$.

Листок 85. Задачи на определение производной.

При изучении производных обычно применяются некоторые специальные термины и обозначения. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0)$, то говорят, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если она дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она дифференцируема на этом множестве.

При рассмотрении производной в точке x_0 часто удобно переходить к новой переменной $\Delta x = x - x_0$ (Δx – единое обозначение для новой переменной, читается: дельта икс; Δx называется *приращением аргумента*). Тогда определение производной выглядит так: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ часто обозначается через Δy (дельта игрек); она называется *приращением функции.*

Задачи.

Задача 34. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Задача 35. Привести пример функции, которая определена в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0, но не дифференцируема в ней.

Задача 36. Привести пример функции, которая дифференцируема в точке x_0 и во всех точках, кроме x_0, разрывна.

Задача 37. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то найдутся такая окрестность U точки x_0 и такие две невертикальные прямые $L1$ и $L2$, проходящие через точку $(x_0, f(x_0))$, что для всякого x_1 из U, отличного от x_0, точка $(x_1, f(x_1))$ лежит на вертикальной прямой $x = x_1$ между точками пересечения этой прямой с $L1$ и $L2$.

Задача 38. Если $f'(x_0) > 0$, то существует окрестность U точки x_0 такая, что для всякого x, лежащего в этой окрестности справа от x_0, $f(x) > f(x_0)$, а для всякого x, лежащего в U слева от x_0, $f(x) < f(x_0)$.

Задача 39. Верно ли, что если $f'(x_0) > 0$, то найдётся окрестность точки x_0, в которой функция $y = f(x)$ монотонно неубывает?

Задача 40. Привести пример функции $f(x)$, которая определена на всей прямой, имеет всюду производную, но $f'(x)$ не является непрерывной функцией (имеет точку разрыва; в этой точке $f'(x)$ тоже должна существовать).

Листок 86. Теоремы о производных.

Задача 41. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, и всюду внутри него дифференцируема, то всюду внутри этого отрезка $f'(x) \geqslant 0$.

Задача 42. Если всюду внутри отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ дифференцируема, и $f'(x) > 0$, то $f(x)$ – монотонно возрастающая функция.

Задача 43. Будут ли верны утверждения двух предыдущих задач, если в первой из них заменить знак «$\geqslant$» на «$>$», а во второй – наоборот?

Определение. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для каждого x из этой окрестности, входящего в область определения $f(x)$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Задача 44. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке локального максимума, то $f'(x_0) = 0$.
Иными словами: если $f(x_0)$ – локально максимальное значение функции $f(x)$, то либо x_0 не есть внутренняя точка области определения функции $f(x)$, либо $f(x)$ не дифференцируема в точке x_0, либо $f'(x_0) = 0$.
Аналогично для локально минимальных значений.
Верно ли, что если $f'(x_0) = 0$, то x_0 – точка локального максимума или локального минимума функции?

Задачи 41, 42 и 44 позволяют с помощью производных находить участки монотонного роста, участки монотонного убывания и максимальные и минимальные значения функции.

Задача 45. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), и $f(a) = f(b)$, то на интервале (a, b) найдётся точка C такая, что $f'(C) = 0$.

Задача 46. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то на интервале (a, b) найдётся точка C такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(C)$ (то есть найдётся касательная, параллельная хорде).
Этот факт называется *теоремой Лагранжа* или *формулой конечного приращения*. Формулу эту часто записывают так: $\Delta y = f'(C) \cdot \Delta x$.

Задача 47. Если $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала, то $f(x)$ есть константа.

Задача 48. Производная пробегает все промежуточные значения. Точнее: если $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и в точках c и d этого интервала $f'(x)$ принимает значения M и N, то для всякого P, заключённого между M и N, найдётся точка p между c и d такая, что $f'(p) = P$.

Листок 87д. Производные справа и слева.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой правой полуокрестности точки x_0. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при x стремящемся к x_0 справа*, если для любого положительного ε найдётся положительное d такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам $0 < x-x_0 < d$, выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Обозначние: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Определение. *Правой производной функции $f(x)$ в точке x_0* (обозначение: $f'_{\text{пр}}(x_0)$) называется предел отношения $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при x стремящемся к x_0 справа.
Аналогично определяются *предел слева* и *левая производная.*

Задачи.

Задача 49. Для того, чтобы существовала производная функции $f(x)$ в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы существовали правая и левая производные в этой точке и они были равны.

Задача 50. Для правой производной сформулировать и доказать утверждение, аналогичное задаче 37 (листок 85).

Задача 51. Если функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b), то в каждой точке этого интервала у неё есть правая и левая производные.
(Определение выпуклой функции см. в листке 56).

Задача 52. Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что в каждой точке этой окрестности, кроме точки x_0, $f(x) < f(x_0)$. Доказать, что для любой функции множество точек строгого локального максимума конечно или счётно.

Задача 53. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале. Доказать, что множество точек, в которых правая и левая производные обе существуют, но не равны друг другу, конечно или счётно.

Задача 54. Построить функцию, которая непрерывна на отрезке, имеет всюду, кроме множества меры 0, производную, равную нулю, и при этом не является константой.
(Определение множества меры 0 см. в листке 83).

Задача 55. Построить функцию, непрерывную на отрезке $[a,b]$, имеющую на интервале (a,b) ограниченную производную, но не имеющую правой производной в точке a.

Задача 56. Если f в точке x_0 непрерывна, справа от x_0 имеет производную, и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$ существует, то $f'_{\text{пр}}(x_0)$ существует и равна этому пределу.

Листок 88. Дифференцирование операций.

Задача 57. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)+g(x)$ дифференцируема в точке x_0, и её производная равна $f'(x)+g'(x)$. Аналогично для разности.

Задача 58. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функция $f(x)\cdot g(x)$ дифференцируема в точке x_0, и её производная равна $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Задача 59. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, и $g(x_0)\neq 0$, то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x_0, и её производная равна
$$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Задача 60. Пусть функция $F(x)$ представлена как сложная функция: $F(x)=P(b(x))$. Если $b(x)$ дифференцируема в точке x_0, $P(y)$ дифференцируема в точке $b(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0)=P'(b(x_0))\cdot b'(x_0)$.

Задача 61. Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности U точки x_0, имеет в точке x_0 производную, отличную от нуля, и существует обратная функция $g(y)$, определённая в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$ и имеющая все значения в U, то $g(y)$ имеет в точке y_0 производную, и $g'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Дальше нам необходима формула $(e^x)'=e^x$ (в дополнительных задачах 136, 137 листка 76 в частности нужно было вывести эту формулу). Этот факт можно получить из задачи 113 (листок 73), которая там предлагалась в качестве дополнительной. Решить задачу 113 можно либо на основе комбинации рассуждений задач 110 (листок 73) и 85, 86 (листок 70), либо с помощью задачи 129 (листок 51). Во всех случаях для проведения этих рассуждений нужно уже в какой-то степени изощрённое владение типичными конструкциями математического анализа. Если вы пока не в состоянии пройти ни по одному из путей, ведущих к формуле $(e^x)'=e^x$, примите её на веру и используйте в дальнейшем.

Задача 62. Найти $(\ln x)'(x>0)$. (Задача 138, листок 76).

Задача 63. Найти $(a^x)'$ ($a>0$, x любое). (Задача 137, листок 76).

Задача 64. Найти $(x^a)'$ $(x>0, a\neq 0)$.

Для нахождения производной от выражения, содержащего степень, применяют следующий приём: $a(x)^{b(x)}=e^{b(x)\cdot\ln a(x)}$, и задача свелась к вычислению $(e^x)'$, $(\ln x)'$ и применению задач 58 и 60.

Листок 89. Таблица производных.

Вывести следующие формулы (или вспомнить их вывод):

Задача 65. $(x^k)' = kx^{k-1}$ (k целое, отличное от 0).
$(x^a)' = ax^{a-1}$ ($a \neq 0$, $x > 0$).
$(\sqrt[k]{x})' = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[k]{x^{k-1}}}$ (k целое нечётное, x любое $\neq 0$).

Задача 66. $(e^x)' = e^x$.
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0$).
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Задача 67. $(\sin x)' = \cos x$.
$(\cos x)' = -\sin x$.
$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
$(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Задача 68. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$.

Листок 90. Исследование на монотонность.

Построить графики следующих функций (с нахождением участков монотонности и локальных максимумов и минимумов).

Задача 69. $f(x) = 2 + x - x^2$.

Задача 70. $f(x) = 3x - x^3$.

Задача 71. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Задача 72. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x > 0)$.

Задача 73. $f(x) = x + \sin x$.

Задача 74. $f(x) = x + |\sin 2x|$.

Задача 75. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$.

Задача 76. $f(x) = x^k \cdot e^{-x}$ $(k > 0,\ x \geqslant 0)$.

Задача 77. $f(x) = x \cdot (\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x)$.

Задача 78. Доказать, что многочлен есть при достаточно большом x монотонная функция.

Задача 79. $f(x) = 2x - \operatorname{tg} x$.

Задача 80. $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$.

Задача 81. $f(x) = \arcsin x - x$.

Листок 91. Связь с интегралом.

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $R(x)$ определены на некотором связном подмножестве M числовой прямой (интервале, полупрямой и т.п.). Функция $R(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если в каждой точке множества M $R(x)$ дифференцируема и $R(x)' = f(x)$.

Задача 82. Если $R(x)$ и $P(x)$ – две первообразные одной и той же функции $f(x)$, определённой на связном подмножестве M числовой прямой, то $R(x)-P(x)$ есть постоянная.

Задача 83. $R(x)$ называется *обобщённой первообразной* функции $f(x)$, если $R(x)$ непрерывна всюду, дифференцируема всюду, кроме множества точек, конечного на каждом интервале, и всюду, где она дифференцируема, $R'(x) = f(x)$.
Сделать предыдущую задачу для обобщённых первообразных.

Задача 84. Формула Ньютона-Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $R(x)$ – первообразная $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = R(b) - R(a).$$

Указание. Воспользоваться задачей 31 листка 84.

Задача 85. Обобщить предыдущую теорему на случай, если множество точек разрыва функции $f(x)$ конечно на каждом интервале ($f(x)$ ограничена).

Дополнительные.

Задача 86. Формула замены переменных. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $g(t)$ дифференцируема на отрезке $[c, d]$, монотонно возрастает, $g'(t)$ непрерывна, и $g(c) = a$, $g(d) = b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

Задача 87. Обобщить предыдущую задачу на случай, когда $g(t)$ немонотонна, но отрезок $[c, d]$ распадается на конечное число участков, на которых $g(t)$ монотонна.

Задача 88. Формула интегрирования по частям. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ непрерывны, то

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int\limits_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

Листок 92д. Таблица первообразных.

Первообразную функции $f(x)$ принято записывать как интеграл без указания пределов (и называть *неопределённым интегралом*), например: $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$

Найти первообразную для функций:

Задача 89. x^a $(x > 0,\ a \neq -1)$.

Задача 90. $\dfrac{1}{x}$ в области $x > 0$ и в области $x < 0$.

Задача 91. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Задача 92. Проверить, что $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Задача 93. Найти первообразную для функции: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 94. Проверить, что $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$

Найти первообразные для функций:

Задача 95. a^x $(a > 0)$.

Задача 96. $\sin x$, $\cos x$.

Задача 97. $\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Листок 93. Исследование на выпуклость.

Определение. *Второй производной* $f''(x)$ функции $f(x)$ называется производная от функции $f'(x)$. $(k+1)$*-й производной* называется производная от k-той производной.

Задача 98. Если всюду на интервале (a, b) $f''(x) > 0$, то $f(x)$ выпуклая на этом интервале.
(Определение выпуклости см. в листке 56).

Определение. *Точкой перегиба* графика называется такая точка, в которой участок выпуклости граничит с участком вогнутости.

Построить графики следующих функций (найти участки монотонности, минимумы и максимумы, участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба; встречающиеся при этом уравнения разрешается решать приближённо с такой точностью, чтобы уловить характер графика).

Задача 99. $3x^2 - x^3$.

Задача 100. $x + \sqrt[3]{x^5}$.

Задача 101. $\sqrt{1 + x^2}$.

Задача 102. $x + \sin x$.

Задача 103. e^{-x^2}.

Задача 104. $\ln(1 + x^2)$.

Задача 105. $x \sin(\ln x)$ $(x > 0)$.

Задача 106. x^x $(x > 0)$.

Задача 107. Сколько решений имеет уравнение $2^x = x^{100}$?

Листок 94д. Задачи про гладкие кривые.

Определение. Если функции $x = f(t)$, $y = g(t)$, параметрически задающие кривую, дифференцируемы, причём производные не равны нулю одновременно, то такая кривая называется *гладкой*. Вектор с проекциями $f'(t)$, $g'(t)$ есть *вектор касательной.* Если t интерпретировать как время, то вектор касательной имеет физический смысл *скорости.* Разумеется, каждую гладкую кривую можно проходить с разной скоростью. Это соответствует различным способам параметрического задания одной и той же кривой.

Определение. Гладкая кривая называется *замкнутой*, если её начальная и конечная точки совпадают, и начальный и конечный вектор касательной совпадают. Можно считать, что замкнутая гладкая кривая есть образ окружности при отображении, которое задаётся дифференцируемыми (на окружности) функциями.

Задача 108. Если $f(t)$ и $g(t)$ имеют непрерывные производные, не обращаются в нуль одновременно при t, принадлежащем отрезку $[a, b]$, то отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число участков таких, что часть кривой, соответствующая каждому участку, представляет собой либо график функции $y = r(x)$, либо график функции $x = s(y)$ (либо и то и другое вместе).

Задача 109. Если гладкая кривая, заданная параметрически, соединяет две различные точки плоскости A и B, то на кривой найдётся точка, в которой касательная параллельна отрезку AB.
Аналитическая формулировка:
Если $f(t)$ и $g(t)$ – две дифференцируемые функции, определённые на отрезке $[a, b]$, причём их производные не обращаются в нуль одновременно, и $g(a) \neq g(b)$, то найдётся такое число C из отрезка $[a, b]$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}.$$

Указание. Если вы будете делать эту задачу в геометрической формулировке, не забывайте, что мы не формулировали геометрического определения касательной. Но вы можете построить «*опорную прямую*» – прямую, которая имеет хотя бы одну общую точку с кривой, параллельна заданному направлению, и вся кривая лежит от неё по одну сторону.

Задача 110. Правило Лопиталя. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые при x стремящемся к x_0, $f'(x)$ и $g'(x)$ не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки x_0, кроме самой точки x_0, и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, и эти пределы равны.

Листок 95д. Формула Тейлора.

Задача 111. Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$. Доказать, что коэфициенты многочлена связаны со значениями производных этого многочлена в точке 0 формулой $a_n = \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$ (здесь через $P^{(n)}(x)$ обозначена n-ая производная функции $P(x)$; сама функция считается нулевой производной).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (в этом листке всегда подразумевается, что x берётся из этой окрестности) и имеет в этой окрестности производные до $(k-1)$-го порядка включительно, а в самой точке x_0 ещё и производную k-того порядка. Тогда можно написать:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + p(x).$$

Эта формула бессодержательна, если ничего не утверждается относительно $p(x)$ (функция $p(x)$ равна просто разности между $f(x)$ и остальными членами правой части).

Задача 112. Доказать, что $p(x)$ является бесконечно малой при x стремящемся к x_0, причём её порядок более высокий, чем $(x - x_0)^k$.

Указание. Многократно воспользоваться правилом Лопиталя для вычисления предела отношения $\dfrac{p(x)}{(x - x_0)^k}$. Если вам поможет более сильное предположение, что $f^{(k)}(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0, воспользуйтесь сначала этим предположением, а затем сделайте задачу в общем виде.

Задача 113. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если $f^{(k)}(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0, то для каждого x из этой окрестности найдётся $y(x)$, который лежит между x_0 и x, такой, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(y(x))}{k!}(x - x_0)^k.$$

Указание. Написать эту формулу для функции $f^{(k-1)}(x)$:
$f^{(k-1)}(x) = f^{(k-1)}(x_0) + f^{(k)}(y(x)) \cdot (x - x_0)$ (это есть формула конечных приращений), убедиться из этой формулы, что $f^{(k)}(y(x))$ есть непрерывная и ограниченная, а потому интегрируемая функция от x, проинтегрировать обе части в пределах от x_0 до x и воспользоваться второй теоремой о среднем. Всю эту процедуру проделать $k-1$ раз.

Задача 114. Доказать, что $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ (сходимость и равенство имеют место при любых x).

Задача 115. Аналогично, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$.

Дифференциальные уравнения.

Областью на плоскости называется любое открытое связное множество. (*Открытым* называется такое множество, что если точка M входит в него, то и некоторый круг с центром в точке M целиком входит в него; *связным* называется такое множество, что любые две его точки можно соединить внутри множества ломаной).

Пусть на области G задано поле направлений. Это значит, что каждой точке поставлено в соответствие направление. *Направлением* называется класс параллельных между собой прямых (так что направления, например, вверх и вниз не различаются). Поле направлений можно задавать форумлой вида: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{F(x,y)}{P(x,y)}$, где $F(x,y)$ и $P(x,y)$ — две функции двух переменных, определённые в области G и не обращающиеся в нуль одновременно. Эту формулу нужно понимать так: если в некоторой точке знаменатель отличен от 0, то правая часть есть тангенс угла между осью x и любой прямой этого направления. Если же знаменатель равен нулю, то направление вертикально. Мы будем рассматривать непрерывное поле направлений, которое можно определить, например, тем, что $F(x,y)$ и $P(x,y)$ — непрерывные функции двух переменных.

Гладкая кривая называется *интегральной кривой* поля направлений, если в каждой точке её вектор касательной имеет направление, соответствующее этой точке (направление вектора мы не отличаем от противоположного направления).

Решить дифференциальное уравнение (*дифференциальным уравнением* называется вышеприведённая запись поля направлений) — значит найти все интегральные кривые поля направлений. В типичном случае этих кривых бывает бесконечно много. Если известно, что интегральная кривая должна пройти через некоторую фиксированную точку, то такие добавочные сведения обычно позволяют из бесконечного множества интегральных кривых выделить одну кривую. В следующем листке вам предлагаются в виде задач точные теоремы на этот счёт.

По задаче 108 листка 94, вся интегральная кривая представляется в виде суммы участков, каждый из которых есть либо график функции от x, либо график функции от y. Если дифференциальное уравнение имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = F(x,y)$, где $F(x,y)$ — непрерывная функция двух переменных, то вся интегральная кривая есть график функции от x. В этом случае определение интегральной кривой принимает вид:

Решением дифференциального уравнения $y' = F(x,y)$ называется такая функция $y = p(x)$, что при каждом x из её области определения $p'(x) = F(x, p(x))$.

Листок 96д. Задачи на дифференциальные уравнения.

Задача 116. Найти все решения уравнения: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ (область G — вся плоскость, кроме точки $(0, 0)$).

Задача 117. Привести пример уравнения вида $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью такого, что существуют два решения $p_1(x)$ и $p_2(x)$, проходящие через одну и ту же точку и не совпадающие.

Задача 118. Пусть функция $f(x, y)$ обладает следующим свойством: существует константа K такая, что для любых x, y_1 и y_2 таких, что точки (x, y_1) и (x, y_2) входят в G, выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K \cdot |y_1 - y_2|;$$

(считайте для простоты, что G есть квадрат).
Тогда через любую точку области G проходит не более чем одно решение уравнения $y' = f(x, y)$.

Задача 119. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ (G — вся плоскость, кроме точки $(0, 0)$).

Задача 120. Решить уравнение: $y' = y$ (G — вся плоскость).

Задача 121. Теорема существования. Пусть G — квадрат, $f(x, y)$ непрерывна на G, $M(x_0, y_0)$ — внутренняя точка G. Тогда существует окрестность точки x_0 такая, что в ней определена функция $y = p(x)$, удовлетворяющая уравнению $y' = f(x, y)$ и проходящая через точку M.

Указание. Рассмотрим некоторую правую полуокрестность точки x_0. Функция $y = v(x)$, проходящая через точку $M(x_0, y_0)$, называется «верхней», если в каждой точке этой полуокрестности $v'(x) \geqslant f(x, v(x))$. Верхние функции существуют. Теперь для каждого x этой полуокрестности определим число $t(x)$ как ТНГ значений всех верхних функций в этой точке.

Определение площади и объёма.

Определение площади.

1) Пусть на плоскости выбрана декартова система координат, в частности, выбрана единица длины.

2) Для каждого натурального числа p возьмём число $D = \dfrac{1}{2^p}$. Проведём все прямые $x = kD$ и $y = kD$, где k — любое целое число. Этим плоскость разбивается на квадраты со стороной D. *Площадью такого квадрата* называется число D^2. Всякая конечная система таких квадратов при данном p называется *элементарной* фигурой (квадраты считаются замкнутыми). *Площадью элементарной фигуры* называется сумма площадей составляющих её квадратов.

3) Пусть A — ограниченое множество на плоскости. *Верхней площадью* A называется точная нижняя грань площадей всевозможных элементарных фигур, целиком покрывающих фигуру A.

4) *Нижней площадью фигуры* A называется точная верхняя грань площадей элементарных фигур, целиком содержащихся в A.

5) Если верхняя и нижняя площади фигуры A совпадают, то фигура A называется *квадрируемой*, а верхняя и нижняя площади её называются *площадью фигуры* A.

Определение объёма в точности повторяет определение площади. Нужно только все двумерные понятия заменить на соответствующие трёхмерные (плоскость заменить пространством, квадраты — кубами, объёмом куба называть куб его длины, слово «квадрируемость» заменить на «кубируемость» и слово «площадь» — на «объём»).

Точка x *входит в границу множества* M, если любая окрестность точки x содержит точку из M и точку из дополнения M (*окрестностью* в пространстве называется любой шар, содержащий нашу точку). *Границей множества* называется множество точек границы множества.

Листок 97д. Квадрируемость и кубируемость.

Исходя из определений предыдущей страницы можно доказать все обычные свойства площади и объёма ограниченного множества (только такие мы рассматриваем); этому посвящены листки 97-99. Но пока эти свойства не доказаны, нужно иметь в виду, что
1). Площадь элементарной фигуры имеет два определения, и пока не доказано, что они приводят к одному числу;
2). Не доказано, что площадь квадрата, не являющегося элементарной фигурой, равна квадрату его стороны;
3). Не доказано, что площади равных фигур равны, в частности не доказано, что площадь не меняется при повороте фигуры.
(Аналогичное замечание для объёмов).
Задачи.
Задача 122. Доказать, что верхняя площадь любого отрезка равна 0. Верхний объём любого плоского прямоугольника в пространстве равен 0. (Тем самым отрезок на плоскости квадрируем, прямоугольник в пространстве кубируем).

Задача 123. Если прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) является элементарной фигурой (то есть должным образом расположен), то он квадрируем (кубируем), два определения площади (объёма) для него приводят к одному числу, и его площадь (объём) есть произведение длин его сторон.

Задача 124. Если стороны прямоугольника параллельны координатным осям, то он квадрируем, и его площадь равна произведению его сторон. Аналогичное утверждение про объём параллелепипеда.

Задача 125. Элементарная фигура квадрируема (кубируема), и два определения её площади (объёма) приводят к одному числу.

Задача 126. Для любого множества нижняя площадь (объём) не превышает верхней площади (объёма).

Задача 127. Придумать плоское множество, у которого верхняя и нижняя площадь не равны.

Задача 128. Для того, чтобы множество было квадрируемо, необходимо и достаточно, чтобы верхняя площадь его границы была равна нулю. Аналогично для объёмов.

Задача 129. Верхняя площадь дуги окружности равна нулю. Верхняя площадь графика непрерывной функции, заданной на отрезке, равна нулю (при любой ориентации графика относительно осей).

Задача 130. Докажите равенство нулю верхних объёмов ограниченного куска плоскости, сферы, ограниченной конической поверхности.

Тем самым квадрируемы (кубируемы) сами эти множества и множества, для которых они служат границей.

Листок 98д. Теоремы об объёмах и площадях.

Задача 131. Пусть A и B — два непересекающиеся множества. Доказать, что сумма нижних площадей A и B не больше, чем нижняя площадь их объединения, сумма верхних площадей не меньше, чем верхняя площадь объединения.
Аналогично для объёмов.

Задача 132. Привести пример таких множеств, чтобы в предыдущей задаче имели место строгие неравенства.

Задача 133. Если A и B — два непересекающихся квадрируемых множества, то их объединение есть квадрируемое множество, и его площадь равна сумме площадей A и B.
Аналогично для объёмов.

Задача 134. Площадь (объём) фигуры не меняется в результате параллельного переноса этой фигуры.

Задача 135. Если квадрируемая фигура разбита прямой на две части A и B, затем A и B как-то параллельно перенесены (не одинаково) так, что получились фигуры A' и B' соответственно, причём общая часть A' и B' имеет площадь, равную нулю, то фигура, состоящая из A' и B', тоже квадрируема, и её площадь равна площади первоначальной фигуры.
Аналогично для объёмов трёхмерных фигур.

Операция получения новой фигуры описанным методом называется *переслаиванием.*

Задача 136. Пусть на плоскости дан квадрат I со стороной a, причём его стороны не параллельны осям. Тогда с помощью операции переслаивания, проведённой несколько раз, можно из него получить прямоугольник со сторонами, параллельными осям, причём произведение сторон этого прямоугольника равно квадрату числа a.

Отсюда следует, что площадь любого квадрата со стороной a равна a^2. Аналогичная теорема для куба сложнее (см. 139, 140).

Задача 137. Площади двух равных фигур на плоскости равны.

Задача 138. Если плоскость растянуть (сжать) в каком-либо направлении в k раз, то все квадрируемые фигуры останутся квадрируемыми, и их площадь увеличится (уменьшится) в k раз.

Задача 139. Если S — прямоугольный параллелепипед с ребром a, не перпендикулярным и не параллельным плоскости xOy, и такой, что проекция a на ось c больше удвоенной диагонали его поперечного сечения (то есть сечения, перпендикулярного к a), то существует горизонтальная плоскость (параллельная xOy), которая пересекается с S по параллелограмму, причём площадь его во столько раз больше площади поперечного сечения S, во сколько раз a больше своей проекции на ось c.

Задача 140. Любой куб с ребром a переслаивается в параллелепипед с параллельными осям сторонами, произведение которых $= a^3$.

Задача 141. Объёмы равных пространственных фигур равны.

Листок 99д. Применение интегралов.

Задача 142. Непосредственно применяя определение площади, вычислить площадь круга радиуса r.

Задача 143. Если плоская фигура S ограничена отрезком $[a, b]$ числовой оси, графиком положительной непрерывной функции $f(x)$, определённой на этом отрезке, и вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b, то эта фигура квадрируема, и её площадь равна интегралу функции $f(x)$ в пределах от a до b.

Для вычисления объёмов необходимо определить интеграл от функции двух переменных $c = f(x, y)$ по области S. Это определение можно строить так:

Пусть область S как-то разбита на конечное число квадрируемых частей $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (площади этих частей обозначим соответственно $P_1, P_2, \ldots, P_k$). Функция, которая на каждой такой части постоянна, и её значение R_i на ней не больше ТНГ значения $f(x, y)$ на этой (i-той) части, называется *нижней функцией. Интегралом от нижней функции* называется число $R_1 \cdot P_1 + R_2 \cdot P_2 + \ldots + R_k \cdot P_k$. ТВГ интегралов всех нижних функций при всевозможных разбиениях S называется *нижним интегралом* функции $f(x, y)$. Аналогично определяется *верхний интеграл.* Если нижний и верхний интеграл совпадают, то функция назвается *интегрируемой*, а её нижний (он же верхний) интеграл называется *интегралом от этой функции по области* S. Обозначение: $\iint\limits_S f(x, y) dS$.

Задача 144. Доказать, что пространственная фигура, ограниченная квадрируемой областью S плоскости, непрерывной положительной функцией, заданной на S, и вертикальной цилиндрической поверхностью, состоящей из вертикальных прямых, проходящих через границу S, кубируема, и её объём равен $\iint\limits_S f(x, y) dS$.

Задача 145. Вывести формулу для объёма прямого кругового конуса с основанием, площадь которого равна S и высотой H.

Задача 146. Доказать, что объём полушара радиуса 1 равен $\int\limits_0^1 2r \cdot \sqrt{1 - r^2} dr$. (Указание: сравнить определение интеграла функции двух переменых и интеграла функции одного переменного).

Задача 147. Доказать, что объём шара равен $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r — радиус).

Одобрено методическим
объединением учителей математики
школы №179 Фрунзенского района
Директор школы

КМО Госплан СССР Заказ 3005 Тираж 40 1971 г. 6