

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

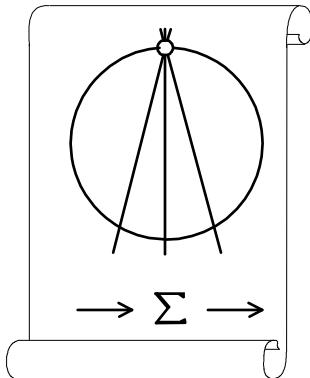
Год двадцать пятый

№ 4 (100), часть II

октябрь - декабрь 2021 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 4 (100), 2021 г., часть II

© “Математическое образование”, составление, 2021 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2021 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 17.01.2022 г.

Стиль верстки разработан С. Кулешовым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (100), октябрь – декабрь 2021 г., часть II

Содержание

К юбилейному выпуску журнала “Математическое образование”

От редакции. 25 лет и 100 выпусков третьей серии журнала
“Математическое образование”

2

Учащимся и учителям средней школы

В. Б. Дроздов. Две заметки по геометрии	3
Б. Л. Дружинин. Логике вопреки	6
А. М. Иглицкий. О точках многократных пересечений диагоналей правильного многоугольника	9
Л. Штейнгарц. Антимагические квадраты и их обобщения	19

Студентам и преподавателям математических специальностей

В. И. Войтицкий. Подарки от Деда Мороза или вариации на темы классиков	28
В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова. О некоторых свойствах функций, характеризуемых нулевыми интегралами	38
С. В. Жаров, Л. Б. Медведева. Поверхности второго порядка как геометрические места точек в пространстве	49
В. В. Ивлев, Е. А. Кривошней. Аппроксимация уравнений Пфаффа многих переменных	57
Е. Г. Смольянова. Геометрический узор как предельный цикл	63
Т. М. Иванова, В. Б. Шерстюков. Об одном симметричном неравенстве	69

Информация

От редакции. О деятельности ФМОП в 2021 г.

75

К юбилейному выпуску журнала “Математическое образование”

25 лет и 100 выпусков третьей серии журнала “Математическое образование”

От редакции

Прошло 25 лет с начала выпуска в 1997 г. третьей серии журнала “Математическое образование”. Представляем вниманию читателей юбилейный 100-й выпуск журнала.

Поздравляем с этим знаменательным событием всех сотрудников редакционной коллегии, технический персонал, обеспечивающий набор, корректуру, верстку, изготовление тиража, транспортировку, хранение и распространение экземпляров журнала, поддержку Интернет-страницы журнала и загрузку в Научную электронную библиотеку и базы РИНЦ и Math-net, а также всех авторов и читателей!

Особая благодарность учредителю и издателю журнала — Фонду математического образования и просвещения — в лице Генерального директора Комарова Станислава Игоревича за обеспечение материальных и организационных возможностей выпуска журнала в течение 25 лет, за неослабное внимание к нуждам персонала, запросам и пожеланиям авторов и читателей.

Юбилейный номер журнала впервые выходит в 2-х частях. Эту возможность дает большой запас материалов в редакционном портфеле, что говорит о заметной популярности издания среди работников в области математического образования.

В первой части приведены некоторые сравнительные статистические данные по трем периодам выпуска журнала: 1912–1917 гг., 1928–1930 гг. и 1997–2021 гг.

Даны краткие сведения обо всех действующих членах редколлегии по состоянию на данный момент. Все они предоставили материалы для публикации в первой части юбилейного номера.

Далее идут статьи авторов, специально приглашенных редакцией напечатать свои материалы в юбилейном номере. В основном это самые активные авторы третьей серии журнала, имеющие наибольшее число публикаций за прошедшие 25 лет.

Во второй части выпуска напечатаны материалы, принятые к публикации в обычном порядке¹.

В этой части данного выпуска мы постарались представить возможно более широкий спектр тем в области математического образования, освещаемых нашим изданием.

Желаем всем сотрудникам и читателям журнала здоровья, благополучия, творческих и жизненных успехов и надеемся на дальнейшее плодотворное сотрудничество!

От имени редакционной коллегии
журнала “Математическое образование”
главный редактор
Имайкин Валерий Марсович.

¹ Поступающие в редакцию материалы регистрируются хронологически и, в случае принятия к публикации, обычно в той же последовательности и печатаются, за редкими исключениями.

Две заметки по геометрии

B. B. Дроздов

В первой заметке рассказывается, как автор, не планируя этого заранее, получил не очевидное двойное геометрическое неравенство. Во второй предлагается короткое, простое и легкое для запоминания доказательство теоремы Стюарта.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ p = \frac{a+b+c}{2} \end{cases}$$

получим формулу площади S треугольника ABC , выраженную через его стороны a, b, c :

$$S = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \quad (1)$$

Теперь выразим площадь треугольника через его медианы m_a, m_b, m_c . См. рис. 1.

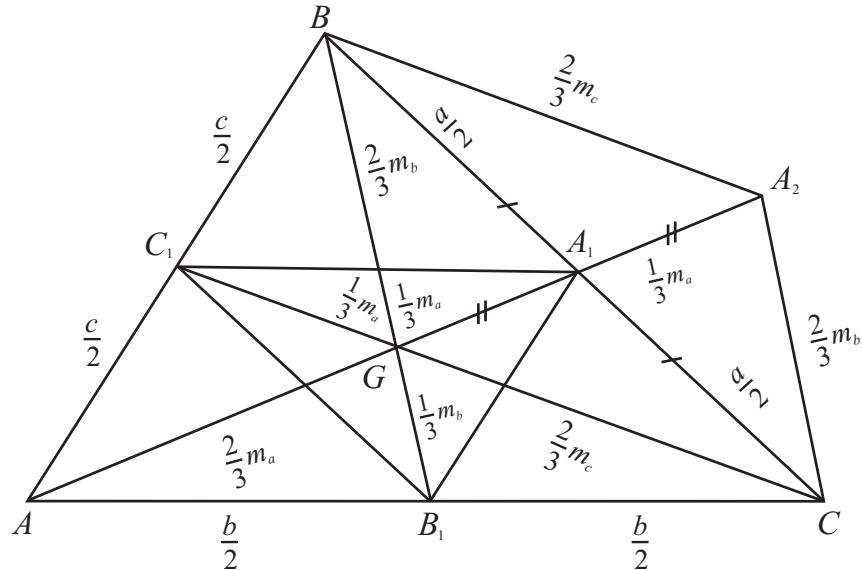


Рис. 1.

Будем считать известным математическим фактом то, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Продолжим медиану $AA_1 = m_a$ на одну третью часть: $A_1A_2 = \frac{1}{3}m_a$ и соединим точку A_2 с вершинами треугольника B и C .

Очевидно, что $BGCA_1$ — параллелограмм, тогда стороны треугольника BGA_2 , площадь которого $\frac{S}{3}$, равны $\frac{2}{3}m_a, \frac{2}{3}m_b, \frac{2}{3}m_c$. Применяя формулу (1), получим:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) сразу следует:

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} = \frac{9}{16} \cdot \frac{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}. \quad (3)$$

Из треугольников AGB , AGC , BGC соответственно имеем:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c, \\ \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b, \\ \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a. \end{cases}$$

Складывая почленно последние неравенства, находим:

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c). \quad (4)$$

Из треугольников AA_1B_1 , BB_1C , CB_1C_1 соответственно имеем:

$$\begin{cases} m_a < \frac{b}{2} + \frac{c}{2}, \\ m_b < \frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \\ m_c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Складывая почленно последние неравенства, находим:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c. \quad (5)$$

Из формул (4) и (5) вытекает:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{m_b + m_c - m_a}{b + c - a}\right) \cdot \left(\frac{m_a + m_c - m_b}{a + c - b}\right) \cdot \left(\frac{m_a + m_b - m_c}{a + b - c}\right) < \frac{3}{4}.$$

Вот так неожиданно получилось интересное геометрическое неравенство.

2. Теорема Стюарта

Мэтью Стюарт (1717-1785) — шотландский математик, профессор Эдинбургского университета, соучредитель Королевского общества Эдинбурга. Он установил теорему, выражющую длину трансверсали произвольного треугольника ABC — отрезка $AD = p$ через его элементы: стороны $AC = b$, $AB = c$ и отрезки $CD = a_1$, $DB = a_2$, см. рис. 2.

$$p^2 = \frac{a_1c^2 + a_2b^2}{a_1 + a_2} - a_1a_2. \quad (1)$$

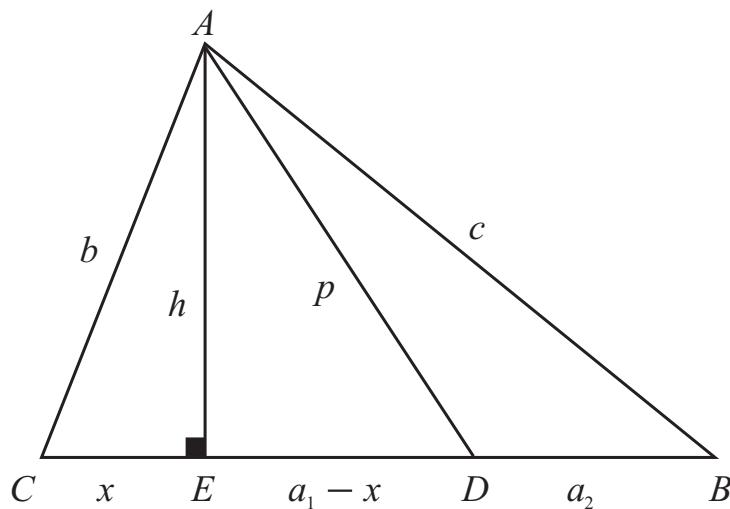


Рис. 2.

Если посмотреть в Википедии доказательства этой теоремы, то мы обнаружим их два: через скалярное произведение векторов и через теорему косинусов. Оба доказательства весьма громоздки, их трудно запомнить.

Между тем, к теореме Стюарта просто притти, отправляясь от теоремы Пифагора. Проведем высоту $AE = h$. Обозначим $CE = x$, тогда $ED = a_1 - x$. По теореме Пифагора из треугольников ACE , ADE , ABE соответственно имеем:

$$\begin{cases} b^2 = h^2 + x^2 \\ p^2 = h^2 + (a_1 - x)^2 \\ c^2 = h^2 + (a_1 + a_2 - x)^2. \end{cases} \quad (2)$$

Исключаем из системы (2) $h^2 = b^2 - x^2$:

$$\begin{cases} p^2 - b^2 = a_1^2 - 2a_1x \\ c^2 - p^2 = a_2^2 + 2a_1a_2 - 2a_2x. \end{cases} \quad (3)$$

Исключая x из системы (3), приходим к формуле (1).

*Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.*

Логике вопреки

Б. Л. Дружинин

Борис Львович Дружинин (умер в мае 2021 г.) в последние годы предложил редакции ряд небольших интересных сюжетов, как математических, так и из истории математики и математического образования. Предлагаем вниманию читателя последнюю оставшуюся в редакционном портфеле заметку автора. В ней показано, как в достаточно простой вероятностной модели нарушается привычное для обыденной логики свойство транзитивности.

На очередном занятии ребята выглядели какими-то расстроенными. Поинтересовался причиной.

— Очень просто, — пояснила Оля. — Вчера Саша проиграл решающую встречу по шахматам Коле из 217-й школы. Как-то странно получается. Саша уже выигрывал у Димы из 52-й школы, а Дима ещё раньше победил Колю. И вот Саша проиграл Коле. Разве так бывает?

— На уроках математики нас учили, — добавляет Валя, — что если А больше В, а В больше С, то обязательно А больше С.

— Скоро выясним.

К следующему занятию подготовил три детских пластмассовых кубика: красный, синий и зелёный.

— У этих трёх кубиков 18 граней, на каждой наклеено число, одно из первых восемнадцати, — объясняю ребятам. — Естественно, все числа разные. Будем играть. Вы выбираете любой из трёх кубиков и бросаете его. Я бросаю один из двух оставшихся. Побеждает тот, у кого выпадет большее число на верхней грани.

Поиграть — дело хорошее, уговаривать никого не пришлось. Первым бросает Саша. Он выбирает красный кубик и сразу получает 18. Понятно, что я проиграл, поэтому бросаю синий. Дима тоже выбирает красный, я — зелёный. Дима побеждает 5 против 2. Пока общий счет 2 : 0 в пользу ребят. Катя, по примеру Саши и Димы, берёт красный, я — опять-таки зелёный. На этот раз победа за мной 12 – 9.

Игра продолжается. Когда ребята выбирают красный кубик, я выбираю зелёный, они синий — я красный, они зелёный — я синий. Счет медленно, но уверенно растёт в мою пользу. Всего провели 250 попыток, счет 145 : 105 в мою пользу. Настала пора разбираться. Предлагаю заполнить три таблицы, вписывая в каждую клетку цвет победившего кубика.

На красном кубике я наклеил числа 5, 7, 8, 9, 10 и 18. На синем — 2, 3, 4, 15, 16 и 17, на зелёном — 1, 6, 11, 12, 13 и 14.

Первая заполненная таблица выглядит так: по горизонтали красный кубик, по вертикали — синий.

	5	7	8	9	10	18
2	К	К	К	К	К	К
3	К	К	К	К	К	К
4	К	К	К	К	К	К
15	с	с	с	с	с	К
16	с	с	с	с	с	К
17	с	с	с	с	с	К

Таблица 1.

Простой подсчет показывает, что из 36 возможных вариантов 21 раз побеждает красный кубик и 15 раз — синий.

Вторая заполненная таблица выглядит так: по горизонтали синий кубик, по вертикали — зелёный.

	2	3	4	15	16	17
1	с	с	с	с	с	с
6	з	з	з	с	с	с
11	з	з	з	с	с	с
12	з	з	з	с	с	с
13	з	з	з	с	с	с
14	з	з	з	с	с	с

Таблица 2.

И здесь из 36 возможных вариантов 21 раз побеждает синий кубик и 15 раз — зелёный.

Третья заполненная таблица выглядит так: по горизонтали зелёный кубик, по вертикали — красный.

	1	6	11	12	13	14
5	К	з	з	з	з	з
7	К	К	з	з	з	3
8	К	К	з	з	з	з
9	К	К	з	з	з	з
10	К	К	з	з	з	з
18	К	К	К	К	К	К

Таблица 3.

Здесь также из 36 возможных вариантов 21 раз побеждает зелёный кубик и 15 раз — красный.

Вывод из всего этого удивительный: при достаточно большом количестве испытаний красный кубик выигрывает у синего, синий выигрывает у зелёного, а зелёный — у красного. И ещё один парадокс: тот, кто первым выбирает кубик, оказывается в невыгодном положении.

Теперь поясню, почему когда первый раз у Саши выпало число 18 на красном кубике, я бросал не зелёный, а синий кубик. Дело в том, что я всё равно проиграл и не хотел открывать секрет успеха.

*Дружинин Борис Львович,
научный сотрудник Института теоретической
и экспериментальной Физики, г. Москва.*

О точках многократных пересечений диагоналей правильного многоугольника

A. M. Иглицкий

В предшествующих статьях [1] и [2] автором рассмотрены конфигурации, которые образуют точки пересечения диагоналей правильного многоугольника или их продолжений вне него. В статье [3] (Bjorn Poonen and Michael Rubinstein, 1997) был исследован вопрос о кратности точек пересечения диагоналей внутри правильного многоугольника. В настоящей статье средствами вычислительной математики проанализированы N -угольники при некоторых значениях N от 8 до 30 и найдены конфигурации многократных точек пересечения их диагоналей.

Если правильный N -угольник вписать в единичную окружность и занумеровать его вершины числами от 0 до $N - 1$ и положить

$$W = 2\pi/N \quad \text{и} \quad V = W/2,$$

то координаты его вершин задаются формулами ($i = 0, \dots, N - 1$):

$$x_i = \cos(iW), \quad y_i = \sin(iW).$$

Если одна диагональ многоугольника соединяет вершины с номерами n_1 и k_1 , а другая — с номерами n_2 и k_2 , то координаты точки их пересечения задаются формулами:

$$x = \frac{\sin((n_1 + k_1)V) \cos((n_2 - k_2)V) - \cos((n_1 - k_1)V) \sin((n_2 + k_2)V)}{\sin((n_1 + k_1)V) \cos((n_2 + k_2)V) - \cos((n_1 + k_1)V) \sin((n_2 + k_2)V)},$$

$$x = \frac{\cos((n_1 - k_1)V) \cos((n_2 + k_2)V) - \cos((n_1 + k_1)V) \cos((n_2 - k_2)V)}{\sin((n_1 + k_1)V) \cos((n_2 + k_2)V) - \cos((n_1 + k_1)V) \sin((n_2 + k_2)V)}.$$

Эти формулы в равной мере применимы как к пересечению диагоналей внутри многоугольника, так и к пересечению их продолжений вне него. (Сторону многоугольника формально тоже можно считать диагональю, поскольку она также соединяет две его вершины.) Известными методами линейной алгебры можно обнаружить принадлежность нескольких точек одной прямой, пересечение нескольких прямых в одной точке и т.п.

В работе [3] проанализированы случаи многократных точек пересечения диагоналей N -угольника. За очевидным исключением центра возможны кратности от 2 до 7:

N	Максимальная кратность
Нечетное	2
Четное и не делится на 6	3
Делится на 6, но не на 30	5
Делится на 30	7

с особыми случаями

N	Максимальная кратность
6	2
12	4

Ввиду вычислительных трудностей мы рассмотрим задачу только для четных N , не превосходящих 30. Вычисление результатов не заменяет строгие доказательства, однако примененные здесь методы ранее уже демонстрировали свою надежность. Все значения приведены с точностью 15 десятичных знаков, что более чем достаточно для данного случая.

При $N = 8$ построение точек пересечения диагоналей (здесь и далее ввиду симметричности картины рисунки очевидным образом ограничены) дает 2 инверсные тройные точки внутри и вне многоугольника:

Кратность	x	y
3	2.414213562373095	0
3	0.414213562373095	0

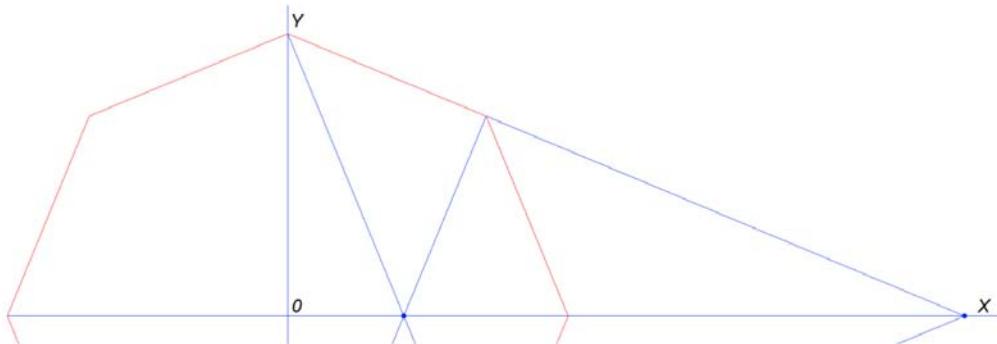


Рис. 1

Этот тривиальный случай показывает правильность расширенного понимания диагонали. Сторона также должна считаться частным случаем диагонали, в противном случае “не получается” инверсная картина, типичная для таких построений.

При $N = 10$ обнаруживаются две инверсные пары точек, очевидно связанные с золотым сечением:

Кратность	x	y
3	0.381966011250105	0
3	0.618033988749894	0
3	1.618033988749894	0
3	2.618033988749894	0

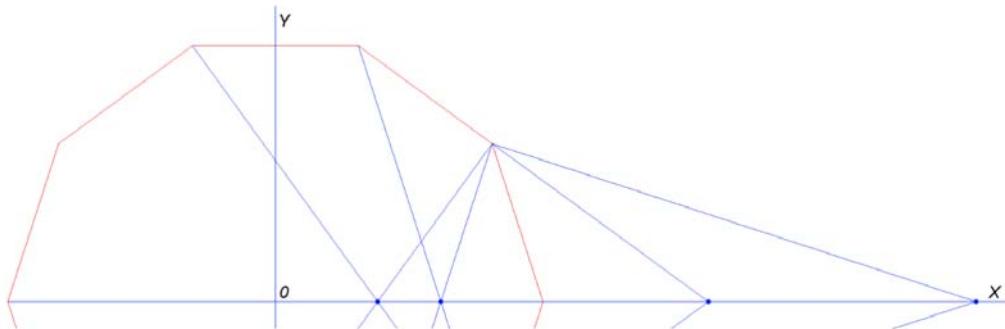


Рис. 2

Случай $N = 12$ является исключением из общего правила и здесь нет точек пересечения пяти диагоналей, но есть точки трех- и четырехкратного пересечения. Для точек наивысшей кратности 4 имеем инверсную пару.

Кратность	x	y
4	0.5	0.133974596215561
4	1.866025403784438	0.5

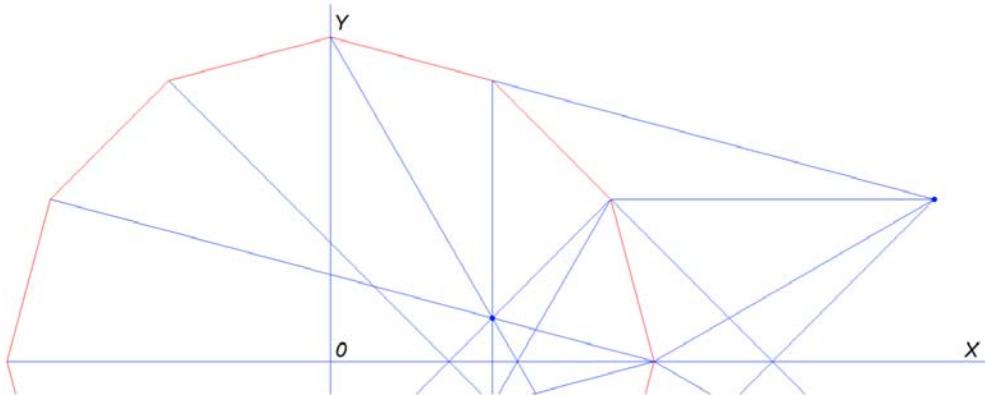


Рис. 3

Эти точки расположены на прямой, проходящей через центр многоугольника и перпендикулярной к его стороне.

Для случая кратности 3, как и следовало ожидать, имеем большее количество точек.

Кратность	x	y
3	0.267949192431122	0
3	0.366025403784438	0
3	0.577350269189625	0
3	0.683012701892219	0.183012701892219
3	0.732050807568877	0
3	1.366025403784438	0
3	1.5	0.133974596215561
3	1.732050807568877	0
3	2.366025403784438	0.366025403784438
3	2.732050807568877	0
3	3.732050807568877	0

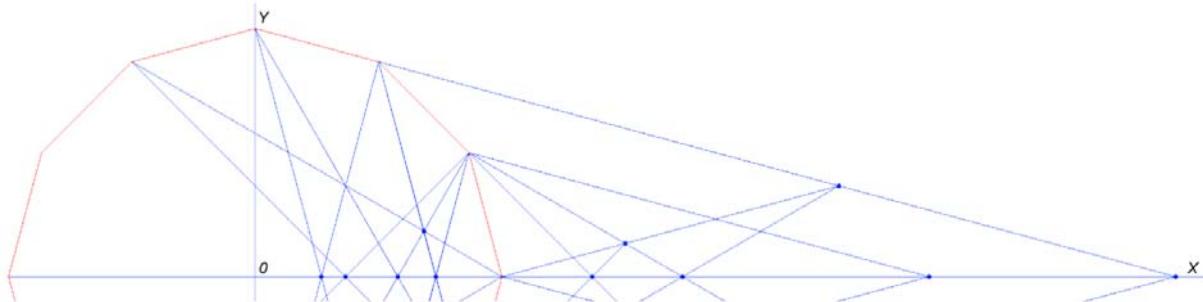


Рис. 4

С одного взгляда на таблицу становится ясна повторяемость значений и очевидные связи между ними, точно так же как от взгляда на рисунок становятся заметны скрытые закономерности в расположении точек. К сожалению, эти явления слишком многочисленны и бессистемны, что заставляет отказаться от их изучения.

При $N = 14$ большей наглядности результатов можно добиться, если точки пересечения разделить на две группы — те, которые лежат на линии, проходящей через вершину многоугольника, и те, которые не лежат на ней. Первая группа точек образует инверсные пары.

Кратность	x	y
3	0.246979603717467	0
3	0.356895867892209	0
3	0.445041867912628	0
3	0.554958132087371	0
3	0.692021471630095	0
3	0.801937735804838	0
3	1.246979603717467	0
3	1.445041867912628	0
3	1.801937735804838	0
3	2.246979603717467	0
3	2.801937735804838	0
3	4.048917339522305	0

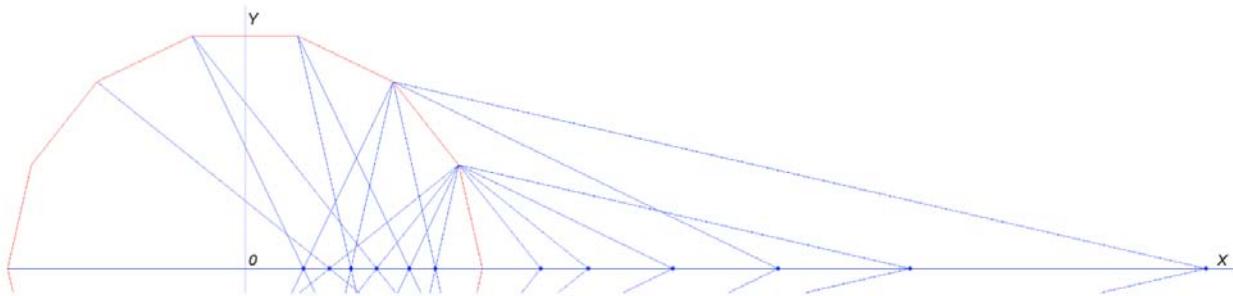


Рис. 5

Точки второй группы расположены на прямой, проходящей через центр многоугольника, но сама эта прямая не проходит ни через вершину многоугольника, ни через середину его стороны.

Кратность	x	y
3	0.623489801858733	0.085935995767086
3	1.400968867902419	0.193096429713793
3	1.746979603717467	0.240787309403764
3	2.524458669761153	0.347947743350471

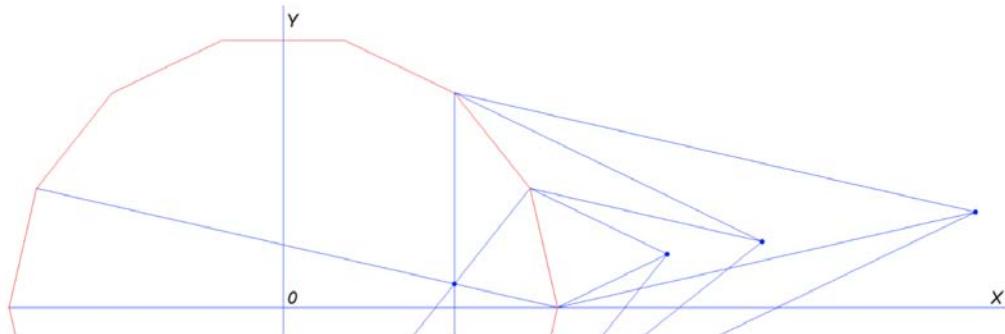


Рис. 6

При $N = 16$ существуют 26 тройных точек пересечения. Их также можно разделить на две группы. Можно выделить 9 инверсных пар.

Кратность	x	y
3	0.198912367379658	0
3	0.234633135269820	0
3	0.351153302357084	0
3	0.414213562373095	0
3	0.541196100146196	0
3	0.566454497350521	0
3	0.668178637919298	0
3	0.765366864730179	0
3	0.847759065022573	0
3	1.179580427103274	0
3	1.306562964876376	0
3	1.496605762665489	0
3	1.765366864730179	0
3	1.847759065022573	0
3	2.414213562373095	0
3	2.847759065022573	0
3	4.261972627395668	0
3	5.027339492125848	0

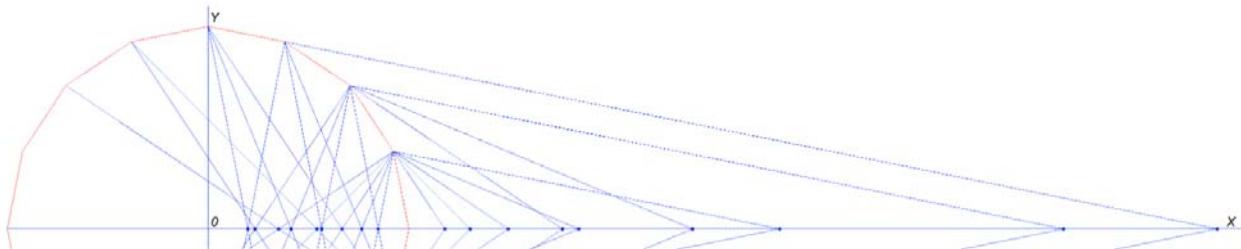


Рис. 7

Остальные 8 точек кажутся расположеными без видимой закономерности.

Кратность	x	y
3	0.617316567634910	0.076120467488713
3	0.707106781186547	0.058260083543632
3	1.324423348821457	0.216772751324739
3	1.382683432365089	0.076120467488713
3	1.630986313697834	0.089790213551637
3	2.013669746062924	0.165910681040350
3	2.338093094884382	0.382683432365089
3	2.630986313697834	0.324423348821457

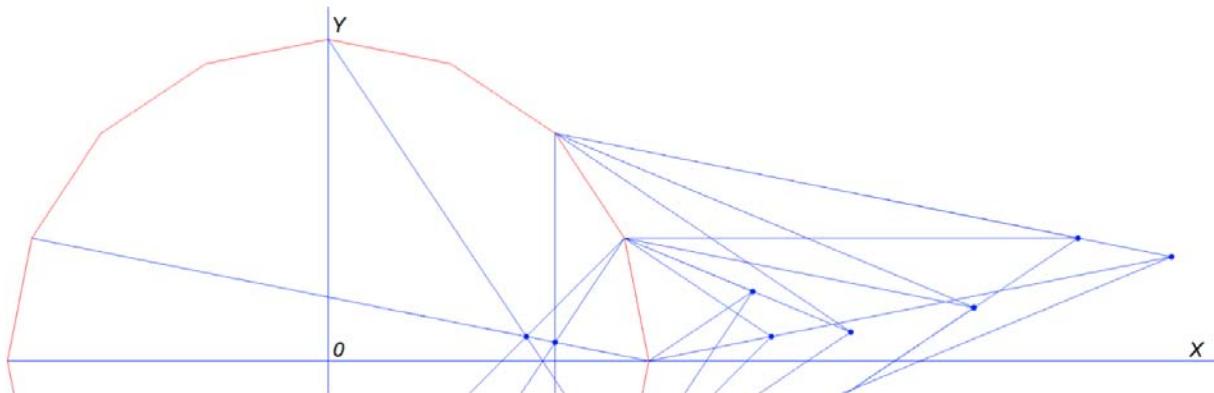


Рис. 8

При $N = 18$ впервые появляются точки пересечения 5-го порядка, образующие 3 инверсные пары.

Кратность	x	y
5	0.347296355333860	0
5	0.532088886237956	0
5	0.652703644666139	0
5	1.532088886237956	0
5	1.879385241571816	0
5	2.879385241571816	0

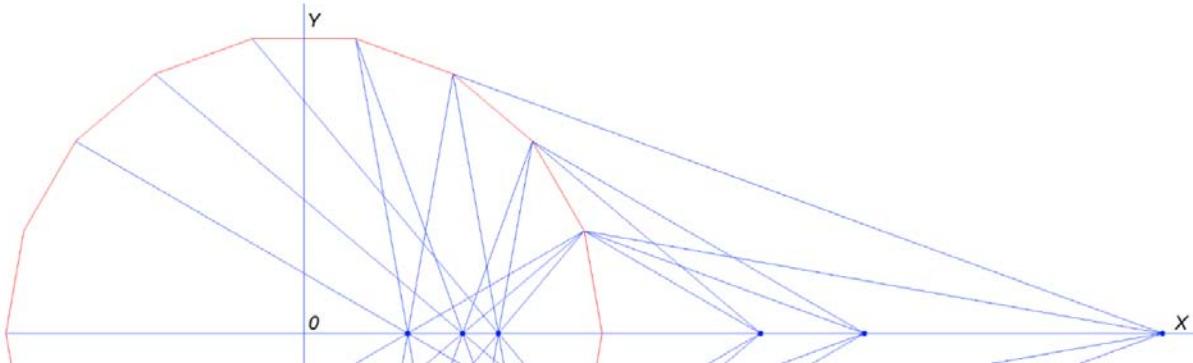


Рис. 9

Точки пересечения 4-го порядка также образуют 3 инверсные пары, но их положение связано с серединой стороны многоугольника.

Кратность	x	y
4	0.5	0,088163490354232
4	0.673648177666930	0.118782349277769
4	0.766044443118978	0.135074303743666
4	1.266044443118978	0.223237794097899
4	1.439692620785908	0.253856652971436
4	1.939692620785908	0.342020143325668

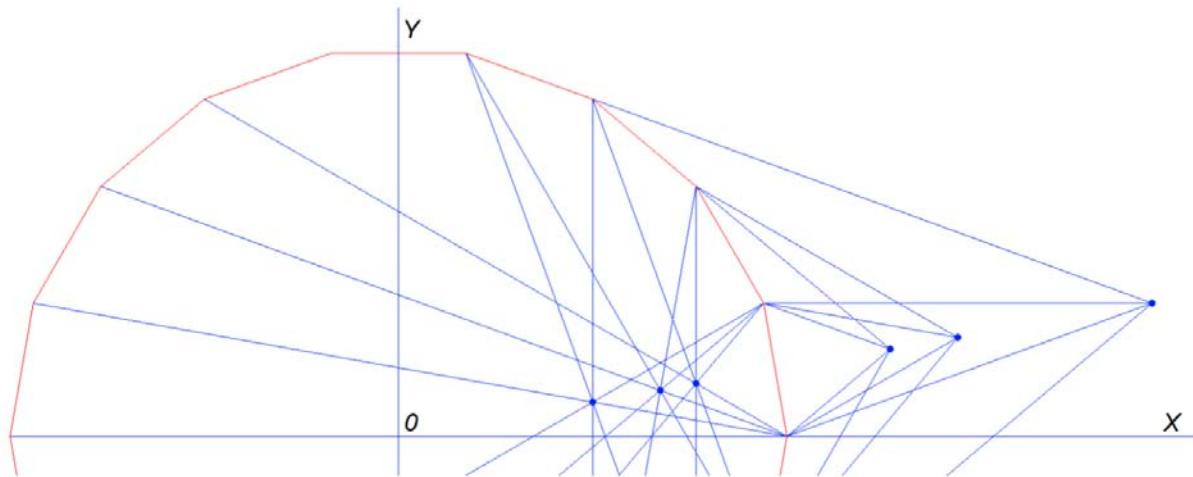


Рис. 10

Точки же кратности 3 образуют нечто вроде “аморфной паутины”, анализ которой вряд ли принес бы какие-либо существенные результаты, поэтому здесь и далее трехкратные точки пересечения не рассматриваются.

При $N = 24$ точки пересечения 5-го порядка образуют инверсную пару.

Кратность	x	y
5	0.517638090205041	0
5	1.931851652578136	0

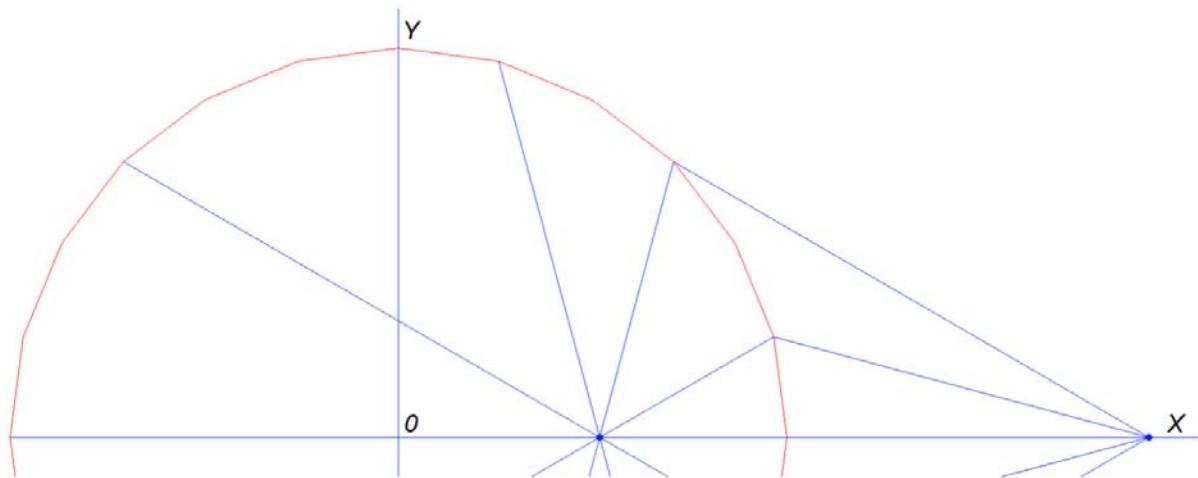


Рис. 11

Из 19 точек 4-го порядка 12 связаны с серединой стороны многоугольника и образуют инверсные пары, а остальные 7 кажутся расположеными в беспорядке.

Кратность	x	y
4	0.258819045102521	0.034074173710931
4	0.5	0.065826248793697
4	0.536566092485493	0.070640266196424
4	0.624844448886959	0.082262332299588
4	0.758819045102521	0.099900422504629
4	0.814313139868465	0.107206358681918
4	1.0710678118655	0.158918622597891
4	1.29538513758801	0.170540688701054
4	1.57313218497099	0.207106781186548
4	1.83195123007351	0.241180954897479
4	1.96592582628907	0.258819045102521
4	3.79787705636258	0.5

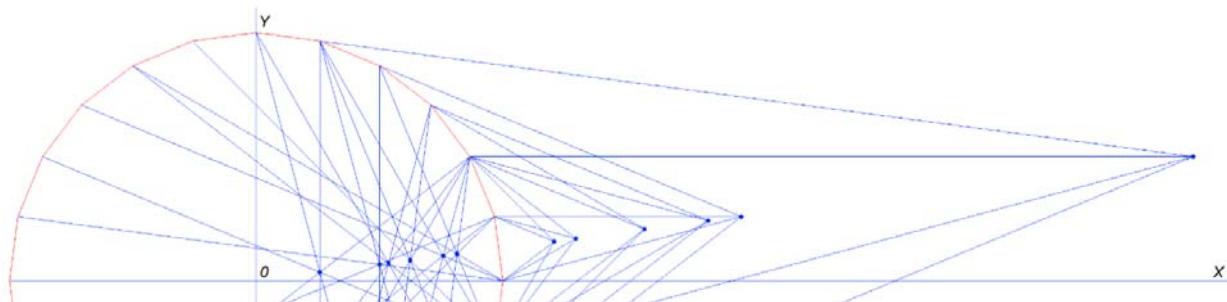


Рис. 12

Кратность	x	y
4	0.607206358681918	0.05171226391597324
4	0.707106781186548	0
4	0.741180954897479	0.034074173710931
4	1.17303260747562	0.099900422504629
4	1.46592582628907	0.124844448886959
4	2.33195123007351	0.107206358681918
4	2.83195123007351	0.241180954897479

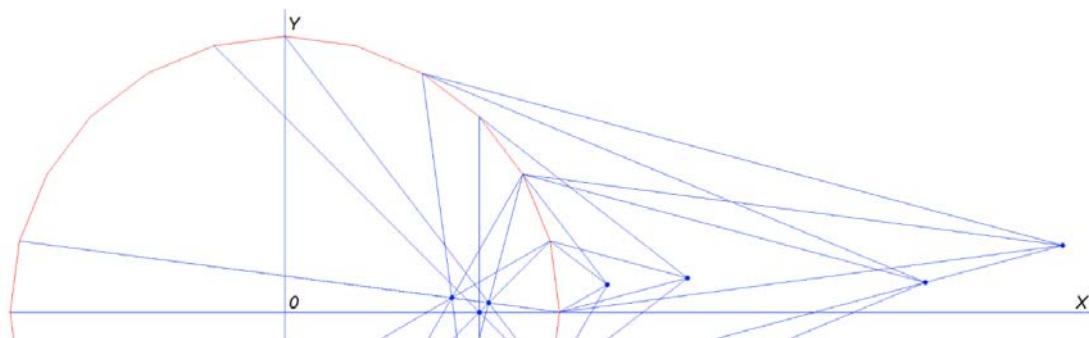


Рис. 13

При $N = 30$ появляются точки пересечения 7-го порядка — наивысшего из возможных.

Кратность	x	y
7	0.618033988749894	0
7	1.618033988749894	0

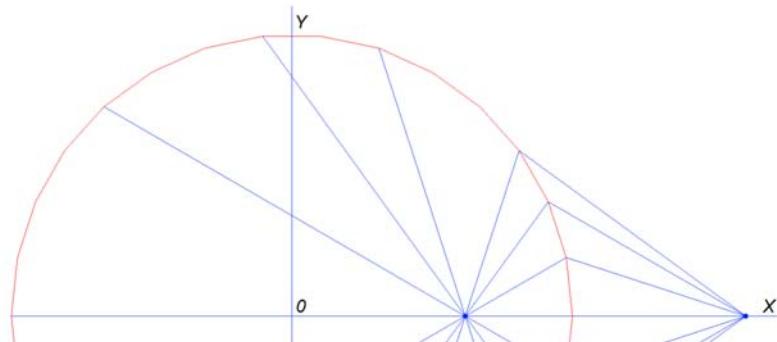


Рис. 14

Точки пересечения 6-го порядка образуют 4 инверсные пары:

Кратность	x	y
6	0.413545457642600	0.043465379073119
6	0.5	0.052552117632838
6	0.669130606358858	0.070328460674206
6	0.809016994374947	0.085031112510714
6	1.222562452017548	0.128496491583834
6	1.478147600733805	0.155359573184921
6	1.978147600733805	0.207911690817759
6	2.391693058376406	0.251377069890879

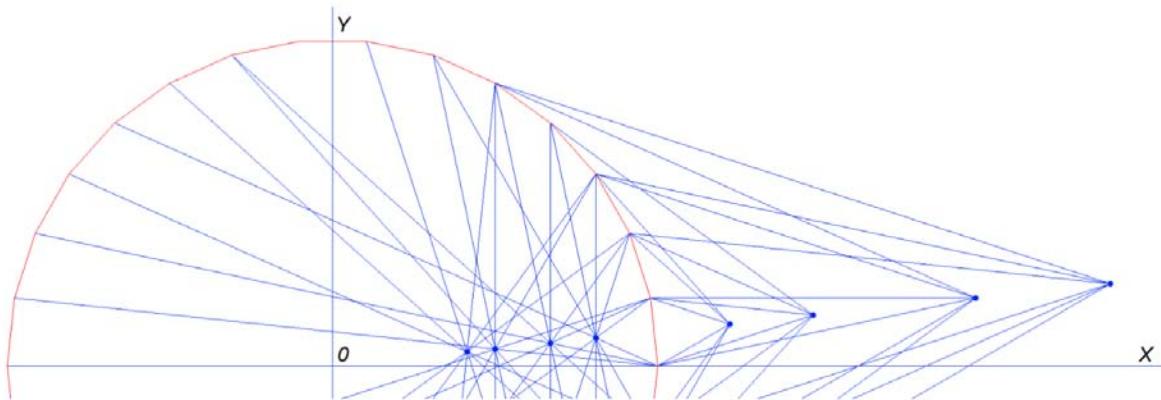


Рис. 15

Этим рассмотрением в данном случае разумно ограничиться, так как точки пересечения низших порядков уже демонстрируют “эффект паутины”.

Уже приведенные выше примеры демонстрируют “неоднородность” задачи. С увеличением N общая картина меняется, но без четких закономерностей. При достаточном объеме вычислительных ресурсов можно получить большой “экспериментальный материал” и сгруппировать его, например, таким образом:

1) случаи четных значений N , кратных 3 (но не 6 и 30), рассматриваются трехкратные точки пересечения;

2) случаи N , кратных 6 (но не 30), рассматриваются точки пересечения порядков от 3 до 5;

1) случаи N , кратных 30, рассматриваются точки пересечения порядков от 3 до 7.

Представляется, что достаточно большой “экспериментальный материал” может стать основой для применения методов высшей алгебры, что даст полное описание всех наблюдаемых закономерностей.

Литература

1. Иглицкий А.М. Две заметки по геометрии // Математическое образование. - 2019. - № 1(89). с. 13–20.

2. Иглицкий А.М. О нетривиальных случаях пересечения диагоналей правильного многоугольника на его оси симметрии // Математическое образование. - 2020. - № 1(93). -с. 28–35.

3. Poonen B., Rubinstein M. // Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM Journal on Discrete Mathematics. - Vol. 11. - 1998. - No. 1. - p. 135-156.

*Иглицкий Александр Михайлович,
кандидат технических наук,
г. Москва.*

E-mail: altetris@mail.ru

Антимагические квадраты и их обобщения. Продолжение

Л. Штейнгарц

Введены понятия антимагических квадратов по сложению и умножению, а также антимагических прямоугольников. Приведены некоторые общие и частные способы их построения, изучены разнообразные свойства, сформулирован ряд гипотез.

Продолжение статьи. Начало напечатано в предыдущем номере журнала.

Для удобства чтения второй части статьи предлагаем просмотреть **путеводитель по разделам**:

Раздел 7. Антимагические квадраты с простыми числами.

Раздел 8. Антимагические квадраты и прогрессии.

Раздел 9. Антимагические квадраты с числами Фибоначчи.

Раздел 10. Антимагические квадраты с логарифмами.

Раздел 7. Антимагические квадраты с простыми числами

Простые числа почти всегда порождают антимагические квадраты по умножению.

Теорема 7а. *Если таблица $n \times n$ (где $n \geq 2$) заполнена различными простыми числами, то полученный квадрат будет антимагическим по умножению.*

Доказательство следует из однозначности разложения натуральных чисел на простые множители.

Гораздо интереснее ведут себя числа, обратные к простым. Особенно это проявляется по отношению к сложению.

Теорема 7б. *Пусть знаменатели всех дробей в данной таблице — произвольные различные простые числа (не обязательно последовательные). Тогда данный квадрат будет антимагическим а) по умножению; б) по сложению.*

$\frac{1}{p_1}$	$\frac{1}{p_2}$	$\frac{1}{p_3}$
$\frac{1}{p_4}$	$\frac{1}{p_5}$	$\frac{1}{p_6}$
$\frac{1}{p_7}$	$\frac{1}{p_8}$	$\frac{1}{p_9}$

Доказательство. а) Это сразу же следует из однозначности разложения натуральных чисел на простые множители.

б) Предположим, к примеру, что суммы чисел в первых двух строках совпадают. То есть, что $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1/p_4 + 1/p_5 + 1/p_6$. Тогда $p_4p_5p_6(p_2p_3 + p_1p_3 + p_1p_2) = p_1p_1p_3(p_5p_6 + p_4p_6 + p_4p_5)$. Правая часть этого равенства, очевидно, делится на p_1 . Значит, на p_1 должна делиться и левая часть. Но числа $p_4p_5p_6$ и p_1 — взаимно простые (ведь все рассматриваемые знаменатели являются числами простыми и различными). Поэтому на p_1 должно делиться число $p_2p_3 + p_1p_3 + p_1p_2$. Но тут второе и третье слагаемые делятся на p_1 . Следовательно, и первое слагаемое p_2p_3 должно делиться на p_1 . А это, естественно, невозможно (по той же причине, что и ранее).

Аналогично доказывается невозможность совпадения остальных сумм.

Теорема 7с. *Пусть в данной таблице все числители и знаменатели — произвольные различные простые числа. Тогда данный квадрат будет антимагическим а) по умножению; б) по сложению.*

$\frac{p_1}{q_1}$	$\frac{p_2}{q_2}$	$\frac{p_3}{q_3}$
$\frac{p_4}{q_4}$	$\frac{p_5}{q_5}$	$\frac{p_6}{q_6}$
$\frac{p_7}{q_7}$	$\frac{p_8}{q_8}$	$\frac{p_9}{q_9}$

Упражнение 1. Доказательство этой теоремы (аналогичное доказательству предыдущей теоремы) проведите самостоятельно.

С антимагическими квадратами, заполненными простыми числами, все намного сложнее, если рассматривать их по сложению.

Упражнение 2. Проверьте, что следующие 11 квадратов, составленные из последовательных простых чисел, — **не антимагические**.

2 3 5	3 5 7	5 7 11	7 11 13	11 13 17
7 11 13	11 13 17	13 17 19	17 19 23	19 23 29
17 19 23	19 23 29	23 29 31	29 31 37	31 37 41
13 17 19	17 19 23	19 23 29	23 29 31	29 31 37
23 29 31	29 31 37	31 37 41	37 41 43	41 43 47
37 41 43	41 43 47	43 47 53	47 53 59	53 59 61
31 37 41	37 41 43	41 43 47		
43 47 53	47 53 59	53 59 61		
59 61 67	61 67 71	67 71 73		

Упражнение 3. Убедитесь, что данный квадрат, составленный из последовательных простых чисел, — **антимагический**.

43	47	53
59	61	67
71	73	79

Упражнение 4. Проверьте, что данный квадрат, составленный из последовательных простых чисел, — **не антимагический**.

47	53	59
61	67	71
73	79	83

Гипотеза А (раздел 7). Существует бесконечно много антимагических квадратов третьего порядка, которые составлены в телефонном порядке из последовательных простых чисел.

Гипотеза В (раздел 7). Существует бесконечно много не антимагических квадратов третьего порядка, которые составлены в телефонном порядке из последовательных простых чисел.

Интересно себя ведут также и квадратные корни из простых чисел.

Теорема 7d. Пусть $a, b, c, x, y, z, u, v, w$ — некоторые различные простые числа, расположенные в порядке возрастания. При этом данный квадрат будет антимагическим а) по умножению; б) по сложению.

\sqrt{a}	\sqrt{b}	\sqrt{c}
\sqrt{x}	\sqrt{y}	\sqrt{z}
\sqrt{u}	\sqrt{v}	\sqrt{w}

Доказательство. а) Следует из однозначности разложения натуральных чисел на простые множители.

б) Ясно, что суммы во всех строках, как и во всех столбцах, различны. Предположим, к примеру, что совпадают суммы чисел на диагоналях. Тогда $\sqrt{a} + \sqrt{w} = \sqrt{c} + \sqrt{u}$. Возведя это равенство в квадрат, получим: $a + 2\sqrt{a}\sqrt{w} + w = c + 2\sqrt{c}\sqrt{u} + u$, $\sqrt{a}\sqrt{w} = \sqrt{c}\sqrt{u} + (c + u - a - w)/2$. Обозначим: $(c + u - a - w)/2 = r$. Тогда $\sqrt{a}\sqrt{w} = \sqrt{c}\sqrt{u} + r$. Легко понять, что $r \neq 0$. Иначе было бы, что $aw = cu$. Но это невозможно, так как в этом равенстве все множители простые и различные. Возведя полученное равенство в квадрат, будем иметь: $aw = cu + 2r\sqrt{c}\sqrt{u} + r^2$. Следовательно (учитывая, что $r \neq 0$), $\sqrt{cu} = (aw - cu - r^2)/2r$. Но это равенство верным быть не может, так как в правой его части число, очевидно, рациональное, а в левой — иррациональное (ввиду того, что произведение cu не может быть полным квадратом). Поэтому суммы чисел на диагоналях совпадать не могут. Аналогично доказывается невозможность равенства остальных сумм.

Раздел 8. Антимагические квадраты и прогрессии

Рассмотрим, как арифметическая и геометрическая прогрессии порождают (или иногда не порождают) антимагические квадраты.

Теорема 8а. Если разность арифметической прогрессии не равна нулю, то всегда n^2 её последовательных членов можно расположить в виде антимагического квадрата по сложению.

Доказательство. Ясно, что если разность арифметической прогрессии отлична от нуля, то все члены этой прогрессии различны. А по теореме 2b из раздела 2 мы знаем, что из любых n^2 (где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 3$) различных действительных чисел можно составить антимагический квадрат n -го порядка.

Упражнение 1. Убедитесь, что следующие квадраты, заполненные последовательными членами арифметической прогрессии, не являются антимагическими по сложению.

2	5	8	11
14	17	20	23
26	29	32	35
38	41	44	47

3	4	5	6	7
8	9	10	11	12
13	14	15	16	17
18	19	20	21	22
23	24	25	26	27

Теорема 8в. Если последовательные члены арифметической прогрессии расположить в телефонном порядке в числовом квадрате, то полученный квадрат не будет антимагическим по сложению.

Доказательство. Пусть имеется некоторая арифметическая прогрессия с разностью d : $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n^2}$. Расположим члены этой прогрессии в телефонном порядке так, чтобы образовался числовой квадрат n -го порядка. Нетрудно понять, что тогда на одной из диагоналей будут расположены следующие члены прогрессии: $a_1, a_{n+2}, a_{2n+3}, a_{3n+4}, \dots, a_{n^2}$. А на другой диагонали такие: $a_n, a_{2n-1}, a_{3n-2}, a_{4n-3}, \dots, a_{n^2-n+1}$. Убедимся, что суммы чисел на обеих диагоналях равны.

Числа, расположенные на первой диагонали (очевидно, что их количество равно n) образуют арифметическую прогрессию с разностью $a_{2n-1} - a_n = a_1 + (n+1)d - a_1 = (n+1)d$. Сумма этих чисел такая: $n(2a_1 + (n-1)(n+1)d)/2 = n(2a_1 + (n^2-1)d)/2$. Числа, расположенные на другой диагонали (количество этих чисел также равно n), образуют арифметическую прогрессию с разностью $a_{n+2} - a_1 = a_1 + (2n-2)d - a_1 - (n-1)d = (n-1)d$. Поэтому сумма чисел на второй диагонали будет такой: $n(2a_n + (n-1)(n-1)d)/2 = n(2a_1 + 2(n-1)d + (n-1)^2d)/2 = n(2a_1 + (n^2-1)d)/2$. Следовательно, обе суммы одинаковы.

Упражнение 2. Убедитесь, что следующие квадраты, заполненные последовательными членами арифметической прогрессии, являются антимагическими по умножению.

2	5	8
11	14	17
30	33	36

1	6	11
16	21	26
31	36	41

Теорема 8с. Если все числа в данном числовом квадрате положительны и являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии, то полученный квадрат будет антимагическим по умножению.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Доказательство. Из условия следует, что первый член a_1 и разность данной прогрессии d положительны. Теперь предположим, к примеру, что произведения чисел в средней строке и в правом столбце совпадают. Тогда $a_4a_5 = a_3a_9$. То есть, $(a_1 + 3d)(a_1 + 4d) = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$. Отсюда получаем: $a_1^2 + 7a_1d + 12d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2$. Или: $3a_1 + 4d = 0$, что невозможно при положительных a_1 и d . Остальные случаи разбираются аналогично.

Упражнение 3. Докажите, что числовой квадрат третьего порядка, заполненный последовательными членами (не равными нулю) некоторой арифметической прогрессии, может оказаться не антимагическим по умножению.

Теорема 8д. Если знаменатель геометрической прогрессии является числом натуральным, отличным от единицы, то различные члены этой прогрессии, расположенные произвольным образом в таблице $n \times n$, всегда будут образовывать антимагический квадрат по сложению.

Доказательство. Пусть имеется некоторая геометрическая прогрессия, знаменатель которой q : $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n^2}$. Предположим, что из этих чисел удалось образовать числовой квадрат, который не является антимагическим. Так как $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0$ (так указано в определении геометрической прогрессии), то из чисел $1, q, q^2, q^3, q^4, \dots, q^{n^2-1}$ также можно образовать квадрат, который не является антимагическим. Но это, учитывая, что $q \neq 1$, противоречит обобщению теоремы 5а из раздела 5.

Теорема 8е. Если знаменатель геометрической прогрессии — произвольное число, большее единицы (не обязательно целое), то последовательные члены этой прогрессии, расположенные в таблице 3×3 , будут образовывать антимагический квадрат по сложению.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Доказательство. Пусть данный квадрат заполнен числами, которые являются последовательными членами геометрической прогрессии, знаменатель которой $q > 1$. Предположим, что этот квадрат — не антимагический. Тогда, очевидно, и такой квадрат не будет антимагическим:

1	q	q^2
q^3	q^4	q^5
q^6	q^7	q^8

Допустим, к примеру, что сумма чисел в средней строке совпадает с суммой чисел в правом столбце. Тогда $q^3 + q^4 = q^2 + q^8$. Разделим это равенство на q^2 . Получим, что $q + q^2 = 1 + q^6$. При этом $q - 1 = q^6 - q^2$. Отсюда $q - 1 = q^2(q^2 + 1)(q^2 - 1)$. То есть $q - 1 = q^2(q^2 + 1)(q + 1)(q - 1)$. Разделив это равенство на $q - 1$ (а это число, по условию, отлично от нуля), будем иметь: $1 = q^2(q^2 + 1)(q + 1)$. Но так как, опять-таки по условию, $q > 1$, то данное равенство невозможно из-за того, что число в правой части наверняка больше единицы.

Остальные варианты совпадений возможных сумм разбираются аналогично.

Упражнение 4. Докажите, что существует такая геометрическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ (все члены которой положительны и отличны от единицы), что, расположив эти числа последовательно в квадрате третьего порядка, получим квадрат, который антимагическим по сложению не является.

Раздел 9. Антимагические квадраты с числами Фибоначчи

Напомним, что числа Фибоначчи — это элементы следующей бесконечной числовой последовательности: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, В этой последовательности первые два числа равны единице, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Названы эти числа в честь средневекового математика Леонардо Пизанского (известного как Фибоначчи). Более формально, последовательность чисел Фибоначчи (которые обычно обозначают F_n) задается такими соотношениями:

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ при } n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \end{cases}$$

В дальнейшем нам пригодятся следующие два свойства чисел Фибоначчи.

Лемма 1. *Любые два соседних числа Фибоначчи являются взаимно простыми.*

Доказательство. Допустим, что у некоторых соседних чисел Фибоначчи F_n и F_{n-1} имеется общий делитель $d > 1$. Так как $F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, то этот же делитель должен быть и у числа F_{n-2} . Рассуждая аналогично, получим, что и число F_{n-3} должно делиться на d . Продолжая этот процесс дальше, приходим к выводу, что и число F_2 (а также и F_1) должны делиться на число d . Но это невозможно, так как $d > 1$, а при этом $F_1 = F_2 = 1$. Следовательно, соседние числа F_n и F_{n-1} обязательно взаимно просты.

Лемма 2. *Для любого натурального n имеет место равенство: $|F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3}| = 1$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Проверим вначале это равенство при $n = 1, 2, 3, 4$. (для наглядности, мы делаем несколько проверок).

$$|F_2F_3 - F_1F_4| = |1 \cdot 2 - 1 \cdot 3| = 1, \quad |F_3F_4 - F_2F_5| = |2 \cdot 3 - 1 \cdot 5| = 1,$$

$$|F_4F_5 - F_3F_6| = |3 \cdot 5 - 2 \cdot 6| = 1, \quad |F_5F_6 - F_4F_7| = |5 \cdot 8 - 3 \cdot 13| = 1.$$

Предположим, что для некоторого натурального значения $n = k$ выполняется одно из двух следующих равенств:

$$F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3} = 1 \text{ или } F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3} = -1.$$

Тогда при $n = k + 1$ будем иметь, что

$$F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+4} = (F_k + F_{k+1})F_{k+3} - F_{k+1}(F_{k+2} + F_{k+3}).$$

Раскрыв скобки и упростив, получим такое выражение: $F_kF_{k+3} - F_{k+1}F_{k+2}$. Но оно, по предположению, равно или 1, или -1. Тем самым, лемма 2 доказана.

А теперь рассмотрим, как числа Фибоначчи порождают антимагические квадраты. Причем, эти квадраты окажутся, как правило, антимагическими как по сложению, так и по умножению.

Упражнение 1. Проверьте, что данные числовые квадраты, заполненные последовательными числами Фибоначчи, являются антимагическими и по сложению, и по умножению.

1	1	2
3	5	8
13	21	34

1	2	3
5	8	13
21	34	55

2	3	5
8	13	21
34	55	89

Теорема 9а. *Пусть $F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}$ — произвольные последовательные числа Фибоначчи (причем наименьшее из этих чисел $F_n > 1$). Тогда следующий квадрат будет антимагическим*

- по сложению;*
- по умножению.*

F_n	F_{n+1}
F_{n+2}	F_{n+3}

Доказательство. а) Все случаи очевидны, кроме одного. Предположим, что $F_n + F_{n+3} = F_{n+1} + F_{n+2}$. Но, по определению, $F_n + F_{n+2} = F_{n+3}$. Выходит, что $F_n = 0$, что невозможно.

б) На этот раз предположим, что $F_n F_{n+3} = F_{n+1} F_{n+2}$. Заменим в этом равенстве число F_{n+3} на сумму двух предыдущих чисел: $F_n(F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+1} F_{n+2}$. То есть, $F_n F_{n+1} + F_n F_{n+2} = F_{n+1} F_{n+2}$. Значит, $F_n F_{n+2} = F_{n+1} F_{n+2} - F_n F_{n+1}$. В этом равенстве правая часть наверняка делится на F_{n+1} . А левая часть делиться на это число не может. Ведь числа F_{n+1} и F_n являются соседними. Поэтому, по лемме 1, они взаимно просты. Аналогично, числа F_{n+1} и F_{n+2} также являются взаимно простыми.

Теорема 9в. *Если данный числовой квадрат заполнен произвольными последовательными числами Фибоначчи, то он будет антимагическим по сложению.*

F_n	F_{n+1}	F_{n+2}
F_{n+3}	F_{n+4}	F_{n+5}
F_{n+6}	F_{n+7}	F_{n+8}

Доказательство. Рассмотрим две основные возможности. Остальные варианты разбираются аналогично.

1) Предположим, что совпадают суммы чисел на диагоналях. Тогда $F_n + F_{n+8} = F_{n+2} + F_{n+6}$. Заменим в этом равенстве число Фибоначчи F_{n+8} на сумму двух предыдущих чисел. Так же поступим и с числом F_{n+2} : $F_n + (F_{n+6} + F_{n+7}) = (F_n + F_{n+1}) + F_{n+6}$. Отсюда получим, что $F_{n+7} = F_{n+1}$, что невозможно.

2) На этот раз предположим, что совпадают суммы чисел в средней строке и в правом столбце. При этом $F_{n+3} + F_{n+4} = F_{n+2} + F_{n+8}$. Заменим сумму чисел в левой части этого равенства и число F_{n+8} в правой: $F_{n+5} = F_{n+2} + (F_{n+6} + F_{n+7})$. Заменим теперь еще и F_{n+6} соответствующей суммой: $F_{n+5} = F_{n+2} + F_{n+4} + F_{n+5} + F_{n+7}$. Получаем, что $F_{n+2} + F_{n+4} + F_{n+7} = 0$. А это, очевидно, тоже невозможно.

Теорема 9с. *Если числовой квадрат из предыдущей теоремы заполнен произвольными последовательными числами Фибоначчи, то он будет антимагическим также и по умножению.*

Доказательство. И на этот раз рассмотрим два основных варианта. Остальные варианты предлагаем читателям разобрать самостоятельно.

1) Предположим, что совпадают произведения чисел на диагоналях. Тогда $F_n F_{n+8} = F_{n+2} F_{n+6}$. Заменим в этом равенстве числа F_{n+8} и F_{n+2} : $F_n(F_{n+6} + F_{n+7}) = (F_n + F_{n+1})F_{n+6}$. Значит, $F_n F_{n+6} + F_n F_{n+7} = F_n F_{n+6} + F_{n+1} F_{n+6}$. То есть, $F_n F_{n+7} = F_{n+1} F_{n+6}$. Отсюда $F_{n+7}/F_{n+6} = F_{n+1}/F_n$. Это равенство невозможно, так как обе эти дроби, по лемме 1, несократимы.

2) Предположим теперь, что совпадают произведения чисел в средней строке и в правом столбце. Тогда $F_{n+3} F_{n+4} = F_{n+2} F_{n+8}$. По лемме 2, выражение $F_{n+3} F_{n+4} - F_{n+2} F_{n+5}$ равно или 1, или -1 . В первом случае получим, что $F_{n+2} F_{n+8} = F_{n+2} F_{n+5} + 1$. То есть, $F_{n+2} F_{n+8} - F_{n+2} F_{n+5} = 1$. Но это равенство невозможно, так как левая часть этого равенства делится на число F_{n+2} (которое больше единицы), а правая — нет. Отметим, кроме того, что левая часть наверняка больше единицы. Аналогично, отпадает и вариант, при котором $F_{n+3} F_{n+4} - F_{n+2} F_{n+5} = -1$.

Гипотеза А (раздел 9). Если квадратная таблица (начиная с третьего порядка) заполнена произвольными различными числами Фибоначчи, то полученный числовой квадрат будет антимагическим и по сложению, и по умножению.

Раздел 10. Антимагические квадраты с логарифмами

При помощи логарифмов получаются довольно любопытные антимагические квадраты по умножению. По сложению рассматривать такие квадраты не так интересно, так как рассмотрение сумм логарифмов заменяется фактически рассмотрением произведений выражений без всяких логарифмов.

Упражнение (1). Проверьте при помощи калькулятора, что данные квадраты являются антимагическими по умножению.

$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 4$
$\ln 5$	$\ln 6$	$\ln 7$
$\ln 8$	$\ln 9$	$\ln 10$

$\ln 3$	$\ln 4$	$\ln 5$
$\ln 6$	$\ln 7$	$\ln 8$
$\ln 8$	$\ln 10$	$\ln 11$

Теорема 10а. Для любого действительного числа $x > 1$ данный числовой квадрат будет антимагическим а) по сложению; б) по умножению.

$\ln(x)$	$\ln(x+1)$	$\ln(x+2)$
$\ln(x+3)$	$\ln(x+4)$	$\ln(x+5)$
$\ln(x+6)$	$\ln(x+7)$	$\ln(x+8)$

Доказательство. а) То, что данный квадрат является антимагическим по сложению, следует сразу же из теоремы 8с (см. раздел 8 о прогрессиях).

б) Докажем вначале следующую лемму.

Лемма. Функция $f(x) = \ln(x+2)/\ln(x)$ является убывающей для любого действительного числа $x > 1$.

Доказательство леммы. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} \right)' = \frac{\frac{1}{x+2}\ln(x) - \frac{1}{x}\ln(x+2)}{\ln^2(x)} = \frac{x\ln(x) - (x+2)\ln(x+2)}{x(x+2)\ln^2(x)}.$$

Учитывая, что $x > 1$ и что при этом натуральный логарифм является возрастающей функцией, заключаем, что числитель полученной дроби отрицателен, а знаменатель положителен. Поэтому $f'(x) < 0$ при $x > 1$. А значит, функция $f(x)$ при этом убывает.

Теперь докажем саму теорему. (1) Предположим вначале, что произведение чисел на диагоналях совпадают: $\ln(x)\ln(x+4)\ln(x+8) = \ln(x+2)\ln(x+4)\ln(x+6)$. То есть, $\ln(x)\ln(x+8) = \ln(x+2)\ln(x+6)$. Поэтому $\ln(x+8)/\ln(x+6) = \ln(x+2)/\ln(x)$.

Но, по доказанной лемме, функция $f(x) = \ln(x+2)/\ln(x)$ является убывающей при всех $x > 1$. Следовательно, $\ln(x+8)/\ln(x+6) < \ln(x+2)/\ln(x)$.

(2) На этот раз предположим, что совпадают произведения чисел в левом столбце и в средней строке. Тогда $\ln(x)/\ln(x+6) = \ln(x+4)/\ln(x+5)$. То есть: $\ln(x+6)/\ln(x+4) = \ln(x+5)/\ln(x)$. Но это невозможно, так как (используя, опять-таки, доказанную нами лемму) $\ln(x+6)/\ln(x+4) < \ln(x+5)/\ln(x+3) < \ln(x+5)/\ln(x)$.

Упражнение 2. Завершите доказательство данной теоремы самостоятельно.

Гипотеза А (раздел 10). Утверждение, аналогичное теореме 10а, верно для произвольного квадрата n -го порядка (где $n \geq 4$).

Упражнение 3. Проверьте при помощи калькулятора, что данный квадрат является антимагическим как по сложению, так и по умножению.

$\log_2 3$	$\log_3 4$	$\log_4 5$
$\log_5 6$	$\log_6 7$	$\log_7 8$
$\log_8 9$	$\log_9 10$	$\log_{10} 11$

Гипотеза В (раздел 10). При любом натуральном $n \geq 2$ данный числовой квадрат будет антимагическим как по сложению, так и по умножению.

$\log_n(n+1)$	$\log_{n+1}(n+2)$	$\log_{n+2}(n+3)$
$\log_{n+3}(n+4)$	$\log_{n+4}(n+5)$	$\log_{n+5}(n+6)$
$\log_{n+6}(n+7)$	$\log_{n+7}(n+8)$	$\log_{n+8}(n+9)$

Лейб Штейнгарц,
доктор педагогики,
Иерусалим, Израиль.

E-mail: leybleyb@yahoo.com

Подарки от Деда Мороза или вариации на темы классиков¹

B. I. Войтицкий

В статье показано, как не очень сложная математическая задача “стягивает на себя” несколько классических разделов математики. Это позволяет взглянуть на математику панорамно, а не только с точки зрения некоторой специализированной математической ветви.

“Наука выигрывает, когда ее крылья раскованы фантазией”.
М. Фарадей

Предисловие

Текст, написанный ниже, не вписывается в рамки классической статьи. Это вариации на классические сюжеты из математического анализа, теории вероятностей и других математических дисциплин. Это импровизация, призванная с одной стороны показать единство и красоту математического древа, с другой — вписать классическую математику в контекст современной культуры метамодерна, где могут сочетаться на первый взгляд несовместимые вещи.

Математика — наука древняя, классическая, существует наверное столько же лет, сколько существует “человек разумный”. Она развивалась по мере необходимости в счёте имущества, измерения земель, по мере появления технических приспособлений, механики и техники. Так думают многие и, отчасти, это правда. Нужды физики и других наук ставили и ставят перед математикой огромное число задач, большая часть которых находит какое-то (как правило, численное) решение, как правило, без претензии на открытие новой теории. Так, под воздействием практических нужд, развивается прикладная математика. Фундаментальная (чистая) математика развивается по-другому, ее творят личности, чьи мысли “раскованы фантазией”. Один из классиков математического анализа Карл Вейерштрасс однажды сказал: “Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немножко поэтом”. Я бы дополнил эту мысль: “Нельзя быть настоящим математиком, не будучи ведомым чувством прекрасного”. Математика — это часть духовного наследия человечества, это “язык, на котором написана величественная книга природы” (Г. Галилей). Математика — это сложная красота и счастлив тот, кто умеет ее распознать.

Большинство людей соприкасаются с математикой лишь в школе, имея о ней весьма поверхностное и искаженное представление. Профессиональные математики работают каждый в своей узкой области и тоже зачастую утрачивают целостное восприятие математического древа. Как в притче о слоне и слепых мудрецах каждый трогает слона-математику за разные части тела и имеет совершенное разное представление о математической сущности. Печальным фактом стало то, что дети воспринимают всю школьную информацию как важное испытание, пройдя которое, можно получить “золотой ключик” — право на бюджетное обучение в ВУЗе. Все это свидетельствует о неправильной подаче материала, о нарушенной системе ценностей и приоритетов. Для меня лично математика

¹Статья написана по материалу открытой лекции в Крымском федеральном университете 16.02.2021, которая доступна в сети интернет по ссылке <https://youtube/RcIPbUm1CsM>

— это не средство, а возможности. Это язык, возможно, лучший способ работы с информацией. Это развлечение и творчество, радость — не важно, открытия или переоткрытия. Мир, полный неожиданных встреч, закономерностей и тайн.

В царстве высшей математики, по которому путешествуют студенты младших курсов, есть большие города классических математических наук — математического анализа, комплексного анализа, теории вероятностей, линейной алгебры, дифференциальных уравнений. В этих городах есть широкие проспекты с величественными зданиями — теориями классиков науки, по которым водят толпы студентов, разглядывая основные достопримечательности. Студентам показывают массу красот, многие математики прошлого отдали бы жизнь, чтобы узнать то, что сегодня рассказывают в университетах. Но по ряду обстоятельств студенты теряют всякий интерес к подобным экскурсиям. Ввиду обрывочного бессистемного подхода к обучению все красоты сливаются в безумный коллаж из отрывков лекций, конспектов, книг, роликов на ютубе, математических статей и рассказов друзей. Часто слышен вопрос: “а пригодится ли мне математика в жизни?” Может, и не пригодится. Ведь можно прожить жизнь, не прочитав ни одной книги, не восхитившись ни одним произведением искусства, не используя компьютер. Но без разностороннего образования, без математики нельзя в полной мере понять богатство и разнообразие имеющихся возможностей. А студенческие годы — это лучшее время для открытия и реализации своего потенциала.

Реальность XXI века такова, что жизнь (и особенно у студентов) превращается в один сплошной информационный поток, с которым мало кому удаётся справиться. Но цель обучения — это не просто передача информации, это умение работать с ней и создавать что-то новое. Для этого важно понимать суть вещей, иногда жертвуя мелкими деталями. Особенно важно видеть контекст и внутренние связи, имеющиеся между различными ветвями знаний. Для этого полезно выходить за рамки линейного обучения и пытаться разглядеть целостную картину со стороны. В данной работе предпринята такая попытка. Мы пройдемся по тонкой тропинке (коих, конечно, очень много), соединяющей ряд классических тем анализа в единый “метасюжет”, который, как я надеюсь, поможет взглянуть по-новому на всем знакомую и в то же время таинственную высшую математику. Мы увидим творения классиков: Исаака Ньютона, Блеза Паскаля, Леонарда Эйлера, Якова и Николая Бернулли, Симеона Пуассона, связанные друг с другом в рамках решения двух задач о раздаче подарков от Деда Мороза.

1. Сложив пальцы на руках, ждём Деда Мороза

Цитата в предисловии выбрана мной не случайно. Эта цитата висела над доской в кабинете математики, где я учился в 8 и 9 классе. Фантазия порождает творческую деятельность, которая свойственна искусству и которой так не хватает нашему образованию. Мне повезло, у меня были отличные учителя. Я помню как был счастлив, когда сам смог в 5 классе самостоятельно составить магический квадрат 3 на 3. В старшей школе мне пришла в голову странная мысль — посчитать, сколькими способами можно совместить пальцы на руках (один на левой, один на правой) так, чтобы названия пальцев не совпадали. Конечно, можно было бы написать программу, которая переберет все варианты и даст ответ. Но мне (как и любому “чистому математику”) хотелось найти аналитическое решение. Только при таком подходе можно считать, что осознана суть проблемы. В школьные годы решить задачу мне не удалось. Решение нашлось спустя много лет, когда я начал преподавать теорию вероятностей в университете. В общем виде задача известна как “парадокс раздачи подарков”. Этот сюжет описан, например, в книге Г. Сакея “Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике” (М., Мир, 1990, с. 30–35), а также в книге Ф. Мостеллера “Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями” (М.: Наука, 1975, с. 84–89).

Сформулируем данный парадокс в виде первой шуточной задачи от Деда Мороза. Предприимчивый Дед Мороз собрал подарки для детей с n родителей и сложил их все в один большой мешок. Не заботясь о том, кому достанется какой подарок, он случайно раздал подарки n детям — каждому

по одному подарку. Для конкретного ребенка вероятность получения “своего” подарка равна $1/n$, т.е. стремится к нулю. При этом вероятность того, что хотя бы один ребенок получит свой подарок, достаточно велика (даже для $n \geq 3$) и она больше вероятности того, что не будет ни одного совпадения. В этом состоит суть парадокса.

Найдем общую формулу для таких вероятностей. Для этого отождествим подарки с числами $1, 2, 3, \dots, n$. Существует ровно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ перестановок этих чисел, соответственно, столько же существует способов разделения подарков между детьми. Обозначим через $\varphi_n(k)$ количество перестановок, при которых имеется ровно k совпадений чисел с номерами позиций. Очевидно, $\varphi_n(n) = 1$ — один способ верно раздать все подарки, $\varphi_n(n-1) = 0$ — невозможно раздать верно подарки ровно $n-1$ ребенку, т.к. последний автоматически получит тоже свой подарок. Рассуждая далее, мы получаем

$$\varphi_n(n-2) = C_n^{n-2} \cdot \varphi_2(0), \quad \varphi_n(n-3) = C_n^{n-3} \cdot \varphi_3(0), \quad \dots$$

Действительно, мы можем зафиксировать k позиций из n ровно C_n^k способами, где будут совпадения чисел с позициями, оставшиеся $n-k$ чисел можно переставить $\varphi_{n-k}(0)$ способами так, что среди них не будет ни одного совпадения. Таким образом

$$\varphi_n(k) = C_n^k \cdot \varphi_{n-k}(0).$$

Поскольку очевидно, что

$$\varphi_n(0) + \varphi_n(1) + \varphi_n(2) + \dots + \varphi_n(n) = n!,$$

то

$$C_n^0 \cdot \varphi_n(0) + C_n^1 \cdot \varphi_{n-1}(0) + \dots + C_n^{n-1} \cdot \varphi_1(0) + C_n^n \cdot \varphi_0(0) = n!$$

Записывая данные равенства последовательно для $n=0, n=1$ и т.д. до $n=n$, получаем систему из $n+1$ линейного уравнения относительно неизвестных $\varphi_0(0), \varphi_1(0), \varphi_2(0), \dots, \varphi_n(0)$. Эта система весьма замечательна, расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0! \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1! \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2! \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 0 & 3! \\ & & & & \dots & & \dots \end{array} \right).$$

В левой части этой матрицы находятся биномиальные коэффициенты, соответствующие числам треугольника Паскаля. Интересно, что на Востоке данная числовая таблица была известна задолго до Паскаля. В 1303 году была выпущена книга “Яшмовое зеркало четырёх элементов” китайского математика Чжу Шицзе, в которой был изображен треугольник Паскаля на одной из иллюстраций. Блез Паскаль посвятил изучению свойств данной арифметической структуры отдельную работу “Трактат об арифметическом треугольнике”, которая вышла в 1665 году и содержала много новых результатов.

Так как основная матрица системы является нижнетреугольной, причем все диагональные элементы — единицы, то ее определитель $\Delta = 1$. Тогда согласно правилу Крамера (впервые этот метод нахождения корней системы линейных уравнений встречается в работе Г. Крамера “Введение в анализ алгебраических кривых”, опубликованной в 1750 году)

$$\varphi_n(0) = \Delta_n := \left| \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0! & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1! & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 2! & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \dots & 3! & 3 \\ & & & & \dots & & \dots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & n! & n \end{array} \right|.$$

Раскладывая определитель по последнему столбцу снизу вверх, с учетом свойств определителей получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= n! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} - (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot C_n^1 + \\ &+ (n-2)! \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & C_{n-3}^1 & C_{n-3}^2 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_{n-1}^1 & 1 \\ C_n^2 & C_n^1 \end{vmatrix} - \\ &- (n-3)! \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & C_{n-4}^1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_{n-2}^1 & 1 & 0 \\ C_{n-1}^2 & C_{n-1}^1 & 1 \\ C_n^3 & C_n^2 & C_n^1 \end{vmatrix} + \dots + (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & C_n^1 & \dots & C_n^1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет определителей в первых слагаемых приводит к формуле

$$\varphi_n(0) = n! - (n-1)!C_n^1 + (n-2)!C_n^2 - (n-3)!C_n^3 + \dots$$

Чувство симметрии подсказывает нам, что общая формула должна иметь вид

$$\varphi_n(0) = n! - (n-1)!C_n^1 + (n-2)!C_n^2 - (n-3)!C_n^3 + (n-4)!C_n^4 - \dots + (-1)^n C_n^n. \quad (1)$$

Математика — наука строгая и такое эмпирическое умозаключение нуждается в строгом доказательстве, например, с помощью метода математической индукции. Автору не удалось его доказать прямым путём. Тем не менее написанная выше общая формула верна, исходя из совершенно иной идеи.

Из теории множеств известна формула включений–исключений, позволяющая находить число элементов в объединении конечного числа множеств. По-видимому, первым эту формулу использовал в 1713 году Николай Бернулли для решения задачи о встречах, частным случаем которой является задача о беспорядках, эквивалентная рассматриваемой задаче о раздаче подарков. Итак, справедлива формула

$$\begin{aligned} N := n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{j=1}^n n(A_j) - \sum_{i \neq j}^n n(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i \neq j \neq k}^n n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots - (-1)^n n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n), \end{aligned}$$

где через $n(X)$ обозначается число элементов во множестве X .

Пусть A_1 — подмножество перестановок из n чисел в которых число 1 стоит на своём месте, A_2 — подмножество перестановок из n чисел в которых число 2 стоит на своём месте и т.д. Очевидно, в каждом множестве A_k ровно $(n-1)!$ элементов. В каждом двойном пересечении $A_i \cap A_j$ ровно $(n-2)!$ элементов, в каждом тройном пересечении $A_i \cap A_j \cap A_k$ ровно $(n-3)!$ элементов и т.д. При этом число слагаемый в первой сумме равно $C_n^1 = n$, во второй сумме — количество двух элементных подмножеств из множества n чисел, т.е. C_n^2 и так далее. Отсюда

$$N = \varphi_n(1) + \varphi_n(2) + \dots + \varphi_n(n) =$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)!C_n^1 - (n-2)!C_n^2 + (n-3)!C_n^3 - (n-4)!C_n^4 + \dots - (-1)^n 0!C_n^n, \\
\varphi_n(0) &= n! - (\varphi_n(1) + \varphi_n(2) + \dots + \varphi_n(n)) = \\
&= n! - (n-1)!C_n^1 + (n-2)!C_n^2 - (n-3)!C_n^3 + (n-4)!C_n^4 - \dots + (-1)^n C_n^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы строго доказали формулу (1). Отметим, что величину $\varphi_n(0)$ также называют “числом беспорядков” из n элементов и обозначают $!n$. Для $n = 5$ получаем

$$\begin{aligned}
!5 &= \varphi_5(0) = 5! - 4!C_5^1 + 3!C_5^2 - 2!C_5^3 + 1!C_5^4 - C_5^5 = \\
&= 120 - 24 \cdot 5 + 6 \cdot 10 - 2 \cdot 10 + 5 - 1 = 44,
\end{aligned}$$

т.е. существует ровно 44 способа совместить пальцы на руках без совпадения названий.

Используя формулу (1), мы приходим к решению задачи о раздаче подарков. Вероятность получения хотя бы одним ребенком своего подарка равна

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{N}{n!} = \frac{(n-1)!C_n^1}{n!} - \frac{(n-2)!C_n^2}{n!} + \frac{(n-3)!C_n^3}{n!} - \dots + (-1)^n \frac{0!C_n^n}{n!} = \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots - (-1)^n \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Можно заметить, что выражение в правой части мало зависит от конкретно взятого числа n , так как быстро сходится к своему предельному значению. При $n = 5$ мы получаем $P_5 \approx 0,633$ (это вероятность того, что хотя бы одна пара пальцев на руках совпадет при случайному совмещении). При этом вероятность того, что ни один ребенок не получит свой подарок, равна

$$p_n(0) = \frac{\varphi_n(0)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

При $n = 5$ мы имеем $p_5(0) = 44/120 \approx 0,367$.

Аналогично можно доказать, что вероятность получения k верных подарков вычисляется по формуле

$$p_n(k) = \frac{C_n^k \varphi_{n-k}(0)}{n!} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \right).$$

Отсюда получаем $p_5(1) \approx 0,375$; $p_5(2) \approx 0,167$; $p_5(3) \approx 0,083$; $p_5(4) = 0$; $p_5(5) \approx 0,008$. Мы получили закон распределения случайной величины X , равной числу верно врученных подарков Дедом Морозом для 5 детей, что эквивалентно вероятностям совпадений пальцев на руках при случайному совмещении. В качестве упражнения оставим вопрос о максимуме (моде) этого распределения ($p_n(k)$ достигает максимума при $k = 0$ либо при $k = 1$).

2. Вездесущая экспонента: распределение Пуассона, максимальная прибыль, дифференциальные уравнения, формула Эйлера

Пытливый ум заставляет задуматься, а что же произойдет в предельной ситуации когда $n \rightarrow \infty$. Чтобы понять к какому числу $p(0)$ сходится ряд $p_n(0)$ можно использовать свойства производящей функции, а именно, изучить более сложную задачу о сходимости степенной последовательности

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

(понятно, что $p_n(0) = f_n(-1)$). Производная этой функции (как легко убедиться) даёт следующее выражение

$$f'_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда $|f_n(x) - f'_n(x)| \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$ для любого $x \in [-1; 1]$. На языке математического анализа последнее означает, что если функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится при $n \rightarrow \infty$, то для предельной функции $f(x)$ справедливо соотношение

$$f'(x) = f(x), \quad x \in [-1; 1].$$

Решая данное простейшее уравнение методом разделения переменной, получаем, что $f(x) = e^{x+c}$, $c = \text{const}$. Так как $f(0) = 1$, то $c = 0$ и мы получаем хорошо известную функцию – экспоненту $f(x) = e^x$, где $e \approx 2,71828$ – фундаментальная постоянная Леонарда Эйлера (впервые обозначение для этой константы появляется в переписке Эйлера с Гольдбахом от 25 ноября 1731 года).

Таким образом, в пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем $p_n(0) \rightarrow p(0) = e^{-1} \approx 0,368$ (отличие от $p_5(0)$ менее 10^{-3}). В общем случае

$$p_n(k) \rightarrow p(k) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Выражение, стоящее справа, это частный случай (при $\lambda = 1$) распределения Пуассона

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (2)$$

Это распределение впервые появилось в 1837 году в труде Симеона Пуассона “Исследование о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам”. Его иногда также называют законом малых чисел, поскольку оно описывает вероятности редких событий, например количество вынесенных судебных приговоров, количество опечаток в книге, поломок в системе, количество выигрышей в лотерее и т.д. В формуле (2) главный параметр λ равен математическому ожиданию случайной величины, т.е. среднему числу “успехов” в эксперименте. В рассматриваемой задаче о раздаче подарков $\lambda = 1$ означает, что в среднем лишь один ребенок получит свой подарок от Деда Мороза.

Постоянная Эйлера e является ключевой константой математического анализа уже по той причине, что экспонента $y = e^x$ является единственным инвариантом главного функционального преобразования – взятия производной. Впервые несколько первых знаков этого числа вычислил Якоб Бернулли, когда решал задачу о максимальной прибыли с учетом капитализации процентов. Опишем сейчас этот сюжет более детально.

Пусть в банк положена сумма 1 млн. рублей под 100% годовых, тогда через год на счету будет 2 млн. Ту же сумму процентов (1 млн.) можно было получить за два начисления по 50% раз в пол года, если процент отсчитывать от первоначального вклада. С учетом сложных процентов (капитализации) мы могли бы получить больше, а именно $(1 + 1/2)^2 = 2,25$ млн. Аналогично, если бы начисления производились бы раз в 3 года, максимальная прибыль составила бы $(1 + 1/3)^3 = 2,353$ и так далее. Самая максимальная прибыль получилась бы в том случае, если бы в каждое мгновение банк открывал новый вклад на только что полученную сумму, тогда можно было бы получить максимальный доход, равный

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

По видимому, Я. Бернулли первым доказал сходимость этой последовательности и нашел ее предел, равный 2,71828.... Важным фактом является то, что функциональный предел сходится к такому же числу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3)$$

С его помощью можно найти максимальную прибыль S_p в момент времени p , если положен вклад S_0 под $r\%$ годовых. Действительно, если проценты начисляются n раз в году, то спустя $p = l/n$ лет сумма на счету составит

$$S_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^l = S_0 \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{pn}.$$

Осуществляя замену $100n/r = x \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$S_p(S_0) = \lim_{x \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot \frac{rp}{100}} = S_0 \cdot e^{\frac{rp}{100}} = S_0 \cdot a^p, \quad a := e^{r/100}.$$

В силу непрерывности показательной функции параметр p можно считать не только рациональным, но любым действительным числом (в том числе отрицательным). Полученную формулу можно трактовать как семейство преобразований (для каждого фиксированного a^p при $p \in \mathbb{R}$) над S_0 , при этом $S_p(S_q) = S_q(S_p) = S_{p+q}$, $S_p(S_{-p}) = E$. Эти формулы означают, что суперпозиция двух преобразований является преобразованием (т.е. система замкнута), имеется единичное преобразование $E(S_0) = S_0$ (при $p = 0$), при этом каждому преобразованию S_p можно поставить в соответствие единственное обратное S_{-p} . Такими свойствами обладает фундаментальный объект высшей алгебры, который называется "группа" (в нашем случае — коммутативная). Отметим, что это понятие впервые было введено около 1830 года молодым гениальным математиком-революционером Эваристом Галуа, прожившим всего 20 лет.

Группы естественным образом возникают при исследовании консервативных динамических систем, где всё прошлое и будущее однозначно определяется значениями параметров в данный момент времени, при этом действие системы за время $p + q$ эквивалентно суперпозиции действий за время p и q . Интересно, что каждое непрерывное решение соответствующего функционального экспоненциального уравнения Коши $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ имеет вид $f(x) = a^x$, $a \in (0; +\infty)$.

Из всех функций только $y = e^x$ является инвариантом операции взятия производной, т.е. простейшим решением дифференциального уравнения $y' = y$. Если искать его решения в классе показательных функций, то из соотношения

$$(a^x)' = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^{x+y} - a^x}{y} = a^x \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = a^x$$

получаем условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = 1.$$

Из него следует, что $a^y = 1 + y + o(y)$ ($y \rightarrow 0$), где $o(y)$ — символ Э. Ландау, обозначающий некоторую функцию, для которой $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y)}{y} = 0$. Тогда

$$a = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y + o(y))^{1/y} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y + o(y))^{\frac{1}{y+o(y)} \cdot \frac{y+o(y)}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y+o(y)}{y}} = e^1 = e.$$

Показательные функции описывают решения всех типов обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), линейных с постоянными коэффициентами, если их интерпретировать как экспоненту в комплексной степени. Действительно, допустим, что функция $y = e^{ax}$ является решением уравнения $y' = ay$ для любого числа a , в том числе комплексного. Тогда, очевидно, что $y'' = ay' = a^2y$. Если $a = i$, то мы приходим к уравнению $y'' = -y$, которое имеет общее решение $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Поскольку линейной комбинацией двух линейно независимых решений описывается всё множество решений ОДУ, то непременно должны существовать (комплексные) константы c_1, c_2 такие, что $e^{ix} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Так как $e^0 = \cos 0 = 1$, то $c_1 = 1$. Приравнивая производные, получаем $ie^{ix} = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$, откуда $c_2 = i$. Таким образом, мы приходим к знаменитой формуле Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

из которой следует пожалуй самая удивительная формула математики — формула пяти основных математических констант

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Согласно основной теореме алгебры любой многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней, поэтому любое линейное ОДУ с постоянными коэффициентами $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ имеет в качестве решений функции $y_k = e^{\lambda_k x}$ как только λ_k — корни соответствующего характеристического уравнения $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$. При этом вещественная часть $\operatorname{Re} \lambda_k$ определяет изменение модуля решения $|y_k| = e^{\operatorname{Re} \lambda_k}$, а мнимая часть $\operatorname{Im} \lambda_k$ определяет частоту колебаний $\omega_k = \frac{|\operatorname{Im} \lambda_k|}{2\pi}$. Локально любые собственные движения классических механических систем (т.е. движения в отсутствие внешних сил) описываются линейной комбинацией таких экспоненциальных функций.

3. Формула Бернулли и бином Ньютона

Рассмотрим теперь вторую задачу от Деда Мороза, более простую. Пусть у Деда Мороза имеется ровно m подарков, которые он совершенно произвольным образом распределяет между n детей (т.е. кому-то может дать много подарков, а кому-то не дать совсем). Вычислим вероятность того, что определенный ребенок получит ровно k подарков. Эта задача становится понятной, если ее трактовать “с позиции подарков”. Каждый подарок точно будет вручен одному ребенку, отсюда каждый подарок может быть распределен n способами. Так как всего подарков m , то мы получаем n^m всевозможных способов распределения подарков. Определенный ребенок может получить k подарков ровно C_m^k способами (из множества m подарков выбираем всевозможные k элементные подмножества). Отсюда остается $m - k$ подарков, которые нужно распределить среди $n - 1$ детей, это можно сделать, следуя ранее описанной логике, ровно $(n-1)^{m-k}$ способами. Отсюда заключаем, что искомая вероятность равна

$$p_m(k) = \frac{C_m^k (n-1)^{m-k}}{n^m} = C_m^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = C_m^k (1-p)^{m-k} p^k, \quad (4)$$

где $p = 1/n$. Мы получили частный случай формулы Бернулли, которая описывает вероятность наступления ровно k успехов в серии из m независимых испытаний, когда вероятность успеха в одном испытании равна p . Действительно, вручение каждого подарка можно трактовать как испытание для каждого ребенка. У нас имелось m подарков (т.е. m независимых испытаний), каждый из которых можно подарить выбранному ребенку с вероятностью $p = 1/n$. Отсюда вероятность k успехов (т.е. получение k подарков данным ребенком) находится по формуле Бернулли (4).

Ясно, что сумма всех вероятностей $p_m(k)$ (для $k = 0, 1, 2, \dots, m$) равна единице, отсюда

$$\sum_{k=0}^m C_m^k (1-p)^{m-k} p^k = 1.$$

Это соотношение равносильно знаменитой формуле бинома Ньютона. Действительно, имеем

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{-m} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = 1.$$

Заменяя $h := \frac{p}{1-p}$, получаем

$$\sum_{k=0}^m C_m^k h^k = (1+h)^m. \quad (5)$$

Если теперь положить $h = b/a$, то

$$\sum_{k=0}^m C_m^k \left(\frac{b}{a}\right)^k = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m.$$

Отсюда, умножая на a^m , получаем формулу бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k = (a+b)^m.$$

Важно отметить, что формула (5) дает отличный быстрый способ подсчета целых и дробных степеней действительных чисел. Для нецелых m полагаем в ней

$$C_m^k := \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-k+1)}{k!}.$$

Вычислим, например, приближенно $\sqrt{26}$. Для этого положим $\sqrt{25(1+1/25)} = 5\sqrt{1+0,04}$. Имеем,

$$\begin{aligned} \sqrt{26} &= 5(1+0,04)^{0,5} \approx 5(1+0,5 \cdot 0,04 + \frac{0,5 \cdot (-0,5)}{2} \cdot 0,04^2) = \\ &= 5(1+0,02 - 0,0002) = 5,099. \end{aligned}$$

Это значение имеет точность 10^{-4} .

Также с помощью формулы (5) удобно производить расчет банковских процентов. Например, если положить в банк 100 тыс. рублей под 10% годовых, то за 10 лет на счету накопится $100 \cdot 1,1^{10}$ тыс. рублей. Для вычисления этого числа достаточно подсчитать нескольких первых слагаемых в формуле (5). Используя 5 первых членов, получаем

$$\begin{aligned} 100 \cdot 1,1^{10} &= 100(1+0,1)^{10} \approx \\ &\approx 100(1 + 10 \cdot 0,1 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0,1^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot 0,1^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,1^4) = \\ &= 100(1 + 1 + 0,45 + 0,12 + 0,021) = 259,1 \text{ (тыс. руб.)}. \end{aligned}$$

На самом деле с точностью до десятых $100 \cdot 1,1^{10} = 259,4$.

Если в формуле Бернулли считать, что $m \rightarrow \infty$, но при этом $mp \rightarrow \lambda$, то вероятности $p_m(k)$ будут стремиться к вероятностям p_k распределения Пуассона. Докажем это для второй задачи о раздаче подарков, где $p = 1/n$. Действительно, тогда $m \rightarrow \lambda n$. Будем устремлять $n \rightarrow \infty$ и используем определение (3) числа e . Тогда $e^{-\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^{\lambda n}$ и мы получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_m(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_m^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lambda n - k} n^{-k} = e^{-\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} C_{\lambda n}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k} n^{-k} = \\ &= e^{-\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda n \cdot (\lambda n - 1) \cdot (\lambda n - 2) \cdots (\lambda n - k + 1)}{k! \cdot (n - 1)^k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda = m/n$ — среднее число подарков, которые получает каждый ребенок. Если подарков и детей очень много, то среднее число подарков можно вычислить по формуле Пуассона (2). Например, в России в 2020 году проживало около 146 млн. человек, из которых около 28 млн. — дети до 16 лет. Если каждый взрослый (коих 118 млн.) выделит для деда мороза ровно по 1 подарку,

то каждый ребенок получит в среднем по $\lambda = 118/28 \approx 4,2$ подарка. Тогда каждому ребенку можно ожидать хотя бы один подарок от Деда Мороза с вероятностью

$$1 - p_0 = 1 - \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^0}{0!} \approx 1 - 0,015 = 0,985.$$

Распределение вероятностей по количествам подарков следующее

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^0}{0!} \approx 0,015, \quad p_1 = e^{-4,2} \cdot 4,2 \approx 0,063, \\ p_2 &= \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^2}{2!} \approx 0,132, \quad p_3 = \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^3}{3!} \approx 0,185, \\ p_4 &= \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^4}{4!} \approx 0,194, \quad p_5 = \frac{e^{-4,2} \cdot 4,2^5}{5!} \approx 0,163, \dots \end{aligned}$$

Заключение

Дед Мороз, конечно, раздал все подарки самим справедливым способом. Любое обучение рано или поздно оканчивается, и впереди наступает жизнь, полная самых различных задач и смыслов. Не всегда задачи и их решения являются красивыми и оптимальными, но знание математики приближает нас к этому. Каждый математик знает, что в идеальном математическом мире у любой задачи непременно есть элегантное решение и один определённый ответ. Реальный мир далёк от идеального, но я убеждён, что он стремится к идеальному в пределе. Так происходит от того, что порядок побеждает хаос и рациональная составляющая сильнее иррациональной. Нет не связанных друг с другом теорий и наук, нет науки без искусства и искусства без науки. Есть лишь фрагментарное и поверхностное восприятие окружающей реальности. Всё сущее — едино, специфично, но математично. Выражаясь словами из стихотворения “Сообщающийся эскиз” А. Вознесенского, “мы, как сосуды, налиты синим, зеленым, карим, друг в друга сутью, что в нас носили, перетекаем... Всё течет. Всё изменяется. Одно переходит в другое. Квадраты расползаются в эллипсы... Фразы бессильны. Словесились водну фразу...”

Войтицкий Виктор Иванович,
доцент кафедры математического анализа
Физико-технического института Крымского федерального
университета им. В.И. Вернадского,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

О некоторых свойствах функций, характеризуемых нулевыми интегралами

B. B. Волчков, Вит. B. Волчков, H. P. Волчкова

Статья знакомит читателя с некоторыми важными инструментами современной математики на примере изучения класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем квадратам фиксированного размера, лежащим в заданном круге. Приводится критерий полного дифференциала в усиленной форме, а также рассматриваются обобщения других классических результатов, связанных с нулевыми интегральными средними.

Статья печатается с продолжением.

§1. Введение

Условия, описывающие те или иные классы функций в терминах нулевых интегралов, возникают в различных разделах математики. К примеру, согласно классической теореме Г. Минковского класс непрерывных нечетных функций f на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$ определяется условием

$$\int_{\gamma} f ds = 0,$$

где γ – произвольная большая окружность на \mathbb{S}^2 (см., например, [1, гл. 1, § 6]). Менее известна теорема единственности Ф. Джона: если бесконечно дифференцируемая в \mathbb{R}^2 функция f имеет нулевые интегралы по всем единичным окружностям и равна нулю в каком-то единичном круге, то $f \equiv 0$ [2, гл. 6]. Еще один пример такого рода дает теорема С. Хелгасона о носителе: если функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ имеет нулевые интегралы по всем прямым, лежащим вне некоторого компактного выпуклого множества E , и $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |\xi|^k |f(\xi)| < +\infty$ для любого целого $k > 0$, то $f(x) = 0$ при $x \notin E$ [3, гл. 1, следствие 2.8].

Теоремы, связанные с нулевыми интегральными средними, встречаются и при освоении студентами общих математических курсов в вузе. Так, при изучении дифференциальных уравнений вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

возникает вопрос о том, когда выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Он тесно связан с вопросом об условиях независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования. Ответы на указанные вопросы можно резюмировать в виде следующей теоремы, рассматриваемой в курсе математического анализа.

Теорема 1. Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$;
- 2) для любых точек $A, B \in D$ интеграл $\int_{\gamma_{AB}} P dx + Q dy$ не зависит от кусочно-гладкой кривой $\gamma_{AB} \subset D$, соединяющей точки A и B ;
- 3) выражение $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области D функции U ;
- 4) в области D выполнено условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Этот результат можно переформулировать на языке дифференциальных форм, а также в терминах теории векторного поля (см., например, [4, гл. 14, § 3]).

В общем курсе комплексного анализа доказывается теорема о существовании первообразной, аналогичная знаменитой формуле Ньютона-Лейбница.

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывна в области D комплексной плоскости \mathbb{C} и интеграл от f по любой замкнутой спрямляемой кривой γ из D равен нулю. Тогда функция f имеет первообразную в области D . При этом*

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0), \quad z_0, z \in D,$$

где F — произвольная первообразная функции f в области D .

Из этого результата и наличия производной любого порядка у голоморфной функции получается общезвестное интегральное условие голоморфности.

Теорема 3 (Г. Морера). *Пусть функция f непрерывна в области D комплексной плоскости \mathbb{C} и интеграл от f по любой замкнутой спрямляемой кривой γ из D равен нулю. Тогда функция f голоморфна в области D .*

Доказательства теорем 1–3 существенно используют широкий произвол в выборе контуров γ . Вместе с тем в ряде случаев это требование на γ можно значительно ослабить. В данной работе мы докажем, в частности, следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть функции P и Q непрерывно дифференцируемы в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, являющейся объединением открытых кругов, радиус каждого из которых больше $\sqrt{5}/2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

$$1) \int_{\partial K} P dx + Q dy = 0 \text{ для любого единичного квадрата } K \subset D;$$

2) выражение $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом некоторой дифференцируемой в области D функции U .

Теорема 5. *Пусть функция f непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$, являющейся объединением открытых кругов, радиус каждого из которых больше $\sqrt{5}/2$. Если интеграл от f по границе любого единичного квадрата $K \subset D$ равен нулю, то функция f голоморфна в области D .*

В отличие от теорем 1–3, особенность двух последних результатов состоит в том, что контуры, по которым ведется интегрирование, конгруэнтны границе квадрата фиксированного размера. Как мы увидим далее, значение $\sqrt{5}/2$ в формулировках выше уменьшить нельзя. Отметим, что метод доказательства теорем 4, 5 является весьма поучительным и применим к другим задачам, связанным с интегрированием по квадратам (см. § 10 ниже). Он затрагивает элементы гармонического анализа, теории представлений групп, обобщенные функции, преобразование Радона и другие важные инструменты современной математики (см. §§ 2–10). При этом изложение в работе является замкнутым и не выходит за рамки третьего курса математических специальностей университетов.

Отметим также, что при подходящем размере области D вместо квадратов в теоремах 4, 5 можно брать и различные другие множества. Указанные явления тесно связаны с некоторыми экстремальными задачами о множествах Помпейю (см. § 7).

§2. Радиальные функции и их обобщения

Переход от объектов из некоторого класса к простейшим в определенном смысле элементам того же класса — неотъемлемая часть идеологии математики. Одним из ее проявлений является представление функции в виде ряда Фурье. В данной работе нам потребуется простейший вариант разложения в ряды Фурье по *сферическим гармоникам* [5, гл. 5, § 25].

Пусть $\text{SO}(2)$ — группа поворотов плоскости \mathbb{R}^2 вокруг нуля. Поворот \mathbb{R}^2 на угол α определяется матрицей

$$\tau_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad \text{При этом } \tau_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Как обычно, будем отождествлять \mathbb{R}^2 с комплексной плоскостью \mathbb{C} . Поскольку

$$e^{i\alpha}(x + iy) = x \cos \alpha - y \sin \alpha + i(x \sin \alpha + y \cos \alpha),$$

то в комплексной форме преобразование τ_α имеет вид $\tau_\alpha z = \tau_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$.

Положим $\mathbb{S} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = 1\}$. Окружность \mathbb{S} можно рассматривать как группу относительно операции умножения комплексных чисел. Каждый элемент ω этой группы задается числом $e^{i\alpha}$, где α определено с точностью до кратного 2π . Таким образом, группа \mathbb{S} изоморфна группе $\text{SO}(2)$.

Для любого $\xi \in \mathbb{R}^2$ множество $\{\tau\xi : \tau \in \text{SO}(2)\}$ называется *орбитой* точки ξ относительно группы $\text{SO}(2)$. Ясно, что орбита точки $\xi \neq 0$ представляет собой окружность с центром в нуле и радиусом $|\xi|$.

Пусть $0 < R \leq +\infty$, $B_R = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < R\}$ — открытый круг радиуса R на \mathbb{R}^2 с центром в нуле.

Определение 1. *Функция f , определенная на B_R , называется радиальной, если она зависит только от $|\xi|$, т.е. f имеет вид $f(\xi) = f_0(|\xi|)$, где f_0 — функция одной переменной.*

Радиальность функции f означает, что f является постоянной на окружностях с центром в нуле. Кроме того, f радиальна тогда и только тогда, когда $f \circ \tau = f$ для всех $\tau \in \text{SO}(2)$.

Рассмотрим теперь естественные обобщения радиальных функций, связанные с разложениями в ряды Фурье по сферическим гармоникам.

Пусть ρ, φ ($\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) — полярные координаты точки $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, так что

$$z = (x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Всякой функции $f \in C(B_R)$ поставим в соответствие ряд Фурье

$$f(z) = f(\rho e^{i\varphi}) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\rho) e^{im\varphi}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (1)$$

где

$$f_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \quad 0 < \rho < R. \quad (2)$$

При $m = 0$ мы получаем радиальную функцию $f_0(\rho) = f_0(\sqrt{x^2 + y^2})$. Функции вида

$$f(z) = \sum_{|m| \leq M} f_m(\rho) e^{im\varphi} = \sum_{|m| \leq M} f_m(|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^m, \quad M \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

называются *SO(2)-финитными*. Это название связано с тем, что все смешанные функции $f(\tau z)$, $\tau \in \text{SO}(2)$, лежат в конечномерном пространстве:

$$f(e^{i\alpha}z) = \sum_{|m| \leq M} e^{i\alpha m} f_m(|z|) \left(\frac{z}{|z|} \right)^m.$$

Далее нам потребуются формулы дифференцирования SO(2)-финитных функций.

Лемма 1. Имеют место равенства

$$2(u(\rho)e^{im\varphi})'_x = \left(u'(\rho) + \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m-1)\varphi} + \left(u'(\rho) - \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m+1)\varphi}, \quad (3)$$

$$2i(u(\rho)e^{im\varphi})'_y = \left(u'(\rho) - \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m+1)\varphi} - \left(u'(\rho) + \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m-1)\varphi}, \quad (4)$$

$$\Delta(u(\rho)e^{im\varphi}) = \left(u''(\rho) + \frac{u'(\rho)}{\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}u(\rho) \right) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

где Δ – оператор Лапласа на \mathbb{R}^2 .

Доказательство леммы 1. Установим сначала равенство (3). Имеем

$$\begin{aligned} (u(\rho)e^{im\varphi})'_x &= \left[u(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^m \right]'_x = \\ &= u'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^m + \\ &+ mu(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^{m-1} \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - (x+iy)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \right) = \\ &= u'(\rho) \frac{x}{\rho} e^{im\varphi} + mu(\rho) e^{i(m-1)\varphi} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{xe^{i\varphi}}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $x = \rho \cos \varphi = \rho (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, получаем

$$\begin{aligned} 2(u(\rho)e^{im\varphi})'_x &= u'(\rho)e^{im\varphi}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + mu(\rho)e^{i(m-1)\varphi} \left(\frac{2}{\rho} - \frac{e^{i\varphi}}{\rho}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \right) = \\ &= u'(\rho)(e^{i(m+1)\varphi} + e^{i(m-1)\varphi}) + \frac{mu(\rho)}{\rho} e^{i(m-1)\varphi} (2 - e^{2i\varphi} - 1) = \\ &= u'(\rho)(e^{i(m+1)\varphi} + e^{i(m-1)\varphi}) + \frac{mu(\rho)}{\rho} e^{i(m-1)\varphi} - \frac{mu(\rho)}{\rho} e^{i(m+1)\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (3) доказана. Равенство (4) доказывается аналогично. Наконец, оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отсюда следует соотношение (5).

§3. Инвариантное интегрирование

Основное применение инвариантного интегрирования на группе состоит в построении инвариантных объектов посредством интегрирования неинвариантных объектов. Здесь мы рассмотрим простейший вариант инвариантного интегрирования, связанный с группой поворотов плоскости.

Определим интеграл на группе $\mathbb{S} = \text{SO}(2)$ (*интеграл Хаара на группе поворотов*) равенством

$$\int_{\mathbb{S}} h(\omega) d\omega = \int_{\text{SO}(2)} h(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\alpha}) d\alpha. \quad (6)$$

Множитель $1/(2\pi)$ поставлен здесь для того, чтобы мера всей группы поворотов была нормирована, т.е.

$$\int_{\mathbb{S}} d\omega = \int_{SO(2)} d\tau = 1. \quad (7)$$

Интеграл (6) обладает следующим свойством инвариантности относительно сдвигов:

$$\int_{\mathbb{S}} h(\tau^* \omega) d\omega = \int_{\mathbb{S}} h(\omega) d\omega, \quad \int_{SO(2)} h(\tau^* \tau) d\tau = \int_{SO(2)} h(\tau) d\tau, \quad \tau^* \in SO(2). \quad (8)$$

Действительно, если поворот τ^* имеет вид $\tau^* z = e^{i\alpha} z$, то

$$\int_{\mathbb{S}} h(\tau^* \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i(\theta+\alpha)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} h(e^{it}) dt.$$

В силу периодичности $h(e^{it})$ отсюда получаем

$$\int_{\mathbb{S}} h(\tau^* \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) dt,$$

что доказывает (8).

В качестве иллюстрации указанного интеграла введем понятие радиализации функции.

Определение 2. Пусть $f \in C(B_R)$. Радиальная функция F , определенная равенством

$$F(z) = \int_{SO(2)} f(\tau z) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha} z) d\alpha,$$

называется радиализацией функции f .

Отметим простейшие свойства радиализации.

Лемма 2. 1) Функция и ее радиализация совпадают в начале координат.

2) Для радиализации F функции f справедлива формула

$$F(z) = f_0(|z|), \quad \text{где} \quad f_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\alpha}) d\alpha.$$

Доказательство леммы 2. По определению радиализации имеем (см. (7))

$$F(0) = \int_{SO(2)} f(\tau 0) d\tau = \int_{SO(2)} f(0) d\tau = f(0),$$

$$\begin{aligned} F(z) &= F(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i(\varphi+t)}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} f(\rho e^{i\alpha}) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\alpha}) d\alpha = f_0(\rho) = f_0(|z|), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Замечание 1. Аналогично доказывается, что для произвольного члена ряда (1) справедлива формула

$$f_m(\rho)e^{im\varphi} = \int_{\text{SO}(2)} f(\tau z)\tau^{-m}d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\alpha}z)e^{-im\alpha}dt. \quad (9)$$

Из этой формулы видно, что функция $f_m(\rho)e^{im\varphi}$ допускает непрерывное продолжение в точку 0. При этом $f_m(\rho)e^{im\varphi} \in C^n(B_R)$, если $f \in C^n(B_R)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Далее все функции, заданные и непрерывные в проколотой окрестности нуля, допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Перейдем теперь к изучению класса функций, имеющих нулевые интегралы по квадратам фиксированного размера.

Пусть $R > \sqrt{2}/2$. Обозначим через \mathcal{K}_R класс всех функций $f \in C(B_R)$, таких что

$$\iint_K f(x, y)dxdy = 0 \quad (10)$$

для любого единичного квадрата $K \subset B_R$.

Лемма 3. Пусть $f \in \mathcal{K}_R \cap C^n(B_R)$ при некотором $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f_m(\rho)e^{im\varphi} \in \mathcal{K}_R \cap C^n(B_R)$ при всех $m \in \mathbb{Z}$.

Доказательство леммы 3. В силу замечания 1 достаточно показать, что $f_m(\rho)e^{im\varphi} \in \mathcal{K}_R$. Пусть $K \subset B_R$. Используя формулу (9), имеем

$$\begin{aligned} \iint_K f_m(\rho)e^{im\varphi}dxdy &= \int_{\text{SO}(2)} \iint_K f(\tau z)dxdy \tau^{-m}d\tau = \\ &= \int_{\text{SO}(2)} \iint_{\tau K} f(x, y)dxdy \tau^{-m}d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathcal{K}_R$ и для любого $\tau \in \text{SO}(2)$ множество τK является единичным квадратом, лежащим в B_R , то

$$\iint_{\tau K} f(x, y)dxdy = 0.$$

Отсюда и из равенства выше следует требуемое утверждение.

§4. Инфинитезимальный метод

Пусть G — группа и каждому числу $t \in \mathbb{R}$ поставлен в соответствие элемент $g(t) \in G$. Если для любых $t, s \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $g(t)g(s) = g(t + s)$, то $g(t)$ называют *однопараметрической подгруппой* группы G .

Примерами однопараметрических подгрупп могут служить подгруппа параллельных переносов по фиксированному направлению в группе движений $M(2)$ евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 , подгруппа $\text{SO}(2)$ группы $M(2)$ и т.д.

Идея инфинитезимального метода состоит в том, чтобы, мало возмущая с помощью однопараметрических подгрупп функцию f , удовлетворяющую определенным условиям, и дифференцируя эти условия по параметрам возмущения, получить некоторые дополнительные требования на f . Этот метод часто используется в теории представлений групп и ее приложениях. В данной работе мы применим инфинитезимальный подход к изучению класса \mathcal{K}_R .

Лемма 4. Пусть $f \in \mathcal{K}_R \cap C^n(B_R)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда все частные производные от f порядка не выше n также принадлежат классу \mathcal{K}_R .

Доказательство леммы 4. Если квадрат K содержится в B_R , то при малых t его сдвиг $K + (t, 0)$ также лежит в B_R . Поэтому в силу условия $f \in \mathcal{K}_R$ имеем

$$\iint_K f(x + t, y) dx dy = \iint_{K + (t, 0)} f(x, y) dx dy = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по t и полагая $t = 0$, приходим к равенству

$$\iint_K \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x} \in \mathcal{K}_R \cap C^{n-1}(B_R)$. Аналогично доказывается, что $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{K}_R \cap C^{n-1}(B_R)$. Отсюда индукцией получаем требуемое утверждение.

Следствие 1. Пусть функция вида $u(\rho)e^{im\varphi}$ ($m \in \mathbb{Z}$) принадлежит классу $\mathcal{K}_R \cap C^n(B_R)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда функции

$$\left(u'(\rho) + \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m-1)\varphi}, \quad \left(u'(\rho) - \frac{mu(\rho)}{\rho} \right) e^{i(m+1)\varphi}$$

принадлежат классу $\mathcal{K}_R \cap C^{n-1}(B_R)$.

Доказательство. В силу леммы 4 имеем $(u(\rho)e^{im\varphi})'_x \in \mathcal{K}_R \cap C^{n-1}(B_R)$. Теперь требуемое утверждение следует из равенства (3) и леммы 3.

Лемма 5. Пусть $f \in \mathcal{K}_R$. Тогда смешанная разность этой функции по вершинам любого единичного квадрата $K \subset \mathcal{K}_R$ равна нулю.

Доказательство леммы 5. Сначала рассмотрим случай, когда $K = [a, a+1] \times [b, b+1]$. Поскольку $f \in \mathcal{K}_R$, то при всех достаточно малых t_1, t_2 имеем

$$\int_{a+t_1}^{a+1+t_1} dx \int_{b+t_2}^{b+1+t_2} f(x, y) dy = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по t_1 и полагая $t_1 = 0$, получаем

$$\int_{b+t_2}^{b+1+t_2} (f(a+1, y) - f(a, y)) dy = 0.$$

Теперь дифференцируя по t_2 и полагая $t_2 = 0$, приходим к требуемому равенству

$$f(a+1, b+1) - f(a, b+1) - f(a+1, b) + f(a, b) = 0.$$

В общем случае выберем $\tau \in \text{SO}(2)$, такое что квадрат τK имеет стороны, параллельные координатным осям. Так как $f \circ \tau^{-1} \in \mathcal{K}_R$, то по доказанному выше смешанная разность функции $f \circ \tau^{-1}$ по вершинам квадрата τK равна нулю. Это равносильно тому, что смешанная разность функции f по вершинам квадрата K равна нулю. Таким образом, лемма 5 доказана.

§5. Метод сглаживания свертками

В теории обобщенных функций Соболева-Шварца [5, гл. 2] на \mathbb{R}^2 важную роль играет так называемая ε -шапочка, т.е. бесконечно дифференцируемая функция

$$\omega_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\xi|^2}\right), & |\xi| < \varepsilon \\ 0, & |\xi| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (11)$$

где постоянная $c_\varepsilon > 0$ такова, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 1. \quad (12)$$

Стандартный прием сглаживания состоит в замене локально интегрируемой функции f с данным условием гладкими функциями (*свертками*) вида

$$(f * \omega_\varepsilon)(\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\xi) \omega_\varepsilon(\eta - \xi) d\xi.$$

Такой подход является весьма эффективным, поскольку для изучения свойств функции f во многих случаях достаточно иметь информацию о свойствах свертки $f * \omega_\varepsilon$.

Здесь мы рассмотрим метод сглаживания в контексте свойств класса \mathcal{K}_R .

Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^2$. Как обычно, символом $f\chi_E$ будем обозначать функцию, равную f на E и равную нулю вне E .

Лемма 6. Пусть $0 < \varepsilon < R$, $f \in C(B_R)$ и

$$f_\varepsilon(\eta) = \iint_{B_\varepsilon} f(\eta - \xi) \omega_\varepsilon(\xi) d\xi, \quad \eta \in B_{R-\varepsilon}. \quad (13)$$

Тогда $f_\varepsilon \in C^\infty(B_{R-\varepsilon})$.

Доказательство леммы 6. Фиксируем число $\delta \in (0, R - \varepsilon)$. Неравенство треугольника показывает, что $\eta - \xi \in B_{R-\delta}$ для любых $\eta \in B_{R-\varepsilon-\delta}$, $\xi \in B_\varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\eta) &= \iint_{B_\varepsilon} (f\chi_{B_{R-\delta}})(\eta - \xi) \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = \iint_{\mathbb{R}^2} (f\chi_{B_{R-\delta}})(\eta - \xi) \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (f\chi_{B_{R-\delta}})(\xi) \omega_\varepsilon(\eta - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Из этого равенства, гладкости ω_ε и свойств интеграла, зависящего от параметра, получаем, что $f_\varepsilon \in C^\infty(B_{R-\varepsilon-\delta})$. В силу произвольности $\delta \in (0, R - \varepsilon)$ отсюда следует требуемое утверждение.

Лемма 7. Пусть $f \in C(B_R)$. Тогда для любого $r \in (0, R)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\eta \in B_r} |f_\varepsilon(\eta) - f(\eta)| = 0.$$

Доказательство леммы 7. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна в замкнутом круге $\overline{B}_{(R+r)/2}$, т.е. для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $\xi_1, \xi_2 \in \overline{B}_{(R+r)/2}$, удовлетворяющих условию $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon_1.$$

Пусть $\delta_1 = \min\{(R-r)/2, \delta\}$ и $0 < \varepsilon < \delta_1$. Из (11)–(13) для $\eta \in B_r$ имеем

$$f_\varepsilon(\eta) - f(\eta) = \iint_{B_\varepsilon} (f(\eta - \xi) - f(\eta)) \omega_\varepsilon(\xi) d\xi.$$

Поэтому (см. (12))

$$\sup_{\eta \in B_r} |f_\varepsilon(\eta) - f(\eta)| \leq \sup_{\eta \in B_r} \sup_{\xi \in B_\varepsilon} |f(\eta - \xi) - f(\eta)|.$$

Если $\eta \in B_r$, $\xi \in B_\varepsilon$, то точки $\eta - \xi$ и η лежат в круге $B_{(R+r)/2}$, причем $|\eta - \xi - \eta| = |\xi| < \varepsilon < \delta$. Отсюда и из равномерной непрерывности функции f в круге $\overline{B}_{(R+r)/2}$ заключаем, что

$$\sup_{\eta \in B_r} |f_\varepsilon(\eta) - f(\eta)| < \varepsilon_1$$

при $0 < \varepsilon < \delta_1$. Таким образом, лемма 7 доказана.

Замечание 2. Отметим, что если функция f локально интегрируема в круге B_R , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{B_r} |f_\varepsilon(\xi) - f(\xi)| d\xi = 0 \quad (14)$$

для любого $r \in (0, R)$.

Лемма 8. Если $\mathcal{K}_{R-\varepsilon} \cap C^\infty(B_{R-\varepsilon}) = \{0\}$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то $\mathcal{K}_R = \{0\}$.

Доказательство леммы 8. Пусть $f \in \mathcal{K}_R$, $0 < \varepsilon < R - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда для любого единичного квадрата $K \subset B_{R-\varepsilon}$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_K f_\varepsilon(\eta) d\eta &= \iint_{B_\varepsilon} \iint_K f(\eta - \xi) d\eta \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = \\ &= \iint_{B_\varepsilon} \iint_{K-\xi} f(\vartheta) d\vartheta \omega_\varepsilon(\xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

поскольку $K - \xi \subset B_R$ при любом $\xi \in B_\varepsilon$. Следовательно, $f_\varepsilon \in \mathcal{K}_{R-\varepsilon} \cap C^\infty(B_{R-\varepsilon})$ (см. лемму 6). Теперь условие леммы 8 показывает, что $f_\varepsilon = 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Отсюда и из леммы 7 получаем, что $f \equiv 0$.

§6. Теорема Крамера-Вольда

Рассмотрим сначала одно свойство симметрии преобразования Фурье функций двух переменных.

Напомним, что для любой функции $f \in L(\mathbb{R}^2)$ (интегрируемой по Лебегу) ее преобразование Фурье определяется равенством

$$\widehat{f}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(см. [6, гл. 8, § 4]). При этом \widehat{f} представляет собой ограниченную непрерывную функцию на \mathbb{R}^2 , которая стремится к нулю на бесконечности. Кроме того, каждая функция пространства $L(\mathbb{R}^2)$ однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своим преобразованием Фурье, т.е. если $\widehat{f} \equiv 0$, то $f = 0$ почти всюду на \mathbb{R}^2 .

Лемма 9. Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R}^2)$ коммутирует с поворотами, т.е.

$$\widehat{f \circ \tau} = \widehat{f} \circ \tau \quad \text{для любого } \tau \in \mathrm{SO}(2). \quad (15)$$

Доказательство леммы 9. Обозначим через (ξ, η) обычное скалярное произведение векторов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$. Для любого $\tau \in \text{SO}(2)$ имеем

$$\widehat{f}(\tau\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\eta) e^{-i(\eta, \tau\xi)} d\eta = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\eta) e^{-i(\tau^{-1}\eta, \xi)} d\eta.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $\tau^{-1}\eta = \zeta$, получаем

$$\widehat{f}(\tau\xi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(\tau\zeta) e^{-i(\zeta, \xi)} d\zeta = \widehat{f \circ \tau}(\xi),$$

что и требовалось.

Теорема 6 (Г. Крамер-Г. Вольд [7], 1936). Если $f \in L(\mathbb{R}^2)$ и

$$\int_l f ds = 0 \tag{16}$$

для почти всех прямых l в каждом направлении, то $f = 0$ почти всюду.

Доказательство теоремы 6. Фиксируем произвольное направление в \mathbb{R}^2 . Так как $f \in L(\mathbb{R}^2)$, то в силу теоремы Фубини функция f интегрируема на почти всех прямых с этим направлением. Таким образом, условие (16) корректно.

Далее, для любого $v \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \widehat{f}(0, v) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-ivy} dx dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) e^{-ivy} dy = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = 0$$

при почти всех y . Поэтому $\widehat{f} = 0$ на оси Oy .

Пусть теперь l — произвольная прямая, проходящая через 0. Возьмем $\tau \in \text{SO}(2)$, такое что $\tau(Oy) = l$. Функция $f \circ \tau$ также имеет нулевые интегралы для почти всех прямых в каждом направлении (ds инвариантно относительно поворотов). Тогда по доказанному выше

$$\widehat{f \circ \tau}|_{Oy} = 0.$$

Отсюда и из (15) получаем $\widehat{f}|_l = \widehat{f}|_{\tau(Oy)} = 0$. Значит, $\widehat{f} \equiv 0$ и $f = 0$ почти всюду.

В. Серпинский построил неизмеримое по Лебегу плоское множество E , имеющее с каждой прямой l из \mathbb{R}^2 не более двух общих точек (см. [8, гл. 10, § 21]). Очевидно, что индикатор χ_E такого множества E имеет нулевые интегралы по всем прямым на \mathbb{R}^2 . При этом функция χ_E не эквивалентна нулевой функции.

Отметим также, что интегрально-геометрическое преобразование, которое сопоставляет функции на \mathbb{R}^2 её интегралы по всевозможным прямым, называется *преобразованием Радона* (см. [1]).

Литература

- [1] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. - М.: Добросвет, 2000. - 208 с.
- [2] Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. - М.: ИЛ, 1958. - 158 с.
- [3] Хелгасон С. Преобразование Радона. - М.: Мир, 1983. - 152 с.
- [4] Зорич В.А. Математический анализ II. - М.: Наука, 1984. - 640 с.
- [5] Владимиров В., С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.
- [6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989. - 624 с.
- [7] Cramér H., Wold H. Some theorems on distribution functions // J. London Math. Soc. - V. 11. - No 2. - 1936. - p. 290–294.
- [8] Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. - М.: Мир, 1967. - 252 с.

Волчков Валерий Владимирович,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Донецкого
национального университета, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Волчков Виталий Владимирович,
профессор кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений Донецкого
национального университета, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: volna936@gmail.com

Волчкова Наталья Петровна,
доцент кафедры высшей математики им. В.В. Пака
Донецкого национального технического
университета, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: volna936@gmail.com

Поверхности второго порядка как геометрические места точек в пространстве

C. B. Жаров, Л. Б. Медведева

Знакомство с известными учебниками по аналитической геометрии позволяет сказать, что алгебраические поверхности второго порядка в евклидовом пространстве определяются в основном алгебраически, посредством уравнений. Встречается и конструктивный подход: поверхности получаются путем вращения кривых второго порядка вокруг своих осей симметрий и деформацией полученных поверхностей вращения путем сжатия. Метрический подход, применяемый в случае кривых второго порядка, ограничивается лишь формулировкой задач, требующих определить геометрическое место точек заданного вида в пространстве. Исключение составляет статья Д.И. Перепелкина, изданная в 1936 году. В ней в пространстве исследуется множество точек, для которых отношение расстояния до заданной точки к расстоянию до данной прямой, не содержащей эту точку, есть величина постоянная. Исследование проводится чисто геометрически с использованием метода сечений и известных геометрических мест точек на плоскости.

В данной работе исследуются геометрические места точек в пространстве, определяемые метрическими связями с некоторым набором пар точек, прямых и плоскостей. Показано, что любая невырожденная поверхность второго порядка может рассматриваться как некоторое геометрическое место точек пространства, причем не единственное.

В учебной литературе по аналитической геометрии кривые второго порядка определяются по-разному. В одних учебниках ([1, 4, 5, 12]) эти кривые определяются аналитически — посредством алгебраических уравнений. В других учебных пособиях ([2, 3, 7, 8]) даются метрические определения: кривые вводятся как геометрические места точек на плоскости, удовлетворяющих определенным характеристическим свойствам. Напомним эти определения.

Эллипс — это множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами:

$$M_s = \{M : F_1M + F_2M = 2a, 2a > F_1F_2\} \quad (1)$$

Гипербола — это множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами:

$$M_e = \{M : |F_1M - F_2M| = 2a, 2a < F_1F_2\} \quad (2)$$

Парабола — это множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F и заданной прямой d , не проходящей через точку F :

$$M_n = \{M : FM = \rho(M, d)\} \quad (3)$$

Точка F называется *фокусом*, а прямая d — *директрисой* параболы.

В учебниках по аналитической геометрии [1, 2, 3, 7, 8, 10, 12], предназначенных для студентов математических специальностей классических и педагогических университетов, доказывается также следующее утверждение.

Теорема 1. Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки к расстоянию до заданной прямой есть величина постоянная, равная числу ε , является кривой второго порядка: эллипсом, если $\varepsilon < 1$, гиперболой, если $\varepsilon > 1$, параболой, если $\varepsilon = 1$.

Алгебраические поверхности второго порядка в большинстве случаев определяются алгебраически, посредством уравнений. Можно встретить и конструктивный подход. Согласно этому подходу, поверхности получаются путем вращения кривых второго порядка вокруг своих осей симметрий и последующей деформации полученных поверхностей вращения путем сжатия [2, 3]. К конструктивному методу относится и определение линейчатых поверхностей второго порядка с помощью двух проективных пучков плоскостей или рядов точек (Я. Штейнер) [17, 20].

Метрический подход для введения поверхностей второго порядка, применяемый в случае кривых второго порядка, можно найти в зарубежных изданиях [18, 19] 19 века. Эти работы ограничиваются обобщением на случай пространства теоремы 1. Тому же обобщению посвящена и статья [11] Перепелкина Д.И., изданная в 1936 году. В работе Перепелкина Д.И. получены эллипсоид вращения, однополостный гиперболоид вращения и параболический цилиндр. Дополнительные соглашения о вычислении расстояний от точек пространства до заданной точки и данной прямой в направлении, которое определяется плоскостью, перпендикулярной плоскости, проходящей через заданную точку и заданную прямую, позволили автору статьи получить следующие поверхности: эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический параболоид и гиперболический цилиндр. Исследование проводится чисто геометрически с использованием метода сечений и привлечением известных геометрических мест точек на плоскости.

Знакомство с изложением темы “Поверхности второго порядка” в различных учебниках по аналитической геометрии, изданных в разное время в нашей стране, позволяет сказать, что невырожденные поверхности второго порядка как геометрические места точек в пространстве в них не рассматриваются. В лучшем случае, они содержат формулировки задач, требующих найти геометрическое место точек пространства, которое является той или иной поверхностью второго порядка [6, 7, 8, 9, 10].

В данной работе каждая невырожденная поверхность второго порядка будет получена как некоторое геометрическое место точек в пространстве. При этом основным методом исследования является метод координат. Задачи 888 и 899 из сборника задач [6] позволили сформулировать и доказать следующие два утверждения:

Теорема 2. *Множество точек пространства, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина $2a$, большая, чем расстояние между точками F_1 и F_2 , является эллипсоидом вращения.*

Если $|F_1F_2| = 2c$ и ортонормированная система координат выбрана так, что $F_1(c, 0, 0)$, $F_2(-c, 0, 0)$, то уравнение этого геометрического места точек имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2). \quad (4)$$

Полученное уравнение определяет эллипсоид вращения. Осью вращения является ось Ox .

Теорема 3. *Множество точек пространства, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух заданных точек F_1 и F_2 , есть величина постоянная, равная $2a$ и меньшая, чем расстояние между данными точками, является двуполостным гиперболоидом вращения.*

В ортонормированной системе координат, относительно которой $F_1(c, 0, 0)$, $F_2(-c, 0, 0)$, уравнение этого множества точек выглядит следующим образом

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2). \quad (5)$$

Уравнение (5) определяет двуполостный гиперболоид вращения.

Теорема 4 ([7], задача 10, с. 412). *Множество точек пространства, для каждой из которых расстояние до фиксированной точки F равно расстоянию до заданной прямой d , не проходящей через точку F , является параболическим цилиндром.*

Если систему координат выбрать так, что F имеет координаты $\left(0, \frac{p}{2}, 0\right)$, а заданная прямая d определяется уравнениями $x = 0$, $y = -\frac{p}{2}$, то уравнение искомого множества имеет вид

$$z^2 = 2py. \quad (5)$$

Уравнение (6) определяет параболическую цилиндрическую поверхность.

Исследуя множество точек, о котором идет речь в теореме 1, но в трехмерном пространстве, получим один из результатов статьи [11].

Теорема 5. *Множество точек пространства, для которых отношение расстояния до фиксированной точки F к расстоянию до фиксированной прямой d ($F \notin d$) имеет постоянное значение e , будет эллипсоидом вращения при $e < 1$, однополостным гиперболоидом вращения при $e > 1$, параболическим цилиндром при $e = 1$.*

Доказательство. Выберем систему координат так, что начало координат, точка O , совпадает с серединой отрезка HF , где $FH \perp d$, $H \in d$, осью Ox является прямая HF , направление на которой определяется вектором \overrightarrow{HF} , ось $Oz \parallel d$ и лежит в плоскости $\langle d, F \rangle$, ось $Oy \perp \langle F, d \rangle$. Пусть расстояние от точки F до прямой d равно $2a : \rho(F, d)2a$. Тогда $F(a, 0, 0)$, прямая d определяется системой уравнений $\begin{cases} x = -a, \\ y = 0, \end{cases}$, и для любой точки $M(x, y, z)$ искомого множества имеем: $|FM| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$, $\rho(M, d) = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ и, по условию теоремы, $\frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} = e$, $e > 0$.

Преобразуем это уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2 &= e^2(x^2 + 2ax + a^2 + y^2), \\ \text{и } (1 - e^2)x^2 - 2a(1 + e^2)x + a^2(1 - e^2) + (1 - e^2)y^2 + z^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

1) Пусть $e = 1$. Тогда уравнение (7) равносильно уравнению

$$z^2 = 4ax. \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет параболическую цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oy .

2) Пусть $e \neq 1$. Тогда уравнение (8) приводится к виду

$$\left(x - \frac{a(1 + e^2)}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - e^2} = \frac{4a^2e^2}{(1 - e^2)^2} \quad (9)$$

Если $e < 1$, то $1 - e^2 > 0$, и уравнение (9) определяет эллипсоид вращения.

Если же $e > 1$, то $1 - e^2 < 0$, и, как нетрудно увидеть, уравнение (9) определяет однополостный гиперболоид вращения.

Следующая часть данной заметки посвящена исследованию геометрических мест точек пространства, определяемых парой прямых. Для скрещивающихся прямых проблема сформулирована в задаче 25 на странице 318 учебника [8] (см. также задачу 14). Решение задачи приводит к следующей теореме:

Теорема 6. *Множество точек пространства, отношение расстояний от каждой из которых до двух скрещивающихся прямых равно числу $k \neq 0$, является*

- 1) гиперболическим параболоидом, если $k = 1$,
- 2) однополостным гиперболоидом, если $k \neq 1$.

Доказательство. Предположим, что данные скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 перпендикулярны и обе перпендикулярны прямой l , которая пересекает l_1 и l_2 соответственно в точках A и B . Пусть

$|\overrightarrow{AB}| = 2c$. Выберем систему координат следующим образом: за начало координат возьмем середину O отрезка AB , за ось Ox — прямую, параллельную l_1 , за ось Oy — прямую, параллельную l_2 , за ось Oz — прямую l . Тогда прямые l_1 и l_2 соответственно имеют уравнения

$$l_1 : \begin{cases} y = 0, \\ z = c; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ z = -c. \end{cases} \quad (9)$$

Расстояния от произвольной точки $M(x, y, z)$ искомого множества до этих прямых вычисляются по формулам:

$$\rho(M, l_1) = \sqrt{(z - c)^2 + y^2}, \quad \rho(M, l_2) = \sqrt{(z + c)^2 + x^2}.$$

По условию

$$\frac{\sqrt{(z - c)^2 + y^2}}{\sqrt{(z + c)^2 + x^2}} = k, \quad k \neq 0 \quad (10)$$

Рассмотрим два случая.

1) $k = 1$. Тогда уравнение (10) равносильно уравнению

$$\sqrt{(z - c)^2 + y^2} = \sqrt{(z + c)^2 + x^2},$$

которое, в свою очередь равносильно уравнению

$$x^2 - y^2 = -4cz \quad (11)$$

Уравнение (11) определяет гиперболический параболоид.

2) Пусть $k \neq 1$. Тогда уравнение (10) преобразуется к виду

$$z^2 - 2cz + c^2 + y^2 = k^2x^2 + k^2z^2 + 2k^2cz + k^2c^2.$$

Полученное уравнение равносильно уравнению

$$k^2x^2 + (k^2 - 1)z^2 + 2c(k^2 + 1)z - y^2 + (k^2 - 1)c^2 = 0,$$

а оно — уравнению

$$\frac{k^2x^2}{k^2 - 1} - \frac{y^2}{k^2 - 1} + \left(z + \frac{c(k^2 + 1)}{k^2 - 1}\right)^2 = \frac{4c^2k^2}{(k^2 - 1)^2}. \quad (12)$$

Это уравнение при любых допустимых значениях $k \neq 1, 0$ определяет однополостный гиперболоид.

Представляет интерес случай, когда заданные две прямые l_1 и l_2 параллельны. В этом случае имеем следующий аналог предыдущей теоремы:

Теорема 7. *Множество точек пространства, отношение расстояний от каждой из которых до двух параллельных прямых равно числу $k > 1$, является*

- 1) плоскостью, относительно которой эти прямые симметричны, если $k > 1$;
- 2) круговой цилиндрической поверхностью, если $k \neq 1$.

Доказательство. Выберем ортонормированную систему координат таким образом, чтобы заданные параллельные прямые l_1 и l_2 , расстояние между которыми $2c$, имели соответственно уравнения

$$l_1 : \begin{cases} y = 0, \\ x = c; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x = -c. \end{cases}$$

Тогда расстояния от произвольной точки $M(x, y, z)$ искомого множества до этих прямых вычисляются по формулам:

$$\rho(M, l_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad \rho(M, l_2) = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

и, согласно определению этого множества,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=k, \quad k \neq 0.$$

Если $k = 1$, то это уравнение приводится к виду $x = 0$, а если $k \neq 1$.

$$\left(x + \frac{c(k+1)}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{4c^2k^2}{(k^2-1)^2}. \quad (13)$$

Полученное уравнение есть уравнение круговой цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz .

Также легко доказать следующие два утверждения:

Теорема 8. *Множество точек пространства, сумма расстояний от которых до двух параллельных прямых есть величина постоянная, большая, чем расстояние между данными прямыми, является эллиптической цилиндрической поверхностью.*

Доказательство. Пусть расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно $2c$. Выберем ортонормированную систему координат так, чтобы прямые имели уравнения

$$l_1 : \begin{cases} y = 0, \\ x = c; \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x = -c. \end{cases}$$

Тогда $\rho(M, l_1) = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $\rho(M, l_2) = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, и по условию

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a, \quad 2a > 2c.$$

После соответствующих преобразований, с учетом, что $a > c$ и $a^2 - c^2 = b^2$, получим уравнение, определяющее эллиптическую цилиндрическую поверхность:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение:

Теорема 9. *Множество точек пространства, модуль разности расстояний от которых до двух параллельных прямых есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между данными прямыми, является гиперболической цилиндрической поверхностью.*

Если расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно $2c$ и ортонормированная система координат выбрана также как в предыдущем случае, то уравнение искомого множества будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (15)$$

Исследуем теперь множества точек пространства, связанных с заданными точкой F и плоскостью α ($F \notin \alpha$) некоторыми метрическими соотношениями.

Теорема 10 ([7], задача 6, с. 412). *Множество точек пространства, для каждой из которых отношение расстояния от заданной точки к расстоянию до заданной плоскости равно числу $k > 0$, является*

- 1) параболоидом вращения, если $k = 1$,
- 2) эллипсоидом вращения, если $k < 1$,
- 3) двуполостным гиперболоидом вращения, если $k > 1$.

Доказательство. Пусть расстояние от данной точки F до заданной плоскости α равно r и прямая $FH \perp \alpha$, $H \in \alpha$. Выберем ортонормированную систему координат следующим образом. За

начало координат возьмем точку O — середину отрезка HF , за ось Ox — прямую HF , направление на которой определяется вектором \vec{HF} , за плоскость yOz — плоскость, перпендикулярную Ox . Тогда $F\left(\frac{p}{2}, 0, 0\right)$, $\alpha : x = -\frac{p}{2}$, и для любой точки $M(x, y, z)$ искомого множества выполняется условие $\overline{FM} = k\rho(M, \alpha)$, которое в координатах записывается следующим образом:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = k \left|x + \frac{p}{2}\right|, \quad k > 0.$$

Освобождаясь от иррациональности, получим уравнение

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = k^2 \left|x + \frac{p}{2}\right|^2 \quad (16)$$

Рассмотрим 2 случая: $k = 1$ и $k \neq 1$.

Если $k = 1$, то уравнение (16) равносильно уравнению

$$y^2 + z^2 = 2px, \quad (17)$$

которое является уравнением параболоида вращения.

Если $k \neq 1$, то уравнение (16) приводится к виду

$$\left(x + \frac{p(k^2 + 1)}{2(k^2 - 1)}\right)^2 - \frac{y^2}{k^2 - 1} - \frac{z^2}{k^2 - 1} = \frac{p^2 k^2}{(k^2 - 1)^2} \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что если $k < 1$, то уравнение (18) определяет эллипсоид вращения, а если $k > 1$ — двуполостный гиперболоид вращения.

Рассмотрим теперь в качестве элементов пространства, определяющих множества точек с использованием метрических связей, прямую и плоскость.

Теорема 11 ([7], задача 8, с. 412). *Множество точек пространства, равноудаленных от данной прямой и параллельной ей плоскости, является параболическим цилиндром.*

Доказательство. Выберем ортонормированную систему координат таким образом, что начало координат $O \in l$, ось Oz совпадает с прямой l , а данная плоскость α имеет уравнение $x - a = 0$. Тогда $\rho(l, \alpha) = a$, и для любой точки $M(x, y, z)$ искомого множества имеем $\rho(M, \alpha) = |x - a|$, $\rho(M, l) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\sqrt{x^2 + y^2} = |x - a|$. Последнее уравнение равносильно уравнению

$$y^2 = -2ax + a^2, \quad (19)$$

Уравнение (19) является уравнением параболической цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны данной прямой.

Теорема 12 ([7], задача 9, с. 412). *Множество точек пространства, равноудаленных от данной прямой и перпендикулярной ей плоскости, является конической поверхностью.*

Доказательство. Пусть заданная прямая l и плоскость α пересекаются в точке $O : l \cap \alpha = 0$. Возьмем точку O за начало координат, прямую l за ось Ox , а осями Oy и Oz будем считать две взаимно перпендикулярные прямые, лежащие в плоскости α и пересекающиеся в точке O . Тогда плоскость α задается уравнением $x = 0$, а прямая l — системой уравнений $y = z = 0$. Если точка $M(x, y, z)$ — произвольная точка искомого множества точек, то $\rho(M, \alpha) = |x|$, $\rho(M, l) = \sqrt{y^2 + z^2}$ и $\sqrt{y^2 + z^2} = |x|$. Полученное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) определяет коническую поверхность с вершиной в точке пересечения данной прямой с данной плоскостью и осью, совпадающей с данной прямой.

Проведенное исследование геометрических мест точек пространства, связанных определенными метрическими соотношениями со следующими парами элементов пространства: 1) две точки, 2) точка и прямая, 3) две прямые, 4) точка и плоскость, 5) прямая и плоскость, — показывает, что каждое из этих геометрических мест точек является вполне определенной поверхностью второго порядка. В то же время каноническое уравнение поверхности не дает однозначного набора пар базисных элементов для определения геометрического места точек, которое является этой поверхностью.

Исследование может быть продолжено, поскольку можно рассматривать другие наборы базисных элементов для задания геометрического места точек в пространстве, а также варьировать свойства точек пространства по отношению к этим элементам. В частности, можно решить следующие задачи.

Задача 1. Докажите, что множество точек прямых, пересекающих любые три скрещивающиеся прямые, параллельные одной плоскости, является гиперболическим параболоидом ([10], упражнение на стр. 488).

Задача 2. Докажите, что множество точек прямых, пересекающих любые три скрещивающиеся прямые, не параллельные ни одной плоскости, является однополостным гиперболоидом ([10], упражнение на стр. 479).

Задача 3. Докажите, что множество точек пространства, расстояние от каждой из которых до заданной плоскости в k больше расстояния до заданной точки, лежащей в этой плоскости, является конической поверхностью.

В заключение заметим, что проводить исследование геометрических мест точек в пространстве методом координат предпочтительнее, чем методом сечений с использованием известных фактов из планиметрии.

Литература

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1968. - 912 с.
2. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: в 2-х ч., ч.1: учеб. пособие для студентов физ-мат. фак-тов пед.ин.-тов. - М.: Просвещение, 1986. - 336 с.
3. Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. Геометрия в 2-х т., т.1: учеб. пособие для студентов 1 курса физ-мат. фак-тов пед.ин.-тов. - М.: Просвещение, 1974. - 352с.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, вып.5, 1968. – 232 с.
5. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2-х т., т.1: Теоремы и задачи. - М.: Планета знаний, 2007. - 470 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1972. – 240 с.
7. Лопшиц А.М. Аналитическая геометрия. - М.: Учпедгиз, 1948. - 588 с.
8. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. - М.: Изд-во МГУ, 1969. - 698 с.
9. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие для студентов механико-математических и физических специальностей. - М.: Наука, 1976. - 384 с.
10. Постников М.М. Аналитическая геометрия. - М.: Наука, 1973. - 752 с.
11. Перепелкин Д.И. Поверхности второго порядка как геометрические места точек // Матем.просв. - Вып. 5. - 1936. - С. 49-55.
12. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. пособие. - М.: Изд-во МГУ, 1990. – 328 с.
13. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. - М.: Учпедгиз, 6-е издание, 1953. - 350 с.
14. Baker H.F. Principles of Geometry: in 3 vol, vol.III: Solid Geometry. - Cambridge University Press, 923. - 260 p.
15. Jenner W.E. Rudiments of algebraic geometry. - New York, Oxford University Press, 1963. - 106 p.
16. Klein Felix. Vorlesungen Über Höhere Geometrie. - Berlin: Springer, 1926. - 406 S.
17. Reye Theodore. Die Geometrie der Lage. - Leipzig, 1899. - 254 S.

18. Schröter Heinrich. Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung. - Leipzig, 1880. - 720 S.
19. Todd J.A. Projective and analytical geometry. - London: Sir Isaak Pitman, 1947. - 290 P.
20. Sturm R. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie: im 3 Bd, Bd.2: Die Strahlencomplexe Zweiter Grades. - Leipzig: D.G.Teubner, 1893. - 518 S.

*Жаров Сергей Викторович,
доцент ЯГПУ имени К.Д. Ушинского,
кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: szhary@rambler.ru

*Медведева Людмила Борисовна,
доцент Ярославского высшего военного училища
противовоздушной обороны,
кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail:

Аппроксимация уравнений Пфаффа многих переменных

B. B. Ивлев, E. A. Крикошай

В работе предложен метод построения приближенных интегрируемых аналогов неинтегрируемых уравнений Пфаффа. Рассмотрен специальный способ проверки точности Пфаффовой дифференциальной формы и дается аналитическая форма потенциальной функции (общего интеграла) без применения теории криволинейных интегралов. Рассмотрены примеры, поясняющие существование предлагаемого подхода.

Введение. Дифференциальное уравнение Пфаффа

Дифференциальная форма Пфаффа первого порядка n переменных имеет вид [1, 2]:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)dx_i, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

Форма (1) называется точной, если существует дважды дифференцируемая функция $U(x)$, такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = P_i(x), \quad \frac{\partial P_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k(x)}{\partial x_i} \quad (2)$$

Переходя к уравнению Пфаффа, имеем

$$dU(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)dx_i = 0 \quad (3)$$

Функция $U(x)$ называется *потенциальной* (потенциалом) или *общим интегралом* (3).

Известные результаты по интегрированию уравнения (3) при $n = 2, 3$ изложены в [3].

Впредь, для краткости вместо “уравнение (3) является (не является) уравнением в *полных дифференциалах*” пишем “уравнение (3) *интегрируемо (не интегрируемо)*”.

1. Суммы обобщенных одночленов и их карты

Известно, что алгебраический одночлен n переменных имеет вид

$$kx_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad (4)$$

где α_i — натуральные числа; k — коэффициент одночлена.

Рассмотрим обобщения одночленов вида (4), когда произведение состоит из множителей-элементарных функций от соответствующих переменных.

Примеры:

$$xy, \quad xy^2\sqrt{z}, \quad \frac{\sin y \cdot e^{x^2} \cdot \ln t}{x}.$$

Такие произведения можно называть *трансцендентными* одночленами или *обобщенными* одночленами соответствующих переменных. Ниже будем называть их просто “одночленами”.

Далее, будем рассматривать множество дифференцируемых функций n переменных $U(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, представимых алгебраической суммой одночленов порядков от n до единицы; порядком одночлена считаем количество входящих в него переменных.

Пример 1. Пусть $U(x, y, z) = xy^2z^3 + \ln xy^2e^z + y^2z + xy + z + y^3$. Составим для функции $U(x, y, z)$ так называемую “карту”:

N	1	2	3	4	5	6	7
переменные	x, y, z	x, y	x, z	y, z	x	y	z
$U(x, y, z)$	$xy^2z^3 + \ln xy^2e^z$	xy		y^2z		y^3	z
$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx$	+	+					
$\int \frac{\partial U}{\partial y} dy$	+	+		+		+	
$\int \frac{\partial U}{\partial z} dz$	+			+			+

Поясним эту карту:

- число столбцов равно $2^3 - 1 = 7$ — это число всех возможных подмножеств множества их трех переменных, за исключением пустого подмножества (пустое подмножество означало бы добавление к $U(x)$ постоянного слагаемого, что не требуется, поскольку потенциальная функция всегда определена с точностью до аддитивной константы). В случае n переменных карта функции $U(x)$ содержит $2^n - 1$ столбцов.;

- символы “+” означают равенство функций в столбцах. Действительно, например,

$$(xy^2z^3 + \ln xy^2e^z)'_x = y^2z^3 + y^2e^z/x, \quad \int (y^2z^3 + y^2e^z/x)dx = xy^2z^3 + \ln xy^2e^z.$$

Далее,

$$(xy^2z^3 + \ln xy^2e^z)'_y = 2xyz^3 + 2\ln xye^z/x, \quad \int (2xyz^3 + 2\ln xye^z/x)dy = xy^2z^3 + \ln xy^2e^z,$$

результаты равны, что отмечено знаками “+” в соответствующем столбце и т.д. Заметим, что мы не добавляем произвольной постоянной при интегрировании по указанной в предыдущем пункте причине;

- символ “пусто” означает, что соответствующее выражение в соответствующем столбце равно нулю. Например, в данную функцию не входит одночлен, зависящий только от переменных x, z или только от переменной x ;

- одночлены с одинаковым набором переменных могут объединяться в один столбец, как это сделано в первом столбце где записана сумма двух одночленов от x, y, z ;

- число знаков в столбце равно количеству переменных, от которых зависит одночлен данного столбца.

Отметим, что заданной функции $U(x)$ соответствует однозначно ее карта и обратно, карта функции однозначно определяет саму функцию, т.е. функция равна сумме одночленов, взятых по одному из каждого столбца. Если в карте отсутствует какой-либо столбец, значит, функция не содержит соответствующего одночлена.

2. Потенциальная функция для точной формы Пфаффа

До сих пор мы не имели дела непосредственно с уравнением Пфаффа. Пусть теперь дана *точная* форма Пфаффа, и ее уравнение

$$dU(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x)dx_i = 0, \quad \text{где } \frac{\partial P_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k(x)}{\partial x_i}. \quad (5)$$

В этом случае известно, что потенциальная функция определяется криволинейным интегралом второго рода в пространстве R^n . В частности, в случае трех переменных имеем

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz + U(x_0, y_0, z_0). \quad (6)$$

В работе предлагается альтернативный способ построения $U(x)$. Будем считать, что коэффициенты $P_i(x)$ из (5) являются алгебраическими суммами одночленов в широком смысле. Не зная самой функции $U(x)$ и не проверяя *точности* формы (5), т.е. выполнения условий

$$\frac{\partial P_i(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k(x)}{\partial x_i},$$

можно составить карту для (5). При этом

- из всего множества одночленов выбираются по одному и определяются столбцы карты;
- заполняется карта по строкам для каждого интеграла $\int \partial P_i(x) \partial x_i, i = \overline{1, n}$;
- все столбцы должны быть *точными*, т.е. содержать такое число знаков “+”, каков порядок одночлена.

По карте делается следующий вывод:

- если все столбцы *точные*, то уравнение (5) интегрируемо;
- потенциальная функция $U(x)$ есть алгебраическая сумма одночленов всех столбцов.

Итак, для заданных функций $P_i(x)$ $U(x)$ с помощью построенной карты удается “поймать двух зайцев”: проверить, что форма (5) является точной и построить потенциальную функцию $U(x)$.

Кстати, трудоемкость проверки точности формы Пфаффа по (2) при больших $n \geq 4$ такова:

- необходимо построить матрицу Гессе; для этого вычислить $n(n - 1)$ производных второго порядка

n	4	6	8
$n(n - 1)$	12	30	56

- выяснить (подтвердить) симметричность матрицы.

Пример 2. Доказать интегрируемость уравнения Пфаффа и найти (если она есть) потенциальную функцию

$$P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz + P_4 dt = 0, \text{ где} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= y^2 z^3 t^4 + x^{-1} \sin y \cdot z \cdot e^{t^2} + 2xzt + y + 1 \\ P_2 &= 2xyz^3 t^4 + \ln x \cos y \cdot z \cdot e^{t^2} + x \\ P_3 &= 3xy^2 z^2 t^4 + \ln x \sin y e^{t^2} + x^2 t \\ P_4 &= 4xy^2 z^3 t^3 + 2 \ln x \cdot \sin y \cdot z \cdot te^{t^2} + x^2 z + z + 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Для доказательства интегрируемости (7) обычным способом необходимо вычислить 12 частных производных $\frac{\partial P_1}{\partial y}, \frac{\partial P_1}{\partial z}, \dots, \frac{\partial P_4}{\partial y}, \frac{\partial P_4}{\partial z}$, т.е. построить матрицу Гессе размерности 4×4 (диагональные элементы не вычисляются) и проверить ее симметричность.

Вернемся к (8)

1. Вычислим $\int P_1 dx, \int P_2 dy, \int P_3 dz, \int P_4 dt$.

$$\begin{aligned} \int P_1 dx &= xy^2 z^3 t^4 + \ln x \sin y \cdot z \cdot e^{t^2} + x^2 zt + xy + x \\ \int P_2 dy &= xy^2 z^3 t^4 + \ln x \sin y \cdot z \cdot e^{t^2} + xy \\ \int P_3 dz &= xy^2 z^3 t^4 + \ln x \sin y \cdot ze^{t^2} + x^2 zt \\ \int P_4 dt &= xy^2 z^3 t^4 + \ln x \cdot \sin y \cdot z \cdot e^{t^2} + x^2 zt + zt + t \end{aligned} \quad (9)$$

2. Из множества функций (9) выберем по одной каждого типа (это будущие столбцы) и составим карту пока неизвестной потенциальной функции; пустые столбцы в карту не вносим

N	1	2	3	4	5	6
переменные	x, y, z, t	x, z, t	x, y	z, t	x	t
$U(x, y, z, t)$	$xy^2z^3t^4 + \ln x \sin yze^{t^2}$	x^2zt	xy	zt	x	t
$\int P_1 dx$	+	+	+		+	
$\int P_2 dy$	+		+			
$\int P_3 dz$	+	+		+		
$\int P_4 dt$	+	+		+		+

Напомним, что в любом столбце под знаком “+” стоит своя, но одна и та же функция. Видно, что в каждом столбце число знаков “+” равно порядку одночлена.

Итак, все столбцы — точные (правильные). Этим доказано существование потенциальной функции.

Заметим, что для краткости в столбце 1 два одночлена объединены в сумму — многочлен.

3. Потенциальная функция есть сумма функций (многочлена и одночленов) всех столбцов, взятых по одной:

$$U(x, y, z, t) = xy^2z^3t^4 + \ln x \cdot \sin y \cdot ze^{t^2} + x^2zt + xy + zt + x + t.$$

Упражнение 1. Проверьте обычным способом, при помощи вычисления частных производных, что это действительно потенциальная функция и уравнение интегрируемо.

3. Неинтегрируемые уравнения Пфаффа

Рассмотрим уравнение Пфаффа n переменных

$$\sum_{i=1}^n P_i(x)dx_i = 0 \quad (10)$$

о котором неизвестно:

- интегрируемо оно или нет;
- существует ли для него потенциальная функция, причем коэффициенты $P_i(x)$ — сумма одночленов, оговоренных выше.

Внимательный читатель, учитывая предыдущие результаты, скажет: строим карту для формы Пфаффа, а там посмотрим, и он прав.

В случае, если все столбцы карты — точные (правильные), то все дальнейшие действия известны (см. раздел 2).

Пусть теперь уравнение (10) — не интегрируемое. Это значит, что появляются “неправильные” (дефектные) столбцы. При этом возможно следующее нарушение:

- число знаков “+” меньше порядка функции в данном столбце.

“Устранение дефекта” — построение интегрируемого приближения неинтегрируемого уравнения¹ — осуществляется следующим образом:

- в “пустой” клетке столбца, стоящей на пересечении со строкой интегралом по одной из переменных функции ставится “+”; столбец становится точным;
- в интеграл по этой переменной прибавляется функция данного столбца;
- в коэффициент $P_i(x)$ при этой переменной вносится производная от функции столбца.

Пример 3. Пусть дано неинтегрируемое уравнение Пфаффа

$$P_1 dx + P_2 dy + P_3 dz + P_4 dt = 0, \text{ где} \quad (11)$$

¹ Вопрос о том, в каком смысле построенное интегрируемое уравнение приближает неинтегрируемое, требует отдельного исследования, что выходит за рамки данной работы.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= xy^2z^2t + yzt + xy + t^2 + x^2 \\
 P_2 &= x^2yz^2t + xzt + yz + y^3 \\
 P_3 &= xyt + \frac{1}{2}y^2 \\
 P_4 &= \frac{1}{2}y^2x^2y^2z^2 + xyz + t
 \end{aligned} \tag{12}$$

1. Вычислим интегралы от (12).

$$\begin{aligned}
 \int P_1 dx &= \frac{1}{2}x^2y^2z^2t + xyzt + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3, \\
 \int P_2 dy &= \frac{1}{2}x^2y^2z^2t + xyzt + \frac{1}{2}y^2z + \frac{1}{3}y^3, \\
 \int P_3 dz &= xyzt + \frac{1}{2}y^2z, \\
 \int P_4 dt &= \frac{1}{2}x^2y^2z^2t + xyzt + \frac{1}{2}t^3
 \end{aligned} \tag{13}$$

2. Составим в соответствии с (13) карту для (11).

N	1	2	3	4	5	6	7
переменные	x, y, z, t	x, y, z, t	x, y	y, z	x	y	t
$U(x, y, z, t)$	$\frac{1}{2}x^2y^3z^2t$	$xyzt$	$\frac{1}{2}x^2y$	$\frac{1}{2}y^2z$	$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}y^3$	$\frac{1}{2}t^2$
$\int P_1 dx$	+	+	+		+		
$\int P_2 dy$	+	+	•	+		+	
$\int P_3 dz$	•	+		+			
$\int P_4 dt$	+	+		+			+

Здесь два многочлена от x, y, z, t не объединены в один столбец, чтобы было видно, что только один из них приводит к дефекту. Из карты следует, что имеется два дефектных столбца. Незаполненные клетки помечены значком “•”.

Итак, в $\int P_3 dz$ необходимо добавить функцию $\frac{1}{2}x^2y^2z^2t$, а в $P_3 = x^2y^2zt$; В $\int P_2 dy$ добавим $\frac{1}{2}x^2y$, а в $P_2 = \frac{1}{2}x^2$. С учетом вводимых поправок имеем следующую потенциальную функцию

$$U(x, y, x, t,) = \frac{1}{2}x^2y^2z^2t + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}y^2z + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + t^2.$$

Уточненные P_2^* и P_3^* имеют вид:

$$P_2^* = x^2yz^2t + xzt + yz + \frac{1}{2}x^2 + y^2, \quad P_3^* = x^2y^2zt + xyzt + \frac{1}{2}y^2.$$

Упражнение 2. Проверьте обычным способом, при помощи вычисления частных производных, что уточненная функция $U(x, y, x, t)$ действительно является потенциальной для уравнения с уточненными коэффициентами P_1, P_2^*, P_3^*, P_4 и новое уравнение интегрируемо.

Литература

- [1] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1958.
- [2] Ивлев В.В., Архипова Е.М. Об одном приближении уравнений Пфаффа // Математическое образование. - № 4 (88). - 2018.
- [3] Ивлев В.В. Математический анализ, Избранное. - М., Издательство “Икар”, 2018.

*Ивлев Валерий Васильевич,
профессор кафедры общих математических
и естественно-научных дисциплин
Московской финансово-юридической академии МФЮА,
Почетный работник высшего профессионального
образования Российской Федерации,
доктор технических наук.*

E-mail: vvivlev@yandex.ru

*Кривошёй Елена Александровна,
старший преподаватель кафедры общих математических
и естественно-научных дисциплин МФЮА.*

E-mail: ambient2003@list.ru

Геометрический узор как предельный цикл

E. Г. Смольянова

Геометрический узор как главный элемент большинства орнаментов обычно представляет собой результат конечного применения определённого набора геометрических преобразований (симметрий, поворотов, подобий, параллельных переносов и т.п.) к одной или нескольким геометрическим фигурам, составляющим его основу. В данной статье исследуется преобразование произвольного прямоугольного треугольника, последовательные итерации которого имеют предельный цикл в виде геометрического узора. Понятно, что геометрическая красота узора находится в прямой зависимости от исходного набора фигур и преобразований, а также последовательности применения последних. Но в рамках статьи интерес будет представлять лишь предельный результат построений. Поэтому оценивать степень сложности будущего узора с эстетической точки зрения не предполагается. Важен будет только факт получения узора как предела бесконечной последовательности итераций одного и того же преобразования.

Описание преобразования

Пусть a_1 , b_1 и c_1 — соответственно катеты и гипотенуза произвольного прямоугольного треугольника T_1 . Придадим равенству

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$$

равносильный вид:

$$a_1^2 = (c_1 - b_1)(c_1 + b_1).$$

Последнее означает, что a_1 — среднее геометрическое чисел $(c_1 - b_1)$ и $(c_1 + b_1)$. Воспользуемся геометрическими “последствиями” этой связи. Пусть O — вершина треугольника T_1 , противолежащая катету a_1 . Построим окружность с центром в точке O и радиусом, равным c_1 . Впишем теперь в эту окружность прямоугольный треугольник (\tilde{T}_1) так, что исходный треугольник T_1 окажется “установлен” на его гипотенузе. Назовём его вспомогательным (по отношению к T_1). Пусть T_2 — подобный (\tilde{T}_1) прямоугольный треугольник с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$ и общим острым углом (рис. 1).

Обозначим через a_2 , b_2 и c_2 его катеты и гипотенузу соответственно. Ясно по построению, что $c_2 = c_1$. Будем представлять T_2 как результат преобразования F исходного треугольника T_1 (или, что то же, образ T_1 при отображении F):

$$T_2 = F(T_1). \tag{1}$$

Таким образом, применение преобразования F к T_1 выразилось в последовательном выполнении следующих двух действий:

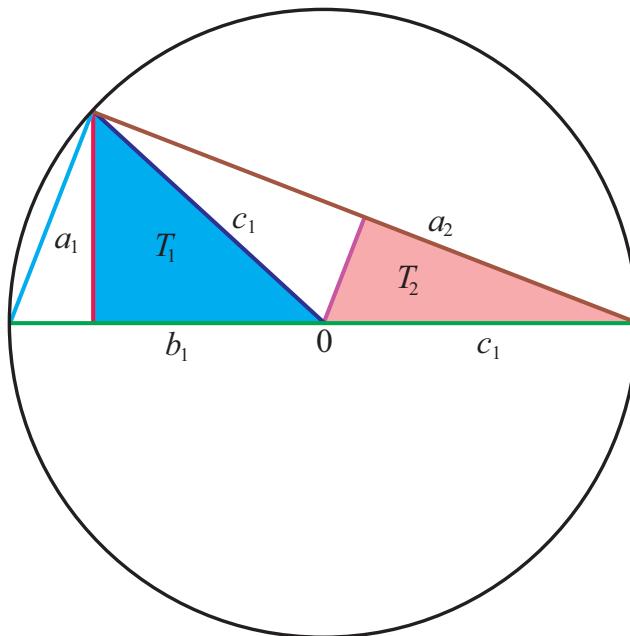


Рис. 1.

1. Построение вспомогательного для T_1 прямоугольного треугольника (\tilde{T}_1);
 2. Построение прямоугольного треугольника T_2 , подобного (\tilde{T}_1), с общим острым углом (коэффициент подобия $k = \frac{1}{2}$).
- Применяя далее преобразование F к треугольнику $T_2 = F(T_1)$, мы построим сначала вспомогательный прямоугольный треугольник (\tilde{T}_2) и, следующим шагом, — очередной, подобный последнему, прямоугольный треугольник $T_3 = F(T_2)$, см. рис. 1а.

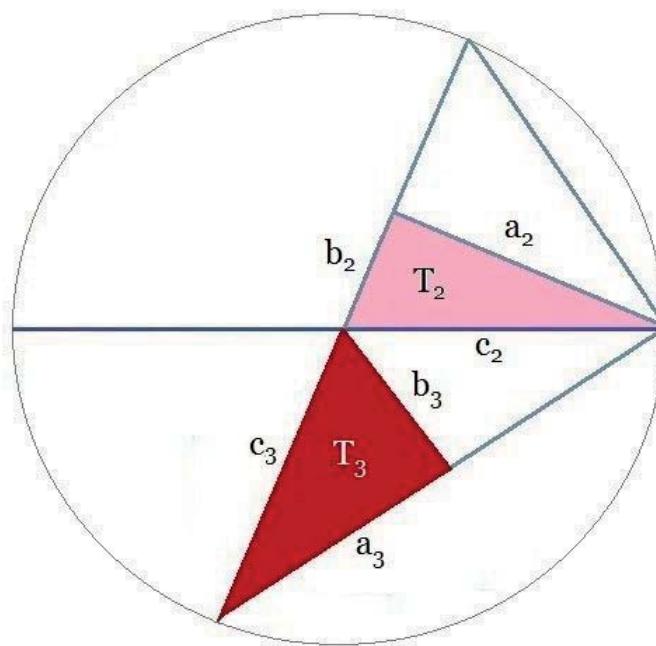


Рис. 1а.

Затем применим F к T_3 , см. рис. 1б, и т.д.

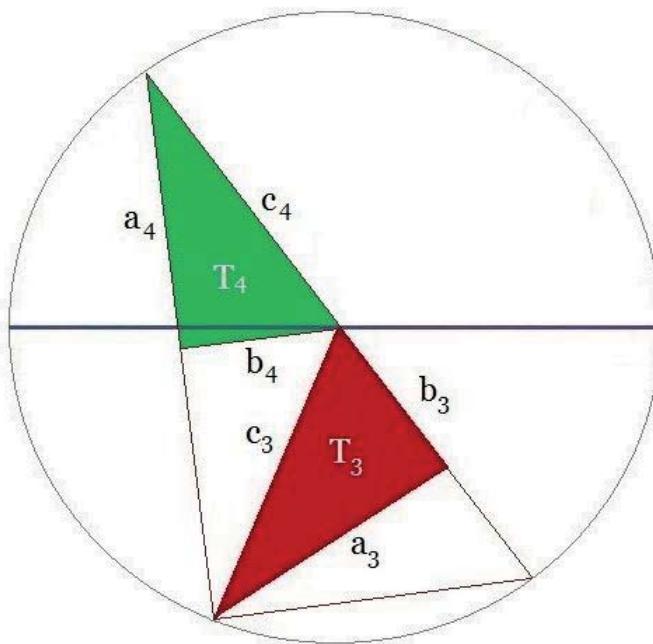


Рис. 1б.

Продолжать этот процесс можно, вообще говоря, как угодно долго.

В результате будет построена бесконечная последовательность $\{T_n\}$ прямоугольных треугольников по правилу:

$$T_{n+1} = F(T_n) = F^n(T_1), \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

где F^n — n -кратная композиция преобразования F (рис. 2).

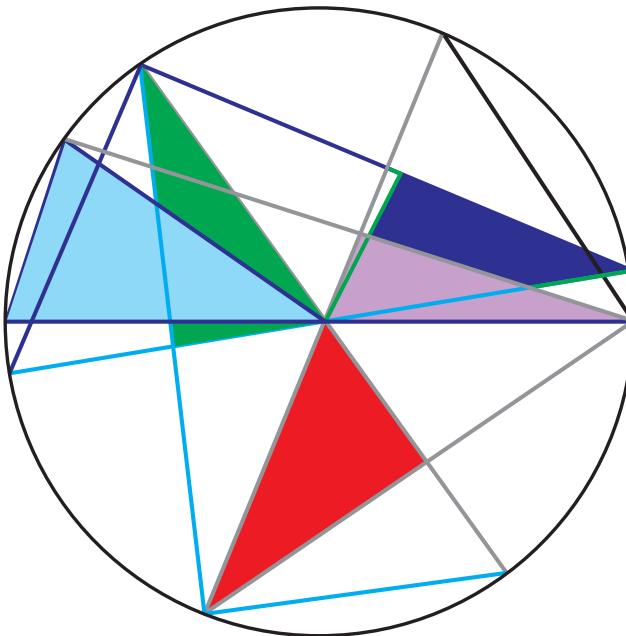


Рис. 2.

Докажем, что треугольники в последовательности $\{T_n\}$ при неограниченном росте n всё менее отличаются от треугольников с углами $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Заметим, что есть несколько причин считать

особенным прямоугольный треугольник с таким набором внутренних углов. Во-первых, потому, что эти углы образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной одному из них. А во-вторых, потому, что радиус окружности, описанной около такого треугольника, равен одной из его сторон. Назовем его (в рамках нашего исследования) идеальным прямоугольным треугольником и выберем обозначение: T_{id} .

Свойства элементов треугольников в последовательности $\{T_n\}$

Исследуем зависимости между элементами последовательных треугольников.

Из способа построения

$$c_{n+1} = c_n = c_1$$

для любого $n \in N$. Тем не менее, везде будем указывать нижний индекс, чтобы понимать о каком именно треугольнике идет речь.

1) Из рис.1 имеем:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 &= c_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = c_n^2 - \frac{1}{4}(2b_{n+1})^2 = c_n^2 - \frac{1}{4}(a_n^2 + (c_n - b_n)^2) = \\ &= \frac{1}{4}(4c_n^2 - (a_n^2 + b_n^2) - c_n^2 + 2b_n c_n) = \frac{1}{2}c_n(c_n + b_n), \end{aligned}$$

откуда

$$b_{n+1}^2 = c_{n+1}^2 - \frac{1}{2}c_n(c_n + b_n) = \frac{1}{2}c_n(c_n - b_n).$$

Поэтому

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = b_n c_n. \quad (2)$$

Из (2) следует, что в последовательности прямоугольных треугольников

$$T_2, T_3, T_4, \dots$$

нет ни одного равнобедренного. Кроме того, $\alpha_{n+1} > \frac{\pi}{4}$ при любом $n \in N$, где α_{n+1} — угол, противолежащий катету a_{n+1} в треугольнике T_{n+1} .

2) Поскольку

$$(a_{n+1} b_{n+1})^2 = \frac{1}{2}c_n(c_n - b_n) \cdot \frac{1}{2}c_n(c_n + b_n) = \frac{1}{4}a_n^2 c_n^2,$$

то $a_{n+1} b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n c_n$, ($n \in N$). Тогда площади треугольников T_n и T_{n+1} связаны равенством:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1}b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_n b_n\right) \cdot \frac{c_n}{b_n} = \frac{c_n}{2b_n} \cdot S_n = \frac{1}{2\cos(\alpha_n)} \cdot S_n,$$

где α_n — угол, противолежащий катету a_n в треугольнике T_n . Следовательно,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{2\cos(\alpha_n)}.$$

3) Преобразуем (2) к виду:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{b_{n+1}}{c_{n+1}}\right)^2 = \frac{b_n}{c_n},$$

откуда

$$\sin^2(\alpha_{n+1}) - \cos^2(\alpha_{n+1}) = \cos(\alpha_n) \Leftrightarrow \cos(\alpha_n) + \cos(2\alpha_{n+1}) = 0. \quad (3)$$

Преобразуем (3):

$$\cos(2\alpha_{n+1}) = \cos(\pi - \alpha_n) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_{n+1} = \pi - \alpha_n + 2\pi k; \\ 2\alpha_{n+1} + (\pi - \alpha_n) = 2\pi l, \end{cases}$$

$(n \in N, k, l \in Z)$. Учитывая, что речь идёт об острых углах, окончательно получаем:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_n}{2}. \quad (4)$$

Ясно, что $\alpha_{n+1} = \alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{\pi}{3}$, т.е. если допустить $T_1 = T_{id}$, то в последовательности $\{T_n\}$ все треугольники — идеальные (рис. 3). А поскольку

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow T_1,$$

то любые три последовательных треугольника образуют цикл. Он и есть в этом случае искомый узор. Обозначим его через \mathcal{U} .

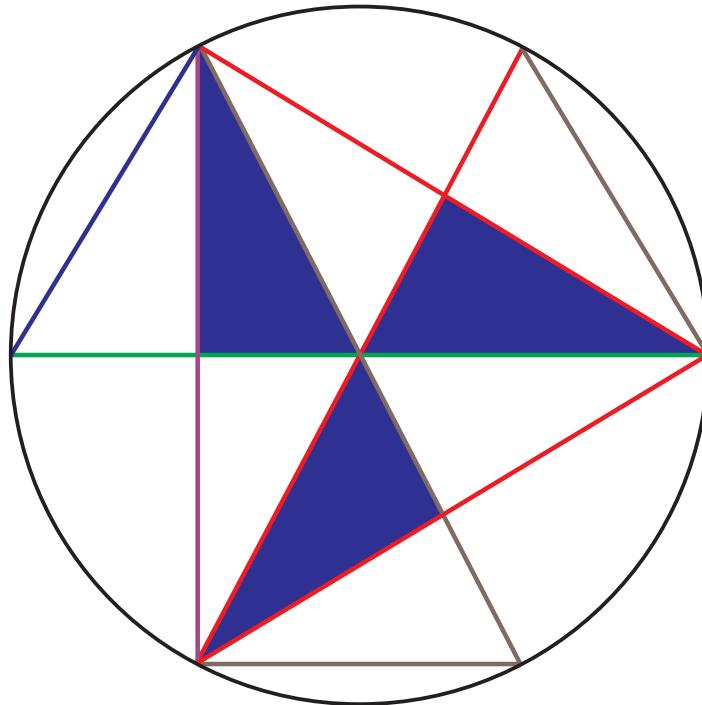


Рис. 3.

Пусть $T_1 \neq T_{id}$. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}.$$

Для этого перепишем равенство (4) так:

$$\alpha_{n+1} - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha_n \right). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{\left| \alpha_{n+1} - \frac{\pi}{3} \right|}{\left| \alpha_n - \frac{\pi}{3} \right|} = \frac{1}{2}$$

и поэтому последовательность $\{|\alpha_n - \frac{\pi}{3}|\}$ абсолютных отклонений α_n от $\frac{\pi}{3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. А поскольку $|q| < 1$, то такая последовательность — бесконечно малая, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \alpha_n - \frac{\pi}{3} \right| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{3}.$$

что и следовало доказать.

Как следует из (5), величина угла α_n приближается к предельному значению $\frac{\pi}{3}$ поочерёдно с разных сторон.

Таким образом, геометрический узор \mathfrak{U} есть предельный результат бесконечного числа итераций преобразования F , примененных к T_1 , и в общем случае, когда $T_1 \neq T_{id}$.

Смольянова Елена Григорьевна,
старший преподаватель кафедры математического анализа,
алгебры и геометрии ФГБОУ ВО “Национальный
исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н.П. Огарёва”,
Факультет математики и информационных технологий,
Республика Мордовия, г. Саранск.

E-mail: janovaeg@mail.ru

Об одном симметричном неравенстве

T. M. Иванова, B. B. Шерстюков

Памяти профессора Николая Васильевича Мирошина посвящается.

Рассматривается симметричное неравенство олимпиадного типа с двумя натуральными переменными. Излагаются два подхода к его доказательству, опирающиеся, соответственно, на элементарные методы из школьной программы и на базовые факты математического анализа первого семестра. Обсуждаются уточнения и возможные обобщения отмеченного неравенства.

Однажды профессор Н.В. Мирошин — один из авторов популярного сборника [1] — обратил наше внимание на следующую любопытную задачу, предлагавшуюся на одной из математических олимпиад, см. [2, стр. 8, 33-34].

Задача 1. Доказать, что для любых различных натуральных чисел m, n справедливо неравенство

$$\left| n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} \right| > \frac{1}{mn}. \quad (1)$$

Короткое обсуждение показало, что неравенство (1) имеет интересное математическое содержание. Так появилась идея написать эту заметку—посвящение.

Элементарное решение. Неравенство (1) является симметричным: оно сохранит свой вид, если поменять местами m и n . Поэтому можно считать, что $n > m$. В таком случае $n^n > m^m$. После извлечения из обеих частей неравенства корня степени mn получим

$$n^{\frac{1}{m}} > m^{\frac{1}{n}}. \quad (2)$$

Таким образом, задачу можно ставить так: доказать, что для любых натуральных чисел m, n таких, что $n > m$, справедливо неравенство

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{mn}. \quad (3)$$

Выберем произвольно $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$. Для доказательства (3) представим его левую часть в виде

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{m}} - e^{\frac{\ln m}{n}} = e^{\frac{\ln m}{n}} \left(e^{\frac{\ln n}{m} - \frac{\ln m}{n}} - 1 \right) = e^{\frac{\ln m}{n}} \left(e^{\frac{n \ln n - m \ln m}{mn}} - 1 \right)$$

и воспользуемся элементарным соотношением

$$e^t - 1 > t, \quad (4)$$

верным при всех $t > 0$. Применив (4) со значением $t = (n \ln n - m \ln m)/(mn) > 0$, запишем

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} > \frac{n \ln n - m \ln m}{mn}.$$

Числитель дроби оценивается так:

$$n \ln n - m \ln m \geq (m+1) \ln(m+1) - m \ln m.$$

Рассмотрим функцию

$$g(t) = (t+1) \ln(t+1) - t \ln t, \quad t > 0.$$

Поскольку ее производная $g'(t) = \ln(t+1) - \ln t$ положительна, то $g(t)$ строго возрастает, откуда

$$g(m) = (m+1) \ln(m+1) - m \ln m \geq g(1) = \ln 4.$$

Итак, для всех натуральных m, n , где $n > m$, имеем

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} > \frac{n \ln n - m \ln m}{mn} \geq \frac{\ln 4}{mn} > \frac{1}{mn},$$

что завершает доказательство неравенства (1).

Комментарий для знатоков. Прежде всего, отметим, что для обоснования неравенства (2) (при $n > m$) можно привлечь простейшие средства анализа. Действительно, рассмотрим функцию

$$h(t) = t \ln t, \quad t > 0. \quad (5)$$

Поскольку $h'(t) = \ln t + 1 > 0$ при $t > 1/e$, то функция (5) заведомо строго возрастает на промежутке $t \geq 1$. Следовательно, $n \ln n > m \ln m$ для любых натуральных m, n , связанных единственным условием $n > m$. Отсюда для тех же m, n имеем

$$n^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m} \ln n} = e^{\frac{1}{mn} n \ln n} > e^{\frac{1}{mn} m \ln m} = e^{\frac{1}{n} \ln m} = m^{\frac{1}{n}}.$$

Отметим также, что при выводе общезвестного неравенства (4) можно опираться не только на геометрические (выпуклая функция, касательная), но и на аналитические (ряд Тейлора) соображения:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots > 1 + t, \quad t > 0.$$

Однако, решая задачу 1, удобно вместо (4) сразу использовать соотношение

$$e^v - e^u > v - u, \quad (6)$$

выполненное при всех u, v , где $v > u \geq 0$. Обосновать оценку (6) можно разными способами. Один из них основан на следующем классическом факте дифференциального исчисления.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную на интервале (a, b) . Тогда существует такая промежуточная точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

(формула Лагранжа для конечных приращений).

По теореме Лагранжа, примененной к функции $f(t) = e^t$ на отрезке $[u, v]$, где $v > u \geq 0$, найдется промежуточная точка $\xi \in (u, v)$, для которой

$$e^v - e^u = e^\xi(v - u) > v - u.$$

Неравенство (6) получено. Взяв теперь произвольно $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, и воспользовавшись (6) при выборе $v = (\ln n)/m > (\ln m)/n = u \geq 0$, получим, что

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{m}} - e^{\frac{\ln m}{n}} > \frac{\ln n}{m} - \frac{\ln m}{n} = \frac{n \ln n - m \ln m}{mn} \geq \frac{(m+1) \ln(m+1) - m \ln m}{mn}.$$

Числитель последней дроби допускает запись

$$(m+1)\ln(m+1) - m\ln m = \ln(m+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Из курса математического анализа известно, что последовательность $(1 + 1/m)^m$ строго возрастает, стремясь к числу e . Так как ее первый член равен 2, то справедливо неравенство

$$(1 + 1/m)^m \geq 2, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Это простое соображение позволяет завершить решение задачи 1 оценкой

$$(m+1)\ln(m+1) - m\ln m = \ln(m+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq \ln 2 + \ln 2 = \ln 4. \quad (8)$$

Обсудим некоторые нюансы. Очевидно, мы сразу получим оценку (7), если подставим $t = 1/m$ в классическое неравенство Бернулли

$$(1+t)^m \geq 1 + mt, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t > -1,$$

которое обычно предлагаю доказывать методом математической индукции по натуральному параметру m (см. [3, № 7]). Кроме того, теорема Лагранжа, примененная к функции (5) на отрезке $[m, m+1]$, где $m \in \mathbb{N}$, дает результат

$$(m+1)\ln(m+1) - m\ln m = h(m+1) - h(m) = h'(\eta) = \ln \eta + 1 > \ln m + 1, \quad \eta \in (m, m+1),$$

улучшающий (8) для $m \geq 2$, но более слабый по сравнению с (8) для $m = 1$.

Возникает естественный вопрос. Нельзя ли чуть видоизменить оценку (1) так, чтобы новая оценка действовала для всех (не обязательно различных) натуральных значений m, n и была неулучшаемой с точки зрения константы в числителе правой части? Ниже (см. задачу 2) будет дан положительный ответ на этот вопрос.

Задача 2. Доказать, что для любых натуральных чисел m, n справедливо неравенство

$$\left|n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}}\right| \geq \frac{2|n-m|}{mn}, \quad (9)$$

и описать все случаи равенства в (9).

Элементарное решение. Симметричное неравенство (9) можно считать усиленной версией неравенства (1), поскольку из (9) следует (1). Будем снова предполагать, что $n > m$, и доказывать оценку

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} \geq \frac{2(n-m)}{mn},$$

переписав ее в эквивалентной форме

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} - \frac{2}{m} + \frac{2}{n} \geq 0, \quad n > m. \quad (10)$$

Схема обоснования для (10) проста: сначала отдельно разберем случаи $m = 1$ и $m = 2$, а затем рассмотрим общий случай $m \geq 3$.

Пусть $m = 1$. В таком случае неравенство (10) принимает простейший вид

$$n - 3 + \frac{2}{n} \geq 0, \quad n \geq 2,$$

и очевидно справедливо. Важно, что равенство здесь достигается только при $n = 2$. Соответствующая пара $m = 1, n = 2$ доставляет равенство в (9).

Пусть $m = 2$. Проверим, что тогда (10) справедливо со строгим знаком неравенства. Другими словами, докажем, что

$$\sqrt{n} - \sqrt[n]{2} - 1 + \frac{2}{n} > 0, \quad n \geq 3. \quad (11)$$

Отдельно рассмотрим значения $n = 3$ и $n = 4$. Подставив $n = 3$ в (11), получим

$$\sqrt{3} - \sqrt[3]{2} - \frac{1}{3} > 0,$$

что верно, как показывает цепочка эквивалентных неравенств

$$3\sqrt{3} - 1 > 3\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow (3\sqrt{3} - 1)^3 > 54 \Leftrightarrow 45\sqrt{3} > 68 \Leftrightarrow 6075 > 4624.$$

Подставив $n = 4$ в (11), получим

$$\frac{3}{2} - \sqrt[4]{2} > 0,$$

что также верно, поскольку $3/2 > \sqrt{2} > \sqrt[4]{2}$. Пусть, наконец, $n \geq 5$. Тогда

$$\sqrt{n} - \sqrt[n]{2} - 1 + \frac{2}{n} > \sqrt{5} - \sqrt[5]{2} - 1 > \sqrt{5} - \sqrt[4]{2} - 1 > 0.$$

Последнее неравенство вытекает из того, что

$$\sqrt{5} - 1 > \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{5} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 56 - 24\sqrt{5} > 2 \Leftrightarrow 9 > 4\sqrt{5} \Leftrightarrow 81 > 80.$$

Значит, (11) выполнено и при $n \geq 5$. Неравенство (11) доказано в полном объеме.

Пусть, наконец, $m \geq 3$. Убедимся в том, что (10) со строгим знаком неравенства выполнено при всех $n > m \geq 3$. В самом деле, для таких m, n с учетом (6) имеем

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} - \frac{2}{m} + \frac{2}{n} = e^{\frac{\ln n}{m}} - e^{\frac{\ln m}{n}} - \frac{2}{m} + \frac{2}{n} > \frac{\ln n - 2}{m} - \frac{\ln m - 2}{n} = \frac{1}{mn} \left((n \ln n - 2n) - (m \ln m - 2m) \right).$$

Выражение $(n \ln n - 2n) - (m \ln m - 2m)$ положительно, поскольку функция

$$p(t) = t \ln t - 2t, \quad t > 0,$$

с производной $p'(t) = \ln t - 1$ строго возрастает при $t > e$.

Доказательство неравенства (10), а тем самым, и его симметричного варианта (9), завершено. При этом, как показывает анализ предложенного решения, равенство в (10) возможно только при $m = 1, n = 2$. Соответственно, обращение (9) в равенство происходит лишь в следующих случаях:

$$m = n \in \mathbb{N}; \quad m = 1, n = 2; \quad m = 2, n = 1.$$

Константа $K = 2$ в числителе правой части (9) является точной. Задача 2 полностью решена.

Комментарий для знатоков. С методической точки зрения полезно рассмотреть другой подход к доказательству неравенства (10). Начнем с его частного случая (11), отправляясь от эквивалентной формы записи

$$\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{n} > \sqrt[4]{2} - \frac{1}{n}, \quad n \geq 3. \quad (12)$$

С одной стороны, учитывая условие $n \geq 3$, запишем

$$\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} + \frac{1}{n} > \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1,$$

откуда видно, что левая часть (12) больше единицы. С другой стороны, поскольку

$$\left(\sqrt[n]{2}-1\right)\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_n\right) < \left(\sqrt[n]{2}-1\right)\left((\sqrt[n]{2})^{n-1}+(\sqrt[n]{2})^{n-2}+\dots+1\right) = (\sqrt[n]{2})^n - 1 = 1,$$

то $\sqrt[n]{2}-1 < 1/n$ при всех $n \geq 2$. Следовательно, правая часть (12) меньше единицы. Тем самым, неравенство (12) выполнено.

Что же касается общего неравенства (10) при $n > m \geq 3$, то в таком случае можно воспользоваться теоремой Лагранжа для функции (5) на отрезке $[m, n]$ и получить требуемую оценку даже с лучшей константой $\ln 3 + 1$ вместо 2. В самом деле, пойдем по «проторенной» дорожке:

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{mn} (n \ln n - m \ln m) = \frac{n-m}{mn} (t \ln t)'(\zeta).$$

Благодаря ограничениям $\zeta \in (m, n)$, $n > m \geq 3$, имеем

$$(t \ln t)'(\zeta) = \ln \zeta + 1 > \ln m + 1 \geq \ln 3 + 1 > 2.$$

Собрав информацию, окончательно получим

$$n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}} > \frac{2(n-m)}{mn}, \quad n > m \geq 3.$$

В свете задачи 2 было бы полезно для произвольно заданной константы $K > 2$ выяснить, при каких натуральных m, n справедливо неравенство

$$\left|n^{\frac{1}{m}} - m^{\frac{1}{n}}\right| \geq \frac{K |n-m|}{mn}.$$

В заключение поставим вопрос о распространении неравенств (1), (9) на вещественные значения аргументов. На наш взгляд, представляют определенный интерес следующие две задачи.

Задача 3. Найти множество всех тех $x > 0, y > 0$, для которых выполнено неравенство

$$\left|y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}}\right| \geq \frac{|y-x|}{xy}. \quad (13)$$

и описать все случаи равенства в (13).

Задача 4. Найти множество всех тех $x > 0, y > 0$, для которых выполнено неравенство

$$\left|y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}}\right| \geq \frac{2|y-x|}{xy}. \quad (14)$$

и описать все случаи равенства в (14).

Отметим, что искомое множество из задачи 3 содержит угол

$$D = \{(x, y) : x \geq 1, y \geq 1\}.$$

Действительно, считая $y \geq x \geq 1$, получим, что $y^{\frac{1}{x}} \geq x^{\frac{1}{y}}$. Далее проведем знакомую выкладку

$$y^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{y}} = e^{\frac{\ln y}{x}} - e^{\frac{\ln x}{y}} \geq \frac{\ln y}{x} - \frac{\ln x}{y} = \frac{1}{xy} (y \ln y - x \ln x) \geq \frac{y-x}{xy},$$

демонстрирующую справедливость неравенства (13) на множестве D . Неравенство (13) очевидным образом выполнено и для точек вида (x, x) , где $x \in (0, 1)$. Полное же описание множества подходящих точек (x, y) и составляет суть задачи 3.

Возможна и общая постановка вопроса с положительной константой K вместо «двойки» в правой части неравенства (14). Впрочем, детальная проработка намеченных сюжетов требует отдельного рассмотрения.

Литература

- [1] Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями. - М.: Наука, 1986. - 384 с.
- [2] Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. - М.: МЦНМО, 2019. - 60 с. URL: <https://olimpiads.mccme.ru/mmo/2019/82mmo.pdf>
- [3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Астрель, 2003. - 558 с.

*Иванова Татьяна Михайловна,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета «МИФИ», кандидат физ.-мат. наук.*

E-mail: ivatatianna@gmail.com

*Шерстюков Владимир Борисович,
профессор кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета «МИФИ», доктор физ.-мат. наук.*

E-mail: shervb73@gmail.com

Информация

О деятельности ФМОП в 2021 г.

От редакции

В 2021 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, издателем и учредителем которого ФМОП является; в 2021 г. вышли номера 1(97), 2(98), 3(99), 4(100) – в двух частях.
- Выпуск приложения к журналу “Математическое образование” (вышли в печатном варианте шестой и седьмой выпуск).
- Завершена онлайн-публикация издания “О некоторых педагогах ярославских средних учебных заведений второй половины XIX – начала XX века” о жизни и деятельности ряда ярославских педагогов. Опубликованы все 9 глав издания.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников САММАТ, гг. Самара и Москва.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря “Алый Парус”.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- К сожалению, в период пандемии ушли из жизни два ключевых сотрудника нашего журнала. Фонд содействовал организации похорон бессменного члена редколлегии 3-й серии журнала Н.Н. Константинова и многолетнего наборщика и верстальщика, создателя стиля оформления 3-й серии журнала С.А. Кулешова.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная 2-22.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2021 год (включая стоимость пересылки) – 150 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2021 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) – 100 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

25 Years and 100 Issues of the Third Series of the Journal “Mathematical Education”	2
Congratulations from the editors on the anniversary issue of the magazine.	
V. Drozdov. Two Notes on Geometry	3
The first note tells how the author, without planning this in advance, got an unobvious double geometric inequality. The second provides a short, simple, and easy-to-remember proof of Stewart’s theorem.	
B. Druzhinin. Contrary the Logic	6
The note shows how in a fairly simple probabilistic model the property of transitivity, which is familiar to ordinary logic, is violated.	
A. Igлизы. On Points of Multiple Intersections of the Diagonals of a Regular Polygon	9
In the article, by means of computational mathematics, N -gons are analyzed for some values of N from 8 to 30 and configurations of multiple intersection points of their diagonals are found.	
L. Steingarz. Anti-Magic Squares and their Generalizations, Continued	19
The concepts of anti-magic squares w.r.t. addition and multiplication, as well as anti-magic rectangles, are introduced. Some general and particular methods of their construction are given, various properties are studied, and a number of hypotheses are formulated. Continued.	
V. Voitizky. Gifts from Santa Claus or Variations on the Themes of the Classics	28
The article shows how a not very difficult mathematical problem pulls together several classical branches of mathematics. This allows you to look at mathematics in a panoramic way, and not only from the point of view of some specialized mathematical branch.	
V. Volchkov, Vit. Volchkov, N. Volchkova. On Some Properties of Functions Characterized by Zero Integrals	38
The article introduces the reader to studying a class of functions that have zero integrals over all squares of a fixed size, lying in a given circle. A criterion for the total differential in a strengthened form is given, as well as generalizations of other classical results related to zero integrals are considered.	
S. Zharov, L. Medvedeva. Second Order Surfaces as Locai of Points in Space	49
The paper investigates the locus of points in space, determined by metric connections with a certain set of pairs of points, lines and planes. It is shown that any non-degenerate surface of the second order can be considered as some locus of points in space, and not the only one.	
V. Ivlev, E. Krivoshey. Approximation of the Pfaff Equations of Several Variables	57
The paper proposes a method for constructing approximate integrable analogs of non-integrable Pfaff equations. A special method for checking the exactness of the Pfaffian differential form is considered and an analytic form of the potential function is given without applying the theory of curvilinear integrals.	
E. Smolyanova. Geometric Pattern as a Limit Cycle	63
The paper investigates the transformation of an arbitrary right triangle whose successive iterations have a limit cycle in the form of a geometric pattern.	
T. Ivanova, V. Sherstyukov. On One Symmetric Inequality	69
A symmetric olympiad-type inequality with two natural variables is considered. Refinements and possible generalizations of the noted inequality are discussed.	
Current Information	75

