ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год двадцать восьмой

№ 1 (109)

январь - март 2024 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (109), 2024 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2024 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 17.04.2024 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (109), январь – март 2024 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

Ориентированные углы и изогональность

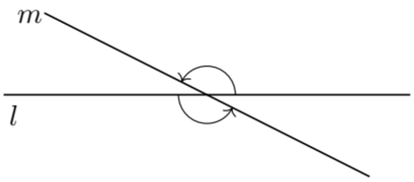
А. Н. Афанасьев

В статье продолжается тема применения ориентированных углов в доказательствах некоторых теорем планиметрии, рассмотренная автором в статьях [1] и [2]. В частности, доказаны с применением ориентированных углов, несколько утверждений, связанных с изогональностью.

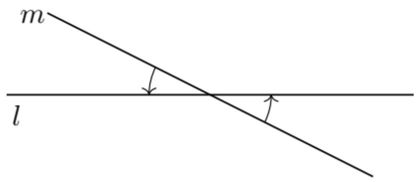
Свойства ориентированных углов и примеры их применения в решениях задач по планиметрии

Хорошим инструментом для решения некоторых типов олимпиадных задач по планиметрии являются ориентированные углы. Их применение особенно удобно, когда решение задачи требует рассмотрения нескольких вариантов геометрической конфигурации. В этом случае, после перевода условия задачи на язык ориентированных углов, необходимость рассматривания нескольких конфигураций отпадает. Преимуществами применения ориентированных углов можно считать еще и то, что во многих случаях нет необходимости делать чертежи и решения получаются очень компактными.

Ориентированным углом $\measuredangle(l,m)$ *между прямыми* l *и* m назовем величину угла, на который нужно повернуть прямую l против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную прямой m (или совпадающую с ней).



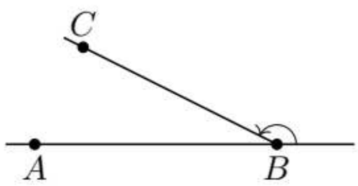
(1.1) Ориентированный угол $\measuredangle(l,m)$.



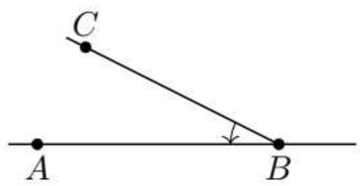
(1.2) Ориентированный угол $\measuredangle(m,l)$.

Рис. 1. К определению ориентированного угла между двумя прямыми.

Значение ориентированного угла определяем с точностью до $180°$ (Рис. 1). Определим $\measuredangle ABC$ как $\measuredangle(AB,BC)$ (Рис. 2).



(2.1) $\measuredangle ABC = \measuredangle(AB,BC)$.



(2.2) $\measuredangle CBA = \measuredangle(CB,BA) = \measuredangle(BC,AB)$.

Рис. 2. К определению ориентированного угла с вершиной в точке B.

Из определений следует, что $l \perp m \Leftrightarrow \measuredangle(l,m) = \measuredangle(m,l) = 90°$ и $\measuredangle ABC = 90° \Leftrightarrow \measuredangle CBA = 90°$.

Рассмотрим пять свойств ориентированных углов, которые могут быть полезны при решении задач по планиметрии. Некоторые из этих свойств непосредственно следуют из вышеприведенных определений, остальные легко проверить, рассмотрев всевозможные варианты взаимного расположения геометрических объектов, рассматриваемых в данном свойстве.

DA 1. [1] *Для любых двух прямых l и m верны равенства $\measuredangle(l,m) = 180^\circ - \measuredangle(m,l) = -\measuredangle(m,l)$, а для любых трех точек A, B, и C верны равенства $\measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle CBA = -\measuredangle CBA$* (смотри рисунки 1 и 2).

DA 2. *Для любых трех прямых l, m и n верно равенство $\measuredangle(l,m) + \measuredangle(m,n) = \measuredangle(l,n)$, а для любых четырех точек A, B, C и D верны равенства $\measuredangle ADB + \measuredangle BDC = \measuredangle ADC$* (можно проверить, рассмотрев все возможные варианты взаимного расположения данных прямых и точек).

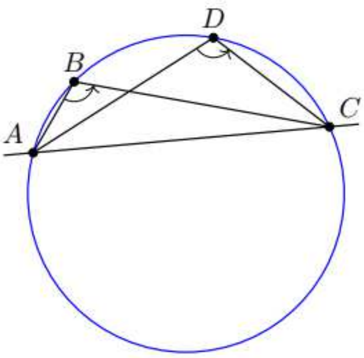
DA 3. *Равенство $\measuredangle(l,m) = 0$ равносильно утверждению: либо $l \parallel m$, либо l совпадает с m, а равенство $\measuredangle ABC = 0$ равносильно утверждению: точки A, B, и C лежат на одной прямой.*

Так как по (DA 2) для любой точки D верно равенство $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBD$, иногда, вместо второй части этого свойства, удобнее пользоваться равносильным ей утверждением:

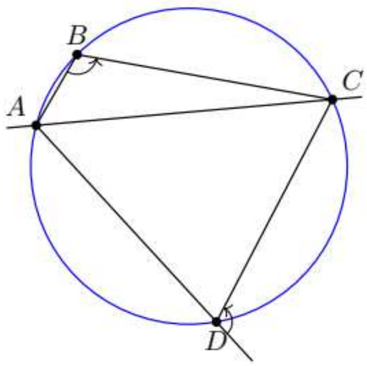
$$\begin{gathered}\textit{точки } A,\ B,\ \textit{и } C \textit{ лежат на одной прямой, если и только если}\\ \textit{для некоторой точки } D \textit{ верно равенство} \measuredangle ABD = \measuredangle CBD.\end{gathered} \tag{1}$$

DA 4. *Равенство $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$ равносильно утверждению, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Достаточно рассмотреть по отдельности варианты: 1) когда точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC и 2) когда точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC.



3.1. Точки B и D лежат по одну сторону от прямой AC.



3.2. Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC.

Рис. 3. К свойству DA 4.

DA 5. *Для любых трех прямых l, m, n верно равенство*

$$\measuredangle(l,m) + \measuredangle(m,n) + \measuredangle(n,l) = 0.$$

В частности, для любых трех точек A, B, C верно равенство

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0.$$

На примерах рассмотрим, как применяется метод ориентированных углов для решения некоторых задач по планиметрии. В качестве первого примера докажем утверждение, обобщающее свойство DA 5.

Пример 1. (Лемма 1). *Для любых n точек A_1, A_2, $\cdots$, A_n $(n \geq 3)$ верно равенство*

$$\measuredangle A_1A_2A_3 + \measuredangle A_2A_3A_4 + \cdots + \measuredangle A_{n-1}A_nA_1 + \measuredangle A_nA_1A_2 = 0.$$

[1] Свойства обозначены DA от Directed Angles — ориентированные углы (англ.).

Доказательство. Применим метод математической индукции.

1. Для $n = 3$ лемма верна по свойству DA 5.

2. Предположим, что лемма верна для $n = k$, то есть для любых k точек $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k$ верно равенство

$$S_k = \measuredangle A_1A_2A_3 + \measuredangle A_2A_3A_4 + \cdots + \measuredangle A_{k-1}A_kA_1 + \measuredangle A_kA_1A_2 = 0.$$

Рассмотрим аналогичную сумму для точек $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k,\ A_{k+1}$:

$$S_{k+1} = \measuredangle A_1A_2A_3 + \cdots + \measuredangle A_{k-2}A_{k-1}A_k + \measuredangle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1 + \measuredangle A_{k+1}A_1A_2.$$

Так как

$$\measuredangle A_1A_2A_3 + \cdots + \measuredangle A_{k-2}A_{k-1}A_k = S_k - \measuredangle A_{k-1}A_kA_1 - \measuredangle A_kA_1A_2 = -\measuredangle A_{k-1}A_kA_1 - \measuredangle A_kA_1A_2,$$

то:

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= -\measuredangle A_{k-1}A_kA_1 - \measuredangle A_kA_1A_2 + \measuredangle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1 + \measuredangle A_{k+1}A_1A_2 = \\
&= \underset{\text{после применения DA 1 к двум первым слагаемым}}{\measuredangle A_1A_kA_{k-1} + \measuredangle A_2A_1A_k + \measuredangle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1 + \measuredangle A_{k+1}A_1A_2} = \\
&= \underset{\text{после перегруппировки}}{(\measuredangle A_1A_kA_{k-1} + \measuredangle A_{k-1}A_kA_{k+1}) + (\measuredangle A_{k+1}A_1A_2 + \measuredangle A_2A_1A_k) + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1} = \\
&= \underset{\text{после применения DA 2 к содержимым скобок}}{\measuredangle A_1A_kA_{k+1} + \measuredangle A_{k+1}A_1A_k + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1} = \underset{\text{после перегруппировки}}{\measuredangle A_1A_kA_{k+1} + \measuredangle A_kA_{k+1}A_1 + \measuredangle A_{k+1}A_1A_k} \underset{\text{по DA 5}}{=} 0.
\end{aligned}$$

Этим утверждение доказано.

Из этой леммы следует, что для любых n точек $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ $(n \geq 3)$ сумма $\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{n-1}A_nA_1 + \angle A_nA_1A_2$ всегда кратна 180°. В частности, сумма углов любого многоугольника кратна 180°. Это следствие применим в следующем примере для решения одной известной задачи.

Пример 2. Найдите сумму углов при вершинах пятиконечной звезды (смотри рисунок 4).

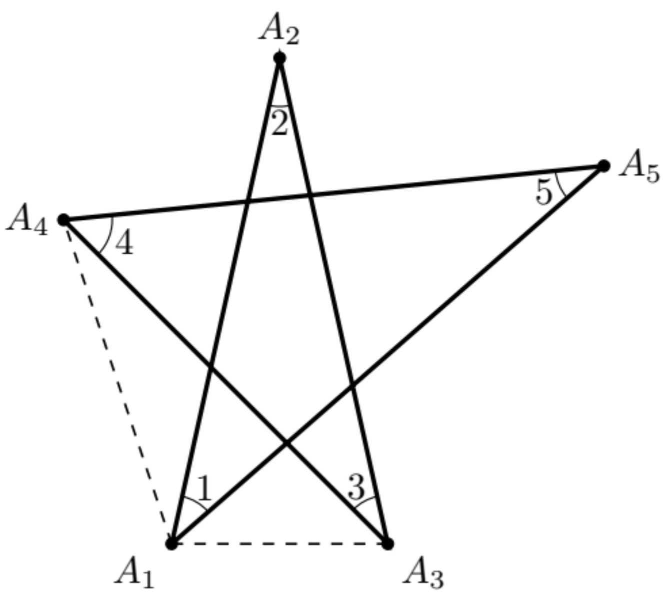


Рис. 4.

Докажем, что искомая сумма равна $180°$.

Доказательство. Так как $\angle 1 = \measuredangle A_5A_1A_2$, $\angle 2 = \measuredangle A_1A_2A_3$, $\angle 3 = \measuredangle A_2A_3A_4$, $\angle 4 = \measuredangle A_3A_4A_5$, $\angle 5 = \measuredangle A_4A_5A_1$, то из Леммы 1 следует, что сумма $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5$ кратна $180°$. Заметим, что $\angle 1+\angle 2+\angle 3 < 180°$ (углы $\angle 1$ и $\angle 3$ соответственно меньше чем углы A_1 и A_3 треугольника $A_1A_2A_3$). Аналогично $\angle 1 + \angle 4 + \angle 5 < 180°$, и следовательно:

$$0 < \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 < (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 1 + \angle 4 + \angle 5) < 360°.$$

Значит,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°.$$

В качестве следующего примера докажем известную теорему о высотах треугольника.

Пример 3. (Теорема о высотах треугольника.) Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Предположим, что B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, проведенных из вершин B и C соответственно на прямые AC и AB, O — точка пересечения прямых BB_1 и CC_1, а X — основание перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую BC. Заметим, что нам достаточно доказать, что $\measuredangle OAX = 0$.

Переводим условия задачи на язык ориентированных углов:

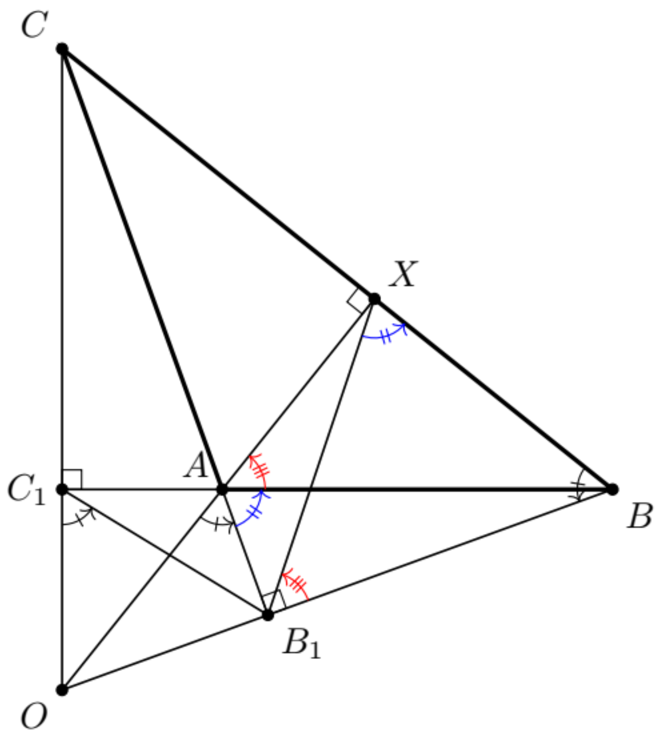


Рис. 5.

$BB_1 \perp AC$ равносильно $\measuredangle(BB_1, AC) = \measuredangle BB_1C = \measuredangle BB_1A = 90°$;

$CC_1 \perp AB$ равносильно $\measuredangle(CC_1, AB) = \measuredangle CC_1B = \measuredangle CC_1A = 90°$;

так как точка O лежит на прямых BB_1 и CC_1, то $\measuredangle OC_1A = \measuredangle CC_1A = 90°$ и $\measuredangle OB_1A = \measuredangle BB_1A = 90°$;

$AX \perp BC$ равносильно равенствам $\measuredangle AXB = \measuredangle AXC = 90°$.

Из этих равенств следует, что:

$$\text{точки } B,\ C_1,\ B_1 \text{ и } C \text{ лежат на одной окружности;} \tag{2}$$
$$\text{точки } A,\ C_1,\ O \text{ и } B_1 \text{ лежат на одной окружности;} \tag{3}$$
$$\text{точки } B_1,\ A,\ X \text{ и } B \text{ лежат на одной окружности.} \tag{4}$$

Из (3) и (2) следует, что

$$\measuredangle OAB_1 = \measuredangle OC_1B_1 = \measuredangle CC_1B_1 = \measuredangle CBB_1 = \measuredangle XBB_1, \tag{5}$$

а из (4), что

$$\measuredangle BAX = \measuredangle BB_1X \tag{6}$$

и

$$\measuredangle B_1AB = \measuredangle B_1XB. \tag{7}$$

Но тогда:

$$\measuredangle OAX = \measuredangle OAB_1 + \measuredangle B_1AB + \measuredangle BAX = \measuredangle XBB_1 + \measuredangle BB_1X + \measuredangle B_1XB = 0.$$

На рисунке показан случай случай тупоугольного треугольника.

Следующий пример показывает, каким кратким может быть доказательство с применением ориентированных углов.

Пример 4. (Теорема Микеля [3].) Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях) треугольника ABC, то окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и A_1B_1C и A_1BC_1, пересекаются в одной точке.

Доказательство Пусть O — вторая точка пересечения окружностей, описанных вокруг треугольников AB_1C_1 и A_1B_1C. Тогда:

$$\text{точки } A,\ B_1,\ C_1 \text{ и } O \text{ лежат на одной окружности;} \tag{8}$$
$$\text{точки } C,\ B_1,\ A_1 \text{ и } O \text{ лежат на одной окружности.} \tag{9}$$

Поэтому

$$\measuredangle BC_1O \underset{\text{по DA 3}}{=} \measuredangle AC_1O = \underset{\text{по DA 4}}{} \measuredangle AB_1O \underset{\text{по DA 3}}{=} \measuredangle CB_1O \underset{\text{по DA 4}}{=} \measuredangle CA_1O \underset{\text{по DA 3}}{=} \measuredangle BA_1O,$$

следовательно, по свойству DA 3, точки A_1, C_1, O и B лежат на одной окружности.

Ориентированные углы и изогональность

Две прямые, проходящие через вершину угла и образующие равные углы с биссектрисой угла, называются *изогональными прямыми относительно сторон этого угла*, [4, С. 93].

Применим свойства ориентированных углов для доказательства свойств изогоналей.

Лемма 2 [4,5]. *Пусть AP и AQ – изогонали угла с вершиной A, а B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны угла. Тогда $AQ \perp B_1C_1$.*

Доказательство На языке ориентированных углов изогональность прямых AP и AQ равносильна равенствам

$$\measuredangle PAB_1 = -\measuredangle QAC_1 = \measuredangle C_1AQ. \tag{10}$$

Так как

$$\measuredangle PB_1A = \measuredangle PC_1A = 90^\circ, \tag{11}$$

то точки A, P, B_1 и C_1 лежат на одной окружности (по свойству DA 4), следовательно,

$$\measuredangle B_1C_1A = \measuredangle B_1PA \tag{12}$$

(опять же по свойству DA 4). Так как по свойству DA 5

$$\measuredangle(B_1C_1, AQ) + \measuredangle(AQ, AC_1) + \measuredangle(AC_1, B_1C_1) = 0,$$

то

$$\measuredangle(B_1C_1, AQ) = -\measuredangle(AQ, AC_1) - \measuredangle(AC_1, B_1C_1) = \measuredangle(AC_1, AQ) + \measuredangle(B_1C_1, AC_1) = \\ = \measuredangle(B_1C_1, AC_1) + \measuredangle(AC_1, AQ) = \measuredangle B_1C_1A + \measuredangle C_1AQ.$$

Следовательно, так как по свойству DA 5 $\measuredangle B_1PA + \measuredangle PAB_1 + \measuredangle AB_1P = 0$, учитывая (10), (11) и (12):

$$\measuredangle(B_1C_1, AQ) = \measuredangle B_1C_1A + \measuredangle C_1AQ = \measuredangle B_1PA + \measuredangle PAB_1 = -\measuredangle AB_1P = \measuredangle PB_1A = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Так как в рассмотренной выше конструкции через точку A можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную прямой B_1C_1, то верны следующие следствия доказанного свойства:

Следствие 1. *Пусть даны угол с вершиной A, точки P и Q, а B_1 и C_1 — проекции точки P на стороны угла. Тогда, прямая AQ изогональна прямой AP (относительно сторон данного угла) тогда и только тогда, когда $AQ \perp B_1C_1$.*

Следствие 2. *Пусть даны угол с вершиной A, точки P и Q, а B_2 и C_2 — точки, симметричные точке P относительно сторон угла. Тогда, прямая AQ изогональна прямой AP (относительно сторон данного угла) тогда и только тогда, когда $AQ \perp B_2C_2$.*

Доказательство Достаточно заметить, что B_1C_1 — средняя линия треугольника PB_2C_2.

Следствие 3. *Пусть AP и AQ — изогонали угла BAC. Тогда, проекции точек P и Q на стороны угла AB и AC лежат на одной окружности, причем центр этой окружности — середина отрезка PQ.*

Доказательство Пусть P_b и Q_b — проекции точек P и Q соответственно на сторону AC, а P_c и Q_c — проекции точек P и Q на сторону AB угла BAC (смотри рисунок 6). Тогда:

по Следствию 1 $\measuredangle(Q_cQ_b, AP) = \measuredangle(AP, Q_cQ_b) = 90^\circ$ и $\measuredangle(P_cP_b, AQ) = \measuredangle(AQ, P_cP_b) = 90^\circ$;

так как AP и AQ — изогонали, то $\measuredangle BAP = \measuredangle(AB, AP) = \measuredangle(AQ, AC) = \measuredangle QAC$.

А так как

$$\measuredangle P_cQ_cQ_b = \measuredangle(P_cQ_c, Q_cQ_b) = \measuredangle(AB, Q_cQ_b) = \measuredangle(AB, AP) + \measuredangle(AP, Q_cQ_b) = \\ = \measuredangle(AQ, AC) + \measuredangle(AQ, P_cP_b) = \measuredangle(AQ, AC) + \measuredangle(P_cP_b, AQ) = \measuredangle(P_cP_b, AQ) + \measuredangle(AQ, AC) = \\ = \measuredangle(P_cP_b, AC) = \measuredangle(P_cP_b, P_bQ_b) = \measuredangle P_cP_bQ_b,$$

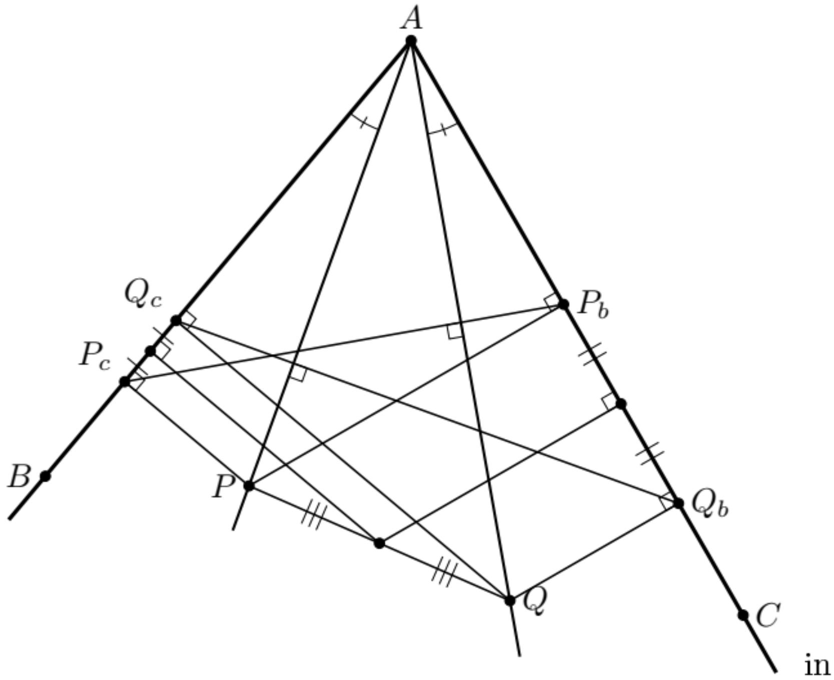


Рис. 6.

то точки P_b, Q_b, P_c и Q_c лежат на одной окружности. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров отрезков P_bQ_b и P_cQ_c, то есть в середине отрезка PQ.

Прежде чем продолжить, заметим, что утверждение "Точки X и Y симметричны относительно прямой AB" равносильно равенствам

$$\begin{cases} \measuredangle(AB, XY) = 90^\circ, \\ \measuredangle XAB = -\measuredangle YAB = \measuredangle BAY. \end{cases} \quad . \tag{13}$$

Лемма 3. [5, С. 39]*Пусть AP и AQ — изогонали угла с вершиной A, а B_2 и C_2 — точки, симметричные точке P относительно сторон угла. Тогда AQ — серединный перпендикуляр отрезка B_2C_2.*

Доказательство Пусть B_1 и C_1 — соответственно середины отрезков PB_2 и PC_2. Так как по следствию 2 $AQ \perp B_2C_2$, то учитывая (13), нам достаточно доказать, что $\measuredangle B_2AQ = \measuredangle QAC_2$.

Так как B_2 и P симметричны относительно AB_1, то $\measuredangle B_2AB_1 = \measuredangle B_1AP = \measuredangle B_1AQ + \measuredangle QAP$.

Так как C_2 и P симметричны относительно AC_1, то $\measuredangle C_2AC_1 = \measuredangle C_1AP$.

Следовательно:

$$\measuredangle B_2AQ = \measuredangle B_2AB_1 + \measuredangle B_1AQ = \measuredangle B_1AQ + \measuredangle QAP + \measuredangle B_1AQ.$$

Далее, учитывая что $\measuredangle B_1AQ = \measuredangle PAC_1 = \measuredangle C_1AC_2$:

$$\measuredangle B_2AQ = \measuredangle B_1AQ + \measuredangle QAP + \measuredangle B_1AQ = \measuredangle PAC_1 + \measuredangle QAP + \measuredangle C_1AC_2 = \\ = \measuredangle QAP + \measuredangle PAC_1 + \measuredangle C_1AC_2 = \measuredangle QAC_2.$$

Теорема 1. *[4, С. 97]Пусть точка P не лежит на описанной окружности или на сторонах треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные к прямым AP, BP и CP, пересекаются в одной точке.*

Доказательство Пусть точки A_1, B_1 и C_1 — соответственно точки, симметричные точке P относительно сторон BC, AC и AB треугольника ABC (смотри Рис. 7).

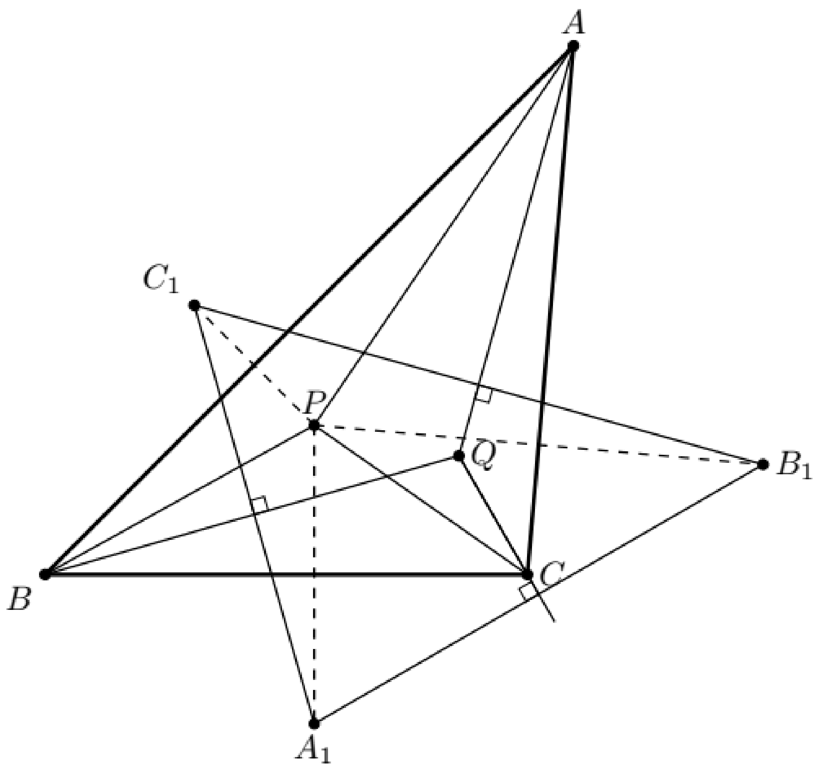


Рис. 7.

Тогда, по Лемме 2, прямые, изогональные прямым AP, BP и CP соответственно, являются серединными перпендикулярами к сторонам B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, и следовательно, пересекаются в одной точке.

Эту точку обозначим через Q и назовем *изогонально сопряженной точке P относительно треугольника ABC*.

Из доказанной теоремы следует, что для любой точки P плоскости, не лежащей на окружности, описанной около треугольника ABC, существует точка Q, изогонально сопряженная точке P относительно треугольника ABC. Ясно, что если точка Q изогонально сопряжена точке P, то точка P изогонально сопряжена точке Q.

В условии теоремы не случайно исключены некоторые точки. Если P — любая точка внутри отрезка BC, то, так как $\angle PBC = \angle PCB = 0$, в качестве точки Q подходит только точка A. Но тогда невозможно однозначно определить прямую QA, которая должна быть изогональна PA. Если же в качестве точки P взять, скажем, вершину A, то невозможно однозначно определить прямую PA. Таким образом, ни точка P, ни сопряженная ей точка Q не могут совпадать с вершиной треугольника.

Рассмотрим случай, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC и отлична от A, B и C. Пусть Q_a, Q_b и Q_c — точки на окружности, такие что AQ_a, BQ_b и CQ_c — соответственно изогонали прямых AP, BP и CP. Тогда

$$\measuredangle Q_aAC = \measuredangle BAP, \quad \measuredangle CBQ_b = \measuredangle PBA, \quad \measuredangle ACP = \measuredangle Q_cCB. \tag{14}$$

Докажем, что $AQ_a \parallel BQ_b$:

$$\begin{aligned}\measuredangle(AQ_a, BQ_b) = \measuredangle(Q_aA, CA) + \measuredangle(CA, AB) + \measuredangle(AB, BC) + \measuredangle(CB, BQ_b) =\\ = \measuredangle Q_aAC + \measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle CBQ_b =\\ = \measuredangle Q_aAC + (\measuredangle CAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCA) + \measuredangle CBQ_b - \measuredangle BCA =\\ = \measuredangle Q_aAC + \measuredangle CBQ_b + \measuredangle ACB = \measuredangle BAP + \measuredangle PBA + \measuredangle ACB =\\ = \measuredangle BAP + \measuredangle PBA + \measuredangle APB = \measuredangle BAP + \measuredangle APB + \measuredangle PBA = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, так как $AQ_a \parallel BQb$, то прямые AP, BP и CP не пересекаются в одной точке.

Будем рассматривать множество точек плоскости, из которого удалены точки, лежащие на границе треугольника ABC и на описанной окружности этого треугольника. Пусть P — произвольная точка этого множества. Точку Q пересечения прямых, изогональных прямым AP, BP и CP называют *изогонально сопряженной точке P относительно треугольника ABC*, а преобразование, переводящее каждую точку этого множества в изогонально сопряженную, — *изогональным сопряжением.*

Теорема 2 (3,6). *Ортоцентр и центр описанной окружности треугольника изогонально сопряжены.*

Доказательство Пусть H и O — соответственно ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Так как проекции A_1, B_1, C_1 точки O соответственно на стороны BC, AC, AB — середины этих сторон, то прямые B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 параллельны соответственно сторонам BC, AC, AB, и значит, перпендикулярны соответственно прямым AH, BH, CH. Следовательно, с учетом Следствия 1, точки H и O изогонально сопряжены.

Теорема 3. *[4,6, C. 97] Проекции изогонально сопряженных точек на стороны треугольника лежат на одной окружности.*

Доказательство Пусть P и Q изогонально сопряжены, точки P_a, P_b и P_c — соответственно проекции точки P на стороны BC, AC и AB, а Q_a, Q_b и Q_c — соответственно проекции точки Q на стороны BC, AC и AB, треугольника ABC, M — середина отрезка P.

Тогда, по Следствию 3, точки P_a, P_b, Q_a, Q_b лежат на одной окружности с центром M. Но точки P_a, P_c, Q_a, Q_c тоже лежат на одной окружности с центром M. Следовательно все шесть точек лежат на одной окружности.

Теорема 4. *[4, C. 53] Основания трех высот произвольного треугольника, середины трех его сторон и середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.*

Доказательство Пусть H и O — соответственно ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC, точки A_1, B_1 и C_1 — соответственно проекции точки H, а A_2, B_2 и C_2 — соответственно проекции точки O на стороны BC, AC и AB треугольника ABC, M — середина отрезка HO.

Тогда, по Теореме 3, точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной окружности с центром M. Радиус этой окружности равен радиусу описанной окружности серединного треугольника $A_2B_2C_2$, и следовательно, равен половине длины отрезков $OA = OB = OC$. Пусть A_3, B_3, C_3 — соответственно середины отрезков AH, BH, CH. Тогда $MA_3 = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{CA}{2} = MB_3 = MC_3$, и следовательно, все девять точек

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3,$$

лежат на одной окружности.

Напомним, что треугольник, образованный проекциями точки P на стороны треугольника ABC, называется *педальным треугольником точки P относительно ABC*, а описанная около него окружность — *педальной окружностью* точки P.

Теорема 5. *Педальные окружности двух точек совпадают тогда и только тогда, когда они изогонально сопряжены.*

Доказательство Пусть точки P_a, P_b и P_c — соответственно проекции точки P на стороны BC, AC и AB, а Q_a, Q_b и Q_c — соответственно проекции точки Q на стороны BC, AC и AB, треугольника ABC.

Тогда если P и Q изогонально сопряженные точки, то по Теореме 3, точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b и Q_c лежат на одной окружности. С другой стороны, окружностью, описанной около треугольника $P_aP_bP_c$, однозначно определяются точки Q_a, Q_b и Q_c, следовательно, и точка Q.

Литература

1. Афанасьев А.Н. Ориентированные углы, обобщенные педальные треугольники и обобщенные прямые Симсона // Математическое образование. - 2022. - № 4 (104). - С. 2-10.

2. Афанасьев А.Н. Еще одно доказательство теоремы Морлея // Математическое образование. - 2023. - № 2 (106). - С. 12-16.

3. Johnson R.A. Directed angles in elementary geometry // The American Mathematical Monthly. - 1917. - Vol. XXIV. - No 3. - P. 243-264.

4. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. - М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1962.

5. Прокопенко Д. Изогональное сопряжение и педальные треугольники // Квант. - 2017. - № 9. - С. 38-44.

6. Прасолов В.В. Точки Брокара и изогональное сопряжение. - М: Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2000.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры теории и методики
обучения математике и информатике
Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Уравнение третьей степени: новый подход к решению, его преимущества и недостатки

Е. Д. Москаленский

В статье рассмотрен метод решения уравнения третей степени, позволяющий, в некоторых случаях, обойти технические трудности, связанные с непосредственным применением формулы Кардано.

Введение

В статье речь пойдёт о решении уравнений вида

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0, \tag{1}$$

где c_2, c_1, c_0 — комплексные числа.

Задача имеет многовековую историю, подробно исследована, получена общая формула для нахождения корней. Тем не менее, имеется много причин, затрудняющих практическое применение этой формулы.

Дадим краткую сводку результатов, относящихся к решению этого уравнения.

Заменяя в этом уравнении неизвестное z новым неизвестным x, связанным с z равенством

$$z = x - \frac{c_2}{3}, \tag{2}$$

мы получим уравнение относительно неизвестного x, не содержащее квадрата этого неизвестного, а именно, $x^3 + \left(c_1 - \frac{c_2^2}{3}\right)x + \left(c_0 - \frac{c_1 c_2}{3} + \frac{2c_2^3}{27}\right) = 0$, или

$$x^3 + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

где $a_1 = c_1 - \frac{c_2^2}{3}$, $a_0 = c_0 - \frac{c_1 c_2}{3} + \frac{2c_2^3}{27}$.

Таким образом, для решения любого уравнения вида (1) достаточно решить уравнение (3) и найти корни уравнения (1) по формуле (2).

Формула для решения уравнения (3) носит название формулы Кардано. Её вывод можно осуществить разными способами. Приведём один из них, изложенный в [1].

Пусть x_0 — один из трёх корней уравнения (3). Введём вспомогательное неизвестное u и рассмотрим многочлен $u^2 - x_0 u - \frac{a_1}{3}$. Он обладает двумя комплексными корнями α и β. По теореме Виета

$$\alpha + \beta = x_0, \tag{4}$$

$$\alpha \cdot \beta = -\frac{a_1}{3}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $a_1 = -3\alpha\beta$. Подставляя в (3) выражение x_0 из (4), получаем

$$(\alpha+\beta)^3 + a_1(\alpha+\beta) + a_0 = 0,\ \ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) + a_0 = 0,\ \ \alpha^3 + \beta^3 = -a_0. \tag{6}$$

С другой стороны, из (5) следует, что

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{a_1^3}{27}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что числа α^3 и β^3 служат корнями квадратного уравнения $z^2+a_0 = -\frac{a_1^3}{27} = 0$. Решая это уравнение, получим $z = -\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{2} + \frac{a_1^3}{2}}$, значит,

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{-\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}}. \tag{8}$$

Учитывая (4), получаем формулу, выражающую корни уравнения (3) через его коэффициенты:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{-\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_1^3}{27}}}. \tag{9}$$

Так как кубичный радикал имеет, при комплексных a_0, a_1, три значения, то формулы (8) дают три значения для α и три — для β. Для данного значения α следует брать лишь то, из трёх значений β, которое удовлетворяет условию (5).

Полученная формула и носит название *формулы Кардано.*

Как уже упоминалось, практическое значение формулы Кардано весьма невелико, прежде всего из-за громоздкости вычислений даже для простых уравнений [2].

Другой подход к решению кубического уравнения

Пусть x_0 — общий корень исходного уравнения (3) и уравнения $x^2 + b_1 x + b_0 = 0$, где b_0, b_1 — комплексные числа, которые пока не известны, то есть x_0 является решением системы

$$\begin{cases} x_0^3 + a_1 x_0 + a_0 = 0, \\ x_0^2 + b_1 x_0 + b_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Из второго уравнения этой системы следует: $x_0^2 = -b_1 x_0 - b_0$. Умножим обе части этого равенства на x_0 ($x_0 \neq 0$). Получим: $x_0^3 = -b_1 x_0^2 - b_0 x_0 = -b_1(-b_1 x_0 - b_0) - b_0 x_0 = (b_1^2 - b_0)x_0 + b_0 b_1$. После подстановки выражения для x_0^3 в первое уравнение системы получим следующую систему:

$$\begin{cases} (b_1^2 - b_0 + a_1)x_0 + b_0 b_1 + a_0 = 0, \\ x_0^2 + b_1 x_0 + b_0 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Вначале рассмотрим частный случай, когда $b_1^2 - b_0 + a_1 = 0$, тогда из первого уравнения системы (12) следует, что $b_0 b_1 + a_0 = 0$ и для нахождения $b_0 b_1$ приходим к системе

$$\begin{cases} b_1^2 - b_0 + a_1 = 0, \\ b_0 b_1 + a_0 = 0, \end{cases}$$

которая приводится к виду

$$\begin{cases} b_0 = b_1^2 + a_1, \\ b_1^3 + a_1 b_1 + a_0 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы совпадает с уравнением (3), то есть для нахождения b_0, b_1 надо решить исходное уравнение. Значит, этот случай не даёт возможности найти решение исходного уравнения.

Пусть теперь $b_1^2 - b_0 + a_1 \neq 0$, тогда из (12) следует:

$$x_0 = -\frac{b_0 b_1 + a_0}{b_1^2 - b_0 + a_1}. \tag{13}$$

По условию, это же число является и корнем второго уравнения системы (12), то есть

$$\left(-\frac{b_0b_1+a_0}{b_1^2-b_0+a_1}\right)^2+b_1\left(-\frac{b_0b_1+a_0}{b_1^2-b_0+a_1}\right)=b_0=0.$$

После раскрытия скобок и группировки это условие приводится к виду

$$b_0^3-2a_1b_0^2+(a_1^2+a_1b_1^2+3a_0b_1)b_0-a_0(b_1^3+a_1b_1-a_0)=0. \tag{14}$$

Для каждой пары b_0, b_1, удовлетворяющей (14), корень исходного уравнения (3) находится по формуле (13).

Рассмотрим несколько примеров применения полученных результатов.

Пример 1

Перепишем уравнение (14), располагая слагаемые в порядке убывания показателя при переменной b_1:

$$-a_0b_1^3+a_1b_0b_1^2-a_0(a_1-3b_0)b_1+b_0(b_0-a_1)^2+a_0^2=0. \tag{15}$$

Если $b_0a_1=a_0b_1$, то, после подстановки в (15) уравнение преобразуется так:

$$\begin{aligned}&b_0a_1(3b_0-a_1)+b_0(b_0-a_1)^2+a_0^2=0;\\&3b_0^2a_1-b_0a_1^2+b_0^3-2b_0^2a_1+b_0a_1^2+a_0^2=0;\\&b_0^3+a_1b_0^2+a_0^2=0.\end{aligned} \tag{16}$$

То есть для нахождения b_0, b_1 приходим к системе

$$\begin{cases}b_0^3+a_1b_0^2+a_0^2=0,\\ b_1=\frac{a_1}{a_0}b_0.\end{cases} \tag{17}$$

Если же $b_1^2=3b_0-1$, то, после подстановки в (15) получаем

$$\begin{aligned}&-a_0b_1^3+a_1b_0b_1^2+a_0b_1^3+b_0(b_0-a_1)^2+a_0^2=0;\\&a_1b_0(3b_0-a_1)+b_0^3-2a_1b_0^2+a_1^2b_0+a_0^2=0;\\&b_0^3+a_1b_0^2+a_0^2=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Получили то же уравнение (16) для b_0, что и при первой подстановке. Значит, каждая из систем

$$\begin{cases}b_0^3+a_1b_0^2+a_0^2=0,\\ b_1=\sqrt{3b_0-a_1};\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}b_0^3+a_1b_0^2+a_0^2=0,\\ b_1=-\sqrt{3b_0-a_1}\end{cases} \tag{18}$$

даёт по три пары искомых чисел b_0, b_1. Обозначим через b любой корень уравнения (16), тогда, используя (17), получим:

$$x_0=-\frac{\frac{a_1}{a_0}b^2+a_0}{\frac{a_1^2}{a_0^2}b^2-b+a_1}=-a_0\frac{a_1b^2+a_0^2}{a_1^2b^2-a_0^2b+a_1a_0^2}=-a_0\frac{a_1b^2+a_0^2}{a_1(a_1b^2+a_0^2)-a_0^2b}.$$

Так как b удовлетворяет (16), то $a_1b^2+a_0^2=-b^3$. Значит,

$$x_0=-a_0\frac{-b^3}{-b(a_1b^2+a_0^2)}=\frac{a_0}{b}. \tag{19}$$

Итак, система (17) даёт три корня уравнения (3). Они вычисляются по формуле (19). (Напомним, что b_0 — один из трёх корней уравнения $b^3 + a_1 b^2 + a_0^2 = 0$).

Аналогично, из первой системы (18), получаем:

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3b - a_1} \cdot b + a_0}{3b - a_1 - b + a_1} = -\frac{a_0}{2b} - \frac{\sqrt{3b - a_1}}{2}. \tag{20}$$

И из второй системы (18):

$$x_0 = -\frac{a_0}{2b} + \frac{\sqrt{3b - a_1}}{2}. \tag{21}$$

Формулы (19) – (21) дают для x_0 девять значений. Но, поскольку x_0 — корень уравнения (3), то из этих 9 чисел не более трёх различных. В качестве таковых можно выбрать, например, корни, задаваемые формулой (19). Тогда приходим к утверждению:

Если u_1, u_2, u_3 — корни уравнения $u^3 + a_1 u^2 + a_0^2 = 0$, то числа $\frac{a_0}{u_1}$, $\frac{a_0}{u_2}$, $\frac{a_0}{u_3}$ являются корнями уравнения $u^3 + a_1 u + a_0 = 0$. Обратное утверждение также верно.

Получить этот факт из формулы Кардано затруднительно.

Пример 2

Проведём в уравнении (14) замену $b_1 = b_0 + k$, где k — пока неизвестное число. Тогда (14) перепишется так

$$(a_1 - a_0 + 1)b_0^3 - (k-1)(3a_0 - 2a_1)b_0^2 + ((a_1 - 3a_0)k^2 + 3a_0 k + a_1(a_1 - a_0))b_0 - a_0(k^3 + a_1 k - a_0) = 0.$$

При $a_0 = \frac{2}{3}a_1$ это уравнение принимает вид

$$\left(1 + \frac{a_1}{3}\right) b_0^3 - a_1 \left(k^2 - 2k - \frac{a_1}{3}\right) b_0 - \frac{2}{3}a_1 \left(k^3 + a_1 k - \frac{2}{3}a_1\right) = 0. \tag{22}$$

Потребуем чтобы k удовлетворяло условию $k^2 - 2k - \frac{a_1}{3} = 0$, тогда

$$k = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + \frac{a_1}{3}}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{a_1}{3}}.$$

Рассмотрим вначале случай когда $k = 1 + \sqrt{1 + \frac{a_1}{3}} = k_1$, тогда $\sqrt{1 + \frac{a_1}{3}} = k_1 - 1$. После возведения обеих частей равенства в квадрат (заметим, что мы работаем с комплексными числами, поэтому привычное требование $k_1 - 1 \geq 0$ опускается), получим $1 + \frac{a_1}{3} = k_1^2 - 2k_1 + 1$; отсюда $\frac{a_1}{3} = k_1(k_1 - 2)$; $a_1 = 3k_1(k_1 - 2)$. С учётом этого уравнение (22) можно записать в виде

$$(k_1 - 1)^2 b_0^3 = 2k_1(k_1 - 2)(k_1^3 + 3k_1(k_1 - 2)k_1 - 2k_1(k_1 - 2)); \;\; (k_1 - 1)^2 b_0^3 = 8k_1^2(k_1 - 2)(k_1 - 1)^2.$$

Окончательно, $b_0^3 = 8k_1^2(k_1 - 2)$; отсюда $b_0 = 2k_1^{\frac{2}{3}}(k_1 - 2)^{\frac{1}{3}}$. Для упрощения записи положим $k^{\frac{1}{3}} = m_1$, $(k_1 - 2)^{\frac{1}{3}} = n_1$. Тогда $b_0 = 2m_1^2 n_1$; $b_1 = b_0 + k_1 = m_1^2(2n_1 + m_1)$. По формуле (13) получаем:

$$x_0 = -\frac{2m_1^2 n_1 \cdot m_1^2(2n_1 + m_1) + 2m_1^3 n_1^3}{m_1^4(2n_1 + m_1)^2 - 2m_1^2 n_1 + 3m_1^3 n_1^3}.$$

Преобразуем числитель:

$$2m_1^2 n_1 \cdot m_1^2(2n_1 + m_1) + 2m_1^3 n_1^3 = 2m_1^3 n_1(m_1^2 + 2m_1 n_1 + n_1^2) = 2m_1^3 n_1(m_1 + n_1)^2.$$

Преобразуем знаменатель:

$$\begin{aligned}&m_1^4(2n_1+m_1)^2-2m_1^2n_1+3m_1^3n_1^3=m_1^2(m_1^2(n_1+m_1+n_1)^2-2n_1+3m_1n_1^3)=\\&=m_1^2(m_1^2(m_1+n_1)^2+2m_1^2n_1(m_1+n_1)+m_1^2n_1^2+n_1(3m_1n_1^2-2))=\\&=m_1^2(m_1^2(m_1+n_1)^2+n_1(2m_1^3+2m_1^2n_1+m_1^2n_1+3m_1n_1^2-2))=\\&=m_1^2(m_1^2(m_1+n_1)^2+n_1(2m_1^3+3m_1^2n_1+3m_1^2n_1-m_1^3+n_1^3))=\\&=m_1^2(m_1^2(m_1+n_1)^2+n_1(m_1+n_1)^3)=m_1^2(m_1+n_1)^2(m_1^2+m_1n_1+n_1^2)=\\&=m_1^2(m_1+n_1)^2+\frac{m_1^3-n_1^3}{m_1-n_1}=2m_1^2(m_1+n_1)^2\frac{1}{m_1-n_1}.\end{aligned}$$

(При выкладках дважды использовался тот факт, что $m_1^3-n_1^3=2$). Подставляя полученные выражения в (13), получим:

$$x_0=-m_1n_1(m_1-n_1). \tag{23}$$

Если же $k=1-\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}=k_2$, то $m_2=\sqrt[3]{k_2}=\sqrt[3]{-\left(-1+\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}\right)}=-\sqrt[3]{k_1-2}=-n_1$, $n_2=\sqrt[3]{k_2-2}=\sqrt[3]{-1-\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}}=-\sqrt[3]{k_1}=-m_1$. Тогда, после подстановки в (13) получим: $x_0=-m_2n_2(m_2-n_2)=-(-m_1)(-n_1)(-n_1+m_1)=-m_1n_1(m_1-n_1)$. Получили то же выражение, что и в (23). Заметим, что $m_1n_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}}\cdot\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}}=\sqrt[3]{\frac{a_1}{3}}$.

Окончательно получаем:

Корни уравнения $x^3+a_1x+\frac{2}{3}a_1=0$ находятся по формуле $x_0=\sqrt[3]{\frac{a_1}{3}}(n_1-m_1)$, где $m_1=\sqrt[3]{1+\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}}$; $n_1=\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+\frac{a_1}{3}}}$.

Формула Кардано для этого уравнения приводит, как легко проверить, к тому же выражению. То есть пример подтверждает работоспособность предлагаемого способа решения.

Пример 3

Перепишем (14), располагая слагаемые в порядке убывания показателя при переменной a_0:

$$a_0^2+b_1(3b_0-b_1^2-a_1)a_0+b_0(b_0^2-2a_1b_0+a_1b_1^2+a_1^2)=0. \tag{24}$$

Ограничимся рассмотрением частного случая: пусть $a_1=3b_0-b_1^2$, тогда (24) принимает вид

$$a_0^2+b_0(b_1^4-4b_0b_1^2+4b_0^2+3b_0b_1^2-b_1^4)=0;\ \ a_0^2=b_0^2(b_1^2-4b_0);$$

Окончательно получаем: $a_0=\pm b_0\sqrt{b_1^2-4b_0}$. Заметим, что если x_0 — корень уравнения $x_3+a_1x-a_0=0$, то число $x_3+a_1x-a_0=0$ является корнем уравнения $-x_0$, поэтому далее будем рассматривать только уравнение $x^3+(3b_0-b_1^2)x+b_0\sqrt{b_1^2-4b_0}=0$. По формуле (13) находим его корень

$$x_0=-\frac{b_0b_1^2+b_0\sqrt{b_1^2-4b_0}}{b_1^2-b_0+3b_0-b_1^2}=-\frac{b_1+\sqrt{b_1^2-4b_0}}{2}.$$

По теореме Безу левая часть этого уравнения делится без остатка на двучлен $x-x_0$, то есть на двучлен $x+\frac{b_1+\sqrt{b_1^2-4b_0}}{2}$. Выполнив это деление (например, используя схему Горнера) получим:

$$x^3+(3b_0-b_1^2)x+b_0\sqrt{b_1^2-4b_0}=$$

$$= \left(x + \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}x + \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0}(b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0})}{2}\right).$$

Итак, корень уравнения $x^3 + (3b_0 - b_1^2)x + b_0\sqrt{b_1^2 - 4b_0} = 0$ *равен* $-\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}$*, а два других являются корнями квадратного уравнения* $x^2 - \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2}x + \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0} \cdot (b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0})}{2} = 0.$

Непосредственное применение формулы Кардано для нахождения решений этого уравнения приводит к громоздким выражениям, упрощение которых весьма проблематично.

Заключение

Приведённые примеры далеко не исчерпывают путей нахождения переменных a_0, a_1, b_0, b_1, удовлетворяющих (14), а значит, вместе с формулой (13), имеется возможность получения новых фактов, относящихся к рассматриваемой теме. В частности, открывается возможность получить семейства уравнений 3-й степени для которых формула корней имеет более удобный для использования вид. Как показывает пример 3, получить такие факты из формулы Кардано зачастую не удаётся.

Кроме того, нетрудно распространить применение данного подхода и на уравнения четвёртой и более высоких степеней. Так что читателей, занявшихся этой темой, ожидает много интересного.

Литература

[1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — С-Пб: Лань, 2007.

[2] Янкелевич В.Г. Неприводимый случай // Квант. - 1971. - №11. - С. 20-21.

Москаленский Ефим Давыдович,
Научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Академгородок.

E-mail: ed.mosk@yandex.ru

О решении кубических уравнений в квадратных радикалах

Н. С. Астапов, Н. К. Ноланд

Приведены примеры параметрических семейств уравнений третьей и шестой степени, для которых все корни выражаются через квадратные радикалы. Найдено условие, при котором полином шестой степени в каноническом виде представим произведением полиномов третьей степени в каноническом виде. Все представленные разложения справедливы для полиномов с произвольными комплексными коэффициентами.

Три задачи древности на протяжении многих веков стимулировали развитие математики — задачи квадратуры круга, трисекции угла и удвоения куба. Задача удвоения куба сводится к построению с помощью циркуля и линейки действительного корня $\sqrt[3]{2}$ кубического уравнения $z^3 = 2$. Задача трисекции угла приводит к построению корня уравнения $z^3 - 3z - 1 = 0$. Лишь в XIX столетии было доказано, что эти задачи нельзя решить с помощью циркуля и линейки. Было доказано, что в общем случае корни кубического уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ не выражаются посредством квадратных радикалов через коэффициенты a, b и c. Аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами приводит к задаче нахождения корней характеристических многочленов. Необходимость явного символьного выражения корней алгебраических уравнений через его коэффициенты для последующего исследования закономерностей возникает, например, при решении уравнения Ван-дер-Ваальса (уравнения состояния реального газа). Это уравнение является кубическим уравнением относительно плотности газа, его объема и массы. В механике сплошной среды показывается, что в каждой точке деформируемого тела действуют главные напряжения и главные удлинения, которые являются корнями кубического уравнения [1]. Задача символьного (не численного) выражения корней возникает при исследовании устойчивости многочленов, при символьном интегрировании рациональных функций. Поэтому поиски классов уравнений (в том числе кубических), корни которых выражаются через квадратные радикалы из символьных коэффициентов, востребованы на практике.

Известно много способов решения алгебраических уравнений третьей степени: способ Ферро–Тартальи–Эйлера (формулы Кардано), способ Ф. Клейна, алгебраический способ Ф. Виета и др. [1, 2]. Предложим следующий способ, основанный на решении кубического уравнения частного вида

$$z^3 + az^2 + bz + b^2/(3a) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) имеет корень $z = -b/(a + \sqrt[3]{3ab - a^3})$, что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение. С помощью замены переменной $z = x - a/3$ приведем уравнение (1) к каноническому виду $x^3 + (3b - a^2)/3x + (3b - a^2)(3b - 2a^2)/(27a) = 0$. Обозначим коэффициент при первой степени неизвестного x через p, а свободный член $-q$. Из полученной системы уравнений найдем a и b:

$$a = 9(-q \pm 2\sqrt{D})/(2p), \quad b = (3p + a^2)/3, \quad D = p^3/27 + q^2/4. \tag{2}$$

Итак, справедливо утверждение: одним из корней кубического уравнения в канонической форме с произвольными комплексными коэффициентами p и q

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3}$$

является $x = a/3 - b/(a + \sqrt[3]{3ab - a^3})$, где a и b определяются равенствами (2), причем в выражении для a можно взять любой знак. Остальные корни находятся с помощью формул Виета. Однако известно, что не существует алгоритма извлечения кубического корня из произвольного комплексного числа. Поэтому данный способ также оказывается неконструктивным для уравнений с произвольными буквенными коэффициентами. Даже для уравнений с числовыми коэффициентами рациональные корни часто представляются через радикалы. Например, корнями уравнения

$$x^3 - 19x + 30 = 0 \tag{4}$$

являются целые числа 2, 3 и -5, для вычисления которых по формулам Ферро–Тартальи–Эйлера необходимо найти $\sqrt[3]{-15 + i28\sqrt{3}/9}$.

Оказывается, что в частных случаях, когда коэффициенты исходных уравнений связаны какимилибо дополнительными соотношениями, иногда удается выразить корни уравнений через коэффициенты существенно более просто. Так, если в уравнении (3) $q = \pm 2(p+4)$, то ∓ 2 является корнем этого уравнения. Уравнение (4) имеет корень 2, потому что для его коэффициентов выполняется равенство $30 = -2(-19+4)$. По этой же причине 2 есть корень уравнения $x^3 - (5 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 0$. Это уравнение является частным случаем уравнения Ньютона [3]

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x - 2abc = 0, \tag{5}$$

где $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$ и $x = 2$ — длины сторон вписанного в окружность радиуса 1 четырехугольника. Вершины такого четырехугольника лежат в вершинах правильного двенадцатиугольника. Построим бесконечную двухпараметрическую серию уравнений вида (5), имеющих корень $x = 2$ и, следовательно, разрешимых в квадратных радикалах. Для этого выберем два произвольных параметра, например, b и c: $0 < b < 2$, $0 < c < \sqrt{4 - b^2}$ и положим $a = \left(-bc + \sqrt{b^2c^2 - 4(b^2 + c^2 - 4)}\right)/2$.

Приведём еще две серии уравнений вида (5), разрешимых в квадратных радикалах. Для произвольных комплексных чисел a, b и c при условии $a^2 + b^2 + c^2 = 4a^2b^2c^2 \pm 1$ уравнение (5) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $\mp 2abc$. А при условии $a^2(2a^2 + b^2 + c^2) = 4b^2c^2$ уравнение (5) разрешимо в квадратных радикалах потому, что имеет корень $2bc/a$. Отметим, что в [3] дана рациональная параметризация a, b и c для которой x также рационально.

Кубическое уравнение

$$x^3 + wx^2 + px + q = 0, \tag{6}$$

где $w = -(n^3q^2 + (n+1)p^3)/(n^2pq)$, а параметры n, p и q — произвольные комплексные числа, имеет корень $x = nq/p$. Остальные два корня находятся из уравнения $x^2 - (n+1)p^2/(n^2q)x - p/n = 0$. Следовательно, уравнение (6) является бесконечной трёхпараметрической серией уравнений, разрешимых в квадратных радикалах. Если $n = -3$, то получим двухпараметрическую серию уравнений

$$x^3 + (2p^3 + 27q^2)/(9pq)x^2 + px + q = (x + 3q/p)(x - x_2)(x - x_3) = 0, \tag{7}$$

где $x_{2,3} = \pm\dfrac{3q}{p} \cdot \dfrac{\sqrt{k+1} \pm 1}{k}$, $k = -\dfrac{27q^2}{p^3}$. Если в уравнении (7) $k = m(m+2)$, то $x_2 = \dfrac{3q}{mp}$, $x_3 = \dfrac{-3q}{(m+2)p}$, то есть корни уравнения выражаются через коэффициенты рационально. Если в уравнении (7) $k = -1$, то $m = -1$ и уравнение имеет трехкратный корень $x_{1,2,3} = -3q/p$.

Кубическое уравнение $x^3 + px + 5p\sqrt{6p}/9 = 0$, где p — произвольное комплексное число, имеет корни $x_1 = -2\sqrt{p/6}$, $x_{2,3} = \sqrt{p/6} \pm 3\sqrt{-p/6}$, то есть разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{2 - 4p}/4 = 0$, где p — произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = -\sqrt{2 - 4p}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение

$$x^3 + px - (\sqrt{p^7} + p^3 + \sqrt{p^3} + 3p + 3\sqrt{p} + 1)/p^3 = 0$$

для произвольного комплексного числа p имеет корень $x_1 = 1/p + 1/\sqrt{p}$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Уравнение $x^3 + px + \sqrt{-p^3(6 + 3\sqrt{2}}/9 = 0$, где p — произвольное комплексное число, имеет корень $x_1 = 3p^2q/(p^3 + 27q^2)$, следовательно, также разрешимо в квадратных радикалах. Один из корней уравнения $x^3 + px + \sqrt{-2p^3} = 0$ равен $\sqrt{-2p}$, и это уравнение разрешимо в квадратных радикалах. Интересно отметить, что пакет прикладных программ *Mathematica* генерирует для корней этого уравнения громоздкие выражения с использованием кубических радикалов. Ещё несколько разрешимых в квадратных радикалах кубических уравнений специального вида можно найти в [1, 4].

Необходимым и достаточным условием, при котором полином шестой степени в каноническом виде $x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ можно представить произведением полиномов третьей степени в каноническом виде является равенство $g(c^2 - 4e) - cdf + d^2e + f^2 = 0$, где коэффициенты c, d, e, f, g — произвольные комплексные числа [4]. Эта факторизация имеет вид:

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g = \left(x^3 + \frac{c + w}{2}x + \frac{d \mp v}{2}\right)\left(x^3 + \frac{c - w}{2}x + \frac{d \pm v}{2}\right), \tag{8}$$

где $f = (cd \pm vw)/2$, $v = \sqrt{d^2 - 4g}$, $w = \sqrt{c^2 - 4e}$. Справедливость разложения (8) легко проверяется перемножением скобок. Если $g = d^2/4$, то разложение (8) принимает вид

$$x^6 + cx^4 + dx^3 + \frac{c^2}{4}x^2 + \frac{cd}{2}x + \frac{d^2}{4} = \left(x^3 + \frac{c}{2}x + \frac{d}{2}\right)^2$$

и полином имеет три двукратных корня. Если $g = d^2/4$ и $2c^3 + 27d^2 = 0$, то полином (8) имеет один двукратный и один четырехкратный корень.

Если полиномы третьей степени в правой части тождества (8) можно факторизовать с помощью квадратных радикалов, то это алгебраическое уравнение шестой степени оказывается разрешимым в квадратных радикалах. Например, корни уравнения

$$\left(x^3 + px + \sqrt{-p^3(6 + 3\sqrt{2})/9}\right)\left(x^3 + mx + \sqrt{-2m^3}\right) = 0$$

можно выразить через коэффициенты p и m с помощью квадратных радикалов. Корни уравнения шестой степени $(x^3 + px + q)\left(x^3 - \sqrt{5}/2x + \sqrt{(\sqrt{5} + 1)/8}\right) = 0$, где $q = -\left(\sqrt{p^7} + p^3 + \sqrt{p^3} + 3p + 3\sqrt{p} + 1\right)/p^3$, также выражаются в квадратных радикалах. Полином в первой скобке имеет корень $1/p + 1/\sqrt{p}$, а полином во второй скобке имеет корень $-\sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2}$. Уравнение шестой степени $\left(x^3 - \frac{p}{2}x + \sqrt{(p + 1)/2}/2\right)\left(x^3 - \frac{m}{2}x + \sqrt{(m + 1)/2}/2\right) = 0$ для произвольных комплексных чисел p и m имеет корни $-\sqrt{(p + 1)/2}/2$, $-\sqrt{(m + 1)/2}/2$, следовательно, разрешимо в квадратных радикалах. Пакет прикладных программ *Mathematica* не находит решения в квадратных радикалах этих трёх уравнений шестой степени. Даже для численных значений коэффициентов $p = \sqrt{2}$, $m = \sqrt{3}$ пакет *Mathematica* выражает корни через кубические радикалы. Другие примеры разрешимых в радикалах алгебраических уравнений выше четвёртой степени можно найти в [4–7].

Известно, что однотипные величины треугольника (стороны, высоты, синусы углов и т.п.) являются корнями соответствующего кубического уравнения, коэффициенты которого выражаются через полупериметр p треугольника, радиус r вписанной в треугольник и радиус R описанной около треугольника окружности. Так, стороны треугольника являются корнями кубического уравнения

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4pRr = 0, \tag{9}$$

а тангенсы половинных углов являются корнями уравнения $px^3 - (4R + r)x^2 + px - r = 0$, и стандартными способами эти действительные величины выражаются через комплексные числа.

Используя приведённые разложения, иногда удаётся выразить корни через квадратные радикалы. Например, если выполняются равенства $p = 13\sqrt{3}$, $q = \sqrt{2}$, $R = \left(26641\sqrt{2} - 1807\sqrt{6}\right)/1884$, то уравнение (9) приводится к виду

$$z^3 - \left(\left(3614\sqrt{3} + 25375\right)/471\right) z + \left(\left(7228\sqrt{3} + 46982\right)/471\right) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет корень 2, так как выполняется равенство $q = -2(p + 4)$. Поэтому один из корней уравнения (9) равен $x = 26\sqrt{3}/3 + 2$. И все корни уравнения (9) можно построить с помощью циркуля и линейки.

Полученные здесь разложения можно использовать при углубленном изучении математики, программирования и при составлении олимпиадных задач. Авторы надеются, что эти результаты будут полезны и в научных исследованиях.

Литература

[1] Астапов Н.С., Астапов И.С. Сравнительный анализ решений алгебраических уравнений третьей и четвертой степени // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. - 2016. - Т. 16. - № 1. - С. 14-28.

[2] Schmakov S.I. A Universal Method of Solving Quartic Equations // International Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2011. - Vol. 71. - no. 2. - P. 251-259.

[3] Hajja M., Sondow J. Newton Quadrilaterals, the Associated Cubic Equations, and Their Rational Solutions // Amer. Math. Monthly. - Vol. 126. - 2019. - P. 135-150.

[4] Астапов Н.С. О решении в квадратных радикалах алгебраических уравнений малых степеней // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». - 2022. - Т. 14. - № 3. - С. 5-16.

[5] Галиева Л.И., Галяутдинов И.Г. Об одном классе уравнений, разрешимых в радикалах // Известия вузов. Математика. - 2011. - № 2. - С. 22-30.

[6] Антипова И.А., Михалкин Е.Н., Цих А.К. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений // Математический сборник. - 2018. - Т. 209. - № 10. - С. 3-30.

[7] Трубников Ю.В., Чернявский М.М. Локализация и нахождение решений трехчленных алгебраических уравнений // Математические структуры и моделирование. - 2020. - № 2(54). - С. 65-85.

Астапов Н.С.,
старший научный сотрудник
Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
доцент, к. ф.-м. н.

E-mail: nika@hydro.nsc.ru

Ноланд Наталья Константиновна,
старший инженер
Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН.

E-mail: astspov47@mail.ru

Некоторые качественные методы в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений

А. В. Неклюдов

Рассмотрены качественные методы изучения поведения на бесконечности решений нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с экспоненциальной нелинейностью. Показано отсутствие глобальных решений уравнения на всей прямой и степенное или логарифмическое стремление решений к минус бесконечности на полупрямой.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются многие методы решения уравнений, но довольно скромное место уделяется *качественным методам*, позволяющим установить свойства решений без их прямого нахождения в тех случаях, когда аналитическое интегрирование уравнений затруднительно или невозможно. Иногда рассматриваются качественные методы для линейного уравнения второго порядка - теоремы о чередовании нулей, сравнение решений, поведение в бесконечности и др. [1], [2]. В настоящей статье рассматривается поведение решений на бесконечности и возможность существования решений на полупрямой для нелинейного уравнения четвертого порядка

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = e^{y}. \tag{1}$$

1. Условие существования решений на полупрямой. Отсутствие глобальных решений. Стремление решений на полупрямой к минус бесконечности

Лемма 1. *Для любого решения уравнения* (1)*, определенного при $x \geq x_0$, справедливо неравенство $y'''(x) < 0$ при всех $x \geq x_0$.*

Доказательство. Докажем лемму методом нелинейной емкости [3]. Предположим, что для некоторого $x_1 \geq x_0$ справедливо противоположное неравенство $y'''(x_1) \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 = 0$. Тогда в силу уравнения (1) при $x \geq 1$ имеем

$$y'''(x) = y'''(0) + \int_0^x e^{y(t)}\,dt \geq c_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Очевидно, отсюда следует, что $y(x) \sim c_1 x^3 \to +\infty$, $x \to +\infty$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим срезающую функцию $\varphi(x) \geq 0$ класса $C^4[0,2]$, такую, что $\varphi(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq 1$ при $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$, $\varphi(2) = \varphi'(2) = \varphi''(2) = \varphi'''(2) = 0$, $\left(\varphi^{\mathrm{IV}}(x)\right)^2 \leq c\varphi(x)$, $c = \mathrm{const} > 0$. Очевидно, что можно построить такую функцию, например, равную $2^7(x-2)^8$ при $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$.

Пусть $\varphi_N(x) = \varphi\Big(\dfrac{x}{N}\Big)$. Тогда $\varphi_N^{\mathrm{IV}}(x) = \dfrac{1}{N^4}\varphi^{\mathrm{IV}}\Big(\dfrac{x}{N}\Big)$. Умножим уравнение (1) на $\varphi_N(x)$ и проинтегрируем от 0 до $2N$, последовательно интегрируя по частям:

$$\int_0^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx = \int_0^{2N} y^{\mathrm{IV}}(x)\varphi_N(x)\,dx = y'''(x)\varphi_N(x)\Big|_0^{2N} - \int_N^{2N} y'''(x)\varphi_N'(x)\,dx =$$

$$= -y'''(0) - y''(x)\varphi_N'(x)\Big|_N^{2N} + \int_N^{2N} y''(x)\varphi_N''(x)\,dx = -y'''(0) + y'(x)\varphi_N''(x)\Big|_N^{2N} - \int_N^{2N} y'(x)\varphi_N'''(x)\,dx =$$

$$= -y'''(0) - y(x)\varphi_N'''(x)\Big|_N^{2N} + \int_N^{2N} y(x)\varphi_N^{\mathrm{IV}}(x)\,dx = -y'''(0) + \int_N^{2N} y(x)\varphi_N^{\mathrm{IV}}(x)\,dx.$$

Учитывая предположение, что $y'''(0) \geq 0$, получаем:

$$\int_0^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx \leq \int_N^{2N} y(x)\varphi_N^{\mathrm{IV}}(x)\,dx = \frac{1}{N^4}\int_N^{2N} y(x)\varphi^{\mathrm{IV}}\Big(\frac{x}{N}\Big)\,dx.$$

С учетом простейшего неравенства $a \leq (a^2+1)/2$ и неравенства для $\varphi^{\mathrm{IV}}(x)$, получаем:

$$\int_0^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx \leq \frac{1}{2N^4}\bigg(\int_N^{2N} y^2(x)\Big(\varphi^{\mathrm{IV}}\Big(\frac{x}{N}\Big)\Big)^2\,dx + N\bigg) \leq \frac{c}{2N^4}\int_N^{2N} y^2(x)\varphi_N(x)\,dx + \frac{1}{2N^3}.$$

Поскольку $y(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, имеем: $y^2(x) < e^{y(x)}$ при $x \geq x_1 = \mathrm{const}$. Тогда получаем при $N \geq N_0 = \mathrm{const} > 0$:

$$\int_0^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_N^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx + \frac{1}{2N^3},$$

откуда следует, что

$$\int_0^{2N} e^{y(x)}\varphi_N(x)\,dx \leq \frac{1}{N^3} \to 0, \quad N \to \infty,$$

что невозможно. Полученное противоречие означает, что при $y'''(x_1) \geq 0$ решение $y(x)$ не может существовать на полупрямой $x \geq x_0$. Лемма доказана.

Итак, $y'''(x) < 0$ для решения, определенного на полупрямой $x \geq x_1$. Отсюда следует, что решения на всей прямой уравнение (1) иметь не может. Действительно, проводя аналогичные рассуждения для $x \to -\infty$, получим на полупрямой $x < x_0$ условие существования решения $y'''(x) > 0$, что несовместимо с условием для полупрямой $x > x_0$. Таким образом, любое решение должно разрушаться или при $x \to -\infty$, или при $x \to +\infty$.

Из равенства

$$y'''(x) = y'''(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{y(t)}\,dt$$

и леммы 1 следует, что

$$\int_{x_0}^{+\infty} e^{y(t)}\,dt < \infty.$$

Из конечности этого интеграла следует, что

$$y(x) \to -\infty, \quad x \to +\infty.$$

Действительно, в противном случае функция $y(x)$ должна иметь бесконечную последовательность локальных максимумов и минимумов, следовательно по теореме Ролля должна иметь бесконечную последовательность нулей 2-й, 3-й и 4-й производных, что невозможно в силу уравнения (1).

2. Случай степенного стремления решений к минус бесконечности

Найдем точный порядок стремления решений (1) к $-\infty$ при $x \to +\infty$.

Поскольку в силу уравнения (1) функция $y'''(x)$ возрастает и в силу леммы 1 остается отрицательной, то существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} y'''(x) = K_0 \le 0$.

Если $K_0 < 0$, то получаем, что

$$y'''(x) < K_0, \quad y(x) \le -c_1x^3, \quad c_1 = \mathrm{const} > 0, \ y^{\mathrm{IV}}(x) = f(x), \quad 0 < f(x) < e^{-c_1x^3}$$

при $x \ge x_1$. Тогда, интегрируя, получим

$$y'''(x) = y'''(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt = K_0 + O\big(e^{-c_1x^3}\big), \quad x \to +\infty.$$

Интегрируя еще три раза, получим

$$y(x) = C_0x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_1x^3}\big), \quad C_0 < 0.$$

Пусть $K_0 = \lim_{x\to+\infty} y'''(x) = 0$. Так как $y'''(x) < 0$, то $y''(x)$ убывает, и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x\to+\infty} y''(x) = K_1$. Так как $\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$, то очевидно, что $K_1 \le 0$. Если $K_1 < 0$ (в том числе, если $K_1 = -\infty$), то $y(x) < -c_2x^2$, $0 < y^{\mathrm{IV}}(x) < e^{-c_2x^2}$, $c_2 = \mathrm{const} > 0$, $x \ge x_1$. Интегрируя, как и выше, получаем

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_2x^2}\big), \ \ C_1 < 0$$

(при этом случай $K_1 = -\infty$ оказывается невозможным). Пусть $K_1 = \lim_{x\to+\infty} y''(x) = 0$. Тогда $y''(x) > 0$, $y'(x)$ возрастает, и существует предел $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = K_2$. Очевидно, что $K_2 \le 0$. Если $K_2 < 0$, то, интегрируя как выше, получим

$$y(x) = C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_3x}\big), \quad C_2 < 0, \quad c_3 > 0.$$

Таком образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (1) *на полупрямой* $x \ge x_0$ *для которого при некотором* $j = 1, 2, 3$ *выполнено условие*

$$\lim_{x\to+\infty} y^{(j)}(x) \ne 0$$

ведет себя одним из следующих способов:

$y(x) = C_0x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_1x^3}\big), \ C_0 < 0, \ c_1 > 0;$
$y(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_2x^2}\big), \ C_1 < 0, \ c_2 > 0$
$y(x) = C_2x + C_3 + O\big(e^{-c_3x}\big), \ C_2 < 0, \ c_3 > 0.$

3. Решения с логарифмическим поведением

Наибольшие трудности рассмотрения поведения решений вызывает оставшийся случай $K_2 = 0$, то есть

$$y^{(j)}(x) \to 0, \quad x \to +\infty \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Примером такого решения является функция

$$Y(x) = -4\ln x + \ln 24. \tag{3}$$

Заметим, что для решений, удовлетворяющих (2), легко получить предварительную логарифмическую оценку сверху. Так как $y'''(x) < 0$, то положительная функция $y''(x)$ стремится к нулю, монотонно убывая. Тогда $y''(x) = o(1/x)$ при $x \to +\infty$. Действительно, в противном случае для некоторого $\delta > 0$ и некоторой последовательности $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$, выполняется неравенство $y''(x_n) > \delta/x_n$. Отсюда $y''(x) > \delta/x_n$ при $x \in (x_n/2, x_n)$, и

$$y'(x_n) - y'(x_n/2) = \int_{x_n/2}^{x_n} y''(x)\,dx > \frac{1}{2}\delta,$$

что противоречит условию $y'(x) \to 0$, $x \to \infty$.

Аналогично, с учетом монотонности $y'''(x) < 0$ получим, что $y'''(x) = o(1/x^2)$, в противном случае для некоторой последовательности x_n и $\delta > 0$ справедливы неравенства $y'''(x_n) < -\delta/x_n^2$,

$$y''(x_n) - y''(x_n/2) = \int_{x_n/2}^{x_n} y'''(x)\,dx < -\frac{\delta}{2x_n},$$

что противоречит условию $y''(x) = o(1/x)$.

Еще раз применяя аналогичные рассуждения, получим, что $y^{\mathrm{IV}}(x) = o(1/x^3)$, $x \to \infty$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $x > x(\varepsilon)$ имеем $e^{y(x)} < \varepsilon/x^3$, то есть $y(x) < \ln\varepsilon - 3\ln x$. Это означает, что

$$y(x) < \Lambda(x) - 3\ln x, \qquad \Lambda(x) \to -\infty, \quad x \to +\infty. \tag{4}$$

Теперь получим более точные, чем (4), оценки для решений, удовлетворяющих (2).

Лемма 2. *1) Не существует решения уравнения* (1)*, удовлетворяющего* (2)*, которое при всех* $x \geq x_1 = \mathrm{const}$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(x) > -4\ln x + M, \qquad M > \ln 24.$$

2) Не существует решения уравнения (1)*, которое при всех* $x \geq x_1 = \mathrm{const}$ *удовлетворяет неравенству*

$$y(x) < -4\ln x + N, \qquad N < \ln 24.$$

Доказательство. 1) Пусть при всех $x \geq x_1 = \mathrm{const}$ выполнено первое неравенство. Тогда в силу уравнения (1)

$$y^{\mathrm{IV}}(x) > \frac{M_1}{x^4}, \quad M_1 > 24.$$

Интегрируя от x до $+\infty$, получим:

$$y'''(+\infty) - y'''(x) > \frac{M_1}{3x^3}, \quad y'''(x) < -\frac{M_1}{3x^3}.$$

Интегрируя еще дважды от x до $+\infty$, получим

$$y''(x) > \frac{M_1}{6x^2}, \qquad y'(x) < -\frac{M_1}{6x}.$$

Тогда, интегрируя от x_1 до x, получаем неравенство

$$y(x) < -\frac{1}{6}M_1 \ln x + \mathrm{const}.$$

Так как $\dfrac{1}{6}M_1 > 4$, то получаем противоречие с неравенством пункта 1). Утверждение пункта 1) доказано.

2) Рассуждая аналогично, получаем, что если выполнено неравенство п. 2), то

$$y(x) > -\frac{1}{6}N_1 \ln x + \mathrm{const}, \qquad N_1 < 24.$$

Получено противоречие с неравенством п. 2). Лемма, таким образом, доказана.

Лемма 2 означает, что для решений из класса (2) функция

$$y(x) - Y(x)$$

не может быть равномерно отделена от нуля на полупрямой вида $(x_1, +\infty)$ ни снизу, ни сверху. Таким образом, даже если функция $y(x) - Y(x)$ отходит от нуля на некоторую равномерно отделенную от нуля величину, она должна возвращаться сколь угодно близко к нулю.

Покажем, что решение $y(x)$ из данного класса (2) не может отклоняться от от решения $Y(x) = -4\ln x + \ln 24$ больше, чем на некоторую постоянную.

Рассмотрим некоторую функцию $z(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ на четыре равные части точками $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, где $h = (b-a)/4$. Определим линейный функционал L от функции $z(x)$ следующим образом:

$$L(z) = z(b) - 4z(a+3h) + 6z(a+2h) - 4z(a+h) + z(a). \tag{5}$$

Лемма 3. *Пусть функция $z(x) \in C^4[a, b]$, $z^{\mathrm{IV}}(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда*

$$L(z) > 0.$$

Доказательство. Пусть $a \le t \le a + 3h$. Очевидно, что

$$z'''(t+h) - z'''(t) > 0.$$

Проинтегрируем это неравенство по t от σ до $\sigma + h$, где $a \le \sigma \le a + 2h$:

$$z''(\sigma + 2h) - 2z''(\sigma + h) + z''(\sigma) > 0.$$

Проинтегрируем по σ от ξ до $\xi + h$, где $a \le \xi \le a + h$:

$$z'(\xi + 3h) - 3z'(\xi + 2h) + 3z'(\xi + 2h) - z'(\xi) > 0.$$

Наконец, интегрируя по ξ от a до $a + h$, получаем:

$$L(z) > 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $y(x)$ — решение уравнения* (1) *при $x > x_1 > 0$, удовлетворяющее условию* (2). *Если для некоторых a, b, где $x_1 < a < b$, выполнены условия*

$$y(a) = -4\ln a + \ln 24 + \ln 2 = Y(a) + \ln 2, \quad y(b) = -4\ln b + \ln 24 + \ln 2 = Y(b) + \ln 2,$$

и для всех $x \in (a, b)$

$$y(x) > -4\ln x + \ln 24 + \ln 2 = Y(x) + \ln 2,$$

то при всех $x \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$y(x) \le -4\ln x + \ln 24 + \ln 2 + 8\ln 144.$$

Доказательство. Если $b \le 2a$, то легко видеть, что утверждение леммы верно, т.к. при $x \in (a,b)$ имеем: $x < b \le 2a$ и

$$y(x) < y(a) = -4\ln a + \ln 24 + \ln 2 \le -4\ln\left(\frac{b}{2}\right) + \ln 24 + \ln 2 =$$
$$= -4\ln b + 5\ln 2 + \ln 24 < -4\ln x + 5\ln 2 + \ln 24.$$

Рассмотрим случай $b > 2a$. Покажем, что в этом случае справедливо неравенство $b \le 144^2 a$. Тогда утверждение леммы будет легко получить, как и в случае $b \le 2a$.

Пусть $b > 2a$. Так как $y(x) > Y(x) + \ln 2$ на (a,b), то

$$y^{\mathrm{IV}}(x) = e^{y(x)} > 2e^{Y(x)} = 2Y^{\mathrm{IV}}(x).$$

Таким образом, для функции $z(x) = y(x) - 2Y(x)$ имеем: $z^{\mathrm{IV}}(x) > 0$ на (a,b), следовательно, по лемме 3

$$L(z) > 0,$$
$$L(y) > 2L(Y). \tag{6}$$

Так как $y''(x) > 0$, то $y(x)$ — выпуклая функция, следовательно,

$$y(a+h) + y(a+3h) > 2y(a+2h).$$

Тогда получаем:

$$L(y) \equiv y(b) - 4y(a+3h) + 6y(a+2h) - 4y(a+h) + y(a) < y(b) + y(a) - 2y(a+2h).$$

Так как $y'(x) < 0$, то $y(a+2h) > y(b)$ и

$$L(y) < -y(b) + y(a)$$

Таким образом, из (6) следует, что

$$y(a) - y(b) > L(y) > 2L(Y),$$

то есть

$$4\ln\left(\frac{b}{a}\right) > 2L(Y). \tag{7}$$

Оценим снизу $L(Y)$. Согласно (3) и (5),

$$L(Y) = 4\ln\left(\frac{(a+h)^4(a+3h)^4}{ab(a+2h)^6}\right) = 4\ln\left(\frac{\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4}{ab\left(\frac{a+b}{2}\right)^6}\right).$$

Учитывая, что $a < b/2$ и $(a+b)/2 < 3b/4$, получим:

$$L(Y) > 4\ln\left(\frac{\left(\frac{b}{4}\right)^4\left(\frac{3b}{4}\right)^4}{ab\left(\frac{3b}{4}\right)^6}\right) = 4\ln\left(\frac{b}{144a}\right).$$

Тогда из (7) получаем:

$$4\ln\left(\frac{b}{a}\right) > 8\ln\left(\frac{b}{144a}\right),\ \ \ln\left(\frac{b}{a}\right) < 2\ln 144,\ \ \frac{b}{a} < 144^2.$$

Аналогично случаю $b \le 2a$, получаем:

$$y(x) < y(a) = -4\ln a + \ln 24 + \ln 2 \le -4\ln\left(\frac{b}{144^2}\right) + \ln 24 + \ln 2 =$$
$$= -4\ln b + \ln 24 + \ln 2 + 8\ln 144 < -4\ln x + \ln 24 + \ln 2 + 8\ln 144.$$

Итак, с учетом случая $b \le 2a$, утверждение леммы полностью доказано.

Лемма 5. *Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1) при $x > x_1 > 0$, удовлетворяющее условию (2). Если для некоторых a, b, где $x_1 < a < b$, выполнены условия*

$$y(a) = -4\ln a + \ln 24 - \ln 2 = Y(a) - \ln 2, \quad y(b) = -4\ln b + \ln 24 - \ln 2 = Y(b) - \ln 2,$$

и для всех $x \in (a, b)$

$$y(x) < -4\ln x + \ln 24 - \ln 2 = Y(x) - \ln 2,$$

то при всех $x \in (a, b)$ справедливо неравенство

$$y(x) \geq -4\ln x + \ln 24 - \ln 2 - 64\ln 4 - 4\ln\frac{5}{8}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3, получим:

$$L(y) < \frac{1}{2}L(Y). \tag{8}$$

Так как $y(x)$ убывающая функция, то $y(a+3h) < y(a+h)$, $y(a+2h) > y(b)$, отсюда

$$L(y) \equiv y(b) - 4y(a+3h) + 6y(a+2h) - 4y(a+h) + y(a) >$$

$$7y(b) - 8y(a+h) + y(a) = 7y(b) - 8y\Big(\frac{3a+b}{4}\Big) + y(a) > 7y(b) + 32\ln\left(\frac{3a+b}{4}\right) - 8\ln 24 + 8\ln 2 + y(a) >$$

$$-28\ln b + 7\ln 24 - 7\ln 2 + 32\ln\left(\frac{b}{4}\right) - 8\ln 24 + 8\ln 2 - 4\ln a + \ln 24 - \ln 2 = 4\ln b - 4\ln a - 32\ln 4.$$

Отсюда, с учетом (8):

$$4\ln b < 4\ln a + 32\ln 4 + L(y) < 4\ln a + 32\ln 4 + \frac{1}{2}L(Y). \tag{9}$$

Оценим $L(Y)$ сверху. Согласно (3) и (5),

$$L(Y) = 4\ln\left(\frac{(a+h)^4(a+3h)^4}{ab(a+2h)^6}\right).$$

В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, $(a+h)^3(a+3h)^3 < (a+2h)^6$, поэтому

$$L(Y) < 4\ln\left(\frac{(a+h)(a+3h)}{ab}\right) < 4\ln\left(\frac{a+h}{a}\right).$$

Предположим, что $2a \leq b$, тогда, учитывая, что $a + h = \frac{3a+b}{4} \leq \frac{5b}{8}$, получаем:

$$L(Y) < 4\ln\left(\frac{5b}{8a}\right).$$

Из (9) тогда вытекает, что

$$4\ln b < 4\ln a + 32\ln 4 + 2\ln\left(\frac{5b}{8a}\right), \;\; \ln\left(\frac{b}{a}\right) < 8\ln 4 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5b}{8a}\right) = 8\ln 4 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{8}\right).$$

Отсюда

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) < 16\ln 4 + \ln\frac{5}{8} = \ln\varkappa.$$

Таким образом, $b \leq \varkappa a$. Отсюда при $x \in (a, b)$ получим:

$$y(x) > y(b) = -4\ln b + \ln 24 - \ln 2 > -4\ln(\varkappa x) + \ln 24 - \ln 2 = -4\ln x + \ln 24 - \ln 2 - 64\ln 4 - 4\ln\frac{5}{8}.$$

Лемма доказана.

Окончательный результат для решений, удовлетворяющих (2) имеет следующий вид:

Теорема 2. *Пусть* $y(x)$ *- решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условию* (2)*. Тогда при* $x \geq x_0 = \text{const}$ *выполнено неравенство*

$$-4\ln x + \ln 24 - \ln 2 - 64\ln 4 - 4\ln\frac{5}{8} \leq y(x) \leq -4\ln x + \ln 24 + \ln 2 + 8\ln 144. \qquad (10)$$

Доказательство. Докажем левое неравенство из (10). Если при всех $x \geq x_0$ выполнено неравенство

$$y(x) \leq -4\ln x + \ln 24 + \ln 2,$$

то тем самым верхняя оценка (10) выполнена. Пусть существуют сколь угодно большие значения x, для которых выполнено противоположное неравенство $y(x) > -4\ln x + \ln 24 + \ln 2$. По лемме 2 это неравенство не может выполняться для всех $x \geq x_1 = \text{const}$, а может выполняться только на интервалах (a_n, b_n); $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, $n \to \infty$, для которых $y(a_n) = -4\ln a_n + \ln 24 + \ln 2$, $y(b_n) = -4\ln b_n + \ln 24 + \ln 2$. По лемме 3 получаем, что между точками a_n и b_n выполнено верхнее неравенство (10).

Аналогично, используя леммы 2 и 4, получаем правое неравенство из (10). Таким образом, теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 полностью описывают возможное поведение решений уравнения (1) на полупрямой.

4. Заключение

Рассмотренные качественные методы изучения поведения дифференциального уравнения четвертого порядка могут быть использованы как дополнение к курсу обыкновенных дифференциальных уравнений. Они опираются только на курс математического анализа и основной курс дифференциальных уравнений. В частности, метод нелинейной емкости Похожаева-Митидиери, завоевавший огромное признание математиков (портал Mathnet.ru содержит более 600 ссылок на основополагающую работу [3]), основан на простой идее умножения обеих частей дифференциального уравнения на оптимальную пробную функцию и интегрировании по частям с “перебрасыванием” всех производных на пробную функцию; идея вполне доступна в рамках этих курсов.

Литература

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. - М., URSS, 2022.

[2] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М., URSS, 2003.

[3] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. - 2001. - т. 234. - С. 3–383.

Неклюдов Алексей Владимирович,
доцент кафедры "Высшая математика"
Московского государственного технического
университета им. Н.Э. Баумана,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: nekl5@yandex.ru

Вселенская задача: Рене Декарт. В моей смерти прошу винить мою жизнь

В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук

Научно-историческое эссе о попытке Декарта обосновать картину движения планет на основе закона сохранения импульса, в контексте исторических и политических событий того времени.

Беседа Ришелье и Декарта затянулась до полуночи. Рене Декарт — блестящий знаток математики и астрономии, прекрасно понимающий тонкости политической жизни государства. С ним интересно и поучительно беседовать. Грамотных и образованных людей надо беречь.

Рене Декарт (1596 - 1650)

А вот мушкетер из него слабый. Здоровья у Декарта нет с детства. Родился очень слабеньким, чуть не умер в младенчестве. Чудом выжил лишь благодаря своей кормилице. С возрастом здоровья не прибавилось. Что скрывать? Таким же был и он, Ришелье. С детства имел весьма слабое здоровье, что позже не позволило ему сделать карьеру офицера, о которой мечтал.

Декарт прав. Франция должна быть Великой, или она погибнет. Для процветания королевства нужны *образованные* люди. Много людей. В этом залог будущей мощи Франции. Одними догматами веры в истины Священного Писания сильное государство не построишь. Могущество державы зависит от количества хорошо образованных людей. Надо создать национальную Академию Наук. Университет Сорбонна остро нуждается в хорошей библиотеке. Надо создать условия для работы профессорам. Те, кто несут свет знания, не должны жить в нужде и лишениях. В каждом человеке, который едва научился выводить буквы, король видит угрозу для своей власти. Глупости. Знание — это сила и власть. Мудрость дает силу, а глупость идет от слабости. Сильное государство делает сильной власть короля.

Король никак не может понять, что главной задачей королевской власти должно быть *создание* новых богатств, а не только бесконечный дележ того, что есть. Все эти интриги за близость к высочайшей власти преследуют только одну цель — приумножение личного богатства его придворных.

Рисунок академика РАН Фоменко А.Т.

Когда общий пирог маленький, то все толкутся у стола, нервно отпихивая друг друга локтями. Надо чтобы общий пирог королевства увеличивался с каждым годом, тогда хлеба и вина хватит на всех. Иначе Францию ждет погибель.

Но король этого не понимает. Естественно, самый страшный человек — это образованный человек, который достиг всего сам. Тогда король ему не нужен. Он сам себе король. А если весь народ получит образование? Тогда для них король — "просто казначей". Он уже "как все" и нет над ним ореола святости.

И все же король поддается "правильному воспитанию". Вот вчера он говорил о необходимости ускорить строительство океанского флота. Наконец-то! Говорил так, словно это им выстраданная идея. Ну и пусть. И на том спасибо.

Нужны мощные океанские корабли, образованные кораблестроители, капитаны и навигаторы. Нужны грамотные географы, картографы, которые знают местоположение стран и материков не по Библии. Требуются дипломаты с хорошим знанием иноземных языков и обычаев других народов. Там, в заморских странах, находятся будущие богатства Франции. Туземцы Вест-Индии и Африки не знают цены того, что у них растет под ногами и на деревьях. В *их* землях — *наше* богатство. Они за пригоршню стеклянных бус, кажется, готовы отдать все. Нужно покупать и производить шелк, стекло, ткани, металл. Без металла океанские корабли не собрать. Надо спешить.

От распрей между католиками и протестантами королевство только слабеет. Но это не значит, что надо истреблять образованных людей. Казематы Бастилии можно заполнить и другим людом, не знающим букв. С этим, кажется, у нас "все в порядке". Есть чем отчитаться перед Ватиканом, "план" по заполнению тюрем даже перевыполнен.

Костоломы в подвалах Бастилии быстро заставят дать *нужные* признания. Так что с протоколами допросов (иногда они нужны!), где человек признается во всех *нужных* деяниях, все в порядке. Люди на этом направлении поставлены проверенные и опытные. Все пожелания начальства они понимают с полуслова.

Эти лжецы из "тайных обществ" Парижа спят и видят, как бы поделить власть короля и затем государство разорвать в клочья и продать его по частям за горсть золотого песка заклятым вечным врагам Франции. Жажда наживы любой ценой ослепляет их. Ничто их не останавливает. Ничто и никто. А потом удивляются, когда палач приглашает их на эшафот. До последней минуты ждут высочайшего помилования. Олухи. Раньше надо было думать! Раньше!

Эти "тайные общества", которыми пропитан Париж — это все от скуки и безделья. Его люди давно уже внедрились в эти организации и даже стоят во главе некоторых из них. Часто на этих "тайных вечерях" процветает пустая болтовня, разбавленная "умными" словами. Эти бездельники только интриги и заговоры плетут против королевства. Их надо занять конкретным делом.

Если бы хоть один из этих болтунов постоял на капитанском мостике под шквальным океанским соленым ветром, то он быстро бы отучился заниматься пустословием. Лучше бы он из дальнего океанского похода привез полные трюмы заморских богатств. Государству была бы польза, жена была бы счастлива вернувшемуся мужу и детишки были бы сыты и гордились свои отцом.

Ришелье: "Всякий, кто узнает мои мысли, должен умереть"

Внимательно слушая Декарта, Ришелье все же думал о своем. Да, враги только и ждут наших ошибок. Они не только в Париже и Мадриде, или Лондоне. Они ходят здесь, по коридорам власти, мило улыбаясь и расшаркиваясь при встрече. Враги церкви и государства везде. Возможно, даже они сейчас за стенкой, в соседней комнате тайно подслушивают *его* беседу с Декартом.

Портрет кардинала Ришелье
(1642, Лондонская Национальная галерея)

Вчера, как бы невзначай, король вспомнил о Декарте и о необходимости "ему укоротить язык". Значит, дела у Декарта плохи… Он не знает, что над ним сгустились тучи. Не все ему полагается знать… Кое-кому, конечно, придется "укоротить язык" вместе с головой.

Мучеников всегда любят после их публичной казни, даже если они при жизни были и не совсем правы. Зачем плодить плеяду новых героев-мучеников? Инквизиторы поняли свой промах и сменили тактику. И начали некоторые люди вдруг как-то странно и бесследно исчезать. Но сначала их "делали" неинтересными и заурядными в "широких кругах". А уже через год их трупы всплывали с весенним паводком где-то в низовье Сены. Иногда их находили в заброшенных колодцах на глухих окраинах Парижа. Всяко бывало…

Да, Ватикан провел образцово-показательную "зачистку" в университетах Рима, Венеции и Милана. Кстати, распоряжение из Рима о внесении книги Николая Коперника в индекс запрещенных книг, надо исполнить. Все равно донесут. С Ватиканом напряженные отношения держать — себе дороже. Надо изъять из библиотек и перенести в тайное хранилище все экземпляры книг Николая Коперника.

Декарту оставаться в Париже нельзя. Люди в Париже исчезают бесследно… Помочь Декарту должен он — Ришелье. У него есть для этого возможности. Пока есть.

Декарта надо направить вглубь Европы. Для начала — в Нидерланды. Оттуда поступает мало *нужной* информации. Там торговля с иноземцами бьет ключом. Вот у кого надо учиться. *Его* люди, работающие в Голландии, так и не поняли, какая же информация от них нужна. Тайные сообщения, как всегда, переполнены светскими сплетнями и интригами. Только бумагу изводят, олухи. Конечно, такие сведения бывают весьма полезными. Иногда. Но могущество Франции от потока сплетен не прирастает. Не за этим он их туда послал...

Там нужен Декарт. У него есть редкое качество — по отдельным фрагментам, казалось бы, несвязанных событий и явлений, он восстанавливает недостающие звенья во всей цепочке. Он умеет отделять главное от несущественного. Это редкое качество. Есть чему у него поучиться.

Придет время — и усилия Декарта в просвещении Франции оценят по достоинству. Им будет гордиться Великая Франция. Рене Декарт — национальное достояние Великой Франции.

Говоря о Декарте, может, когда-нибудь, тихим словом вспомнят имя Ришелье, как его Хранителя. И на том слава Богу.

Сладковато-ванильный вкус трафаретных технологий действует, как дурман-трава

История эта — мистическая тайна, похожая на детскую игрушку "паззл". Вроде каждая часть знакома, а вот единая картина не собирается. Фрагменты слабо связаны между собой. Возможно, единственное призвание этой лоскутной картины — "дать правильное впечатление". Этот "паззл" не собрался ни у Галилея, ни у И. Кеплера.

Всё началось с того, что Декарт серьезно взялся решать Вселенскую Задачу. Николай Коперник озвучил важные идеи гелиоцентрического строения Мира. Иоганн Кеплер нашел три закона движения планет вокруг Солнца... Казалось, эту задачу осталось только закончить. Остался только один, последний шаг, чтобы эта Вселенская Крепость пала.

Технология соблазнения такова, что самое плохое открывается по мере приближения к поставленной цели. Обман обнажается не в начале пути, а в конце, когда человек пытается дотронуться до обещанных "золотых гор", в которые он верил в начале пути. В итоге получается, на первый взгляд, "всё логично и правильно". Однако конечный результат противоположен тому, что хотелось вначале.

Это происходит потому, что человек, использует трафаретные технологии, не всегда вникает в суть штампов. А беда не заставляет себя долго ждать. Она уже стоит рядом и ждет твоей очередной ошибки. И ты её обязательно сделаешь, поскольку привык мыслить штампами. В это время мы слышим таинственный шепот, что проблема решается "очень просто". Дескать, дерзайте. И если вы поверили этому тайному шепоту, то непременно попадете в "системную ловушку". И тогда полоснет беда холодным скальпелем твой мозг. Но будет уже поздно. Там — тупик. Будете биться, как муха об стекло, пока не сойдете с ума.

В такой "капкан" и попался Рене Декарт. Непроницаемой загадкой оставались только движущие силы в Солнечной системе. Что заставляет двигаться планеты так, чтобы соблюдались законы Кеплера? Никто не может сказать, кто был первооткрывателем закона о причинах движения в материальном мире, поскольку эта идея пришла из самых отдаленных глубин веков.

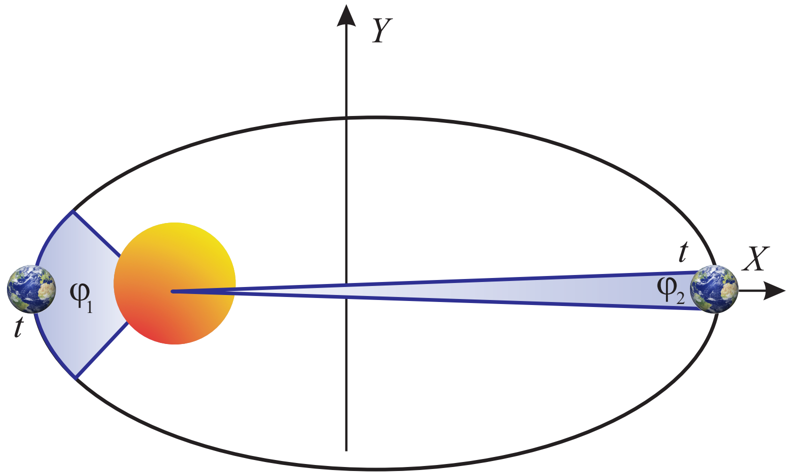
Рене Декарт: "Закон причинности требует, чтобы ничто не происходило без причины. Движущая причина есть сила... Никакое тело не может двигаться без силы, никакое движение не может быть задержано без силы" [1, стр.375].

Рене Декарт: "Если тела сами по себе не могут ни произвести, ни задкржать свое движение, то они не имеют также силы ни увеличивать, ни уменьшать его. Поэтому количество движения и покоя в телесном мире остается постоянно одним и тем же" [1, стр.376].

Декарт подчеркивает, что причиной движения тел могут быть только внешние силы.

Рене Декарт: "Все изменения в телесном мире вытекают из внешних причин" [1, стр.377].

Рене Декарт считал, что величину mV можно изменить только одним способом: воздействовать на тело **силой**.



Планеты движутся вокруг Солнца таким образом, что соблюдается «*принцип равенства секторальных площадей*». За один и тот же промежуток времени планета в своем эллиптическом движении проходит секторы одинаковой площади.

Рене Декарт: "Отсюда мера силы рана произведению массы на скорость" [1, стр.378].

Чем больше подействовала внешняя сила F — тем больше получился импульс mV. Это и есть декартов **принцип линейности**.

Теория импульсов Декарта блестяще подтверждалась на практике. Например, все видели, что орудие после выстрела откатывается обратно, как и положено по теории. На основе подобных наблюдений была предложена концепция о том, что в основу движения тела должно быть положено не ускорение, а **скорость**, или **импульс** (произведение массы на скорость). На этой идее было построена некая механическая теория, которая долго претендовала на "главную механику".

Другими словами, если система тел не подвергается внешним воздействиям, то для нее должно быть справедливым **закон сохранения количеств движения** $\sum mV = \text{const}$.

Декарт утверждал, что величина импульса тела mV сохраняется для соударяющихся тел, где m — масса тела, а — его скорость. Правда, для Декарта mV — это не импульс в современном понимании этого слова. Ведь импульс, как мы его сегодня понимаем, — это **вектор**. У Декарта mV — это скаляр без какого-либо признака направленности его действия. Позже величину mV предложили назвать "количеством движения". Так этот термин и прижился и стал часто встречаться в книгах.

Декарту казалось, что созданная им теория импульсов сможет ответить на главный вопрос: "Почему движутся планеты?". Разумеется, "божий промысел" и действия ангелов должны быть исключены. Чтобы найти выход из этой ловушки, в которую он попал, Декарт придумал гипотезу, согласно которой планеты вращаются вокруг Солнца потому, что вовлечены в некий "эфирный вихрь", вращающийся вокруг Солнца. Планеты несутся в потоке, как бумажный кораблик в весеннем паводке. Поскольку Луна вращается вокруг Земли, то и Земля имеет собственный "эфирный вихрь", в котором "барахтается" Луна.

Закон Кеплера о неравномерной скорости движения планет по своим орбитам поставил в непроницаемый тупик всех астрономов и математиков, поскольку разрушал фундаментальный закон причинности законов движения Мира. Поразительно, но в законе Кеплера не соблюдался принцип постоянства количества движения mV. Масса планеты не меняется при движении ее по своей орбите, однако скорость V меняется. И даже существенно!

Планеты движутся вокруг Солнца таким образом, что соблюдается *"принцип равенства секториальных площадей"*. Речь идет о том, что за один и тот же промежуток времени t планета в своем эллиптическом движении проходит секторы одинаковой площади. Это значит, что в окрестности перигелия (наикратчайшго расстояния R_p до Солнца) и в окрестности афелия (наиболее удаленного расстояния R_a до Солнца) за один и тот же отрезок времени планета проходит одинаковую секториальную площадь S.

$$S = \frac{R_p^2 \varphi_p}{2} = \frac{R_a^2 \varphi_a}{2}$$

где φ_p — угол сектора в перигелии, а φ_a — угол проходимого сектора в афелии. Поскольку $R_a > R_p$, то $\varphi_p > \varphi_a$. Заметим при этом, что поскольку $\frac{d}{dt}(\varphi_p t) = \varphi_p$, $\frac{d}{dt}(\varphi_a t) = \varphi_a$, то из неравенства $\varphi_p > \varphi_a$ следует неравенство угловых (секторальных) скоростей: $\frac{d}{dt}(\varphi_p t) > \frac{d}{dt}(\varphi_a t)$.

Неравенство секториальных скоростей движения планет $\frac{d}{dt}(\varphi_p t) > \frac{d}{dt}(\varphi_a t)$ безжалостно разрушило ту картину Мироздания, которая сложилась у Рене Декарта.

Разрушилось главное — материальная первопричина движения. Выходит, что планеты "сами себя" разгоняют в окрестности перигелия и также "сами себя" притормаживают в окрестности афелия. Такого не может быть! И это происходит без каких-либо внешних воздействий на планету!

Трагедия состояла в том, что Декарт не смог указать ту силу, которая бы периодически притормаживала и ускоряла поток эфира в "нужных" местах. И так, линейное мышление не спасает. Значит, существует нечто **нелинейное**, что заставляет двигаться планетам "вопреки логике".

Значит, нужно вводить существование Бога? Значит, Бог — "регулировщик" скорости эфирного потока? — Нет, только не это! Его **линейная** теория импульсов не справилась с **нелинейной** Вселенской проблемой движения планет. Декарт понял, что он проиграл. Наступает когнитивный шок. И вы потихоньку сходите с ума.

Первопроходцы протаптывают дорогу своим гонителям

Схожесть этих двух таких разных людей, как Ришелье и Декарт, была во всем. Как и Декарт, Ришелье был страстным читателем книг. Страсть Ришелье к книгам даже не остановили сильные головные боли, которые все чаще напоминали о себе в возрасте. Смерть настигнет премьер-министра де Ришелье в Париже в 1642 году. Рене Декарт умер спустя восемь лет, 11 февраля 1650 года, от воспаления легких в Стокгольме, где он работал в последнее время при шведском королевском дворе. В 1667 году решением французского правительства останки Рене Декарта были перевезены в Париж и захоронены в церкви св. Женевьевы, нынешнем Пантеоне. Церковные власти отказались участвовать в похоронах с почестями. Произнесение надгробных речей было категорически запрещено, ибо книги Декарта уже были внесены Ватиканом в "Индекс запрещенных книг". Последователи его учения (картезианцы) подвергались преследованиям еще полстолетия.

А пока на дворе еще яркими красками играл "золотой" XVII век. Роскошные королевские балы до утра и реки шампанского кружили головы. Казалось, так будет вечно. Пройдет чуть больше века и с хрустом на этот бал наедет кровавый каток французской революции, в котором деятельное участие примут и ряд французских академиков Королевской Академии Наук. Некоторые из них вовремя уйдут тихо и без шума из этого зала, где праздник не смолкал никогда. Они примкнут к новым вождям, которые поведут королевскую семью на эшафот.

А пока никаких предвестников кровавой революции в Париже не наблюдалось. За окном благоухала наступившая весна. Уставшая от средневековых виселиц и костров на площадях, Наука ждала того, кто даст решение **Вселенской Задачи**.

Громыхал гром, но дождь был теплым и ласковым. Таким он бывает для землепашца после испепеляющей месячной засухи. Этот дождь ждут крестьяне и молят бога, чтобы он услышал их молитвы.

И он пришел.

Литература

[1] Куно Фишер. История новой философии. Декарт, его жизнь, сочинения и учения. - Санкт-Петербург: “Мифрил”, 1994. - 527 с.

[2] Берри А. Краткая история астрономии, пер. с англ., 2 изд. - М.-Л., 1946.

[3] Арнольд В.И. Истории давние и недавние. - М.: “ФАЗИС”, 2005 г.

[4] Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. - М.: “Высшая школа”, 1974 г.

[5] Голованов Я. Этюды об ученых. - М.: “Молодая Гвардия”, 1976 г.

[6] Декарт Р. Космогония: Два трактата. Серия: Классики естествознания. - М.-Л.: Гостехиздат, 1934 г.

[7] Асмус В.Ф. Декарт. - М.: Высшая школа, 2006 г.

Оникийчук Валерий Николаевич,
кандидат физико-математических наук,
Государственный Университет Просвещения (г. Москва),
Кафедра “Высшей алгебры, математического анализа и геометрии”.

E-mail: valeryonikiychuk@yandex.ru

Оникийчук Игорь Валерьевич,
Руководитель проектов
ООО «Электрорешения», Москва.

E-mail: ionikv@inbox.ru

Из истории математики

Исторические аспекты развития вероятностно-статистических дисциплин

Н. Н. Сидняев, Я. В. Скобелева

Статья посвящена историческим аспектам развития вероятностно-статистических дисциплин, которые являются эффективным инструментом в инженерном деле и безусловно должны быть представлены различными учебными курсами при обучении в техническом вузе. Представлен исторический анализ формирования и развития вероятностно-статистических дисциплин, на основе которого можно усовершенствовать и развивать методики преподавания этих предметов при обучении студентов технических вузов. Особое внимание уделено вкладу российских ученых в развитие одной из наиболее важных разделов высшей математики, учитывая востребованность специалистов инженерного профиля в современных реалиях.

Введение

Эффективное функционирование современного производства в условиях активного развития рыночных отношений тесно связано с необходимостью обеспечения его конкурентоспособности путем внедрения новой техники, использования прогрессивных наукоемких технологий производства [1-3]. Непрерывная модернизация отраслей требует повышения качества подготовки трудовых ресурсов, их профессиональной компетентности, а большой диапазон характера решаемых профессиональных задач предопределяет необходимость качественного улучшения образования [4-6].

Одной из целей высшего технического образования является обеспечение фундаментальной подготовки профессиональных инженерных кадров, которая должна способствовать формированию высококонкурентных специальных компетенций, профессиональной мобильности и стремления постоянно совершенствовать, углублять свои знания, повышать свой научный и профессиональный потенциал. Достижению этой цели способствуют математические дисциплины, которые помогают развитию абстрактного мышления — путем использования математического анализа для построения математических моделей большинства инженерных задач и последующего их решения. Этой теме посвящены многие современные научные исследования и статьи [7-10]. Проблемы математического образования в классических и технических университетах изложены в работах [11-18]. Обеспечение профессиональной математической подготовки студентов технического университета и недостаточная разработка теоретико-методологических и организационно-методических основ ее развития в зависимости от различных факторов и условий инженерного образования определили выбор темы настоящего исследования [12-14].

Формирование и развитие теории вероятностей

Теория вероятностей является одним из важнейших разделов математики, особенно учитывая цивилизационное развитие и цифровизацию современного общества. Подготовка будущих квалифицированных инженерных кадров неотделима от развития у них компетенций, связанных с этой наукой, а формирование полноценной методики их обучения возможно только в связке с анализом ее исторического развития.

Вклад русских и российских ученых в теорию вероятностей огромен [3-8]. Со времен Чебышева ее принято считать национальной русской наукой, что формирует большой научный потенциал для исследований в этой области современных ученых и инженеров, хотя грань между этими понятиями все больше стирается в последнее время. Целью изучения ТВ является изучение закономерностей, которые проявляются в *массовых однородных случайных явлениях* (событиях). Основным объектом изучения в теории вероятностей (ТВ) является *случайное событие*.

Систематическое изучение задач, относящихся к массовым однородным случайным событиям, и зарождение ТВ как математической дисциплины относится к XVII веку и связано, прежде всего, с попытками создания теории азартных игр. Они оказались исключительно наглядной моделью случайных явлений [10-12]. В последующее время ТВ в основном использовалась для создания теории ошибок наблюдений, теории страхования, изучения статистических задач народонаселения и т.п.

Особый вклад, который невозможно переоценить, внесли математики знаменитой Петербургской школы: П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров и др. [11-13] (рис.1).

Рис.1. Крупные ученые, внесшие вклад в развитие теории вероятности и математической статистики.

Характерной особенностью развития научной мысли в последние десятилетия является бурный рост статистических концепций в различных областях естествознания. За эти годы было определено, что привлечение методов теории вероятностей к изучению принципиальных вопросов физики, астрономии, химии, биологии, а также техники стало неизбежным. Современные естественно-научные представления, связанные с развитием статистической физики, квантовой механики и др., привели к представлению о том, что многие законы природы носят статистический характер, обусловленный огромностью числа частиц, из которых составлена материя. В этих представлениях о процессах природы лежит причина того, что серьёзный прогресс достигнут теорией вероятностей в сравнительно короткий срок; этим объясняется значительное повышение интереса к науке о случае, которое наблюдается во всех странах в наши дни [15-18].

Роль мировой и, в частности, русской и советской науки в развитии теории вероятностей

Традиции строго математического отношения к проблемам теории вероятностей, созданные Чебышевым, бережно хранятся российскими учёными. Успехи теории вероятностей в её приложениях к различным областям естествознания — теории ошибок, кинетической теории газов и пр. — долго не могли сломить уже установившихся ошибочных взглядов. И только, приблизительно, после первой мировой войны дальнейшее игнорирование науки о массовых явлениях стало невозможным. В ряде стран, в первую очередь во Франции, Италии, Швеции и США, отдельные учёные и группы учёных всерьёз взялись за разработку проблем теории вероятностей. Советские учёные и в условиях этого неизмеримо выросшего научного соревнования с учёными других стран не сдали своих позиций и по-прежнему идут в авангарде науки о случае. Для того, чтобы лучше оценить вклад русских учёных в развитие интересующей нас науки, следует, хотя бы в нескольких словах, охарактеризовать её состояние к середине XIX века, когда появились первые исследования Чебышева, положившие начало дальнейшим многочисленным работам у нас и заграницей [2,13]. В самом начале XVIII века швейцарским учёным Яковом Бернулли была открыта замечательная теорема, которую, без преувеличения, можно считать началом существования теории вероятностей как науки. Содержание этой теоремы состоит в следующем. Пусть наступление некоторого события зависит от случая; производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления этого события сохраняет постоянное значение p. Тогда, если через μ обозначить число появлений события среди n первых из этих испытаний, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице (или, как говорили раньше, к достоверности), разность $p - \mu/n$ становится по абсолютной величине меньше любого положительного ε, если только n достаточно велико. Значение теоремы Бернулли определяется тем, что она даёт возможность установить связи между результатами эксперимента и теоретическим коэффициентом — вероятностью и, в частности, по результатам эксперимента позволяет судить о величине вероятности p, когда она неизвестна. Однако, число μ зависит от случая, и поэтому возможные уклонения от p могут достигать и заметных значений.

На естественный вопрос о том, с какими вероятностями эта величина принимает те или иные значения, французские математики Муавр и Лаплас дали ответ, ставший вторым основным предложением теории вероятностей. Оказалось, что для больших значений n вероятность неравенства:

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x$$

почти не зависит от n и p и при $n \to \infty$ приближается к некоторой определённой функции $\varPhi_1(x)$, которая впоследствии получила название *нормальной функции распределения*, или закона Гаусса и определяется формулой:

$$\varPhi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\pi} e^{-x^2/2} dx.$$

В начале XIX века известный французский математик Пуассон [10] показал, что теорема Бернулли может быть получена в качестве следствия более общего предложения, названного им законом больших чисел [5]. Теорема Пуассона состоит в следующем. Если вероятность появления некоторого события зависит от номера испытания и для k-го испытания равна p_k, то число μ появлений этого события при n независимых испытаниях с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} \right| < \varepsilon,$$

где ε — любое положительное число, лишь бы n было достаточно большим.

Этим же математиком было показано, что при малых p в схеме Бернулли вероятность равенства $\mu = k$ для больших значений n приближённо при $\lambda = np$ равна $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$. Большой раздел теории вероятностей был связан с теоремой Байеса, позволяющей вычислять вероятности того, в каких условиях наступило событие, если эксперимент показал, что оно произошло [16]. На её базе возникла также огромная литература, посвящённая вычислению вероятностей различных социальных явлений [2-5]. Новое важное для приложений ТВ направление было создано на базе исследований Котса, Лапласа, Лежандра, Гаусса и др., положивших начало теории ошибок [3, 11, 13]. Известно, что как бы хорошо ни были организованы измерения, невозможно получить абсолютно точного результата, всегда неизбежны ошибки измерений, зависящие от случая. Относительно них Лаплас и Гаусс показали, в частности, что если принять принцип среднего арифметического, то ошибка измерения подчиняется нормальной функции распределения [9]. Принцип среднего арифметического состоит в том, что при любом числе измерений наиболее вероятным значением измеряемой величины считается среднее арифметическое из результатов измерений. В связи с задачами об азартных играх и определением безобидных игр возникло понятие математического ожидания случайных величин [11]. Если x_1, x_2, ..., x_n означают всевозможные значения, принимаемые случайной величиной X, а p_1, p_2, ..., p_n — вероятности, с которыми принимаются эти значения, то математическим ожиданием величины X называется сумма: $M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$. К середине XIX века основные свойства математических ожиданий были достаточно хорошо известны.

Первые исследования по теории вероятностей в России. Научные исследования в области теории вероятностей начались в России с момента основания Академии наук и приезда в неё первых академиков, братьев Даниила и Николая Бернулли, приглашённых из Швейцарии [2]. Однако их работы были для России лишь чисто внешним событием и не имели никакой связи с состоянием науки в стране. Позднее интерес к теории вероятностей проявляли все виднейшие представители русской математической мысли. Так, Лобачевский в своей работе "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных" [13] с целью экспериментального установления геометрической системы, господствующей во вселенной, разработал теорию ошибок при измерениях на сфере; позднее тому же вопросу он посвятил специальную статью. Остроградский написал три статьи по теории вероятностей [5]. Значительное число работ по теории вероятностей и в особенности по её применениям к вопросам демографии России было написано академиком Буняковским [2-4] . Им же был создан первый учебник по теории вероятностей, стоявший на уровне науки того времени. Однако все указанные исследования не внесли в теорию вероятностей ни существенно новых идей, ни новых проблем и не послужили толчком к созданию школы исследователей, хотя и пробудили к ней интерес в России.

Новый шаг был сделан Чебышевым. Он начал систематически изучать последовательности взаимно независимых случайных величин. Им самим и Марковым был доказан, как мы уже видели раньше, закон больших чисел в весьма общих условиях, т.е. следующее утверждение: при $n \to \infty$ и при любом $\varepsilon > 0$,

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} Mx_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

И, наконец, Чебышев, Марков и Ляпунов доказали, что при весьма общих условиях для последовательности независимых слагаемых имеет место центральная предельная теорема. Т.е. следующее утверждение при $n \to \infty$ и любом действительном x:

$$P\left\{\frac{1}{B_n}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - Mx_k)\right| < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz, \qquad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} M(x_k - Mx_k)^2.$$

Позднее Марков ввёл понятие о цепях Маркова и доказал для них ряд теорем, в частности, закон больших чисел, центральную предельную теорему и одну важную теорему о предельном поведении вероятностей перехода из состояния A_i в состояние A_j, послужившую прототипом для позднейших, так называемых эргодических теорем. Весьма насыщенный большими общими идеями и фактическими результатами период развития теории вероятностей связан с именем академика С.Н. Бернштейна [2, 11]. Ранее отмечалось о том, что до середины прошлого века теория вероятностей не успела сложиться в математическую науку. Неопределённость в основных понятиях науки о случае приводила к целому ряду парадоксов. Правда, эти обстоятельства мало смущали естествоиспытателей, и уже тогда даже наивный теоретико-вероятностный подход в различных областях науки приводил к крупным успехам. Так как науки развивались и предъявляли к своему математическому аппарату— теории вероятностей — более строгие требования, то возникла потребность систематически изучить основные понятия теории вероятностей и выяснить условия, в которых можно пользоваться её методами и результатами. Отсюда возникло формально-логическое обоснование теории вероятностей. Первая попытка такого рода обоснования относится к 1917 г. и принадлежит академику С.Н. Бернштейну. Наряду с желанием привести в порядок основы теории вероятностей Бернштейн поставил перед собой гораздо более широкую цель: на базе создаваемой им системы аксиом теории вероятностей построить логически безупречную теорию математической статистики и продемонстрировать, как можно совершенно строго и точно изучать важнейшие проблемы естествознания. Отсюда возникла идея построения теории вероятностей как единого познавательного метода, который потребует, чтобы истинность предложения однозначно без всяких исключений характеризовалась определённым максимальным значением математической вероятности, которое принимается равным единице, а ложность предложения должна соответствовать наименьшей вероятности, равной нулю. Эти основные идеи явились источником для целого ряда работ Бернштейна, как математических, так и естественнонаучных, в особенности посвящённых теоретическим проблемам биологии. Они же вдохновили их автора на создание одного из лучших произведений мировой литературы по теории вероятностей — книгу "Теория вероятностей". В книге изложены классические и собственные результаты относительно закона больших чисел, теоремы Лапласа, выборочного метода, кривых распределения, теории корреляции и пр. Особую свежесть и ценность книге придают постоянные дискуссии автора о практической ценности того или иного результата теории, а также о границах его применимости. Это обстоятельство значительно содействовало широкой известности книги не только среди математиков, но и среди работников естественнонаучных и технических дисциплин. Собственно математические работы первого периода исследований Бернштейна по теории вероятностей представляют собой блестящее завершение исследований Чебышева, Маркова и Ляпунова по предельным теоремам для сумм случайных величин [9-14]. Доказательство основной предельной теоремы для случая независимых величин в его руках получило такую общность, что наложенные при этом ограничения оказались впоследствии не только достаточными, но и необходимыми [1,18]. В то же время были установлены весьма широкие условия, при выполнении которых предельная теорема сохраняется и для суммы зависимых слагаемых [2]. Впервые Бернштейном было предпринято исследование условий, в которых имеет место двумерная предельная теорема. Проиллюстрируем постановку задачи простым для восприятия, но важным примером. При стрельбе по некоторой цели A, находящейся на земной поверхности, снаряды не попадают, вообще говоря, точно в точку прицеливания, а рассеиваются. Возникает задача определения вероятности того или иного уклонения снаряда от центра цели. Если выбрать оси координат с началом в центре цели, то вопрос заключается в том, чтобы указать вероятность каждого возможного уклонения (x, y) снаряда от цели-возможных координат снаряда. Исходя из гипотезы, что уклонение снарядов от цели является результатом суммарного воздействия огромного количества зависящих от случая причин, каждая из которых лишь ничтожно мало влияет на результат, Бернштейн показал, что оно подчиняется особому закону распределения вероятностей — двумерному нормальному закону. Часто говорят в этом случае, что x и y нормально коррелированы. Этот общий математический результат, описанный на частном примере, Бернштейн приложил к биологическим исследованиям. Среди прочих результатов этого рода заслуживает быть отмеченным важный и неожиданный для специалистов факт, что закон Гальтона [6] о наследовании количественных признаков не противоречит гипотезе Менделя, а при весьма общих естественных предположениях вытекает из неё.

Исследования В.И. Романовского и его школы. Как уже отмечалось, с 1922 г. в Ташкенте началась серьёзная работа по теории вероятностей и математической статистике. Первоначально она велась единолично профессором В.И. Романовским, а затем им самим и целым рядом его учеников, среди которых мы отметим М.И. Эйдельнанта и Т.А. Сарымсакова — наиболее крупного современного математика-узбека [2,4,5]. Начав свои исследования в области математической статистики, Романовский работал в ней под сильным влиянием английской школы, созданной известным статистиком Карлом Пирсоном [1]. Однако в выборе методов для решения стоявших перед ним задач он следовал за Чебышевым [6]. Являясь учеником академика А.А. Маркова, Романовский воспринял от него традиции школы Чебышева и среди них математическую строгость рассуждений и логическую щепетильность в построениях. Этого как раз недоставало английским статистикам, от работ которых, как мы говорили, отправлялся Романовский [12, 16].

За почти двадцатилетний промежуток деятельности Романовский не только охватил своими исследованиями буквально все части математической статистики (кривые распределения, теория выборок, распределение статистических характеристик, критерии случайности, разыскание скрытых периодичностей и пр.), но и занимался деятельной пропагандой статистических методов. С этой целью им был создан ряд книг, много способствовавших подъёму статистической культуры и развитию интереса к ней. Многочисленные работы Романовского в области теории вероятностей были посвящены распространению основной предельной теоремы Ляпунова на многомерные случайные величины, цепям Маркова и построению важных схем зависимых случайных величин, обобщающих цепи Маркова. Здесь необходимо отметить прекрасные результаты, относящиеся к так называемым бициклическим цепям, введённым им впервые в рассмотрение, а также отметим два его фундаментальных мемуара, посвящённых цепям Маркова с конечным и непрерывным множеством состояний. Изучение цепей Маркова с конечным числом состояний Романовский связал с алгебраическим аппаратом — матрицами [2,13,15]. При этом ему пришлось детально разработать и отдельные вопросы теории матриц. Метод Романовского является в настоящее время одним из основных в теории цепей Маркова и широко используется многими специалистами в дальнейших исследованиях. Случай цепей Маркова с непрерывным множеством состояний был связан Романовским с теорией интегральных уравнений.

Возникновение Московской школы теории вероятностей. Идеи теории множеств и теории функций, культивировавшиеся Лузиным и его учениками, определили характер первоначальных исследований московских математиков в теории вероятностей [2, 6-9]. Внимательное изучение основных понятий теории вероятностей, — случайного события, вероятности, независимости событий, случайной величины, среднего значения и др., — а также операций со случайными событиями показало, что между ними и основными понятиями теории множеств и метрической теории функций можно провести далеко идущие аналогии. Эти связи между столь различными науками позволили по-иному осветить логические основы теории вероятностей, обогатить её содержание новой проблематикой и методами исследования, а также довести до конца решение классических задач.

Начало создания Московской школы теории вероятностей было положено в 1923 г. исследованием Александра Яковлевича Хинчина, посвящённым совершенно своеобразному обобщению и усилению закона больших чисел. Открытая им при этом закономерность получила впоследствии название закона повторного логарифма. Эта работа Хинчина стала источником дальнейших исследований в указанном им направлении как советских (Колмогоров, Хинчин, Гнеденко), так и зарубежных математиков (Cramer, Cantelli, P. Levy, W. Feller и др.) [2, 12]. О содержании этого закона расскажем ниже, когда будем говорить о законе больших чисел. Приблизительно в то же время Евгений Евгеньевич Слуцкий начал создавать методами теории функций действительного переменного новую главу теории вероятностей — теорию случайных функций, т.е. теорию случайных величин, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра [6,11,13]. Им были введены и исследованы понятия стохастических (относящихся к случайным величинам) предела, производной, интеграла, измеримости и пр.

Вскоре в работу по теории вероятностей включился тогда ещё молодой учёный, а затем один из самых разносторонних и крупнейших математиков современности Андрей Николаевич Колмогоров [2]. Первое его исследование в этой области науки было выполнено совместно с А.Я. Хинчиным и посвящалось выяснению сходимости рядов из взаимно независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n, … . Оказалось, что ряд $X_1 + X_2 + ... + X_n + \dots$ может сходиться (т.е. иметь определённую сумму) к некоторой величине (вообще говоря, случайной) только с крайними вероятностями 0 и 1. Позднее Колмогоров дал очень широкие условия, при которых события, зависящие от бесконечного множества случайных величин, могут наступать лишь с вероятностью 0 или 1. Эти московские исследования также нашли значительный отклик в работах западноевропейских математиков [5-9]. Однако очень скоро, оттолкнувшись от проблем Чебышева и Маркова, московские математики выдвинули совершенно новый круг проблем, исследование которых стало наиболее быстро развивающейся и увлекательной частью современной теории вероятностей.

Закон больших чисел. А.А. Марковым было отмечено то основное значение, которое имеет закон больших чисел для приложений математических методов к естествознанию и практическим наукам [4-6]. Это обстоятельство и было причиной всё возрастающего интереса к установлению всё более и более широких границ его применимости. Конечной целью, понятно, было разыскание окончательных (необходимых и достаточных) условий, в которых имеет место закон больших чисел. Крупнейшие математики на протяжении нескольких десятилетий тратили на это свои усилия. И задача стоила того. В самом деле, установление таких условий сразу давало бы возможность ответить на вопрос: можно ли использовать этот закон и его следствия при данных конкретных обстоятельствах или нельзя? Долголетние усилия увенчались успехом только в 1926 г., когда эти условия были найдены А.Н. Колмогоровым.

Необходимо отметить, что исследования московских математиков в теории вероятностей начались с работы А.Я. Хинчина, в которой был открыт так называемый закон повторного логарифма [10]. При этом можно ограничиться простейшим частным случаем схемы Бернулли. Согласно теореме Бернулли, число μ появлений события при n независимых испытаниях, в каждом из которых оно появляется с вероятностью p, при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет соотношению: при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Геометрически это можно представить себе так: возьмём оси координат, по оси абсцисс станем откладывать n, а по оси ординат величину $y = \mu - np$. Теорема Бернулли утверждает, что при достаточно больших n величина $y = \mu - np$ почти достоверно будет заключаться между прямыми $y = \varepsilon n$ и $y = -\varepsilon n$, значит, почти достоверно не превзойдёт этих границ. Но не слишком ли велики эти границы? Нельзя ли указать более точные пределы для возможных изменений этой разности? Оказывается, что можно. Хинчин путём очень тонких рассуждений нашёл их. При этом оказалось, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех достаточно больших n почти достоверно разность $y = \mu - np$ заключается между границами

$$y = -(1+\varepsilon)\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n}, \quad \text{и} \quad y = (1+\varepsilon)\sqrt{(2np(1-p)\ln\ln n},$$

Более того, если взять кривые

$$y = -(1+\varepsilon)\sqrt{2np(1-p)\ln\ln n} \quad \text{и} \quad y = (1+\varepsilon)\sqrt{(2np(1-p)\ln\ln n},$$

то разность y почти наверняка бесконечно много раз выйдет за границы области, ограниченной этими кривыми. Таким образом, что теорема Хинчина даёт очень глубокий анализ возможного поведения разности $\mu - np$.

Аксиоматика. К двадцатым же годам, годам господства идей метрической теории функций, относятся исследования Колмогорова по основаниям теории вероятностей. Начиная с 1926 г. он занимался оформлением идей Московской школы в стройную логическую систему. Завершением этой работы явилась монография “Основные понятия теории вероятностей” (1933 г.). В ней была последовательно проведена идея включения математических основ теории вероятностей, науки ещё недавно столь своеобразной, в ряд общих понятий математики. До создания и широкого развития метрической теории функций такая задача была почти безнадёжна. Теперь же были вскрыты аналогии между мерой множества и вероятностью события, интегралом и математическим ожиданием, ортогональностью функций и независимостью случайных величин и пр., и назрела необходимость аксиоматизировать теорию вероятностей, исходя из теоретико-множественных представлений.

В основу построений Колмогорова положено множество Ω элементарных событий. Что представляют собой элементы этого множества, для логического развития теории вероятностей совершенно безразлично. Поэтому теория вероятностей допускает большое число различных интерпретаций, в том числе и таких, которые не имеют к понятию случайного никакого отношения. Понятно, что это обстоятельство только увеличивает поле возможных областей приложения теории вероятностей.

Рассматривается далее множество F подмножеств из Ω; элементы этого множества называются случайными событиями. Видно, что таким образом, что понятие случайного события у Колмогорова строится, исходя из более элементарных понятий, тогда как С.Н. Бернштейн берёт само это понятие за исходное. Случайные события и их вероятности подчиняются далее следующим аксиомам:

1. Если случайные события A и B входят в состав F, то события A или B, и A и B, не A и не B также содержатся в F.

2. F содержит в качестве элементов множество Ω и все отдельные его элементы.

3. Каждому элементу A из F поставлено в соответствие неотрицательное вещественное число $P(A)$, называемое вероятностью события A.

4. $P(\Omega) = 1$.

5. Если A и B несовместимы и принадлежат F, то $P\{A \text{ или } B\} = P\{A\} + P\{B\}$.

6. Для бесконечных множеств из F предполагается также выполненной следующая-аксиома: Если пересечение последовательности событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ... \supset ...$ пусто, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Для конечных множеств эта аксиома является следствием первых пяти.

На основании приведённых аксиом Колмогоров дал построение начал теории вероятностей. Это его исследование немало способствовало тому, что теория вероятностей окончательно определила себя как математическая наука. В настоящее время оно получило широкую известность и всеобщее признание, а изложенные там идеи стали руководящими во всех современных работах, посвящённых теории вероятностей.

Теория стохастических процессов. Совершенствование физической статистики, а также ряда областей техники поставило перед теорией вероятностей большое число совершенно новых проблем, не укладывающихся в рамки классических схем. В то время как физика интересовало изучение случайных процессов, т. е. величин, претерпевающих случайное изменение в зависимости от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров — времени, координат и пр., математик мог ему предложить только приёмы, годные для дискретных последовательностей, т.е. того случая, когда параметр меняется скачкообразно, принимая лишь целые значения. Ряд физиков (Планк, Смолуховский, Эйнштейн, Фоккер и др.) [2, 8-12], биологов (Фишер) и некоторые техники (Фрай) были вынуждены стать на путь самостоятельного построения теоретико-вероятностных схем по различным частным поводам. Остро чувствовалась необходимость в создании единой математической теории, которая позволила бы дать общую трактовку всего круга возникших проблем и схем течения случайных процессов. Первая попытка такого рода была предпринята французским математиком Башелье около 1900 г., но эти исследования прошли незамеченными, да и математический уровень их был невысок. В 1931 г. появилась работа Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», в которой было дано первое систематическое и строгое изложение основ теории стохастически определённых процессов без последействия. Приблизительно в то же время Хинчин начал разработку теории другого важнейшего класса стохастических процессов — так называемых стационарных процессов. Многочисленные математические результаты, широкие возможности приложений к естествознанию, а также преобразование классической проблематики, связанное с теорией стохастических процессов, привели к тому, что эта теория ознаменовала новый этап в развитии теории вероятностей и в настоящее время стала основным полем приложения творческих усилий математиков-вероятностников как у нас, так и заграницей.

Процессы без последействия. Вкратце охарактеризуем эту новую главу теории вероятностей. Для начала приведем выдержку из только что цитированной работы Колмогорова, посвященную проведению аналогии между задачами теории стохастических (случайных) процессов и задачами классической механики. Желая подвергнуть математической обработке явления природы или социальной жизни, необходимо, предварительно, эти явления схематизировать; дело в том, что к исследованию процесса изменения некоторой системы математический анализ применим лишь в том случае, если предположить, что каждое возможное состояние этой системы может быть вполне определено с помощью известного математического аппарата, например, при помощи значений, принимаемых известным числом параметров; такая математически определимая система есть не сама действительность, но лишь схема, пригодная для описания действительности. Классическая механика пользуется лишь такими схемами, при которых состояние y системы для момента времени t однозначным образом определяется её состоянием x в любой предшествующий момент t_0; математически это выражается формулой $y = f(x, t_0, t)$. Если такая однозначная функция f существует, как это всегда предполагается в классической механике, то мы говорим, что наша схема есть схема вполне детерминированного процесса. К числу вполне детерминированных процессов можно было бы отнести, кроме того, процессы, в которых состояние y не вполне определяется знанием состояния x для единственного момента времени t_0, существенным образом завися ещё от характера изменения этого состояния x перед моментом t_0. Однако обычно предпочитают избегать такой зависимости от предшествующего поведения системы, для чего расширяют само понятие состояния системы в момент времени t и, соответственно этому, вводят новые параметры (например, в классической механике, помимо координат точек системы, рассматриваются также компоненты их скоростей). Вне области классической механики, наряду со схемами вполне детерминированных процессов, часто рассматривают и такие схемы, где состояние x системы в некоторый момент времени t_0 обусловливает лишь известную вероятность для наступления возможного состояния y в некоторый последующий момент $t > t_0$. Если при любых заданных t_0, $t > t_0$ и x существует определённая функция распределения вероятностей для состояний y, мы говорим, что наша схема есть схема стохастически определённого процесса. В общем случае эта функция распределения представляется в виде $P(t_0, x, t, \Omega)$,причём Ω обозначает некоторое множество состояний y, а P есть вероятность того, что в момент t окажется реализованным одно из состояний y, принадлежащих этому множеству. Можно заметить, что процессы, рассмотренные Колмогоровым, представляют собой дальнейшее развитие схемы цепей Маркова. Важно то, что Колмогоров не только предложил идею Маркова распространить со случая конечного числа состояний на случай произвольного множества состояний и на непрерывное время, но и установил те общие законы, которыми управляются такие процессы. Найденные им дифференциальные уравнения, которым подчинены вероятности $P(t_0, x, t, \Omega)$, получили название уравнений Колмогорова [2].

Работа Колмогорова явилась источником для большого числа исследований по теории случайных процессов как у нас, так и заграницей; отметим лишь некоторые из них.

Для теории колебаний при наличии особых случайных возмущений весьма важно было изучить предельные закономерности при стремлении к нулю коэффициентов при вторых производных в уравнениях Колмогорова. Ряд результатов в этом направлении был получен А.А. Андроновым, Л.С. Понтрягиным и др.

Из других применений следует указать на работы Колмогорова и М.А. Леонтовича о броуновском движении [2, 4, 15], Леонтовича по теории бимолекулярных реакций, а также Колмогорова по теории скученности в связи с эксплуатацией телефонных сетей и пр.

В работах И.Г. Петровского и А.Я. Хинчина [7-12] получила точное обоснование и дальнейшее развитие в свете стохастических процессов математическая теория диффузии; крупным событием в этом круге идей явилась монография Хинчина “Асимптотические законы теории вероятностей” (1933 г.). В ней был рассмотрен ряд задач, связанных с проблемами блуждания (диффузии) частицы по прямой и в плоскости. Эти задачи в простейших случаях сводятся к хорошо известным схемам сумм случайных величин. В 1933 г. в работу по теории стохастических процессов включился С.Н. Бернштейн. Исходя из уравнений, которым удовлетворяют вероятности приращения случайных величин за конечный промежуток времени Δt, он доказал ряд важнейших результатов относительно их предельного поведения при Δt, стремящемся к нулю. Далее он подверг глубокому анализу уравнения Колмогорова с целью установления условий, при которых они действительно дают решения, удовлетворяющие требованиям теории вероятностей.

Стационарные процессы. Процессы без последействия, только что рассмотренные нами, ни в коем случае не исчерпывают всех запросов естествознания к математике [11-13]. В самом деле, ведь в многочисленных явлениях прошлые состояния системы оказывают весьма сильное влияние на вероятности её будущих состояний, и пренебрегать этим воздействием прошлого нельзя даже при приближённой трактовке вопроса. Во многих случаях положение может быть исправлено изменением понятия состояния системы путём введения новых параметров. Так, например, если бы изменение положения частицы в явлениях диффузии или броуновского движения мы стали рассматривать как процесс типа Колмогорова, то это означало бы, что мы при этом не принимаем в расчёт её инерцию. Введение в понятие состояния помимо координат частицы её скорости исправило бы в этом примере положение. Однако существуют многочисленные случаи, когда положение не может быть исправлено, сколько бы новых параметров ни вводилось в определение состояния системы в данный момент. В первую очередь здесь следует указать на статистическую механику, в которой указание положений точки в той или иной ячейке даёт только вероятностное суждение о будущем её положении. При этом ознакомление с предыдущими положениями точки существенным образом меняет наши суждения об её будущем. Хинчин выделил важный класс процессов с последействием [2], так называемые стационарные процессы, однородно ведущие себя во времени. Мы скажем, что процесс $x(t)$ стационарен, если распределения вероятностей для двух конечных групп переменных $\{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$ и $\{x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \ldots, x(t_n+\tau)\}$ совпадают (и значит, не зависят от τ). Числа n и τ, а также моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ могут быть при этом выбраны совершенно произвольно.

Понятно, что таких стационарных процессов, играющих важную роль в различных областях знания, можно указать сколько угодно. Отметим сейчас же, что наиболее глубокое понимание многих акустических (скажем, шума) и световых явлений, а также разыскание скрытых периодичностей, так интересующее геофизиков и метеорологов, возможно только в рамках стационарных процессов.

Влияние на классическую проблематику. Помимо значительного расширения науки о случае, теория случайных процессов иначе осветила центральную классическую задачу относительно предельных законов для сумм случайных величин. Оказалось, что основные законы распределения, которые раньше получались как асимптотические, в теории стохастических процессов играют роль точных решений соответствующих дифференциальных уравнений. На этой почве возник ряд исследований, [2-6] начатых А.Н. Колмогоровым и широко развитых С.Н. Бернштейном, А.Я. Хинчиным и др., благодаря которым центральная предельная теорема теории вероятностей воспринимается теперь как частный случай единой общей теории. Исследования классической схемы последовательности случайных величин в связи с теорией стохастических процессов получили значительный толчок. Исходным моментом для этого цикла работ явилось исследование Колмогорова об однородных случайных процессах с независимыми приращениями, относительно которых он установил, что все такие процессы управляются так называемыми безгранично делимыми законами, и нашёл аналитическое представление этого класса законов.

Если до этого интерес исследователей был сосредоточен на определении наиболее широких условий, при выполнении которых имеет место сходимость функций распределения сумм независимых слагаемых к нормальному закону, то теперь возник новый круг проблем, естественность и важность постановки которых для нас теперь не представляет сомнений. Прежде всего была поставлена задача о разыскании всех тех распределений вероятностей, которые могут выступать как предельные для сумм независимых случайных величин. Иными словами, если имеется последовательность случайных величин, каждая из которых представляет собой сумму независимых слагаемых, и функции распределения вероятностей сумм сходятся к предельной функции распределения, то что можно сказать о природе последней? Так обще поставленная задача приводит к тривиальному решению — любая функция распределения может быть предельной в этом смысле. Однако в теории вероятностей всегда вводится ограничение, к которому приводят многочисленные задачи статистики и естествознания, о малой роли отдельных слагаемых в сумме. При этом предположении предельное распределение вероятностей уже перестаёт быть произвольным. Колмогоровым была высказана гипотеза, что класс предельных в этом смысле законов совпадает с классом безгранично делимых законов, для того случая, когда дисперсии сумм, т.е. величины $M(s_n - Ms_n)^2$, ограничены константой, не зависящей от n. Через год Хинчин дал полное её доказательство без всяких дополнительных ограничений, наложенных на s_n, (в том числе не требуя существования конечных дисперсий у s_n).

В связи с этими исследованиями, естественно, возник вопрос об условиях существования предельного закона для сумм, а таже об условиях сходимости к каждому данному предельному закону. Полное решение этой задачи было дано в 1937 г. Б.В. Гнеденко. Развитый им общий метод доказательства предельных теорем для сумм независимых случайных величин позволил ему единообразно и с малым количеством вычислений изложить все накопившиеся в этой области факты, в том числе относящиеся к закону больших чисел (А.А. Бобров, А.Н. Колмогоров, Д.А. Райков, В. Феллер, А.Я. Хинчин) и центральной предельной теореме, а также получить ряд новых результатов [8-14].

Видно, что теория предельных законов приобрела по сравнению с совсем недавним прошлым значительную общность и что центральные задачи классической теории вероятностей вошли в неё как простейшие частные случаи. Однако эта же общая точка зрения с полной отчётливостью позволила выяснить ту фундаментальную роль закона Гаусса, которая и обусловила то, что в течение почти двух столетий именно он был в центре внимания всех исследователей. Оказалось, что в то время как условия сходимости к закону Гаусса носят совершенно общий характер, не зависящий от природы отдельных слагаемых, в формулировки сходимости к другим законам входят требования, носящие весьма специфический характер.

Исследования по математической статистике. Исследования по математической статистике не получили в России того размаха, которого заслуживает эта область науки. Здесь русские учёные до сих пор ещё не заняли руководящих позиций, и их вклад в развитие математической статистики состоит, преимущественно, не в создании новых концепций, а в открытии отдельных фактов. Многие из этих фактов, несомненно, принадлежат к числу лучших достижений науки и займут почётное место в курсах математической статистики.

Конечно, многие из теоретико-вероятностных исследований имеют основное значение для статистики, как, например, закон больших чисел, центральная предельная теорема и др., но не они составляют ядро статистики и поэтому не изменяют данной нами характеристики состояния статистики в СССР. Число лиц, занимавшихся разработкой общих вопросов статистики, весьма невелико, хотя в области различных конкретных применений статистических методов имеется значительное количество исследователей, получивших ценные результаты.

Необходимо отметить замечательный цикл исследований, начатый В.И. Гливенко и А.Н. Колмогоровым и широко развитый Николаем Васильевичем Смирновым. Эти исследования относятся к решению основной задачи статистики — установлению неизвестной функции распределения по результатам наблюдений [1,2], а также характера сближения эмпирической функции распределения с теоретической. Пусть некоторая случайная величина X имеет $F(x) = P\{X < x\}$ своей функцией распределения, и $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — результаты п независимых наблюдений над X. Эмпирическая функция распределения определяется формулой: $F_n(x) = k(x)/n$, где $k(x)$ — число наблюдённых значений величины, меньших, чем x. Первый общий факт, обнаруженный в этом направлении, был доказан в 1933 г. В.И. Гливенко [1]. Оказалось, что если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения, то с достоверностью можно утверждать, что при $n \to \infty$ $F_n(x)$ стремится к $F(x)$. Понятно, насколько важно для практики это утверждение. Другой общий факт был обнаружен в том же году А.Н. Колмогоровым. Именно: если функция $F(x)$ непрерывна, то функции распределения величин

$$D_n = \max_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)|\sqrt{n}$$

при $n \to \infty$ стремятся к некоторой функции распределения $\Phi(\lambda)$, не зависящей от $F(x)$, а именно [10]:

$$\lim_{n\to\infty} P\{D_n < \lambda\} = \Phi(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Приведённая теорема Колмогорова может быть использована в качестве критерия оценки согласия эмпирического и теоретического распределений. Идея этого критерия состоит в следующем: пусть из эксперимента мы установили, что при гипотезе распределения случайной величины X по закону $F(x)$ величина D_n, приняла значение λ, и вероятность $\Phi(\lambda)$, т.е. вероятность неравенства $D_n < \lambda$, велика. Отсюда мы заключаем, что вероятность неравенства $D_n \geq \lambda$ мала и что, значит, осуществилось маловероятное событие. По принципу практической невозможности маловероятных событий мы должны считать, что получившееся расхождение D_n не случайно и что наша гипотеза должна быть подвергнута сомнению [1]. Существенным преимуществом этого метода оценки согласия сделанной гипотезы с опытом является то, что вероятность $\Phi(\lambda)$ не зависит от вида функции $F(x)$ (ведь функция $F(x)$ нам неизвестна!). Для практического применения рассмотренного критерия [1] были вычислены под руководством Н.В. Смирнова таблицы функции $\Phi(\lambda)$.

Как выяснилось позднее из исследований Н.В. Смирнова, распределение $\Phi(\lambda)$, найденное Колмогоровым, играет основную роль в целом ряде задач статистики. Среди значительного количества проблем, решённых Н.В. Смирновым в только что рассмотренном направлении укажем одну. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ представляют результаты независимых наблюдений над случайными величинами X и Y. Для статистики играет существенную роль установление правил, позволяющих судить о том, одинаково или различно распределение величин X и Y. Для того, чтобы оценить важность постановки этой задачи, достаточно рассмотреть такой пример: для определения влияния некоторых агрономических мероприятий на урожай произведены две серии опытов; первая без применения, а вторая с применением этих мероприятий. Как же обнаружить, случайны или не случайны расхождения в результатах опыта? Такая же задача возникает, скажем, при сравнении урожайности различных сортов.

Пусть $F_{n_1}(x)$ и $F_{n_2}(x)$ обозначают эмпирические функции распределения для двух указанных серий наблюдений. Смирнов за меру их расхождения предложил принять величину [1]:

$$D(n_1, n_2) = \max_{-\infty<x<+\infty} |F_{n_1}(x) - F_{n_1}(x)| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}.$$

Если эта величина превзойдёт некоторые границы, то расхождение считается существенным, и гипотеза о тождественности законов распределения величин, наблюдённых в обеих сериях, ставится под сомнение. Эта задача полностью решается следующим предложением:

Если объёмы n_1 и n_2 выборок неограниченно возрастают так, что отношение $\tau = n_1/n_2$ остаётся постоянным, то $P\{D(n_1, n_2) < \lambda\} \to \Phi(\lambda)$, где $\lambda > 0$, $\Phi(\lambda)$ — определённая в предыдущей теореме функция. Три приведённые теоремы в достаточной мере характеризуют то новое направление в статистике, которое началось и разрабатывается в Москве.

Многочисленные явления природы, экономики, техники протекают во времени так, как будто бы им свойственны периодические изменения; максимумы и минимумы довольно правильно чередуются, но ни длины волн, ни величины ординат не повторяются в точности. Такие явления были предметом исследования многих учёных, исходивших из той предпосылки, что на правильные колебания наслаиваются случайные влияния, создающие неправильности в течении процесса. Во многих случаях эта точка зрения, однако, оказалась несостоятельной. Значительный сдвиг в изучении таких процессов был произведён Е.Е. Слуцким, исходившим из задач геофизики и экономики. Им был установлен тот основной факт, что такого рода псевдо-периодическая повторяемость может быть не следствием лежащей в основе явления периодичности, а результатом действия случайных причин. Пусть ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — последовательность взаимно независимых случайных величин с одним и тем же законом распределения и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные; рассмотрим стационарную последовательность случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \ldots$, образованных по правилу $\eta_n = a_1\xi_n + a_2\xi_{n+1} + ... + a_n\xi_{n+k}$.

Указанный процесс образования последовательностей связанных случайных величин из независимых Слуцкий предложил называть подвижным суммированием. Оказалось, что последовательности такого рода способны имитировать процессы периодического характера. Более того, Слуцкий показал, что при некоторых условиях с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, на сколь угодно большом участке члены таких последовательностей не больше чем на ε отклоняются от соответствующих ординат синусоиды.

Заключение

В статье подчеркивается, что в природе и технике в каждом явлении присутствует случайность. Изложена история появления фундаментальных понятий вероятности и статистики. В работе анализируются два подхода к изучению явлений: "детерминистский" и "вероятностный". Отмечено, что при первом подходе выделяют основные факторы, характеризующие явление, а при втором — учитывают, помимо основных факторов, второстепенные, которые, если их не учесть, как раз и приводят к случайным возмущениям и искажениям результата. Подчеркивается, что *теория вероятности и математическая статистика* — это раздел математики, изучающий математические методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей на основе абстрактного описания, а *математическая статистика* как прикладная наука уже на основе этого описания оперирует непосредственно результатами конкретных наблюдений. Показано, что теория вероятностей — это базис математической статистики, которая уже применяется в реальной жизни. В статье постулируется, что вначале необходимо понять основные моменты теории вероятностей, а затем на их основе рекомендуется рассмотреть инструментарий математической статистики. Т.е. теория вероятностей позволяет находить степень объективной возможности наступления (вероятность) "сложных" событий через "простые", а математическая статистика по наблюдаемым значениям оценивает эту степень либо осуществляет проверку предположений (гипотез) относительно этой степени. Так или иначе, все завязано на событиях, поэтому сейчас настало время перейти к изучению их свойств и операций над ними. Учебный курс "Теория вероятностей и математическая статистика" является важнейшей частью модуля "Прикладная математика". Ее значимость в инженерных дисциплинах достаточно велика. На ней базируется регрессионный и дисперсионный анализ, многомерный статистический анализ, нейронные сети, распознавание образов и многие другие научные области. Современный инженер должен уметь использовать аппарат математической статистики на достаточно высоком уровне.

Литература

[1] Сидняев Н.И. Логико-статистический анализ проблем планирования эксперимента. - М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. - 352 с.

[2] Серовайский С.Я. История математики: Эволюция математических идей: Вычислительная математика. Теория вероятностей. Информатика. Математическая логика. - М.: Ленанд, 2019. - 240 с.

[3] Горобец Б.С. Теория вероятностей, математическая статистика и элементы случайных процессов. Упрощенный курс. - М.: Едиториал УРСС, 2020. - 232 с.

[4] Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 399 с.

[5] Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. Учебник и практикум. - М.: Юрайт, 2019. - 220 с.

[6] Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами. - СПб.: BHV, 2012. - 528 с.

[7] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Формирование итоговой оценки по дисциплине в рамках рейтинговой системы // Alma mater (Вестник высшей школы). - 2018. - № 12. - С. 51–56.

[8] Пригарин С.М. Статистическое моделирование многомерных гауссовских распределений. Учебное пособие для вузов. - М.: Юрайт, 2019. - 84 с.

[9] Кудрявцев Л.Д.. Курс математического анализа. Книга 1: учебник для вузов — 6-е изд., перераб. и доп. - Москва: Издательство Юрайт, 2023. - 396 с.

[10] Сидняев Н.И., Соболев С.К. Математическое образование современного инженера в условиях цифровой революции // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. - 2018. - Т.6. - С. 241-246.

[11] Зеленцов Б.П., Тутынина О.И. Теория вероятностей в познавательных и забавных задачах. - М.: Ленанд, 2019. - 128 с.

[12] Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: Учебное пособие. - М.: Академия, 2018. - 240 с.

[13] Рыбников К.А. История математики: Подисциплинарное изложение: Геометрия. Алгебра и теория чисел. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Дискретная математика. - М.: Ленанд, 2018. - 536 с.

[14] Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. - М.: Academia, 2018. - 210 с.

[15] Далингер В.А., Симонженков С.Д., Галюкшов Б.С. Теория вероятностей и математическая статистика с применением mathcad. Учебник и практикум для СПО. - М.: Юрайт, 2018. - 146 с.

[16] Кочетков Е.С., Смерчинская С.О. Теория вероятностей в задачах и упражнениях: Учебное пособие. - М.: Форум, 2018. - 559 с.

[17] Бутенко Ю.И., Сидняев Н.И., Семенова Е.Л. Математические аспекты в современной языковедческой теории и практике // "Alma Mater" (Вестник высшей школы). - 2018. - № 4. - С. 73-78.

[18] Мятлев В.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели: Учебное пособие. - М.: Академия, 2018. - 240 с.

Сидняев Николай Иванович,
зав. кафедрой "Высшая математика"
МГТУ им. Н.Э. Баумана, дтн, профессор.
E-mail: sidnyaev@yandex.ru

Скобелева Янина Валерьевна,
ст. преп. кафедры "Высшая математика"
МГТУ им. Н.Э. Баумана.
E-mail: ianinask@mail.ru

Юрий Семёнович Очан (к 110-летию со дня рождения)

Р. А. Мельников

Осенью 2023 года исполнилось 110 лет со дня рождения известного отечественного математика, кандидата физико-математических наук, доцента, видного специалиста в области математического анализа, дескриптивной теории множеств и математической физики Юрия Семёновича Очана (1913–1972). К сожалению, это событие осталось без внимания математической общественности страны, кроме того, имя этого талантливого учёного крайне редко упоминается как в исследованиях по истории математики, так и в трудах, посвящённых истории математического образования в России. В статье кратко описываются жизненный путь и судьба Ю.С. Очана, а также даётся краткий обзор научно-методического наследия учёного и анализируются написанные им учебные пособия и задачники по разным разделам высшей математики.

В 2023 году исполнилось 110 лет со дня рождения Ю.С. Очана — видного отечественного математика, «специалиста в области математического анализа и дескриптивный теории множеств» [2, с. 17], автора и соавтора учебников и задачников по математическому анализу и математической физике. К сожалению, его имя крайне редко упоминается в исследованиях историко-математического характера, в то время как Юрия Семёновича, несомненно, можно отнести к плеяде отечественных авторов учебной математической литературы для вузов, ставших классиками.

Ю.С. Очан

Юрий Семёнович Очан родился 27 (14) октября 1913 г. в Киеве. По происхождению — караим[1]. Позднее семья переехала в Крым, где он и получил среднее образование. После окончания школы работал строгальщиком по дереву на одном из заводов Симферополя. В 1930 г. поступил на физико-математический факультет Крымского пединститута, который успешно окончил в 1934 г., и был оставлен в нём в должности ассистента для преподавания математики на Рабфаке. В 1936 г. поступил в аспирантуру НИИ математики и механики при МГУ им. М.В. Ломоносова. Его научным руководителем стал академик А.Н. Колмогоров (1903–1987), который способствовал тому, чтобы Ю.С. Очана приняли на должность ассистента кафедры теории функций (по совместительству).

В 1939 г. в стенах МГУ Юрий Семёнович успешно защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые вопросы эквивалентности семейств множеств» [1, с. 333]. 25 сентября 1939 г. решением ВАК, в те годы относившейся к Специальному комитету по делам Высшей школы, Ю.С. Очану присуждена учёная степень кандидата физико-математических наук.

С 1 сентября 1939 г. по 15 февраля 1950 г. он работал в должности доцента на кафедре высшей математики Московского ордена Ленина Энергетического института имени В.М. Молотова. 10 мая 1941 г. решением ВАК Ю.С. Ючан утверждён в учёном звании доцента. С 1941 по 1943 г. был исполняющим обязанности заведующего кафедрой высшей математики МЭИ. За годы работы в этом вузе ему поручалось чтение лекций и проведение практических занятий по следующим дисциплинам: аналитическая геометрия, математический анализ, спецкурсы (теория функций комплексного переменного, операционное исчисление, уравнения математической физики). В 1945 г. Ю.С. Очан стал членом ВКП(б).

Приказом Министра Высшего образования СССР С.В. Кафтанова (1905–1978) в 1950 г. Ю.С. Очан был командирован в Ростов-на-Дону до 1 сентября 1951 г. для работы в местном университете. При этом квартиру в 5-м корпусе студгородка МЭИ было решено закрепить за его семьёй (жена — Очан Вера Васильевна, выпускница МГУ, в те годы работала ассистентом кафедры теоретических основ электроники в ВЗЭИ, и двое детей). В РГУ им. Молотова Ю.С. Очан работал доцентом на кафедре математического анализа, которую возглавлял местный воспитанник, в те годы кандидат физико-математических наук, доцент М.Г. Хапланов (1902–1977). Так как Юрий Семёнович оказался в Ростове-на-Дону в самом начале второго полугодия, то ему было поручено всего 290 часов учебной нагрузки (математический анализ, теория функций вещественной переменной, функциональный анализ, руководство курсовыми работами, а также ОЗО — отделение заочного обучения) и назначен оклад 3200 рублей в месяц. Летом 1951 г. Юрий Семёнович покинул Ростов-на-Дону и вернулся в столицу, продолжив работать в МЭИ.

В 1955 г. состоялся его переход МПГИ им. В.И. Ленина, где он работал до конца своих земных дней доцентом кафедры математического анализа, руководимой учёным с мировым именем П.С. Новиковым (1901–1975). Именно в МПГИ раскрылся талант Ю.С. Очана в написании учебно-методической литературы по различным разделам высшей математики.

В 1961 г. вышло в свет учебное пособие «Математический анализ», адресованное студентам педагогических институтов и написанное Юрием Семёновичем в соавторстве с В.Е. Шнейдером (1912–1984)[2]. Эта весьма объёмная книга (насчитывает 880 страниц) разделена на восемь отделов: «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление», «Интегрирование функций», «Определённый интеграл и его приложения», «Функции нескольких переменных», «Криволинейные и кратные интегралы», «Теория рядов», «Дифференциальные уравнения». Все отделы раздроблены на главы, максимальное число которых достигает десяти, большинство отделов в конце сопровождены допол-

[1]Немногочисленная этническая группа, происходящая от тюркоязычных последователей караизма (религиозного течения); на территории СССР малыми локациями проживали в Крыму, Украине и Литве.

[2]Владимир Евгеньевич Шнейдер —- отечественный математик-педагог, выпускник МГУ (1938), участник Великой Отечественной войны, профессор (с 1981 г.), заведовал кафедрой математики Завода-втуза при ЗИЛе (сейчас является структурным подразделением МАМИ). Совместно с А.И. Слуцким и А.С. Шумовым является автором известного учебника «Краткий курс высшей математики» (1972), рекомендованного для высших технических учебных заведений.

нениями. Главы, в свою очередь, разделены на параграфы.

Авторы стремились унифицировать своё пособие, сделав его доступным для будущих учителей как математики, так и физики. К достоинствам этой книги можно отнести наличие большого количества примеров, что по замыслу авторов должно было помочь студентам в овладении вычислительным аппаратом математического анализа.

В 1963 г. издательство «Просвещение» опубликовало следующее учебное пособие Ю.С. Очана — «Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного», рекомендованное Министерством просвещения РСФСР для педагогических институтов. Книга состояла из двух частей. Вся теория множеств, начиная с общей теории (операции над множествами, вопросы взаимно однозначного соответствия и мощности) и заканчивая теорией меры Лебега, вошли в первую часть. Вторая же посвящена теории функций, начиная с общих вопросов, связанных с отображениями множеств, и завершая теорией интеграла Лебега в евклидовом пространстве. В связи с тем, что в имеющейся к тому моменту времени учебной литературе по этому разделу математики употреблялись различная терминология и разные обозначения, автор книги перед каждой главой предложил сводку основных определений и обозначений, а также дал формулировки тех теорем, которые содержались в учебниках, и на которые следовало бы опираться при решении последующих задач. Наряду с элементарными (учебными) задачами по ТФДП этот сборник содержит ряд задач повышенной трудности, решение которых требовало от студентов изобретательности и даже некоторых навыков математического исследования.

В 1965 г. издательством «Высшая школа» напечатано очередное учебное пособие Ю.С. Очана — «Методы математической физики», которое было рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. В содержание этой книги вошли три части: «Векторный анализ (математическая теория поля)», «Краевые задачи. Ортогональные системы функций», «Уравнения математической физики».

В 1966 г. кафедра математического МПГИ им. В.И. Ленина ходатайствовала перед учёным советом вуза о присуждении Ю.С. Очану учёной степени доктора физико-математических наук по совокупности опубликованных работ. Действительно, к этому времени Юрий Семёнович стал авторитетным учёным, обладающим колоссальным опытом в преподавании различных сложнейших разделов высшей математики, на его счету была масса ценных публикаций в ведущих математических научных журналах страны: «Доклады Академии наук СССР», «Известия Академии наук СССР (Серия математическая)», «Математический сборник», «Успехи математических наук», не говоря уже об учебных пособиях, описанных выше. Окрылённый этим важным делом, он обратился к ведущим учёным страны: академику А.А. Ляпунову (1911–1973), профессорам Г.П. Толстову (1911–1981) и И.Я. Верченко (1907–1995), а так как двое последних работали не в педагогических или технических, а в военных вузах, то ещё и к В.Г. Челидзе (1906–1978) из Тбилиси, с просьбами о получении от них отзывов о его научных трудах, чтобы передать их для рассмотрения в ВАК. В итоге он получил положительные отзывы от всех указанных респондентов и переправил и их по месту назначения, ожидая решения. Однако вердикт высшей аттестационной комиссии был убийственным: «… отказать Ю.С. Очану в разрешении на защиту по совокупности работ, предложить ему объединить все имеющиеся результаты в диссертацию и защитить её в обычном порядке». Для Юрия Семеновича это стало ударом, который очень сильно отразился на его здоровье, но он всё же сохранил силы для работы, решив не распылять их на «эфемерную» защиту, а сосредоточиться на написании новой учебной литературы.

В 1967 г. появилась его книга «Сборник задач по методам математической физики», содержательно и логически связанная с предыдущей. В предисловии к ней автор написал: «Цель этого задачника — дать, при сравнительно небольшом объёме, такой набор задач, который мог бы достаточно полно иллюстрировать лекционный курс методов математической физики и который содержал бы достаточный материал для самостоятельных упражнений по этому курсу» [3]. После её выхода родная кафедра математического анализа МПГИ решила поддержать Ю.С. Очана, его избрали на должность профессора.

В последующие годы жизни Ю.С. Очан работал над написанием учебных пособий: «Теория пределов» (1969), «Интеграл» (1973), «Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций» (1981). Две последние книги вышли уже после смерти автора, случившейся в 1972 году.

Последняя книга представляет собой переиздание учебного пособия, вышедшего в 1963 г. Его переработку и редактирование выполнили Н.Ю. Очан — дочь учёного, а также профессор Ф.М. Бокштейн (1913–1990) — коллега Юрия Семёновича по кафедре математического анализа МПГИ. Отдельно отметим, что по этой книге в начале 90-х годов XX века премудростям ТФДП учился автор этих строк.

За годы жизни Ю.С. Очан награждён двумя медалями: «За доблестный труд в годы Великой Отечественной войны» и «К 800-летию Москвы».

Литература

1. Белозеров С.Е., Миесерова С.И., Ткачева В.А. Механико-математический факультет Ростовского университета (Биобиблиографический справочник). Выпуск 2. Математики (1920–1970). - Ростов-на-Дону, 1972. – 480 с.

2. Быкова О.И., Геворкян П.С., Сергеева И.Е., Тимофеева И.Л. История кафедры математического анализа МПГУ в лицах и датах. К 85-летию кафедры математического анализа МПГУ. Исторический очерк. - М.: Прометей, 2019. – 28 с.

3. Очан Ю.С. Сборник задач по методам математической физики: для педагогических институтов. - М.: Высшая школа, 1967. – 196 с.

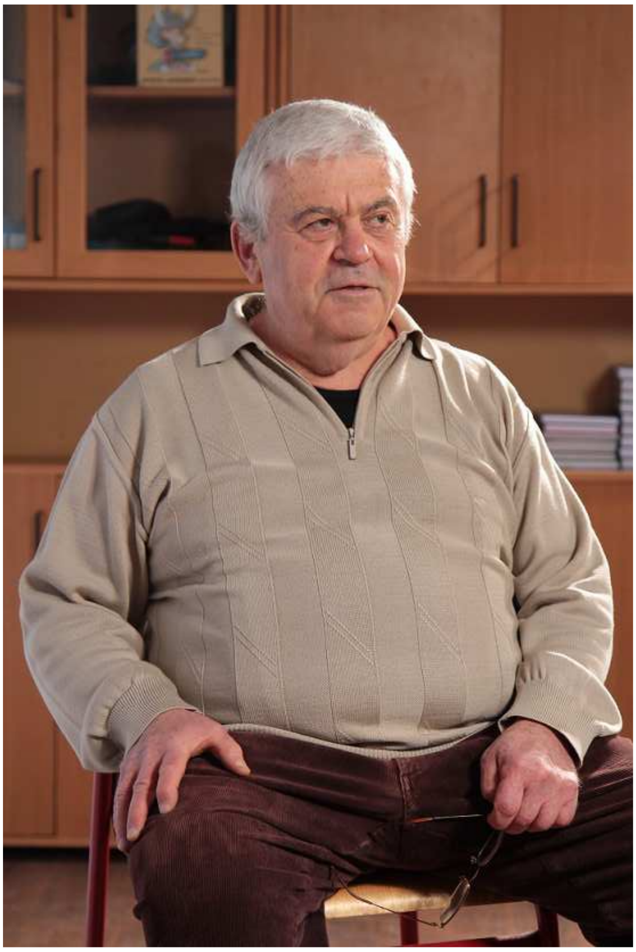
Мельников Роман Анатольевич,
доцент кафедры математики и методики её преподавания
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина,
кандидат педагогических наук, доцент.

E-mail: roman_elets_08@mail.ru

Скончался Семен Григорьевич Слободник

От редакции

Редакция журнала “Математическое образование” с глубоким прискорбием сообщает о кончине учителя математики (алгебра, геометрия, математический анализ) ГБОУ “Школа 179 г. Москвы” Семена Григорьевича Слободника (04.03.1948 – 27.02.2024).



Семен Григорьевич Слободник

Некролог и подборка авторских задач Семена Григорьевича будут опубликованы в следующем номере журнала.

О деятельности ФМОП в 2023 г.

От редакции

В 2023 г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся старших классов ГБОУ Школа № 179 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов, Летние математические лагеря.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, издателем и учредителем которого ФМОП является; в 2023 г. вышли номера 1(105), 2(106), 3(107), 4(108).
- Участие (очное и он-лайн) в мероприятиях по популяризации математического образования и просвещения.
- Выпуск приложения к журналу “Математическое образование”: вышли в он-лайн и печатном варианте выпуски 4, 5, 6 по разделу “Биология”, а также выпуск 8 по разделу “Образование: история, персоналии, проблемы”.
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей математической Олимпиады школьников ТИИМ (ранее САММАТ), гг. Самара и Москва.
- Предоставление изданий Фонда для участников летнего математического лагеря “Алый Парус”.
- Предоставление изданий Фонда для участников Всероссийского семинара «Передовые идеи в преподавании математики в России и за рубежом».
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников Космической Олимпиады школьников, г. Королев.
- Предоставление изданий Фонда для участников XVII Колмогоровских чтений, Киров, сентябрь 2023 г.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2024 год (1 экз., включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2024 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776