

ISSN 1992-6138

Математическое образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

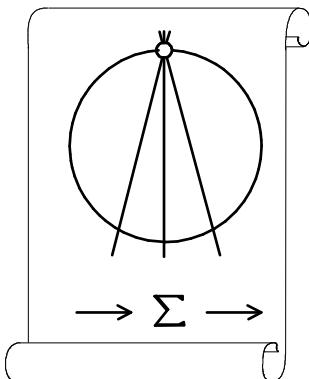
год двадцать восьмой

№ 2 (110)

апрель - июнь 2024 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

Константинов Н.Н.

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 2 (110), 2024 г.

© “Математическое образование”, составление, 2024 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2024 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 17.07.2024 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (110), апрель – июнь 2024 г.

Содержание

Память

От редакции. Памяти Семёна Григорьевича Слободника (04.03.1948 – 27.02.2024)	2
--	---

Учащимся и учителям средней школы

M. E. Гайченков. Размышления о перегибании прямоугольника. Теорема о специальном прямоугольнике	11
---	----

C. B. Дворянинов, A. B. Мамхегов. Задачи на любителя	19
--	----

A. D. Полянин, I. K. Шингарева. Неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем уравнений	22
---	----

A. H. Семёнов. Обобщение одной задачи Турнира Городов. Ворона и ягоды	35
---	----

Студентам и преподавателям математических специальностей

E. A. Кривошней. Обобщенные интегрируемые комбинации	43
--	----

B. M. Федосеев. Формула Гюйгенса как тема аналитического исследования	51
---	----

Образовательные инициативы

A. A. Андреев, E. A. Скородумова, E. A. Максимова. Олимпиада школьников “ТИИМ – Технологии. Интеллект. Информатика. Математика”	55
---	----

Из истории математики

A. H. Ковалев. Архитектурная математика и теорема Пифагора в Египте III тысячелетия до н.э.	69
---	----

Память

Памяти Семёна Григорьевича Слободника (04.03.1948 – 27.02.2024)

От редакции

Представляем вниманию читателя краткий некролог и авторские материалы Семёна Григорьевича Слободника, учителя математики ГБОУ Школа 179 г. Москвы.

Семён Григорьевич Слободник был учеником первого маткласса, выпущенного Николаем Николаевичем Константиновым. Получил высшее образование на математическом факультете Московского государственного педагогического института им. Ленина, защитил диссертацию кандидата физико-математических наук. В 2001 году, когда 179-я школа вновь возрождалась как математическая, он пришёл в неё преподавать алгебру, геометрию, матанализ и больше со школой не расставался.

На протяжении всей жизни, со школьных лет, Семён Григорьевич радовался любой красивой задаче, любому красивому решению. Он светился от этой радости и невольно заражал окружающих этой своей способностью так же радоваться.

Семён Григорьевич знал математику очень хорошо, но всё время совершенствовался в ней. При встрече с коллегами всегда задавал новую задачу, обычно своего авторства. Рассказывал о том, какие новые подходы он обдумывал в преподавании какой-нибудь темы или какое придумал оригинальное доказательство известной сложной теоремы. Очень любил общаться с молодыми преподавателями и студентами, помогая им профессионально, а зачастую и соревнуясь с ними в решении задач.

Мы запомним Семёна Григорьевича добрым и весёлым человеком, с неизменным чувством юмора, всегда готовым прийти на помощь, посвятившим себя математике и её преподаванию.

Здесь мы собрали некоторые материалы Семёна Григорьевича, показывающие широту его интересов и увлечённость математикой.

1. Задачи уроков алгебры и геометрии

1.1. Алгебра

1. а) Докажите, что для любого $a \in (0; 1)$ число a^n меньше $\frac{1}{1000}$ при всех достаточно больших n .
- б) Определим $\Phi_n \subset \mathbb{R}^2$ как $\{(x, y) : |x|^n + |8y|^n < 1\}$. Докажите, что площадь объединения $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots$ равна $\frac{1}{2}$.

2. Докажите, что графики $y = \cos x$ и $y = \cos^2 x$ гомотетичны. Найдите все центры гомотетии.

3. Постройте хотя бы три функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(0) = 0$ и $f(x) = f^{-1}(x)$ при всех x .

4. Существуют ли такие положительные числа a_1, \dots, a_n и b , что уравнение

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x = b$$

имеет более двух решений (причём $a_1 \neq 1$)?

5. Решите уравнения: а) $3^{3^x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{3^x-1} = 4$; б) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.

6. Найдите значение $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$.

7. Про функцию F на квадрате известно, что она непрерывна по всем горизонтальным и вертикальным. Обязательно ли F будет а) непрерывной; б) ограниченной?

8. При каких значениях параметра a уравнение $\operatorname{tg} \sqrt{a - x^2} = 1$ имеет ровно 10 решений?

9. Приведите пример подмножества плоскости, являющегося пересечением счётного числа открытых множеств, такого что его проекция на некоторую прямую не будет пересечением счётного числа открытых множеств.

10. Найти сумму корней уравнения $\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x$.

11. Выпуклый многоугольник вращают и ортогонально проектируют на фиксированную прямую. Как связана средняя длина проекции с периметром многоугольника?

12. На двух единичных окружностях отмечены наборы непересекающихся интервалов. Интервалы на первой окружности имеют суммарную длину a , а на второй — суммарную длину b . Докажите, что окружности можно наложить друг на друга так, что пересечения интервалов будут иметь суммарную длину $a \cdot b$.

1.2. Геометрия

1. От каждой грани выпуклого многогранника отложен наружу вектор, перпендикулярный этой грани и по длине равный площади этой грани. Докажите, что сумма получившихся векторов равна нулю.

2. Данна окружность и прямая l . Постройте хорду, параллельную l и имеющую данную длину a .

3. Дан остроугольный треугольник ABC . С помощью циркуля и линейки а) впишите в него квадрат (одна из сторон квадрата лежит на AB , а две оставшиеся вершины — на AC и BC); б) найдите такие $K \in AC$ и $L \in BC$, что $AK = KL = LB$.

4. При каких n можно восстановить n -угольник по серединам его сторон?

5. На столе лежал мяч. Маша взяла мяч со стола, поиграла и положила на то же место. Докажите, что некоторая точка мяча оказалась на том же месте, что вначале.

6. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены точки C' , A' и B' соответственно. Известно, что $AC' : C'B = BA' : A'C = CB' : B'A = 1 : 2$. Докажите, что площадь треугольника, образованного прямыми AA' , BB' и CC' , в 7 раз меньше площади треугольника ABC .

7. Через точку внутри треугольника провели прямые, параллельные его сторонам. Они разрезают треугольник на три треугольника площади S_1 , S_2 и S_3 и ещё на три параллелограмма. Докажите, что площадь исходного треугольника равна $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

8. Докажите, что четырёхугольник с фиксированными длинами сторон имеет максимальную площадь, когда он является вписанным.

9. На продолжениях сторон AB , BC , CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ соответственно за точки B , C , D и A отложены отрезки BB_1 , CC_1 , DD_1 и AA_1 , равные этим сторонам. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S .

10. а) Докажите равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ для произвольных точек плоскости A, B, C, D . б) Выведите, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

11. а) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Пусть $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Докажите, что $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = 0$. б) Докажите, что точка I — единственная точка в треугольнике, для которой выполнено данное равенство.

12. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABH , AHC и HBC равны.

13. В окружность вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ первой трапеции равна диагонали второй трапеции.

14. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площади S можно вписать треугольник, имеющий площадь не меньше а) $S/4$; б) $S/3$.

15. К двум непересекающимся окружностям провели общую перпендикулярную окружность (почему она существует?). Обозначим её пересечения с линией центров исходных окружностей через O_1 и O_2 . Докажите, что при инверсии относительно O_1 или относительно O_2 две исходные окружности перейдут в концентрические.

16. Докажите, что три расстояния от произвольной точки X до вершин правильного треугольника ABC удовлетворяют неравенству треугольника, причём оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда X лежит на описанной окружности треугольника ABC .

17. Три муhi равной массы ползут друг за другом по периметру треугольника. Muhi сделали полный круг и оказалось, что всё это время центр их масс был в одной и той же точке. Докажите, что эта точка пересечения медиан этого треугольника. (Скорости муhi не обязательно постоянные.)

18. На столе сидят 179 муhi. Известно, что любых трёх из них можно накрыть крышкой от кастрюли. Верно ли, что можно накрыть этой крышкой и всех одновременно?

19. Даны 4 остроугольных треугольника. На сторонах некоторого четырёхугольника во внешнюю сторону как на основаниях построили треугольники, подобные данным. После этого всё, кроме четырёх вершин треугольников, не являющихся вершинами четырёхугольника, стёрли. Восстановите исходный четырёхугольник. (Исходные треугольники известны. Какой из треугольников соответствует какой из нестёrtых точек, а также соответствие вершин при подобиях, тоже известно.)

20. Докажите, что если AB переходит в CD при поворотной гомотетии с центром O , то AC можно перевести в BD поворотной гомотетией с тем же центром O .

21. Дан выпуклый n -угольник. Предположим, внутри него нашлась точка A , из которой все стороны n -угольника видны под углами $2\pi/n$. Докажите, что сумма расстояний от A до вершин n -угольника минимальна.

22. На плоскости даны два одинаково ориентированных подобных треугольника. Разделим отрезки, соединяющие соответствующие вершины, в одинаковом отношении $a : b$. Докажите, что полученные три точки являются вершинами треугольника, подобного двум исходным.

23. Дан многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$. Вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, \dots , $\overrightarrow{A_nA_1}$ отложили от одной точки B . Докажите, что полученные n отрезков нельзя пересечь одной прямой (не проходящей через B).

24. Может ли сечение параллелепипеда быть правильным пятиугольником?

25. На стене на одной высоте висят двое одинаковых часов: правые показывают время по Лондону, а левые по Москве. В какой момент отрезок, соединяющий концы часовых стрелок, имеет наименьшую длину?

26. Существует ли тетраэдр, в котором пересекаются ровно две высоты?

27. Стороны параллелограмма равны 4 и 5. Найдите сумму квадратов его диагоналей.

2. Авторские задачи, вошедшие в Турнир городов

1. (25-й Турнир городов, весенний тур, сложный вариант, 10 – 11 кл.) Прямоугольная проекция треугольной пирамиды на некоторую плоскость имеет максимально возможную площадь. Докажите, что эта плоскость параллельна либо одной из граней пирамиды, либо двум скрещивающимся ребрам пирамиды.

2. (28-й Турнир городов, осенний тур, сложный вариант, 10 – 11 кл.) Можно ли разбить какую-нибудь призму на непересекающиеся пирамиды, у каждой из которых основание лежит на одном из оснований призмы, а вершина лежит на другом основании призмы?

3. (30-й Турнир городов, осенний тур, сложный вариант, 8 – 9 кл.) Даны положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Известно, что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}.$$

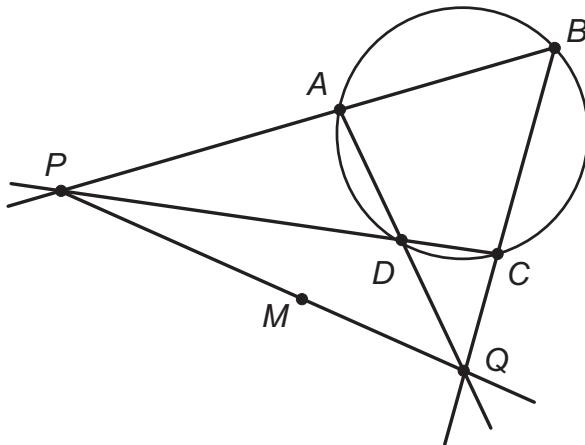
Докажите, что

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) < 2.$$

3. Красивая геометрическая задача

Семён Григорьевич радовался ярким школьным и олимпиадным задачам, особенно когда находил у них красивые, необычные решения. Вот один из примеров. Перед тем, как изложить решение, он сказал: «Потрясное решение, не могу не рассказать. Такого каламбура не ожидал от геометрии, сам стою с открытым ртом».

Задача. Четырехугольник $ABCD$ — вписанный. P и Q — точки пересечения противоположных сторон. Касательная к окружности из точки Q равна a , из точки P равна b . (То есть, $QD \cdot QA = QC \cdot QB = a^2$, $PB \cdot PA = PC \cdot PD = b^2$.) Найти PQ .



Решение (с сохранением эмоций Семена Григорьевича). Используем известный факт: окружности, описанные: I — около QDC , II — около QAB , III — около PAD , IV — около PBC , все четыре (!!!) пересекаются в некоторой точке M . (Это так называемая *точка Микеля* четырех прямых общего положения PB , PC , QA и QB , см., например, Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, издание четвертое, дополненное, МЦНМО, 2001 §10. — Прим. ред.)

Выполним инверсию относительно окружности с центром в P и радиусом b (!!!). Точка A перейдет в B , точка D — в C , следовательно, окружность, проходящая через PAD , перейдет в прямую BC , а окружность, проходящая через PBC , — в прямую AD . Но тогда (ура!!) общая точка этих окружностей, отличная от P , перейдет в точку пересечения этих прямых, т.е. в Q (!!). Как сказано выше, это точка M — общая точка четырех окружностей I, II, III и IV, и она лежит на PQ , так как была сделана инверсия с центром в P . Следовательно, $PM \cdot PQ = b^2$. Совершенно аналогично, $QM \cdot QP = a^2$. В итоге $PM \cdot PQ + QM \cdot QP = a^2 + b^2 = PQ^2$, откуда $PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$ (!!).

4. Теорема из курса математического анализа

Вот одна из теорем Семёна Григорьевича, которую он придумал для своего школьного курса матанализа.

Сначала получим два предварительных результата:

1. Если $0 < a < a + \varepsilon < 1$, то

$$(a + \varepsilon)^n \leq a^n + n\varepsilon. \quad (1)$$

Действительно, (по индукции) $(a + \varepsilon)^1 \leq a^1 + 1 \cdot \varepsilon$. Далее, $(a + \varepsilon)^{k+1} = (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^k = a(a + \varepsilon)^k + \varepsilon(a + \varepsilon)^k \leq a(a^k + k\varepsilon) + \varepsilon = a^{k+1} + ak\varepsilon + \varepsilon \leq a^{k+1} + (k + 1)\varepsilon$.

2. Если $0 < a < 1$, то

$$a + \frac{1-a^n}{n} \leq 1. \quad (2)$$

Действительно, $(2) \Leftrightarrow \frac{1-a^n}{1-a} \leq n$. Применим индукцию. Ясно, что $\frac{1-a^1}{1-a} \leq 1$. Пусть $k \geq \frac{1-a^k}{1-a}$, тогда $k + 1 \geq \frac{1-a^k}{1-a} + a^k = \frac{1-a^k+a^k(1-a)}{1-a} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$.

Теперь приступим к основному результату.

Теорема. Если $a > 0$, $0 < a^n < c < 1$, то

$$\left(a + \frac{c - a^n}{n} \right)^n \leq c.$$

Доказательство. Если окажется, что

$$0 \leq a + \frac{c - a^n}{n} \leq 1,$$

то из (1) получим:

$$\left(a + \frac{c - a^n}{n} \right)^n \leq a^n + n \cdot \frac{c - a^n}{n} = c.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $a + \frac{c-a^n}{n} \leq 1$. Ясно, что $a + \frac{c-a^n}{n} \leq a + \frac{1-a^n}{n}$. Применив (2), получаем, что $a + \frac{1-a^n}{n} \leq 1$, что и доказывает теорему.

Теорема имеет простое доказательство и чрезвычайно полезна. Из нее легко получить доказательство теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции многочленами, а также теорему о существовании корня.

5. Теорема о многочлене

Часто Семён Григорьевич хотел найти наиболее простое решение или изложение решения какой-нибудь известной трудной задачи. Вот пример, относящийся к известной фольклорной задаче по матанализу (студенты мехмата МГУ обычно узнавали её на младших курсах, но почти никто не мог решить).

Теорема. Пусть $f(x)$ — бесконечно много раз дифференцируемая действительная функция, причем для каждой точки $x \in \mathbb{R}$ найдется натуральное n такое, что $f^{(n)}(x) = 0$. Тогда $f(x)$ — многочлен.

Доказательство. 1. Нам понадобится **теорема Бэра** о системе замкнутых множеств: Пусть H и $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ — замкнутые подмножества прямой, причем $H \neq \emptyset$ и $H \subset \bigcup_n E_n$. Тогда в H найдется точка, которая содержитя в одном из E_n вместе со своей окрестностью. Более точно, найдется точка $x \in H$, натуральное n и $\varepsilon > 0$ такие, что $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \cap H \subset E_n$.

Действительно (от противного), выберем точку $x_1 \in H$ и окружим ее окрестностью $\Delta_1 = (x_1 - \varepsilon_1; x_1 + \varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 < 1$. Мы предположили, что утверждение теоремы Бэра не верно. Значит, $\Delta_1 \cap H \not\subset E_1$. Выберем в $\Delta_1 \cap H$ точку $x_2 \notin E_1$. Окружим x_2 интервалом $\Delta_2 = (x_2 - \varepsilon_2; x_2 + \varepsilon_2)$ таким, что концы этого интервала — точки $x_2 - \varepsilon_2$ и $x_2 + \varepsilon_2$ лежат в Δ_1 , а $\varepsilon_2 < 1/2$, причём весь интервал Δ_2 не пересекается с E_1 (это возможно, так как E_1 замкнуто). По предположению, $\Delta_2 \cap H \not\subset E_2$. Это позволяет выбрать в $\Delta_2 \cap H$ некоторую точку $x_3 \notin E_2$, ... Продолжая процесс, мы построим вложенную стягивающуюся последовательность интервалов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ Ясно, что

$$x_1 - \varepsilon_1 < x_2 - \varepsilon_2 < \dots < x_n - \varepsilon_n < \dots, \quad (1)$$

$$x_1 + \varepsilon_1 > x_2 + \varepsilon_2 > \dots > x_n + \varepsilon_n > \dots \quad (2)$$

Так как каждый промежуток $\Delta_i \cap H \neq \emptyset$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i - \varepsilon_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (x_i + \varepsilon_i) = y$, $y \in H$, а из (1) и (2) следует, что $y \in \Delta_i \cap H$, значит, $y \notin E_i$ для каждого i .

2. Скажем, что точка на действительной прямой *правильная*, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(x)$ — многочлен. Множество всех правильных точек обозначим символом E . Остальные точки назовем *неправильными*. Множество всех неправильных точек обозначим F .

3. *Если каждая точка отрезка $[a; b]$ правильная, то сужение $f(x)$ на $[a; b]$ — многочлен.*

Действительно, для каждой точки $t \in [a; b]$ найдется такой интервал, что сужение $f(x)$ на этот интервал — многочлен. Т.е. для каждой точки найдутся такие интервал и натуральное n , что $f^{(n)}(x)$ равна нулю на этом интервале. Из компактности отрезка $[a; b]$ следует, что найдется такое натуральное m , что $f^{(m)}(x) = 0$ всюду на $[a; b]$, следовательно, $f(x)$ — многочлен.

4. *Если каждая точка полуинтервала $[a; b]$ правильная, то сужение $f(x)$ на $[a; b]$ — многочлен.*

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность $a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ такую, что a_n сходится к b . По доказанному в предыдущем пункте сужение $f(x)$ на каждом из отрезков $[a_1; a_2], \dots, [a_1; a_n], \dots$ — многочлен. Пусть $P_k(x)$ — многочлен, совпадающий с $f(x)$ на отрезке $[a_1; a_{k+1}]$. Ясно, что $P_k(x) = P_1(x)$ для всех $k = 2, 3, \dots$. Поэтому $P_1(x)$ совпадает с $f(x)$ на $[a; b]$, значит и в точке b . (Напомним, что $P_1(x)$ и $f(x)$ непрерывны всюду на \mathbb{R} .)

Аналогично предыдущему легко доказать, что:

5. *Если каждая точка полуинтервала $(a; b]$ или интервала $(a; b)$ — правильная, то $f(x)$ — многочлен на $[a; b]$.*

Приступим к исследованию неправильных точек, т.е. точек множества F .

6. *Множество F не содержит изолированных точек.*

Действительно, пусть $a \in F$ — изолированная точка. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ полуинтервалы $[a - \varepsilon, a]$ и $(a, a + \varepsilon]$ состоят из правильных точек. Значит, сужение $f(x)$ на $[a - \varepsilon, a]$ и $[a, a + \varepsilon]$ — многочлены. Ясно, что при достаточно большом n (n должно быть больше степеней каждого из этих многочленов) $f^{(n)}(x)$ будет равна нулю всюду на $[a - \varepsilon; a + \varepsilon]$. Т.е. a является правильной точкой.

7. Пусть множество F неправильных точек не пусто. Положим $E_i = \{x : f^{(i)}(x) = 0\}$. Ясно, что $F \subset \bigcup_i E_i$ и каждое E_i замкнуто. Из теоремы Бэра (см. 1.) следует, что найдется интервал $(a; b)$ такой, что $(a; b) \cap F \neq \emptyset$ и $(a; b) \cap F$ лежит в одном из E_i , пусть это E_n .

Рассмотрим функцию $f^{(n)}(x)$. Эта функция равна нулю в каждой точке $x \in F \cap (a; b)$. Так как каждая неправильная точка является предельной для множества F , то $f^{(n+k)}(x) = 0$ для всех целых $k \geq 0$ и всех $x \in (a; b) \cap F$. Докажем, что $f^{(n)}(x)$ равна 0 всюду на $(a; b)$. Пусть это не так. Тогда найдется точка $c \in (a; b)$ такая, что $f^{(n)}(c) \neq 0$. Так как множество F не пусто и замкнуто, то найдем в нем точку d , ближайшую к c . Для определенности положим $d < c$. Функция $g(x) = f^{(n)}(x)$ бесконечно много раз дифференцируема на $[d; c]$, $g(d) = 0$ и все производные $g^{(m)}(d) = 0$. Так как $g(c) \neq 0$, то по теореме о конечных приращениях Лагранжа $g^{(m)}(x)$ не может быть равна нулю всюду на $(d; c)$ ни для одного натурального m . Значит $g(x)$ — не многочлен на $[d; c]$. В то же время все точки интервала $(d; c)$ — правильные, значит, $g(x)$ — многочлен на $[d; c]$. Ввиду полученного противоречия теорема доказана.

6. Дискретные положительные гармонические функции

В завершение приводим заметку Семёна Григорьевича из сборника «Математическое просвещение», серия 3, выпуск 11, МЦНМО, 2007, С. 145–148, раздел «По мотивам задачника “Математического просвещения”»¹. Заметка публикуется с разрешения редакции «Математического просвещения».

¹Местом работы автора указан Московский институт открытого образования. — Прим. ред.

Предлагается новое, более короткое решение задачи 5.9 б) из задачника “Математического просвещения”.

Гармонической на целочисленной решетке \mathbb{Z}^n называется такая функция $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$, значение которой в каждой точке равно среднему арифметическому от значений соседей:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_i - 1, \dots, x_n)).$$

Теорема. Гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция постоянна.

Частными случаями этой теоремы являются пункты б) и в) задачи 5.9 из задачника “Математического просвещения”². В предыдущем выпуске “Математического просвещения” было опубликовано доказательство этой теоремы [1]. Здесь мы изложим более простое доказательство.

Для обозначения точек решетки \mathbb{Z}^n будем использовать малые латинские буквы или записанные в скобках координаты соответствующих точек. Через e_k будем обозначать точку с координатами $(0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$, где единица стоит на k -м месте. Точку с нулевыми координатами будем для краткости обозначать через 0.

Точки решетки можно складывать покомпонентно. В таких обозначениях условие гармоничности переписывается как

$$f(x) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (f(x + e_i) + f(x - e_i)). \quad (1)$$

Рассмотрим множество F гармонических на \mathbb{Z}^n функций, таких что

$$f(x) > 0 \text{ для любого } x \in \mathbb{Z}^n, \quad (2)$$

$$f(0) = 1 \text{ (условие нормировки).} \quad (3)$$

Множество F непусто, так как оно содержит тождественно равную 1 функцию u . Если $f(x)$ — гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция, то $f(x)/f(0) \in F$. Мы докажем теорему, установив, что множество функций F не содержит никаких других функций, кроме u .

План доказательства таков. Мы введем линейный порядок на функциях из \mathbb{Z}^n в \mathbb{R} и покажем, что максимальная (и минимальная) относительно этого порядка функции в F должны быть константами. Существование максимальной (равно как и минимальной) функции следует из компактности F в топологии поточечной сходимости. Мы приведем элементарное доказательство этого факта, не использующее теорему Тихонова.

На этом доказательство теоремы завершается: максимальный элемент равен минимальному, поэтому в множестве F есть только одна функция u .

Начнем со вспомогательного замечания: положительные гармонические функции не могут расти очень быстро. А именно, введем обозначение

$$|x - y| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (4)$$

² Для полноты изложения приведем условие этой задачи из 5-го выпуска “Математического просвещения”.

9. а) В клетках бесконечной клетчатой ленты записаны положительные числа. Известно, что каждое число не меньше среднего арифметического трех соседей слева и трех справа. Докажите, что числа равны.

б) На клетчатой плоскости в клетках расположены положительные числа так, что каждое записанное число равно среднему арифметическому 4-х своих соседей. Докажите, что все числа равны.

в) верно ли аналогичное утверждение для пространственной решетки?

(И.Ф. Шарыгин)

Тогда справедлива простая оценка роста положительной гармонической функции.

Лемма 1. *Если f – гармоническая на \mathbb{Z}^n положительная функция, то для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n$ выполнено*

$$f(y) < f(x)(2n)^{|x-y|}. \quad (5)$$

Доказательство. Для случая $y = x + e_k$ неравенство (5) немедленно следует из условий гармоничности и положительности:

$$2n \cdot f(x) = f(y) + \text{(положительные слагаемые)} > f(y).$$

Осталось заметить, что за $|x - y|$ единичных шагов по решетке \mathbb{Z}^n можно перейти из x в y .

Сравнивая при помощи (5) значение $f(x)$ с $f(0) = 1$, получаем

Следствие 1. *Если $f \in F$, то $(2n)^{-|x|} < f(x) < (2n)^{|x|}$.*

Так как множество \mathbb{Z}^n счетно, то существует биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{N}$$

множества \mathbb{Z}^n на множество натуральных чисел \mathbb{N} . Через a_k будем обозначать такую точку x решетки, для которой $\varphi(x) = k$.

После того, как мы занумеровали точки решетки, на функциях из \mathbb{Z}^n в \mathbb{R} возникает лексикографический порядок: $f \prec g$ тогда и только тогда, когда $f(a_k) < g(a_k)$ при некотором k , а на всех меньших точках функции равны: $f(a_i) = g(a_i)$ при $i < k$.

Лемма 2. *Если в множестве F относительно лексикографического порядка существует наибольшая функция M и наименьшая функция m , то $M = m = u$.*

Доказательство. Для $f \in F$ определим функции $S_i f$:

$$S_i f(x) = f(x)f(e_i) - f(x+e_i)f(0) \text{ для любого } x \in \mathbb{Z}^n. \quad (6)$$

Функция $S_i f$ гармоническая, так как является линейной комбинацией гармонических функций $f(x)$ и $f(x+e_i)$. При этом $S_i f(0) = 0$.

Из оценки роста (5) получаем, что

$$|S_i f(x)| \leq |f(x)| \cdot |f(e_i)| + |f(x+e_i)| < 4n|f(x)|. \quad (7)$$

Поэтому функции $f \pm (4n)^{-1} S_i f$ также принадлежат F .

Если $S_i f$ не равно тождественно 0, то f лежит строго между $f + (4n)^{-1} S_i f$ и $f - (4n)^{-1} S_i f$ в лексикографическом порядке. Отсюда заключаем, что для максимальной и минимальной функций должны выполняться равенства $S_i M = S_i m = 0$.

Теперь докажем, что если $S_i f = 0$ для любого i , то $f = u$. Из равенств

$$S_i f(x) = f(x)f(e_i) - f(x+e_i)f(0) = 0 \quad (8)$$

следует

$$f(x+e_i) = \frac{f(e_i)}{f(0)} f(x) = f(e_i) f(x). \quad (9)$$

Подставив в (9) вместо x вектор $x - e_i$, получим

$$f(x - e_i) = f(e_i)^{-1} f(x). \quad (10)$$

Условие гармоничности в 0 с учетом равенств (9) и (10) приобретает вид

$$2n = \sum_{i=1}^n (f(e_i) + f(e_i)^{-1}). \quad (11)$$

Так как для положительного числа a сумма $a + a^{-1}$ не меньше 2 и равна 2 только если $a = 1$, то из (11) следует, что $f(e_i) = 1$. Но тогда из (9) и (10) следует, что в соседних точках решетки функция f принимает одинаковые значения. Поэтому она равна 1.

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в существовании наибольшей и наименьшей функции в F .

Лемма 3. *Множество F замкнуто относительно поточечной сходимости: если $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ и $f_n \in F$, то $g \in F$.*

Доказательство. Положительность предельной функции следует из оценки (5):

$$(2n)^{|x|} g(x) = (2n)^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1.$$

Условия гармоничности и нормировки — равенства и поэтому сохраняются при предельном переходе.

Лемма 4. *В множестве F относительно лексикографического порядка существуют наибольшая и наименьшая функции.*

Доказательство. Докажем существование максимума, существование минимума доказывается аналогично.

Следствие 1 из неравенства роста (5) показывает, что множество значений функций из F в любой точке ограничено. Воспользуемся нумерацией φ точек \mathbb{Z}^n . Построим семейство вложенных замкнутых множеств F_i и последовательность чисел c_i по следующему правилу:

$$F_0 = F, \quad F_i = \{f \mid f \in F_{i-1}, f(a_i) = c_i\}, \quad c_i = \sup_{f \in F_{i-1}} f(a_i).$$

Замкнутость множеств F_i доказывается аналогично лемме 3. Поэтому ни одно из множеств F_i не пусто, а функция M такая, что $M(a_k) = c_k$, принадлежит всем множествам f_i . С другой стороны, любая функция из $F = F_0$ не больше M по построению.

Список литературы

[1] Шольце П. О неотрицательных гармонических функциях на решетке // Математическое просвещение. Третья серия. – Вып. 10. – 2005. – С. 236-242.

Материал подготовили учителя математики ГБОУ «Школа 179» г. Москвы Сергей Дориченко и Андрей Рябичев

Учащимся и учителям средней школы

Размышления о перегибании прямоугольника. Теорема о специальном прямоугольнике

M. E. Гайченков

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b , причем $a < b$. Прямоугольник перегибают по прямой, проходящей через его центр. Нас интересует вопрос: под каким углом α нужно сделать перегиб, чтобы площадь пересечения была наименьшей?

Многие из читателей встречались с задачами о перегибании бумаги, наверняка проводили опыты с бумагой, или складывали различные фигурки из бумаги. Существует даже отдельное искусство складывания фигурок из бумаги — оригами. Можно, конечно же, попробовать провести эксперименты по перегибанию прямоугольников. Во-первых, стоит рассмотреть “длинные” бумажные полоски, т.е. такие прямоугольники, у которых $a \gg b$. Во-вторых, рассмотреть случай перегибания квадрата ($a = b$). Проводя подобные геометрические эксперименты, стоит ответить на вопрос: какие фигуры могут получаться при перегибании прямоугольника по прямой, проходящей через его центр?

Перегибая длинные бумажные полоски, можно предположить, что $\alpha = 45^\circ$ (или $\pi/4$ радиан). На опыте получается (и это гипотеза!), что длина длинной полоски, которую перегибаешь через ее центр, не влияет на угол α , пока полоска длинная. Что значит “длинная”?

Определение. *Длинный прямоугольник* — это такой прямоугольник, при перегибании которого по прямой, проходящей через его центр под углом 45° , площадь пересечения минимальна.

В связи с существованием “длинного” прямоугольника возникает вопрос о том, когда же длинный прямоугольник перестает быть длинным? Понятно, что квадрат — это особый прямоугольник, у которого все стороны равны. Вряд ли кто-то осмелится назвать квадрат “длинным прямоугольником”. В самом деле, не так обстоит дело с квадратом. Перегибая квадрат под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$, получим равнобедренный прямоугольный треугольник с площадью $\frac{a^2}{2}$. Перегибая квадрат под углом вдвое меньшим, $\alpha = \pi/8$, можно обнаружить, что получается пятиугольник. Площадь получающегося пятиугольника меньше площади половины квадрата почти на 20%! Для экспериментального измерения площади фигуры рекомендуется использовать, например, миллиметровую бумагу.

Опыты с произвольными прямоугольниками показывают, что могут получаться треугольники, пятиугольники, четырехугольники. Все эти опытные наблюдения теперь необходимо сформулировать на языке математики.

Общий план решения задачи может быть таким:

1. Найти зависимость площади пересечения $S(\alpha)$.
2. Исследовать функцию $S(\alpha)$, найдя условия, при которых функция принимает наименьшее значение.

Пусть угол β такой, что $\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b}$. Введем также обозначение $t = \operatorname{tg} \alpha$, $k = \sin 2\beta$

В зависимости от значения угла α возможно несколько вариантов области пересечения:

1. Угол α меняется от 0 до β
2. Угол α меняется от β до $(\frac{\pi}{2} - \beta)$

3. Угол α меняется от $(\frac{\pi}{2} - \beta)$ до $\frac{\pi}{2}$.

Если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то мы будем получать случаи, симметричные рассмотренным.

Для **первого случая**, когда в области пересечения пятиугольник, площадь вычисляется по формуле

$$S(t) = \frac{(2ab - (a^2 - b^2)t + 2abt^2 - (a^2 + b^2)t^3)}{4(1 - t^2)}.$$

Нам нужно найти минимум этой функции по t , т.е. $S'(t) = 0$. С учетом введенных обозначений, получим уравнение 4-ой степени: $t^4 - 4t^2 + 4kt - 1 = 0$, где параметр k меняется от 0 до 1, поскольку $k = \sin 2\beta$, а β меняется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Корни уравнения можно найти, используя формулы Феррари. Однако, наше уравнение зависит от параметра k , и вычисление корней через эти громоздкие формулы скрывает понимание задачи. Мы используем другой подход.

Рассмотрим функции $f(t) = t^4 - 4t^2 - 1$ и $g(t) = -4kt$. Нулям производной $S'(t)$ соответствуют точки, в которых пересекаются графики функций $f(t)$ и $g(t)$. При $k = 1$ имеется 4 корня. Для некоторого значения C при $k < C$ прямая $g(t)$ не пересекает $f(t)$ на интересующем нас отрезке $[0; 1]$ (поскольку $t = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha < \beta$, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta < 1$). При таком условии нет локального экстремума у функции, а минимальное значение функции — на одном из концов отрезка $[0; \operatorname{tg} \beta]$. Геометрический смысл заключается в том, что концам отрезка соответствуют пересечения в виде половины исходного прямоугольника и в виде треугольника. Как мы увидим, рассматривая второй случай, этот пограничный случай не является подходящим, так как есть треугольник с меньшей площадью. При таких значениях k подходящим будет значение угла $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

В случае $k > C$ имеется прямоугольник, «близкий» к квадрату, появляются нули производной на отрезке $[0; 1]$. Обозначим эти нули производной t_1, t_2 , где $t_1 < t_2$. До t_1 производная отрицательная, на отрезке $[t_1, t_2]$ — положительная. Значит, t_1 — точка локального минимума. Таким образом, нужно сравнить значение площади пятиугольника при $t = t_1$ и минимальное значение площади треугольника из второго случая.

Для **второго случая**, когда угол α достигает значения β , область пересечения превращается из пятиугольника в треугольник. Пересечение в виде треугольника остается до достижения углом α значения $\frac{\pi}{2} - \beta$. Площадь пересечения в виде треугольника находится по формуле $S_{\Delta}(\alpha) = \frac{a^2}{2 \sin 2\alpha}$. Минимальная площадь пересечения достигается при $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

В **третьем случае**, когда α меняется от $\frac{\pi}{2} - \beta$ до $\frac{\pi}{2}$, в пересечении получается снова пятиугольник, который при достижении $\alpha = \frac{\pi}{2}$ вырождается в половину прямоугольника. Этот третий случай незначительно отличается от первого случая. Если мы найдем необходимое значение угла α в первом случае, то в третьем случае искомым будет значение $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

В **случае квадрата**, $\operatorname{tg} \beta = 1$, второй случай вырождается в единственный треугольник — половину квадрата. Таким образом, нужно сравнить площадь пятиугольника в точке $t = t_1$ из первого случая и площадь треугольника. Проверкой убеждаемся, что $t_1 = \sqrt{2} - 1$ является корнем уравнения $t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$, при этом значении достигается локальный минимум площади пятиугольника: $S_{min} = (\sqrt{2} - 1)a^2$, что меньше площади треугольника при перегибе квадрата под углом $\frac{\pi}{4}$.

Отметим, что можно показать, что при $k < C = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ прямая $g(t)$ не пересекает график полинома $f(t)$ на интервале $(0; 1)$. При $k = C$ имеем касание графиков прямой и полинома в точке с абсциссой $\frac{1}{\sqrt{3}}$. При непрерывном изменении параметра k от $k_1 = 1$ до $k_2 = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ корень t_1 также непрерывно и монотонно меняется в интервале $\left(\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Значит, на этом интервале функция $t = T(k)$ является непрерывной и монотонной. Следовательно, обратная функция существует и эта обратная

функция монотонна. В самом деле, t выражается через k по нетривиальной формуле. С другой стороны, $k = \frac{(1+4t^2-t^4)}{4t}$.

Теперь исследование задачи можно рассмотреть так: подставлять разные значения t из интервала $\left(\sqrt{2}-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ в выражение для k и для площади пятиугольника. Используя такой подход, можно находить минимальную площадь пятиугольника и соотношение на стороны прямоугольника, при котором она достигается.

Выразим $s = \operatorname{tg} \beta = \frac{a}{b}$ и $u = \frac{b}{a}$ через k . Получаем $s = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}$, $u = \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{k}$.

После этого преобразуем выражение для площади пятиугольника так, чтобы оно зависело только от t и a :

$$S(t) = \frac{2ab - (a^2 - b^2)t + 2abt^2 - (a^2 + b^2)t^3}{4(1-t^2)} = \frac{(1+t^2)a^2(2u - (1+u^2)t)}{4(1-t^2)}.$$

Выразим u через t :

$$u = \frac{4t + (t+1)(1-t)\sqrt{6t^2 - t^4 - 1}}{1 + 4t^2 - t^4},$$

далее подставим u в выражение для $S(t)$:

$$S(t) = \frac{(1+t^2)a^2}{4(1-t^2)} \left(2 \frac{4t + (t+1)(1-t)\sqrt{6t^2 - t^4 - 1}}{1 + 4t^2 - t^4} - \left(1 + \left(\frac{4t + (t+1)(1-t)\sqrt{6t^2 - t^4 - 1}}{1 + 4t^2 - t^4} \right)^2 \right) t \right).$$

Мы получили выражение для минимальной площади пятиугольника, если она меньше, чем $\frac{a^2}{2}$, то t — искомое значение $\operatorname{tg} \alpha$.

В случае $S(t) = \frac{a^2}{2}$ можно сформулировать следующую теорему.

Теорема о специальном прямоугольнике. Прямоугольник со сторонами a, b , причем $a < b$, перегибают по прямой, проходящей через точку пересечения его диагоналей так, чтобы площадь пересечения была наименьшей: существует единственное соотношение сторон $\frac{a}{b}$, при котором в пересечении получается треугольник или пятиугольник площадью $\frac{a^2}{2}$:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 4t_0^2 - t_0^4}{4t_0 + (1+t_0)(1-t_0)\sqrt{6t_0^2 - t_0^4 - 1}},$$

где t_0 — корень уравнения $t^5 + 3t^4 + 4t^3 + t - 1 = 0$.

Приближенное значение корня и соотношение сторон прямоугольника:

$$t_0 \approx 0,45913372331020753947\dots, \quad \frac{a}{b} \approx 0,8150237\dots$$

Выводы.

Мы получили в явном виде формулы, которые позволяют при заданных сторонах прямоугольника найти угол перегиба α , а также площадь пересечения. Если стороны прямоугольника отличаются сильно (случай “длинного” прямоугольника), то оптимальным будет перегиб под углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Такой перегиб остается оптимальным до достижения соотношения сторон, указанных в теореме о специальном прямоугольнике.

Приведем несколько значений $\frac{a}{b}$ и соответствующих им углов α :

Значение $\frac{a}{b}$	1	0,9	0,8150237	0,7	0,6
Угол α	$\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$ $-\frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}$	$0,40117,$ $\frac{\pi}{2} - 0,40117,$ $-0,40117,$ $-\frac{\pi}{2} - 0,40117,$	$\frac{\pi}{4}, 0,430423,$ $\frac{\pi}{2} - 0,430423,$ $-\frac{\pi}{4}, -0,430423,$ $-\frac{\pi}{2} + 0,430423,$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$
Значение S	$(\sqrt{2}-1)a^2$	$0,458392 a^2$	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{a^2}{2}$

Приложение. Подробные вычисления

Случай 1.

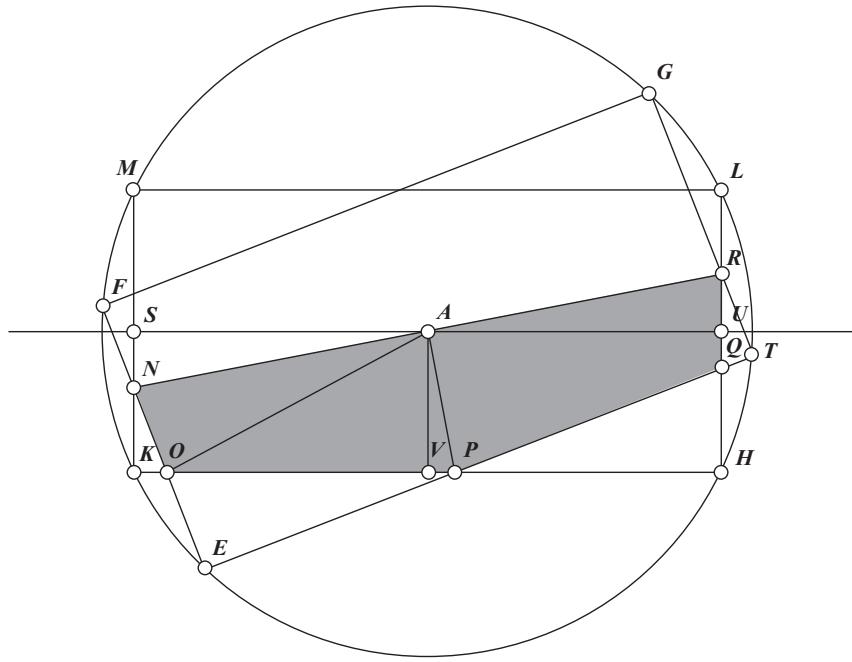


Рис. 1.

На рисунке 1 изображен исходный прямоугольник $MLHK$, $LH = a$, $KH = b$, линия перегиба здесь NR , закрашена область пересечения. Верхняя часть $MLRN$ прямоугольника перегибается относительно NR , точка L переходит в T , точка M в E . Углу α здесь соответствует угол RAU . Угол LAU — соответствует углу β , так как $\operatorname{tg} LAU = LU/AU = a/b = \operatorname{tg} \beta$. Этот рисунок как раз соответствует случаю $0 < \alpha < \beta$

Чтобы минимизировать площадь области пересечения, нужно сначала найти ее как функцию от угла α и сторон прямоугольника.

Легко видеть, что AP — ось симметрии у пятиугольника $NRQPO$, и делит его на две равные, а значит и равные по площади, части. Найдем площадь четырехугольника $NAPO$. Для этого посчитаем площади треугольников NAO и OAP . Имеем: $AS = b/2$, $NS = (b/2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$, $KS = a/2$, $NK = KS - NS = a/2 - (b/2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Далее, угол ANS равен $(\pi/2 - \alpha)$ (из прямоугольного треугольника), а значит и угол ANO равен $(\pi/2 - \alpha)$, потому что перегибание относительно NR — по сути

осевая симметрия, и соответствующие углы равны. Далее, угол $KNO = (\pi - 2 \cdot (\pi/2 - \alpha)) = 2\alpha$, таким образом, длина $NO = NK/(\cos 2\alpha)$. Высота в треугольнике ANO к стороне NO равна $b/2$ (ибо NO — кусок стороны прямоугольника, а A — его центр). То есть площадь ANO равна

$$((a - b \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot b) / (8 \cos 2\alpha)$$

Аналогичным образом найдем площадь треугольника OAP : высота $AV = a/2$, сторона $OP = PQ$ из-за симметрии относительно AP . Чтобы найти PQ , заметим, что угол $PAV = \alpha$, $PV = AV \cdot \operatorname{tg} \alpha = (a/2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Из подобия треугольников KNO , OPE и PQH имеем угол $QPH = 2\alpha$ следовательно $PQ = PH/(\cos 2\alpha) = (b/2 - (a/2) \cdot \operatorname{tg} \alpha)/(\cos 2\alpha)$, и площадь треугольника OAP равна $((b - a \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot a) / (8 \cos 2\alpha)$.

Нас интересует удвоенная сумма этих двух площадей — площадь пятиугольника $NRQPO$.

Согласно тригонометрическим формулам $\cos 2\alpha = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$. Заметим еще, что в промежутке $(0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает и принимает каждое положительное значение ровно в одной точке, следовательно уравнение $\operatorname{tg} x = t$ имеет единственное решение в указанном промежутке для каждого положительного t . Далее, сделаем замену $\operatorname{tg} \alpha = t$. Тогда формула для площади пятиугольника будет иметь вид:

$$S = \frac{2(1+t^2)}{4(1-t^2)} \cdot (ab - ta^2 + ab - tb^2) = \frac{(1+t^2)(2ab - (a^2+b^2)t)}{4(1-t^2)} = \frac{2ab - (a^2+b^2)t + 2abt^2 - (a^2+b^2)t^3}{4(1-t^2)}.$$

Нам нужно найти минимум этой функции по t . Продифференцируем функцию:

$$\begin{aligned} S' &= \frac{(-(a^2+b^2) + 4abt - 3(a^2+b^2)t^2)(4-4t^2) - (2ab - (a^2+b^2)t + 2abt^2 - (a^2+b^2)t^3)(-8t)}{(4-4t^2)^2} = \\ &= \frac{-4(a^2+b^2) + 32abt - 16(a^2+b^2)t^2 + 4(a^2+b^2)t^4}{(4-4t^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Получили уравнение:

$$-(a^2+b^2) + 8abt - 4(a^2+b^2)t^2 + (a^2+b^2)t^4 = 0.$$

Мы обозначили $a/b = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда

$$k = \sin 2\beta = 2 \operatorname{tg} \beta / (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) = \frac{\frac{2a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

Разделим уравнение на $(a^2 + b^2)$, получим: $t^4 - 4t^2 + 4kt - 1 = 0$.

У нас есть уравнение 4-ой степени с параметром k , который меняется от 0 до 1, т.к. $k = \sin 2\beta$ где β меняется от 0 до $\pi/4$.

Рассмотрим функции $f = t^4 - 4t^2 - 1$ и $g = -4kt$. Точки, где пересекаются их графики, соответствуют нули производной. На графике, рис. 2, изображены эти функции: кривая есть график полинома четвертой степени, две прямые — графики линейных функций при k , равных 1 и 0.5 соответственно. Очевидно, что при $k = 1$ у нас 4 корня, но для некоторого C при $k < C$ прямая уже не пересекает график полинома на отрезке $[0, 1]$ (а нас интересует именно этот отрезок, т.к. $t = \operatorname{tg} \alpha$, а $\alpha < \beta$, $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta < 1$, то есть t меняется от 0 до 1).

Эту константу C нетрудно найти позже, но можно сказать однозначно, что при $k < C$ на отрезке $[0, \operatorname{tg} \beta]$ нулей производной нет, следовательно нет локального экстремума у функции, то есть минимальное ее значение принимается в одном из концов отрезка $[0, \operatorname{tg} \beta]$. Этим концам соответствуют пересечения в виде половины исходного прямоугольника и в виде треугольника. Но в случае 2 будет показано, что этот пограничный треугольный случай не является оптимальным, потому как есть треугольник с меньшей площадью.

То есть при таких значениях k оптимальным будет значение угла $\alpha = \pi/4$.

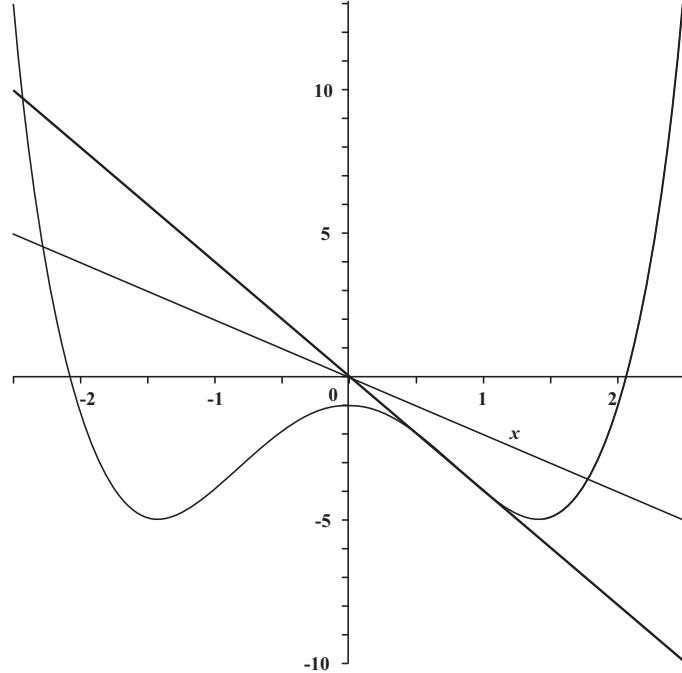


Рис. 2.

Если же $k > C$ (то есть прямоугольник близок к квадрату), то у нас появляются нули производной на отрезке $[0, 1]$. Обозначим их t_1, t_2 , где $t_1 < t_2$. Очевидно, что до t_1 производная отрицательная, а на отрезке $[t_1, t_2]$ — положительна. Значит, t_1 — точка локального минимума.

Все, что остается сделать — сравнить значение площади пятиугольника при $t = t_1$ и минимальное значение площади треугольника из случая 2.

Случай 2.

Как только угол α достигает значения β , область пересечения превращается из пятиугольника в треугольник, рис. 3, 4, 5.

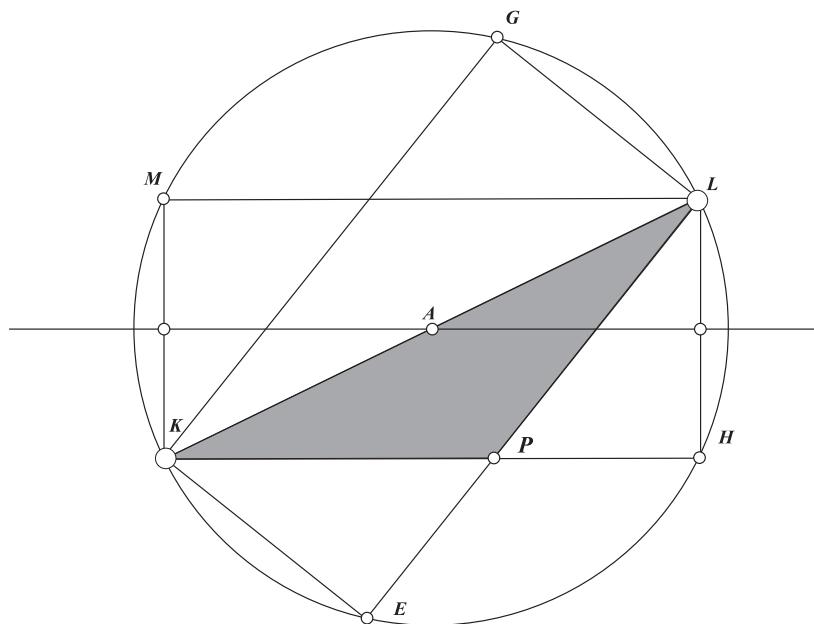


Рис. 3.

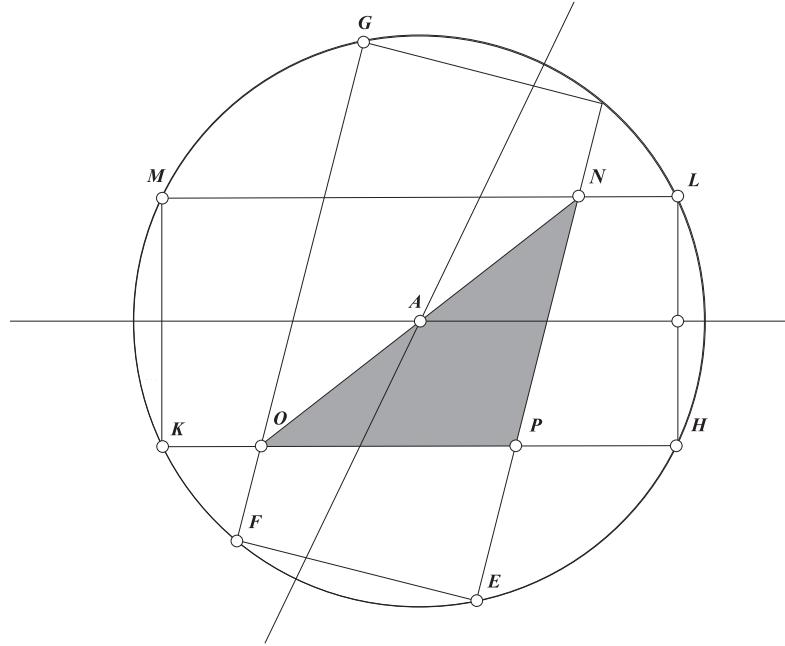


Рис. 4.

И остается треугольником до достижения углом α значения $(\pi/2 - \beta)$:

На рисунках 4 и 5 отрезок перегиба обозначен как ON , нам нужно найти и минимизировать функцию, которая выражает значение площади треугольника ONP .

Площадь треугольника легко найти: его высота из вершины N к стороне OP равна a , остается найти длину стороны OP : $OP = PN$, углы ONP и NOP равны α , а угол NPH — внешний для нашего треугольника, следовательно он равен 2α , откуда $OP = PN = a/(\sin 2\alpha)$, то есть площадь треугольника OPN равна $a^2/(2 \sin(2\alpha))$.

Таким образом, минимальная площадь пересечения в этом случае достигается при значении $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = \pi/4$, а само значение площади равно $\frac{a^2}{2}$.

Когда же угол α достигает значения $(\pi/2 - \beta)$, пересечение имеет вид:

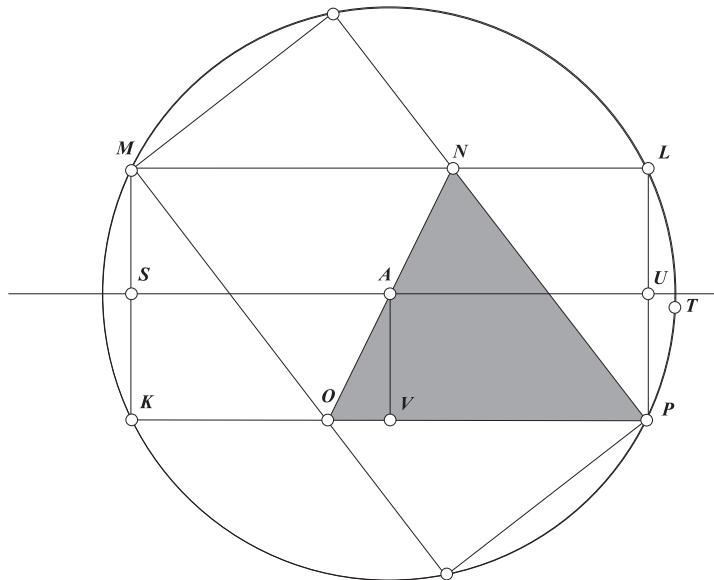


Рис. 5.

Случай 3.

Когда угол α меняется от $(\pi/2 - \beta)$ до $\pi/2$, мы опять получим в пересечении пятиугольник, который при достижении $\pi/2$ вырождается в половину нашего прямоугольника.

Заметим, что этот случай незначительно отличается от случая 1.

Действительно, отрезок AQ является осью симметрии для пятиугольника $NOPQR$, четырехугольники $AOPQ$ и $ANRQ$ — равны, и их площади тоже равны. Но теперь рассмотрим отрезок QT — если бы перегиб был по этому отрезку, то пересечением являлся бы пятиугольник $QTWOP$, и в нем AO — ось симметрии, а значит четырехугольники $AOPQ$ и $AOWT$ — равны, и их площади равны. Таким образом, площади обоих пятиугольников равны удвоенной площади четырехугольника $AOPQ$, и, следовательно, равны между собой.

Следовательно, если мы найдем необходимое значение угла α в случае 1, то в случае 3 искомым будет значение $\pi/2 - \alpha$

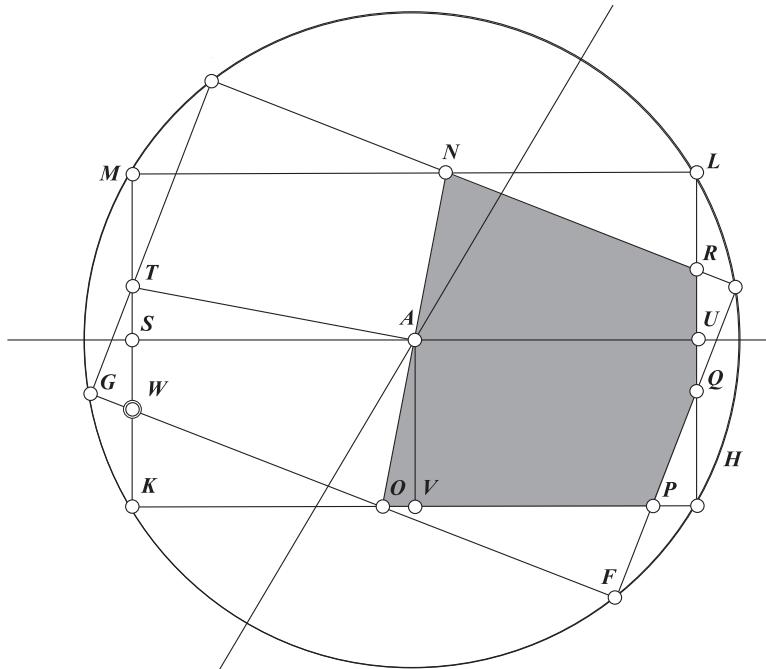


Рис. 6.

О геометрическом построении специального прямоугольника

Уравнение пятой степени $t^5 + 3t^4 + 4t^3 + t - 1 = 0$ неразрешимо в радикалах. В этой связи невозможно построить с помощью циркуля и линейки рассмотренный специальный прямоугольник. Однако, с помощью оригами можно решать уравнения пятой степени, хотя такое решение технически сложно. Вопрос о геометрическом конструировании специального прямоугольника с помощью оригами остается открытым. Возможно, кто-то из читателей сможет найти такое решение.

Гайченков Михаил Евгеньевич,
преподаватель математики, методист
Свято-Димитриевского училища сестер милосердия,
г. Москва.

E-mail: gaichenkov@yandex.ru

Задачи на любителя

C. B. Дворянинов, A. B. Мамхегов

Рассмотрены примеры, когда по недосмотру авторов задач в них оказываются описаны несуществующие объекты.

Тетенька, у всякого свой вкус:
один любит арбуз, другой свиной хрящик.

A.H. Островский, “Бесприданница”

Индивидуальные пристрастия могут быть и в математике. Кто-то любит решать геометрические задачи, а другой отдает предпочтение комбинаторным задачам или теории вероятностей. А есть любители фантастических задач. Такую задачу находим в книге Яна Стюарта “Концепции современной математики”. На с. 84 автор предлагает найти производную функции

$$f(x) = \ln(\ln(\sin x)).$$

“Если, не думая, следовать стандартным правилам дифференцирования, в ответе получится

$$\frac{1}{\log(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{ctg} x}{\log(\sin x)}.$$

На первый взгляд, все в порядке. Но если присмотреться к области определения данной функции, то с необходимостью приходим к неравенству $\sin x > 1$. Это означает, что область определения пуста, и, следовательно, никакой функции нет. Далее автор заключает:

Некоторым, может, и нравится жить в мире, где из несуществующих функций получаются существующие производные, но я не из их числа.”

Любителям же фантастических математических объектов дадим небольшую их подборку. С фантастикой в математике могут познакомиться уже шестиклассники:

2.114 В лесопитомнике $\frac{11}{20}$ всех деревьев занимают саженцы ели, а $\frac{8}{15}$ — саженцы сосны. Каких саженцев в лесопитомнике больше: ели или сосны? (**Математика. 6 класс. Учеб. для общеобразоват. организаций. М34 В 2 ч. Ч. 1 / [Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, Л.А. Александрова]. — М.: Просвещение, 2017. — 159 с.: ил. — ISBN 978-5-09-045293-9.**)

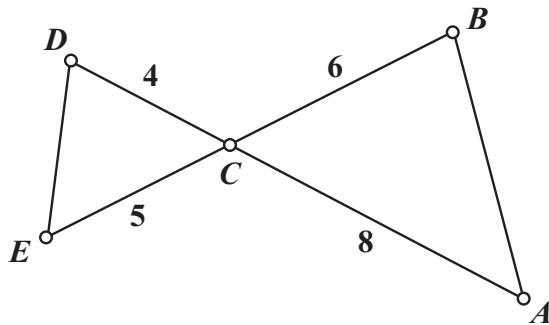
Разность $11/20 - 8/15$ положительна, поэтому саженцев ели больше. Согласны?

У школьников и учителей популярна книга **Балаян Э.Н.** Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ: 7–9 классы / Э.Н.Балаян. — Изд. 5-е, испрavl. и дополн. — Ростов н/Д: Феликс, 2013. — 223 с. — (Большая перемена).

Пользоваться книгой очень удобно. По условию задачи чертеж делать не надо, чертеж уже дан. На стр. 81 находим задачу 19:

19

$$S_{\Delta DEC} + S_{\Delta ABC} = 51$$



Найдите $S_{\Delta ABC}$

Решение. Треугольники DEC и ABC имеют равные углы при вершине C . Для решения задачи используем формулу площади треугольника на с. 15 этой книги

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$$

Соответственно, получаем

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin \gamma = 10 \sin \gamma,$$

Следовательно, $S_{\Delta DEC} : S_{\Delta ABC} = 5 : 12$. Разделив 51 в отношении 5 : 12, найдем, что

$$S_{\Delta DEC} = 3 \times 5 = 15, \quad S_{\Delta ABC} = 3 \times 12 = 36.$$

Задача решена. Или все же не решена? Может ли площадь треугольника со сторонами 4 и 5 быть равной 20?..

Согласно приведенному в книге чертежу получаем равенство:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin \gamma + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \gamma = 51,$$

или

$$10 \sin \gamma + 24 \sin \gamma = 51.$$

Отсюда

$$\sin \gamma = \frac{51}{34}, \quad \text{или} \quad \sin \gamma = 1,5,$$

что, конечно, невозможно.

Вспомним замечательную книгу Владимира Игоревича Арнольда “Что такое математика?” (МЦНМО, 2008). На с.11 читаем:

«Нелепость тестовых испытаний хорошо показывает опыт США, где десятилетиями роль проверки геометрических знаний давалась задаче: “Найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 дюймов и опущенной на нее высотой длиной в 6 дюймов”.

Окончившие российские школы испытуемые не могли дать искомое “решение” ($S = ah/2 = 30$ кв. дюймов), так как понимали, что таких треугольников нет: вершина прямого угла лежит на окружности, диаметр которой — гипотенуза. Поэтому высота не может быть длиннее пяти дюймов.

Но это не останавливает любителей тестов: они “доказали” слабое умственное развитие московских школьников их неспособностью ответить на тестовый вопрос: “*Что общего у ежса с молоком?*” (я тоже не решил, и испытующие сообщили мне ответ: “они оба свертываются”).

Да минет наших школьников чаша сия! Пусть они по-прежнему решают настоящие интересные задачи, как они и любят!»

Задача (фольклор). Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 4 и радиус вписанной окружности равен 1.

Решение 1. Для прямоугольного треугольника $a + b - c = 2r$. В нашем случае $a + b - 4 = 2$ и $a + b = 6$. Следовательно, периметр треугольника равен 10, полупериметр $p = 5$ и площадь равна $pr = 5 \times 1 = 5$.

Решение 2. Исходя из равенства $a + b = c + 2r$, получаем $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4cr + 4r^2$, или $2ab = 4cr + 4r^2$, или $\frac{ab}{2} = cr + r^2$.

Следовательно, площадь треугольника равна $4 \times 1 + 1 = 5$.

А теперь попробуйте нарисовать треугольник, о котором идет речь в задаче!

Замечание. В интернете по адресу

<https://binary2hex.ru/ploschad-treugolnika.html?id=2595>

находится калькулятор для вычисления площади треугольника по его различным элементам. Этот калькулятор для невозможного прямоугольника треугольника с гипотенузой 4 и радиусом вписанной окружности 1 также выдает значение площади 5.

Мораль очевидна: интернету доверяй, но проверяй.

Дворянинов Сергей Владимирович,
преподаватель выездных школ Малого
механико-математического факультета
и выездной школы “Дважды два”,
кандидат физико-математических наук, доцент.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Мамхегов Астемир Билостанович,
старший методист Центра непрерывного повышения
профессионального мастерства педагогических
работников Министерства просвещения
Кабардино-Балкарской Республики.

E-mail: mamkhegov@mail.ru

Неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем уравнений

A. Д. Полянин, И. К. Шингарева

Рассматриваются неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, сохраняющие вид некоторых алгебраических уравнений, а также преобразования, поникающие порядок этих уравнений. Показано, что отдельные алгебраические уравнения, имеющие “скрытые” симметрии, путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Установлено, что симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа, состоящие из симметрических и антисимметрических многочленов, можно преобразовать к более простым системам. Излагается метод решения неклассических симметрических систем двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных. Исследуются алгебраические уравнения, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащих свободные параметры, которые допускают решения в радикалах. Описаны иррациональные уравнения, которые путем введения двух новых переменных сводятся к симметрическим системам алгебраических уравнений.

1. Введение

Алгебраическим уравнением n -й степени называется уравнение с одним неизвестным x вида

$$P_n(x) = 0, \quad (1)$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n .

Решением (корнем) уравнения (1) называется число x_* , удовлетворяющее условию $P_n(x_*) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все его решения.

На протяжении столетий основной задачей алгебры считалась разработка методов решения алгебраических уравнений. С древних времен известны формулы для решения алгебраических уравнений первой и второй степени.

В XVI веке итальянские математики С. дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррари получили формулы для решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Исторические сведения об этом можно найти в [1–3] (см. также [4–11], где описаны различные способы представления решений указанных уравнений).

Замечание 1. Значительно раньше, в XI веке, О. Хайям, выдающийся поэт, философ и учёный, написал “Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы”, где изложил геометрический метод решения алгебраических уравнений третьей степени, имеющих положительные корни, с помощью конических сечений (см. [2, 12]). Позже, в XVII веке, теория решения кубических уравнений, основанная на конических сечениях, была развита Р. Декартом и другими учёными, которые не были знакомы с трудами О. Хайяма.

В период с XVI по начало XIX века для алгебраических уравнений степени выше четвертой неоднократно предпринимались попытки представления *решения в радикалах*, т. е. в виде выражения, содержащего только коэффициенты алгебраического уравнения и операции сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня целой степени. Однако эти попытки оказались безуспешными в общем случае.

В XIX веке П. Руффини, Н. Абель, Э. Галуа установили, что в общем случае решение алгебраических уравнений степени выше четвертой не может быть выражено в радикалах [2, 13] (см. также [4, 6, 14, 15]).

Важно отметить, что решение отдельных алгебраических уравнений пятой степени и выше можно выразить в радикалах. Некоторые такие уравнения можно найти в справочнике [15], где помимо решений в радикалах приводятся также решения, которые выражаются в терминах специальных функций (для алгебраических уравнений пятой степени см. также [14]).

Далее будут рассматриваться алгебраические уравнения и системы алгебраических уравнений, которые обладают теми или иными свойствами симметрии, что позволяет их значительно упрощать.

2. Простейшие симметрии и преобразования, поникающие порядок алгебраических уравнений

1°. Под *симметриями* математического уравнения понимаются преобразования, сохраняющие вид рассматриваемого уравнения. Редукция — способ преобразования математического уравнения к более простому или более удобному (с какой-либо точки зрения) для анализа и решения виду.

Рассмотрим алгебраическое уравнение четной степени $2n$:

$$P_{2n}(x) = 0, \quad (2)$$

которое может содержать младшие члены с нечетными степенями.

Утверждение 1. Пусть левая часть уравнения (2) для некоторого λ и любого x тождественно удовлетворяет соотношению $P_{2n}(x) = P_{2n}(\lambda - x)$. Тогда исходное уравнение с помощью подстановки $z = (x - \frac{1}{2}\lambda)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Утверждение 1 нетрудно доказать, используя соотношения

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \frac{1}{2}[P_{2n}(x) + P_{2n}(\lambda - x)] = \\ &= \frac{1}{2}[P_{2n}(\frac{1}{2}\lambda + y) + P_{2n}(\frac{1}{2}\lambda - y)], \quad y = x - \frac{1}{2}\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует, что уравнение (2), записанное в терминах новой переменной y , не меняется при замене y на $-y$. Поэтому его левую часть можно представить в виде линейной комбинации только четных степеней y . Далее делается замена $z = y^2$ (z — инвариант преобразования $\bar{y} = -y$), поникающая вдвое порядок уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(x + a)^{2n} + (x + b)^{2n} - c = 0, \quad (4)$$

которое является частным случаем уравнения (2).

Нетрудно проверить, что левая часть (4) не изменится, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение после возвведения в степень $2n$ выражений в его левой части и подстановки $z = [x + \frac{1}{2}(a + b)]^2$ сводится к уравнению степени n .

2°. Рассмотрим теперь алгебраическое уравнение нечетной степени $2n + 1$:

$$P_{2n+1}(x) = 0. \quad (5)$$

Утверждение 2. Пусть левая часть уравнения (5) для некоторого λ тождественно удовлетворяет соотношению $P_{2n+1}(x) = -P_{2n+1}(\lambda - x)$. Тогда исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda$ и его левая часть может быть представлена в виде

$$P_{2n+1}(x) = (x - \frac{1}{2}\lambda)Q_{2n}(x), \quad (6)$$

где многочлен четной степени $Q_{2n}(x)$ тождественно удовлетворяет соотношению $Q_{2n}(x) = Q_{2n}(\lambda - x)$. В силу утверждения 1 уравнение $Q_{2n}(x) = 0$ с помощью подстановки $z = (x - \frac{1}{2}\lambda)^2$ сводится к более простому алгебраическому уравнению степени n .

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(x + a)^{2n+1} + (x + b)^{2n+1} + c(2x + a + b) = 0, \quad (7)$$

которое является частным случаем уравнения (5).

Нетрудно проверить, что знак левой части (7) изменится на противоположный, если x заменить на $\lambda - x$, где $\lambda = -a - b$. Поэтому исходное уравнение имеет корень $x = \frac{1}{2}\lambda = -\frac{1}{2}(a + b)$ и его левая часть может быть представлена в виде (6).

3. Симметрические системы алгебраических уравнений

1°. Сначала дадим некоторые определения и кратко опишем изложенные в [16] наиболее важные факты, касающиеся симметрических систем алгебраических уравнений, которые нам понадобятся далее для изложения оригинальной части статьи.

Многочлен $P_s(x, y)$ от двух переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при перестановке аргументов: $P_s(x, y) = P_s(y, x)$. В терминах преобразований симметрический многочлен определяется как многочлен, сохраняющий вид при преобразовании $x = \bar{y}$, $y = \bar{x}$.

Простейшие симметрические многочлены

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy \quad (8)$$

называются *элементарными*. Эти многочлены являются простейшими алгебраическими инвариантами, которые не меняются при перестановке аргументов.

Обозначим

$$s_n = x^n + y^n, \quad (9)$$

где n — целое положительное число.

Справедлива рекуррентная формула

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2},$$

которая дает возможность последовательно выражать суммы степеней вида (9) через элементарные многочлены. Более удобной является формула Варинга [16]:

$$\frac{1}{k} s_k = \frac{1}{k} \sigma_1^k - \frac{(k-2)!}{1!(k-2)!} \sigma_1^{k-2} \sigma_2 + \frac{(k-3)!}{2!(k-4)!} \sigma_1^{k-4} \sigma_2^2 - \frac{(k-4)!}{3!(k-6)!} \sigma_1^{k-6} \sigma_2^3 + \dots,$$

которая позволяет в явном виде сразу получать искомое представление для суммы степеней.

Утверждение 3 (*фундаментальная теорема о симметрических многочленах*). *Любой симметрический многочлен от двух переменных может быть единственным образом выражен через элементарные многочлены (8).*

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [16].

Для решения систем двух алгебраических уравнений

$$P_s(x, y) = 0, \quad Q_s(x, y) = 0, \quad (10)$$

где P_s и Q_s — симметрические многочлены, полезно в качестве новых переменных использовать элементарные симметрические многочлены (8), что приводит к упрощению исходной системы. Система

(10) не меняется при перестановке аргументов $x \rightleftarrows y$. Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

Если σ_1 и σ_2 — решение преобразованной системы, то искомые величины x и y определяются из простой системы (8), решение которой сводится к квадратному уравнению

$$x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2 = 0. \quad (11)$$

Системы уравнений вида (10) и родственные алгебраические системы с тремя и более неизвестными, уравнения которых не меняются при любой перестановке аргументов, будем называть *классическими симметрическими системами алгебраических уравнений* (или кратко *симметрическими системами алгебраических уравнений*).

Для наглядности на рис. 1 изображена принципиальная схема решения симметрических систем алгебраических уравнений, основанная на использовании инвариантов (8) в качестве новых переменных.

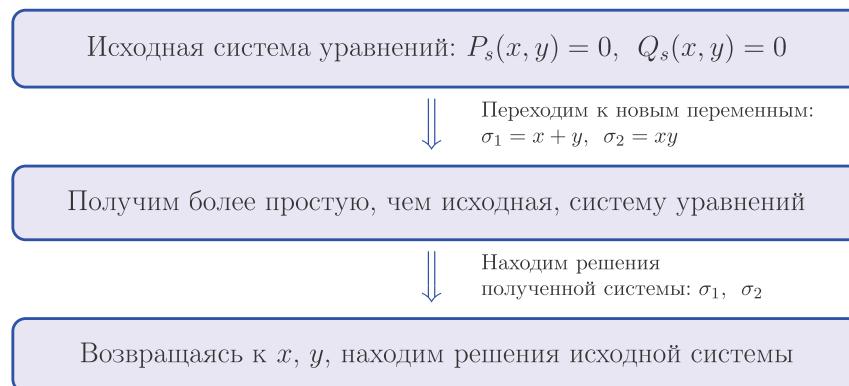


Рис. 1. Схема решения классических симметрических систем алгебраических уравнений.

2°. Отдельные алгебраические уравнения имеют “скрытые” (неочевидные, неявные) симметрии и путем введения новой дополнительной переменной могут сводиться к симметрическим системам алгебраических уравнений. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 3. Рассмотрим алгебраическое уравнение шестого порядка

$$(a - x^2)^3 = (b - x^3)^2, \quad (12)$$

которое содержит два свободных параметра a и b и в развернутом виде может быть записано в виде

$$2x^6 - 3ax^4 - 2bx^3 + 3a^2x^2 + b^2 - a^3 = 0. \quad (13)$$

Уравнение (12) и эквивалентное ему уравнение (13) очевидными симметриями не обладают. Покажем, что уравнение (12) сводится к алгебраической симметрической системе

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^3 + y^3 = b. \quad (14)$$

Действительно, прямое исключение из системы (14) дополнительной переменной y приводит к уравнению (12).

Система (14) решается путем перехода к новым к переменным (8). Учитывая соотношения

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$$

получим более простую систему

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a, \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = b.$$

Исключив σ_2 , приходим к кубическому уравнению

$$\sigma_1^3 - 3a\sigma_1 + 2b = 0. \quad (15)$$

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах (см., например, [4, 5]), таким образом конструктивно доказано, что все корни двухпараметрического уравнения шестой степени (12) можно выразить в радикалах.

Замечание 2. Симметрические системы алгебраических уравнений с тремя и более неизвестными, сохраняющие вид при перестановках переменных, и методы их решения рассматриваются в книге [16]. В этой книге также показано, как симметрические многочлены могут использоваться для доказательств неравенств и для решения некоторых иррациональных уравнений.

4. Симметрические системы алгебраических уравнений смешанного типа

1°. Многочлен $Q_a(x, y)$ от двух переменных называется *антисимметрическим*, если он меняет знак при перестановке аргументов, т. е. $Q_a(x, y) = -Q_a(y, x)$.

Два основных свойства антисимметрических многочленов [16]:

1. $Q_a(x, x) = 0,$
 2. $Q_a(x, y) = (x - y)R_s(x, y),$
- (16)

где $R_s(x, y)$ — симметрический многочлен.

2°. Рассмотрим симметрическую систему алгебраических уравнений смешанного типа

$$P_s(x, y) = 0, \quad Q_a(x, y) = 0, \quad (17)$$

в которой первый многочлен $P_s(x, y)$ является симметрическим, а второй многочлен $Q_a(x, y)$ — антисимметрическим. При перестановке аргументов $x \leftrightarrow y$ первое уравнение системы (17) не меняется, а левая часть второго уравнения меняет знак на противоположный (после умножения на -1 это уравнение переходит в исходное уравнение). Поэтому подобные системы обладают следующим свойством: если система (17) имеет решение $x = x_0, y = y_0$, то она имеет также решение $x = y_0, y = x_0$.

В силу второго свойства (16) систему (17) можно представить в виде

$$P_s(x, y) = 0, \quad (x - y)R_s(x, y) = 0. \quad (18)$$

Второму уравнению (18) можно удовлетворить, приравняв нулю любой из двух сомножителей в его левой части. Поэтому система (17) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P_s(x, x) &= 0, & y &= x; \\ P_s(x, y) &= 0, & R_s(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Вторая подсистема (19) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разделе 3.

Пример 4. Рассмотрим двухпараметрическую смешанную алгебраическую систему вида (17):

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^3 + by = y^3 + bx. \quad (20)$$

Перенеся в (20) все члены в левую часть уравнений, получим частный случай системы (17) при

$$P_s(x, y) = x^2 + y^2 - a, \quad Q_a(x, y) = x^3 - y^3 + b(y - x).$$

Второе уравнение (20) можно представить в виде произведения

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - b) = 0.$$

Поэтому исходная система (20) распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} 2x^2 - a &= 0, & y &= x; \\ x^2 + y^2 - a &= 0, & x^2 + xy + y^2 - b &= 0, \end{aligned}$$

решение которых элементарно.

Замечание 3. В некоторых случаях система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, состоящая из несимметрических уравнений, может быть сведена к симметрической системе вида (10) путем введения новых неизвестных с помощью преобразования масштабирования вида $x = \mu\bar{x}$, $y = \lambda\bar{y}$, где μ и λ — искомые параметры.

5. Неклассические симметрические системы алгебраических уравнений

Рассмотрим теперь систему алгебраических уравнений специального вида

$$P(x, y) + Q_s(x, y) = 0, \quad P(y, x) + Q_s(x, y) = 0, \quad (21)$$

где $P(x, y)$ — некоторый заданный многочлен от двух переменных, а $Q_s(x, y)$ — симметрический многочлен. При перестановке аргументов уравнения (21) меняются местами. Такие системы будем называть *неклассическими симметрическими системами алгебраических уравнений*.

Решение системы уравнений (21) можно свести к решению более простой симметрической системы и решению одного независимого уравнения. Для этого, сначала, почленно сложив оба уравнения, получим уравнение

$$P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) = 0, \quad (22)$$

которое не меняется при перестановке аргументов. Затем, вычитая из первого уравнения (21) второе уравнение, имеем

$$P(x, y) - P(y, x) = 0. \quad (23)$$

Легко проверить, что в левой части уравнения (23) стоит антисимметрический многочлен. В силу второго свойства (16) справедливо представление

$$P(x, y) - P(y, x) = (x - y)R_s(x, y), \quad (24)$$

где $R_s(x, y)$ — симметрический многочлен от двух переменных. Поэтому уравнение (23) можно записать в виде

$$(x - y)R_s(x, y) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, исходная система (21) эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений (22) и (25). Уравнению (25) можно удовлетворить, приравнив нулю любой из двух сомножителей в его левой части. В результате система (22) и (25) распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, & y &= x; \\ P(x, y) + P(y, x) + 2Q_s(x, y) &= 0, & R_s(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Первая подсистема (26) упрощается после подстановки $y = x$ из второго уравнения и может быть записана в виде

$$P(x, x) + Q_s(x, x) = 0, \quad y = x.$$

Вторая подсистема (26) является симметрической и может быть решена методом, описанным в разделе 3.

Для наглядности на рис. 2 изображена принципиальная схема решения неклассических симметрических систем алгебраических уравнений.

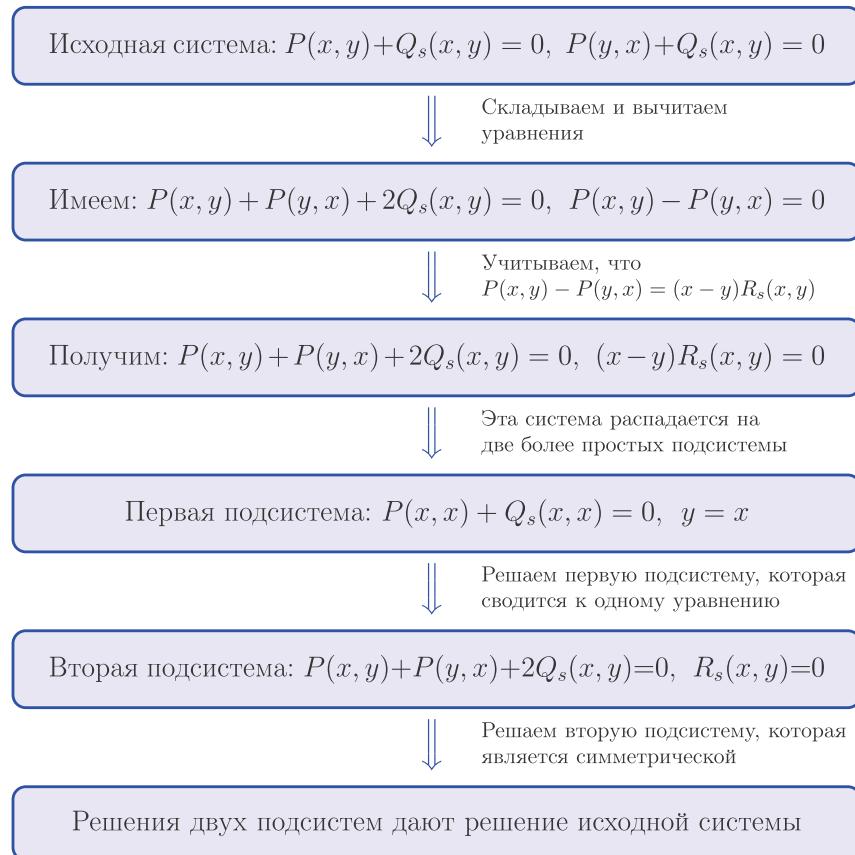


Рис. 2. Схема решения неклассических симметрических систем алгебраических уравнений.

Пример 5. Рассмотрим трехпараметрическую алгебраическую систему вида (21):

$$x = ax^2 + by^2 + c, \quad y = ay^2 + bx^2 + c, \quad (27)$$

где $a \neq \pm b$. Перенеся в (27) все члены в правую часть уравнений, получим частный случай системы (21) при

$$P(x, y) = ax^2 - x + by^2 + c, \quad Q_s(x, y) \equiv 0.$$

Складывая и вычитая почленно уравнения системы (27), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$(a+b)(x^2+y^2) - (x+y) + 2c = 0, \quad (x-y)[(a-b)(x+y) - 1] = 0,$$

которая распадается на две простые подсистемы

$$(a+b)x^2 - x + c = 0, \quad y = x; \quad (a+b)(x^2+y^2) - (x+y) = 0, \quad (a-b)(x+y) - 1 = 0.$$

Решение этих подсистем ввиду элементарности опускается.

6. Алгебраические уравнения, которые сводятся к неклассическим симметрическим системам

1°. К системам типа (21) при $Q_s(x, y) \equiv 0$ сводятся алгебраические уравнения вида

$$f(f(x)) = x, \quad (28)$$

в левой части которых стоит вторая итерация заданного многочлена $f(x)$. Корни более простого уравнения $f(x) = x$ являются также корнями исходного уравнения (28) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ — любая заданная непрерывная функция).

Введение новой переменной $y = f(x)$ позволяет из уравнения (28) получить эквивалентную алгебраическую систему

$$y = f(x), \quad x = f(y), \quad (29)$$

которая является частным случаем системы (21) (после переноса всех членов уравнений (29) в левую часть) и решается методом, описанным в разд. 5.

Пример 6. Рассмотрим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + a)^2 + a = x, \quad (30)$$

которое содержит свободный параметр a и может быть представлено в виде уравнения (28) при $f(x) = x^2 + a$.

Уравнение (30) путем введения новой переменной $y = x^2 + a$ сводится к неклассической симметрической системе вида (21):

$$y = x^2 + a, \quad x = y^2 + a. \quad (31)$$

Складывая и вычитая уравнения (31), как описано в разд. 5, после элементарных преобразований и разложения редуцированного уравнения на множители имеем

$$x^2 + y^2 - x - y + 2a = 0, \quad (y - x)(x + y + 1) = 0. \quad (32)$$

Приравняв далее нулю сомножители в левой части второго уравнения (32), в итоге получим два независимых квадратных уравнения

$$x^2 - x + a = 0, \quad y = x; \quad x^2 + x + a + 1 = 0, \quad y = -x - 1,$$

которые определяют четыре корня x исходного уравнения (30).

Пример 7. Рассмотрим более сложное алгебраическое уравнение девятой степени вида (28) при $f(x) = x^3 + a$:

$$(x^3 + a)^3 + a = x. \quad (33)$$

Это уравнение содержит свободный параметр a и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^3 + a, \quad x = y^3 + a. \quad (34)$$

Складывая и вычитая уравнения (34), как описано в разд. 5, после элементарных преобразований приходим к эквивалентной системе уравнений

$$x^3 + y^3 - x - y + 2a = 0, \quad (y - x)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0,$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned} x^3 - x + a &= 0, & y &= x; \\ x^3 + y^3 - x - y + 2a &= 0, & x^2 + xy + y^2 + 1 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Решения первой подсистемы (35) определяются корнями кубического уравнения, которое позволяет найти три корня исходного уравнения (33). Для решения второй системы (35), которая является симметрической и определяет оставшиеся шесть корней уравнения (33), введем новые переменные по формулам (8). В результате получим более простую систему

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 + 2a = 0, \quad \sigma_1^2 - \sigma_2 + 1 = 0. \quad (36)$$

Исключив отсюда σ_2 , приходим к кубическому уравнению для σ_1 :

$$\sigma_1^3 + 2\sigma_1 - a = 0. \quad (37)$$

Корни этого уравнения и равенство $\sigma_2 = \sigma_1^2 + 1$, которое следует из второго уравнения (36), дают три пары действительных или комплексных чисел σ_{1k}, σ_{2k} ($k = 1, 2, 3$). Подставив эти числа в квадратное уравнение (11), можно найти шесть корней исходного уравнения (33).

Поскольку корни любого кубического уравнения можно выразить в радикалах, таким образом конструктивно доказано, что все корни однопараметрического уравнения девятой степени (33) можно выразить в радикалах.

Замечание 4. Если нас интересуют только действительные корни алгебраического уравнения (33), то вторую систему (35) надо отбросить, поскольку в этом случае имеет место неравенство $x^2 + xy + y^2 + 1 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 1 > 0$.

2°. Покажем, что алгебраические уравнения вида

$$f(af(x) + x + ab) + f(x) + 2b = 0, \quad (38)$$

где $f(x)$ — заданный многочлен, a и b — свободные параметры, обладают скрытой симметрией и сводятся к системам типа (21) при $Q_s(x, y) \equiv 0$. Отметим, что корни более простого уравнения $f(x) = -b$ являются также корнями исходного уравнения (38) (это свойство имеет место и для более сложных трансцендентных уравнений, когда $f(x)$ — любая заданная непрерывная функция).

Положим

$$y = af(x) + x + ab. \quad (39)$$

В результате уравнение (38) принимает вид

$$f(y) + f(x) + 2b = 0. \quad (40)$$

Исключив из (39) и (40) функцию $f(x)$, получим соотношение

$$x = af(y) + y + ab. \quad (41)$$

Уравнения (39) и (41) образуют систему вида (21):

$$y = af(x) + x + ab, \quad x = af(y) + y + ab. \quad (42)$$

Пример 8. Рассмотрим однопараметрическое алгебраическое уравнение четвертой степени

$$(x^2 + x + b)^2 + x^2 + 2b = 0, \quad (43)$$

которое является частным случаем уравнения (38) (при $f(x) = x^2$, $a = 1$) и сводится к неклассической симметрической системе

$$y = x^2 + x + b, \quad x = y^2 + y + b. \quad (44)$$

Складывая и вычитая уравнения (44), получим эквивалентную систему уравнений, которую можно представить в виде

$$x^2 + y^2 + 2b = 0, \quad (y - x)(x + y + 2) = 0. \quad (45)$$

Приравняв нулю сомножители в левой части второго уравнения, после элементарных преобразований в итоге для переменной x приходим к двум независимым квадратным уравнениям

$$\begin{aligned}x^2 + b = 0, \quad y = x; \\x^2 + 2x + b + 2 = 0, \quad y = -x - 2.\end{aligned}$$

Эти уравнения имеют корни

$$x_1 = -\sqrt{-b}, \quad x_2 = \sqrt{-b}, \quad x_3 = -1 - \sqrt{-b - 1}, \quad x_4 = -1 + \sqrt{-b - 1},$$

которые и определяют искомые решения исходного уравнения (43).

Пример 9. Можно показать, что однопараметрическое алгебраическое уравнение девятой степени

$$(x^3 + x + b)^3 + x^3 + 2b = 0,$$

которое является частным случаем уравнения (38) (при $f(x) = x^3$, $a = 1$), разрешимо в радикалах.

Замечание 5. Более сложную алгебраическую систему, которая получается из (21) формальной заменой симметрического многочлена $Q_s(x, y)$ на произвольный многочлен $Q(x, y)$, можно упростить, вычитая одно уравнение системы из другого. В результате приходим к уравнению вида (25), которое далее следует рассмотреть вместе с одним из уравнений исходной системы.

7. Алгебраические системы специального вида, которые распадаются на более простые подсистемы

Важным свойством системы (21) является то, что ее уравнения совпадают при $y = x$. Рассмотрим более общую алгебраическую систему двух уравнений

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad (46)$$

где многочлены от двух переменных $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ для некоторых постоянных λ и μ удовлетворяют условию

$$P(x, \lambda x) \equiv \mu Q(x, \lambda x). \quad (47)$$

Из (47) следует, что имеет место представление

$$P(x, y) - \mu Q(x, y) = (y - \lambda x)R(x, y), \quad (48)$$

где $R(x, y)$ — некоторый многочлен.

Вместо системы (46) рассмотрим эквивалентную систему, оставив первое уравнение и заменив второе уравнение на линейную комбинацию уравнений $P(x, y) - \mu Q(x, y) = 0$. Учитывая представление (48), получим систему

$$P(x, y) = 0, \quad (y - \lambda x)R(x, y) = 0, \quad (49)$$

которая распадается на две более простые подсистемы

$$\begin{aligned}P(x, y) = 0, \quad y = \lambda x; \\P(x, y) = 0, \quad R(x, y) = 0.\end{aligned} \quad (50)$$

Для наглядности на рис. 3 изображена схема решения системы алгебраических уравнений (46) при условии (47).



Рис. 3. Схема решения системы алгебраических уравнений (46) при условии (47).

Пример 10. Рассмотрим алгебраическую систему

$$ax^2 + by^2 + x + c = 0, \quad (a + b)x^2 - y + c = 0, \quad (51)$$

являющуюся частным случаем системы вида (46), которая удовлетворяет условию (47) при $\lambda = -1$ и $\mu = 1$.

Оставив первое уравнение и заменив второе уравнение на разность уравнений, получим эквивалентную систему, которую можно представить в виде

$$ax^2 + by^2 + x + c = 0, \quad (x + y)[b(y - x) + 1] = 0.$$

Эта система распадается на две простые подсистемы

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + x + c &= 0, & y &= -x; \\ ax^2 + by^2 + x + c &= 0, & b(y - x) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

каждая из которых после исключения y сводится к квадратному уравнению для x .

8. Иррациональные уравнения, которые сводятся к симметрическим системам

Иррациональные уравнения вида

$$P_s(\sqrt[n]{a-x}, \sqrt[n]{b+x}) = 0, \quad (52)$$

где $P_s(y, z)$ — симметрический многочлен, n — натуральное число, a и b — свободные параметры, путем введения новых переменных

$$y = \sqrt[n]{a-x}, \quad z = \sqrt[n]{b+x} \quad (53)$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$P_s(y, z) = 0, \quad y^n + z^n = a + b.$$

Замечание 6. Если n — четное число, то перед любым корнем в (52)–(53) может стоять также знак минус. Для иллюстрации сказанного рассмотрим конкретный пример.

Пример 11. Трехпараметрические иррациональные уравнения вида

$$\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{b+x} = c$$

путем введение новых переменных

$$y = \sqrt[4]{a-x}, \quad z = \pm \sqrt[4]{b+x}$$

сводятся к симметрической системе алгебраических уравнений

$$y + z = c, \quad y^4 + z^4 = a + b,$$

которая решается стандартным способом, описанным в разделе 3. .

9. Краткие выводы

В данной статье рассматриваются неклассические симметрии и редукции алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Описаны преобразования, понижающие порядок некоторых алгебраических уравнений. Показано, что путем введения новой дополнительной переменной, некоторые алгебраические уравнения, имеющие “скрытые” симметрии, можно преобразовать к классическим симметрическим системам алгебраических уравнений. Приведены примеры нетривиальных алгебраических уравнений шестой и девятой степени, содержащие один или несколько свободных параметров, которые можно разрешить в радикалах. Показано, что неклассические симметрические системы двух алгебраических уравнений, которые меняются местами при перестановке неизвестных, можно свести к более простым симметрическим системам и одному независимому уравнению. Установлено, что некоторые уравнения специального вида, содержащие вторую итерацию заданного многочлена, можно преобразовать к неклассическим симметрическим системам алгебраических уравнений.

Литература

- [1] Turnbull H.W. Theory of Equations. - Edinburgh: Oliver and Boyd, 1947.
- [2] Van der Waerden B.L. A History of Algebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. - Berlin: Springer, 1985.

- [3] Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках, 3-е изд. - М: МЦНМО, 2001.
- [4] Бронштейн И.Н., Семенджиев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - М.: Наука, 1980.
- [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1984.
- [6] Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists. - Boca Raton–London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
- [7] Yacoub M.D., Fraidenraich G. A solution to the quartic equation // The Mathematical Gazette. - 2012. - Vol. 96. - No. 536. - pp. 271-275.
- [8] Tehrani F.T., Leversha G. A simple approach to solving cubic equations // The Mathematical Gazette. - 2016. - Vol. 100. - No. 548. - pp. 225-232.
- [9] Cháves-Pichardo M., Martínez-Crus M.A., Trejo-Martínez A., Vega-Crus A.B., Arenas-Resendis T. On the practicality of the analytical solutions for all third- and fourth-degree algebraic equations with real coefficients // Mathematics. - 2023. - Vol. 11. - No. 6. - 1447.
- [10] Белов А.Я. Об одном способе решать уравнения четвертой степени // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 24-26.
- [11] Собиров Б. Способ решения уравнений 4-й степени с помощью симметрии // Математическое образование. - 2023. - № 3(107). - С. 35-37.
- [12] Siadat V.M., Tholen A. Omar Khayyam: Geometric Algebra and Cubic Equations // Math Horizons. - 2021. - Vol. 28. - No. 1. - P. 12-15.
- [13] Struik D.J. (ed.) A Source Book in Mathematics: 1200–1800. - Princeton: Princeton University Press, 1986.
- [14] King R.B. Beyond the Quartic Equation. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [15] Polyanin A.D. Handbook of Exact Solutions to Mathematical Equations. - Boca Raton: CRC Press, 2024.
- [16] Болтянский В.Г., Виленкин Н.Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. - М.: Наука, 2002.

*Полянин Андрей Дмитриевич
главный научный сотрудник
Института проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
доктор физ.-мат. наук, профессор.*

E-mail: polyanin@ipmnet.ru

*Шингарева Инна Константиновна
Department of Mathematics, University of Sonora,
Sonora, Mexico,
кандидат физ.-мат. наук, профессор.*

E-mail: inna.shingareva@unison.mx

Обобщение одной задачи Турнира Городов. Ворона и ягоды

A. H. Семёнов

На 45-м Турнире Городов была предложена интересная задача, для некоторого частного случая. В настоящей статье приводится решение задачи в общем случае.

Задача Турнира Городов

У n фермеров есть клетчатое поле размером $n \times n$, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на n участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы участков отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечают, только если у него пропало хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Сколько ягод может утащить ворона, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Для 8-9 классов ставился вопрос, может ли ворона утащить 9 ягод при $n = 8$, а для 10-11 — 8 ягод при $n = 9$ (45-й Турнир Городов, базовый вариант, 15 октября 2023 г., автор — Татьяна Казицына). Забегая вперёд, скажем, что это возможно (попробуйте решить самостоятельно). Кроме того, больше ягод она утащить не сможет. Нас будет интересовать наибольшее число ягод, которое может утащить ворона для каждого натурального n .

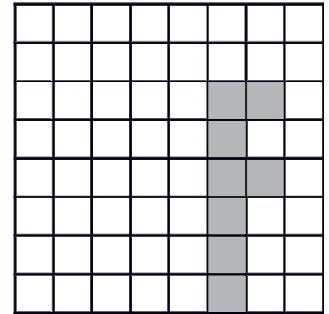


«Сладкий» вариант задачи. Правильно разложены ягоды для $n = 9$, и ворона размещена в центре.

Решение

Для каждой пары ягод надо знать, может их утащить ворона или нет. Эту пару по-разному можно поместить в многоугольник из n клеток. Главная проблема — выяснить, какие многоугольники могут быть участками некоторого разбиения.

Ясно, что многоугольник площади n , нарушающий связность поля (то есть его удаление делает поле несвязным по сторонам клеток), может не быть участком. Оказывается, бывают многоугольники площади n , не нарушающие связность, но не являющиеся участком ни при каком разбиении (см. рис.). Поэтому надо соблюдать аккуратность при выборе многоугольника, объединяющего выбираемые ягоды. Для этих целей оказалась удобной змейка, см. определение ниже. Но сначала назовём *диаграммой* объединение нескольких соседних столбцов, стоящих на одном основании, высоты которых меньше n и не убывают слева направо.



Лемма 1 (вспомогательная). Диаграмму можно разбить на многоугольники площади n и один кусок меньшей площади, возможно, нулевой. Если кусок есть, то можно сделать так, чтобы он содержал левую нижнюю клетку, а можно так, чтобы он совпадал с верхом правого столбца или содержал правый столбец.

Доказательство. Будем слева направо выделять в диаграмме фигуры площади n , объединяя соседние столбцы. Если какой-то столбец придётся разбивать, то к левой фигуре отнесём нужное количество нижних клеток, а остальные клетки столбца — к правой. В конце может остаться фигура (кусок) меньшей площади.

Все нижние клетки диаграммы, попавшие в одну фигуру, лежат в одной компоненте связности фигуры, верхние — тоже, в силу неубывания. Поэтому, если какая-то фигура несвязна, то она располагается в двух соседних разделённых столбцах, значит, её площадь меньше n , но она не является куском, чего не может быть.

Дословно то же можно проделать справа налево. Тогда кусок, если есть, содержит слева нижнюю клетку, а в первом способе — справа то, что нужно. Лемма доказана.

Определение. Многоугольник назовём *змейкой*, если у него есть две вершины A и B и два направления, что оба пути от A до B по его границе идут только в этих направлениях.

Например, клетчатый прямоугольник — это змейка. Для любой пары клеток любой кратчайший путь между ними по клеткам также образует змейку.

Лемма 2. Пусть змейка не нарушает связность поля и разбита на многоугольники площади n . Тогда эти многоугольники являются участками некоторого разбиения.

Доказательство. Можно считать, что змейка движется на северо-восток. Под ней и над ней — диаграммы (вторая — перевёрнутая). Если хоть одной из них нет, то лемма 1 тут же завершает доказательство. Пусть есть обе. В силу связности можно считать, что снизу и слева от змейки есть свободные строки и столбец L . Разбиваем диаграммы на участки. Если кусков не осталось, то всё доказано. Если остались, то сделаем их соседними с L . Сумма их площадей равна n . Поделим L на два куска в нужном отношении. Тогда очевидно, что оба нижних куска соединяются в участок, и ясно, что оба верхних — тоже. Оставшиеся свободными столбцы сами являются участками. Лемма доказана.

Лемма 3 (о продолжении). Змейка площади не больше n , не нарушающая связность поля, содержится в участке некоторого разбиения.

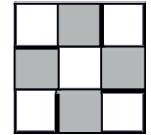
Доказательство. Каждая змейка, отличная от самого поля, имеет невыпуклый угол либо является прямоугольником с вершиной внутри стороны поля либо прямоугольником, не примыкающим к границе поля.

В первых двух случаях приклеим к змейке клетку при указанной вершине, в последнем — при любой. Получим новую змейку. Она не нарушит связность, если старая не нарушала. Действуя так, сделаем площадь змейки равной n . Эта змейка содержит исходную и является участком по предыдущей лемме. Лемма доказана.

Сейчас мы готовы рассмотреть случай малых n . Для каждого натурального n мы хотим найти наибольшее число $f(n)$ ягод, которые ворона может утащить. Число способов это сделать нас не интересует. Считаем, что *ягода* — точка внутри поля, выбранная вороной, то есть других ягод нет.

Очевидно, $f(1) = 1$. При $2 \leq n \leq 3$ ягоды в узлах никто не заметит, так как окружающий их квадрат 2×2 не может лежать в участке. Каждую ягоду внутри клетки сдвинем на её ребро (считаем, что на заборе рёбер нет). Если новую ягоду заметят, то и старую — тоже. На каждом ребре не более одной ягоды, поскольку по лемме 3 всякое домино — двухклеточный многоугольник — лежит в каком-то участке. Значит, $f(2) = 5$ — одна ягода в узле и по одной на рёбрах.

При $n = 3$ рассмотрим тёмную клетку на рисунке. Если на её рёбрах есть 2 ягоды, то трёхклеточный многоугольник, содержащий эти ягоды, является участком по лемме 3. Поэтому в каждой тёмной клетке не более одного ребра с ягодой, да ещё 4 в узлах, всего не более 8 ягод. Пример — ягоды на жирных рёбрах рисунка. Он подходит, потому что два непересекающихся домино не могут лежать в одном участке. Следовательно, $f(3) = 8$.



При $n \geq 4$ каждую не узловую ягоду сдвинем в соседний узел, считая, что на заборе узлов нет. Если новую ягоду заметят, то и старую — тоже. При этом две ягоды попасть в один узел не могут, иначе квадрат 2×2 , их содержащий, лежал бы в некотором участке по лемме 3. Далее считаем, что **все ягоды лежат в узлах**.

Площадь объединения различных квадратов 2×2 не менее 6. Поэтому при $4 \leq n \leq 5$ оно не может содержаться в участке, то есть можно выбрать все узлы. Отсюда $f(4) = 9$ и $f(5) = 16$.

Если при $n = 6$ объединение лежит в каком-то участке, то оно — прямоугольник 2×3 , а любой такой является участком по лемме 3. Значит, ягоды не должны быть в соседних узлах, а других ограничений нет. Все 5×5 узлов, кроме любого углового, разбиваются на пары соседних, поэтому ягод не больше 13. Пример — все узлы того же цвета при шахматной раскраске, что и угловые. Следовательно, $f(6) = 13$.

Конечно, можно так продолжать, но лучше сразу в общем случае выяснить, какие могут быть расположения пар ягод, чтобы больше не отвлекаться на квадраты 2×2 . Пару ягод заметят, если квадраты 2×2 с центрами в них лежат в одном участке какого-то разбиения. Ворону поймают, если хотя бы одну пару заметят, иначе — нет. Основной характеристикой пары является расстояние между ягодами. Естественно считать его «квартальным», равным сумме сдвигов a и b по горизонтали и вертикали. Говорим, что *расстояние заметно (незаметно)*, если любую пару на таком расстоянии заметят (не заметят). Надо понимать, что расстояние может быть ни тем и ни другим, то есть зависеть от положения. Тогда будем уточнять понятие расстояния так, чтобы не зависело, при этом появятся три вида расстояний, в одном даже придётся говорить о *расстоянии* (a, b) , указывая величины сдвигов. Приступим к анализу. Простейший случай — *прямые расстояния* — это между ягодами на одной горизонтали или вертикали. Во всех следующих леммах считаем, что $n \geq 7$.

Лемма 4. *Прямые расстояния, не меньшие $n - 5$, незаметны, а меньшие — заметны.*

Доказательство. Пусть пара ягод находится на одной горизонтали на расстоянии d . Есть три случая:

- 1) существует прямоугольник площади не больше n , содержащий квадраты 2×2 с центрами в ягодах;
- 2) нет такого прямоугольника, но есть такой многоугольник;

3) даже многоугольника такого нет.

В первом случае пару заметят в силу леммы 3, а в третьем — нет. Так как $d = 1$ попадает в первый случай, то в третьем случае квадраты не пересекаются. Поскольку для их связи требуется минимум $d - 2$ клеток, третий случай характеризуется условием $8 + d - 2 > n$, что равносильно $d \geq n - 5$. Осталось показать, что во втором случае пару заметят.

Площадь прямоугольника P размера $2 \times (d + 2)$, содержащего квадраты, больше n . Площадь многоугольника M в нём, состоящего из квадратов и первой строки, не больше n . Можно считать, что ниже P есть ещё три строки — третья, четвёртая и пятая. Продолжим P вниз до прямоугольника Q размера $4 \times (d + 2)$. Его площадь больше $2n$. Выкинем из Q лишние клетки слева направо, начиная с четвёртой строки, а если этого не хватит, то ещё и из третьей. Получим змейку Z площади $2n$, не нарушающую связность поля. Добавим к M клетки второй строки слева направо до площади n . Оставшаяся в Z часть связна, так как помимо P в Z есть $2n - 2(d + 2) = 2(n - d) - 4 \geq 8$ клеток, а для связности хватило бы и 3. Тогда M — участок по лемме 2, что и требовалось. Лемма доказана.

Если квадрат 2×2 с центром в ягоде прилегает к стороне поля, а другой такой квадрат — к соседней стороне поля, то непрямое расстояние между этими ягодами назовём *угловым*, иначе — *обычным*.

Лемма 5. *Непрямые расстояния (a, b) , где считаем $a \leq b$, удовлетворяющие одной из четырёх систем условий ниже, незаметны, остальные — заметны.*

- 1) $a + b \geq n - 4$;
- 2) угловое, $a + b = n - 5$, $(a - 1)(b - 1) \leq 5$;
- 3) угловое, $a + b = n - 6$, $0 < a(b - 1) \leq 7$;
- 4) угловое, $a = b = 2$, $n = 11$.

Доказательство. Пусть пара ягод находится на непрямом расстоянии (a, b) . Рассмотрим все случаи их расположения.

1) Если пару заметили, то квадраты 2×2 (обозначены буквами на рисунке для $a = 3$, $b = 4$) с центрами в ягодах попали в один участок M . Тогда есть путь по клеткам M , соединяющий эти квадраты. Выберем тот путь L , что содержит лишь по клетке от каждого квадрата. В этом пути не больше $n - 6$ клеток. В нём хотя бы $a - 1$ ход по вертикали и $b - 1$ ход по горизонтали. Поэтому в L не меньше $a + b - 1$ клеток. Следовательно, $a + b \leq n - 5$. Доказали, что все расстояния $a + b \geq n - 4$ незаметны.

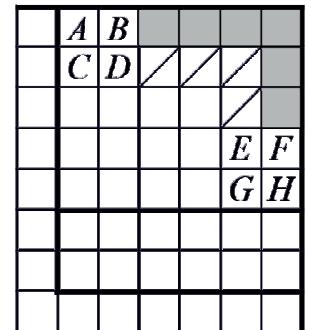
Пусть $a + b \leq n - 5$. Любой кратчайший путь DE состоит из $a + b - 1$ клеток. Добавляя к этому пути остальные 6 клеток квадратов, получим содержащую квадраты змейку Z площади не больше n . Поскольку эта змейка не может касаться противоположных сторон поля, то расстояние (a, b) обычное или угловое. Если оно обычное, то по лемме 3 пару заметят. Осталось рассмотреть угловые расстояния $a + b \leq n - 5$, например, в правом верхнем углу, как на рисунке.

2) Пусть $a + b = n - 5$. Если пару заметили, то M имеет вид Z . Многоугольник M отсекает от поля некоторую фигуру U в углу. Её площадь кратна n , не меньше $a + b - 1$ (тёмная) и не больше ab . Следовательно, $n \leq ab$.

Обратно, при $n \leq ab$ можно сделать площадь U равной n , перекидывая по клеточке в Z и меняя площадь U на 1. Тогда пару заметят по лемме 2.

Значит, при $n \leq ab$ расстояние заметно, а при $a + b + 5 = n \geq ab + 1$ — незаметно. Это как раз то, что требовалось.

3) Пусть $a + b = n - 6$. Если пару заметили, то площадь M на 1 больше площади Z . Поэтому L — это путь DE (тогда в M есть ещё клетка), BE , DF , CE или DG . Значит, U может быть пустым, но только при $b = 1$. Наибольшая площадь U достигается при огораживании путём DG , а не CE , и равна $ab + b - 2$ при $b \geq 2$. Следовательно, $b = 1$ или $n \leq ab + b - 2$.



Обратно, при $b = 1$ угловую клетку добавим к объединению квадратов, полученная змейка будет участком по лемме 3. При $b \geq 2$ и $n \leq ab + b - 2$ отгородим путём DG тёмную U площади меньше n . Изменяя путь DG по клеточке, будем увеличивать площадь U на 1 (при перекидывании E — не изменим). Когда-то получим U площади n . Если при этом путь DG проходит через E , то добавим к огораживающему многоугольнику клетку ниже H . Тогда по лемме 2 пару заметят.

Значит, при $b \geq 2$, $a + b + 6 = n \geq ab + b - 1$, что равносильно $0 < a(b - 1) \leq 7$, расстояние незаметно, а другие — заметны.

4) Пусть $a + b \leq n - 7$. Ясно, что указанный в условии случай незаметен. В каждом из остальных случаев, когда квадраты имеют общие точки, то есть при $b \leq 2$, к объединению квадратов можно добавить огороженные им клетки. Такая змейка вкладывается в некоторый участок по лемме 3. Покажем, что и при $b \geq 3$ пару заметят.

Добавим к квадратам тёмные клетки, получим многоугольник P площади не больше n . Вместе с зачёркнутыми клетками P образует змейку Q . Если площадь Q не больше n , то Q входит в некоторый участок по лемме 3. Иначе достроим Q до змейки площади $2n$, заполняя жирный прямоугольник $(a+2) \times (b+2)$ справа налево, сначала верхнюю строку, потом следующую и так далее. Если и этого не хватило, то дальше будем строить змейку Q , направленную по-другому. Вспомним, что снизу есть хотя бы три строки, и будем заполнять жирный прямоугольник (на рисунке он внизу) размером $2 \times (b+2)$, уже слева направо, чтобы добавленные к Q клетки образовали многоугольник, назовём его R . Ясно, что этого хватит, Q не нарушает связность, площадь R меньше n . Для использования леммы 2 осталось подцепить к R зачёркнутых клеток до площади n . При $b \geq 3$ это возможно. Лемма доказана.

Сейчас все виды расстояний уточнены. Незаметные расстояния — это все, не меньшие $n - 4$, ещё прямые, равные $n - 5$, и некоторые угловые, равные $n - 5$ или $n - 6$. Те из них, которые потребуются, мы будем проверять леммой 5. Все расстояния, не большие $n - 7$, кроме $(2, 2)$ при $n = 11$, заметны. Надо найти наибольшее число ягод в узлах на незаметных расстояниях друг от друга. Значит, наша задача полностью переведена на язык расстояний, мы больше не будем говорить о клетках, а будем рассматривать сетку из $(n - 1) \times (n - 1)$ узлов. Угловые расстояния возникают на её *контуре*. Узлы, не лежащие на нём, назовём *внутренними*.

Докажем, что $f(7) = 11$.

Доказательство. На рисунке 1 а) узлы разбиты на 11 групп, в каждой все расстояния — обычные 2 и прямые 1 — заметны, значит, не больше одной ягоды. На том же рисунке чёрным отмечены 11 ягод. Расстояния между ними — угловые 2 (лемма 5), прямые 2, а остальные не меньше 3 — незаметны. Утверждение доказано.

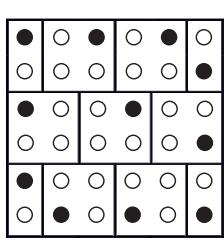


Рис. 1 а).

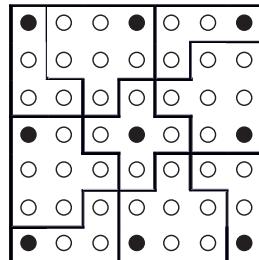


Рис. 1 б).

Докажем, что $f(8) = 9$.

Доказательство. На рисунке 1 б) узлы разбиты на 9 групп, в каждой все расстояния — обычные не больше 3 и прямые не больше 2 — заметны, значит, в каждой не больше одной ягоды. На том же рисунке чёрным отмечены 9 ягод. Расстояния между ними — прямые 3, а остальные не меньше 4 — незаметны. Утверждение доказано.

Для упрощения дальнейших переборов докажем ещё одну лемму, последнюю.

Лемма 6 (о сдвиге). *Можно считать, что все внутренние ягоды лежат в одной из фигур, изображённых на рисунке 2. Фигура состоит из соседних узлов и симметрична относительно центра поля, выбор фигуры определяется чётностью n . Размер фигуры не зависит от n . При $n \geq 9$ в ней не больше одной ягоды.*

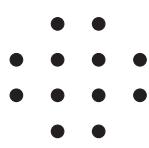


Рис. 2 а).

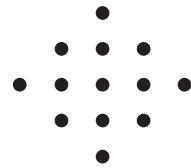


Рис. 2 б).

Доказательство. Пусть ягоды расставлены так, что ворона не ловится, то есть все расстояния незаметны, и расстояние от какой-то внутренней ягоды $(0,0)$ до правого верхнего узла (a,b) не больше $n - 5$. Сдвинем ягоду в $(1,1)$ и покажем, что расстояние от неё до каждой ягоды (x,y) останется незаметным. Для этого рассмотрим все случаи с точностью до симметрии.

- 1) $x > 0 < y$. Расстояние было $x + y \leq a + b \leq n - 5$, но оно обычное, такого не могло быть.
- 2) $x > 0 = y$. Расстояние было $x \leq a \leq n - 6$, но оно прямое, такого не могло быть.
- 3) $x > 0 > y$. Расстояние было $x + |y| \geq n - 4$, стало $x - 1 + |y| + 1 \geq n - 4$ — незаметное.
- 4) $x \leq 0 \geq y$. Расстояние было $|x| + |y| \geq n - 5$, стало $|x| + 1 + |y| + 1 \geq n - 3$ — незаметное.

Следовательно, и при такой расстановке ворону не поймают. Двигая так ягоду, вытащим её на контур. Поэтому можно считать, что все внутренние ягоды находятся на расстоянии не меньше $n - 4$ от каждого угла сетки. Это значит, что внутренняя ягода лежит на одной из пяти центральных диагоналей одного направления и на одной из пяти — другого. Множество пересечений этих диагоналей бывает двух видов, как на рисунках в условии, в зависимости от чётности n .

При нечётных n получается левая фигура, в ней обычные расстояния не больше 4, а прямые — не больше 3. При $n \geq 9$ они заметны. При чётных n получается правая фигура, в ней все расстояния не больше 4. При $n \geq 10$ они заметны. Значит, при $n \geq 9$ в фигуре не больше одной ягоды. Лемма доказана.

Далее так и будем считать.

Докажем, что $f(9) = 8$.

Доказательство. Угловое расстояние 3 незаметно (лемма 5), а меньшие — заметны. Длина контура 28. Ягоды на нём разбивают его на дуги. Угловых дуг не больше четырёх, а остальные — прямые, они не меньше 4. Значит, ягод на контуре не больше 8, а если 8, то они дают четыре угловые дуги 3 и четыре прямые дуги 4. Поэтому 8 ягод контура выбираются однозначно с точностью до симметрии. На рисунке 3 а) они отмечены чёрным. Тогда в центральной фигуре (тоже отмечена чёрным) нельзя выбрать ягоду, поскольку расстояние от неё до какой-то уже выбранной заметно. Если на контуре меньше 8 ягод, то вместе с одной внутренней тоже не больше 8 ягод всего. Пример уже есть на рисунке. Помимо незаметных дуг, все расстояния на нём не меньше 5, они тоже незаметны. Утверждение доказано.

Докажем, что $f(10) = 7$.

Доказательство. Оба угловых расстояния 4 незаметны (лемма 5), а меньшие — заметны. Контур длины 32. На нём угловых дуг не больше четырёх, а остальные — прямые, они не меньше 5. Значит, на контуре меньше 8 ягод. Пусть их 7. Тогда есть хотя бы три дуги длины 4, они угловые. Та из них, что между другими, — это $(2, 2)$. Отсюда остальные ягоды контура расставляются однозначно. На рисунке 3 б) они отмечены чёрным. При этом в центральной фигуре (тоже отмечена чёрным) нельзя выбрать ягоду, поскольку расстояние от неё до какой-то уже выбранной заметно. Если на контуре меньше 7 ягод, то вместе с одной внутренней тоже не больше 7 ягод всего. Пример уже

есть на рисунке. Дуги построены незаметными, остальные расстояния не меньше 6, а значит, тоже незаметны. Утверждение доказано.

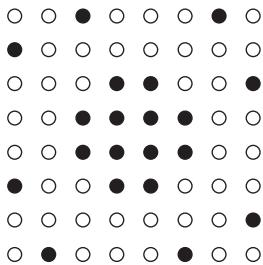


Рис. 3 а).

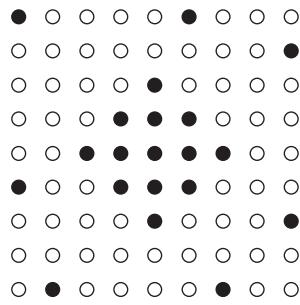


Рис. 3 б).

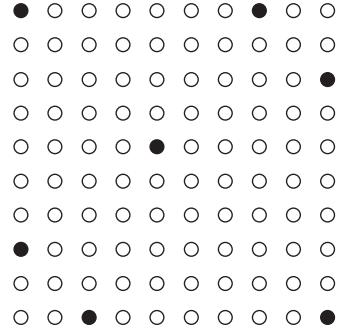


Рис. 3 в).

Докажем, что $f(11) = 7$.

Доказательство. Расстояния, не большие 4, заметны, кроме углового (2, 2). Контур длины 36 разбит ягодами на дуги. В соседних углах не могут находиться дуги (2, 2), так как прямые расстояния не меньше 6. Поэтому наименьшая сумма дуг — две угловые длины 4, две угловые длины 5 и сколько-то прямых длины 6. Значит, на контуре не может быть больше 7 ягод, а если 7, то они дают дуги указанных минимальных длин. Тогда составная дуга 14 между угловыми дугами (2, 2) состоит из дуги 5 и нескольких дуг 6, что не выходит по сумме. Следовательно, на контуре не больше 6 ягод, а всего — не больше 7. Пример приведён на рисунке 3 в). На нём все расстояния, кроме (2, 2), не меньше 7, поэтому незаметны. Утверждение доказано.

Пусть $n \geq 12$ и есть внутренняя ягода V . Тогда расстояние от неё до любой другой ягоды не меньше $n - 4$, а по прямой может быть и $n - 5$. Пусть расстояние от V до какого-то угла равно $n - 4 + x$. Узлы, находящиеся от этого угла не далее чем на x , образуют уголок высоты x . От V до противоположного угла расстояние $n - 4 + y$, а сумма расстояний до противоположных углов равна $2(n - 2)$. Значит, сумма высот противоположных уголков равна 4. Получили четыре непересекающиеся уголка, ягоды могут лежать только в них или на прямом расстоянии $n - 5$ от V . Последнее расстояние не больше $0,5(n - 2) + 2$, поэтому дополнительное место для ягод появляется только при $n = 12$ и только между уголками высоты 4.

Докажем, что $f(12) = 6$.

Доказательство. Длина контура 40, незаметные расстояния не меньше 6, поэтому на контуре меньше 7 ягод. Пусть есть внутренняя ягода. Выберем два соседних уголка высоты не больше 2. В каждом из них не больше одной ягоды, а два других помещаются в длинную дугу длины 18 (между углами 10 плюс по 4 с обеих сторон). Если на ней четыре ягоды, то угловые дуги между ними не меньше 6 и прямая — не меньше 7, что в сумме больше 18. Следовательно, всего не больше 6 ягод. Пример на рисунке 4. На нём есть прямые расстояния 7, а остальные — больше, все они незаметны. Утверждение доказано.

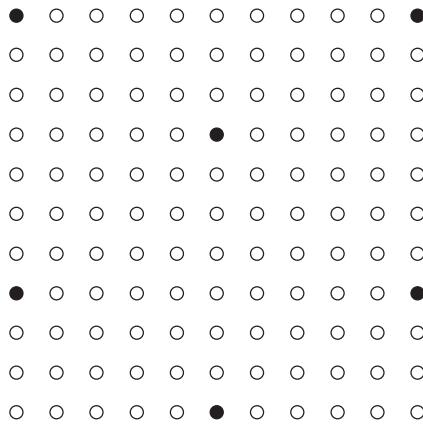


Рис. 4.

Наконец, докажем, что $f(n) = 5$ при $n \geq 13$.

Доказательство. Пример — четыре ягоды в углах и одна в центральной фигуре. Все расстояния не меньше $n - 4$, поэтому незаметны. Предположим, удалось незаметно выбрать 6 ягод.

Если они на контуре, его длина $4(n - 2)$, то угловые дуги между ними не меньше $n - 6$, а прямые — не меньше $n - 5$. Тогда $4(n - 6) + 2(n - 5) \leq 4(n - 2)$, отсюда $n = 13$, четыре угловые дуги 7 и две прямые 8. Расстояния (2, 5) и (3, 4) заметны (лемма 5), поэтому угловые — это (1, 6), но из таких дуг контур не собирается, противоречие.

Если есть внутренняя ягода, то в каком-то уголке две ягоды на незаметном угловом расстоянии (a, b) , где $a \leq b \leq 4$. Значит, это (4, 4), (3, 4) при $n = 13$ или (4, 4) при $n = 14$, но они заметны (лемма 5), противоречие. Утверждение доказано.

Вот такая получилась интересная последовательность: 1, 5, 8, 9, 16, 13, 11, 9, 8, 7, 7, 6, а далее одни пятёрки.

Автор благодарен участникам кружка (г. Махачкала, центр «Альтаир»), без внимания, терпения и ценных замечаний которых ничего бы не вышло. Это десятиклассники Абубакаров Абубакар, Баширов Мурад, Бучаев Абдурахман, Гаджиев Шахрудин, Исмаилова Малика, Махмудов Магомед, Чубанов Эседула и одиннадцатиклассник Юсупов Амин.

Семёнов Александр Николаевич,
Заместитель директора по олимпиадной подготовке
и проектной деятельности, педагог дополнительного
образования Государственного автономного
образовательного учреждения дополнительного
образования Республики Дагестан «Региональный
центр выявления, поддержки и развития способностей
и талантов у детей и молодёжи “Альтаир”»,
Заслуженный работник образования Республики Дагестан.

E-mail: matemob@yandex.ru

Обобщенные интегрируемые комбинации

E. A. Крикошев

В статье предложен общий метод построения интегрируемых комбинаций для систем линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ). Рассматриваются СЛДУ одной и нескольких переменных для однородных и неоднородных моделей.

Теория систем линейных дифференциальных уравнений достаточно развита, известны классические методы решения СЛДУ: метод исключения, метод Эйлера, операционный и матричный методы, использование степенных рядов и другие. Скромное место в этом ряду занимает метод интегрируемых комбинаций. С помощью достаточно простой алгебраической конструкции часто удается построить легко интегрируемую комбинацию. Однако отсутствовал способ построения всех интегрируемых комбинаций, т.е. такого их набора, из которого однозначно находится решение системы.

1. СЛДУ первого порядка одной переменной

Ниже предлагается общий метод построения полной системы интегрируемых комбинаций для однородной СЛДУ одной переменной.

Пусть дана однородная СЛДУ

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y}, \quad \text{где } A = (a_{ij}), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n), i = 1, \dots, n \quad (1)$$

1. Введем понятие скалярной редукции уравнения (1). С этой целью умножим (1) слева на произвольный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\vec{\alpha} = \text{const}$: $(\vec{\alpha}, \frac{d\vec{y}}{dx}) = (\vec{\alpha}, A\vec{y})$ или

$$(\vec{\alpha}, \vec{y})'_x = (\vec{\alpha}, A\vec{y}), \quad \vec{\alpha} = \text{const} \quad (2)$$

2. Заменяем матрицу A на сопряженную A^* . В координатном представлении $A^* = A^T$, где A^T — транспонированная матрица к A . Тогда имеем: $(\vec{\alpha}, A\vec{y}) = (A^T \vec{\alpha}, \vec{y})$.

3. Пусть $\vec{\alpha}$ — собственный вектор матрицы A^T . Тогда в итоге для (2) имеем

$$(\vec{\alpha}, \vec{y})'_x = \lambda(\vec{\alpha}, \vec{y}). \quad (3)$$

4. Наконец, интегрируя уравнение (3), получим

$$(\vec{\alpha}, \vec{y}) = ce^{\lambda x}. \quad (4)$$

В случае простой структуры A^T — когда для нее существует полный набор попарно различных вещественных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n = c_1 e^{\alpha_1 x} \\ \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n = c_2 e^{\alpha_2 x} \\ \dots \\ \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n = c_n e^{\alpha_n x} \end{array} \right. \quad (5)$$

Решаем эту систему алгебраически (методом Гаусса, Крамера и т.п.) и находим все неизвестные функции y_1, \dots, y_n .

Вывод: В случае простой структуры матрицы A^T полная система интегрируемых комбинаций есть совокупность скалярных произведений собственных векторов матрицы A^T на векторную функцию \vec{y} .

Рассмотрим случай кратных вещественных корней.

Пусть λ_0 — корень кратности k . Рассмотрим случай, когда ему соответствует собственный вектор $\vec{\beta}_0$ и $k - 1$ присоединенных векторов $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_{k-1}$.

В этом случае набор интегрируемых комбинаций, соответствующих собственному значению λ_0 , имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} (\vec{\beta}_0, \vec{y}) = c_0 e^{\lambda_0 x} \\ (\vec{\beta}_1, \vec{y}) = e^{\lambda_0 x} (c_1 + c_0 x) \\ (\vec{\beta}_2, \vec{y}) = e^{\lambda_0 x} (c_2 + c_1 x + c_0 x^2) \\ \dots \\ (\vec{\beta}_{k-1}, \vec{y}) = e^{\lambda_0 x} \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^{k-1-i} \end{array} \right. \quad (6)$$

Далее, для случая простых комплексно сопряженных собственных значений $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и $\lambda^* = \lambda_1 - i\lambda_2$ имеем также комплексно сопряженные собственные векторы $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_1 + i\vec{\alpha}_2$ и $\vec{\alpha}^* = \vec{\alpha}_1 - i\vec{\alpha}_2$ и при разделении интегрируемой комбинации на вещественную и мнимую части получим

$$(\vec{\alpha}_1, \vec{y}) = e^{\lambda_1 x} (c_1 \cos \lambda_2 x - c_2 \sin \lambda_2 x), \quad (\vec{\alpha}_2, \vec{y}) = e^{\lambda_1 x} (c_2 \cos \lambda_2 x + c_1 \sin \lambda_2 x).$$

Вопросы вычисления собственных значений и собственных (присоединенных) векторов здесь не рассматриваются.

Пример.

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = Ay, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & -12 & 10 \\ -1 & 5 & -3 \\ -4 & 12 & -9 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Характеристическое уравнение для A^T есть

$$|A^T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -12 & -10 \\ -1 & 5 - \lambda & -3 \\ -4 & 12 & -9 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad (**)$$

Корни уравнения (**): $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Вычислим собственные и присоединенные векторы

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow \begin{cases} 6\alpha_{11} - 12\alpha_{12} + 10\alpha_{13} = 0 \\ -\alpha_{11} + 6\alpha_{12} - 3\alpha_{13} = 0 \\ -4\alpha_{11} + 12\alpha_{12} - 8\alpha_{13} = 0 \end{cases} \quad \text{откуда } \alpha_{13} = 1, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{11} = -1.$$

$$\beta_0 = 1 \rightarrow \begin{cases} 4\beta_{01} - 12\beta_{12} + 10\beta_{03} = 0 \\ -\beta_{01} + 4\beta_{02} + 3\beta_{03} = 0 \\ -4\beta_{01} + 12\beta_{02} - 10\beta_{03} = 0 \end{cases} \quad \text{откуда } \beta_{03} = 1, \quad \beta_{02} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{01} = -1.$$

Для присоединения вектора β_1^* имеем

$$|A^T - \lambda I|\beta_1^* = \beta_1, \quad \text{что дает систему} \begin{cases} 4\beta_{11}^* - 12\beta_{12}^* + 10\beta_{13}^* = -1 \\ -\beta_{11}^* + 4\beta_{12}^* - 3\beta_{13}^* = \frac{1}{2} \\ -4\beta_{11}^* + 12\beta_{12}^* - 10\beta_{13}^* = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{откуда } \beta_{13}^* = 1, \quad \beta_{12}^* = \frac{3}{4}, \quad \beta_{11}^* = -\frac{1}{2}, \quad \vec{\alpha}_1 = (-1, \frac{1}{3}, 1); \quad \vec{\beta}_0 = (-1, \frac{1}{2}, 1); \quad \vec{\beta}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1).$$

Строим интегрируемые комбинации:

$$\begin{cases} -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = c_1 e^{-x} \\ -y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = c_2 e^x \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}y_2 + y_3 = (c_3 + c_2 x)e^x \end{cases}$$

Отсюда для $y = (y_1, y_2, y_3)$ имеем:

$$\begin{cases} y_1 = 5c_2 e^x + 3c_1 e^{-x} + 2(c_3 + c_2 x)e^{-x} \\ y_2 = 6(c_2 e^x + c_1 e^{-x}) \\ y_3 = -7c_2 e^x + 6c_1 e^{-x} + 2e^x(c_3 + c_2 x). \end{cases}$$

Обратимся к СЛДУ с переменными коэффициентами. В частном случае системы вида

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = p(x)A\vec{y} \quad (7)$$

легко видеть, что скалярная редукция уравнения (7) имеет вид

$$(\vec{\alpha}, \vec{y})'_x = p(x)(\vec{\alpha}, \vec{y}) \quad \text{с решением } (\vec{\alpha}, \vec{y}) = ce^{\lambda \int p(x)dx}$$

Рассмотрим также неоднородную СЛДУ

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{f}(x), \quad \text{где } \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для скалярной редукции СЛДУ (8) получим уравнение первого порядка

$$(\vec{\alpha}, \vec{y})'_x = \lambda(\vec{\alpha}, \vec{y}) + (\vec{\alpha}, \vec{f}) \quad (9)$$

и можно непосредственно записать общее решение

$$(\vec{\alpha}, \vec{y}) = ce^{\lambda x} + e^{\lambda x} \int (\vec{\alpha}, \vec{f}) e^{-\lambda x} dx.$$

Напомним, что λ и $\vec{\alpha}$ относятся к A^T .

2. СЛДУ высших порядков

Рассмотрим несколько однородных СЛДУ высших порядков. Впредь будем считать, что все матрицы, а следовательно, и их транспонированные матрицы, входящие в данную СЛДУ, имеют единый базис собственных векторов. Далее, каждая из матриц имеет простую структуру, т.е. все собственные значения матрицы вещественны и различны. Эти ограничения существенно упрощают выкладки (формулы), но не являются принципиальными. Читатель может получить результаты и в случае кратных и комплексных собственных значений.

2.1. СЛДУ второго порядка одной переменной

Рассмотрим СЛДУ вида

$$\vec{y}'' = A\vec{y}' + B\vec{y}, \quad (1)$$

$$\vec{y} = \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Пусть $\vec{\alpha}$ — собственный вектор A^T и B^T , λ, μ — соответственно собственные значения A^T и B^T . В соответствии с §1 (формулы (2) – (4)) строим скалярную редукцию (1):

$$J'' = \lambda J' + \mu J, \quad J = J(x) = (\vec{\alpha}, \vec{y}). \quad (2)$$

Имеем: (2) — линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами λ и μ . Характеристическое уравнение для (2):

$$k^2 = \lambda k + \mu \quad (3)$$

Нет необходимости вычислять корни k_1 и k_2 , достаточно рассмотреть возможные варианты

- a) $k_1 \neq k_2$, тогда при $\lambda^2 + 4\mu > 0$ имеем: $J(x) = (\vec{\alpha}, \vec{y}) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x};$
- b) $k = k_1 = k_2$, тогда при $\lambda^2 = -4\mu$ имеем: $J(x) = (\vec{\alpha}, \vec{y}) = e^{kx}(c_1 + c_2 x);$
- c) $k = k_1 + ik_2$, $k^* = k_1 - Ik_2$, при $\lambda^2 + 4\mu < 0$ получаем $J(x) = (\vec{\alpha}, \vec{y}) = e^{kx}(c_1 \cos k_2 x + c_2 \sin k_2 x).$

В итоге имеем полную систему n интегрируемых комбинаций:

$$J_1 = (\vec{\alpha}_1, \vec{y}), \quad J_1 = (\vec{\alpha}_2, \vec{y}), \quad \dots, J_n = (\vec{\alpha}_n, \vec{y})$$

и каждая из них может относиться к случаю а) или б), или с) в зависимости от λ_i и μ_i .

Данный пример обобщается также на СЛДУ более высоких порядков $m > 2$:

$$\vec{y}^{(m)} = A\vec{y}^{(m-1)} + B\vec{y}^{(m-2)} + \dots + C\vec{y}. \quad (4)$$

Скалярная редукция уравнения (4) имеет вид $J^{(m)} = \lambda J^{(m-1)} + \mu J^{(m-2)} + \dots + \gamma J$. Здесь процесс вычисления $\vec{\alpha}_i$ и $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ а также представление общих решений для возможных комбинаций простых кратных, комплексно-сопряженных корней из m может оказаться достаточно трудоемким.

2.2. СЛДУ третьего порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим уравнения вида

$$x^3 \vec{y}''' = x^2 A\vec{y}'' + xB\vec{y}' + C\vec{y} \quad (5)$$

Внимательный читатель, видимо, почувствует — что-то здесь связано с уравнением Эйлера. Действительно, с учетом принятых ограничений построенная скалярная редукция уравнения (5) принимает вид

$$x^3 J''' = \lambda x J'' + \mu x J' + \gamma J, \quad (6)$$

$J(x) = (\vec{a}_1, \vec{y})$, λ, μ, γ — собственные значения соответственно A^T, B^T и C^T ; \vec{a}_1 — собственный вектор этих матриц. Итак, (6) — уравнение Эйлера, решение которого известно. В частности, характеристическое уравнение для (6) имеет вид $k(k-1)(k-2) = \lambda k(k-1) + \mu k + \gamma$.

Общие решения для $J = (\vec{a}_1, \vec{y})$:

1. Если корни k_1, k_2, k_3 попарно различны, то $J(x) = c_1 x^{k_1} + c_2 x^{k_2} + c_3 x^{k_3}$.
2. Если корень k — кратности три, то $J(x) = x^k(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x)$.
3. Корни $k_1 \in \mathbb{R}, k_2 = k_3 = k$, то $J(x) = c_1 x^{k_1} + x^k(c_2 + c_3 \ln x)$.
4. Наконец, если корень k_1 действительный, а остальные два комплексно сопряженные, $k_2 = a+ib, k_3 = a-ib$, то

$$J(x) = c_1 x^{k_1} + x^a (c_2 \cos(b \ln x) + c_3 \sin(b \ln x)).$$

Очевидным образом производится обобщение уравнений Эйлера (5, 6) для СЛДУ более высоких порядков: 4, 5 и т.д.

3. СЛДУ первого порядка с несколькими переменными

3.1. СЛДУ первого порядка с двумя переменными

Пусть дана СЛДУ с двумя переменными с n неизвестными функциями (вектор-функцией размерности n):

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = A\vec{z} \\ \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} = B\vec{z} \end{cases} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1(x, y) \\ \dots \\ z_n(x, y) \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), i, j = 1, \dots, n \quad (1)$$

Продифференцируем первое матричное уравнение (1) по y , а второе по x

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial x \partial y} = AB\vec{z} \\ \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial x \partial y} = BA\vec{z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Из (2) следует:

$$AB = BA.$$

Итак, необходимым условием совместности (1) является коммутативность (перестановочность) матриц A и B .

Покажем, что это же условие является и достаточным.

Известно, что общим решением уравнения $\frac{d\vec{z}}{dx} = A\vec{z}$ является функция $\vec{z}(x) = e^{xA}C$, где $C = \vec{z}(0)$ — вектор начальных данных. Экспонента произвольной квадратной матрицы определяется одним из двух эквивалентных способов:

$$e^A := E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} (E + \frac{A}{n})^n,$$

причем указанный ряд сходится абсолютно, а указанный предел существует — все в пространстве матриц с обычной нормой. Известно, что если матрицы A и B коммутируют, то коммутируют и матрицы A и e^B , e^A и B , e^A и e^B . Отсюда следует способ нахождения решения системы (1) в общем виде:

Так как $\frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = A\vec{z}$, то $\vec{z}(x) = e^{xA}C(y)$, где $C(y)$ — некоторая векторная функция. Подставим это выражение во второе уравнение системы (1): $\frac{\partial \vec{z}}{\partial y} = e^{xA}C'(y) = B\vec{z} = Be^{xA}C(y) = e^{xA}BC(y)$

ввиду перестановочности матриц. Отсюда $C'(y) = BC(y)$, так как матрица e^{xA} обратима. В итоге $C(y) = e^{yB}C$, где C — постоянный вектор. Тогда общее решение системы (1) имеет вид

$$\vec{z}(x, y) = e^{xA}e^{yB}C \quad (3),$$

где, очевидно, $C = \vec{z}(0, 0)$. Поскольку матрицы e^{xA} и e^{yB} коммутируют, найденная функция из (3) действительно является решением системы (1).

В общем случае вычисление экспонент матриц является достаточно трудоемким процессом. Ситуация сильно упрощается, когда матрицы A и B имеют общий базис собственных векторов (с разными, вообще говоря, наборами собственных значений). В этом случае матрицы A и B , очевидно, коммутируют и формула (3) дает решение уравнения (1).

Однако, тогда матрицы A^T и B^T также имеют общий базис собственных векторов и хорошо работает метод интегрируемых комбинаций. Проведем соответствующие вычисления и рассмотрим пример.

Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2} \dots \alpha_{in})$ — собственный вектор матриц A^T и B^T с собственными значениями λ_i и μ_i .

Умножим (1) скалярно на $\vec{\alpha}_i$ перейдем от матриц A и B к сопряженным A^T и B^T

$$\begin{cases} (\vec{\alpha}_i, \vec{z})'_x = \lambda_i(\vec{\alpha}_i, \vec{z}) \\ (\vec{\alpha}_i, \vec{z})'_y = \mu_i(\vec{\alpha}_i, \vec{z}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Обозначим

$$J_i(x, y) = (\vec{\alpha}_i, \vec{z}).$$

Тогда $(J_i)'_x = \lambda_i J_i$, откуда $J_i = e^{\lambda_i x} C_i(y)$. Подставим во второе уравнение системы (4): $(J_i)'_y = e^{\lambda_i x} (C_i)'_y = \mu_i J_i = \mu_i e^{\lambda_i x} C_i$. Отсюда $(C_i)'_y = \mu_i C_i$, значит, $C_i = e^{\mu_i x} C_i$, где $C_i = \text{const}$. В итоге $J_i(x, y) = e^{\lambda_i x} e^{\mu_i x} C_i$, $i = 1, \dots, n$ — переменные разделились.

Итак, для матриц A^T и B^T простой структуры имеем систему уравнений для интегрируемых комбинаций:

$$\begin{cases} \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2 + \dots + \alpha_{1n}z_n = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} \\ \alpha_{21}z_1 + \alpha_{22}z_2 + \dots + \alpha_{2n}z_n = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{n1}z_1 + \alpha_{n2}z_2 + \dots + \alpha_{nn}z_n = c_n e^{\lambda_n x + \mu_n y} \end{cases}, \quad (5)$$

откуда решение \vec{z} находится алгебраически.

Пример.

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{z}}{\partial x} = A\vec{z} \\ \frac{\partial \vec{z}}{\partial y} = A^{-1}\vec{z}, \end{cases} \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A, \quad \vec{z} = (z_1, z_2) \quad (*)$$

Пусть $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ — собственные векторы A^T , λ_1 , λ_2 — собственные значения A^T . Для обратной матрицы $(A^T)^{-1}$ — собственные векторы остаются такими же, а собственные значения — обратны, т.е. λ_1^{-1} , λ_2^{-1}

С учетом формул (4) и (5) имеем

$$\begin{cases} \alpha_{11}z_1 + \alpha_{12}z_2 = c_1 e^{\lambda_1 x + \lambda_1^{-1} y} \\ \alpha_{21}z_1 + \alpha_{22}z_2 = c_2 e^{\lambda_2 x + \lambda_2^{-1} y} \end{cases} \quad (**)$$

Вычислим $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \lambda_1, \lambda_2$ характеристическое уравнение для A^T

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0; \quad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -1$$

Собственные векторы для A^T

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 6 \rightarrow & \begin{cases} -2\alpha_{11} + 5\alpha_{12} = 0 \\ 2\alpha_{11} - 5\alpha_{12} = 0, \end{cases} \quad \alpha_1 = 1 \quad 2\alpha_{12} = \frac{2}{5}, \quad \vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow & \begin{cases} 5\alpha_{21} + 5\alpha_{22} = 0 \\ 2\alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 0, \end{cases} \quad \alpha_{22} = 1 \quad 2\alpha_{21} = -1, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Интегрируемые комбинации (***) принимают вид

$$\begin{cases} z_1 + \frac{2}{5}z_2 = c_1 e^{6x+\frac{y}{6}} \\ -z_1 + z_2 = c_2 e^{-x+y} \end{cases}$$

и далее

$$z_2 = \frac{5}{7} \left(c_1 e^{6x+\frac{y}{6}} + c_2 e^{-x+y} \right), \quad z_1 = -c_2 e^{-x+y} + z_2 = \frac{5}{7} c_1 e^{6x+\frac{y}{6}} - \frac{2}{7} c_2 e^{-x+y}.$$

Замечание. Нетрудно проверить, что решение по формуле (3) дает тот же ответ, но оказывается более трудоемким, чем приведенное решение методом интегрируемых комбинаций.

Приведём некоторые простые условия, при которых матрицы A и B системы (1) заведомо окажутся перестановочными.

Например, $B = A^n$, $B = A^{-1}$, как в рассмотренном примере, $B = A^{-n}$ для произвольного натурального n .

Определение. Матрица A называется *нормальной*, если она перестановочна со своей сопряженной A^T .

Тогда в случае нормальной матрицы A можно взять $B = (A^T)^n$. Есть и много других известных из теории матриц условий коммутирования матриц, для различных классов матриц — симметричных, диагональных и т.п.

Заметим, что если мы применяем метод интегрируемых комбинаций для матриц A^T и B^T простой структуры, имеющих общий набор собственных векторов, то они коммутируют и одновременно коммутируют матрицы A и B . Действительно,

$$AB\vec{\alpha} = A\mu\vec{\alpha} = \mu\lambda\vec{\alpha}, \quad BA\vec{\alpha} = B\lambda\vec{\alpha} = \lambda\mu\vec{\alpha}$$

для любого базисного вектора $\vec{\alpha}$, поэтому $AB = BA$.

3.2. СЛДУ первого порядка с тремя переменными

Рассмотрим СЛДУ с тремя переменными. Опишем метод интегрируемых комбинаций в случае матриц простой структуры с общим базисом собственных векторов очень кратко, так как он вполне аналогичен случаю двух переменных. Пусть

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = A\vec{R} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} = B\vec{R} \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} = C\vec{R} \end{cases}, \quad \text{где } \vec{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n). \quad (6)$$

Аналогично двумерному случаю, необходимым и достаточным условием разрешимости системы (6) является попарная перестановочность матриц A, B, C . Общее решение имеет вид $\vec{R}(x, y, z) = e^{xA}e^{yB}e^{zC}D$, где $D = \vec{R}(0, 0, 0)$ — произвольный постоянный вектор.

Пусть теперь A, B, C — матрицы простой структуры с единым базисом собственных векторов $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$, с собственными значениями $\alpha_i, \mu_i, \gamma_i$ соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Скалярно умножая (6) на $\vec{\alpha}_i$ имеем:

$$\begin{cases} (\vec{\alpha}_i, \vec{R})'_x = \lambda_i(\vec{\alpha}_i, \vec{R}), \\ (\vec{\alpha}_i, \vec{R})'_y = \mu_i(\vec{\alpha}_i, \vec{R}), \quad i = 1, \dots, n \\ (\vec{\alpha}_i, \vec{R})'_z = \gamma_i(\vec{\alpha}_i, \vec{R}). \end{cases} \quad (7)$$

Полагая $(\vec{\alpha}_i, \vec{R}) = J_i(x, y, z)$ и интегрируя (7) аналогично случаю двух переменным, получим:

$$J_i(x, y, z) = c_i e^{\lambda_i x} \cdot e^{\mu_i y} \cdot e^{\gamma_i z},$$

то есть,

$$(\vec{\alpha}_i, \vec{R}) = c_i e^{\lambda_i x + \mu_i y + \gamma_i z}. \quad (8)$$

Полная система интегрируемых комбинаций (8) имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_{11}R_1 + \alpha_{12}R_2 + \dots + \alpha_{1n}R_n = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y + \gamma_1 z} \\ \alpha_{21}R_1 + \alpha_{22}R_2 + \dots + \alpha_{2n}R_n = c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y + \gamma_2 z} \\ \dots \\ \alpha_{n1}R_1 + \alpha_{n2}R_2 + \dots + \alpha_{nn}R_n = c_n e^{\lambda_n x + \mu_n y + \gamma_n z} \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) определяются R_1, R_2, \dots, R_n .

Литература

- [1] Ивлев В.В., Кривошней Е.А. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) // Математическое образование. - 2018. - № 1(85).

Кривошней Елена Александровна,
старший преподаватель кафедры
Общих математических и естественно научных дисциплин
Московского финансово-юридического университета МФЮА.

E-mail: ambient2003@list.ru

Формула Гюйгенса как тема аналитического исследования

B. M. Федосеев

В математическом образовании среди разнообразного круга учебных задач важная роль принадлежит задачам, в которых нужно исследовать некоторый объект, используя при этом, главным образом, математические методы. Подобные задачи создают предпосылки для осмыслиения обучения и, вообще, мотивируют изучение соответствующих разделов курса математики.

В качестве примера объекта для исследования в статье предлагается известная «формула Гюйгенса». При этом целями являются задачи по рассмотрению различных аспектов содержания этого вопроса с привлечением аппарата математического анализа и конструктивной теории функций.

Введение

Христиан Гюйгенс (14.04.1629 — 8.07.1695) — нидерландский математик, физик, астроном, инженер. В возрасте 22 лет им была опубликована научная работа “О квадратуре круга” [1], в которой доказывалась **теорема**: “*Длина дуги окружности, проходящей через точки A и B, всегда превышает значение выражения $2l + \frac{1}{3}(2l - L)$, в котором согласно рис. 1 приняты обозначения: $l = AM$, $L = AB$.*”

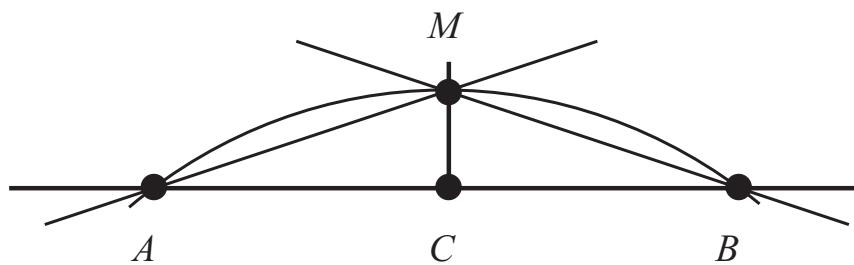


Рис. 1.

Выражение, приведённое Гюйгенсом в указанной теореме, оказалось столь удачным, что его становится возможным использовать для приближённого определения длины дуги окружности по результатам измерения хорд AB и AM (см. рис. 1). Таким образом, приходим к известной формуле по приближённому определению длины дуги окружности, которую и называют “формулой Гюйгенса”

$$s \approx 2l + \frac{1}{3}(2l - L) \quad (1)$$

Практическое значение формулы (1) состоит в том, что она позволяет, не зная радиуса и величины стягиваемого угла, которые не всегда поддаются непосредственному измерению, находить длину дуги окружности по результатам измерения двух хорд. Заметим, что формула (1) согласно теореме Гюйгенса даёт для длины дуги окружности несколько заниженный результат. Но точность её такова, что при определении, например, длины четверти окружности отклонение от истинного значения имеет величину порядка $\Delta(s) \approx \frac{R}{1000}$. Для многих прикладных задач такая точность вполне удовлетворительна и по этой причине формула Гюйгенса часто используется, например, при проведении геодезических расчётов. Принимая во внимание значение формулы Гюйгенса, ее включили в учебное руководство по элементарной математике [2]. В статье формула Гюйгенса рассматривается как тема для двух исследовательских задач, которые могут быть предложены студенту, изучающему курс математического анализа, и на примере которых он сможет прочувствовать силу его методов.

Задача 1: оценка точности формулы Гюйгенса

К формуле (1) Гюйгенс пришёл геометрическим путём, рассматривая вписанные в окружность многоугольники. Поставим задачу по оценке точности формулы Гюйгенса и для её решения воспользуемся методами математического анализа. С этой целью будем рассматривать относительную погрешность формулы (1) как функцию центрального угла дуги окружности. Обозначим величину угла через 2φ и выразим параметры задачи через половину центрального угла φ и радиус окружности R . Из соотношений элементарной геометрии находим:

$$s = 2R\varphi$$

$$L = 2R \sin \varphi, \quad l = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \quad (2)$$

$$\tilde{s} = 2l + \frac{1}{3}(2l - L) = \frac{16}{3}R \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}R \sin \varphi.$$

Таким образом, с учётом соотношений (2) для относительной погрешности формулы (1) получим следующую функциональную зависимость

$$\delta(\varphi) = \frac{s - \tilde{s}}{2R} = \varphi - \frac{8}{3} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \sin \varphi. \quad (3)$$

Исследуем поведение функции (3) на отрезке $[0; \pi/2]$. В таблице приведены некоторые значения данной функции. Отсюда предварительно можно сделать предположения о порядке величины погрешности, а также о её возрастании при увеличении центрального угла.

Таблица

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\delta(\varphi)$	0	0,0006	0,0185

Докажем монотонное возрастание функции (3) на отрезке $[0; \pi/2]$. Для этого рассмотрим её производные:

$$\begin{aligned} \delta'(\varphi) &= 1 - \frac{4}{3} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \cos \varphi; \\ \delta''(\varphi) &= \frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2} \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) > 0.; \end{aligned}$$

Так как $\delta'(0) = 0$, а вторая производная данной функции на исследуемом интервале, очевидно, больше нуля, то это значит, что при $\varphi > 0$ первая производная положительна и, следовательно, на отрезке $[0; \pi/2]$ функция (3) монотонно возрастает.

Выполним оценку относительной погрешности формулы Гюйгенса и для этого разложим функцию (3) в степенной ряд. Воспользовавшись рядом Тейлора для синуса, получим

$$\begin{aligned} \delta(\varphi) &= \varphi - \frac{8}{3} \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \sin \varphi = \\ &= \varphi - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{8}{2^{2n+1}} - 1 \right) \varphi^{2n+1} = \frac{\varphi^5}{4 \cdot 5!} - \frac{5\varphi^7}{16 \cdot 7!} + \frac{21\varphi^9}{64 \cdot 9!} - \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Степенной ряд (4) является знакочередующимся, поэтому сумма ряда меньше первого его члена, и отсюда приходим к следующей оценке относительной погрешности формулы Гюйгенса

$$0 < \delta(\varphi) < \frac{\varphi^5}{480}. \quad (5)$$

Сделаем некоторые выводы. Оценка относительной погрешности формулы Гюйгенса (5) является решением поставленной задачи. Кроме того мы выяснили, что погрешность формулы Гюйгенса зависит только от угла дуги окружности и тем меньше, чем меньше величина этого угла. При этом она существенно возрастает, когда угол становится больше 1 рад, но в пределах области определения функции (3) не превышает 2%. На практике в случае конкретной дуги окружности, зная примерное значение центрального угла, относительную погрешность формулы Гюйгенса можно оценить по неравенству (5).

Задача 2: улучшение точности формулы Гюйгенса

Зададимся целью улучшить точность формулы Гюйгенса, используя аппарат теории аппроксимации функций. В этом заключается вторая задача рассматриваемой темы. Для этого перепишем формулу (1) в следующем виде

$$\frac{s}{2l} \approx 1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{L}{2l} \right).$$

Сделаем обозначение $t = \frac{L}{2l} = \cos \frac{\varphi}{2}$, $t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$ теперь левая часть равенства приобретает вид функции

$$\frac{s}{2l} = f(t) = \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}$$

и формула Гюйгенса имеет смысл приближённого равенства

$$f(t) = \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} \approx 1 + \frac{1}{3}(1-t). \quad (6)$$

Чтобы лучше понять происхождение равенства (6), разложим функцию $f(t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 1$. Для этого найдём значения производных этой функции:

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} = 1; \\ f'(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t \cdot \arccos t - \sqrt{1-t^2}}{\sqrt{(1-t^2)^3}} = -\frac{1}{3}; \\ f''(1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(1-t^2) \cdot \arccos t + 3t(t \cdot \arccos t - \sqrt{1-t^2})}{\sqrt{(1-t^2)^5}} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Таким образом, запишем отрезок искомого степенного ряда

$$f(t) = \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} = 1 - \frac{1}{3}(t-1) + \frac{2}{15}(t-1)^2 - \dots \quad (7)$$

Сравнение выражений (6) и (7) свидетельствует о том, что исследуемая формула Гюйгенса получается, когда для приближения функции $f(t)$ используется отрезок ряда Тейлора, включающий только первые два его элемента. Увеличение размерности отрезка, очевидно, повысит точность расчётов, но при этом расчетная формула становится слишком громоздкой, а, как известно, сложные математические модели для практики бесполезны. Лучший результат получается, если для этой цели воспользоваться рациональной аппроксимацией Паде. Принимаем степень аппроксимации $R_{1,1}(1-t)$, в качестве базового степенного ряда для аппроксимации Паде используем отрезок ряда (7) и по методике, изложенной в монографии [3], находим нужное нам выражение

$$f(t) = \frac{\arccos t}{\sqrt{1-t^2}} \approx R_{1,1}(1-t) = \frac{15 + (t-1)}{15 + 6(t-1)}. \quad (8)$$

Делая возврат к первоначальным обозначениям, в итоге получим улучшенный вариант формулы Гюйгенса

$$s \approx \frac{l}{3} \left(1 + \frac{25l}{3 + L} \right). \quad (9)$$

Формула (9) является решением задачи 2. Оценку точности формулы (9) читателям предлагается провести самостоятельно в качестве упражнения.

Литература

- [1] Веселовский И.Н. Христиан Гюйгенс. - М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1959. - 113 с.
- [2] Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. - М.: АСТ: Астрель, 2008. - 509 с.
- [3] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. - М.: Мир, 1986. - 502 с.

*Федосеев Виктор Михайлович,
преподаватель математики Технологического колледжа
Пензенского государственного технологического университета, доцент, кандидат технических наук,
Почётный работник Высшей школы.*

E-mail: fedoseev_vik@mail.ru

Образовательные инициативы

Олимпиада школьников “ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” 2023/2024

A. A. Андреев, Е. А. Скородумова, Е. А. Максимова

В статье рассказано об олимпиаде для школьников по математике и информатике “ТИИМ” 2023/24 учебного года. Приведены задачи отборочного тура по математике для 10-11 классов с ответами, задачи заключительного тура по математике для 11 класса с решениями, а также примеры задач отборочного и заключительного туров по информатике с решениями.

Введение

Рост научного и технического потенциала современной России, непрерывно растущая потребность в высококвалифицированных кадрах в области естественно-технических наук и ИТ-технологий вызвали к жизни различные формы популяризации естественно-научных знаний среди школьников – будущих абитуриентов.

Олимпиады для школьников являются одной из таких форм; они демонстрируют школьнику разнообразие математики, открывают новые её разделы и учат по-новому смотреть на уже известные факты, призывают не бояться непривычных формулировок. Организацией олимпиад активно занимаются университеты, ведущие физико-математические вузы страны и учреждения РАН.

Кроме того, вовлечение школьников в олимпиадном движении позволяет углубить образовательный процесс как в конкретном классе, так и во всей школе. Таким образом, можно не только выявить наиболее талантливых учеников, что является одним из приоритетов образовательной деятельности в Российской Федерации и прописано в Федеральном законе от 29 декабря 2012 г. №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации», но и в целом повысить качество обучения по конкретным дисциплинам.

Для успешного выступления на олимпиадах помимо творческих способностей необходима серьёзная подготовка, неотъемлемой составляющей которой является ознакомление с заданиями и разбор решений математических соревнований различных уровней. Настоящая статья содержит разборы заданий олимпиады школьников ТИИМ по математике и информатике.

В 2023/24 учебном году отборочный тур олимпиады школьников «ТИИМ — Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» прошел в ноябре 2023 — январе 2024 г., заключительный — в феврале 2024 г.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из 4 вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике (по два комплекта заданий на тур) включали в себя по 6 задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Олимпиада проводилась с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В олимпиаде по математике приняли участие 6885 школьников из 74 регионов РФ и ближнего зарубежья, по информатике — 1517 школьников из 66 регионов РФ и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 47 очных площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на Дону,

Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике и в дистанционном формате для удаленных регионов и лиц с ограниченными возможностями здоровья с применением технологий, позволяющих идентифицировать участника и отслеживать его действия в реальном времени.

Полный текст заданий с ответами и решениями, сборник заданий, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады <https://тиим.рф>.

1. Задания отборочного тура по математике

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

Здесь мы приводим по одному варианту заданий для 10 и 11 класса с ответами.

10 класс

Задача 1. Найти сумму квадратов всех целых x , удовлетворяющих неравенству

$$|x^2 - 4|x| + 3| < 1.$$

Ответ: 20.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике даны площадь — 84 см^2 и радиус вписанной окружности — 3 см. Найдите его стороны. В ответе запишите $|a - b|$, где a, b — найденные катеты.

Ответ: 17.

Задача 3. Известно, что в сумме из 100 слагаемых $A = 1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots1$ (реже всех цифр встречается цифра m , причем она повторяется в записи числа A k раз). Какое значение принимает $m + k$?

Ответ: 9.

Задача 4. Определить число целых значений параметра a , при которых уравнение

$$a \sin x + 2 \cos x = 1, \quad (3)a$$

имеет решение.

Ответ: 5.

Задача 5. Координаты вершин выпуклого многоугольника есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 3y^2 + 12y + 11 + 2x, \\ 2x = x^2 + y^2 + 4y + 1. \end{cases}$$

Найдите длину наибольшей диагонали многоугольника.

Ответ: 4.

Задача 6. Из круглой однородной пластины радиуса 4 метра высверлили круглое отверстие радиуса 1 метр, центр которого находится на расстоянии 3 метра от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 20.

Задача 7. Пусть $g(x) = 3 \sin x + 4 \cos x$, $f(g(x)) = |3 \cos x - 4 \sin x|$. Найдите $f(0)$.

Ответ: 5.

Задача 8. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляет 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимально возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Ответ: 10500 руб.

Задача 9. Последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ такова, что

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots$$

Сколько различных делителей имеет следующая сумма

$$a_{2024} + a_{2023} + a_{2022} + a_{2021} + a_{2020} + a_{2019} + a_{2018} + a_{2017}?$$

Ответ: 64560.

Задача 10. Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 2023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n + 1$.

Ответ: 840.

11 класс

Задача 1. Вычислите

$$\sqrt{3959 - 88\sqrt{2023}} + \sqrt{4048 - 90\sqrt{2023}}.$$

Ответ: 1.

Задача 2. Последовательность $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ такова, что

$$a_1 = 20, a_2 = 40, a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots$$

Сколько различных делителей имеет следующая сумма

$$a_{2024} + a_{2023} + a_{2022} + a_{2021} + a_{2020} + a_{2019} + a_{2018} + a_{2017}?$$

Ответ: 32264.

Задача 3. Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 2023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n + 1$.

Ответ: 840.

Задача 4. Из круглой однородной пластины радиуса 4 м высверлили круглое отверстие радиуса 1 м, центр которого находится на расстоянии 3 м от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 20.

Задача 5. Найдите сумму цифр числа A , где $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{100}$.

Ответ: 415.

Задача 6. Найдите среднее арифметическое всевозможных значений $x + y$, если $x, y \in N$ и $x^2 + 4xy - 5y^2 = 901$.

Ответ: 165.

Задача 7. Найдите сумму всех целых x , удовлетворяющих неравенству

$$|\sqrt{x-4} - 3| > |\sqrt{9-x} - 2| + 1.$$

Ответ: 15.

Задача 8. Известно, что неизвестная функция $f(x) : R \xrightarrow{f(x)} R$ удовлетворяет соотношению

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, f(2023) = 0.$$

Чему равно $f(2024)$?

Ответ: 2024.

Задача 9. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a . Одна из граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной b ($b \neq a$). Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом. В ответе запишите целую часть найденной площади при $a = 4, b = 3$.

Ответ: 4.

Задача 10. Найти сумму всех решений уравнения

$$(|\cos \pi x^2| - 1) \sqrt{15 + x - 2x^2} = 0.$$

В ответе записать целую часть найденной суммы.

Ответ: 5.

2. Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике

На отборочном туре по информатике участникам были предложены два комплекта по 6 заданий разной тематики: геометрия, криптография, динамическое программирование, теория чисел, работа со строками.

Для получения максимального балла (100) по каждой из задач программа должна была выдать верный ответ на всех тестовых данных. По каждой из задач таких тестов было не менее 25. Самыми сложными для участников оказались геометрические задачи. Для 8-9 классов был предложен упрощенный вариант, требующий проверки, находится ли точка внутри выпуклого многоугольника, 10-11 классам требовалось найти расстояние от точки до многоугольника.

Корабль-призрак

Капитан Джек Воробей и его команда путешествуют на Черной Жемчужине по Карибскому морю в поисках корабля-призрака. Чтобы найти корабль-призрак, им нужно попасть в проклятый многоугольник.

Известна текущая координата корабля и координаты вершин многоугольника. Помогите Джеку определить, насколько далеко им осталось плыть. Если они уже внутри многоугольника, вывести 0.

Входные данные: Координата Черной Жемчужины x, y .

Координаты точек проклятого многоугольника.

Выходные данные: Одно число — расстояние до многоугольника или ноль, с округлением до двух знаков после запятой.

Ограничение времени выполнения программы:

1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
4 1 -4 -4 4 -4 5 5 -5 5	0
6 1 -4 -4 4 -4 5 5 -5 5	1.44
100000 -900000 -4 -4 4 -4 0 5	905534.1

Решение задачи на языке Python

С этой задачей полностью не справился ни один из участников.

```
from typing import List, Tuple
import math

def point_in_polygon(polygon, point) :
    """
    Подробнее: https://en.wikipedia.org/wiki/Point\_in\_polygon
    """
    xp, yp = point
    lines_intersection = 0
    common_vertex = 0
    for (x1, y1), (x2, y2) in zip(polygon, polygon[1:] + polygon[:1]):
        if (y2 <= yp <= y1 or y1 <= yp <= y2) and not (x1 < xp and x2 < xp):
            if x1 == x2:
                if xp < x1:
                    lines_intersection += 1
            else:
                a = (y2 - y1) / (x2 - x1)
                b = y1 - a * x1
                if (yp - b) / a > xp:
                    lines_intersection += 1
            if yp == y1 or yp == y2:
                common_vertex += 1
    return bool((lines_intersection - common_vertex // 2) & 1)

def dot(v,w):
    x,y = v
    X,Y = w
    return x*X + y*Y

def length(v):
    x,y = v
    return math.sqrt(x*x + y*y)

def vector(b,e):
    x,y = b
    X,Y = e
    return (X-x, Y-y)

def unit(v):
    x,y = v
    mag = length(v)
    return (x/mag, y/mag)

def distance(p0,p1):
    return length(vector(p0,p1))

def scale(v,sc):
    x,y = v
    return (x * sc, y * sc)

def add(v,w):
    x,y = v
    X,Y = w
    return (x+X, y+Y)

def pnt2line(pnt, start, end):
    line_vec = vector(start, end)
    pnt_vec = vector(start, pnt)
```

```

line_len = length(line_vec)
line_unitvec = unit(line_vec)
pnt_vec_scaled = scale(pnt_vec, 1.0/line_len)
t = dot(line_unitvec, pnt_vec_scaled)
if t < 0.0:
    t = 0.0
elif t > 1.0:
    t = 1.0
nearest = scale(line_vec, t)
dist = distance(nearest, pnt_vec)
nearest = add(nearest, start)
return dist
def minimal_distance(polygon, point):
    min_dist = 1000000
    for (x1, y1), (x2, y2) in zip(polygon, polygon[1:] + polygon[:1]):
        dist = pnt2line(point, (x1,y1),(x2,y2))
        if dist<min_dist:
            min_dist = dist
    return min_dist
point = tuple(map(float, input().split(' ')))
polygon = []
while True:
    try:
        p = tuple(map(float, input().split(' ')))
        polygon.append(p)
    except:
        break
if point_in_polygon(polygon, point):
    print(0)
else:
    print(round(minimal_distance(polygon, point), 2))

```

3. Заключительный тур по математике

На заключительном туре по математике участникам было предложено два варианта, каждый из которых содержал 10 заданий. Каждое из заданий могло быть максимально оценено в 10 баллов.

Вариант заданий для 11 класса

Задача 1. Найдите две последние цифры числа a_{2024} , где

$$a_k = 9^{a_{k-1}}, a_1 = 9.$$

Решение: Выпишем последние две цифры первых десяти степеней числа 9.

$$\begin{aligned} 9^1 &= 9, \quad 9^2 = 81, \quad 9^3 = \dots 29, \quad 9^4 = \dots 61, \quad 9^5 = \dots 49, \\ 9^6 &= \dots 41, \quad 9^7 = \dots 69, \quad 9^8 = \dots 21, \quad 9^9 = \dots 89, \quad 9^{10} = \dots 01. \end{aligned}$$

Число $9^9 = a_2$ оканчивается цифрой 9, т.е. $9^9 = 10k + 9$. Следовательно,

$$a_3 = 9^{9^9} = 9^{10k+9} = (9^{10})^k \cdot 9^9 = (\dots 01)^k \cdot (\dots 89) = \dots 89.$$

Ответ: 89.

Задача 2. Решите уравнение:

$$4x + 3y - 2x \left\{ \frac{x^2 + y^2}{x^2} \right\} = 0,$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x .

Решение:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \frac{x}{y} = t; \quad 2 + \frac{3}{2}t = \{1 + t^2\}; \quad \{x + n\} = \{x\};$$

$$\{t^2\} = 2 + \frac{3}{2}t, 0 \leq 2 + \frac{3}{2}t < 1, -\frac{4}{3} \leq t < -\frac{2}{3}; \quad \frac{4}{9} < t^2 \leq 1\frac{7}{9}.$$

$$1) \frac{4}{9} < t^2 < 1; \quad \{t^2\} = t^2, t \in (-1; -\frac{2}{3}). \quad 2) 1 \leq t^2 \leq \frac{16}{9}; \quad \{t^2\} = t^2, t \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right].$$

$$1) t^2 - \frac{3}{2}t - 2 = 0; \quad t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 2} = \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \notin (-1; -\frac{2}{3}); \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \in (-1; -\frac{2}{3}).$$

$$2) t^2 - \frac{3}{2}t - 3 = 0; \quad t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 3} = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \notin \left[-\frac{4}{3}; -1\right]; \quad t_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right].$$

Ответ:

$$\left\{ \frac{3 - \sqrt{57}}{4}, \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \right\}.$$

Задача 3. На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2000 отрицательных. Сколько из исходных чисел равны 0?

Решение: Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных. x, y — целые числа, $x + y \leq 100$.

Так как отрицательные произведения возникают только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных.

Имеем $xy = 2000$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $\sqrt{2000}$, т. е. не более 44. Кроме того, это число является делителем числа $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, поэтому в его разложении на простые множители присутствуют только числа 2 и 5, причём 2 в степени не больше, чем 4.

Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 50 и 100.

Из уравнения $xy = 2000$ находим, что второе число при этом будет равняться 20 или 1. Пара $(100; 1)$ не удовлетворяет условию $x + y \leq 100$. Остаётся два варианта: 50 отрицательных чисел, и 20 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 70, а поэтому среди исходных чисел ровно 30 нулевых.

Задача 4. Даны три утверждения:

1. Неравенство $x^2 + x + a \geq 0$ справедливо при всех действительных x ;
2. Функция $y = \log_{2a} x$ является монотонно убывающей;
3. Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 3a + 2, \\ y + a \cos x = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найдите все значения параметра a , при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

Решение: Условие 1) выполняется при $a \geq \frac{1}{4}$; условие 2) выполняется при $0 < a < \frac{1}{2}$; условие 3) верно при $a = 1$.

Ответ:

$$\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}.$$

Задача 5. Десять простых чисел составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа, если $a_1 < 200$ и $a_{10} < 3000$.

Решение: Очевидно, что разность прогрессии d — число чётное, так как простые числа — числа нечётные (кроме 2).

Далее, d кратно 3, так как в противном случае один из трёх последовательных членов прогрессии будет делиться на 3.

Аналогично убеждаемся, что d должно быть кратно 5 и 7 и, следовательно, кратно $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

Итак, $d = 210k$. Но по условию:

$$a_{10} = a_1 + 9d < 3000, \quad a_1 + 1890k < 3000, \quad k < \frac{3000 - a_1}{1890} < 2.$$

Значит, $k = 1$ и $d = 210$. Остаётся определить a_1 . Имеем: $210 = 11 \cdot 19 + 1$ и

$$a_n = a_1 + 210(n-1) = a_1 + 11 \cdot 19(n-1) + n-1.$$

Отсюда легко вывести, что a_1 или равно 11, или имеет вид $22k+1$. Действительно, пусть $a_1 = 22k \pm r$, где $1 < r < 11$. Тогда среди чисел 1, 2, 3, ..., 9 всегда найдётся число m , которое в сумме с r даст число 11 и, следовательно, число a_m будет кратно 11. Итак, испытанию подлежат числа: 11, 23, 67, 89, 199 (1) (так как 45, 111, 133, 155 и 177 — числа составные).

Но при $a_1 = 11$ имеем $a_9 = 11 \cdot 89$; при $a_1 = 23$ — $a_6 = 29 \cdot 37$; при $a_1 = 67$ — $a_{10} = 19 \cdot 103$; при $a_1 = 89$ — $a_7 = 19 \cdot 71$.

Остаётся число 199, которое даёт прогрессию из 10 чисел: 199; 409; 619; 821; 1039; 1249; 1459; 1669; 1879; 2089. Легко убедиться, что все эти числа являются простыми.

Ответ: 199; 409; 619; 821; 1039; 1249; 1459; 1669; 1879; 2089.

Задача 6. Дан отрезок, длина которого равна

$$\left(\sqrt[3]{2} + 1\right) \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}}.$$

С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[1024]{2024}$.

Решение: Преобразуем данное выражение

$$\left(\sqrt[3]{2} + 1\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{(3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 3)(\sqrt[3]{2} - 1)}{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = 1.$$

$$l_0 = 1 \Rightarrow 2024 = l_1, l_n = \sqrt{l_0 \cdot l_{n-1}}, 1024 = 2^{10}.$$

Применим метод математической индукции:

$$l_2 = \sqrt{l_0 \cdot l_1} = 2024^{\frac{1}{2}}, \quad l_3 = \sqrt{l_1 \cdot l_2} = 2024^{\frac{1}{2^2}}, \quad l_4 = \sqrt{l_0 \cdot l_3} = 2024^{\frac{1}{2^3}},$$

$$l_5 = \sqrt{l_0 \cdot l_4} = 2024^{\frac{1}{2^4}}, \dots, l_{11} = \sqrt{l_0 \cdot l_{10}} = 2024^{\frac{1}{2^{10}}} = 2024^{\frac{1}{1024}} = \sqrt[1024]{2024}.$$

Задача 7. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

- а) в порядке убывания слева направо; б) в порядке неубывания слева направо.

Считать, что числа не могут начинаться с цифры 0.

Решение:

а) Пусть событие A — получение трёхзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо. Общее количество трёхзначных чисел N равно количеству чисел от 100 до 999. Поэтому $N = 999 - 100 + 1 = 900$. Любые 3 различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр: 0, 1, ..., 8, 9 — можно единственным образом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприятствующих событию A исходов:

$$M_1 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Следовательно

$$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{120}{900} = \frac{2}{15}.$$

б) Пусть событие C — получение трёхзначного числа, цифры которого расположены в порядке неубывания слева направо (например, 122, 113, 222 и т. д.). Число исходов, благоприятствующих событию C , обозначим через M_3 .

Число M_3 будем вычислять по формуле: $M_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, где:

L_1 — количество трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке возрастания (например, 134, 256 и т. д.);

L_2 — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры в записи числа одинаковы (например, 111, 222,...,999);

L_3 — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём первые 2 цифры одинаковы (например, 114, 556, и т. д.);

L_4 — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём последние 2 цифры одинаковы (например, 133, 266, и т. д.).

Очевидно, L_1 равно числу вариантов извлечения любых трёх различных цифр из следующих девяти: 1, 2, ..., 8, 9 (в записи таких чисел нельзя использовать 0). Поэтому $L_1 = 84$, $L_2 = 9$, так как имеется только 9 трёхзначных чисел с одинаковыми цифрами (111; 222;...;999).

Найдём L_3 перебором. Рассмотрим все трёхзначные числа, у которых цифры расположены в порядке неубывания, причём первые 2 цифры — 1. Очевидно, их количество равно 8:

112, 113, 114, ..., 119 — всего 8 чисел.

Аналогично рассуждая, можно записать: 223, 224, 225, ..., 229 — всего 7 чисел. 334, 335, 336, ..., 339 — всего 6 чисел. ... 889 — 1 число.

Поэтому $L_3 = 8+7+6+\dots+1=36$.

Найдём L_4 — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в порядке неубывания, причём последние 2 цифры одинаковы.

Очевидно, что количество таких чисел, заканчивающихся двумя цифрами 2, равно 1:

122 — 1 число.

Аналогично рассуждая, можно записать: 133, 233 — 2 числа. 144, 244, 344 — 3 числа. ... 199, 299, 399,...,899 — 8 чисел.

Тогда $L_4 = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$. Получаем:

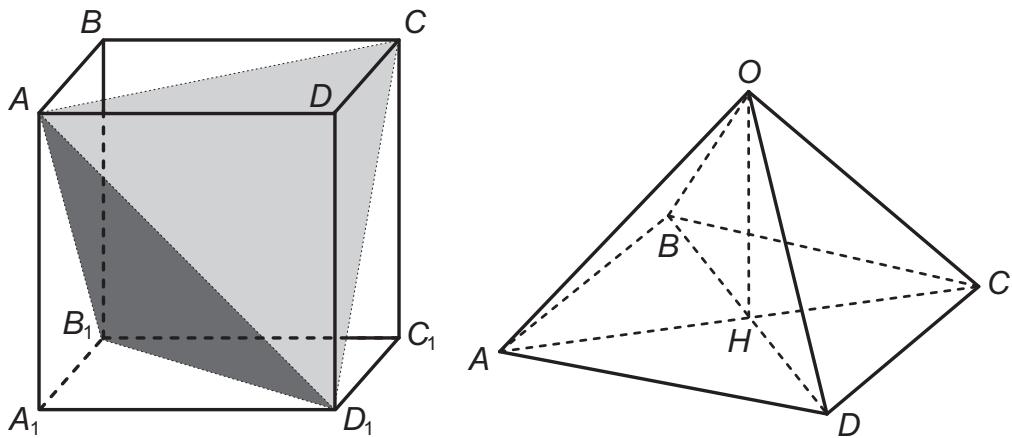
$$M_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 84 + 9 + 36 + 36 = 165. P(C) = \frac{165}{900} = \frac{11}{60} = 0,1833.$$

Ответ: а) $\frac{2}{15}$; б) $\frac{11}{60}$.

Задача 8. Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

Решение: Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды. Достаточно заметить, что тетраэдр ACB_1D_1 — правильный с ребром $\sqrt{2}a$, а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде $OABCD$ с вершиной O провести высоту OH и разрезать пирамиду плоскостями OHA и OHB на 4 одинаковые части. Приклейв к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



Задача 9. Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числа $\frac{4}{5}$. Найдите произведение этих чисел.

Решение: Пусть a, b, c — заданные числа. По условию имеем систему равенств:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = c^2 - \frac{4}{5}, \\ b^3 + c^3 = a^2 - \frac{4}{5}, \\ a^3 + c^3 = b^2 - \frac{4}{5}. \end{cases} \quad (1)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - b^3 = c^2 - a^2$. Сокращая на $(a - c)$, по условию $a \neq c$, получаем $a^2 + ac + c^2 = -(a + c)$.

Аналогично можно заключить, что $b^2 + ab + a^2 = -(a + b)$ и $b^2 + bc + c^2 = -(b + c)$, т.е.

$$\begin{cases} a^2 + ac + c^2 = -(a + c), \\ b^2 + ab + a^2 = -(a + b), \\ b^2 + bc + c^2 = -(b + c), \end{cases} \quad (2)$$

откуда

$$(a^2 - b^2) + c(a - b) = -(a - b).$$

Сокращая на $(a - b)$, по условию $a \neq b$, получаем

$$a + b + c = -1. \quad (3)$$

Складываем все три равенства (2), получим

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ac) = -2(a + b + c), \quad 2(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 2.$$

Откуда (см. (3)):

$$ab + bc + ac = 0. \quad (4)$$

Далее возведём в куб обе части равенства (3):

$$-1 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) + 6abc. \quad (5)$$

Заметим, что

$$(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) = (a + b + c), \quad (ab + bc + ca) - 3abc = 0 - 3abc = -3abc.$$

Далее, складывая все три равенства (1), получим

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{12}{5} = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) - \frac{12}{5} = (-1)^2 - 2*0 - \frac{12}{5} = 1 - \frac{12}{5} = -\frac{7}{5},$$

откуда

$$a^3 + b^3 + c^3 = -\frac{7}{10}.$$

Тогда равенство (5) принимает вид:

$$-1 = -\frac{7}{10} + 3(-3abc) + 6abc = -\frac{7}{10} - 3abc.$$

Тогда

$$3abc = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Следовательно, $abc = \frac{1}{10}$.

Замечание. Можно доказать с помощью производной, что тройка различных действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, в самом деле существует и определена однозначно как три корня уравнения $x^3 + x^2 - \frac{1}{10} = 0$.

Ответ: $\frac{1}{10}$.

Задача 10. Найдите, по крайней мере, один набор семи различных целых чисел, отличных от нуля, таких, что сумма их кубов равняется следующему 14-значному числу $N = 16781934923776$.

Решение: Проанализируем число N :

$$3776 = 16 \cdot 236 \Rightarrow N \vdash 16. \quad S_1 = 1 + 7 + 1 + 3 + 9 + 3 + 7 = 31; \quad S_2 = 6 + 8 + 9 + 4 + 2 + 7 + 6 + 42;$$

$$S_1 - S_2 = 11 \Rightarrow N \vdash 11 \Rightarrow N \vdash 176. \quad 16781934923776 \vdash 176 = 95351902976; \quad N = 176 \cdot 95351902976 = 176 \cdot N_1.$$

$$N_1 \vdash 16, (2976 = 16 \cdot 186); \quad N_1 \vdash 11, S_1 = 9 + 3 + 1 + 0 + 9 + 6 = 28; \quad S_2 = 5 + 5 + 9 + 2 + 7 = 28; \\ 95351902976 : 176 = 54177217. \quad N_2 = 54177217; \quad N = 176^2 \cdot N_2 = 176^3 \cdot 3078251 = 176^3 \cdot 11 \cdot 279841;$$

$$279841 \nvdash 11; \quad 2 + 9 + 4 = 15; \quad 7 + 8 + 1 = 16; \quad 279841 \nvdash 13; 17; 19;$$

$$279841 = 23 \cdot 12167 = 23^2 \cdot 529 = 23^4. \quad N = (11 \cdot 16)^3 \cdot 11 \cdot 23^4 = 16^3 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 8^4 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 2024^4;$$

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 2024^4; \quad n_k = d_k \cdot 2024;$$

$$d = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] \Rightarrow d^3 = [1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000];$$

$$d_1 = 10, d_2 = 9, d_3 = 8 \Rightarrow d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 = 2241; \quad d_4 = 5, d_5 = 4, d_6 = 3, d_7 = 1 \Rightarrow d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 = 217;$$

$$d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + (-d_4)^3 + (-d_5)^3 + (-d_6)^3 + (-d_7)^3 = 2024.$$

Ответ:

$$10^3 + 9^3 + 8^3 + (-5)^3 + (-4)^3 + (-3)^3 + (-1)^3 = 2024.$$

4. Заключительный тур олимпиады ТИИМ по информатике

Задания заключительного тура превосходили по сложности задания отбора. Так же, как и на отборочном туре, к финалу было разработано 2 комплекта по 6 заданий (для 8-9 класса и для 10-11 класса).

От участников требовалось большое количество разнообразных знаний и навыков, таких как динамическое программирование, решение криптографических задач, реверс-инжиниринг, знание геометрии и комбинаторики. Задания оценивались по 100-балльной шкале.

Самыми сложными для участников оказались комбинаторная задача "Жизнь пешки" и криптографическая задача с элементами реверс-инжиниринга "Перехваченные сообщения".

Задача 3. Перехваченные сообщения

В руки криптографа попали сообщения, зашифрованные неизвестным шифром. Для некоторых из них также был получен оригинал.

Написать программу, расшифровывающую сообщения, зашифрованные тем же шифром.

Для строки

GnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2s
NKVfi7PtSoF ?.Tp

оригиналом является строка

JJJJJJJJJJJJJJJJJ

Для строки

IuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2sNKVf7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9w
оригиналом является строка

Для строки

0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1

оригиналом является строка

Оригиналы остальных строк приведены в примерах ниже.

Входные данные: Зашифрованная строка длиной $0 < N < 200$ символов.

Выходные данные:

Расшифрованная строка длиной N .

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Некоторые примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2OmMTjkj6uB!	Hello World!
!#@\$(() ^%_-+_=/*	!#@\$(() ^%_-+_=/*
EdIuC9wX,Z	0000000000
JGnH2sNKVf	1111111111
EGKJkWQ.qv	EGKJkWQ.qv
pLbp16nYr,bKovLR0qRSy b4	pLbp16nYr,bKovLR0qRSy b4
yvM5rQrs8O Og6I7c	Make Love Not War

Замечание: Как входная, так и выходная строка может содержать только символы из следующего набора:

abcdefghijklmnopqrstuvwxyzABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ0123456789.,?*!#\$()^%-+_=/_

Решение задачи

Идея состоит в том, что ключевая строка подбирается по тестовым примерам (ее хорошо видно, когда вся исходная строка состоит из одного повторяющегося символа), об алгоритме шифрования участник также должен догадаться самостоятельно.

Примеры, приложенные к задаче на заключительном туре, позволяют однозначно определить ключевую строку и алгоритм.

С задачей справились всего три финалиста.

```
a='3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ? .TprjAeg0b5h6LD8WR4QcUlqmMy0EdIuC9wX,ZzYBa',
s=input()
ans=''
for i in range(len(s)):
    if s[i] in '!#@$%^*-/*':
        ans+=s[i]
    else:
        z=a.index(s[i])-i-1
        ans+=a[z%len(a)]
print(ans)
```

Задача 5. Жизнь пешки

Компьютер записывает “биографию” белой шахматной пешки в течение партии.

Начальное положение пешки — клетка E2.

На каждом ходе пешка может остаться на месте, сдвинуться вперед на одну клетку или на две клетки, если это ее первый ход.

Компьютер в начале игры и после каждого хода белых записывает позицию пешки по вертикали. Если пешка была “взята”, запись позиции прекращается. Считать, что пешку могут взять сразу после первого хода.

Известна длина шахматной партии, найти количество всех возможных “жизненных путей” пешки по модулю 998244353.

Например, если партия длилась два хода, все возможные пути: 22, 23, 24, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 245. Всего 10 возможных путей.

Входные данные:

Единственная строка входных данных содержит целое число $N(1 \leq N \leq 10^6)$ — длину партии.

Выходные данные:

В ответе выведите количество различных шахматных путей по модулю 998244353.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2	10
99	582018135

Решение задачи на языке Python

Решим задачу с помощью техники динамического программирования. Обозначим за $dp[i][j]$ количество путей длины i с последней клеткой, равной j . Инициализируем значение $dp[1][2] = 1$. Пересчёт

очевидный: для $j = 4$ пересчитываемся через сумму $dp[i-1][2] + dp[i-1][3] + dp[i-1][4]$, для остальных j пересчитываемся через сумму $dp[i-1][j] + dp[i-1][j-1]$. Тогда искомым ответом будет сумма всех значений динамики по j от 2 до 8 и i от 2 до $n+1$. Получили решение с асимптотикой $O(n \cdot A)$, где A — это размер шахматной доски, равный 8. Такой асимптотики достаточно, чтобы набрать полный балл. Отметим, что можно было набрать частичный балл, перебрав все возможные числа длины $\leq n+1$ в цикле и проверяя, является ли каждое число корректной последовательностью ходов. Это медленное решение можно было использовать для стресс-тестирования решения на полный балл.

С этой задачей справились всего два участника 9 и младше классов. Приводим решение победителя заключительного тура, Дмитрия Шейкина, 8 класс, г. Ульяновск.

```
c = 3
a = int(input())
Mod = 998244353
t = 3
if False:
    print(0)
else:
    t2 = 1
    t3 = 1
    t4 = 1
    t5 = 0
    t6 = 0
    t7 = 0
    t8 = 0
    c = 3
    for i in range(2, a + 1):
        t8 += t7
        t7 += t6
        t6 += t5
        t5 += t4
        t4 += t3 + 1
        t3 += t2
        t2 = 1
        t8 %= Mod
        t7 %= Mod
        t6 %= Mod
        t5 %= Mod
        t4 %= Mod
        t3 %= Mod
        c += t8 + t7 + t6 + t5 + t4 + t3 + t2
        c %= Mod
    print(c)
```

Андреев Александр Анатольевич,
руководитель сектора олимпиад школьников
МТУСИ, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: andre01071948@yandex.ru

Максимова Екатерина Алексеевна,
специалист сектора олимпиад школьников МТУСИ.

E-mail: ekamaks@bk.ru

Скородумова Елена Александровна,
доцент кафедры “Теория вероятностей и
прикладная математика” МТУСИ,
кандидат физ.-мат. наук, доцент.

E-mail: eas@mtuci.ru

Из истории математики

Архитектурная математика и теорема Пифагора в Египте III тысячелетия до н.э.

A. H. Ковалев

На основании анализа принятых в истории архитектуры методов и памятников Древнего Египта приведено множество разносторонних доводов, говорящих, что египтяне, скорее всего, знали теорему Пифагора еще в III тысячелетии до н.э. Приведены новые результаты анализа пропорций и размеров некоторых пирамид, поддерживающих этот вывод. Предложен поэтапный путь открытия этой теоремы, основанный на эволюции древнеегипетских методов пропорционирования в архитектуре.

Введение

Обычно источниками для историков математики служат текстовые документы и графические изображения. Но первые математические текстовые документы Древнего Египта относятся только к началу II тысячелетия до н.э. и даже не отражают передовой уровень математики того времени, во многом являясь учебными пособиями — сборниками практических задач и рекомендаций по вычислениям. Для понимания достижений математики предшествующих веков, кроме экстраполяции в прошлое содержания этих источников, можно обратиться к архитектуре III тысячелетия до н.э. Профессиональные историки математики обычно не обращаются к архитектуре столь давнего времени как источнику математических знаний, отчасти из-за чувства невозможности получить из ее анализа достоверные утверждения. Между тем, ее анализ приводит к представлениям, относящимся в том числе и к истории математики, порой значительно отличающихся от общепринятых взглядов. В первую очередь это относится к определению времени появления знания теоремы Пифагора для прямоугольных треугольников в Древнем Египте и вычислению значений квадратных корней. Но историки архитектуры, оглядываясь на историю математики, не спешат признать свои находки, полученные из анализа пропорций и поддерживающие представление о знании некоторых частных случаев теоремы Пифагора в то время, достаточно убедительными для утверждений [15, с. 216–221].

Стоит отметить работы историка науки Щетникова А.И., который продуктивно пользуется анализом архитектуры для получения содержательных утверждений в рамках истории математики [7]. Но в основном остается достаточно ярко выраженный разрыв представлений. Например, в статье историка математики читаем: "... в докреческой (авиленской и египетской) математике точные и приближенные равенства не различались (в частности, при вычислении размеров геометрических величин). Так, равенство отношения диагонали квадрата к стороне дроби $3/2$ или $17/12$ — воспринимались именно как равенства, а не как приближенные равенства. Вычисляя диагональ конкретного квадрата для практических нужд, землемер или архитектор, в зависимости от своих потребностей, получал разную точность отношения ее к стороне. Опыт говорил человеку, что неизмеримых величин не бывает, любую величину можно измерить (с помощью измерительных инструментов)" [3, с. 238–239]. Но анализ египетской архитектуры III тысячелетия до н.э. позволяет говорить о знании уже тогда для отношения диагонали квадрата к стороне дробей $7/5$ (XXX век до н.э.), $17/12$ и $99/70$.

(XXII в. до н.э.) [5, 6]. При этом, в случае знания равенства площади квадрата, построенного на диагонали исходного квадрата, удвоенной площади исходного, которое, как будет показано ниже, египтяне могли обрести еще в XXX веке до н.э., они с легкостью могли удостовериться в приближенности всех этих дробей. И хотя на практике использование конкретной дроби могло устраивать землемера, который мог и не знать об ее приближенности, но архитектор-математик-жрец, особенно если он был автором находки этой дроби, скорее всего, знал о приближенности и прекрасно понимал ее отличие от неизвестной точной. Аналогично, использование еще в первой половине III тысячелетия для отношения диагонали «двойного квадрата» (прямоугольника с отношением сторон 2:1) к меньшей стороне (для $\sqrt{5}$) дробей $11/5$, $9/4$, $47/21$, $123/55$ и $161/72$, как это следует из анализа архитектурных пропорций [Ibid], говорит о том, что архитекторы вряд ли достаточно долго считали каждую из них точным значением. Получение за 400 лет «на заре математики» пяти все более точных дробных приближений для величины диагонали двойного квадрата говорит, что египтяне должны были иметь причину быть неудовлетворенными найденным ранее приближением. В качестве таковой видится знание ими факта равенства площади квадрата, построенного на диагонали двойного квадрата, пяти площадям исходного. Поскольку в этом случае они имели в руках инструмент не только для проверки приближенности каждой из найденных дробей, но и для получения дроби $161/72$. Остается только найти доводы из истории архитектуры для подтверждения сделанных выше двух утверждений. К тому же вавилонская рекуррентная формула вычисления квадратного корня, тождественная формуле Герона (I век), известная, как минимум, с XVII века до н.э., позволяла утверждать, что каждое найденное приближение к $\sqrt{2}$ можно уточнить. Известна клинописная табличка XVIII — XVII вв. до н.э. — YBC 7289, на которой приведено значение $\sqrt{2}$ с точностью до 7 десятичных знаков (1;24,51,10) [8]. Отметим, что дробь $99/70$ дает точность до 5 десятичных знаков. Никакого практического значения точность этой вавилонской дроби не имела. И хотя мы считаем, что жрецы-архитекторы Египта и Вавилона и не знали о существовании несоизмеримых чисел, поскольку не находим свидетельств соответствующего уровня развития теоретической математики, но они могли иметь все основания для знания, что любая из найденных ими дробей является приближенной.

С представлениями о времени появления теоремы Пифагора сложилась несколько парадоксальная ситуация. С одной стороны, нет письменных египетских источников раннее периода Птолемеев (IV — I вв. до н.э.) даже с частными случаями теоремы Пифагора¹, с другой, ее частные случаи, (3, 4, 5) — точно, (20, 21, 29) и (8, 15, 17) — вероятно, отражены в пирамидах III тысячелетия до н.э. Между тем в древневавилонской математике с начала II тысячелетия известна не только эта теорема, но, как это следует из клинописной таблички Plimpton 322, и некоторое общее ее решение в целых числах, например, найденное впоследствии Евклидом [4, с. 49]. Если от доказательства теоремы Пифагора до нахождения Эвклидом общего решения в целых числах для соответствующего квадратного уравнения прошло более двухсот лет, то от простого обретения этой теоремы, предположительно, в Месопотамии до появления этой таблички должно было пройти, скорее всего, не менее 400 лет. Т.е. теорема Пифагора была известна не позднее XXIII века до н.э. Несколько озадачивает возникающий разрыв между знаниями Месопотамии и Египта, с его предшествующим тысячелетним опытом строительства пирамид, с сопутствующим постоянным вниманием к прямоугольным треугольникам.

В истории математики обычно определяется только время знания теоремы Пифагора, без уточнения этапов ее открытия. Представляется, что анализ архитектурной математики Египта III тысячелетия до н.э. может позволить заполнить этот пробел. Но чтобы этот анализ был продуктивным, следует отойти от традиции записывать все архитектурные размеры в царских локтях (rc) и его производных, которая, как отмечается в [5], порой не дает определить истинные пропорции, использованные древними архитекторами Египта. При обычно принимаемом диапазоне возможных

¹В Демотическом папирусе, датируемом III веком до н.э., есть упоминание пифагоровых троек (3, 4, 5), (5, 12, 13) и (20, 21, 29) [13, с. 3–4 и 35–40].

величин для царского локтя, любая длина больше 35 метров представима в царских локтях. Если же диапазон возможных значений rc уменьшить до $52,4 \pm 0,2$ см, то любая длина больше 69 метров представима целым числом таких локтей. Выражение характерных для пирамид размеров в царских локтях несет в себе большую вероятность случайности, и это следует учитывать, особенно если эти размеры вступают в конфликт с анализом пропорций [Ibid]. В статьях [5, 6] уже были приведены факты в пользу знания теоремы Пифагора в Египте времен строительства пирамид, которые здесь будут систематизированы, дополнены и при этом более детально обсуждена вероятность случайного совпадения в их получении.

Теорема Пифагора в Египте III тысячелетия до н.э.

Самой ранней египетской пирамидой, в пропорциях которой, возможно, отражено знание пифагоровой тройки (3, 4, 5), является пирамида Хефрена (XXVI век до н.э.). Но длина ее основания, обычно выражаемая в царских локтях (410 или 411), не позволяет говорить об ее сознательном использовании. Между тем, как пишет Щетников А.И., ее размеры равны: половина основания — 360, высота — 480, апофема — 600 футов (фут = $dsr = 4/7 rc = 29,9$ см) [7]. Тройка (3, 4, 5) могла использоваться при проектировании пирамиды-спутницы Хефрена, пирамид Усеркафа и его жены (XXV в.), Джедкара Исеси (XXV – XXIV вв.), Тети (XXIV в.), Пепи I (XXIV – XXIII вв.), Меренра (XXIII в.) и Пепи II (XXIII в.) [15, App.]. Но более-менее твердо считается, что она была использована только в последней, из-за разрушенности других или из-за неделимости длины основания, выраженной в царских локтях, на три. Отметим, что последняя проблема снимается в случае пирамиды-спутницы Хефрена и пирамиды Усеркафа, если их размеры выразить в основном мерном модуле Хесира в $63,3 \pm 0,3$ см.

Анализ Щетникова более ранней погребальной камеры фараона в Великой пирамиде говорит о знании этой тройки еще при Хеопсе [7]. Некоторые историки архитектуры пишут о знании пифагоровой тройки (20, 21, 29) еще при фараоне Снофру — отце Хеопса и основателе IV династии, говоря, что ей соответствует верхняя часть Ломаной пирамиды и уклон Розовой [11, с. 128]. Если эта тройка и была найдена до возведения Ломаной или Розовой пирамид², то только после «священного египетского треугольника» (3, 4, 5), в результате, скорее всего, инициированного этим фактом поиска других троек методом перебора такого целого n , что:

$$n^2 + (n + 1)^2 = m^2. \quad (1)$$

При $n < 100$ существуют только два решения: $n = 3$ и 20^3 . Но перебор по (1) оправдан только при знании теоремы Пифагора. Эти факты побуждают рассмотреть вопрос о знании теоремы Пифагора в Египте еще в первой половине III тысячелетия до н.э. Анализируя архитектуру того времени, приемы ее проектирования, можно попробовать параллельно восстановить и этапы обретения теоремы Пифагора.

Стартуя с квадрата и его удвоения, с прямоугольника, в который вписывается равносторонний треугольник, архитектура Египта с временем I династии сочетает и развивает различные композиционные варианты построения пропорциональных фигур, основанные на переносе диагонали на горизонталь, с сохранением положения одной ее точки в вершине прямоугольника (выбор размера большего прямоугольника по диагонали меньшего). «Особенность ... построения последовательно увеличивающихся прямоугольников при помощи диагоналей заключается в том, что большие величины (диагонали) оказываются следствием меньших величин — сторон квадрата или прямоугольников. Поэтому в ранних памятниках построение должно было идти от части к целому» [1, с. 139]. Эта особенность могла дать первый толчок к поиску, который мог завершиться обретением

²Есть основания считать, что она могла быть и не обнаружена при Снофру [5].

³Следующее решение $n = 119$.

знания о связи сторон прямоугольного треугольника. Последовательный перенос диагонали квадрата и построение на ней, как на стороне, нового квадрата обнаруживается при анализе гробницы в Негада (XXX века до н.э.), где эта процедура повторена четыре раза, что дает конечный квадрат, в 4 раза больший исходного [1, с. 140, рис. 137, 138]. Интересная для нас часть построения плана этой мастибы изображена на рисунке 1.

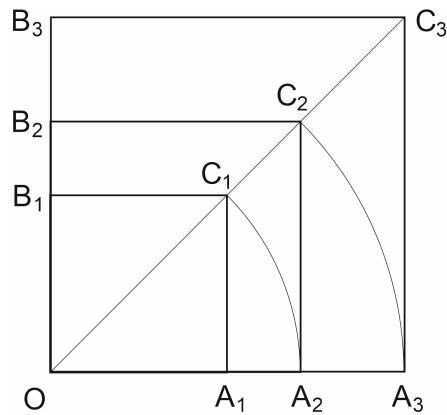


Рис. 1. Пропорциональное построение, мастиба, Негада (XXX век до н.э.).

К определению отношения длины диагонали квадрата к его стороне

Возможно, именно это построение привело к введению геометрической прогрессии в египетскую математику. Из подобия треугольников OC_1A_1 , OC_2A_2 и OC_3A_3 получим: $OA_1 : OA_2 = OA_2 : OA_3$ или $OA_2^2 = OA_1 \cdot OA_3$. В проекте этой мастибы последовательный перенос диагонали квадрата приводит к появлению пяти отрезков — последовательных членов геометрической прогрессии: $OA_1 \div OA_5$.

Непосредственное использование веревочного метода переноса диагоналей в практике строительства, когда речь идет о десятках и даже сотнях метров, достаточно громоздко, что побуждало к поиску значения отношения диагонали квадрата к стороне. Тщательность исполнения плана, разворачивающегося от меньшего размера к большему, необходимость в рамках строительства определения длины отрезка OA_3 (рис. 1) при задании длины OA_1 должны были чисто эмпирически привести к находке: $OA_3 = 2OA_1$. И судя по анализу этой мастибы, это произошло не позже XXX века до н.э. Из подобия треугольников OC_1A_1 , OC_2A_2 и OC_3A_3 и этой находки получим:

$$OA_2^2 = OC_1^2 = 2OA_1^2 = OA_1^2 + A_1C_1^2. \quad (2)$$

Площадь квадрата, построенного на диагонали исходного, равна удвоенной площади исходного. Представляется естественным, что египтяне, у которых еще не сформировалось представление о доказательстве математических утверждений, между тем могли искать некоторое наглядное построение, подтверждающее эту чисто эмпирическую формулу. Т.е. рассматривать построение квадрата на диагонали исходного и прийти к достаточно очевидной находке, выраженной на рисунке 2, которая наглядно демонстрировала верность исходного утверждения. Но обретение формулы связи длин диагонали и стороны квадрата с неизбежностью приводит к узнаванию, через проверку, факта приближенности любых найденных дробей для их отношения.

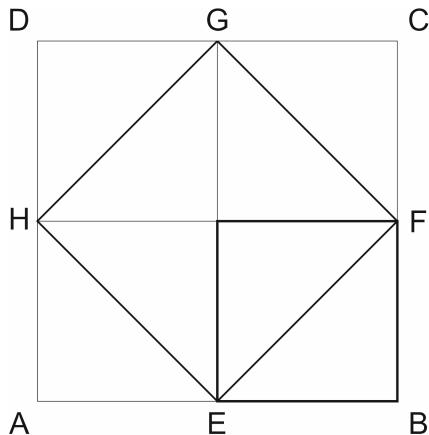


Рис. 2. К определению площади, построенной на диагонали квадрата

Метод пропорционального проектирования, основанный на переносе диагонали исходного прямоугольника, как известно, привел к появлению в строительстве прямоугольников с пропорциями, в современном обозначении: $\sqrt{5} : 1$ и $\sqrt{5} : 2$ [1, с. 139, рис. 133, 135]. И если сначала могли использовать пару мерных модулей, связанных геометрическим построением диагонали двойного квадрата, то потом, не позже III династии, для отношения его диагонали к стороне (для $\sqrt{5}$) уже использовали дробные приближения [5]. Естественно, первым чисто эмпирически найденным приближением для $\sqrt{5}$ было 11:5. О возможности использования дроби 11/5 для $\sqrt{5}$ говорят размеры масштабы визиря Хемаки, воздвигнутой в Саккаре при фараоне I династии Депе (XXX в. до н.э.): $57,3 \times 26,0$ м [1, с. 45]. Отношение ее сторон равно $2,20 \pm 0,01$. При фараоне Джосере (III династия, XXVII в. до н.э.) для $\sqrt{5}$ уже используется приближение 9/4 [5]. Как и когда могло прийти понимание, что эти дроби — только приближения для отношения диагонали двойного квадрата (d) к его меньшей стороне (a)? Масштаба в Бет-Халлафе, в 23 км к северу от царского некрополя в Абидосе, относящейся к III династии (XXVII век до н.э.), имеет размеры $91,4 \times 45,74$ м [1, с. 174-175] или 87 на 174 гс. 87 и 174 — не круглые числа, не несущие в себе какой-либо особенности, и при таких длинах, как отмечалось во введении, их появление — случайность. Если отойти от традиционного для историков архитектуры выражения всех размеров в царских локтях и использовать введенный не позднее начала третьей династии основной мерный модуль Хесира в $63,5$ см⁴ (m_1), который использовался и в Великой пирамиде, и, как показывает более тщательный анализ, в других пирамидах, то ее размеры в нем будут 144×72 [5]. Но:

$$72^2 + 144^2 = 161^2 - 1. \quad (3)$$

Можно предположить, что именно равенство диагонали двойного квадрата, взятого для масштабы, 161 у.е. и было основанием для выбора этих размеров. Наиболее вероятно дробь 161/72 для отношения диагонали двойного квадрата к стороне была найдена как среднее арифметическое между двумя дробями: $9/4(a_1)$ и $20/9(a_1^*)$ ⁵ — приближениями к $\sqrt{5}$, которые будем называть “сопряженными” ($a_1 \times a_1^* = 5$), и этот способ уже предполагает знание формулы:

$$d^2 = 5 \times a^2 = a^2 + (2a)^2. \quad (4)$$

Поскольку $\sqrt{5}$ — среднегеометрическое a_1 и a_1^* , то приближение к нему могло искасться как среднеарифметическое этих чисел, и $1/2 \cdot (9/4 + 20/9) = 161/72$. Отметим, что аналогичным образом могла быть найдена дробь $99/70$ для $\sqrt{2}$, использованная в пирамидах XXII века до н.э. [6] как

⁴На выбор длины этого модуля могли повлиять размеры исторически и религиозно значимых предметов. Так знаменитая палетка Нармера (Менеса), основателя первой династии, имеет высоту 63,5 см.

⁵ $20/9$ — подходящая дробь с $\varepsilon = 0,2\%$ для пропорции погребальной камеры пирамиды Снофру в Мейдуме (590 на 265 см [10, с. 8]), которая, скорее всего, и была использована в ней.

среднее арифметическое между сопряженными дробями $7/5$ и $10/7$. Но этот прием тождествен вавилонской рекуррентной формуле, наиболее ранний пример применения которой относится к XVIII – XVII вв. до н.э. [8]. Примеры из древнеегипетской архитектуры говорят об ее использовании, как минимум, на 400 лет раньше. Если появление дроби $161/72$ в анализе размеров масштабы — не проявление случайности, то — на тысячу лет раньше. С некоторой очевидностью, формула (2) была найдена раньше (4), т.е. не позже XXVII века до н.э.

Каким образом могли найти формулу (4)? Чисто эмпирически, произведя два последовательных сноса диагонали двойного квадрата, аналогично изображенном на рис. 1. Но могли искать и построение, подобное изображенном на рисунке 2, и в результате прийти к рисунку 3, из которого сразу следует верность (4).

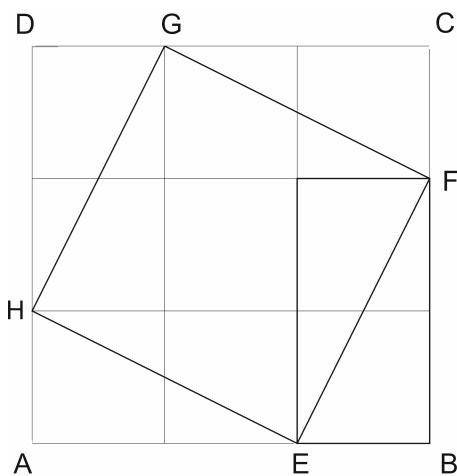


Рис. 3. К определению площади, построенной на диагонали двойного квадрата

Рассмотрение прямоугольников с отношением сторон $1 : 1$, $1 : \sqrt{2}$, $1 : \sqrt{3}$, $1 : 2$, $1 : \sqrt{5}$ в первой половине III тысячелетия до н.э., согласно истории архитектуры, привели к построению, изображенном на рисунке 4, где $ADCD$ — квадрат, $ADLK$ — двойной квадрат. Оно включается во все учебники по истории архитектуры Древнего Египта и называется “системой диагоналей” [1, с. 138–139]. После получения формул (2) и (4) оно могло способствовать нахождению связи катетов в прямоугольном треугольнике, у которого гипотенуза в два раза больше основания.

Для этого достаточно было, по аналогии с построением рисунка 1, построить два прямоугольника, пропорциональных $ADFE$ рисунка 4. На рисунке 5 приведено это построение с некоторым излишеством, для подчеркивания связей, которые могли обнаружить.

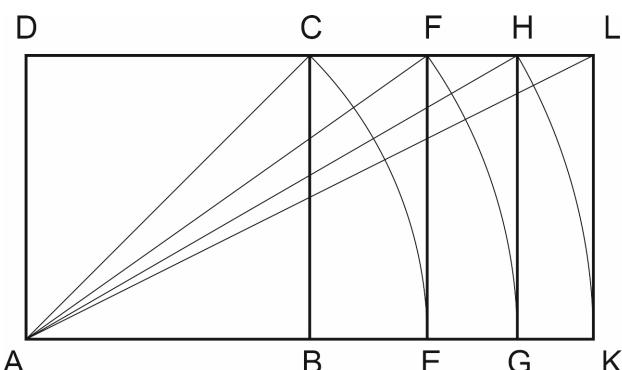


Рис. 4. “Система диагоналей” в истории египетской архитектуры.
От квадрата $ABCD$ – к двойному квадрату $AKLD$ [1, с. 138–139]

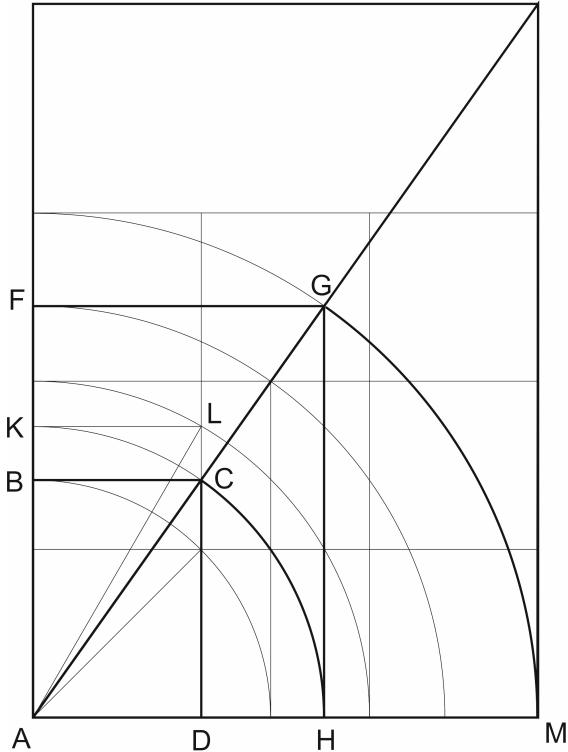


Рис. 5. К определению высоты равностороннего треугольника

Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle AGH$ следует: $AC/AG = AD/AH$ или $AG \cdot AD = AH \cdot AC = AC^2$, т.к. $AH = AC$. Если во время этого построения, как и в случае с последовательным сносом диагонали квадрата, эмпирически было определено, что $AG = AM = 3AD$, то:

$$AC^2 = 3 \cdot AD^2 = AD^2 + 2AD^2 = AD^2 + DC^2 \quad (5a)$$

Поскольку $AC = AK$ и $AL = 2AD$, то $\triangle AKL$ — половина равностороннего, и площадь квадрата, построенного на высоте равностороннего, в 3 раза больше площади квадрата, построенного на половине длины основания, и:

$$|AL|^2 = |2AD|^2 = |AD|^2 + 3|AD|^2 = |AD|^2 + |DL|^2 \quad (5b)$$

Хотя эта находка представляется менее ожидаемой, чем две предыдущие, и ее обретение во времена I—III династий, в отличии от двух предыдущих, можно поставить под сомнение. Треугольник ACD в качестве каркасного (половина основания — высота — апофема) используется в первой фазе Ломаной пирамиды Снофру, с приближением $7/5$ для $\sqrt{2}$ [14]. Если обнаружится использование в архитектуре дроби $97/56$, которая является средним арифметическим дробей $7/4$ и $12/7$, то это будет весомый довод за знание формул (5).

После нахождения формул (2), (4) и (5), рисунок 4 — вполне достаточное основание для формулирования теоремы Пифагора. Но нам почти ничего не известно о математических знаниях, приемах и навыках египетских математиков первой половины III тысячелетия. Насколько они были склонны искать обобщения частных формул? На современный взгляд, формул (2) — (5) достаточно, чтобы появилась гипотеза о связи сторон прямоугольного треугольника. Остается для большей общности найти один-два случая, когда меньшая сторона прямоугольного треугольника не равна одной у.е. И здесь обретение пифагоровых троек $(3, 4, 5)$ и, возможно, $(20, 21, 29)$ — последние шаги для появления уверенности в верности формулы, которая могла играть значительную роль в проектировании

пирамид. Но для перевода какого-либо факта из категории «могли» в «сделали» желательно найти побольше поддерживающих доводов.

Архитектурные методы Древнего Египта требовали особого внимания к подобным прямоугольным треугольникам. Построение по рисункам, подобным рис. 1 и рис. 5, давало решение задачи нахождения квадрата, равновеликого прямоугольнику в частных случаях пропорции последнего $2 : 1$, $3 : 1$ и $5 : 1$, и могло вызвать интерес к общей задаче квадратуры прямоугольника. Построение в пирамидах «воздуховодов» из погребальных камер перпендикулярно грани и апофеме (пирамида Хеопса, камера жены фараона) побуждало более внимательно рассмотреть высоту (h), опущенную на гипотенузу (c) прямоугольного треугольника, и делящую ее на отрезки x и y ($c = x + y$). Этот интерес мог быть поддержан фактом попадания в построениях, аналогичных рис. 5, высоты, проведенной из вершины M прямоугольного треугольника на гипотенузу, в точку C . В рамках этого построения и интереса к подобным треугольникам и геометрической прогрессии намечается самый легкий путь к доказательству теоремы Пифагора, поскольку из подобия возникающих треугольников следует: $a^2 = x \times c$ и $b^2 = y \times c$. Складывая, получим: $a^2 + b^2 = (x + y) \times c = c^2$. Но рассмотрение подобия треугольников, возникающих при построении высоты, предполагает введение правила подобия по равенству углов или достаточно развитое пространственное воображение, чтобы в уме повернуть треугольник и увидеть подобие. Хотя и знание в Египте около 1900 года до н.э. точной формулы объема усеченной пирамиды представляет загадку ее нахождения, где самый простой способ подразумевает еще более сильно развитое пространственное воображение, позволившее архитектору-жрецу разделить усеченную пирамиду на 4 части и сложить их [4, с. 32].

Есть ряд пирамид, уклон которых позволяет предположить, что в них была использована пифагорова тройка (8, 15, 17), и только представление, что во время их строительства теорема Пифагора не была известна, оставляет вопрос открытым. И первая из них принадлежит жене фараона Тети (XXIV в. до н.э.) — Ипут I. Ее уклон равен 62^0 , для тангенса которого есть подходящая дробь $15/8(\text{artg}(15/8) \approx 61^0 56'$). Естественно считать, в рамках развивающегося здесь подхода, что этот уклон был выбран дляувековечивания находки: $8^2 + 15^2 = 17^2$. Традиционно длина ее основания записывается в царских локтях — 40, половина которого не делится на 8. Но половина длины основания равна и 16 Nbj , где $\text{Nb}j = 65,6$ см — мерный модуль, который, видимо, делился, как и царский локоть, на 7 частей [9, с. 46]. Запись размеров пирамид в нем (или в m_1) часто устраниет нестыковки между уклоном и представлением о целочисленности их высоты. В $\text{Nb}j$ целочисленными являются и высота (30), и апофема (34) этой пирамиды.

Что еще позволяет нам считать, что теорема была обретена в первой половине III тысячелетия?.. Историк архитектуры Коринна Росси считает, что уклон первой фазы Ломаной пирамиды есть приближение к $\sqrt{2}$, который был выбран, поскольку при нем боковая грань получается равносторонним треугольником [14]. Но каким образом древние архитекторы это узнали?! Если им была известна теорема Пифагора и, как следствие, равенство отношения высоты равностороннего треугольника, которая в такой пирамиде будет апофемой, к половине его основания, — $\sqrt{3}$, то прийти к выбору такого уклона просто, рассмотрев каркасный прямоугольный треугольник, образованный половиной основания и высотой пирамиды. При незнании теоремы Пифагора приходится считать, что древние архитекторы пришли к такой находке в результате модельного эксперимента, изготовив четыре одинаковых равносторонних треугольника, выстроив их по сторонам квадрата, соединив их вершины, и таким-то образом измерив высоту получающейся пирамиды.

Во времена фараона Джоссера в рамках поиска третьей стороны прямоугольных треугольников, у которых: а) два катета равны; б) один катет в два раза больше второго и в) гипотенуза в два раза больше меньшего катета, были найдены для соответствующих отношений сторон дроби $7/5$, $7/4$ и $9/4$ [5]. Формулы (2) и (4) при сравнении с дробями $7/5$ и $9/4$ говорили о приближенности последних и могли привести к формулам:

$$5^2 + 5^2 = 7^2 + 1. \quad (6)$$

$$4^2 + 8^2 = 9^2 - 1. \quad (7)$$

После этого для прямоугольного треугольника, равного половине равностороннего, с приближенным значением высоты в 7 у.е., при равенстве основания и гипотенузы 4 и 8 у.е. соответственно, могли аналогично получить (даже не зная (5)):

$$4^2 + 7^2 = 8^2 + 1, \quad (8)$$

В [5, 6] отмечается, что эти находки могли не только способствовать открытию теоремы Пифагора, но и пробудить параллельный интерес к нахождению *идеальных квазипифагоровых троек* (a, b, c) (и.к.т.), которые определим как:

$$a^2 + b^2 = c^2 \pm 1. \quad (9)$$

В качестве последних можно отметить тройки для гипотетически найденных более точных приближений $\sqrt{2}$:

$$70^2 + 70^2 = 99^2 - 1. \quad (10)$$

и $\sqrt{5}$ (формула 3).

Но в рамках архитектурных потребностей могли искааться идеальные квазипифагоровы тройки для прямоугольников с заданным отношением сторон a/b , которые удовлетворяют общей формуле:

$$(a \cdot m)^2 + (b \cdot m)^2 = n^2 \pm 1. \quad (11)$$

Например, если задана пропорция 3 : 7 (два числа Осириса), то первой тройкой вида (11), с наименьшим сомножителем m , будет:

$$(3 \cdot 13)^2 + (7 \cdot 13)^2 = 99^2 + 1.^6 \quad (12)$$

Дробь 3/7 является подходящей дробью для отношения горизонтальных внешних размеров саркофага в Великой пирамиде ($\varepsilon = 0,26\%$). Эти размеры — 978 × 2276 мм (измерения В. Петри [12, с. 53]) — равны целым числам только в “больших пальцах” (аналог дюйма), 39 = 3 · 13 и 91 = 7 · 13, где дюйм определяется как 1/21 гс (2,5 см). Согласно (12), его диагональ с очень хорошей точностью равна 9 × 11 дюймов.

Обнаруженная на основании анализа размеров саркофага формула (12) — пример возможного, неожиданно сильного, развития определенной стороны алгебраической математики. Она — первый претендент на свидетельство, что египтяне не только прошли путь, выраженный в формулах (6) — (8), но и смогли значительно продвинуться в этом направлении. Поэтому возможность случайного совпадения требует отдельного обсуждения. Во-первых, египтяне все размеры в храмовых постройках выбирали равными целым числам конкретных мерных единиц длины. Во-вторых, как это следует из анализа архитектурной математики, в выбранных размерах пирамид, погребальных камер и саркофагов, архитекторы старались заложить последние математические находки своего времени [5 — 7]. Дюйм — мерная единица, появившаяся, скорее всего, перед самым строительством Великой пирамиды, несла в себе одновременно нумерологическую (21 — произведение двух чисел Осириса) и математическую (находка дроби 47/21 для $\sqrt{5}$) нагрузки [6], поэтому достаточно естественен выбор именно ее для задания размеров саркофага. У дюйма только один недостаток в качестве модуля для саркофага — слишком мал. Более того, при малости размера дюйма, представляется непонятным (если формула (12) — случайное совпадение) выбор несколько избыточных размеров саркофага (длина 2,276 метра) по отношению к размерам мумии. На первый взгляд, при сохранении пропорции 7 : 3, более естественным был бы выбор размеров: 7 × 12 на 3 × 12 дюймов = 7 на 3 дср = 210 на 90 см. В этом случае размеры саркофага были бы ближе к потребностям, выражались бы в дср, и

⁶Следующее m , при котором появляется идеальная квазипифагорова тройка, равно 2574.

содержали бы в себе число 12 — символ циклического хода времени (число часов в дне и месяцев в году). Но архитектор выбрал именно существующий вариант при отсутствии, как сейчас считается, особого нумерологического значения числа 13 в Египте начала III тысячелетия до н.э. Несмотря на все эти доводы, небольшая вероятность случайного совпадения все-таки остается, и хорошо бы найти другие примеры использования формулы (11).

Щетников предполагает, что у пирамиды Микерина в Гизе было основание в 200 гс и высота — 125 гс, отношение высоты к половине основания — 5/4, и использовали идеальную квазифагорову тройку (20, 25, 32) [7]:

$$(4 \cdot 5)^2 + (5 \cdot 5)^2 = 32^2 + 1. \quad (13)$$

Но этот случай может являться и случайным совпадением, поскольку половина основания не равна 20 известным египетским единицам длины. И основание, которое в данном случае обязано быть кратно 8, всегда кратно 5, поскольку основания пирамид выбирались кратными 10 у.е. Щетников вводит “сажень Г”, равную 5 гс; в ней половина основания равна 20. Но эта сажень, в отличии от оргии в 4 гс, не обнаруживается при классическом анализе древнеегипетской архитектуры. Но чрезмерная склонность все размеры выражать в царских локтях, и соответствующая узость метрологического анализа древней египетской архитектуры, как отмечалось выше, не дают порой определить ни реально используемые в проектировании модули длины, ни заложенные в отношениях размеров пропорции и, как следствие, причины их выборов. Если “сажень Г” обнаружится в последующем, то появление формулы (13) для пирамиды Микерина перестанет быть “очевидной случайностью”. Доводом за то, что она могла существовать, является ее равенство 4 Nb⁷. Есть основания считать, что этот модуль появился при Снофру⁸, основателе династии, к которой принадлежит и Микерин.

Для уклона пирамиды жены Микерина в 52,25⁰ (ГИІа) [15, App.] есть подходящая дробь 9/7 ($\varepsilon = 0,45\%$). Принято считать, что длина ее основания равна 84 гс [Ibid]. Но если длину ее основания (44,3 м [2, с. 293]) поделить на 84, то получим $rc = 52,74$ см — достаточно значительно выходит за пределы $52,4 \pm 0,2$ см, чтобы сомневаться, что древние египтяне использовали в данном случае царский локоть. Но она равна 70 основных мерных модулей Хесира по 63,3 см (m_1) [5]. Тогда длина половины основания равна $5 \cdot 7m_1$, а высота $5 \cdot 9m_1$, и

$$(5 \cdot 7)^2 + (5 \cdot 9)^2 = 57^2 + 1. \quad (14)$$

Апофема пирамиды с хорошей точностью равна $57 m_1$. Стоит отметить, что три находки, поддерживающие гипотезу о поиске решений уравнения (11) при заданных a и b , разделяет менее ста лет.

В пользу знания теоремы Пифагора в III тысячелетии свидетельствуют и некоторые пирамиды, все линейные размеры которых (основание, диагональ основания, боковое ребро, апофема) если не равны, то очень близки к целым числам в у.е. Но и здесь многие «результаты» могли быть и не обнаружены архитекторами. Так для обсуждаемых в [6] пирамид Нейт, жены Пепи II (XXII в. до н.э.), и Сенусерта I (ХХ в. до н.э.), выбор их уклона (9/5) и размера основания в 70 у.е. могли быть обусловлены только: а) длиной диагонали основания в 99 у.е., и б) получающимся при этом уклоне ребра в 14/11. А хорошие приближения к целочисленности в у.е. длин апофемы и бокового ребра могли остаться и не замеченными.

Приведенные выше пирамиды — из тех, размер основания и уклон боковой грани которых получают объяснение только в рамках истории математики. Но при этом часто получается результат, с трудом укладываемый в рамки традиционного представления, сформированного не столько нашими знаниями, сколько — незнанием. И таких пирамид много. Например, пирамида Сенусерта II (XIX в. до н.э.) имеет уклон 42⁰ 37' [15 App.], для тангенса которого есть две подходящие дроби:

⁷Оргия равнялась 4 единицам, которые можно было условно считать “локтями”.

⁸65,6 см — основной мерный модуль пирамиды Снофру в Мейдуме [5, с. 51].

11/12 и 23/25 (погрешность последней в пределах измерения). Поскольку длина половины ее основания равна 25 оргиям (100 rc), то, скорее всего, была заложена вторая дробь. Но почему были выбраны эти размеры и уклон? Может, из-за того, что существует квазипифагорова тройка (23, 25, 34) : $23^2 + 25^2 = 34^2 - 2$? Архитектор мог счесть эту находку достойнойувековечивания в размерах пирамиды.

Вся сумма приведенных фактов и доводов является серьезным поводом считать, что теорема Пифагора была известна в Египте в III тысячелетии до н.э., и, возможно, говорит о хорошо развитом навыке делать математические обобщения из небольшого ряда частных случаев.

Заключение

Многие утверждения статьи об этапах открытия теоремы Пифагора носят вероятностный характер – египтяне могли их узнать, но не обязательно. И только результаты анализа пропорций архитектурных сооружений — масштабы Бет-Халлафе ($\sqrt{5} \approx 161/72$), саркофага Великой пирамиды, пирамиды жен фараонов Микерина и Тети (квазипифагоровы тройки), пирамид Нейт и Сенусерта I ($\sqrt{2} \approx 99/70$) — служат серьезной основой этих утверждений. Но сами эти результаты, в рамках традиционного представления об уровне египетской математики III тысячелетия до н.э., кажутся невероятными, что побуждает считать их возможным проявлением случайного совпадения. Противостоять этому мнению можно, с одной стороны, показывая, насколько выбор в III тысячелетии до н.э. размеров и пропорций религиозно значимых предметов и строений подчинялся математическим достижениям своего времени, с другой, делая новые находки, которые бы обосновывали и уточняли предлагаемую здесь историю открытия теоремы Пифагора в Древнем Египте. Автор статьи, не будучи историком архитектуры, привел только те случаи, на которые наткнулся в рамках не очень глубокого знакомства с общедоступными и сравнительно старыми книгами по истории архитектуры. Представляется, что еще будут найдены примеры, которые поддержат предложенную здесь концепцию. Для ускорения появления этих находок желательно отойти от традиции выражать все египетские измерения в царских локтях и его производных⁹. Но более тщательный анализ показывает, что, как в Месопотамии и Египте, так и в Греции, например, в таких храмах, как Парфенон и Ерехтейон, при проектировании использовали комплексы модулей, часто связанных общим геометрическим построением. Уточнение математических знаний Древнего Египта III тысячелетия до н.э., извлекаемые из анализа архитектуры, должно идти в ногу с развитием представлений об использовании комплексов мерных модулей в ней.

Литература

- [1] Всеобщая история архитектуры. В 12 т. Т. I. Архитектура древнего мира. Изд. 2-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1970. - 512 с.
- [2] Замаровский В. Их величества пирамиды. - М.: Наука, 1981.
- [3] Зверкина Г.А. Алгоритм Евклида как вычислительное средство античной математики // Историко-математические исследования. - Выпуск 5(40). - 2000. - С. 232-243.
- [4] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т, Т. 1. - М.: Наука, 1970.
- [5] Ковалев А.Н. Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царств // Математическое образование. - № 102. - 2022. - С. 43-54.

⁹ В [9] показано, что кроме царского локтя и его производных существовали и другие мерные модули, но не делается попытки связать их происхождение и размеры с каким-либо геометрическим построением.

- [6] Ковалев А.Н. Дроби для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, квазипифагоровы тройки и появление царского локтя, фута и дюйма в Египте времен Древнего царства, Часть II // Математическое образование. - № 105. - 2023. - С. 54–66.
- [7] Щетников А.И. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. - 2006. - № 3(38). - С. 59-71.
- [8] Fowler D., Robson E., Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context // Historia Mathematica. - 1998. - V. 25. - No 4. - P. 366-378.
- [9] Hirsch Antoine Pierre, Ancient Egyptian Cubits — Origin and Evolution. - PhD thesis. - Toronto, 2013.
- [10] Irigaray Christian, The Pyramids of Sneferu. - Montevideo, 2020.
- [11] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Memfite, Parte III, Il Complesso di Meydum, la piramide a Doppia Pendenza e la piramide Settentrionale in Pietra di Dahsciur. - Torino: Artale, 1964.
- [12] Maragioglio V., Rinaldi C. L'architettura delle Piramidi Menfite, Parte IV,. Le Grande Piramide di Cheope. - Torino: Artale, 1965.
- [13] Parker Richard A. Demotic Mathematical Papyri. - Providence, R.I.: Brown University Press, London: Humphries, 1972.
- [14] Rossi C. Note on the Pyramidion Found at Dahshur // JEA. - 85. - 1999. P. 219-222.
- [15] Rossi C. Architecture and mathematics in Ancient Egypt. - Cambridge University press, 2003.

Ковалев Андрей Николаевич,
Санкт-Петербург.

E-mail: ser.levsha@yandex.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2024 год (1 экз., включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2024 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

In Memory of Semyon Grigorievich Slobodnik (03/04/1948 – 02/27/2024)	2
---	----------

We present to the reader's attention a short obituary and author's materials of Semyon Grigorievich Slobodnik, mathematics teacher at the School 179 in Moscow.

V. Gaichenkov. Reflections on Bending a Rectangle. Special Rectangle Theorem	11
---	-----------

Consider a rectangle with sides a , b , and $a < b$. The rectangle is bent along a straight line passing through its center. We are interested in the question: at what angle should the bend be made so that the intersection area is the smallest?

S. Dvoryaninov, A. Mamkhegov. Special Math Problems	19
--	-----------

Examples are considered when, due to an oversight of the authors of problems, non-existent objects are described in them.

A. Polyanin, I. Shingareva. Non-Classical Symmetries and Reductions of Algebraic Equations and Systems of Equations	22
--	-----------

Non-classical symmetries and reductions of algebraic equations and systems of algebraic equations are considered. Transformations that preserve the form of some algebraic equations, as well as transformations that reduce the order of these equations, are described.

A. Semyonov. Generalization of one Task of the Tournament of the Towns. Crow and Berries	35
---	-----------

At the 45th Tournament of the Towns, an interesting problem was proposed for a certain special case. This article provides a solution to the problem in the general case.

E. Krivoshey. Generalized Integrable Combinations	43
--	-----------

The article proposes a general method of constructing integrable combinations for systems of linear differential equations. Systems of one and several variables are considered for homogeneous and inhomogeneous models.

V. Fedoseev. Huygens' Formula as a Topic for Analytical Research	51
---	-----------

The article proposes the well-known "Huygens formula" as an object for research. In this case, the goals are to consider various aspects of the content of this issue using the apparatus of calculus and constructive theory of functions.

A. Andreev, E. Skorodumova, E. Maximova. Olympiad for Schoolchildren "TIIM — Technologies. Intelligence. Computer science. Mathematics" 2023/2024	55
--	-----------

The article talks about the Olympiad for schoolchildren in mathematics and computer science "TIIM" for the 2023/24 academic year. Problems of the qualifying round in mathematics for grades 10-11 with answers, problems of the final round in mathematics for grade 11 with solutions, as well as examples of problems of the qualifying and final rounds in computer science with solutions are given.

A. Kovalev. Architectural Mathematics and the Pythagorean Theorem in Egypt of the 3rd Millennium BC	69
--	-----------

New results from an analysis of the proportions and sizes of some pyramids are presented that support the conclusion that the Egyptians most likely knew the Pythagorean theorem back in the 3rd millennium BC. A step-by-step path for the discovery of this theorem is proposed, based on the evolution of ancient Egyptian methods of proportioning in architecture.

