

# Математическое Образование

Журнал Фонда математического  
образования и просвещения

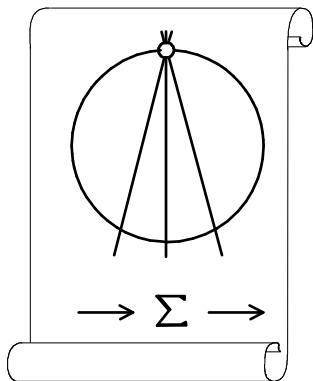
Год двадцать восьмой

№ 3 (111)

июль - сентябрь 2024 г.

Москва

*Периодическое учебно-методическое издание  
в области математического образования*



Издатель и учредитель: Фонд  
математического образования и просвещения  
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

**Главный редактор**

Имайкин В.М.

**Редакционная коллегия**

Бондал А.И.

Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)

Дубовицкий А.В.

Канель-Белов А.Я.

Комаров С.И.

**Константинов Н.Н.**

Костенко И.П.

Саблин А.И.

№ 3 (111), 2024 г.

© “Математическое образование”, составление, 2024 г.

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2024 г.

“Математическое образование”, периодическое издание.

Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.

Подписано к печати 21.10.2024 г.

Стиль верстки разработан С.А. Кулеповым.

Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.

Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.

Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

# Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (111), июль – сентябрь 2024 г.

## Содержание

### Учащимся и учителям средней школы

<i>А. Н. Афанасьев.</i> Трилинейные координаты и коллинеарность	2
<i>О. П. Виноградов.</i> О производящих функциях при решении вероятностных задач	10
<i>Е. В. Щепин.</i> Натуральный логарифм	17

### Студентам и преподавателям математических специальностей

<i>Н. В. Илюшечкин.</i> О кратностях собственных чисел пары квадратичных форм	26
<i>Л. И. Родина, А. В. Черникова.</i> О свойствах систем дифференциальных уравнений и задачах оптимальной добычи ресурса	31

### Приложения математики

<i>Н. И. Сидняев, Л. С. Скляринский.</i> О роли современного математического образования при реализации сложных задач в области химии	46
---	----

### Образовательные инициативы

<i>А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, А. А. Шапиро.</i> Математический футбол	53
---	----

### Из истории науки

<i>В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук.</i> Вселенская задача: Исаак Ньютон	58
--	----

### Информация

<i>От редакции.</i> Замеченные ошибки в № 2(110), 2024 г.	70
---	----

## Трилинейные координаты и коллинеарность

А. Н. Афанасьев

В статье приводятся примеры применения трилинейных координат для доказательства известных теорем о коллинеарности.

Статья В.М. Тихомирова “Олимпиады и геометрия” [1] наводит на мысль, что наряду с красивыми геометрическими решениями олимпиадных задач, нельзя пренебрегать и аналитическими приемами решения геометрических задач. При решении некоторых олимпиадных задач по планиметрии оказывается полезным задание точек при помощи трилинейных координат. В настоящей статье приводятся примеры доказательства четырех теорем о коллинеарности при помощи трилинейных координат. Доказательства первых трех из них, при помощи комплексных чисел, можно найти в вышеназванной статье и в [2].

Пусть  $x, y, z$  — расстояния от точки  $P$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , до сторон  $BC, CA, AB$  (смотри Рис. 1). Тогда набор чисел  $(x : y : z)$  называют *абсолютными трилинейными координатами*

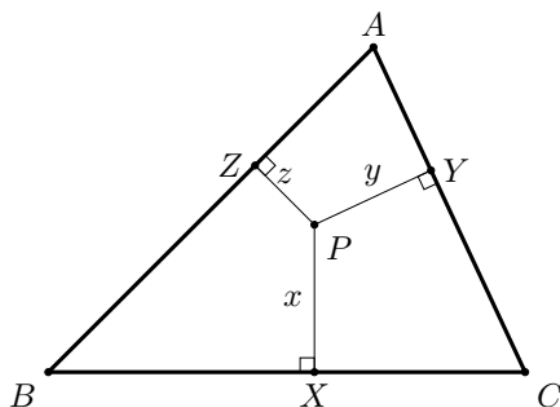


Рис. 1.

точки  $P$ . Заметим, что такая запись выбрана не случайно, так как трилинейные координаты точки определены с точностью до пропорциональности, то есть важны не сами значения этих чисел, а их отношения. Так что для указанной выше точки  $P$ , любая тройка чисел  $(x' : y' : z')$ , такая, что  $x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z$  для некоторого  $\lambda > 0$ , так же подойдет в качестве трилинейных координат (если  $\lambda \neq 1$  — не абсолютных).

**Замечание 1.** Трилинейные координаты можно определить не только для внутренних точек треугольника, но и для всех точек плоскости. Будем считать, что  $x, y, z$  пропорциональны расстояниям от точки  $P$  до прямых  $BC, CA, AB$  с учетом знака, т.е.  $x > 0$ , если точки  $P$  и  $A$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$ , и  $x < 0$ , если точки  $P$  и  $A$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$ ; знаки чисел  $y$  и  $z$  определяются аналогично.

Пусть  $(x_1 : y_1 : z_1), (x_2 : y_2 : z_2)$  и  $(x : y : z)$  соответственно — трилинейные координаты точек  $P_1, P_2$  и  $P$ , лежащих на прямой  $l$ . Выберем направление на прямой  $l$ .

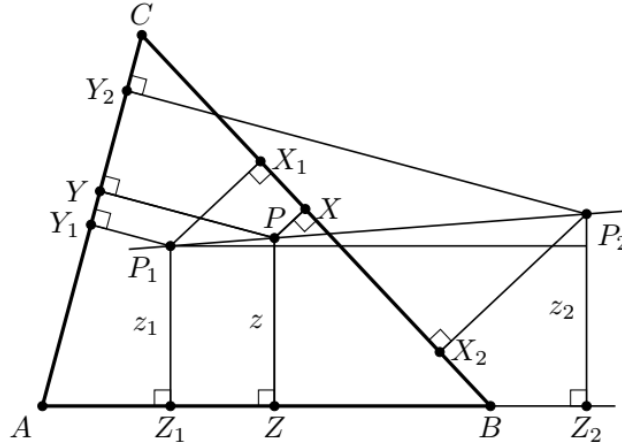


Рис. 2.

Тогда

$$z = z_1 + (z - z_1) = z_1 + (z_2 - z_1)t = (1 - t)z_1 + tz_2, \text{ где } t = \frac{P_1P}{P_1P_2} \in R. \quad (1)$$

Аналогично:

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t = (1 - t)y_1 + ty_2 \quad (2)$$

и

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t = (1 - t)x_1 + tx_2. \quad (3)$$

Обратно, если выполнены равенства (1), (2) и (3), то точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_2$ , с трилинейными координатам  $(x_1 : y_1 : z_1)$ ,  $(x_2 : y_2 : z_2)$  и  $(x : y : z)$  соответственно, лежат на одной прямой. В частности, точка  $P$  — середина отрезка  $P_1P_2$ , тогда и только тогда, когда в трилинейных координатах верны равенства:

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \quad (5)$$

$$z = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2, \quad (6)$$

Таким образом, так же как и для евклидовых координат точек трехмерного пространства, коллинеарность точек  $P_1(a_{11} : a_{12} : a_{13})$ ,  $P_2(a_{21} : a_{22} : a_{23})$ ,  $P_3(a_{31} : a_{32} : a_{33})$ , заданных их трилинейными координатами, равносильна линейной зависимости строк (или столбцов) матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

что равносильно равенству

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобится преобразовать известные трилинейные координаты [3] ортоцентра  $H$  и центроида  $G$  треугольника  $ABC$ , в котором  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ :

$$H \left( \frac{1}{\cos \alpha} : \frac{1}{\cos \beta} : \frac{1}{\cos \gamma} \right),$$

$$G\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$$

в удобный для нас вид.

Координаты ортоцентра умножим на  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ , и получим:

$$H (\cos \beta \cos \gamma : \cos \alpha \cos \gamma : \cos \alpha \cos \beta), \quad (9)$$

а координаты центроида умножим на  $2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  и, учитывая, что  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta$ ,  $c = 2R \sin \gamma$ , получим:

$$G(\sin \beta \sin \gamma : \sin \alpha \sin \gamma : \sin \alpha \sin \beta). \quad (10)$$

Кроме того, известно, что трилинейные координаты центра описанной окружности равны:

$$O (\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma). \quad (11)$$

**Теорема 1** (Прямая Эйлера). *В любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанного круга лежат, на одной прямой.*

**Доказательство.** Пусть  $H$ ,  $G$ , и  $O$  — ортоцентр, центроид и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ , в котором  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ .

Тогда, учитывая (9), (10) и (11), коллинеарность этих трех точек следует из равенств:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma &= \cos (\beta + \gamma) = -\cos \alpha, \\ \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha &= \cos (\gamma + \alpha) = -\cos \beta, \\ \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta &= \cos (\alpha + \beta) = -\cos \gamma. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Далее мы докажем, еще три теоремы о коллинеарности. Их доказательства при помощи комплексных чисел можно найти в [1,2]. Первые две из них иногда называют теоремами Ньютона, а мы называли их как они были названы в [1]. Об этих двух теоремах можно прочитать еще в разделе “Замечательные теоремы и факты геометрии” (В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин) книги “Факультативный курс по математике” [4], составитель И.Л. Никольская (с. 342).

Для доказательства второй теоремы нам понадобится результат следующей леммы.

**Лемма 1.** *Пусть в описанном четырехугольнике  $ABCD$  продолжения сторон  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ , а  $r$  — радиус окружности, вокруг которой описан четырехугольник (смотри Рис. 3). Тогда верно равенство:*

$$(CE + DE - CD) \cdot AE \cdot BE = (AE + BE + AB) \cdot CE \cdot DE.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\begin{aligned} 2S_{CDE} &= 2S_{ABE} - 2S_{ABCD} = \\ &= (CE + DE + AB + BC + AD) \cdot r - (AB + BC + CD + AD) \cdot r = \\ &= (CE + DE - CD) \cdot r. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что верно и равенство

$$2S_{CDE} = 2S_{ABE} \cdot \frac{CE \cdot DE}{AE \cdot BE} = (AE + BE + AB) \cdot r \cdot \frac{CE \cdot DE}{AE \cdot BE}. \quad (13)$$

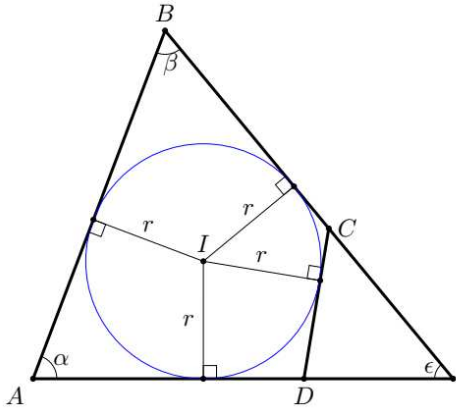


Рис. 3.

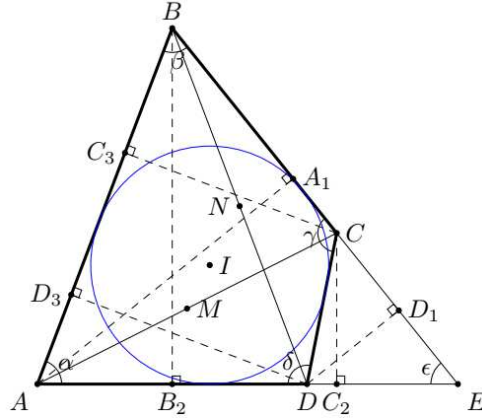


Рис. 4.

Из (12) и (13) следует, что

$$(CE + DE - CD) \cdot AE \cdot BE = (AE + BE + AB) \cdot CE \cdot DE. \quad (14)$$

Лемма доказана.

**Теорема 2** (Задача Ньютона). *В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.*

**Доказательство.** Если две стороны четырехугольника лежат на параллельных прямых, то все три указанные в условии точки лежат на прямой, равноудаленной от этих двух прямых. Поэтому будем считать, что у нашего четырехугольника нет двух параллельных сторон. Итак, пусть у описанного четырехугольника  $ABCD$   $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $\angle D = \delta$ , и стороны  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $E$ .

Так как окружность, вписанная в четырехугольник  $ABCD$ , вписана и в треугольник  $ABE$ , в котором  $\angle E = \epsilon$ , то центр  $I$  этой окружности имеет следующие трилинейные координаты относительно треугольника  $ABE$ :

$$I(1, 1, 1).$$

Пусть  $A_1$  и  $D_1$  — соответственно проекции точек  $A$  и  $D$  на прямую  $BE$ ,  $B_2$   $C_2$  — соответственно проекции точек  $B$  и  $C$  на прямую  $AE$ , а  $C_3$  и  $D_3$  — соответственно проекции точек  $C$  и  $D$  на прямую  $AB$  (смотри Рис. 4). Заметим, что расстояния от середины  $M$  отрезка  $AC$  до прямых  $BE$ ,  $AE$ ,  $AB$  соответственно пропорциональны длинам отрезков:

$$AA_1 = AE \cdot \sin \epsilon, \quad CC_2 = CE \cdot \sin \epsilon, \quad CC_3 = BC \cdot \sin \beta = \frac{BC \cdot AE \sin \epsilon}{AB}. \quad (15)$$

Перемножив выражения из (15) на  $\frac{AB}{\sin \epsilon}$ , получим более удобное для нас выражение точки  $M$  через трилинейные координаты относительно треугольника  $ABE$ :

$$M(AE \cdot AB : CE \cdot AB : BC \cdot AE). \quad (16)$$

Аналогично получается выражение точки  $N$  через трилинейные координаты относительно треугольника  $ABE$ :

$$N(DE \cdot AB : BE \cdot AB : AD \cdot BE). \quad (17)$$

Заметим, что при

$$\lambda = BE - DE, \quad \mu = AE - CE$$

$$\lambda \cdot AE \cdot AB + \mu \cdot DE \cdot AB = \lambda \cdot CE \cdot AB + \mu \cdot BE \cdot AB = AE \cdot BE \cdot AB - DE \cdot CE \cdot AB.$$



Остается доказать, что

$$\lambda \cdot BC \cdot AE + \mu \cdot AD \cdot BE = AE \cdot BE \cdot AB - DE \cdot CE \cdot AB. \quad (18)$$

Доказываем:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot BC \cdot AE + \mu \cdot AD \cdot BE &= \\ &= (BE - DE) \cdot BC \cdot AE + (AE - CE) \cdot AD \cdot BE = \\ &= AE \cdot BE \cdot BC + AE \cdot BE \cdot AD - AE \cdot BC \cdot DE - BE \cdot AD \cdot CE = \\ &= AE \cdot BE \cdot BC + AE \cdot BE \cdot AD - AE \cdot (BE - CE) \cdot DE - BE \cdot (AE - DE) \cdot CE = \\ &= AE \cdot BE \cdot (BC + AD - CE - DE) + CE \cdot DE \cdot (AE + BE) = \\ &= AE \cdot BE \cdot (AB - (CE + DE - CD)) + CE \cdot DE \cdot (AE + BE + AB - AB). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19), учитывая (14) получаем:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot BC \cdot AE + \mu \cdot AD \cdot BE &= \\ &= AE \cdot BE \cdot AB - \cancel{AE \cdot BE \cdot (CE + DE - CD)} + \\ &\quad + \cancel{CE \cdot DE (AE + BE + AB)} - CE \cdot DE \cdot AB = \\ &= AE \cdot BE \cdot AB - CE \cdot DE \cdot AB. \end{aligned} \quad (20)$$

Теорема доказана.

**Теорема 3** (Прямая Гаусса). Пусть в произвольном четырехугольнике  $ABCD$   $E$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $F$  — точка пересечения прямых  $BC$  и  $AD$ ,  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ ,  $O$  — середина  $EF$ . Тогда  $M$ ,  $N$ ,  $O$  лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Как и в доказательстве Теоремы 2, выразим точки  $M$  и  $N$  через их трилинейные координаты относительно треугольника  $ABE$ :

$$M(AE \cdot AB : CE \cdot AB : BC \cdot AE),$$

$$N(DE \cdot AB : BE \cdot AB : AD \cdot BE).$$

Пусть  $F_1$ ,  $F_2$  и  $E_3$  — проекции точки  $O$  на прямые  $BE$ ,  $AE$  и  $AF$  соответственно,  $A_1$  — проекция точки  $A$  на прямую  $BE$ ,  $B_2$  — проекция точки  $B$  на прямую  $AE$ ,  $\angle BEA = \varepsilon$ ,  $\angle ABE = \beta$ ,  $\angle CDA = \delta$  (смотри Рис. 5).

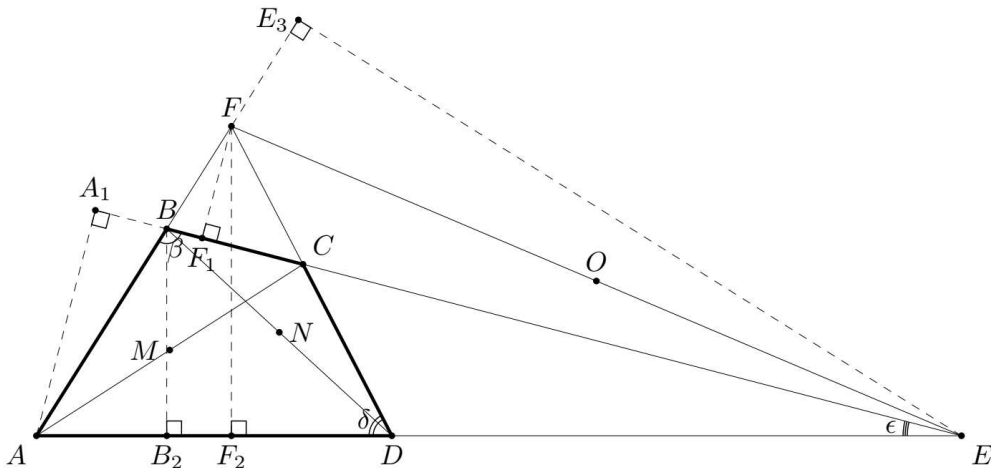


Рис. 5.



Заметим, что расстояния от середины  $O$  отрезка  $FE$  до прямых  $BE$ ,  $AE$ ,  $AB$  соответственно пропорциональны длинам отрезков:

$$\begin{aligned} FF_1 &= AA_1 \cdot \frac{BF}{AB} = AE \cdot \frac{BF}{AB} \cdot \sin \varepsilon, \\ FF_2 &= BB_2 \cdot \frac{AF}{AB} = BE \cdot \frac{AF}{AB} \cdot \sin \varepsilon, \\ EE_3 &= BE \cdot \sin \beta = BE \cdot \frac{AE \cdot \sin \varepsilon}{AB}. \end{aligned}$$

Умножив полученные выражения на  $\frac{AB}{\sin \varepsilon}$  и учитывая Замечание 1, получим более удобные трилинейные координаты для точки  $O$ :

$$O(-AE \cdot BF : BE \cdot AF : AE \cdot BE).$$

Рассмотрим матрицу, составленную из трилинейных координат точек  $M, N$  и  $O$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} AE \cdot AB & CE \cdot AB & AE \cdot BC \\ DE \cdot AB & BE \cdot AB & AD \cdot BE \\ -AE \cdot BF & BE \cdot AF & AE \cdot BE \end{pmatrix}$$

Нам достаточно доказать, что

$$\det \mathbf{A} = AE \cdot BE \cdot AB \cdot (BE(AE \cdot AB - AD \cdot AF) - CE \cdot (DE \cdot AB + AD \cdot BF) + BC \cdot (DE \cdot AF + AE \cdot BF)) = 0.$$

Так как

$$AE \cdot AB - AD \cdot AF = (AD + DE) \cdot AB - AD \cdot AF = DE \cdot AB - AD \cdot BF,$$

то

$$\begin{aligned} &BE(AE \cdot AB - AD \cdot AF) - CE(DE \cdot AB + AD \cdot BF) = \\ &= (BC + CE) \cdot (DE \cdot AB - AD \cdot BF) - CE(DE \cdot AB + AD \cdot BF) = \\ &= BC \cdot (DE \cdot AB - AD \cdot BF) - 2CE \cdot AD \cdot BF. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\det \mathbf{A} = AE \cdot BE \cdot AB \cdot (BC \cdot (DE \cdot AB - AD \cdot BF) - 2CE \cdot AD \cdot BF + BC \cdot (DE \cdot AF + AE \cdot BF)) = 2 \cdot AE \cdot BE \cdot AB \cdot (BC \cdot DE \cdot AF - CE \cdot AD \cdot BF). \quad (21)$$

Так как

$$2S_{ACF} = AF \cdot BC \cdot \sin \beta \text{ и } 2S_{CEF} = CE \cdot BF \cdot \sin \beta,$$

то

$$\frac{BC \cdot AF}{CE \cdot BF} = \frac{S_{ACF}}{S_{CEF}}. \quad (22)$$

С другой стороны,

$$2S_{ACF} = CF \cdot AD \cdot \sin \delta, \quad 2S_{CEF} = CF \cdot DE \cdot \sin \delta. \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует, что

$$BC \cdot DE \cdot AF = CE \cdot AD \cdot BF,$$

и значит, учитывая (21),

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot AE \cdot BE \cdot AB \cdot (BC \cdot DE \cdot AF - CE \cdot AD \cdot BF) = 0. \quad (24)$$

Последнее и означает, что точки  $M$ ,  $N$  и  $O$  — коллинеарны. Теорема доказана.

Рассмотренный в доказательстве четырехугольник — выпуклый. Если же в четырехугольнике, например  $\angle C > 180^\circ$ , то придем к случаю выпуклого четырехугольника  $AFCE$ . Тогда после соответствующей замены обозначений точек, доказательство опять станет верным.

Напоследок докажем теорему Монжа, которая часто приводится как пример теоремы, в доказательстве которой применяется выход в трехмерное пространство. Такое доказательство можно увидеть в [5], где теорема приводится как “Задача о трех колпаках”.

**Теорема 4** (Теорема Монжа). Для трёх произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих внешних касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой.

**Доказательство.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — центры окружностей, радиусы которых соответственно равны  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , а  $M$ ,  $K$  и  $L$  — точки пересечения общих внешних касательных пар окружностей (смотри Рис. 6). Удвоенные расстояния от точки  $K$  до прямых  $BC$  и  $AC$  соответственно равны

$$2KK_1 = \frac{S_{BCK}}{BC} = S_{ABC} \cdot \frac{BK}{AB} \cdot \frac{1}{BC}$$

и

$$2KK_2 = \frac{S_{ACK}}{AC} = S_{ABC} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{1}{AC}.$$

Заметим, что

$$\frac{BK}{AB} = \frac{R_2}{R_1 - R_2}, \quad \frac{AK}{AB} = \frac{R_1}{R_1 - R_2}.$$

Следовательно:

$$2KK_1 = S_{ABC} \cdot \frac{BK}{AB} \cdot \frac{1}{BC} = S_{ABC} \cdot \frac{R_2}{R_1 - R_2} \cdot \frac{1}{BC}$$

$$2KK_2 = S_{ABC} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{1}{AC} = S_{ABC} \cdot \frac{R_1}{R_1 - R_2} \cdot \frac{1}{AC}.$$

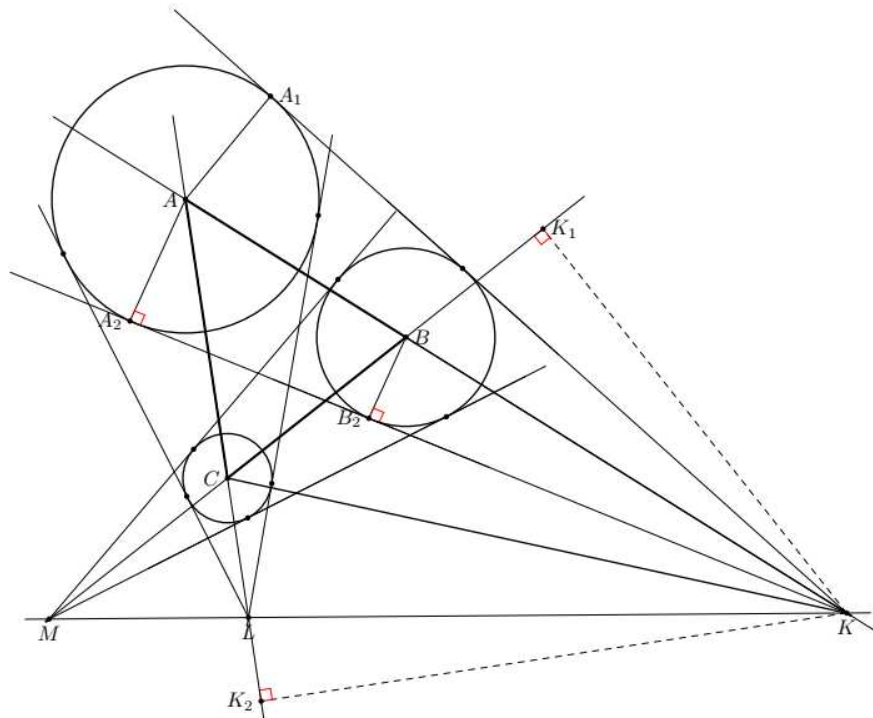


Рис. 6.

Умножив полученные выражения на  $\frac{R_1 - R_2}{2S_{ABC}}$  и учитывая, что точка лежит на прямой  $AB$ , а первая трилинейная координата точки отрицательна (смотри Замечание 1), получим удобное для нас выражение точки  $M$  через трилинейные координаты относительно треугольника  $ABC$ :

$$K \left( -\frac{R_2}{BC} : \frac{R_1}{AC} : 0 \right). \quad (25)$$

Действуя аналогичным образом, получим трилинейные координаты точек  $L$  и  $M$ :

$$L \left( -\frac{R_3}{BC} : 0 : \frac{R_1}{AB} \right), \quad (26)$$

$$M \left( 0 : -\frac{R_3}{AC} : \frac{R_2}{AB} \right). \quad (27)$$

Так как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{BC} & \frac{R_1}{AC} & 0 \\ -\frac{R_3}{BC} & 0 & \frac{R_1}{AB} \\ 0 & -\frac{R_3}{AC} & \frac{R_2}{AB} \end{pmatrix} = \frac{1}{AB \cdot BC \cdot AC} \cdot \begin{pmatrix} -R_2 & R_1 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_1 \\ 0 & -R_3 & R_2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

и

$$\begin{vmatrix} -R_2 & R_1 & 0 \\ -R_3 & 0 & R_1 \\ 0 & -R_3 & R_2 \end{vmatrix} = -R_2 \cdot (0 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3) - R_1 \cdot (-R_3 \cdot R_2 - 0 \cdot R_1) = 0, \quad (29)$$

то

$$\det \mathbf{A} = 0.$$

Следовательно, точки  $K$ ,  $L$ , и  $M$  коллинеарны. Теорема доказана.

## Литература

- [1] Тихомиров В.М. Олимпиады и геометрия // Математическое просвещение. - 1997. - Т. 1. - С. 24—47.
- [2] Прасолов В.В. Тихомиров В.М. Геометрия. 2-е изд. - М.: МЦНМО, 2007. - С. 23—24. - 328 с.
- [3] Wikipedia. Trilinear coordinates. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Trilinear_coordinates).
- [4] Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7–9 кл. сред. шк. / под ред. И.Л. Никольской. - М.: Просвещение, 1991. - 383 с.
- [5] Протасов В.Ю. Выход в пространство-2 // Квант. - 2018. - № 1. - С. 8—14.

Афанасьев Александр Николаевич,  
доцент кафедры теории и методики обучения  
математике и информатике,  
Института математики и информатики,  
Северо-Восточного Федерального Университета  
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,  
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

# О производящих функциях при решении вероятностных задач

О. П. Виноградов

Настоящая заметка возникла после знакомства автора со статьей С.М. Воронина и А.Г. Кулагина, опубликованной в журнале «Квант» в 1984 году [1]. На примере двух вероятностных задач будет показан метод нахождения производящих функций. Из полученных явных выражений для производящих функций будут получены явные выражения для искомых вероятностей. Первая задача связана с числами Фибоначчи, а вторая с некоторыми комбинаторными равенствами. Статья доступна учащимся старших профильных классов.

## 1. Сводка определений и теорем

В этом пункте приведены некоторые необходимые сведения из теории вероятности. Под *правильной монетой* понимается монета, которая сделана из однородного материала и имеет форму прямого кругового цилиндра (такую монету мы в дальнейшем будем называть *правильной*). При бросании такой монеты возможны два исхода: выпадение орла или решки, причем вероятность любого из этих двух событий равна 0,5. Под *неправильной монетой* будем понимать монету, у которой вероятности выпадения орла и решки не равны между собой. Обозначим через  $p$  вероятность того, что при бросании неправильной монеты выпадет орел, а через  $q$  — что выпадет решка ( $p + q = 1$ ). Схема бросания неправильной монеты, как и правильной, эквивалентна хорошо известным в теории вероятностей испытаниям Бернулли. По формуле Бернулли вероятность того, что при  $n$  бросаниях орел выпадет  $k$  раз, равна

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

**Определение 1.** Событие  $\bar{A}$  называется *противоположным событием*  $A$ , если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит  $A$ .

Заметим, что  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

**Определение 2.** События  $H_0, H_1, \dots$  составляют *полную группу событий*, если они удовлетворяют условиям:

- 1) одно из них обязательно произойдет;
- 2) эти события *несовместны* (т.е. никакие два из них не могут произойти одновременно).

**Теорема 1.** Если события  $A_0, A_1, \dots$  несовместны, то

$$P\left(\sum_{k \geq 0} A_k\right) = \sum_{k \geq 0} P(A_k).$$

**Определение 3.** Пусть  $A$  и  $B$  — два произвольных события, причем  $P(B) \neq 0$ . *Условной вероятностью*  $P(A/B)$  события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , называется отношение

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

**Теорема 2.** Если события  $H_0, H_1, \dots$  составляют полную группу событий, то для произвольного события  $A$  имеет место равенство

$$P(A) = \sum_{k \geq 0} P(AH_k) = \sum_{k \geq 0} P(A/H_k)P(H_k). \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой полной вероятности*.

Термин “производящая функция” принадлежит П. Лапласу. Задолго до Лапласа, Л. Эйлер использовал аппарат производящих функций в задачах теории чисел и комбинаторики. В теории вероятностей производящие функции были впервые использованы П. Лапласом и А. Муавром. В настоящее время аппарат производящих функций широко применяется в различных разделах математики (алгебра, теория функций, теория чисел, комбинаторика, теория вероятностей и др.).

**Определение 4.** Производящей функцией последовательности  $\{a_n\} (n \geq 0)$  будем называть функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Решение многих задач, основано следующей теореме.

**Теорема 3.** Пусть производящая функция  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  имеет вид  $f(z) = \frac{U(z)}{V(z)}$ , где  $U(z)$  и  $V(z)$  — многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих корней, причем степень  $U(z)$  меньше степени  $V(z)$  и степень  $V(z)$  равна  $m$ . Предположим также, что уравнение  $V(z) = 0$  имеет  $m$  различных (действительных или мнимых) корней  $z_1, \dots, z_m$ . В этом случае явное выражение для  $a_n$  имеет вид

$$a_n = \frac{\rho_1}{z_1^{n+1}} + \frac{\rho_2}{z_2^{n+1}} + \dots + \frac{\rho_m}{z_m^{n+1}}, \quad \text{где } \rho_k = -\frac{U(z_k)}{V'(z_k)} \quad (1 \leq k \leq m). \quad (2)$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [2]. В дальнейшем будет использоваться

**Теорема 4.** Если две последовательности имеют одну и ту же производящую функцию, то эти последовательности совпадают.

## 2. Основные результаты

**Задача 1.** Пусть неправильная монета бросается  $n$  раз. Найти вероятность события  $A_n$ , которое заключается в том, что орел не выпадет подряд два раза.

**Решение.** Положим  $p_n = P(A_n)$  и  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ . Придадим производящей функции  $\varphi(z)$  вероятностный смысл.

Предположим, что у нас кроме “основной” монеты есть еще одна монета, которую назовем *вспомогательной*. Предполагается, что любые события, связанные с разными монетами, являются независимыми событиями, и значит, вероятность их совместного осуществления равна произведению вероятностей этих событий. У этой монеты вероятность выпадения орла равна некоторому числу  $z$  ( $0 < z < 1$ ). Сначала бросается вспомогательная монета. Если выпадает решка (вероятность этого события равна  $1 - z$ ), то на этом бросание этих двух монет прекращается. Если выпадает орел (вероятность этого события равна  $z$ ), то бросается основная монета. Затем бросается вспомогательная монета. Если выпадает решка, то на этом бросание этих двух монет прекращается. Если выпадает орел, то бросается основная монета и т.д. Таким образом, основная монета бросается ровно  $n$  раз ( $n > 0$ ), если при бросании вспомогательной монеты  $n$  раз выпал орел, а в  $(n + 1)$ -м бросании вспомогательной монеты выпала решка. Вероятность этого события равна  $(1 - z)z^n$ .

Пусть событие  $A$  заключается в том, что после окончания нашего эксперимента на основной монете орел не выпадет подряд два раза.

По теореме 1 получаем, что

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (1 - z) z^n = (1 - z) \varphi(z). \quad (3)$$

Введем полную группу событий и применим формулу полной вероятности для вычисления вероятности события  $A$ .

Пусть событие  $H_0$  заключается в том, что на вспомогательной монете при первом бросании выпадет решка. Положим  $P(A/H_0) = 1$ , так как если основная монета вообще не бросается, то орел не выпадет подряд два раза.

Событие  $H_1$  заключается в том, что на вспомогательной монете при первом бросании выпадет орел и на основной монете выпадет решка. В силу независимости  $P(H_1) = qz$ . Если в первый раз выпадает решка на основной монете, то мы как бы снова начинаем бросания, и поэтому  $P(A/H_1) = P(A)$ .

Событие  $H_2$  заключается в том, что на вспомогательной монете при первом бросании выпадет орел, а при втором — решка и на основной монете выпадет орел. Таким образом, основная монета будет бросаться один раз и поэтому  $P(A/H_2) = 1$  и в силу независимости  $P(H_2) = pz(1 - z)$ .

Событие  $H_3$  заключается в том, что на вспомогательной монете при первом и втором бросании выпадет орел, а на основной монете два раза выпадет орел и, значит,  $P(A/H_3) = 0$ .

Событие  $H_4$  заключается в том, что на вспомогательной монете при первом и втором бросании выпадет орел, а на основной монете в первый раз выпадет орел, а во второй раз решка. После этого мы как бы снова начинаем бросания наших монет, и поэтому  $P(A/H_4) = P(A)$  и  $P(H_4) = pqz^2$ .

Поэтому по формуле полной вероятности

$$P(A) = 1 - z + qzP(A) + pz(1 - z) + pqz^2P(A)$$

Поэтому из (3) получаем

$$(1 - z)\varphi(z) = 1 - z + qz(1 - z)\varphi(z) + pz(1 - z) + pqz^2(1 - z)\varphi(z).$$

Откуда

$$\varphi(z) = 1 + qz\varphi(z) + pz + pqz^2\varphi(z).$$

Поэтому

$$\varphi(z) = \frac{1 + pz}{1 - qz - pqz^2} \quad (4)$$

**Замечание.** Чтобы избежать ошибок, полезно проверить, составляют ли события  $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4$  полную группу событий. Их несовместность очевидна. А так как сумма вероятностей этих событий равна единице (что легко проверяется), то одно из них обязательно произойдет.

В данной задаче явное выражение для производящей функции  $\varphi(z)$  представляет собой дробно-рациональную функцию. Поэтому можно применить теорему 3. Корни знаменателя равны

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{pq}, \quad z_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4pq}}{2pq}.$$

Нетрудно также найти  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Исходя из формулы (2), легко получить явное выражение для  $p_1$ .

В качестве частного случая рассмотрим случай правильной монеты, т.е. когда  $p = q = 0,5$ . В этом случае (4) примет вид

$$\varphi(z) = \frac{4 + 2z}{4 - 2z - z^2} \quad (5)$$

Одна из самых известных последовательностей натуральных чисел — это последовательность чисел Фибоначчи. В этой последовательности  $(F_0, F_1, F_2, \dots)$  каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Более точно  $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$  и  $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$  для  $n \geq 3$ . Первые пятнадцать чисел Фибоначчи были впервые в 1228 году приведены в рукописи Леонардо Пизанского (Фибоначчи). Эти числа были известны также в древней Индии намного раньше, чем они стали

известны в Европе. Числа Фибоначчи встречаются в поэзии, музыке, природе, стихосложении и им посвящена огромная литература.

Заметим, что в случае правильной монеты вероятность  $p_n$  может быть вычислена по формуле классической вероятности. Очевидно, что число всевозможных событий равно  $2^n$ . Обозначим через  $a_n$  число благоприятных событий. Поэтому

$$p_n = \frac{a_n}{2^n}. \quad (6)$$

Найдем  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  — производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$ . Заметим, что  $a_0 = a_1 = 1$ . Используя (6), получаем:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{2}\right)^n = A\left(\frac{z}{2}\right).$$

Поэтому

$$A(z) = \varphi(2z) = \frac{4 + 4z}{4 - 4z - 4z^2} = \frac{1 + z}{1 - z - z^2}.$$

Известно [3], что производящая функция чисел Фибоначчи равна

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Покажем, что  $a_n = F_{n+2}$ . Для этого достаточно показать, что производящие функции этих последовательностей совпадают. Покажем, что  $F_2 + F_2 z + \dots + F_n z^{n-2} + \dots = A(z)$ . Но это очевидно, так как

$$F_2 + F_2 z + \dots + F_n z^{n-2} + \dots = f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n - 1 - z}{z^2} = \frac{\Phi(z) - z}{z^2} = \frac{\frac{z}{1-z-z^2} - z}{z^2} = \frac{1 + z}{1 - z - z^2} = A(z).$$

Тем самым мы показали, что

$$p_n = \frac{F_{n+2}}{2^n} \quad (7)$$

Явное выражение для чисел Фибоначчи хорошо известно (формула Бине). Поэтому из (7) вытекает явное выражение для вероятностей  $p_n$ .

**Замечание.** Числа Фибоначчи возникают и в других задачах, связанных с бросанием правильной монеты. Например, пусть правильная монета бросается до тех пор, пока не будет выброшено два орла подряд. После этого бросания прекращаются. Тогда можно показать, что вероятность события, которое заключается в том, что бросание прекращается на  $n$ -м бросании, равна  $\frac{F_{n-1}}{2^n}$ .

**Задача 2.** Пусть неправильная монета бросается  $n$  раз. Для любого  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) найти производящую функцию  $F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) z^n$ , где  $P_k(n)$  — вероятность того, что орел выпадет число раз, делящееся на  $k$ .

**Решение.** Придадим производящей функции тот же вероятностный смысл, как и в задаче 1.

Пусть событие  $A$  заключается в том, что после окончания нашего эксперимента число выпавших орлов на основной монете будет делиться на  $k$ .

По теореме 1 получаем, что

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) (1 - z) z^n = (1 - z) F_k(z). \quad (8)$$



Введем следующую группу событий.

Событие  $H_0$  заключается в том, что при первом бросании вспомогательной монеты выпала решка и, значит, основная монета вообще не будет бросаться. Заметим, что  $P(H_0) = 1 - z$  и, так как основная монета вообще не будет бросаться, то число выпадений орла на основной монете равно нулю. Поэтому  $P(A/H_0) = 1$ , так как ноль делится на  $k$ .

Событие  $H_1$  заключается в том, что при первом бросании вспомогательной монеты выпал орел и при первом бросании основной монеты выпала решка. Заметим, что  $P(H_1) = qz$  в силу независимости этих событий. Справедливо равенство  $P(A/H_1) = P(A)$ , так как если на основной монете в первый раз выпала решка, то можно считать, что мы как бы заново начинаем наш эксперимент.

События  $H_{2+l}$  ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) заключаются в том, что произойдет  $(l + k)$  бросаний вспомогательной и основной монеты. На вспомогательной монете выпали только орлы. Орел на основной монете выпадет ровно  $k$  раз и в первом и  $(l + k)$ -м бросании выпадет орел. Заметим, что по формуле Бернулли  $P(H_{2+l}) = z^{l+k} p^2 C_{k+l-2}^{k-2} p^{k-2} q^l = (pz)^k C_{k+l-2}^{k-2} (qz)^l$ .

Нетрудно заметить, что условная вероятность события  $A$ , при условии любого события из этой группы, отлична от нуля. А условная вероятность события  $A$ , при условии любого события, не входящего в эту группу, равна нулю. Заметим, что если наступит какое-то событие  $H_{2+l}$ , то можно считать, что мы как бы заново начинаем наш эксперимент и поэтому  $P(A/H_{2+l}) = P(A)$ .

Поэтому по формуле полной вероятности (1) получаем:

$$P(A) = \sum_{l=0}^{\infty} P(A/H_{2+l})P(H_{2+l}) = 1 - z + qzP(A) + P(A) \sum_{l=0}^{\infty} (pz)^k C_{k+l-2}^{k-2} (qz)^l. \quad (9)$$

Заметим, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} (pz)^k C_{k+l-2}^{k-2} (qz)^l = (pz)^k \sum_{l=0}^{\infty} C_{k+l-2}^{k-2} (qz)^l = \frac{(pz)^k}{(1 - qz)^{k-1}}.$$

Здесь было использовано тождество  $\sum_{i=0}^{\infty} C_{m+i}^m x^i = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$ , верное для  $|x| < 1$ , и которое может быть получено дифференцированием тождества  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ .

Поэтому (9) можно записать в виде

$$P(A) = 1 - z + qzP(A) + P(A) \frac{(pz)^k}{(1 - qz)^{k-1}}.$$

Из (8) получаем

$$(1 - z)F_k(z) = 1 - z + qz(1 - z)F_k(z) + \frac{(pz)^k}{(1 - qz)^{k-1}}(1 - z)F_k(z).$$

Поэтому

$$F_k(z) = 1 + qzF_k(z) + \frac{(pz)^k}{(1 - qz)^{k-1}}F_k(z).$$

И значит,

$$F_k(z) = \frac{(1 - qz)^{k-1}}{(1 - qz)^k - (pz)^k}. \quad (10)$$

**Задача 3.** Пусть неправильная монета бросается  $n$  раз. Найти  $P_2(n)$  — вероятность того, что орел выпадет четное число раз.

**Решение.** Для  $k = 2$  формула (10) примет вид

$$F_2(z) = \frac{1 - qz}{(1 - qz)^2 - (pz)^2}. \quad (11)$$

Положим  $\alpha = q - p$ . Нетрудно видеть, что (9) можно привести к виду

$$F_2(z) = \frac{1 - qz}{(1 - \alpha z)(1 - z)}. \quad (12)$$

Так как  $q = \frac{1 + \alpha}{2}$ , то  $F_2(z) = \frac{2 - (1 + \alpha)z}{2(1 - \alpha z)(1 - z)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \alpha z} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \alpha^n) z^n$ .

Здесь была использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$P_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{(q - p)^n}{2}.$$

Заметим, что если монета правильная, то  $p = q = \frac{1}{2}$  и поэтому  $P_2(n) = \frac{1}{2}$  для всех значений  $n$ . Так как  $|q - p| < 1$ , то  $P_n \rightarrow \frac{1}{2}$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 4.** Пусть правильная монета бросается  $n$  раз. Для  $k > 2$  найти  $P_k(n)$  — вероятность того, что орел выпадет число раз, делящееся на  $k$ .

**Решение.** Используем формулу (10) и теорему 3. Положим  $U(z) = (1 - qz)^{k-1}$ ,  $V(z) = (1 - qz)^k - (pz)^k$ . Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_l, \dots$  корни знаменателя, а именно, корни уравнения

$$(1 - qz)^k = (pz)^k. \quad (13)$$

Учитывая (13), получаем

$$V'(z_l) = -k \left( q(1 - qz_l)^{k-1} + p^k z_l^{k-1} \right) = -k \left( q \frac{(pz_l)^k}{1 - qz_l} + p^k z_l^{k-1} \right) = -\frac{kp^k z_l^{k-1}}{1 - qz_l}.$$

Поэтому

$$\rho_l = -\frac{U(z_l)}{V'(z_l)} = \frac{(1 - qz_l)^k}{kp^k z_l^{k-1}} = \frac{\frac{(pz_l)^k}{1 - qz_l} \times (1 - qz_l)}{kp^k z_l^k} = \frac{z_l}{k}.$$

Так как

$$P_k(n) = \frac{\rho_1}{z_1^{n-1}} + \frac{\rho_2}{z_2^{n-1}} + \dots + \frac{\rho_l}{z_l^{n-1}} + \dots,$$

где  $\rho_l = -\frac{U(z_l)}{V'(z_l)}$ , то

$$P_k(n) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \dots + \frac{1}{z_l^n} + \dots \right) \quad (14)$$

Заметим, что для всех  $k \geq 2$  имеем  $z_1 = 1$ .

Положим  $z = \frac{1}{u}$ . Тогда (104 запишется в виде

$$P_k(n) = \frac{1}{k} (u_1^n + u_2^n + \dots + u_l^n + \dots).$$

После замены получаем, что (13) примет вид  $(u - q)^k = p^k$ . Откуда  $u = q + p^{\frac{k}{k}} \sqrt[k]{1}$ . Так как корни  $k$ -й степени из единицы суть числа

$$z_l = e^{\frac{2l\pi i}{k}} = \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k} (l = 0, 1, \dots, k-1),$$

то

$$u_l = q + pe^{\frac{2l\pi i}{k}} = q + p \left( \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k} \right) \quad (l = 0, 1, \dots, k-1).$$

Далее рассмотрим случай правильной монеты. Тогда

$$u_l = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2l\pi}{k} + i \sin \frac{2l\pi}{k} \right).$$

Заметим, что

$$1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Поэтому

$$(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} + \left( \cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right).$$

Значит,

$$u_l^n = \cos^n \frac{l\pi}{k} \left( \cos \frac{ln\pi}{k} + i \sin \frac{2ln\pi}{k} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \frac{1}{k} (u_0^n + u_1^n + \dots + u_l^n + \dots + u_{k-1}^n) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u_l^n = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \cos^n \frac{l\pi}{k} \left( \cos \frac{ln\pi}{k} + i \sin \frac{2ln\pi}{k} \right) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \cos^n \frac{l\pi}{k} \cos \frac{ln\pi}{k} = \frac{1}{k} \left( 1 + \cos^n \frac{\pi}{k} \cos \frac{n\pi}{k} + \dots + \cos^n \frac{(k-1)\pi}{k} \cos \frac{(k-1)n\pi}{k} \right). \end{aligned}$$

## Литература

- [1] Воронин С.М., Кулагин А.Г. Метод производящих функций // Квант. - 1984. - Вып. 5. - С. 11-18
- [2] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. - М.: Мир, 1984. - С. 289-290.
- [3] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. - М.: Мир, 1998. - С. 329-331.

*Виноградов Олег Павлович,  
профессор механико-математического  
факультета МГУ, доктор физ.-мат. наук.*

*E-mail: ovinogradov@mail.ru*

# Натуральный логарифм

*Е. В. Щепин*

В статье представлено интересное методически и геометрически наглядное изложение понятия натурального логарифма как площади гиперболической трапеции с переменной вертикальной границей. При этом автору не требуется применять полную теорию интегрирования, достаточно определить площадь гиперболической трапеции и выяснить ряд ее свойств.

Ранее эта идея введения логарифмов была изложена автором, совместно с Ю. Николаевым, в статье “Гиперболические логарифмы”, Первое сентября. Математика, № 2 (664), 16-31.01.2009. URL: [https://mat.1sept.ru/view\\_article.php?ID=200900201](https://mat.1sept.ru/view_article.php?ID=200900201)

Содержание настоящей статьи значительно переработано по сравнению с указанной публикацией.

В начале Анализа было слово,  
слово было у Арифметики,  
и слово было *Логарифм*<sup>1</sup>

## Введение. Идея логарифма. Логарифмические таблицы

Умножение гораздо сложнее сложения. Логарифм сводит умножение к сложению. Изобретения логарифмов были одними из величайших достижений нашей цивилизации.

В древние времена, когда не были известны логарифмы, вместо них использовались тригонометрические функции. Следующее тождество:

$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

можно применять для расчета произведений по таблицам косинусов. Чтобы умножить числа  $x$  и  $y$ , представим их в виде косинусов  $x = \cos a$ ,  $y = \cos b$ , используя таблицу косинусов. Затем вычислим  $(a + b)$  и  $(a - b)$  и найдем их косинусы по таблице. Наконец, результаты суммируются и делятся на 2. Вот и все. Одно умножение требует 4-х поисков по таблице косинусов, двух сложений, одного вычитания и одного деления на 2.

Логарифмическая функция  $l(x)$  — это такая функция, что  $l(xy) = l(x) + l(y)$  для любых  $x$  и  $y$ . Если имеется логарифмическая таблица, то чтобы вычислить произведение  $xy$ , нужно найти в логарифмической таблице  $l(x)$  и  $l(y)$ , затем просуммировать их и найти антилогарифм суммы. Это намного проще.

Идея логарифмов возникла в 1544 году, когда М. Штифель сравнил геометрические и арифметические прогрессии. сложение показателей соответствует умножению степеней. Тогда рассмотрим число  $q$ , близкое к 1, скажем, 1,000001. Вычислим последовательность его степеней и поместим их в левый столбец. В правый столбец поместим соответствующие значения показателей степени, которые являются просто номерами строк. Логарифмическая таблица готова.

Теперь, чтобы умножить два числа  $x$  и  $y$ , нужно найти их (или их приближения) в левом столбце логарифмической таблицы и прочесть их логарифмы из правого столбца. Сложить логарифмы и найдите значение суммы в правом столбце. Рядом с этой суммой, в левом столбце, стоит произведение  $xy$ .

Первые таблицы таких логарифмов были составлены Джоном Непером в 1614 году. Он использовал  $q = 0,99999999$ . Выбор  $q < 1$  был мотивирован астрологическими расчетами, оперирующими

---

<sup>1</sup>В эпиграфе игра слов. Log arifhm — это и означает “слово арифметики”.

тригонометрическими функциями. При использовании таблиц с  $q = 1,000000001$ , естественно изменить масштаб в соотношении  $1000000000 : 1$ , так чтобы для чисел диапазона 1-10 логарифмы тоже были из диапазона 0-10, а не исчислялись бы миллионами. Такое изменение масштаба означает переход от основания  $1,000000001$  к его миллиардной степени. То есть число  $1,000000001^{1000000000} = 2,718281828\dots$  имеет в этой таблице логарифм 1. Заметим, что масштабирование правой колонки, то есть умножение всех логарифмов на одно и тоже число не влияет на основное свойство этой таблицы — сведение умножения к сложению и даже не меняет алгоритма вычислений произведения с помощью таблицы.

Замечательным фактом является то, что при увеличении числа знаков в логарифмической таблице типа Непера, значение числа  $1,000\dots 01^{1000\dots 0}$  очень мало меняется с ростом числа нулей и быстро сходится к некоторому пределу, иногда называемому *числом Непера*. Это число впервые ввел в математику и обозначил его  $e$ , великий математик восемнадцатого столетия Леонард Эйлер. Логарифмы с основанием  $e$  называются *натуральными*. Натуральный логарифм числа  $x$  обозначается  $\ln x$ .

Следующими после таблиц натуральных логарифмов появились таблицы десятичных логарифмов, составленные Бриггсом (1624). Чтобы составить эти таблицы, Бриггс вычислял корень из 10, корень из корня из десяти, корень из корня из корня из десяти и так далее 64 раза вплоть до корня степени  $2^{64}$  из десяти. И это число он и принимал за  $q$  — первое число таблицы логарифмов. При этом правую колонку он масштабировал умножением на  $2^{64}$ , так чтобы 10 имело логарифм, равный единице.

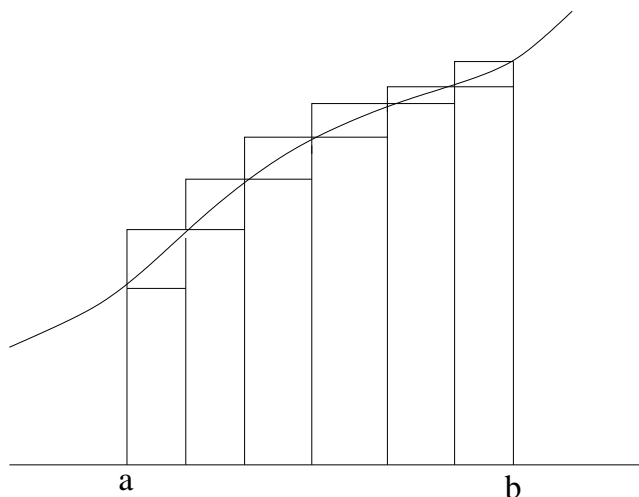
Целью настоящей заметки является введение понятия натурального логарифма на основе наглядных геометрических соображений, причем будет нетрудно вывести все важнейшие свойства логарифма (логарифмической функции).

### Площадь криволинейной трапеции

Напомним, что последовательность называется *монотонной*, если она либо возрастает, либо убывает. Минимальный интервал, содержащий все элементы данной последовательности точек, будем называть *опорным интервалом* последовательности.

Последовательность называется *исчерпывающей* для интервала  $I$ , если  $I$  — опорный интервал этой последовательности.

Пусть  $f$  — неотрицательная функция, определенная на отрезке  $[a, b]$ . Набор  $\{(x, y) : x \in [a, b] \text{ и } 0 \leq y \leq f(x)\}$  называется *криволинейной трапецией* под графиком  $f$  над интервалом  $[a, b]$ .



Чтобы оценить площадь криволинейной трапеции под графиком  $f$  над  $[a, b]$ , выберем исчерпывающую последовательность  $\{x_i\}_{i=0}^n$  для  $[a, b]$  и рассмотрим следующие суммы:

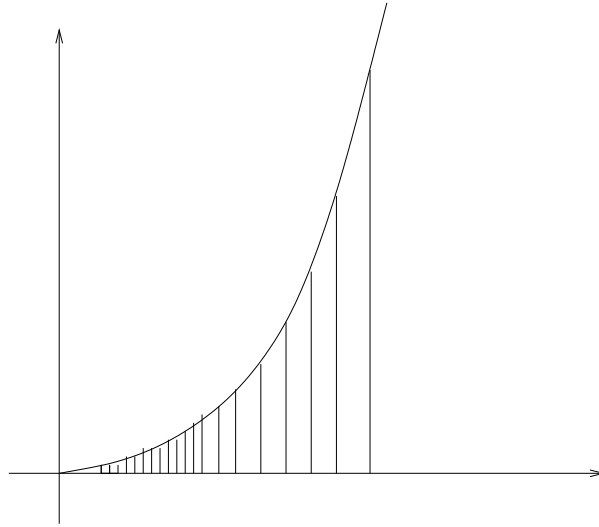
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) |\Delta x_k| \quad \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) |\Delta x_k| \quad (\text{где } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k) \quad (1)$$

Первую из них мы назовем *левой суммой*, а вторую — *правой суммой* последовательности  $\{x_k\}$  для функции  $f$ . Если функция  $f$  монотонна, то площадь криволинейной трапеции заключена между этими двумя суммами. Чтобы увидеть это, рассмотрим следующие ступенчатые фигуры:  $\cup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] \times [0, f(x_k)]$  и  $\cup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] \times [0, f(x_{k+1})]$ . Если  $f$  и  $\{x_k\}$  возрастают или убывают, то первая ступенчатая фигура содержится в криволинейной трапеции, а вторая ступенчатая фигура содержит трапецию (с возможными исключениями вертикальных отрезков  $[a \times [0, f(a)]]$  или  $[b \times [0, f(b)]]$ ). Если одна из  $f$  и  $\{x_k\}$  возрастает, а вторая убывает, то фигуры меняются ролями. Нижняя сумма равна площади первой ступенчатой фигуры, а верхняя сумма — площади второй. Таким образом, мы доказали следующую лемму:

**Лемма 1.** Пусть  $f$  — монотонная функция,  $S$  — площадь криволинейной трапеции под графиком  $f$  над  $[a, b]$ . Тогда для любой последовательности  $\{x_k\}_{k=0}^n$ , исчерпывающей  $[a, b]$ , площадь  $S$  заключена между  $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) |\Delta x_k|$  и  $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) |\Delta x_k|$ .

### Квадратуры парабол Ферма

В 1636 году Пьер Ферма предложил гениальный трюк, чтобы определить площадь под кривой  $y = x^a$ .



Если  $a > -1$ , то рассмотрим любой интервал вида  $[0, B]$ . Выберем положительное значение  $q < 1$ . Тогда бесконечная геометрическая прогрессия  $B, Bq, Bq^2, Bq^3, \dots$  исчерпывает  $[0, B]$  и значения функции для этой последовательности также образуют геометрическую прогрессию  $B^a, q^a B^a, q^{2a} B^a, q^{3a} B^a, \dots$ . Тогда и левая, и правая суммы превращаются в геометрические прогрессии:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{ka} (q^k B - q^{k+1} B) &= B^{a+1} (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(a+1)} = \frac{B^{a+1} (1 - q)}{1 - q^{a+1}}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{(k+1)a} (q^k B - q^{k+1} B) &= B^{a+1} (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k+1)(a+1)} = \frac{B^{a+1} (1 - q) q^a}{1 - q^{a+1}}. \end{aligned}$$

Для натурального  $a$  имеем  $\frac{1-q}{1-q^{a+1}} = \frac{1}{1+q+q^2+\dots+q^a}$ . Поскольку  $q$  стремится к 1, обе суммы сходятся к  $\frac{B^{a+1}}{a+1}$ . Это и есть площадь криволинейной трапеции. Заметим, что при  $a < 0$  эта трапеция неограничена, тем не менее, она имеет конечную площадь, если  $a > -1$ .

Если  $a < -1$ , то рассмотрим интервал вида  $[B, \infty]$ . Выберем положительное  $q > 1$ . Тогда бесконечная геометрическая прогрессия  $B, Bq, Bq^2, Bq^3 \dots$  исчерпывает  $[B, \infty]$  и значения функции для этой последовательности также образуют геометрическую прогрессию  $B^a, q^a B^a, q^{2a} B^a, q^{3a} B^a, \dots$ . Левая и правая суммы равны

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{ka} (q^{k+1} B - q^k B) &= B^{a+1} (q - 1) \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(a+1)} = \frac{B^{a+1} (q - 1)}{1 - q^{a+1}} \\ \sum_{k=0}^{\infty} B^a q^{(k+1)a} (q^{k+1} B - q^k B) &= B^{a+1} (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k+1)(a+1)} = \frac{B^{a+1} (q - 1) q^a}{1 - q^{a+1}}. \end{aligned}$$

Если  $a$  — целое число, положим  $p = q^{-1}$ . Тогда  $\frac{q-1}{1-q^{a+1}} = q \frac{1-p}{1-p^{a+1}} = q \frac{1}{1+p+p^2+\dots+p^n-2}$ . Поскольку  $q$  стремится к 1, обе суммы сходятся к  $\frac{B^{a+1}}{|a|-1}$ . Это и есть площадь криволинейной трапеции.

При  $a > -1$  площадь криволинейной трапеции под графиком  $x^a$  над  $[A, B]$  равна разности площадей трапеций над  $[0, B]$  и над  $[0, A]$ . Следовательно, эта площадь равна  $\frac{B^{a+1} - A^{a+1}}{a+1}$ .

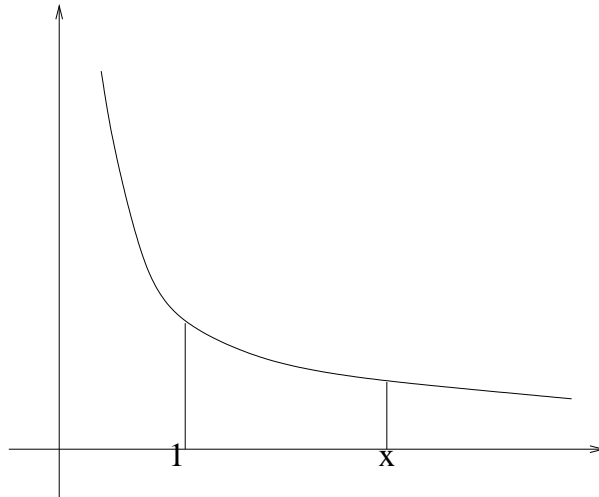
При  $a < -1$  можно вычислить площадь криволинейной трапеции под графиком  $x^a$  над  $[A, B]$  как разность между площадями трапеций над  $[A, \infty]$  и над  $[B, \infty]$ . Результат выражается той же формулой  $\frac{B^{a+1} - A^{a+1}}{a+1}$ . В итоге приходим к следующей теореме:

**Теорема 1 (Ферма).** *Площадь под кривой  $y = x^a$  над интервалом  $[A, B]$  равна  $\frac{B^{a+1} - A^{a+1}}{a+1}$  при  $a \neq -1$ .*

Мы доказали эту теорему для целых  $a$ , а Ферма доказал ее для всех действительных  $a \neq -1$ .

### Натуральный или гиперболический логарифм

В случае  $a = -1$  геометрическая прогрессия для площадей ступенчатых фигур превращается в арифметическую прогрессию. Это означает, что площадь под гиперболой представляет собой логарифм! Это открытие было сделано Грегори в 1647 году.





Фигура, ограниченная сверху графиком гиперболы  $y = 1/x$ , снизу отрезком  $[a, b]$  оси абсцисс и по бокам вертикальными линиями, проходящими через конечные точки интервала, называется *гиперболической трапецией над  $[a, b]$* .

Площадь гиперболической трапеции над  $[1, x]$  при  $x > 1$  называется *натуральным (или гиперболическим) логарифмом  $x$* , он обозначается  $\ln x$ . Для положительного числа  $x < 1$  его логарифм определяется как отрицательное число, абсолютное значение которого совпадает с площадью гиперболической трапеции над  $[x, 1]$ . Наконец,  $\ln 1$  по определению равен 0.

**Теорема 2 (о логарифме).** *Натуральный логарифм — возрастающая функция, определенная для всех положительных чисел. Для каждой пары положительных чисел  $x, y$*

$$\ln xy = \ln x + \ln y. \quad (2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай  $x, y > 1$ . Разность  $\ln xy - \ln y$  — это площадь гиперболической трапеции над  $[y, xy]$ . И мы должны доказать что она равна  $\ln x$  — площади трапеции над  $[1, x]$ . Выберем большое число  $n$ . Пусть  $q = x^{1/n}$ . Тогда  $q^n = x$ . Конечная геометрическая прогрессия  $\{q^k\}_{k=0}^n$  исчерпывает  $[1, x]$ . Тогда левая и правая суммы равны

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{-k}(q^{k+1} - q^k) = n(q - 1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} q^{-k-1}(q^{k+1} - q^k) = \frac{n(q - 1)}{q}. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим последовательность  $\{xq^k\}_{k=0}^n$ , исчерпывающую  $[x, xy]$ . Ее левая сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{-1}q^{-k}(xq^{k+1} - xq^k) = n(q - 1)$$

как раз совпадает с левой суммой (3) для  $\ln x$ . То же самое верно для правой суммы. В результате получаем, что для любого натурального  $n$  выполняются следующие неравенства:

$$n(q - 1) \geq \ln x \geq \frac{n(q - 1)}{q}, \quad n(q - 1) \geq \ln xy - \ln y \geq \frac{n(q - 1)}{q} \quad (4)$$

Это означает, что  $|\ln xy - \ln x - \ln y|$  не превышает разности между левой и правой суммами. Утверждение Теоремы 2 в случае  $x, y > 1$  будет доказано, если мы докажем, что эту разность можно сделать сколь угодно малой, выбрав подходящее  $n$ . Это будет выведено из следующей общей леммы:

**Лемма 2.** *Пусть  $f$  — монотонная функция на интервале  $[a, b]$  и последовательность  $\{x_k\}_{k=0}^n$  исчерпывает  $[a, b]$ . Тогда*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k \right| \leq |f(b) - f(a)| \max_{k < n} |\Delta x_k| \quad (5)$$

Доказательство леммы представляет собой прямое вычисление. Чтобы сократить обозначения, положим  $\Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ .

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\Delta x_k \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(x_k)\Delta x_k \right| \leq \\ &\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta f(x_k)| \max |\Delta x_k| = \max |\Delta x_k| \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta f(x_k)| = \\ &\max |\Delta x_k| \left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(x_k) \right| = \max |\Delta x_k| |f(b) - f(a)|. \end{aligned}$$

Равенство  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \Delta f(x_k) \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta f(x_k)|$  выполняется, так как  $\Delta f(x_k)$  имеют одинаковые знаки из-за монотонности  $f$ .

Величина  $\max |\Delta x_k|$  называется *максимальным шагом* последовательности  $\{x_k\}$ . Для последовательности  $\{q^k\}$   $[1, x]$  максимальный шаг равен  $q^n - q^{n-1} = q^n(1 - q^{-1}) = x(1 - q)/q$ . Он стремится к 0, когда  $q$  стремится к 1. В нашем случае  $|f(b) - f(a)| = 1 - \frac{1}{x} < 1$ . По лемме 2 разность между левой и правой суммами можно сделать сколь угодно малой. Это завершает доказательство в случае  $x, y > 1$ .

Рассмотрим случай  $xy = 1$ ,  $x > 1$ . Нам нужно доказать, что

$$\ln 1/x = -\ln x. \quad (\text{правило обращения})$$

Как и выше, положим  $q^n = x > 1$ . Последовательность  $\{q^{-k}\}_{k=0}^n$  исчерпывает  $[1/x, 1]$ . Соответствующая левая сумма  $\sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1}(q^{-k} - q^{-k-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (q - 1) = n(q - 1)$  совпадает с соответствующей суммой для  $\ln x$ . То же самое справедливо и для правой суммы. Те же аргументы, что и выше, показывают, что  $|\ln 1/x| = \ln x$ . Знак  $\ln 1/x$  определяется как минус, потому что  $1/x < 1$ . Это доказывает правило обращения.

Теперь рассмотрим случай  $x < 1$ ,  $y < 1$ . Тогда  $1/x > 1$  и  $1/y > 1$  и согласно первому случаю  $\ln 1/xy = (\ln 1/x + \ln 1/y)$ . Заменяя все члены этого уравнения по правилу обращения, получаем  $-\ln xy = -\ln x - \ln y$  и, наконец,  $\ln xy = \ln x + \ln y$ .

Следующий случай:  $x > 1$ ,  $y < 1$ ,  $xy < 1$ . Так как оба выражения  $1/x$  и  $xy$  меньше 1, то по предыдущему случаю  $\ln xy + \ln 1/x = \log \frac{xy}{x} = \ln y$ . Заменяя  $\ln 1/x$  на  $-\ln x$ , получаем  $\ln xy - \ln x = \ln y$  и, наконец,  $\ln xy = \ln x + \ln y$ .

Последний случай,  $x > 1$ ,  $y < 1$ ,  $xy > 1$ , доказывается равенством  $\ln xy + \ln 1/y = \ln x$  и заменой  $\ln 1/y$  на  $-\ln y$ .

Лемма и теорема доказаны.

## Основание логарифма

Натуральные или гиперболические логарифмы не являются единственными логарифмическими функциями. Другие популярные логарифмы — десятичные. В информатике предпочитают двоичные логарифмы. Различные логарифмические функции отличаются своими *основаниями*. Основание логарифмической функции  $l(x)$  определяется как число  $b$ , для которого  $l(b) = 1$ . Логарифмы с основанием  $b$  обозначаются  $\log_b x$ . Что является основанием натуральных логарифмов? Это вторая важная константа в математике (после  $\pi$ ). Это иррациональное число, обозначаемое  $e$  и равное 2,71828182845905... Это число и его обозначение введены Эйлером.

Итак,  $e$  — это такое число, что площадь гиперболической трапеции над  $[1, e]$  равна 1. Рассмотрим геометрическую прогрессию  $q^n$  для  $q = 1 + \frac{1}{n}$ . Все слагаемые в соответствующей гиперболической левой сумме для этой прогрессии равны  $\frac{q^{k+1} - q^k}{q^k} = q - 1 = \frac{1}{n}$ . Отсюда левая сумма для интервала  $[1, q^n]$  равна 1 и больше  $\log q^n$ . Следовательно,  $e > q^n$ . Слагаемые правой суммы в этом случае равны  $\frac{q^{k+1} - q^k}{q^{k+1}} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{n+1}$ . Следовательно, правая сумма для интервала  $[1, q^{n+1}]$  равна 1. Это меньше соответствующего логарифма. Следовательно,  $e < q^{n+1}$ . Таким образом, мы доказали следующие оценки для  $e$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (6)$$

Мы видим, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  быстро стремится к  $e$ , когда  $n$  стремится к бесконечности.

### Экспонента

Обратная функция к натуральному логарифму определяется как значение абсциссы основания гиперболической трапеции, ориентированная площадь которой равна заданному числу.

Логарифм неограниченно возрастает и строго монотонен. Поэтому он принимает, и притом ровно один раз, любое числовое значение. То есть уравнение  $\ln x = a$  имеет при любом  $a$  единственное (и положительное) решение, которое называется *экспонентой* числа  $a$  и обозначается  $\exp a$ . Таким образом определяется обратная функция к логарифму, называемая *экспонентой*. То есть для любого  $x$  имеет место равенство

$$\ln \exp x = x. \quad (7)$$

Основным свойством экспоненты является следующее правило сложения

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y. \quad (8)$$

Для доказательства этого равенства его логарифмируем. Логарифм левой части равен  $x + y$  в силу (7). А логарифм правой равен сумме логарифмов множителей, которые равны  $x$  и  $y$  соответственно. Таким образом, логарифмы обеих частей равны, а значит и сами они совпадают.

### Логарифмы по другим основаниям

Если в определении логарифмов вместо гиперболы  $xy = 1$  использовать гиперболу  $xy = k$  с  $k \neq 1$ , то получится функция, тоже удовлетворяющая основному свойству логарифмов, отличающаяся от натурального логарифма постоянным множителем. Все такие функции тоже называются логарифмами и различаются своими основаниями.

*Основанием* логарифма называется число, логарифм которого равен единице. Логарифм числа  $x$  с основанием  $a$  обозначается  $\log_a x$ . Так как он отличается от натурального логарифма постоянным множителем, то величину этого множителя можно определить из условия  $\log_a a = 1$ . Откуда

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (9)$$

Последнее равенство следует рассматривать как *определение* логарифма по основанию  $a$ . Основанием логарифма может служить любое отличное от единицы положительное число.

Наряду с натуральными логарифмами часто применяются десятичные и двоичные (в информатике) логарифмы. Десятичный логарифм имеет специальное обозначение  $\lg$ . Десятичный логарифм позволяет определить количество десятичных знаков, используемых для записи целого числа.

### Дополнение. Применение гиперболического поворота

Доказательство основного свойства гиперболического логарифма можно также получить, используя так называемый гиперболический поворот.

А именно, *гиперболическим поворотом* с коэффициентом  $k \neq 0$  называется преобразование плоскости, задаваемое в декартовых координатах формулой  $(x, y) \rightarrow (kx, y/k)$ .

Гиперболический поворот не меняет площади никакого прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Вообще, гиперболический поворот не меняет площади никакой фигуры, поскольку ее можно аппроксимировать фигурами, составленными из прямоугольников, параллельных осям координат.

Обоснуем более подробно это свойство гиперболического поворота для частного случая гиперболической трапеции.

Действительно, пусть гиперболическая трапеция площади  $S$  перешла в результате применения гиперболического поворота в трапецию площади  $S'$ . Предположим  $S > S'$ . Тогда, поскольку разность между правой и левой суммами для гиперболической трапеции может быть сделана произвольно малой, найдется вписанная в первую трапецию ступенчатая фигура площади  $S_1$  большей, чем  $S'$ . Но тогда гиперболический поворот переведет его в ступенчатую фигуру той же площади, вписанную во вторую трапецию. Получаем, что вписанная ступенчатая фигура имеет площадь большую, чем содержащая ее трапеция. Полученное противоречие завершает доказательство.

**Лемма 3.** *Гиперболический логарифм при любых  $x$  и  $y$  удовлетворяет соотношению*

$$\ln xy = \ln x + \ln y. \quad (10)$$

**Доказательство.** Пусть  $x, y > 1$ . Так как гиперболический поворот с коэффициентом  $y$  переводит гиперболическую трапецию над  $[1, x]$  в гиперболическую трапецию над  $[y, xy]$ . Поскольку площадь первой равна  $\ln x$ , а второй —  $\ln xy - \ln y$ , постольку получаем  $\ln xy = \ln x + \ln y$ .

Доказательства для остальных вариантов соотношений положительных чисел  $x, y$  и 1 выводятся из (10), как это уже сделано выше.

Лемма доказана.

### Задачи

1. С помощью гиперболического поворота получить уравнение касательной к гиперболе в произвольной точке.
2. Докажите, что  $\ln x/y = \ln x - \ln y$ .
3. Докажите, что  $\ln 2 < 1$ .
4. Докажите, что  $\ln 3 > 1$ .
5. Доказать неравенства  $\frac{7}{12} < \ln 2 < \frac{5}{6}$ .
6. Доказать неравенства  $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{3}{4}$ .
7. Докажите, что из  $x > y$  следует  $\ln x > \ln y$ .
8. Найти число, логарифм которого больше миллиона.
9. Ограничена ли функция  $\ln x$ ?
10. Докажите, что  $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + 1/n) < \frac{1}{n}$ .
11. Докажите, что  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .
12. Докажите теорему Ферма для  $a = 1/2, 1/3, 2/3$ .
13. Докажите неограниченность  $\frac{n}{\ln n}$ .
14. Сравните  $(1 + \frac{1}{n})^n$  и  $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$ .
15. Докажите монотонность  $\frac{n}{\ln n}$ .
16. Докажите, что  $\sum_{k=2}^n 1/k < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} 1/k$ .

17. Докажите, что  $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ .
18. Найти целые части логарифмов  $\ln 25$ ,  $\ln 15$ .
19. Определите целую часть числа  $\ln 1000$ . Оцените целую часть  $\ln 1000000$ .
20. Докажите, что  $\ln \frac{x+y}{2} \geq \frac{\ln x + \ln y}{2}$ .
21. Доказать неравенство  $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \ln(1 + \frac{1}{k})) < 1$ .

22. Докажите, что

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

- 23.\* Докажите, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots = \ln 2.$$

Автор благодарит В.М. Имайкина за полезные замечания и обсуждения.

*Щепин Евгений Витальевич,  
Главный научный сотрудник Института  
математики РАН имени В.А. Стеклова,  
член-корреспондент РАН, доктор физ.-мат. наук.*

*E-mail: scepina@mi-ras.ru*

## О кратностях собственных чисел пары квадратичных форм

*Н. В. Илюшечкин*

Рассматривается пара вещественных квадратичных форм, одна из которых положительно определена. Доказывается, что можно, не вычисляя собственных чисел этой пары форм, выяснить, есть ли среди них кратные. Можно также выразить сумму квадратов кратностей этих чисел через ранг некоторой вспомогательной матрицы.

Пусть даны две вещественные квадратичные формы от одних и тех же переменных, причём первая из них положительно определена. Матрицу первой формы обозначим через  $G = (g_{ij})$ , второй — через  $X = (x_{ij})$ . В дальнейшем для простоты мы будем отождествлять квадратичную форму с её матрицей. Порядок обеих матриц обозначим через  $n$ . Как известно [1, с. 303], можно одним и тем же вещественным невырожденным линейным преобразованием  $Q$  переменных привести обе матрицы  $G$  и  $X$  к диагональному виду, причём матрица  $G$  приводится к единичной матрице  $E$ , то есть

$$G = Q^T Q, \quad X = Q^T L Q, \quad (1)$$

где символ  $T$  обозначает операцию транспонирования, а матрица  $L$  диагональна:  $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  пары  $(G, X)$  являются корнями её характеристического многочлена

$$P_{G,X}(\lambda) = \det(\lambda G - X).$$

Пары форм возникают, например, в теории малых колебаний с  $n$  степенями свободы вблизи положения равновесия. Форма  $G$  соответствует кинетической энергии системы, форма  $X$  — её потенциальной энергии. Числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  являются квадратами частот собственных колебаний системы [2, с. 293]. Пары форм появляются также при изучении гиперповерхности размерности  $n$ . Здесь форма  $G$  соответствует первой квадратичной форме гиперповерхности в исследуемой точке, а форма  $X$  — её второй квадратичной форме в той же точке [3, Глава 4, § 2]. В данном случае числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  являются кривизнами главных нормальных сечений гиперповерхности в данной точке.

Статья посвящена решению вопроса, можно ли, не вычисляя корней характеристического многочлена пары квадратичных форм, выяснить, есть ли среди них кратные. В принципе это можно сделать так. У многочлена  $P_{G,X}(\lambda)$  есть кратные корни тогда и только тогда, когда его дискриминант (см. формулу (3) ниже)  $\text{Dis}(P_{G,X})$  равен нулю. Впредь для простоты мы будем обозначать его как  $\text{Dis}(G, X)$  и называть дискриминантом пары форм  $(G, X)$ . В частности, если  $G = E$ , наше обозначение будет ещё проще —  $\text{Dis}(X)$ . Итак, наличие кратных собственных чисел у пары  $(G, X)$  равносильно условию

$$\text{Dis}(G, X) = 0. \quad (2)$$

Коэффициенты характеристического многочлена  $P_{G,X}(\lambda)$  являются многочленами от элементов матриц  $G$  и  $X$ . Поэтому, вследствие формулы для дискриминанта многочлена [4, с. 231, формула (20)], дискриминант пары  $(G, X)$  также является многочленом от элементов этих матриц. Напомним, что если

$$P(\lambda) = p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

— многочлен степени  $n$  с корнями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , то его дискриминант

$$\text{Dis}(P(\lambda)) = p_0^{2n-2} \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)^2. \quad (3)$$

Старший коэффициент многочлена  $P_{G,X}(\lambda)$  равен  $\det G$ . Поэтому, если умножить все элементы матрицы  $G$  на одно и то же число  $\rho \neq 0$ , то первый множитель формулы (3) изменится в  $\rho^{2n(n-1)}$  раз, а все корни характеристического многочлена умножатся на  $1/\rho$ , что приводит к изменению второго множителя этой же формулы в  $1/\rho^{n(n-1)}$  раз. Следовательно, дискриминант  $\text{Dis}(G, X)$  является однородным многочленом степени  $n(n-1)$  по совокупности переменных  $g_{ij}$ . Если же умножить на число  $\rho$  все элементы матрицы  $X$ , то первый множитель в формуле (3) не изменится, а второй умножится на  $\rho^{n(n-1)}$ . Поэтому дискриминант  $\text{Dis}(G, X)$  является также однородным многочленом степени  $n(n-1)$  по совокупности переменных  $x_{ij}$ . Суммарная же степень дискриминанта равна  $2n(n-1)$ .

Выражение для дискриминанта оказывается слишком сложным. Уже при  $n = 3$  и  $G = E$  дискриминант  $\text{Dis}(X)$  является однородным многочленом шестой степени, содержащим, согласно [5, р. 96], 123 одночлена. В общем случае (опять же при  $n = 3$ ) степень многочлена  $\text{Dis}(G, X)$  равна 12, и одночленов ещё больше.

Поэтому желательно заменить условие (2) равносильной ему системой более простых уравнений. При  $G = E$  это сделал К.В. Борхардт в 1846 году в работе [6]. Там дано явное представление дискриминанта  $\text{Dis}(X)$  в виде суммы квадратов некоторых однородных многочленов от элементов матрицы  $X$ . Поэтому условие  $\text{Dis}(X) = 0$  равносильно тому, что все слагаемые упомянутой суммы обращаются в нуль. В 1961 году Ю.П. Кремнева в работе [7] доказала совершенно другим способом, с использованием кубатурных формул, возможность представления дискриминанта  $\text{Dis}(X)$  также в виде суммы квадратов некоторых многочленов.

Ниже будет рассмотрен общий случай, когда матрица  $G$  соответствует произвольной положительно определённой квадратичной форме.

Обозначим через  $\text{Sym}(n)$  пространство вещественных симметрических матриц порядка  $n$ , а через  $\text{so}(n)$  — пространство вещественных кососимметрических матриц того же порядка. Размерности этих пространств равны  $N = n(n+1)/2$  и  $M = N - n$  соответственно. Далее, через  $E_{ij}$  обозначим матрицу порядка  $n$ , на пересечении строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$  которой стоит единица, а все остальные элементы равны нулю. Удобный базис пространства  $\text{Sym}(n)$  образуют матрицы  $E_{ii}^+$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $E_{ij}^+$  при  $i < j$ , определённые равенствами

$$E_{ii}^+ = E_{ii}, \quad E_{ij}^+ = E_{ij} + E_{ji}.$$

В этом базисе любая симметрическая матрица  $S = (s_{ij})$  изображается вектором (столбцом)  $\hat{S}$  размерности  $N$  с координатами  $s_{ii}$  и  $s_{ij}$ , расположенными в порядке

$$11, 22, \dots, nn, 12, 13, \dots, 1n, 23, \dots, 2n, \dots, n-1n \quad (4)$$

(сначала диагональные элементы, потом по строкам).

Произвольную матрицу  $A = (a_{kl}) \in \text{so}(n)$  можно рассматривать как столбец  $\tilde{A}$  размерности  $M$ , элементы которого  $a_{kl}$  при  $k < l$  расположены в порядке (4), но, разумеется, без первых  $n$  элементов. В пространстве  $\text{so}(n)$  естественно ввести базис из векторов

$$E_{kl}^- = E_{kl} - E_{lk},$$

расположенных в порядке (4).

Вернёмся к паре  $(G, X)$ . Рассмотрим линейное отображение

$$(G, X)^\square : \text{so}(n) \longrightarrow \text{Sym}(n),$$



задаваемое формулой

$$(G, X)^\square(A) = GAX - XAG.$$

Действительно, если  $A \in so(n)$ , то  $A^T = -A$ . Поэтому

$$((G, X)^\square(A))^T = (GAX - XAG)^T = -XAG + GAX = (G, X)^\square(A),$$

так что  $(G, X)^\square(A) \in Sym(n)$ . Матрицу этого отображения в базисах  $E_{kl}^-$  и  $E_{ij}^+$  обозначим через  $(G, X)^\dagger$ . С учётом введенных ранее обозначений будет справедливо векторно-матричное равенство  $\hat{S} = (G, X)^\dagger \tilde{A}$ , где  $S = (G, X)^\square(A)$ . Матрица  $(G, X)^\dagger$  имеет размер  $N \times M$ . Её строки пронумерованы двойными индексами  $ij$  при  $i < j$  и расположены в порядке (4). Столбцы пронумерованы двойными индексами  $kl$  при  $k < l$  и расположены в том же порядке. Так как в матрицах пространств  $Sym(n)$  и  $so(n)$  элементы симметричны или кососимметричны относительно главной диагонали, то для описания элементов матрицы  $(G, X)^\dagger$  нам придётся ввести обозначение для двойного индекса

$$[qr] = \begin{cases} qr, & \text{если } q \leq r, \\ rq, & \text{если } q > r. \end{cases}$$

Тогда элемент, стоящий в матрице  $(G, X)^\dagger$  в строке с номером  $ij$  и столбце с номером  $kl$ , равен

$$(G, X)^\dagger_{ij,kl} = g_{[ik]}x_{[lj]} - g_{[il]}x_{[kj]} + g_{[kj]}x_{[il]} - g_{[lj]}x_{[ik]}.$$

В частности,

$$(G, X)^\dagger_{ii,kl} = 2g_{[ik]}x_{[il]} - 2g_{[il]}x_{[ik]}.$$

Таким образом, все элементы матрицы  $(G, X)^\dagger$  являются билинейными формами от элементов матриц  $G$  и  $X$ .

В случае  $G = E$  матрица  $(E, X)^\dagger$  устроена проще. Строка этой матрицы с номером  $ii$  выглядит следующим образом. Если  $l < i$ , то в столбце  $li$  расположено число  $-2x_{li}$ , а если  $l > i$ , то в столбце  $il$  находится число  $2x_{il}$ . Все остальные элементы строки равны нулю.

Теперь опишем строку с номером  $ij$  при  $i < j$ . Если  $l < i$ , то в столбце  $li$  находится число  $-x_{lj}$ , а в столбце  $lj$  — число  $-x_{li}$ . Если  $i < l < j$ , то в столбце  $il$  лежит число  $x_{lj}$ , а в столбце  $lj$  — число  $-x_{il}$ . Если  $l > j$ , то столбец  $il$  содержит число  $x_{jl}$ , а столбец  $jl$  — число  $x_{il}$ . Наконец, в столбце  $ij$  расположено число  $x_{jj} - x_{ii}$ . Все остальные элементы строки равны нулю.

Например, пусть  $n = 3$ . Тогда

$$(E, X)^\dagger = \begin{pmatrix} 2x_{12} & 2x_{13} & 0 \\ -2x_{12} & 0 & 2x_{23} \\ 0 & -2x_{13} & -2x_{23} \\ x_{22} - x_{11} & x_{23} & x_{13} \\ x_{23} & x_{33} - x_{11} & -x_{12} \\ -x_{13} & -x_{12} & x_{33} - x_{22} \end{pmatrix}.$$

Пару квадратичных форм  $(G, X)$  будем называть *регулярной*, если все её собственные числа попарно различны, и *вырожденной* в противном случае. Для оценки степени вырожденности пары квадратичных форм введём понятие её корневого типа. Пусть среди собственных чисел пары  $(G, X)$  имеется ровно  $t$  различных, а именно числа  $\nu_1, \dots, \nu_t$ , причём кратность собственного числа  $\nu_\alpha$  равна  $m_\alpha$  при  $\alpha = 1, \dots, t$ . Тогда строку натуральных чисел  $(m_1, \dots, m_t)$  мы будем называть *корневым типом* пары  $(G, X)$ . Разумеется, корневой тип определён с точностью до порядка элементов в строке, так что можно считать, что  $m_1 \geq \dots \geq m_t$ . Кроме того, очевидным образом

$$m_1 + \dots + m_t = n. \quad (5)$$

Оказывается, некоторую информацию о корневом типе пары  $(G, X)$  доставляет ранг матрицы  $(G, X)^!$ . Точнее, справедлива

**Теорема.** *Пара квадратичных форм  $(G, X)$  имеет кратные собственные числа тогда и только тогда, когда ранг  $\text{rg}(G, X)^!$  матрицы  $(G, X)^!$  меньше  $M$ . Если при этом  $(m_1, \dots, m_t)$  — корневой тип пары  $(G, X)$ , то имеет место формула*

$$m_1^2 + \dots + m_t^2 = n^2 - 2\text{rg}(G, X)^!. \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть  $Q$  — обратимая матрица из соотношений (1). С этой матрицей можно связать обратимые преобразования линейных пространств  $Sym(n)$  и  $so(n)$  соответственно, задаваемые формулами

$$R = Q^T S Q, \quad B = Q A Q^T, \quad (7)$$

где  $S, R \in Sym(n)$  и  $A, B \in so(n)$ . Действительно, так как  $S \in Sym(n)$ , то  $S^T = S$ , вследствие чего  $R^T = Q^T S^T Q = R$ , то есть  $R \in Sym(n)$ . Аналогично, так как  $A \in so(n)$ , то  $A^T = -A$  и  $B^T = -Q A Q^T = -B$ , то есть  $B \in so(n)$ .

Матрицы преобразований (7) обозначим через  $Q^\wedge$  и  $Q_\wedge$  соответственно. Они обратимы вследствие обратимости матрицы  $Q$ . Как видно,

$$(G, X)^\square(A) = Q^T Q A Q^T L Q - Q^T L Q A Q^T Q = Q^T (Q A Q^T L - L Q A Q^T) Q = Q^T ((E, L)^\square(Q A Q^T)) Q$$

или, в матричной записи,  $(G, X)^! = Q^\wedge(E, L)^! Q_\wedge$ . Так как матрицы  $Q^\wedge$  и  $Q_\wedge$  обратимы, то ранги матриц  $(G, X)^!$  и  $(E, L)^!$  равны:  $\text{rg}(G, X)^! = \text{rg}(E, L)^!$ . Ранг матрицы  $(E, L)^!$  легко найти исходя из того, что матрица  $L$  диагональна:  $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Матрица  $(E, L)^!$  устроена следующим образом. Её первые  $n$  строк равны нулю. Оставшаяся квадратная матрица порядка  $M$  диагональна, причём в её строке с двойным индексом  $ij$  расположено число  $\lambda_j - \lambda_i$ . Поэтому, если  $(m_1, \dots, m_t)$  — корневой тип пары  $(G, X)$  и различные собственные числа этой пары суть  $\nu_1, \dots, \nu_t$  с кратностями  $m_1, \dots, m_t$  соответственно, то число нулевых разностей  $\lambda_j - \lambda_i$  равно

$$\binom{m_1}{2} + \dots + \binom{m_t}{2}.$$

Поэтому ранг матрицы  $(G, X)^!$  равен

$$\text{rg}(G, X)^! = \binom{n}{2} - \binom{m_1}{2} - \dots - \binom{m_t}{2}.$$

Переходя от треугольных чисел к квадратным и учитывая соотношение (5), приходим к равенству (6). Теорема полностью доказана.

**Следствие 1.** Дискриминант  $\text{Dis}(G, X)$  равен нулю тогда и только тогда, когда все максимальные миноры матрицы  $(G, X)^!$  равны нулю.

**Следствие 2.** Если  $m_1, \dots, m_t$  — кратности собственных значений произвольной матрицы  $X \in Sym(n)$ , то справедливо соотношение

$$m_1^2 + \dots + m_t^2 = n^2 - 2\text{rg}(E, X)^!.$$

Осталось сделать два замечания.

**Замечание 1.** Максимальный минор матрицы  $(G, X)^!$ , образованный всеми её строками, кроме  $i_1 j_1, \dots, i_n j_n$ , будем обозначать через  $\{i_1 j_1, \dots, i_n j_n\}(G, X)$ . Это — однородный многочлен степени  $M$  по элементам матрицы  $G$  и такой же степени по элементам матрицы  $X$ . Таким образом,

степень любого из рассматриваемых многочленов вдвое меньше степени дискриминанта  $\text{Dis}(G, X)$ , а условие (2) равносильно системе уравнений

$$\{i_1 j_1, \dots, i_n j_n\}(G, X) = 0,$$

где наборы индексов  $i_1 j_1, \dots, i_n j_n$  соответствуют всем максимальным минорам матрицы  $(G, X)^1$ .

**Замечание 2.** При одном и том же значении  $n$  формула (6) не даёт возможности различать корневые типы  $(m_1, \dots, m_t)$  и  $(r_1, \dots, r_s)$  в случае, если

$$m_1^2 + \dots + m_t^2 = r_1^2 + \dots + r_s^2.$$

Простой перебор показывает, что при  $n \leq 5$  это равенство возможно лишь в случае совпадения рассматриваемых корневых типов, то есть при малых  $n$  на основании анализа ранга  $\text{rg}(G, X)^1$  можно различить все корневые типы. При  $n = 6$  имеется 11 возможных корневых типов, из которых при  $\text{rg}(G, X)^1 = 12$  неразличимы типы  $(3, 1, 1, 1)$  и  $(2, 2, 2)$ , а при  $\text{rg}(G, X)^1 = 9$  неразличимы типы  $(4, 1, 1)$  и  $(3, 3)$ .

### Литература

- [1] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия, – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц, – М.: Наука, 1988.
- [3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии, – М.: Факториал Пресс, 2000.
- [4] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры, – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [5] Sturmfels B. Solving Systems of polynomial equations, CMBS Regional Conference Series in Mathematics. vol. 97, – Providence: American Mathematical Society, 2002.
- [6] Borchardt C. W. Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die secularen Störungen der Planeten bestimmt // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1846. – 30, – P. 38-45.
- [7] Кремнева Ю. П. Дискриминант характеристического уравнения симметрической матрицы // Известия вузов. Матем. – 1961. – 5:1, – С. 90-97.

*Илюшечкин Никита Васильевич,  
АО Концерн Моринформсистема – Агат, г. Москва,  
Ведущий инженер.*

*E-mail: ilyush55@mail.ru*

# О свойствах систем дифференциальных уравнений и задачах оптимальной добычи ресурса

*Л. И. Родина, А. В. Черникова*

Предлагается классификация автономных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Описано поведение траекторий систем каждого класса и показано, что решения систем первого и второго классов обладают свойством монотонности решений относительно начальных данных. Приведен один из вариантов теоремы сравнения для указанных систем. Рассмотрены примеры систем второго и третьего классов для моделей взаимодействия двух биологических видов и построены их фазовые портреты. Показано, что для систем разных классов по-разному решаются задачи оптимальной добычи возобновляемого ресурса; в частности, обсуждается вопрос о целесообразности извлечения одного вида ресурса или двух видов.

## Введение

Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений берет свое начало в исследованиях А. Пуанкаре. В работе 1890 г. «О задаче трех тел и уравнениях динамики» («Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique»), которая стала первоисточником его фундаментального труда в трех томах «Новые методы небесной механики» [1] («Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», 1892, 1893, 1899 гг.), Пуанкаре разработал основную часть теории динамических систем. Им были введены понятия особой точки и фазовой траектории, сформулированы утверждения о существовании и устойчивости периодических решений, о возвращении, а также было предложено использовать фазовое пространство для исследования динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем это позволило разработать теорию бифуркаций, которая описывает всевозможные перестройки качественной картины движения при изменении параметров системы. Значительный вклад в качественную теорию дифференциальных уравнений внес И.О. Бендиксон, исследовавший поведение интегральных кривых в окрестностях особых точек. В 1901 году в работе «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» («Sur les courbes définies par des équations différentielles») им были изложены существенные обобщения результатов Пуанкаре. Наиболее известным из них является строгое доказательство теоремы А. Пуанкаре о предельном цикле (в последующем она получила название теоремы Пуанкаре-Бендиксона [4, с. 31]).

Важную роль в качественном исследовании дифференциальных уравнений играют теоремы сравнения, которые гарантируют существование (а при некоторых условиях и единственность) решения задачи Коши на основании существования верхних и нижних решений дифференциальных уравнений. Начало развития этой теории для задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно старшей производной, было положено С.А. Чаплыгиным в 1919 году в краткой монографии «Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» [2]. Позднее, в 1950 г. Т. Важевским было предложено обобщение теоремы сравнения Чаплыгина, в котором накладываются условия квазимонотонности правой части исходной системы дифференциальных уравнений [3].

Вопросы устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с помощью специально построенных функций, без нахождения самих решений системы, исследовались А.М. Ляпуновым. Такие функции были введены им в работе 1892 г. «Общая задача об устойчивости движения» и в дальнейшем получили название функций Ляпунова. Этот метод исследования дифференциальных уравнений универсален для широкого класса задач, а также нашел применение в теории оптимального управления.

Методы качественной теории динамических систем достаточно полно изложены в книгах В.В. Немыцкого и В.В. Степанова [4], А.А. Андропова, Е.А. Леонтовича, И.И. Гордона и А.Г. Майера [5], Д. Эрроусмита и К. Плейса [6], Ф. Хартмана [7], В.И. Арнольда [8].

Современная качественная теория динамических систем направлена на разработку методов анализа динамических систем с учетом их нелинейных свойств. В этой связи исследуются бифуркации, аттракторы и странные аттракторы, а также с помощью современных алгоритмов и программных инструментов активно развиваются методы их визуализации и анализа. Методы качественной теории динамических систем находят широкое применение при исследовании многих экономических и социальных моделей, а также моделей сложных физических и химических процессов.

## 1. Классификация систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

в предположении, что функции  $f_1, \dots, f_n$  и их производные  $\partial f_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) непрерывны. Систему (1) также будем записывать в векторной форме  $\dot{x} = f(x)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Пусть заданы начальные условия

$$x(0) = x^0, \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (2)$$

Обозначим через  $\varphi(t) = \varphi(t, x^0) = (\varphi_1(t, x^0), \dots, \varphi_n(t, x^0))$  решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0) = x^0$ , то есть решение задачи Коши (1), (2).

Расскажем о классификации автономных систем вида (1), введенной в статье [9]. Будем считать, что система (1) относится к **первому классу** на множестве  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ , если функция  $f(x)$  не зависит от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , то есть эта система имеет вид

$$\dot{x} = C, \quad C \in \mathbb{R}^n, \quad x \in G.$$

Решением системы является вектор-функция  $\varphi(t, x^0) = Ct + x^0$ . Тогда

$$\varphi(t, x^0) - \varphi(t, y^0) = x^0 - y^0,$$

то есть разность  $\varphi(t, x^0) - \varphi(t, y^0)$  постоянная.

Ко **второму классу** отнесем системы вида (1), не входящие в первый класс, для которых на множестве  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  выполнено следующее условие.

**Условие 1.1.** Для всех  $x \in G$  имеют место неравенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Напомним [4, с. 268], что множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  называется *положительно инвариантным относительно системы* (1), если для любой начальной точки  $x^0 \in G$  траектория решения  $\varphi(t, x^0)$  содержится в  $G$ . Неравенство  $x \leq y$ , записанное для векторов  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , будем понимать, как  $x_i \leq y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Аналогично, векторное неравенство  $x < y$  означает, что  $x_i < y_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ .

В следующей теореме утверждается, что решения систем второго класса обладают свойством монотонности решений относительно начальных данных.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие 1.1 и множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  положительно инвариантно относительно системы (1). Тогда, если  $x^0 \in G$ ,  $y^0 \in G$  и  $x^0 \leq y^0$ , то

$$\varphi(t, x^0) \leq \varphi(t, y^0) \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Теорема 1, по-видимому, была доказана в 1950 году в работе Т. Важевского [3] при дополнительном условии, что  $f_i(0, \dots, 0) = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Доказательство данного утверждения также приведено в [10].

В качестве частного случая системы (1) рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad (3)$$

где  $A$  — постоянная матрица размера  $n \times n$ . Отметим, что условие 1.1 для линейной системы (3) означает, что внедиагональные элементы матрицы  $A$  неотрицательные:

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{при } i \neq j, i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Если для матрицы  $A$  выполнено (4), то эта матрица называется *матрицей Метцлера*.

Обозначим через  $e^{At}$  матричную экспоненту, то есть матрицу  $n \times n$ , определяемую степенным рядом:

$$e^{At} = E + At + A^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \cdot \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \cdot \frac{t^k}{k!},$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $n \times n$ ,  $A^k$  —  $k$ -я степень матрицы  $A$ . Матрица  $A$  называется *экспоненциально неотрицательной*, если  $e^{At} \geq 0$  для всех  $t \geq 0$ , см. [11].

**Лемма 1.** (см. [3, 11]). Матрица  $A$  является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.

Запишем решение системы (3) в виде матричной экспоненты:  $\varphi(t, x) = e^{At}x$ ,  $t \geq 0$ . Из леммы 1 очевидно следует, что если  $A$  — матрица Метцлера и  $x \leq y$ , то для любого  $t \geq 0$

$$\varphi(t, x) = e^{At}x \leq e^{At}y = \varphi(t, y),$$

то есть решения линейной системы (3) обладают свойством монотонности относительно начальных данных.

**Замечание 1.1.** Свойство монотонности выполнено для любого дифференциального уравнения вида  $\dot{x} = f(x)$ , см. [10].

К **третьему классу** отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых на множестве  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  выполнено следующее условие.

**Условие 1.2.** Для всех  $x \in G$  имеют место неравенства

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \leq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

**Теорема 2.** Предположим, что выполнено условие 1.2 и множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  положительно инвариантно относительно системы (1). Тогда, если  $x^0 \in G$ ,  $y^0 \in G$  и  $x^0 < y^0$ , то не существует точки  $t^* \in (0, +\infty)$ , такой, что  $\varphi(t^*, x^0) > \varphi(t^*, y^0)$ .

Доказательство теоремы 2 приведено в [9]. Системы, не входящие в три рассмотренных класса, отнесем к **четвертому классу**.

**Замечание 1.2.** Важным свойством систем всех трех рассмотренных здесь классов является то, что эти системы в области  $G$  не могут иметь периодических решений (см. [9]).

## 2. Примеры систем второго и третьего классов для моделей взаимодействия двух видов

Качественная теория дифференциальных уравнений имеет важные приложения в естествознании. В мире природы существует огромное количество видов, которые, взаимодействуя между собой, создают сложные экосистемы. Для лучшего понимания этих взаимодействий разработаны различные классификации.

Классификация взаимодействия особей, составляющих популяцию из двух видов, была предложена первоначально для социальных систем Э. Хаскеллом в 1949 г. и адаптирована для экосистем в 1952 г. П. Беркхолдером. Одной из самых известных является классификация взаимодействия двух видов, введенная американским экологом Ю. Одумом в 1986 г., который предложил оценивать взаимоотношения видов как положительные, отрицательные или нейтральные в зависимости от того, возрастает, убывает или остается неизменной численность одного вида в присутствии другого вида [12, с. 83]. Модели популяций, соответствующие этой классификации, подробно описаны в [13, с. 182]. Пусть численности двух видов равны  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда, согласно гипотезе Вольтерра о том, что скорость процесса отмирания каждого вида пропорциональна численности вида, данные модели могут быть описаны системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь параметры  $a_i > 0$  — постоянные собственной скорости роста видов,  $c_i > 0$  — постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции),  $b_{ij}$  — постоянные взаимодействия видов,  $i, j = 1, 2$ . Знаки коэффициентов  $b_{ij}$  определяют тип взаимодействия.

Приведем типы взаимодействий популяций двух видов по Ю. Одуму:

1) *нейтрализм*:  $b_{12} = 0$ ,  $b_{21} = 0$  — ни одна из популяций не влияет на другую (например, лоси и белки в одном лесу);

2) *конкуренция*:  $b_{12} < 0$ ,  $b_{21} < 0$  — взаимоотношения, связанные с борьбой между видами, нуждающимися в одних и тех же ресурсах. Различают два типа конкуренции: *внутривидовую*, характерную для представителей одного вида (птицы одного вида конкурируют за места гнездования), и *межвидовую* конкуренцию, которая проявляется между представителями разных популяций (борьба за общую пищу волков и лисиц, например, охота на зайца). В свою очередь межвидовая конкуренция разделяется на *прямую* (*интерференция*), которая заключается в прямом взаимном подавлении обоих видов, и *косвенную* (*эксплуатация*), то есть не прямое подавление при дефиците общего ресурса;

3) *аменсализм*:  $b_{12} < 0$ ,  $b_{21} = 0$  — вторая популяция подавляет первую популяцию, но сама не испытывает отрицательного воздействия (высокие деревья кроной перекрывают свет более низким растениям);

4) *хищник-жертва*:  $b_{12} > 0$ ,  $b_{21} < 0$  — взаимоотношения, выгодные для одного вида и угнетающие второй. Среди таких взаимоотношений выделяют два типа: *паразитизм*, при котором один организм (паразит) живет за счет другого (хозяина), принося ему вред (например, комары), и *хищничество*, присущее особям разных видов, при котором один из них (хищник) атакует другого (жертву) (например, рыси и зайцы);

5) *комменсализм*:  $b_{12} > 0$ ,  $b_{21} = 0$  — способ совместного сосуществования двух видов, выгодный для одного из видов и не приносящий ни вреда, ни пользы для другого (например, лишайник и дерево);

6) *симбиоз*:  $b_{12} > 0$ ,  $b_{21} > 0$  — форма взаимопользующего сосуществования разных видов. Здесь выделяют *факультативный симбиоз* (*протокооперацию*), когда взаимодействие благоприятно сказывается на оба вида, но не обязательно (рак-отшельник и актиния), и *мутуализм* — взаимодействие благоприятно для обоих видов и обязательно (например, пчелы и цветы).

Соотнесем типы межвидовых взаимодействий с рассмотренными здесь классами систем дифференциальных уравнений. Сначала отметим, что численности каждого из видов неотрицательные, поэтому систему (5) рассматривают на множестве  $G = \mathbb{R}_+^2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ . Покажем, что решения данной системы обладают *свойством квазиположительности*, то есть эти решения являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях.

**Теорема 3.** (см. [14, с. 34]). *Для того, чтобы решения  $\varphi(t) = \varphi(t, x^0)$  системы (1) при любых неотрицательных начальных условиях  $x^0$  были неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие квазиположительности:*

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

для любых неотрицательных переменных  $x_j$ ,  $j \neq i$ .

Для системы (5) выпишем функции

$$f_1(x_1, x_2) = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \quad f_2(x_1, x_2) = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2,$$

тогда  $f_1(0, x_2) = 0$  и  $f_2(x_1, 0) = 0$ . Следовательно, условие (6) выполнено и множество  $G = \mathbb{R}_+^2$  является положительно инвариантным относительно данной системы.

Далее, найдем частные производные функций  $f_1, f_2$ :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = b_{12} x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = b_{21} x_2, \quad \text{где } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (7)$$

Из равенств (7) следует, что среди моделей взаимодействия двух видов *системами второго класса* являются системы с неотрицательными параметрами  $b_{12}, b_{21}$ , то есть системы, описывающие модели симбиоза, комменсализма и нейтрализма. К *системам третьего класса* относятся системы, которым соответствуют взаимодействия типа конкуренция и аменсализм. К четвертому классу относится система, заданная моделью «хищник–жертва».

**Пример 1.** Построим фазовый портрет одной из систем второго класса, которая описывает взаимодействие популяций двух видов типа «симбиоз» [13, с. 182]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + 2x_1 x_2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + x_1 x_2 - 4x_2^2. \end{cases} \quad (8)$$

Такой тип взаимодействия предполагает положительное влияние особей разных видов друг на друга.

Данная система имеет четыре особые точки следующих типов:  $M_1 = (0, 0)$  — неустойчивый узел,  $M_4 = (10, 3)$  — устойчивый узел,  $M_2 = (0, 0.5)$  и  $M_3 = (4, 0)$  — седло. На рисунке 1 изображен фазовый портрет исследуемой системы, на котором жирно отмечены данные особые точки. Траектории, выпущенные из различных начальных точек (с положительными координатами), будут стремиться к устойчивому положению равновесия. Изобразим траектории системы, выходящие из точек с координатами  $x^0 = (2, 0.5)$  (пунктирная),  $y^0 = (12, 5)$  (штриховая) и  $z^0 = (4, 3)$  (штрих-пунктирная), стремящиеся к особой точке  $M_4$ .

Рисунок 1 иллюстрирует выполнение свойства монотонности решений относительно начальных данных для системы (8) второго класса. Видно, что для начальных точек  $x^0 \leq y^0$  неравенство  $\varphi(t, x^0) \leq \varphi(t, y^0)$  справедливо для всех  $t \geq 0$ . Аналогичные неравенства имеют место и для других пар начальных точек ( $x^0 \leq z^0, z^0 \leq y^0$ ).



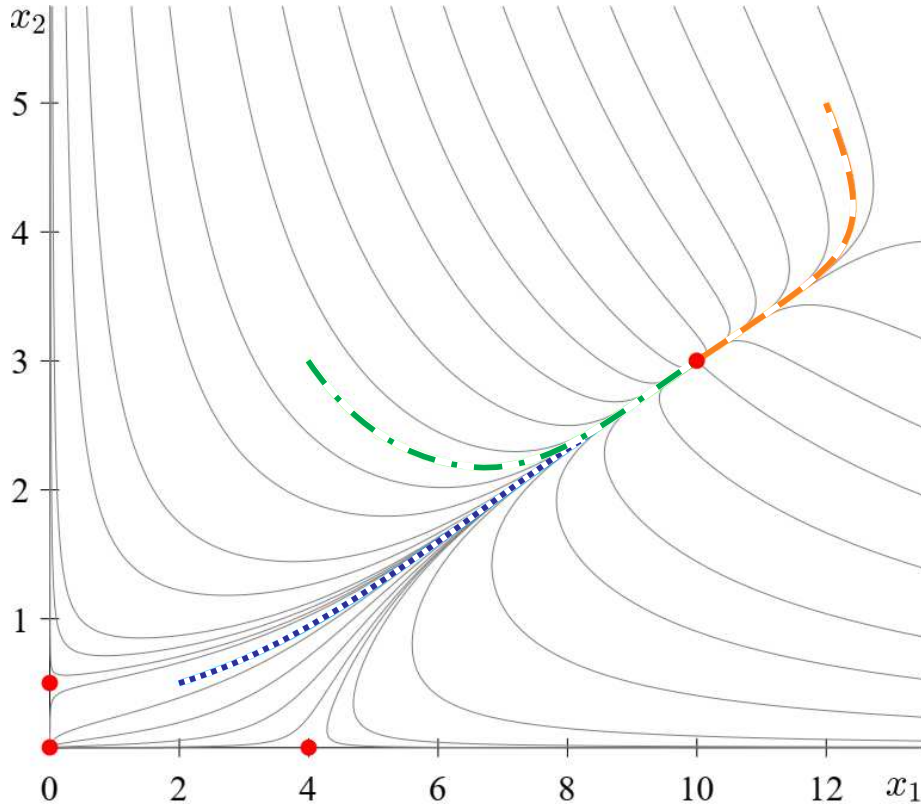


Рис. 1. Фазовый портрет системы (8).

**Пример 2.** Построим фазовый портрет одной из систем третьего класса

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_1x_2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - x_1x_2 - x_2^2. \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) описывает конкурентное взаимоотношение популяций двух видов [13, с. 182]. Данная система имеет четыре особые точки следующих типов:  $M_1 = (0, 0)$  — неустойчивый узел,  $M_2 = (0, 2)$  и  $M_3 = (3, 0)$  — асимптотически устойчивый узел,  $M_4 = (1, 1)$  — седло. На рисунке 2 изображен фазовый портрет исследуемой системы, на котором жирно отмечены особые точки. Данная система является триггерной системой (то есть системой, имеющей два или более устойчивых стационарных состояния). Так, траектории, выходящие из начальных точек  $(0.25, 0.75)$  (штрих с двойным пунктиром) и  $(1.5, 2)$  (пунктирная) стремятся к особой точке  $M_2$ , а траектории, выпущенные из начальных точек  $(1, 0.5)$  (штрих-пунктирная) и  $(2.75, 1.25)$  (штриховая) — к особой точке  $M_3$ .

Покажем, что для начальных точек  $x^0 < y^0$  изображенных траекторий системы (9) выполнено следующее свойство: не существует точки  $t^* \in (0, +\infty)$ , такой, что одновременно  $\varphi_1(t^*, x^0) > \varphi_1(t^*, y^0)$  и  $\varphi_2(t^*, x^0) > \varphi_2(t^*, y^0)$ . Например, возьмем начальные точки  $x^0 = (1, 0.5)$  на штрих-пунктирной и  $y^0 = (1.5, 2)$  на пунктирной траекториях. Очевидно, что  $x^0 < y^0$ , но штрих-пунктирная и пунктирная траектории приближаются к разным особым точкам, поэтому найдется момент времени  $\tau$  такой, что  $\varphi_1(t, x^0) > \varphi_1(t, y^0)$  для всех  $t > \tau$ ; однако при этом  $\varphi_2(t, x^0) < \varphi_2(t, y^0)$  для всех  $t > 0$ . Такое же свойство выполнено для других начальных точек  $x^0 < y^0$  изображенных здесь траекторий и для всех других траекторий данной системы.

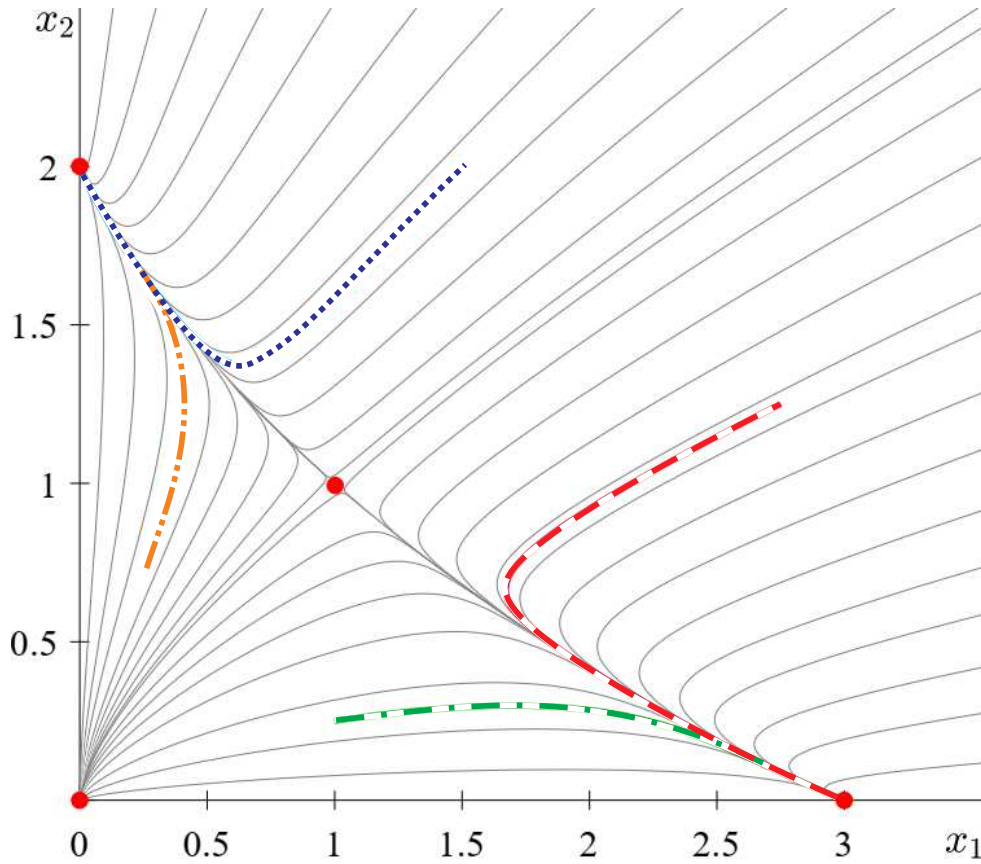


Рис. 2. Фазовый портрет системы (9).

### 3. Теорема сравнения для систем дифференциальных уравнений

В начале прошлого века академик С.А. Чаплыгин начал заниматься вопросами приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Одними из основных его результатов являются теоремы сравнения [2], которые считаются базовым разделом современной теории дифференциальных и интегральных уравнений. Предложенные Чаплыгиным теоремы нашли многочисленные приложения в теории устойчивости, теории оптимального управления, теории игр и теории численных методов.

Исследуем поведение решений двух автономных систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (10)$$

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Как и выше, предполагаем, что вектор-функция  $f = (f_1, \dots, f_n)$  и производные  $\partial f_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) непрерывны и такими же свойствами обладает вектор-функция  $g = (g_1, \dots, g_n)$ .

Обозначим через  $\varphi(t) = \varphi(t, x^0)$  — решение системы (10), удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0) = x^0$  и через  $\psi(t) = \psi(t, x^0)$  — решение (11) такое, что  $\psi(0) = x^0$ .

**Определение 3.1.** Будем говорить, что система (11) является *верхней системой сравнения* для (10), а система (10) является соответственно *нижней системой сравнения* для (11) в области  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ , если

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq g_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \quad (12)$$

для любых  $x \leq y$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие (12) и множество  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  положительно инвариантно относительно систем (10), (11). Тогда для любых  $x^0 \leq y^0$ ,  $x^0 \in G$ ,  $y^0 \in G$  неравенство  $\varphi(t, x^0) \leq \psi(t, y^0)$  имеет место для всех  $t \geq 0$ .

Приведем краткое доказательство. Пусть задано  $x^0 \in G$ . Рассмотрим решение  $\varphi(t) = \varphi(t, x^0)$  системы (10) как функцию переменной  $t$ . В системе  $\dot{y} = g(t, y)$  перейдем к новой неизвестной вектор-функции с помощью замены  $z = y - \varphi(t)$ . Тогда  $y = z + \varphi(t)$  и функция  $z(t) = z(t, z^0)$ , где  $z^0 = y^0 - x^0$ , является решением системы

$$\dot{z} = g(z + \varphi(t)) - f(\varphi(t)).$$

Пусть  $F(t, z) \doteq g(z + \varphi(t)) - f(\varphi(t))$ , тогда

$$\dot{z} = F(t, z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Отметим, что неравенство  $\varphi(t, x^0) \leq \psi(t, y^0)$  равносильно  $z(t, z^0) \geq 0$  и утверждение теоремы следует из условия квазиположительности для неавтономной системы (13), сформулированного в теореме 3, которое имеет вид:

$$F_i(t, z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

для любых  $z_j \geq 0$ ,  $j \neq i$  и всех  $t \geq 0$ .

Теорему сравнения 4 несложно обобщить на неавтономные системы дифференциальных уравнений, см. [9].

**Замечание 3.1.** Отметим, что при  $n = 1$  условие (12) имеет вид: « $f(t, x) \leq g(t, x)$  при  $t \geq t_0$  для всех  $x \in G$ ».

Покажем далее, что при помощи теоремы сравнения можно получить оценку средней временной выгоды от извлечения ресурса в случаях, когда невозможно найти аналитические решения соответствующих систем.

## 4. Задачи оптимальной добычи возобновляемого ресурса

Рассмотрим популяцию, которая при отсутствии эксплуатации задана автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени  $\tau(k) = kd$ ,  $d > 0$  из популяции извлекается некоторая доля ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если  $n \geq 2$ , то ресурс  $x \in \mathbb{R}_+^n$  является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов  $x_1, \dots, x_n$ , либо разделен на  $n$  возрастных групп. Можно рассматривать добычу  $n$  различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Получили модель эксплуатируемой популяции, динамика которой задана управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $x_i(kd - 0)$  и  $x_i(kd)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до и после сбора в момент  $kd$  соответственно,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Предполагаем, что функции  $f_1, \dots, f_n$  и их производные  $\partial f_i / \partial x_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) непрерывны и решения системы (4.1) непрерывны справа.

Приведем определение одной из характеристик сбора возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени.

Пусть  $X_i(k) = x_i(kd - 0)$  — количество ресурса  $i$ -го вида до сбора в момент  $kd$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $x(0)$  — начальное количество ресурса;  $C_i \geq 0$  — стоимость ресурса  $i$ -го вида. Тогда общая стоимость собранного ресурса равна  $\sum_{i=1}^n C_i X_i(k) u_i(k)$ . Пусть  $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), u(2), \dots)\}$ .

**Определение 4.1.** (см. [15, 16]). *Средней временной выгодой от извлечения ресурса называется характеристика*

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j). \quad (15)$$

Если предел в правой части (15) существует, будем обозначать его  $H(\bar{u}, x(0))$ .

Для нахождения наибольшего значения средней временной выгоды рассмотрим функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$$

и множество  $\mathcal{D}_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \varphi_i(d, x) \neq 0, i = 1, \dots, n\}$ . Функция  $D(x)$  является общей стоимостью прироста ресурса каждого вида за промежутки времени между соседними изъятиями, если начальное количество ресурса  $i$ -го вида равно  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . В следующей теореме утверждается, что наибольшее значение средней временной выгоды совпадает с максимумом функции  $D(x)$  на множестве  $\mathcal{D}_+$  и приведен один из способов добычи ресурса, при котором можно достигнуть данного значения.

**Теорема 5.** (см. [16]). *Пусть максимум функции  $D(x)$  на множестве  $\mathcal{D}_+$  достигается в точке  $x^*$ . Тогда для любого  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  такого, что  $\varphi(d, x(0)) \geq x^*$ , функция  $H_*(\bar{u}, x(0))$  достигает наибольшего значения*

$$H_*(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*) = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x^*) - x_i^*)$$

при режиме эксплуатации  $\bar{u}^* = (u^*(1), u^*(2), \dots) \in U$ , где

$$u^*(1) = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x(0))}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x(0))}\right);$$

$$u^*(k) = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x^*)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x^*)}\right) \text{ при } k \geq 2.$$

Проиллюстрируем применение данной теоремы для популяции из двух видов (5), между которыми наблюдаются различные типы взаимодействия.

**Пример 3.** Найдем оценку средней временной выгоды для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - c_2 x_2^2, \end{cases} \quad (16)$$

описывающей отношение типа «нейтрализм», при котором два вида никак не влияют друг на друга.

Для системы (16) в явном виде можно найти решение  $\varphi(t, x^0) = (\varphi_1(t, x^0), \varphi_2(t, x^0))$ , удовлетворяющее начальному условию  $\varphi(0, x^0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ :

$$\varphi_i(t, x^0) = \frac{a_i x_i^0 e^{a_i t}}{a_i + c_i x_i^0 (e^{a_i t} - 1)}, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.$$

Несложно показать, что наибольшее значение функции  $D(x) = \sum_{i=1}^2 C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$  достигается в точке  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ , где  $x_i^* = \frac{a_i}{c_i(e^{a_i d/2} + 1)}$ ,  $i = 1, 2$  и это значение равно

$$D(x^*) = \sum_{i=1}^2 \frac{C_i a_i (e^{a_i d/2} - 1)}{c_i (e^{a_i d/2} + 1)}.$$

Таким образом, максимум средней временной выгоды равен  $D(x^*)$  и так как  $x_1^* > 0$ ,  $x_2^* > 0$ , то он достигается при извлечении *двух видов ресурса*.

Пусть  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ ,  $d = 0.5 \ln 2$  и заданы параметры системы (16):  $a_1 = a_2 = 2$ ,  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 2.5$ . Тогда получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 5x_1^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - 2, 5x_2^2, \end{cases} \quad (17)$$

для которой наибольшее значение функции  $D(x^*) \approx 0.343$  достигается в точке  $x^* \approx (0.166, 0.331)$ ; при этом соответствующие управления приближенно равны  $u_1^* \approx 0.293$ ,  $u_2^* \approx 0.293$ .

Система имеет (17) четыре особые точки: точка  $M_1 = (0, 0)$  типа неустойчивый дикритический узел, точки  $M_2 = (0.4, 0)$  и  $M_3 = (0, 0.8)$  — седло и  $M_4 = (0.4, 0.8)$  — устойчивый дикритический узел (отмечены жирными точками на рисунке 3).

Возьмем любое начальное значение численности популяции, например,  $x(0) = (0.3, 0.45)$ . Тогда  $\varphi(d, x(0)) \approx (0.343, 0.576)$ . По теореме 5 в момент времени  $k = 1$  из точки  $\varphi(d, x(0))$  с помощью управления  $u^*(1) \approx (0.517, 0.425)$  попадаем в точку  $x^*$ . Далее из точки  $x^*$  строится решение, для которого  $\varphi(d, x^*) \approx (0.234, 0.469)$  (штрих-пунктирная стрелка на рисунке 3. Затем, в каждый момент времени  $k \geq 2$  управления постоянны  $u^*(k) \approx (0.293, 0.293)$ , что обеспечивает возвращение из точки  $\varphi(d, x^*)$  обратно в точку  $x^*$  (пунктирная стрелка на рисунке 3).

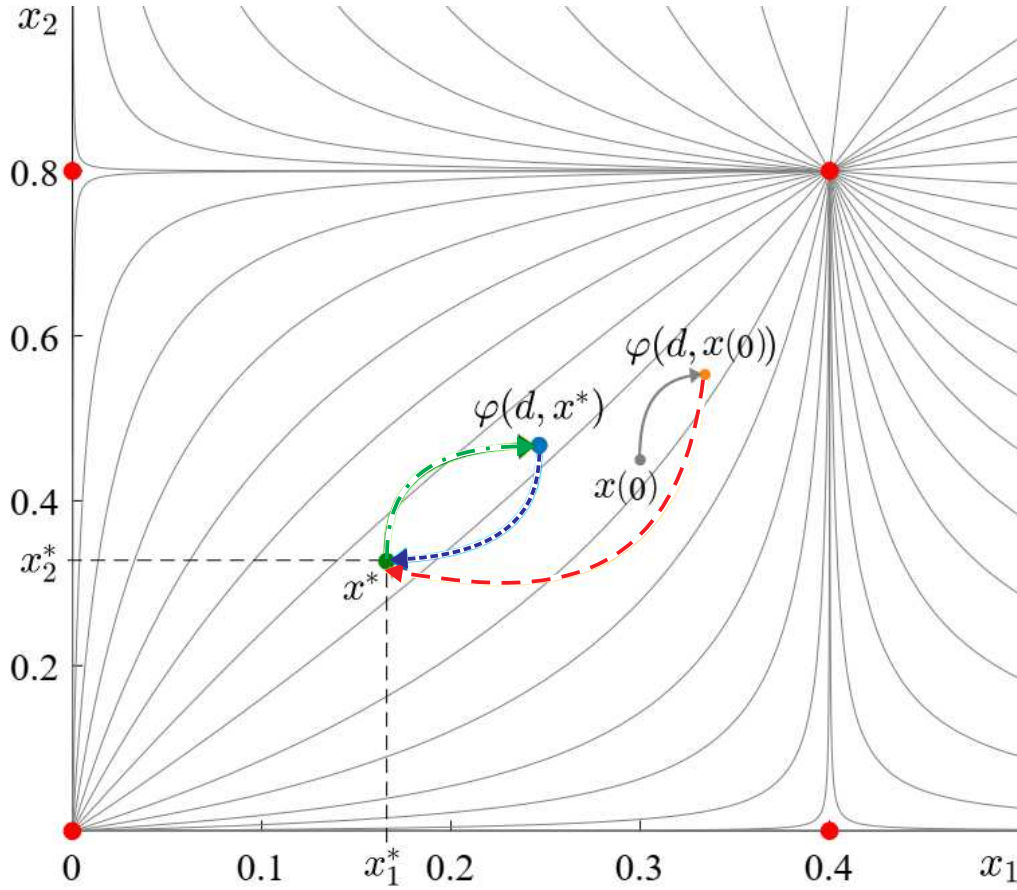


Рис. 3. Фазовый портрет системы (17).

**Пример 4.** Рассмотрим модель взаимодействия двух видов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_{12} x_1 x_2 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + b_{21} x_1 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \quad (18)$$

Предполагаем, что константы взаимодействия видов  $b_{12}$  и  $b_{21}$  либо положительные (тогда система описывает взаимоотношения типа «симбиоз»), либо  $b_{12} > 0$ ,  $b_{21} = 0$  — в этом случае имеем взаимоотношение «комменсализм».

Несложно показать, что система (18) является *верхней системой сравнения* для системы нейтрализма (16). Обозначим через  $\varphi(d, x)$  и  $\psi(d, x)$  решения систем (18) и (16), такие, что  $\varphi(d, x) = \psi(d, x) = x$ . Тогда  $\varphi(d, x) \geq \psi(d, x)$  для всех  $t \geq 0$  в силу теоремы сравнения 4 и

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i(\varphi_i(d, x) - x_i) \geq \tilde{D}(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i(\psi_i(d, x) - x_i).$$

Отметим, что

$$D(x_1, 0) = C_1(\varphi_1(d, x) - x_1) = C_1(\psi_1(d, x) - x_1) = \tilde{D}(x_1, 0) \text{ и } D(0, x_2) = \tilde{D}(0, x_2),$$

поэтому наибольшее значение функции  $D(x)$  (также как и для  $\tilde{D}(x)$ ) достигается в точке с положительными координатами. Сделаем вывод, что максимум средней временной выгоды для моделей симбиоза и комменсализма получается при одновременном извлечении *двух видов ресурса*.

**Пример 5.** Рассмотрим модель конкуренции двух видов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_1x_2 - cx_1^2, \\ \dot{x}_2 = ax_2 - bx_1x_2 - cx_2^2, \end{cases} \quad (19)$$

где  $a > 0$ ,  $c \geq b > 0$  и оценим среднюю временную выгоду для этой системы.

Найдем решения системы (19) при определенных начальных данных. Возьмем начальную точку  $(x_1, 0)$  в предположении, что начальный размер популяции хищника  $x_2 = 0$ . Тогда второе уравнение системы имеет решение  $\varphi_2(d, (x_1, 0)) = 0$ , а первое уравнение является логистическим  $\dot{x}_1 = ax_1 - cx_1^2$ , решение которого имеет вид:

$$\varphi_1(d, (x_1, 0)) = \frac{ax_1e^{ad}}{a + cx_1(e^{ad} - 1)}.$$

Функция  $D(x_1, 0) = C_1 \left( \frac{ax_1e^{ad}}{a + cx_1(e^{ad} - 1)} - x_1 \right)$  достигает наибольшего значения

$$D(x_1^*, 0) = \frac{aC_1(e^{ad/2} - 1)}{c(e^{ad/2} + 1)} \quad \text{при} \quad x_1^* = \frac{a}{c(e^{ad/2} + 1)}.$$

Случай, когда  $x_1 = 0$ , рассматривается аналогично.

Пусть теперь начальные размеры популяций совпадают  $x_1 = x_2 = x$ . Тогда система (19) имеет решение

$$\varphi_1(d, (x, x)) = \varphi_2(d, (x, x)) = \frac{axe^{ad}}{a + (b + c)x(e^{ad} - 1)}.$$

В этом случае наибольшее значение функции  $D(x)$  равно  $\frac{a(C_1 + C_2)(e^{ad/2} - 1)}{(b + c)(e^{ad/2} + 1)}$ .

В следующем предложении показано, что для модели конкуренции (19) предпочтительно *извлекать только один вид ресурса* — тот, который имеет большую стоимость (см. [15]).

**Предложение 4.1.** Пусть  $C_2 \leq C_1$  и  $x_2 = 0$ . Если  $\varphi_1(d, x(0)) \geq x_1^* = \frac{a}{c(e^{ad/2} + 1)}$ , то  $H_*(\bar{u}, x(0))$  достигает наибольшего значения

$$H_*(\bar{u}^*, x(0)) = D(x_1^*, 0) = \frac{aC_1(e^{ad/2} - 1)}{c(e^{ad/2} + 1)}$$

на множестве  $U$  при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(1) = \left( 1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x(0))}, 1 \right); \quad u^*(k) = (1 - e^{-ad/2}, 0), \quad k \geq 2.$$

Аналогично рассматривается случай  $C_1 \leq C_2$ .

Проведем исследование системы, описывающей взаимодействие двух видов типа «конкуренция» при  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$  и  $d = 0.5 \ln 2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_1x_2 - 2x_1^2, \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - x_1x_2 - 2x_2^2. \end{cases} \quad (20)$$

Траектории фазового портрета, изображенного на рисунке 4, стремятся к устойчивой особой точке  $M_3 = (1, 1)$  типа узел. Остальные особые точки системы неустойчивы:  $M_1 = (0, 0)$  — дикритический узел,  $M_2 = (0, 1.5)$  и  $M_4 = (1.5, 0)$  — седло.



Приведем описание процесса эксплуатации возобновляемого ресурса, схематично изображенного на рисунке 4. Рассмотрим случай, когда  $x_2 = 0$ . Возьмем начальную точку  $x(0) = (0.4, 0)$ . Тогда  $\varphi(d, x(0)) \approx (0.653, 0)$ . В момент времени  $k = 1$  из точки  $\varphi(d, x(0))$  управлением  $u^*(1) \approx (0.144, 1)$  попадаем в точку  $x^* = (0.559, 0)$ . Далее из точки  $x^*$  строится решение, для которого  $\varphi(d, x^*) \approx (0.941, 0)$  (штрих-пунктирная стрелка на рисунке 4). Затем, в каждый момент времени  $k \geq 2$  управления постоянны  $u^*(k) \approx (0.405, 0)$ , таким образом, можно вернуться из точки  $\varphi(d, x^*)$  обратно в точку  $x^*$  (пунктирная стрелка на рисунке 4). Полагая стоимость единицы ресурса  $C_1 = 5$ , наибольшее значение средней временной выгоды  $H_*(\bar{u}^*, x(0))$  приближенно равно 1.907.

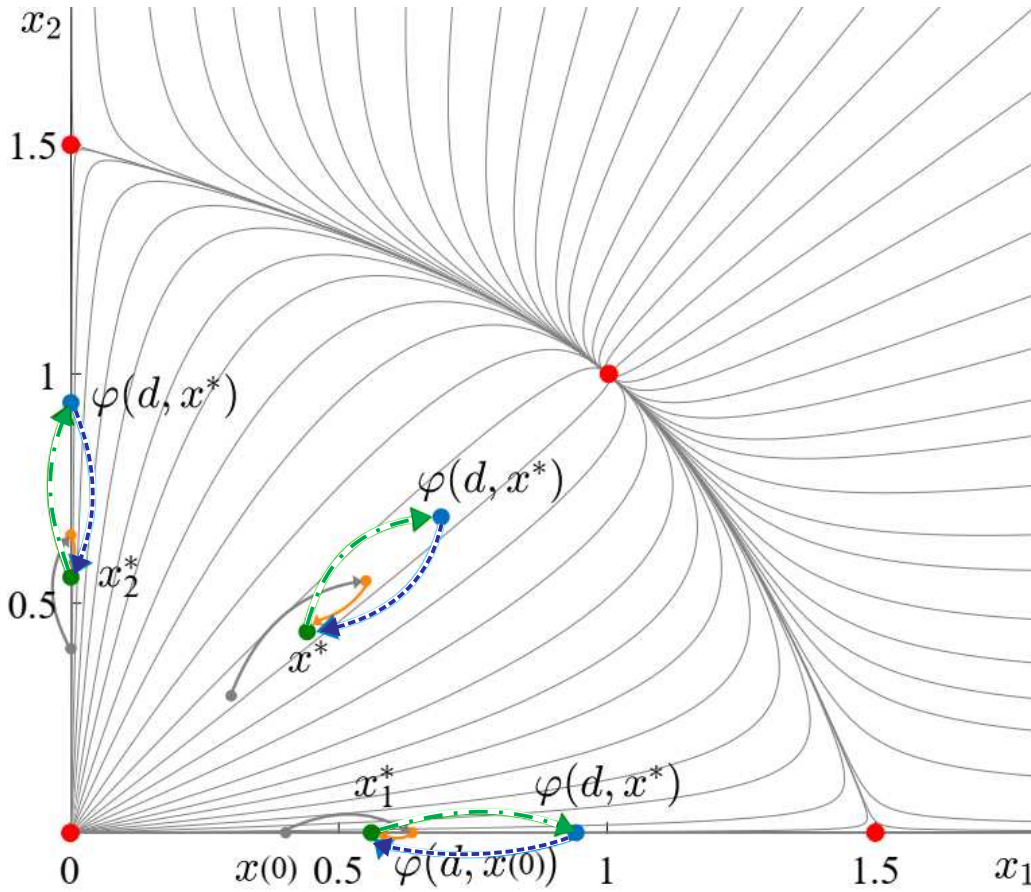


Рис. 4. Фазовый портрет системы (20).

**Пример 6.** Рассмотрим модель взаимодействия двух видов «хищник-жертва»

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 - x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-3 + x_1)x_2. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь  $x_1$  и  $x_2$  — размеры популяций жертв и хищников соответственно. Данная система имеет две особые точки:  $M_1 = (0, 0)$  типа седло и  $M_2 = (3, 2)$  типа центр, вблизи которой фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые, что означает устойчивое сосуществование популяций хищника и жертвы (рисунок 5).

Пусть  $d = 0.5 \ln 2$  и стоимость условной единицы популяции жертвы  $C_1 = 2$ . Обозначим через  $\hat{x} = (\hat{x}_1, 0)$ , где  $\hat{x}_1 > 0$  — произвольное положительное число. Тогда  $\varphi(d, \hat{x}) = (\hat{x}_1 e^{2d}, 0)$ ,

$$D(d, \hat{x}) = C_1 \hat{x}_1 (e^{2d} - 1) e^{2d} \rightarrow +\infty, \quad \hat{x}_1 \rightarrow +\infty.$$



Укажем один из способов управления, при котором  $H(\bar{u}^*, x(0)) = +\infty$ :

$$u^*(1) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, 1\right),$$

$$u(2k) = (0, 0), \quad u(2k+1) = (1 - e^{-2d}, 0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Процесс эксплуатации популяции, заданной системой (21), схематично представлен на рисунке 5. Пусть в начальный момент времени  $\hat{x} = (2, 0)$ . Тогда  $\varphi(d, \hat{x}) = (4, 0)$ . В следующий момент времени  $k = 1$  эксплуатация не производится, поэтому  $u(2) = (0, 0)$  и  $\varphi(2d, \hat{x}) = (8, 0)$  (двойная стрелка). Затем извлекается часть ресурса и из точки  $\varphi(2d, \hat{x})$  управлением  $u(3) = (0.5, 0)$  попадаем обратно в точку  $\varphi(d, \hat{x})$  (пунктирная стрелка) и так далее.

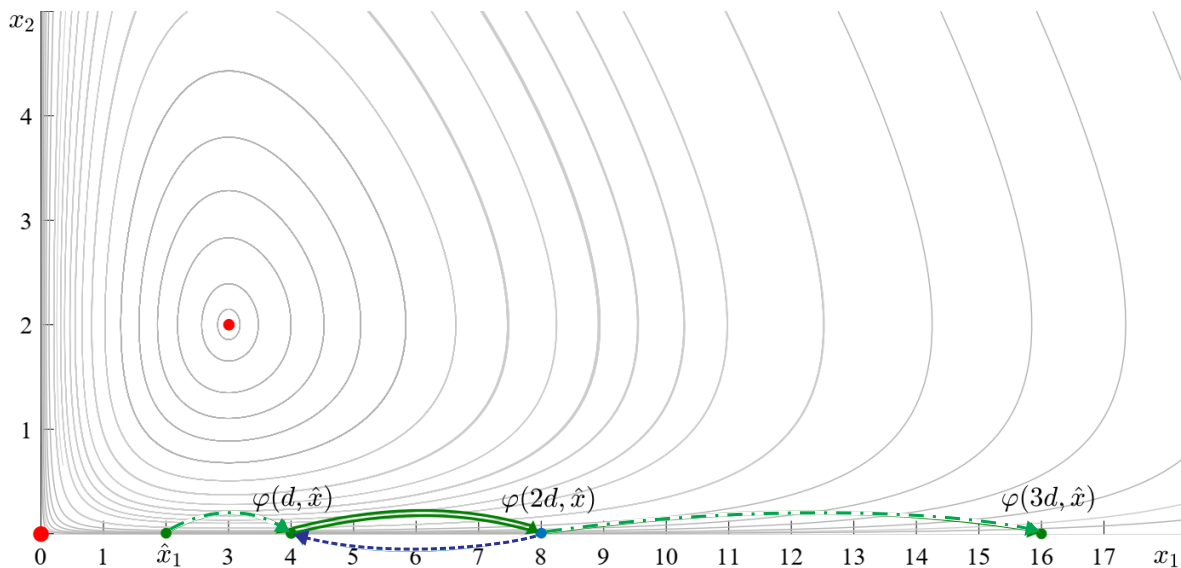


Рис. 5. Фазовый портрет системы (21).

В заключение отметим, что результаты, полученные в статье, можно применить не только для оценки средней временной выгоды, но и для исследования свойств других характеристик сбора ресурса, в частности, эффективности сбора и суммарного дохода с учетом дисконтирования (см. [18, 19, 20]).

## Литература

- [1] Анри Пуанкаре. Избранные труды в трех томах. - М.: Изд-во «Наука», 1971 (Т. I), 1972 (Т. II), 1974 (Т. III).
- [2] Чаплыгин С.А. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Собрание сочинений Т. I. - М.: Гостехиздат, 1919. - С. 348-368.
- [3] Wazewski T. Systemes des equations et des inegalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications // Annales de la Societe Polonaise de Mathematique. - 1950. - Vol. 23. - P. 112-166.
- [4] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. - М.-Л.: Гостехиздат, 1947. - 448 с.
- [5] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. - М.: Наука, 1966. - 568 с.

- [6] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. - 243 с.
- [7] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970, - 720 с.
- [8] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Новое издание, исправл. - М.: МЦНМО, 2012. - 344 с.
- [9] Родина Л.И. О некоторых классах систем дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. - 2024. - № 145 (29). - С. 77-85.
- [10] Родина Л.И., Волдеаб М.С. О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий // Дифференциальные уравнения. - 2023. - № 8 (59). - С. 1022-1028.
- [11] Noutsos D., Tsatsomeros M.J. Reachability and holdability of nonnegative states // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications - 2008. - № 2 (30). - P. 700-712.
- [12] Одум Ю. Экология: В 2-х т. Т. 2. Пер. с англ.. - Москва: Мир, 1986. - 376 с.
- [13] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. 2-е изд. испр. и доп. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. - 560 с.
- [14] Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2007. - 324 с.
- [15] Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия вузов. Математика. - 2022. - № 1. С. 12-24.
- [16] Rodina L.I., Chernikova A.V. Problems of optimal resource harvesting for infinite time horizon // Journal of Mathematical Sciences. - 2023. - № 270(4). - P. 609-623.
- [17] Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник российских университетов. Математика. - 2023. - № 141 (28). - С. 26-38.
- [18] Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2016. - Т. 22. № 2. - С. 38-46.
- [19] Rodina L.I., Hammadi A.H. Optimization problems for models of harvesting a renewable resource // Journal of Mathematical Sciences. - 2020. - Vol. 250. - P. 113-122.
- [20] Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2023. - Т. 29. Вып. 1. - С. 167-179.

*Родина Людмила Ивановна,  
профессор кафедры функционального анализа  
и его приложений Владимирского государственного  
университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,  
профессор кафедры математики Национального  
исследовательского технологического университета  
«МИСИС», доктор физ.-мат. наук, профессор.*

*E-mail: LRodina67@mail.ru*

*Черникова Анастасия Владимировна,  
старший преподаватель кафедры функционального  
анализа и его приложений Владимирского  
государственного университета  
им. А.Г. и Н.Г. Столетовых.*

*E-mail: nastik.e@bk.ru*

## Приложения математики

### О роли современного математического образования при реализации сложных задач в области химии

*Н. И. Сидняев, Л. С. Скляринский*

В статье показана роль математики в современных областях химии. Постулируется, что, во-первых, без математического описания целого ряда явлений действительности трудно надеяться на их более глубокое понимание и освоение, а, во-вторых, развитие физики, химии, технических и некоторых других наук предполагает широкое использование математического аппарата. Более того, без разработки и использования последнего было бы, например, невозможно ни освоение космоса, ни создание современных двигателей для космических аппаратов, нашедших применение в самых различных областях человеческой деятельности.

В качестве примера представлены исследования, вызванные взаимодействием атомов и молекул кислорода с диоксидом кремния и материалами на основе диоксида кремния с учетом химических процессов в промежуточном слое между газом и поверхностью композиционного материала в разряженных средах.

Показано, что механизм разрушения зависит от каталитической активности, контролирующей динамику различных химико-физических процессов с участием  $O$  и  $O_2$  на поверхности.

#### Введение

В настоящее время можно отметить, что нарисовать перед неспециалистом-математиком достаточно полную картину современного состояния математики в области приложений химии представляет собой задачу, неразрешимую для намеченного нами объёма тезисов.

Какие же затруднения возникают перед исследователями на этом пути?

В первую очередь это — колоссальный рост математики в области химических наук, вызванный как накоплением огромного материала от прошлых времён, так и текущими исследованиями целой армии ныне работающих математиков-химиков. Наука разрослась так сильно, что учёным пришлось специализироваться на отдельных, часто узких, её отделах, но зато в них в совершенстве владеть всем как старым, так и вновь появляющимся. Например, помощью математики проводятся как простейшие расчёты по химическим формулам и уравнениям химических реакций, так и сложнейшие математические процедуры, моделирующие химические процессы как в живой, так и неживой природе.

Без математики невозможно ни одно химическое важное производство. Математика для химиков — это, в первую очередь, полезный инструмент решения многих химических задач. Очень трудно найти какой-либо раздел математики, который совсем не используется в химии. Функциональный анализ и теория групп широко применяются в квантовой химии, теория вероятностей составляет основу статистической термодинамики, теория графов используется в органической химии для предсказания свойств сложных органических молекул, дифференциальные уравнения также имеют самое широкое применение.

Математические уравнения и методы, используемые в химии, имеют дело с конкретными свойствами атомов и молекул. Поэтому математические уравнения, применяемые в химии, а также их решения должны иметь химический смысл. В современной химии для определения структуры молекул (их геометрического строения) используют разнообразные физические методы, наиболее распространённые из которых — инфракрасная спектроскопия, спектроскопия ядерного магнитного резонанса и масс-спектроскопия. Сочетание данных методов позволяет определить структуру даже очень сложных молекул.

Спектроскопия ядерного магнитного резонанса основана на том, что уровни энергии некоторых магнитных ядер (например, водорода или тяжёлого углерода) изменяются в постоянном магнитном

поле, причём это изменение зависит не только от самого ядра, но и от окружения. Помещая образец вещества в магнитное поле (измеряя сдвиг уровней энергии), можно определить окружение каждого ядра, установить строение молекулы. Каждому типу атомов соответствует свой сигнал (пик) в спектре.

Спектроскопический метод определения строения основан на разложении молекулы на фрагменты под действием пучка электронов высокой энергии. При разложении (в присутствии электронов) фрагменты молекул приобретают отрицательный заряд. В спектрометрах измеряется отношение массы к заряду и находится молекулярная масса фрагментов. Знания состава фрагментов помогают восстановить структуру исходной молекулы.

Известно пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Все они реализованы в химических структурах. Расчётные методы геометрии активно используются химиками при анализе расположения атомных частиц в молекулах или упаковки отдельных частиц (молекул, атомов и ионов) в более крупных агрегатах (кристаллах, кластерах, мицеллах, наночастицах). В подобных задачах требуется умение находить параметры плоских фигуры (треугольников и многоугольников) и знание выражений для объёмов различных тел (шаров, кубов, цилиндров), представляющих модели химических частиц.

В качестве важного примера можно отметить, что реактивные и неактивные процессы, вызванные взаимодействием атомов и молекул кислорода с диоксидом кремния и материалами на его основе, играют очень важную роль в процессах промежуточного слоя между газом и поверхностью космических аппаратов при возвращении в плотные слои атмосферы. Их механизм зависит от каталитической активности твердой поверхности, контролирующей динамику различных химико-физических процессов с участием  $O$  и  $O_2$  на поверхности. В этой статье рассматривается динамика:

- 1) адсорбции атомов кислорода  $O$ ;
- 2) рекомбинации атомов кислорода  $O$  через механизм Или-Райдила;
- 3) диссоциацию и дезактивацию молекул кислорода  $O_2$ .

### О современных методах решения химических задач

В последнее время взаимодействие атомарного и молекулярного кислорода с диоксидом кремния и материалами на его основе стало объектом различных экспериментальных и физико-математических исследований из-за важности, которую эта гетерогенная система имеет для различных научных областей, и особенно для авиационно-космической [1,2].

Диоксид кремния рассматривается как менее каталитически активный жаростойкий материал, способный замедлять экзотермические поверхностные процессы, вызванные взаимодействием атомарного кислорода и азота на стенках воздушно-космического аппарата во время повторного входа в атмосферу Земли. В этом отношении, определение реального теплового потока, необходимое для реалистичного формирования системы обработки транзакций в тренировочных условиях, все еще представляет сложную задачу для научного сообщества, которую довольно сложно реализовать без математики.

С экспериментальной точки зрения причиной тому служит сложность воспроизведения условий, типичных для траектории фазы повторного входа в атмосферу, в лаборатории. С другой стороны, моделирование кинетики или гидрогазодинамики все еще приблизительное и далеко не всеобъемлющее; в основном из-за того, что на граничном слое стен космического аппарата может возникнуть большое число гетерогенных молекулярных процессов, и, что более важно, из-за того, что понимание их все еще недостаточное. Все вышеперечисленные факторы вынуждают исследователей к использованию математических моделей.

Среди многих элементарных процессов, возможных на промежуточном слое между диоксидом кремния и воздухом, взаимодействие кислорода с диоксидом кремния может привести или к реактивным, или к неактивным процессам, что позволяет дифференцированно подойти к подбору математических уравнений.

Нереактивные процессы включают феномен неупругого рассеивания, при котором атомы ударяются о поверхность и рассеиваются в газовой фазе, или нереактивную адсорбцию, при которой атомы кислорода, приближающиеся к поверхности диоксида кремния из газовой фазы, захватываются при физической сорбции.

К реактивным процессам относится химическая сорбция и реакции рекомбинации, которые могут быть высоко экзотермическими и поэтому считаются главным источником, отвечающим за потенциально соответствующий подложке из диоксида кремния тепловой поток [2].

В частности, в [1] подчеркнута сложность взаимодействия кислорода и азота с диоксидом кремния. Эта сложность вызвана в первую очередь необходимостью включить в моделирование молекулярной динамики различные физические факторы, контролирующие динамику и энергетику взаимодействия атомов и диоксида кремния.

Несмотря на ключевую роль, которую адсорбция атомов играет для реакционной способности подложки, и в отличие от процессов рекомбинации, адсорбция атомарного кислорода на поверхностях диоксида кремния еще не была изучена экспериментально. При отсутствии экспериментальных наблюдений, результаты, полученные с использованием расчетов методом молекулярной динамики, если они получены с использованием точных теоретических/вычислительных методов, могут быть рассмотрены как имеющие прогностический характер. По этой причине в работе изучены адсорбции атомов кислорода на двух различных полиморфных модификациях диоксида кремния ( $\beta$ -кристобалит и  $\beta$ -кварц).

При сравнении полученных результатов для двух рассмотренных полиморфных модификаций, отмечено и обсуждено соотношение между морфологией поверхности и каталитическим откликом, а также соответственно различная динамика адсорбции. На рисунке 1 представлено взаимодействие атома кислорода в газовой фазе, сталкивающегося с атомом  $Si$  из кластерной модели  $Si_3O_4H_6$  поверхности  $\beta$ -кристобалита.

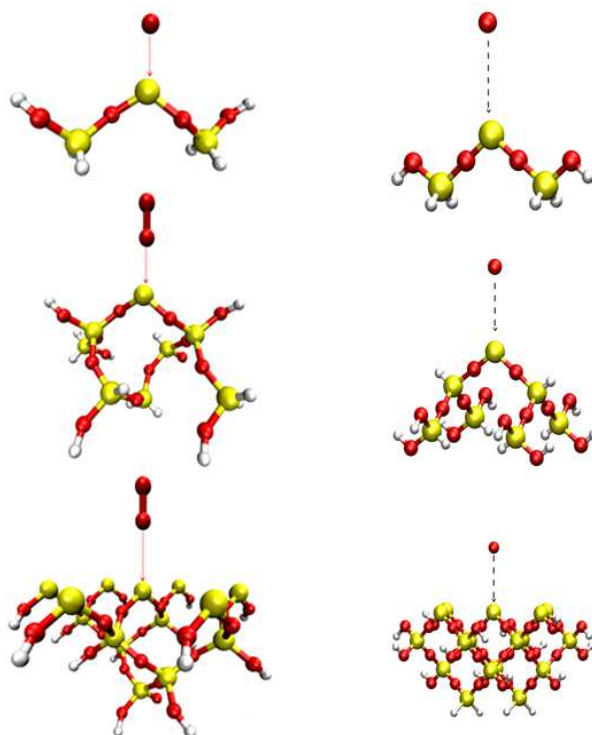


Рис. 1. Кластерные модели поверхности полиморфных модификаций  $\beta$ -кристобалита слева ( $Si_3O_4H_6$ ,  $Si_7O_{14}H_{14}$  и  $Si_{17}O_{34}H_{18}$ ) и  $\beta$ -кварца ( $Si_3O_4H_6$ ,  $Si_8O_{16}H_{14}$  и  $Si_{14}O_{28}H_{14}$  сверху-вниз), рассмотренных нами в смоделированных условиях во взаимодействии с  $O$  и  $O_2$ , исходящими из газовой фазы в перпендикулярном направлении удара.

Очевидно, что прямой путь хемосорбции  $O$  на  $Si$  включает в себя синглетную и триплетную спиновую мультиплетность, а также плавное пересечение размером около  $R(O - Si) = 2.3 \text{ \AA}$  между ними (см. рис. 2). Радиальная пара характеризуется как триплетная или синглетная по спиновому состоянию двух одиночных электронов, спаренных вместе. Соотношение спинов таково, что два неспаренных электрона, по одному в каждой радикальной молекуле, могут иметь противоположный спин (синглетный;

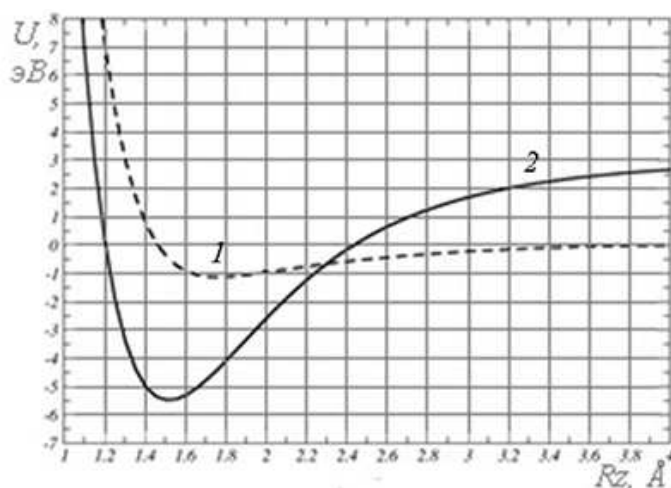


Рис. 2. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия  $U[\text{эВ}]$  по кластерной модели  $Si_3O_4H_6$   $\beta$ -кристобалита; 1 — триплетное (пунктирная линия) и 2 — синглетное (сплошная линия) собственные состояния полных кривых вращения электрона.

антикоррелированный) или одинаковый спин (триплетный; коррелированный). Синглетное состояние называется таковым, потому что существует только один способ антикорреляции спинов электронов, тогда как триплетное состояние называется таковым, потому что спин электрона может быть коррелирован тремя различными способами.

### Математическое моделирование в сложных химических реакциях

Математические модели, используемые для описания динамики взаимодействия атомарного кислорода, сталкивающегося с поверхностью диоксида кремния, являются полуклассическими. Авторами предложен подход для изучения некоторых гетерогенных систем, включая диссоциативную хемосорбцию  $H_2$  и образование  $H_2$  после рекомбинации атомов на поверхности  $Cu$  и графита, окисление  $C$  и  $CO$ , с использованием современной математики.

Здесь хотелось бы отметить, что математический метод обеспечивает получение подробной информации о многофононных (и, в итоге, электронно-дырочных) процессах неупругого взаимодействия, которые поддерживают динамику химического и физического феномена из-за хемосорбции и физической сорбции атомов и молекул на разных подложках. Это, в действительности, самая важная характеристика данного полуклассического подхода. Согласно данному методу, динамика кислорода в газовой фазе, ударяющегося о поверхность кремниевой подложки, описана классически, в то время как решетчатые фононы квантованы.

Фонон — это коллективное возбуждение при периодическом, упругом расположении атомов или молекул в конденсированных средах, в частности в твердых телах и некоторых жидкостях.

Динамическое соединение между колебаниями атомов поверхности и поступательным движением атома  $O$  достигается решением классических уравнений Гамильтона для поступательного движения кислорода газовой фазы в эффективном гамильтониане  $H_{eff}$ , определенном как

$$H_{eff} = \frac{1}{2}m(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2) + V_{add} + \Delta E_{ph},$$

где первая величина — кинетическая энергия атома массой  $m$ ,  $P_j$  — составляющая импульса момента ( $j = X, Y, Z$ ),  $\Delta E_{ph}$  — энергия обмена между взаимодействующим  $O$  и подложкой,  $V_{add}$  — динамический вклад в Гамильтониан вследствие процесса возбуждения/девозбуждения возмущенных состояний фонона.

Тип квазичастицы в физике, фонон — это возбужденное состояние при квантово-механическом квантовании мод колебаний упругих структур взаимодействующих частиц.

$V_{add}$  определяется как ожидаемое значение потенциала взаимодействия системы  $O$ -диоксид кремния по полной волновой функции состояния фонона

$$\langle \Psi_{ph}(t, T_S) | V_{add}(t, T_S) \rangle = \langle \Psi_{ph}(t, T_S) | V_{int}(R) | \Psi_{ph}(t, T_S) \rangle .$$

Эволюция во времени величины  $\Psi_{ph}(t, T_S)$  получена решением уравнения Шредингера, зависящего от времени, для движения множества  $(3N - 6)$  независимых гармонических осцилляторов.  $N$  — общее число атомов в решетке, возмущенных внешними силами, возникающими между атомом газовой фазы и поверхностью диоксида кремния.

Моделирование системы с использованием математического аппарата взаимодействия  $O$ -кремний требует определения координат начальной позиции и импульса атома  $O$ , приближающегося к кремниевой поверхности из газовой фазы. Определим начальные условия с учетом прямоугольной системы координат с центром в атоме  $Si$  и с осью  $Z$ , перпендикулярной кремниевой поверхности, направленной в вакуум. Плоскость  $(X - Y)$  лежит на верхнем слое поверхности. В модели, атом кислорода изначально находится на расстоянии  $Z = 8 \text{ \AA}$  в асимптотически свободной области.

Асимптотическую свободу можно получить путем вычисления бета-функции, описывающей изменение константы связи для достаточно коротких расстояний или больших обменов импульсом (которые исследуют поведение на коротких расстояниях, примерно из-за обратной зависимости между импульсом кванта и длиной волны Де Бройля), асимптотически свободная теория поддается расчетам теории возмущений с использованием диаграмм Фейнмана.

Теперь рассмотрим динамику атома кислорода, приближающегося к поверхности с особой начальной геометрией на поверхности  $Si$  части  $\beta$ -кристобалита и  $\beta$ -кварца. Примем, что атом  $O$  газовой фазы приближается к поверхности перпендикулярно плоскости поверхности (полярные углы  $(\vartheta, \phi) = (0, 0)$ ) с заданной кинетической энергией. Координаты начальной позиции  $(X, Y)$  выбираются случайно в небольшой заданной области с центром в активной области кремния. Динамика была найдена для следующих ударных энергий:  $E_{kin} = 0.05 \text{ эВ}, 0.1 \text{ эВ}, 0.2 \text{ эВ}, 0.5 \text{ эВ}, 0.8 \text{ эВ}$ , температура кремниевой поверхности поддерживалась постоянной и равной  $T_S = 1000 \text{ К}$ . Для каждой энергии удара число траекторий, достаточно высокое для того, чтобы обеспечить сходимость полученных результатов, интегрируется с шагом времени, равным  $10^{-14}$  с. Это обеспечивает численную сходимость вычисленных вероятностей адсорбции к примерно 10%. Взаимодействие  $O$  с кремнием, относительно простое, может привести к нескольким базовым поверхностным процессам:

1) прямая десорбция и непрямая адсорбция/десорбция, согласно которой атом  $O$  десорбирует при рассеивании от кремниевой поверхности в открытый космос, с координатой  $Z$ , превышающей  $8.0 \text{ \AA}$  в конечных условиях траектории.

2) процесс адсорбции; прямая адсорбция, согласно которой атом кислорода, захваченный на поверхности после единственного столкновения, и непрямая адсорбция из-за многочисленных столкновений с кремниевой подложкой.

Интересный аспект процесса адсорбции связан с энергетикой процесса, то есть механизмом обмена энергией между атомом кислорода  $O$  газовой фазы и фононами кремниевой поверхности. Поскольку энергия связи кислорода  $O$ , взаимодействующего с активной областью  $Si$ , достаточно велика, почти  $5.6 \text{ эВ}$ , то энергия, поставляемая в процесс взаимодействия, существенна. Наиболее интересный результат, достигнутый в этом сравнении, обнаруживается при более детальном рассмотрении энергии обмена с фононами поверхности.

Для процессов отражения энергия, переданная поверхности кварца в отражательных столкновениях, при  $E_{kin} = 0.2\text{эВ}$ , ниже, чем переданная поверхности кристобалита, причем обратное верно для двух наибольших энергий столкновения. Это позволяет утверждать, что различные полиморфные модификации значительно влияют на динамику взаимодействия атом-поверхность.

Наконец, стоит заметить, что средняя энергия, переданная поверхности в качестве теплового потока, очень велика, поэтому температурное повреждение поверхности может ожидаться вследствие активации поверхностных процессов с участием атомарного кислорода.

Действительно, по нашим численным расчетам оказывается вполне вероятно, что процесс адсорбции атомарного кислорода может быть очень эффективным в рассеивании энергии по направлению к кремниевой подложке, более эффективным, чем реакции рекомбинации, которые обычно считаются основной причиной повреждения систем термозащиты космических аппаратов. При моделировании механизма рекомбинации  $E - R$  плоскостные координаты адсорбированного атома выбираются случайно в небольшой области вокруг активного атома  $Si$ , в то время как расстояние  $Z$  между  $O_{ad}$  и атома  $Si$  берется равным расстоянию хемосорбции.

Адсорбированный атом рассматривается в температурном равновесии с поверхностью, и принятая температура равна  $T_S = 1000\text{К}$ . Это условие соответствует покрытию  $1.975 \cdot 10^{18}$  атомов на  $\text{м}^2$ . Атом кислорода газовой фазы ударяется о поверхность с кинетической энергией в диапазоне  $[0.002 - 1.0]\text{эВ}$  и с углами наклона  $(\vartheta, \phi) \equiv (0; 0)$  по отношению к системе координат с центром в активном атоме  $Si$ . Для каждого удара множество из 1000 траекторий интегрируется и анализируется, с разделением различных каналов столкновительной системы.

Следующий важный аспект взаимодействия кислорода и диоксида кремния, который будет вкратце рассмотрен в этом разделе статьи, касается неупругого и диссоциирующего сталкивания молекулярного кислорода с поверхностью  $\beta$ -кристобалита.

Далее представлены полученные полуклассическим методом результаты расчета траектории молекулы  $O_2$ , отраженной от кремниевой поверхности, в особых  $(v, j)$ -состояниях. Это взаимодействие может служить причиной различных молекулярных поверхностных процессов. Эти процессы, обычно не принимаемые во внимание, могут иметь значение при моделировании граничного эффекта и энергетического баланса для систем на основе кислорода, например, относящихся к терможидкостной динамике и аэрокосмической отрасли.

В частности, диссоциативный процесс может иметь важность по двум основным причинам: во-первых, эта реакция может быть очень эффективным каналом для образования атомов на поверхности и может соревноваться с процессами диссоциации  $O_2/N_2/NO$  в газовой фазе из-за гипертермальных условий. Диссоциирующие атомы могут служить в качестве очень эффективных гасителей реакции или очень реакционно активных видов.

Во-вторых, из-за реакции диссоциации, колебательно активированные молекулы устраняются из области реакции пограничного слоя. Заметим, что наиболее вероятный гетерогенный процесс — это молекулярная диссоциация, за которой следует адсорбция двух диссоциирующих атомов кислорода. Второй по эффективности процесс — еще одна диссоциация, где один из двух диссоциирующих атомов адсорбируется на кремниевой поверхности, в то время как другой рассеивается в газовой фазе. Картина столкновения практически независима от энергии колебания сталкивающихся молекул кислорода.

Отметим, что вероятность устойчивости, т.е. вероятность того, что молекулы  $O_2$  будут рассеиваться в начальном колебательном состоянии, близка к нулю, что доказано математически. С другой стороны, отраженные молекулы колебательно замедляются и с большой вероятностью могут быть в конечном итоге деактивированными на начальном колебательном уровне. Это поведение подтверждается полученными результатами.



## Заключение

В статье рассматриваются примеры, показывающие, как некоторые математические методы используются в физической химии. Основной метод, представленный нами — численное интегрирование уравнения Шредингера с заданным потенциалом и начальными условиями. Они дают определенное, но неполное представление о задачах, решаемых химиками с помощью математики, и ограничениях, которые химия накладывает на применяемую в ней математику. Взаимодействие химиков и математиков не ограничивается решением только химических задач: иногда и в химии возникают абстрактные задачи, которые приводят даже к появлению новых областей математики.

Например, математики работают над доказательством второго закона термодинамики — одного из законов химии, справедливость которого для химиков вытекает из известных экспериментальных данных о химических веществах и химических реакциях.

История науки говорит о том, что именно на границах различных областей знания происходят очень интересные события, открытия. И хотя химики и математики мыслят по-разному, те случаи, когда им удается взаимодействовать, приводят к появлению нетривиальных результатов и способствуют обогащению обеих наук.

## Литература

- [1] Сидняев Н.И. Обзор методик исследования обтекания гиперзвуковым потоком газа тел с разрушающимся покрытием // Теплофизика и аэромеханика. - 2004. - Т. 11. - № 4. - С. 501–522.
- [2] Сидняев Н.И. Обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов в условиях поверхностного разрушения. - Москва: Физматлит, 2017. - 302 с.

*Сидняев Николай Иванович,  
доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой, МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва.*

*E-mail: sidnyaev@bmstu.ru*

*Складчинский Леонид Сергеевич,  
аспирант направления Прикладная математика,  
МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва.*

*E-mail: sklyarinskij@mail.ru*

## Математический футбол

*А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, А. А. Шапиро*

В заметке приведены правила математической игры “Математический футбол”, а также примеры задач, которые можно использовать в игре. Игра является более простой для организации учителем, а также содержит более простые задачи для учеников, чем известная игра “Математический бой”.

### Правила математического футбола и рекомендации по его проведению

Школьники любят участвовать в соревнованиях. Это можно использовать для развития их способностей. Придумано уже немало командных игр, например, “Матбой” (см. Дерягин Д.В., Канель А.Я., Ковальджи А.К., Кондаков Г.В., Рубанов И.С., Финашин С.М., Фомин Д.В., Шапиро А.А., Яценко А.Д., “Математический бой двух команд: Правила, комментарии, опыт проведения”, Математика в школе, 1990, № 4, С. 20–25).

Матбой — мероприятие серьезное, требующее от жюри нескольких дней подготовки. Другой пример игры — “математический хоккей” (Л. Брезгина “Математический хоккей”, Математика № 12, 2010). Однако его правила тоже довольно сложны и имеют тот недостаток, что команды решают разные задачи, а потому их результаты несопоставимы.

Более простые (и, вероятно, наиболее простые) правила командной математической игры школьников были придуманы А.К. Ковальджи в Вечерней математической школе при Московском математическом обществе. Игра получила название “математический футбол” или, сокращенно, матфутбол. Это соревнование по быстрому решению не слишком сложных задач на сообразительность. Элементы математического футбола присутствуют при проведении матбоя (в конкурсе капитанов).

Для проведения математического футбола ученики делятся на две команды примерно равной силы. Команды выбирают себе названия, обычно юмористические. Затем ведущий (учитель) начинает предлагать задачи.

Обычно начальная стоимость задачи — одно очко. Решение отвечает первый ученик, поднявший руку (выкрики с места не принимаются и даже могут штрафоваться). Если решение верное, то команда получает очки за задачу, а если нет, то одно очко дается другой команде — забит гол в свои ворота! При этом стоимость задачи увеличивается на очко. Если решений долго нет (2-3 минуты), то стоимость задачи увеличивается еще на очко, а если за 5-7 минут задача не решена, то она снимается или дается подсказка.

Очки команд записываются на доске и в конце складываются. Если разница меньше оговоренного числа очков, то засчитывается ничья.

В большинстве задач требуется дать только ответ (а его обычно непросто угадать). Когда же требуется решение, то поднявший руку берет всю ответственность на себя и не может пользоваться чьей-либо помощью.

Матфутбол можно проводить и в младших, и в старших классах. Задачи или вопросы могут быть самые разные: на сообразительность, на закрепление новой темы, лингвистические, технические, в стиле “Что-где-когда?”. Единственное, что требуется от преподавателя — подготовить список задач (а у опытного педагога такой список всегда наготове!).

Обычно дается 10 – 15 задач на 20 – 30 минут. Таким образом, матфутбол не может быть предметом целого занятия. Его лучше проводить ближе к концу занятия, обычно в тех случаях, когда школьники утомлены, либо возбуждены и уже не могут эффективно работать. После матфутбола заниматься чем-нибудь серьезным уже трудно.

Назначение матфутбола состоит не только в эмоциональной разрядке и создании атмосферы напряженного думания, важно еще научить школьников “торопиться медленно” и брать ответственность на себя. Интересно наблюдать, как в процессе игры формируется это чувство ответственности, как много идет поначалу голов в свои ворота, а затем появляется период нерешительности, когда человек боится поднять руку, даже имея правильное решение. И, наконец, участники отвыкают “сначала говорить, а потом думать” и привыкают быстро проверять сами себя.

Вот несколько советов преподавателю, решившему провести матфутбол у себя в группе.

Прежде всего, нужно знать своих учеников — иначе невозможно быстро сформировать равные по силе команды, да и при проведении матфутбола столкнешься с массой неожиданностей. Не стоит формировать команды по признакам типа “мальчики против девочек”, лучше делить детей по рядам. Если команды получились разной силы, можно кого-нибудь сильного пересадить или устроить команду из двух-трех сильных против всех.

Во время футбола от преподавателя требуется умение быстро замечать поднятые руки, во избежание споров о том, кто первый. Если же спор возник, то имеет смысл выслушать обоих представителей и дать им очки независимо друг от друга.

Бывает, что одна команда заметно опережает другую. Поэтому стоит на конец игры приберечь наиболее интересные и трудные задачи, чтобы оставить возможность отыгаться проигрывающей команде, чтобы она не потеряла интереса к игре, и чтобы выигрывающая команда не расслаблялась. Если одна команда победила с явным перевесом, то хорошо смягчить спортивные страсти, найдя какую-то внешнюю шуточную причину поражения (например, что команда сидела ближе к окну и ее мысли замерзли) или найти психологическую причину (вот видите, пока счет был равным, вы хорошо решали, а когда отстали, то сразу скисли).

Больше половины успеха матфутбола приходится на правильный выбор задач. Конечно, они должны быть легкими и остроумными, а их условия — простыми и недвусмысленными. Следует избегать задач с ограниченным набором возможных ответов (типа “Да-нет”). Чтобы не ошибиться по ходу футбола, ведущему надо знать правильное решение и ответ, а также представлять себе возможные ошибки.

См. также работу Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., “Занятия по математике — листки и диалог”, Математическое Просвещение, 3 серия: 19 (2015), С. 206–235.

<http://www.mccme.ru/free-books/matprosk.html>, arXiv: 1502.01893

Ниже приводится список задач, которые, по нашему мнению, лучше всего подходят для матфутбола.

### Примеры задач

1. Полный бидон с молоком весит 30 кг, а наполненный наполовину — 15,5 кг. Сколько весит бидон?

2. Найдите хотя бы одно решение неравенства  $0,01 < x < 0,011$ .

3. Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20:

7, \*, \*, \*, \*, \*, \*, \*, 9.

4. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Они съели кашу поровну. Третий охотник и говорит: “Спасибо за кашу! У меня осталось 5 патронов, — и вот вам задача: как поделить патроны в соответствии с вашим вкладом?”

5. Два мальчика хотели купить книгу. Одному из них не хватило 27 копеек, а второму — одной копейки. Они сложили свои деньги, но денег все равно не хватило. Сколько стоит книга?

6. Одна кастрюля вдвое выше другой, зато вторая вдвое шире первой. В какую из них больше войдет воды?

7. По кругу расположены 9 шестеренок так, что первая сцеплена со второй, вторая — с третьей и т.д., девятая — с первой. Могут ли эти шестеренки вращаться ?

8. Сколькими способами 5 разных книг можно поставить на книжную полку?

9. Сколько диагоналей в правильном 7-угольнике?

10. В классе учатся 40 человек. Докажите, что среди них найдутся четверо, которые родились в один месяц.

11. Сколькими нулями оканчивается произведение чисел от 1 до 30?

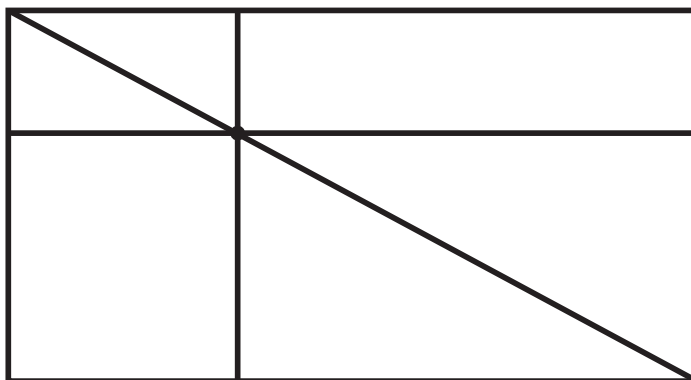
12. В 20-этажном доме испорчен лифт: он может либо подняться на 13 этажей вверх, либо спуститься на 8 этажей вниз. Докажите, что, пользуясь лифтом, нельзя попасть с 4-го этажа на 5-й этаж.

13. Часы показывают полдень. Через какое время часовая и минутная стрелки опять совпадут ?

14. Андрей пошел с папой в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает право еще на 2 выстрела. Всего Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

15. Велосипедист ехал в одну сторону со скоростью 15 км/ч, а обратно — 10 км/ч . Какова его средняя скорость ?

16. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели прямые, параллельные сторонам. Выше и ниже диагонали образовались два прямоугольника. Какой из них большей площади?



17. Решите ребусы: (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные):

а)	д   в   а	б)	д   у   р   а   к
	×		+
	д   в   а		у   д   а   р
	— — —		— — — — —
	д   е   л   е		д   р   а   к   а
	ч   ч   а   в		
	е   р   л   ы		
	— — — — —		
	ч   е   т   ы   р   е		

18. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

19. На конференции 85% делегатов знают английский язык, и 75% — испанский. Какая часть делегатов наверняка знает и английский и испанский?

20. 50 борцов играют по олимпийской системе (проигравший выбывает). Каково наименьшее количество встреч, при котором можно определить победителя?

21. В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук (сытых или голодных). Какое максимальное число щук может насытиться?

22. Найдите последнюю цифру числа  $2^{1000}$ .

23. Известно, что дробь

$$\frac{В \cdot А \cdot Р \cdot Е \cdot Н \cdot Ь \cdot Е}{К \cdot А \cdot Р \cdot Л \cdot С \cdot О \cdot Н}$$

— целое число, причем разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения. Найдите значение дроби.

24. Пять кур за пять дней снесли пять яиц. Сколько яиц снесут десять кур за 10 дней?

25. Сколькими способами можно прочесть слово “тропа” двигаясь вниз или вправо?

```

т  р  о  п  а
р  о  п  а
о  п  а
п  а
а

```

26. Решите ребус “АННААН : JOKE = НА”.

27. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

28. Дана точка. Нарисуйте вокруг нее многоугольник так, чтобы ни одна его сторона не была видна из этой точки полностью.

29. В банку с питательным раствором посадили бактерию. Каждый час бактерий становилось в два раза больше, а через 20 часов заполнилась вся банка. За сколько часов заполнилась половина банки?

30. Разрезать треугольник на 4 треугольника так, чтобы любые два имели общий отрезок стороны.

31. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

32. (Задача Ньютона). Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней? (Коровы поедают траву равномерно).

33. (Задача Эйлера). Некто решил поделить свои сбережения поровну между всеми своими сыновьями и составил завещание: старший получит 1000 руб. и  $1/8$  часть остатка; следующий — 2000 руб. и  $1/8$  нового остатка; третий сын — 3000 руб. и  $1/8$  третьего остатка и т.д. Определите число сыновей и размер завещания.

34. Даны 6 разноцветных гири: 2 зеленые, 2 красные и две синие. В каждой паре одна гиря немного тяжелее другой, причем все тяжелые гири весят одинаково и все легкие тоже. За какое наименьшее число взвешиваний на рычажных весах можно определить все тяжелые гири?

35. Командир построил солдат в колонну по 4, но при этом солдат Иванов остался лишним. Тогда командир построил солдат в колонну по 5. И снова солдат Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, командир посулил ему наряд вне очереди, после чего в колонне по 7 Иванов нашел себе место и никого лишнего не осталось. Сколько солдат могло быть у командира?

36. Число оканчивается на 2. Если двойку перенести в начало, число удвоится. Найти это число.

37. Построить замкнутую ломаную из 6 звеньев, которая пересекает каждое свое звено ровно 1 раз.

38. Из 6 спичек собрать 4 (и даже 8) треугольников со стороной в одну спичку.

39. Два путешественника выходят из гостиницы в 3 часа дня и возвращаются в 9 часов вечера по тому же маршруту. Известно, что по равным участкам они идут со скоростью 4 км в час, в гору

— 3 км в час, под гору — 6 км в час. Найдите расстояние, которое прошли путешественники, если они шли без отдыха.

40. В строке выписано 20 чисел. Известно, что сумма любых 3-х, идущих подряд, больше 0. Верно ли, что сумма всех чисел больше 0?

41. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, а полный алмазов — 40 кг. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов — 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести не более 100 кг ?

42. Какое наименьшее число выстрелов всегда достаточно, чтобы попасть в трехклеточный корабль при игре в "морской бой" ?

43. Поезд двигался в одном направлении 5,5 часов. Известно, что за любой отрезок времени длительностью 1 час он проезжал ровно 100 км. Верно ли, что поезд ехал равномерно? Верно ли, что средняя скорость поезда равна 100 км/ч?

*Канель-Белов Алексей Яковлевич,  
профессор Bar-Ilan University, Израиль,  
доктор физ.-мат. наук., профессор.*

*E-mail: kanelster@gmail.com*

*Ковальджи Александр Кириллович,  
заместитель директора ГБОУ Лицей  
"Вторая школа", г. Москва.*

*E-mail: koval-dji@yandex.ru*

*Шапиро Александр Аронович,  
доцент Центра энергоресурсной инженерии  
Технического университета Дании,  
Конгенс-Люнгбю, кандидат физ.-мат. наук.*

*E-mail: ASH@kt.dtu.dk*

## Из истории науки

### Вселенская задача: Исаак Ньютон

*В. Н. Оникийчук, И. В. Оникийчук*

Очерк о драматическом пути Ньютона в науке и на государственной службе. Его результаты, хотя фактически не были признаны при жизни, сформировали новую систему взглядов на устройство законов Вселенной, в частности, описывающих движение планет.

#### **Всякие идеи бессмертны, пока не воплощаются в жизнь**

Целью средневековой жизни были основательность и сила. Основательность цивилизации всегда строилась как некая трансляция из века в век идеальных норм в бытовой жизни и в науке. В науке сначала “нормой” была окружность как образец “идеальной кривой”. И это не только касалось геометрии и астрономии. По этим “идеальным кривым” неспешно перемещались планеты и эта идиллическая картина представлялась образцом божественного устройства идеального мира.



Рисунок Академика РАН А.Т.Фоменко

Астрономы и теологи раннего средневековья имели огромное влияние на общепринятые догмы, традиции, нормы поведения, т.е. имели отношение к формированию идеологии общества. Довольно часто теология и астрономия, ставились на службу власти или использовались для усиления её, и даже использовались для установления “мирового господства”. Выражаясь общими словами, наука и религия использовались в “огораживании большей территории”.

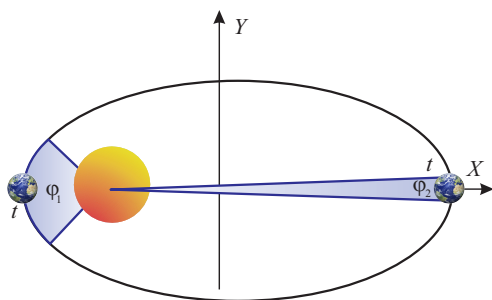
Вообще, любая идеология всегда покоится на некоей идее и зачатую прописано, кто над кем доминирует. В эпоху средневековья астрономия была одним из столпов теологии, культуры и науки «в одном флаконе». В те времена “идеальные окружности” — это не просто геометрические фигуры. Они были олицетворением гармонии Мира, центром которого был Ватикан во главе с Папой.

Назовём всю связку парадигм, установок и систем ценностей ядром Системы. Главное — понять и почувствовать, где ядро Системы, а где периферия. Кстати, часто периферия специально маскируется под «ядро», а на поверку таковым ядром не является, поскольку не способна исполнять функцию ядра. В опасных ситуациях Система может даже пожертвовать частью своей периферии, чтобы сохранить своё ядро. В этом свойстве жертвенности во всех смыслах покоится потенциал выживания идеологии. В мироустройстве, описанном далее, уже расставлены красные флажки и очерчены границы дозволенного.

#### **Камешек в башмаке**

Самую важную информацию мы обычно получаем из того, что нам не договаривают. Вот так случилось и на этот раз. Начался кем-то осторожный, но настойчивый “заход за флажки”.

Астрономы заявили, что планеты движутся не по “идеальным окружностям”, а по эллипсам. Надо знать те времена! Астрономия тогда и сегодня — это принципиально разные науки, хотя и называются одним и тем же словом. Утверждение, что планеты движутся по эллипсам — это когнитивный шок, удар молнии, поскольку эллипс — не идеальная кривая! А нужна идеальность, ведь в центре должен быть Творец, земным представительство которого есть Ватикан!



Планеты движутся вокруг Солнца таким образом, что соблюдается «принцип равенства секторальных площадей». За один и тот же промежуток времени планета в своем эллиптическом движении проходит секторы одинаковой площади.

Это и было Ядром Системы. Ядро управляет Системой и формирует содержание периферии. Периферия сама по себе — это ничто. Нет ядра — нет и периферии. Разумеется, ядро так хитро упрятано в дебрях периферии, как кончик иглы, в которой спрятана смерть Касея Бессмертного.

Задача периферии состоит в том, чтобы “денно и ночью” охранять ядро.

Однако периферия начала демонстрировать сбой. Дальше — больше. Астрономы заявили, что Солнце находится не в центре эллипса, а где-то на “периферии” — в его фокусе. И здесь уже не так важно, в каком месте эллипса находится Солнце. Главное, что не в центре. Нарушена норма об идеальности кривой и нахождении Солнца “в центре” Системы.

Но и это не всё. Оказалось, что на самом удаленном расстоянии от Солнца (в афелии) **каждая** планета движется медленнее, чем в окрестности самого близкого расстояния от Солнца (в перигелии).

Правда, при этом соблюдается устойчивый эффект для всех наблюдаемых планет — “принцип секторальных площадей”. За один и тот же отрезок времени любая планета, двигаясь по эллипсу с разными скоростями, проходит одинаковые секторальные площади. Другими словами, в афелии ее угловая скорость  $\dot{\varphi}_a$  меньше, однако расстояние до Солнца больше. В перигелии наоборот: угловая скорость в перигелии  $\dot{\varphi}_p$  больше, чем в афелии, но расстояние до Солнца в перигелии меньше, чем в афелии. Сочетание неравенств расстояний до Солнца с обратно пропорциональным ростом угловой скорости приводит к тому, что за один и тот же промежуток времени планета проходит одинаковую площадь. Здесь главное, что планета “сама принимает решение”, где ей надо двигаться быстрее, а где можно и не спешить. Как это может быть?

## Табун троянских коней

Никто не может сказать, кто был первооткрывателем закона о причинах движения в материальном мире. Возможно, это уже было понятно, когда первобытный человек бросил свой первый камень в мамонта. Камень, чтобы попасть мамонта, должен быть кем-то брошен. Говоря на философском языке, постулат причинности гласит, что причина всегда предшествует следствию. Это означает, что причиной любого движения должно быть воздействие от посторонней силы. Никак иначе. Камень в мамонта сам не летит.



Рисунок Академика РАН А.Т.Фоменко

Рене Декарт<sup>1</sup> долго выстраивал свою картину Мира. Венцом его теории стало утверждение, что в Мире господствует принцип постоянства количества движения  $mV$ .

Другими словами, если где-то величина количества движения уменьшилась, то в другом месте она должна тут же увеличиться не недостающую величину.

**Рене Декарт:** “Закон причинности требует, чтобы ничто не происходило без причины. Движущая причина есть сила... Никакое тело не может двигаться без силы, никакое движение не может быть задержано без силы” [1, стр.375]. И еще.

**Рене Декарт:** “Все изменения в телесном мире вытекают из внешних причин” [1, стр.377].

<sup>1</sup>Рене Декарт (*Renatus Cartesius*) (1596-1650) — французский философ, математик и естествоиспытатель, создатель аналитической геометрии.



Этот фундаментальный принцип причинности задает формат мышления. Если вы находитесь в определенном формате мышления, то вы не можете из этого формата выйти. Здесь расставлены “красные флажки”, при этом весьма изощренно и умело. Назовём этот формат Матрицей Системы.

Если мы интересуемся Неведомым, то Неведомое начинает интересоваться нами. Матрица Системы, чтобы показать свою нетривиальность, запускает “табун троянских коней”, которые не входят в привычный формат мышления. Система демонстративно показывает свою сверхсложность. Один из “троянских коней” просто легко остановил действие фундаментального “принципа причинности”. А человек зачастую не способен зафиксировать появление этих “троянов”.

Действительно, из закона постоянства секторальных скоростей Иоганна Кеплера<sup>2</sup> планет буд-то бы следует, что планеты «сами себя» разгоняют в окрестности перигелия и также «сами себя» притормаживают в окрестности афелия. Странная история! Таким образом, разрушилось главное — материальная первопричина движения. Она, причина, должна быть, но ее никто не видит.

Возникает противоречие. Разрушен закон причины и следствия. Логика компромиссов в этом случае чужда и противоестественна.

Закон Кеплера безжалостно разрушал закон причинности! Неравенство угловых скоростей движения планет  $\dot{\varphi}_p > \dot{\varphi}_a$  в перигелии и афелии разрушило картину сохранения количества движения Декарта, если опираться на данные астрономии.

В свое время Иммануил Кант<sup>3</sup> обратил внимание на то, что существуют явления, не объяснимые в рамках устоявших парадигм. Реальная картина мира начала взламывать Матрицу Системы, демонстрировать свою *трансцендентность*.

Необъяснимые явления, которые демонстрирует Матрица Системы, Кант разделил на две категории:

1. **Творение**, когда эффект принципиально невозможно объяснить в категориях “постулата причинности” и автоматически относят это к “божественному промыслу”.

2. **Трансцендентность** — это явление, не относящееся к “божественному промыслу”, а является лишь эффектом, объяснить которое кажется невозможным, опираясь на опыт человеческого разума.

Трансцендентность всегда лежит за пределами человеческого разума. В современной математической терминологии, трансцендентность — это некая не уловимая логикой *нелинейность*.

**И. Кант:** “Если возникновение [явления] рассматривается как действие чуждой ему причины, то оно называется **творением**. Как событие среди явлений творение не может быть допущено, таким как уже сама возможность его нарушила бы единство опыта” [2, стр. 208].

Люди способны фантазировать только в рамках общепринятой парадигмы. Люди боятся незнания. Поэтому придумывают ответы на все вопросы, чтобы чувствовать себя защищенными.

Рене Декарт, хотя и не чуждался религии, всё же решил отбросить эффект неравенства угловых скоростей планет, как божественное Творение. В своих рассуждениях он решил опираться на главный постулат о первопричинах движения. И этот постулат первопричинности движения давал однозначный ответ: причиной движения тел могут быть только *внешние* материальные силы. Декарт предположил, что в районе перигелия и афелия расположены “эфирные вихри”, которые, соответственно, в перигелии и афелии, соответственно, ускоряют и затормаживают движение планет.

Но откуда взялись эти “вихри”? Почему они существуют для всех планет именно в этих местах? Но главное — кто их так мастерски расставил в “перигелиях” и “афелиях”? Ясно, что этот “кто-то” и есть Творец. Декарт всеми силами избегал такого вывода, но получалось в итоге именно то, от чего он всегда бежал. Круг замкнулся. Из него уже не выбраться. Это не камешек в башмаке, это капкан.

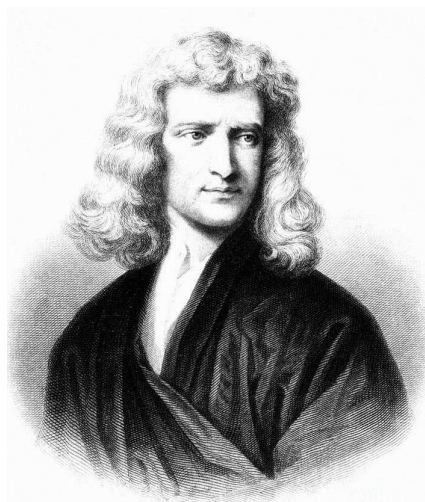
<sup>2</sup>**Иоганн Кéплер** (*Johannes Kepler*) (1571-1630) — немецкий математик, астроном, механик, оптик, первооткрыватель законов движения планет Солнечной системы.

<sup>3</sup>**Иммануил Кант** (*Immanuel Kant*) (1724-1804) — немецкий философ, один из центральных мыслителей эпохи Просвещения. Всесторонние и систематические работы Канта в области метафизики, этики и эстетики сделали его одной из самых влиятельных фигур в западной философии Нового времени.

Исаак Ньютон<sup>4</sup>. Когда ты наговорился с тишиной

Понятие “ложная база” — опасное обстоятельство в науке. Если все рассуждения и умозаключения построены на ложной базе, то разбирать ее бессмысленно и опасно. Там — закольцованный тупик.

Пока опасность кажется абстракцией, люди не будут вкладывать в нестандартное решение ни ресурс, ни время, ни энергию. Настал критический момент. Так случилось и на этот раз.



Исаак Ньютон (1642 - 1727)

В 1682 г. астрономы ожидали пролёт кометы Галлея<sup>5</sup> вблизи Земли. Никто не мог гарантировать, что комета Галлея не может столкнуться с Землей. Резко проявился интерес к астрономии и к умению рассчитывать и предсказывать движение планет. Многие увидели в грядущем явлении “конец света”, на который уже давно указывали церковные книги. Необходимо было срочно установить законы движения небесных тел, чтобы прогнозировать подобного рода “апокалипсисы”.

Следует отметить, что Рене Декарт нигде не утверждал, что его гипотеза об “эфирных вихрях” — это “божественное Творение”. Однако Исаак Ньютон прочитал у него именно так, «между строк», поскольку другого вывода Декарт не предложил. Кто же расставил эти “эфирные вихри” так мастерски именно в точках “перигелиев и афелиев”?

Исаак Ньютон был глубоко верующим человеком. Однако такая концепция “божественного Творения” даже его не устраивала.

Вы никогда не решите проблему, если сохраните тот же подход и тот же способ мышления, что и привело к этой проблеме. Значит, надо выйти из общепринятого формата мышления, если перед вами стоит задача, которая в данном формате не решается. В тишине есть ответы на все вопросы и спокойно решается любая проблема.

Ньютон начал догадываться, что «лживой базой» в теории Декарта было утверждение, что воздействие на планету должно быть обязательно внешним. Другими словами, планета должна разгоняться и притормаживаться обязательно из-за действия *внешней, посторонней* причины (“эфирный вихрь”).

И всё же, Исаак Ньютон не спешил отказываться от общепринятого принципа причинности. Он понял, что требуется лишь его тонкая корректировка. Он повторил постулат причинности движения в своей книге «Начала...»

**Ньютон И.:** “(О системе мира) Не должно принимать иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений, [3, с.502].

**Ньютон И.:** “Истинное абсолютное движение не может не произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к самому движущемуся телу... [3, с.34].

Однако, Исаак Ньютон начал догадываться, что сила, которая управляет движением планет, лежит вне пределов человеческих знаний. В XVIII в. Иммануил Кант назовет такие силы *трансцендентными*.

<sup>4</sup>Сэр **Исаак Ньютон** (*Isaac Newton*) (1642 — 1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики и математического анализа. Автор фундаментального труда “Математические начала натуральной философии”, в котором он обнародовал законы движения и закон всемирного тяготения, сформировавшие господствующую научную точку зрения вплоть до появления общей теории относительности. Ньютон использовал свое математическое описание гравитации для строгого вывода эмпирических кеплеровских законов движения планет.

<sup>5</sup>**Эдмунд Галлей** (*Edmond Halley*) (1656—1742) — английский астроном, геофизик, физик и демограф, внёс крупный вклад во все перечисленные науки. Наиболее известен исследованиями кометы, которой присвоено его имя. Галлей показал периодичность её появления и высказал мнение об аналогичном поведении других комет. Член Лондонского королевского общества, иностранный член Парижской академии наук. Королевский астроном с 1720 года.

В понимании средневековых философов закон причинности рассматривался как жесткая последовательности по схеме “причина-следствие”. И никак не иначе. Кант немного смягчит эту жесткую последовательность:

Кант И. . . . “Причина и действие могут существовать в одно и то же время” [2, стр.205].

Кант И: “**Трансцендентными** я называю основоположения, которые действительно побуждают нас разрушить все пограничные столбы и вступить на совершенно новую почву, не признающую никакой демаркации... Основоположения, устраняющие эти границы и даже повелевающие переступить их, называются **трансцендентными**” [2, стр.276].

Осторожная идея Исаака Ньютона состояла в том, чтобы найти трансцендентную силу, действие которой в итоге дает наблюдаемое движение планет. Такие силы визуально не наблюдаются “на каждом шагу” и поэтому они чужды “простой житейской логике”, т.е. они **трансцендентны**. Возможно, эта меняется в процессе своего действия. На современном математическом языке это значит, что сила, управляющая движением планет, должна быть “нелинейная”.

Для разрешения проблемы Исаак Ньютон поставил перед собой “обратную задачу”: как должна выглядеть сила притяжения, чтобы планета двигалась по эллипсу, гиперболе, или параболе? Именно эти линии имеют свои геометрические фокусы. Разумеется, Солнце должно быть помещено в фокус этой линии.

Более тысячи страниц вычислений приводили И.Ньютона к одному и тому же результату: сила притяжения планет к Солнцу должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца до планеты. Это был его главный результат.

Постулату причинности, казалось бы, не было альтернативы. Это признавали все. Однако, среди образованных людей не утихали споры о том, может ли тело в процессе движения “немного скорректировать” свое движение без непосредственного воздействия внешней силы. Исаак Ньютон сказал своё “нет” на этот счет. Естественным состоянием для тела И.Ньютон считал покой, или равномерное и прямолинейное движение. Тело не может изменить любое из этих состояний самостоятельно: обязательно требуется воздействие на тело внешней силы.

**Ньютон И:** “Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние [3, с.39].

Здесь И.Ньютон корректирует концепцию Рене Декарта о том, что в замкнутой системе соблюдается суммарное количество движения  $mV = const$ , независимо от того, какие там силы действуют. Внешняя сила меняет количество движения! На современном языке это можно записать так:

$$m \frac{dV}{dt} = F, \quad (1)$$

где  $V$  — вектор скорости точечного тела, а  $F$  — вектор внешней силы. Таким образом, И. Ньютон, пожалуй, впервые ввел понятие **вектора как направленного действия силы**, складывающийся, с другим направлением силы по правилу параллелограмма [3, с. 42].

**Ньютон:** “Изменение количества движения пропорционально приложенной силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует, [3, с. 40].

Казалось бы, «малозначительная корректировка» (1) концепции Рене Декарта «мало что меняет». Однако, такая корректировка меняет всё и это принципиально.

Если строго следовать концепции Декарта, то уравнения движения планет должны были стать дифференциальные уравнения первого порядка, говоря современным языком. Второй закон движения И. Ньютона (1) говорит о том, что движение тел должно моделироваться дифференциальными уравнениями второго порядка. И это принципиально!

Между дифференциальными уравнениями первого и второго порядка существует качественное различие: уравнения второго порядка содержат в себе нелинейности, которые и объясняют все накопившиеся загадки движения планет. Дифференциальные уравнения первого порядка не содержат

таких нелинейностей. Нелинейности могут объяснить странные эффекты движения планет, а уравнения первого порядка — нет.

Современникам Ньютона показалось, что постулат о прямолинейном и равномерном движении тела не является универсальным. Смущал «эффект волчка», когда он без каких-либо причин, вращаясь, не падает. В те времена эта китайская игрушка немало поставила загадок для детворы и для маститых философов. К загадке волчка спустя сто лет вернется Л. Эйлер<sup>6</sup> [4]. Но это будет потом. В XVII в. к таким загадкам еще никто не был готов.

Действительно, частицы вращающегося волчка не движутся «равномерно и прямолинейно». Более того, они движутся с разными скоростями, хотя на них действует одна и та же сила тяжести. Здесь, казалось бы, нарушается первый закон Ньютона о равномерном движении тела «по инерции».

Ньютон понимал возникшую проблему. Его концепция о причинах движения планет была сформулирована для точечной массы. Именно так внешне выглядят планеты на небосводе по сравнению с Солнцем.

Исаак Ньютон указал, что волчок отличается от материальной одинокой частицы. Он состоит из множества частиц, которые сцеплены между собой и поэтому движение волчка действительно не похоже на движение одинокой материальной частицы. Значит, и законы движения у волчка другие.

**Ньютон И:** «Волчок и всего части, вследствие взаимного сцепления, вовлекают друг от друга от прямолинейного движения, не перестает вращаться (равномерно), поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха. [3, с. 40].

### Они не решают вопросы, потому что знают готовые ответы

История издания «Начал» Исаака Ньютона была грустной. Мытарства начались еще за несколько лет до издания. Ни одно издательство не хотело печатать «Начала натуральной философии». . . В конце-концов, скопив за несколько лет немного собственных средств, удалось уговорить одного издателя. Однако, он просил уплатить потенциальный убыток от продажи типографского тиража. Выручил Исаака Ньютона его друг — Эдмунд Галлей. Он дал существенную долю средств для издателя.

К огорчению Исаака Ньютона, издатель оказался прав. Книга так же долго продавалась, как и печаталась. Господи, ну кому нужны эти скучные «законы мироздания», тем более, написанные сложным языком неизвестным автором? Публику больше интересовали светские сплетни и гламурные истории о похождениях маркизов и их тайных любовниц. . .

Те немногие читатели, которые прочитали «Начала», жаловались Исааку Ньютону, что книга обманула их ожидания. Ведь Ньютон обещал изложить в книге *простые* правила о законах природы. Ну, и где же она *эта простота*? Все оказалось в книге довольно сложно, а значит и не интересно. . .

Студенты Кембриджа, встречая Ньютона, говорили: «Вот идет человек, написавший книгу, в которой ни он сам, и никто другой ничего не понимает» [3, стр. 5].

### Там, где горят книги, всегда холодно и темно

Издание книги Ньютона «Математические начала натуральной философии» общественность Европы встретила глухим молчанием. Вместо ожидавшейся поддержки И. Ньютона волна за волной накатывались атаки критики.

---

<sup>6</sup>Леонард Эйлер (Leonhard Euler) (1707–1783) – швейцарский, прусский и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук (а также физики, астрономии и ряда прикладных наук). Эйлер — автор более чем 850 работ (включая два десятка фундаментальных монографий) по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению и другим областям. Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук. Первый российский член Американской академии искусств и наук. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки.

Представители французской школы “картезианцев” считали гипотезу гравитационного притяжения Ньютона полным сумасбродством и издевательством над “здравым смыслом”. Судебная палата (парламент) Франции в 1732 г. незамедлительно осудила книгу Ньютона как “соблазнительную, противную религии, добрым нравам и почтению к властям” [3, с. 8]. Позже французский парламент примет решение “все книги Ньютона, которые продаются во Франции, надо сжечь”.

Правда, это решение было принято после смерти Ньютона. Однако Вольтер открыто встал на защиту книги И. Ньютона и “костер” решили “временно отложить”.

### Время в жизни идет медленно, а жизнь летит быстро

Исаак Ньютон слыл сторонником англиканской церкви. Сделав открытие, что движением планет в Солнечной системе управляет физический закон гравитационного притяжения, Ньютон растерялся. А где же здесь Бог? Где проходит граница между познаваемыми законами Природы и непроницаемой властью Бога? Осторожные рассуждения, что “Бог есть всё” и что он “растворился в Природе” не находили отклика в умах и сердцах людей.



Дом в Лондоне, где жил Ньютон.  
Рисунок 1850-х годов.  
(St. Martin Street, Leicester Square)

И. Ньютон решил написать несколько рассуждений на богословскую тему. Общественность Ньютону не поверила. Ньютон уже и сам растерялся. Его прежние представления о Боге, кажется, рухнули, а появившийся вакуум нечем было заполнить. А тут новая беда.

Это случилось в морозный декабрьский день, накануне Рождества 1692 г. Исаак Ньютон вышел из церкви после праздничного богослужения и отправился домой. Подъезжая к дому, он увидел толпу мечущихся людей и зарево пожара. От увиденного зарева Ньютон оцепенел. Яркие мощные языки пламени пожирали его дом. В этом доме горели его бесценные рукописи, результаты его многолетних исследований по акустике, оптике и истории. Горели его приборы, с которыми он проводил свои эксперименты. В пламени были все его достижения, чаяния и надежды.

Ньютон был настолько потрясен увиденным, что пришел в себя только через месяц. Позже он часто возвращался мысленно к этому черному дню и задавал себе бесконечное число раз вопрос, как это могло произойти.

Накануне того злополучного воскресенья он просидел всю ночь над рукописью. К утру прилег на час-другой, немного вздремнуть. Потом ушел на утренний молебен. Свечу, горевшую на столе, потушил. Когда ушел, каким-то образом горевшая свеча опрокинулась, загорелись листки рукописи, затем книги, мебель...

Что было причиной падения свечи? Возможно, это был сквозняк, прорвавшийся через форточку окна, или вбежавшая в его комнату домашняя собака... Может, свеча неравномерно горела и затем, догорая, накренилась и упала на листки бумаги. Этого уже никогда не узнать. Единственным утешением было лишь то, что три тома своей рукописи “Начал натуральной философии” он издал три года тому назад, в середине 1687 г.

Пряди седых волос появилась у него давно. Он впервые их заметил вскоре после изнурительной тяжбы с Гюйгенсом<sup>7</sup> и Лейбницем<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Христиан Гюйгенс ван Зейлихем (*Christiaan Huygens*) (1629-1695) — голландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Первый иностранный член Лондонского королевского общества, член Французской академии наук и её первый президент (1666–1681). Один из основоположников теоретической механики и теории вероятностей. Внёс значительный вклад в оптику, молекулярную физику, астрономию, геометрию, часовое дело. Открыл кольца Сатурна и Титан (спутник Сатурна).

<sup>8</sup>Готфрид Вильгельм Лейбниц (*Gottfried Wilhelm von Leibniz*) (1646 — 1716) — немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент

Ньютона обвинили в “богоборстве”. Его законы движения (о ужас!) почему-то не предусматривали влияние “высших божественных сил”. По Ньютону, движение тела могло происходить исключительно под воздействием внешней физической силы. Бог был в его законах “третьим лишним”.

Его тут же обвинили в “непоследовательности”. Если принять аксиому, что все причины в мире движений являются “грубо материальными”, тогда непонятно происхождение “идеалистического” закона притяжения планет. Откуда он взялся, такой сложный?

Оправдываясь, Ньютон решил вдогонку к “Началам...” опубликовать статью, где попытался ответить своим обвинителям в “богохульстве”. Он честно признал, что не знает, почему закон притяжения тел представляется обратно пропорционального квадрату расстояния до центра притяжения.

**Ньютон И.** : “Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю” [3, стр.662 ].

Ньютон доказывал, что он глубоко верующий человек. Ему не поверили. Оправдания Ньютона уже мало кого интересовали. Раскол в мировоззрении оказался глубже и серьезнее, чем тогда ему показалось.

Изнурительный спор Ньютона с его оппонентами, фактически, вышел на метафизический уровень. Кажется, на этом уровне доказать уже что-либо было невозможно. Речь шла о том, действительно ли всякое движение тела можно объяснить только воздействием на него внешней физической силы. Или же есть какие-то другие возможности изменить движение тела в пространстве? Если есть, то какие это силы?

Спустя восемь лет после издания книги в его дом Ньютона всё-таки придет материальный достаток и бытовой комфорт. У него появится собственный дом из нескольких комнат и даже прислуга. Это произошло благодаря стечению неких счастливых обстоятельств.

Однажды знакомый ему банкир пожаловался во время дружеской беседы, что финансовая система королевства может вскоре лопнуть, поскольку финансовые реки замутилены потоками фальшивых денег. Ньютон предложил несколько идей, как можно исправить ситуацию. Он не догадывался, что этот разговор вскоре заметно изменит течение его жизни.

Банкир был лично крайне заинтересован в благополучном разрешении этой государственной проблемы и понял, что если Ньютону дать соответствующие полномочия, то он проблему финансов королевства решит. Так, неожиданно для себя, Исаак Ньютон был назначен хранителем (главным казначеем) Королевского монетного двора. Он действительно оправдал надежды британской короны.

## Ньютон. Игра со смертью

Исполняющий обязанности смотрителя Королевского Монетного двора (с почетным званием «Мастер») — Исаак Ньютон — сегодня, как всегда, был на службе. Сидя в тесной комнатке Тауэра, он нетерпеливо поглядывал периодически на настенные часы. Сегодня у него особый день. Ньютон нервно ходил по комнате и ждал... Объявленный в суде смертный приговор Чалонеру, однако не успокоил Ньютона. Было чего опасаться. Иногда преступники не доезжают до места казни... Всякое бывало... [7].

Уильяма Чалонера знал весь Лондон. За ним тянулся шлейф всеобщего внимания. Временами он был очень богат и удивлял Лондон своей показной роскошью и расточительностью. Но мошеннические игры на бирже были лишь прикрытием его истинных источников дохода. Главным его промыслом было производство фальшивых денег [7].

Серебряные монеты королевства преступники переплавляли в слитки и продавали в Европу, где серебро стоило намного дороже. Взамен “уплывшего” серебра Лондон наводнялся фальшивой чеканкой “под серебро” с изрядной примесью в монетах олова и цинка.

До сих пор Уильям Чалонер ловко ускользал от правосудия. Его блистательные речи в Парламенте, казалось, отменяли всякие подозрения в его нечистоплотности. Он был чрезвычайно хитер и осторожен.

На этот раз в длинной цепочке преступлений Чалонера решено было поставить жирную точку. Собрано достаточное количество улик против Чалонера. Свидетели дали нужные показания.

Королевская власть — от Бога. Никто не смеет разрушать священные основы Британской империи. Королевскому Монетному двору повезло, что на должность смотрителя был назначен Исаак Ньютон. С алхимией финансов — в прямом и переносном смысле — вряд ли кто готов был с ним тягаться.

Добрый десяток лет, занимаясь алхимией, он набирал опыт тонкого эксперта. Его уже нельзя было провести на едва различимых примесях олова и цинка. На этих нюансах, как на клавишине, шла игра фальшивомонетчиков и королевского правосудия. До прихода Ньютона в Монетный двор суды над фальшивомонетчиками часто заканчивались оправдательным приговором из-за скудости доказательной базы. Так не могло долго продолжаться. . .

В смертельной схватке с преступным миром не всегда побеждает правосудие. В войне Ньютона с фальшивомонетчиками кто-то один из двоих — Ньютон, или Чалонер — должен был погибнуть. Если бы Уильям Чалонер остался жив, то Ньютон вскоре мог бы упокоиться где-нибудь на дне Темзы с камнем на шее. Преступный мир промахов не прощает.

Исаак Ньютон своим острым, как скальпель, умом, рассекал многоуровневую проблему фальсификации денег. И дело было не только в металлических примесях.

Ньютон предложил нанести на ребро монет некий текст, указывающий на принадлежность монеты Королевскому Монетному двору. Была разработана технология тиснения на ребрах монет этого текста. Теперь уже стачивать контур монет стало невозможно, поскольку уничтожался текст надписи на ребре монеты. Без этой надписи монета считалась уже фальшивой.

Однако, проблема была в том, что преступники приобретали точно же такие станки, какие стояли в цехах Монетного двора. И с этим надо было что-то делать.

Ньютон создал собственную агентурную сеть осведомителей на всех уровнях преступного дна Лондона. Кое-какие ниточки загадочно потянулись и в стены Монетного двора. . . Сеть осведомителей, как оказалось к удивлению, тоже не панацея. Осведомителей преступники раскрывали, перекупали, и на суде они уже были готовы давать противоположные показания.

Накануне судебного заседания над Чалонером Ньютон десять дней подряд активно участвовал в допросах свидетелей и агентов-осведомителей. Процесс не должен был провалиться. Это вопрос его жизни и смерти. Ну, вот, кажется и финал.

Процедура казни Чалонера на этот раз была обычной — “через повешение”. Особая экзекуция с комбинацией повешения и потрошения еще живого преступника, с последующим четвертованием применялась только для тех, кто покушался непосредственно на королевскую власть.

Можно было, конечно, немного смягчить процедуру казни, чтобы смерть наступила быстро. Для этого надо было просто заплатить палачам. Но за Уильяма Чалонера никто не хотел дать и пенса.

Казнь была быстрой. Исполнив “танец висельника”, Уильям Чалонер затих. Всё было кончено. Ньютону повезло: Чалонер ушел в мир иной, а он остался жить. Теперь всё, кажется, позади. Со смертью главаря фальшивомонетчиков — Чалонера — Британская империя постепенно приобрела устойчивую финансовую систему. Правда, не сразу.

Спустя полгода после казни Чалонера, в канун Рождества 1696 года Исаак Ньютон был назначен смотрителем Королевского Монетного двора и с сохранением должности профессора в университете. На него была возложена задача по перечеканке всей серебряной монеты, имевшей хождение в стране. Спустя три года (1699 г.) Ньютона назначили директором Королевского монетного двора. В дом пришел материальный достаток. Король не забыл заслугу Ньютона, когда он в своё время проголосовал в парламенте за его коронацию.

Позже Исаак Ньютон королевским указом (1703 г.) был назначен Президентом Лондонского Королевского общества. спустя два года в знак благодарности за успешно проведенную работу в Монетном дворе, королева Анна возвела его в рыцарское звание. Также было предложено королевским распоряжением избрать Исаака Ньютона президентом Лондонского Королевского общества.

### Высшая мера. По лезвию жизни и смерти

Однако появившийся комфорт и материальный достаток теперь уже оказался для Ньютона ненужным. По воспоминаниям его современников, Исаак Ньютон продолжал вести тот же весьма скромный образ жизни, к которому уже привык за десятилетия одинокой жизни. Приходивших к нему гостей принимал всегда крайне просто, угощая их самым дешевым вином и скромным обедом. Об этой его “аномальной странности” тогда шептались многие. Никто не понимал его образа жизни и мышления. Объявить это “сумасшествием” было проще всего.

Работа в парламенте была для него обузой, каким-то непонятным для него долгом. Он был вынужден исполнять этот долг в знак уважения к Кембриджскому университету. За несколько лет парламентских заседаний он не проронил ни слова. Однажды, правда, депутаты парламента услышали его голос в зале заседаний. Он попросил сторожа закрыть форточку, чтобы не было сквозняка.

Биографы Ньютона писали, что шок от пожара стал причиной нервно-психического заболевания, от которого Исаак Ньютон не избавился до самой смерти. Об этой странной болезни писали современники Ньютона. В их домашних архивах сохранилось некоторое количество писем, в которых Ньютон сам признавался в своей раздражительности и даже некоторой неадекватности в своем поведении. Однако, всё, на самом деле, было гораздо сложнее...

Мозг любого человека должен жить по биологическим законам. Он должен оберегать организм от саморазрушения, от переутомления. Так должен поступать нормальный мозг. Однако у Ньютона все было иначе.

Его мозг уподобляется живому существу, отдельно живущему в нем. Он ощущал, как его мозг всегда тянется ко всему странному и трансцендентному, настойчиво нащупывает все непонятное и чуждое. Его мозг зачаровывается лишь тем, что является парадоксальным и противоестественным. Если не остановиться, то это путь к когнитивному диссонансу, путь к саморазрушению мозга и личности.

Мозг опасно выходит за границы биологически дозволенного ему напряжения и балансирует на грани жизни и смерти. Циничная игра со Смертью. И в этой Игре — смысл жизни Мозга. Казалось, мозг Ньютона не знал, что такое усталость. Он продолжал питаться всем тем неестественно странным, опасным, что встречал на своем пути. Ощупывая Мир, мозг балансирует на грани саморазрушения от перенапряжения и не понимает той опасности, с которой сталкивается. Однако мозг настойчиво продолжал делать именно это.

Ньютон понимал, что чуждое ему существо — его мозг — это он сам. Он не мог жить “обычной жизнью”, “как все”. Мозг противился этому. Это была та *высшая мера*, по которой он ежедневно жил. Однако, именно эта жизнь, балансирующая на грани биологического перенапряжения, давала Ньютону новый и новый импульс для жизни. Не было в детстве у него материального достатка и физического здоровья. Его мозг нашел новую форму активной жизни, при которой физическая сила уже не требуется.

Жизненными соками его наполняли книги. Много книг. Историки пишут, что личная библиотека И. Ньютона насчитывала 2100 книг. По признанию самого Ньютона, он покупал только те книги, которые сам читал. Это была его жизнь, мало понятная постороннему. Это была новая форма жизни мозга, игра на грани жизни и смерти. Это леденящее кровь постоянное скольжение по лезвию смерти было понятно только ему самому. Ньютон никого не впускал в свой мир.

Тело уже налилось свинцовой тяжестью от усталости из-за хронического недосыпания. Современники Ньютона говорили, что он иногда не спал по несколько дней подряд. После бессонной ночи



над рукописью ужасно хотелось спать. Однако мозг противился отдыху. Казалось, он не ведает, что такое усталость. Мозг живет как самостоятельное существо, забирая у него последние силы. Он, играя, переключался с одного вида работы на другой. Механика, оптика, гидродинамика, динамика планет, история... Мозг был ненасытен...

К феноменальной рассеянности Исаака Ньютона все уже давно привыкли. Однако на этот раз всё оказалось гораздо серьезнее... Нервозность и раздражительность сопровождалась сильными головными болями, постоянно гнетущей депрессией и потерей сна. Бессонница его изматывала, жизнь превращалась в непрерывный круг кромешного ада.

Правда, странное состояние Исаака Ньютона было замечено еще двумя годами раньше, до того злополучного пожара. Пожар был лишь толчком к прогрессирующему развитию его болезненного состояния. Биографы Ньютона склоняются к тому, что истинной причиной его болезни стала непомерная усталость от работы над трехтомником «Математических начал натуральной философии».

Переутомление усиливалось депрессией, которая навалилась на Ньютона вследствие весьма скудного образа жизни. Его жалованья едва хватало на скромные обеды. Иногда случалось, что он не мог даже уплатить пустячный членский взнос в Лондонское Королевское общество.

### Сумерки гения

За два года до смерти Ньютон еще больше замкнулся в себе и не желал никого видеть. Он лишь искренне радовался, когда к нему приходила его племянница — Катерина Бартон — за ним поухаживать. Она всегда была с ним рядом, когда у него была полоса черных дней. И он это ценил превыше всего. Ньютон перестал бывать в парламенте и на заседаниях Королевского общества.

Всю зиму 1727 Ньютон болел, страдал от камней в почках. В первой декаде марта стало лучше. Однако 19 марта боли резко усилились.

Ньютон уже слышал неспешные шаги Смерти. Он ее ждал. Кому-то из близких накануне ухода из жизни, он сказал, что скоро увидит то, о чем никто из живущих даже не догадывается. — Я это увижу, а вы — нет. В этом моё преимущество перед теми, кого я оставляю — сказал Ньютон.

Вызвали священника, чтобы принять перед смертью причастие. Однако Ньютон отвел руку священника и отказался от предсмертного церковного обряда. Смерть к нему пришла в ночь с 19 на 20 марта 1727 г. В день похорон специальным королевским Указом на территории Великобритании был объявлен однодневный траур.

На фасадах государственных учреждений были приспущены флаги. Лондон хоронил Главного казначея Британской империи — сэра Исаака Ньютона. Во время прощального богослужения в траурной церемонии пришедшие на похороны шептались, что покойный, оказывается, был еще и профессором естествознания и даже написал 18 книг. Сэр Исаак Ньютон с королевскими почестями был похоронен в Вестминстерском аббатстве.

Спустя три года Джон Кондуит — муж племянницы Исаака Ньютона — поставил памятник Ньютону в Вестминстерском аббатстве с надписью: «Если вы сомневаетесь, что был такой человек, пусть этот памятник будет тому свидетельством».

Масштаб научного гения Исаака Ньютона далеко не сразу оценили в Британском Королевстве, а потому надпись на надгробной плите соответствовала лишь его государственному титулу.

В день, когда хоронили Исаака Ньютона, двадцатилетний Леонард Эйлер уже был в пути из своей родной Швейцарии в Россию. Мать, прощаясь с сыном, догадывалась, что она своего сына видит в последний раз. Материнское чутье не подвело: её сын, Леонард Эйлер, никогда не вернется в свой родной дом, в Швейцарию. Новой родиной для него станет Россия. Старший сын Эйлера стан генерал-лейтенантом артиллерии, верой и правдой служил Российской империи. Но это будет потом.

А пока до Санкт-Петербурга оставалось три месяца пути в дилижансе по весенней распутице. Юный Эйлер был лишь в начале своего пути. Начиналась эпоха Леонарда Эйлера.

## Литература

- [1] Куно Фишер. История новой философии. Декарт, его жизнь, сочинения и учения. - Санкт-Петербург: "Мифрил", 1994. - 527 с.
- [2] Кант И. Критика чистого разума. - М., Издательство "Эксмо", 2012. - 736 с.
- [3] Ньютон И. "Математические начала натуральной философии", Изд. 3-е. - М., Издательство ЛКИ, 2008. - 704 с.
- [4] Оникійчук В.Н. Великая тайна Леонарда Эйлера. - С-Пб, Изд. "Профессионал", 2007. - 520 с.
- [5] Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. - М.: "Высшая школа", 1974 г.
- [6] Голованов Я. Этюды об ученых. - М.: "Молодая Гвардия", 1976.
- [7] Левенсон Томас. Ньютон и фальшивомонетчик. - М., Издательство ООО "АСТ", 2013. - 416 с.

*Оникійчук Валерий Николаевич,  
кандидат физико-математических наук,  
Государственный Университет Просвещения (г. Москва),  
Кафедра "Высшей алгебры, математического анализа  
и геометрии".*

*E-mail: valeryonikiyчук@yandex.ru*

*Оникійчук Игорь Валерьевич,  
Руководитель проектов  
ООО "Электрорешения", Москва.*

*E-mail: ionikv@inbox.ru*

## Информация

### Замеченные ошибки в № 2(110), 2024 г.

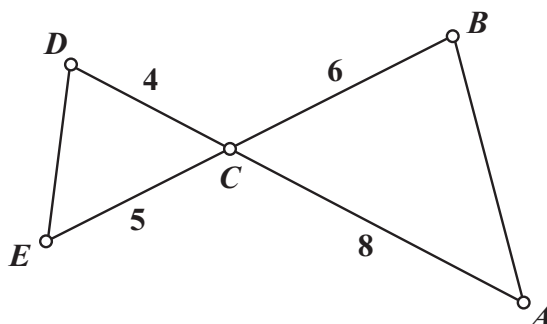
*От редакции*

В заметке С.В. Дворянинова и А.Б. Мамхегова “Задачи на любителя”, внизу стр. 19, по вине редакции оказался набран неверный рисунок. Окончание этой страницы с правильным рисунком имеет вид:

На стр. 81 находим задачу 19:

**19**

$S_{\triangle DEC} + S_{\triangle ABC} = 51$



**Найдите  $S_{\triangle ABC}$**

Также на стр. 21 указаны устаревшие данные по одному из авторов. Актуальные данные следующие:

Дворянинов Сергей Владимирович,  
преподаватель выездных школ Малого  
механико-математического факультета  
и выездной школы “Дважды два”,  
кандидат физико-математических наук, доцент.

Приносим извинения читателям за доставленные неудобства.

## **О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

### **Условия подписки и приема материалов**

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: [matob@yandex.ru](mailto:matob@yandex.ru)

Интернет: [www.matob.ru](http://www.matob.ru)

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2024 год (1 экз., включая стоимость пересылки) – 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2024 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

### **Внимание!**

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

**A. Afanasyev. Trilinear Coordinates and Collinearity 2**

The article provides examples of the use of trilinear coordinates to prove some well-known theorems on collinearity.

**O. Vinogradov. On Generating Functions in Solving Probabilistic Problems 10**

Using an example of two probabilistic problems, a method for finding generating functions will be shown. From the obtained explicit expressions for the generating functions, explicit expressions for the desired probabilities will be obtained. The first problem is related to Fibonacci numbers, and the second one is related to some combinatorial equalities.

**E. Scepín. Natural Logarithm 17**

The article presents a methodologically interesting and geometrically clear presentation of the concept of a natural logarithm as the area of a hyperbolic trapezoid with a variable vertical boundary. In this case, the author does not need to apply the full theory of integration; it is enough to determine the area of the hyperbolic trapezoid and find out a number of its properties.

**N. Ilyushechkin. On the Multiplicities of Eigenvalues of a Pair of Quadratic Forms 26**

We consider a pair of real quadratic forms, one of which is positive definite. It is proven that it is possible without calculating the eigenvalues of this pair of forms, to find out if any of them are multiples. One can also express the sum of the squares of the multiplicities of these numbers through the rank of some auxiliary matrix.

**L. Rodina, A. Chernikova. On the Properties of Systems of Differential Equations and Problems of Optimal Resource Extraction 31**

A classification of autonomous nonlinear systems of ordinary differential equations is proposed. One version of the comparison theorem for these systems is given. It is shown that problems of optimal extraction of a renewable resource are solved differently for systems of different classes.

**N. Sidnyaev, L. Sklyarinsky. On the Role of Modern Mathematics Education when Implementing Complex Problems in the Field of Chemistry 46**

In the article, mathematical methods are presented for studies caused by the interaction of oxygen atoms and molecules with silicon dioxide and silicon dioxide-based materials, taking into account chemical processes in the intermediate layer between the gas and the surface of the composite material in discharged media.

**A. Kanel-Belov, A. Kovaldzhí, A. Shapiro. Mathematical Football 53**

The note contains the rules of the mathematical game “Mathematical Football”, as well as examples of tasks that can be used in the game. The game is easier for the teacher to organize, and also contains simpler tasks for students than the famous game “Math Battle”.

**V. Onikiychuk, I. Onikiychuk. The Universal Task: Isaac Newton 58**

An essay on Newton’s dramatic path in science and public service. His results, although they were not actually recognized during his lifetime, formed a new system of views on the structure of the laws of the Universe, in particular, describing the motion of the planets.

**Current Information 70**

ISSN 1992-6138

