ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

год тридцатый

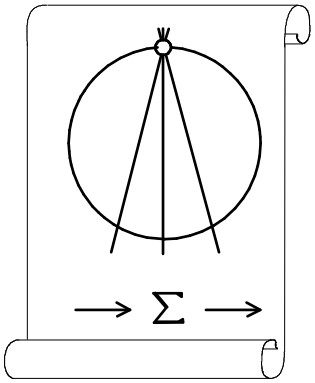
номер 3 (119)

июль - сентябрь 2026

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое учебно-методическое издание
в области математического образования



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дворянинов С.В.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Канель-Белов А.Я.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 3 (119), 2026 г.

© “Математическое образование”, составление, 2026 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2026 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 19.10.2026 г.
Стиль верстки разработан С.А. Кулешовым.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д. 4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (119), июль – сентябрь 2026 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

А. Н. Афанасьев. Несколько замечаний к задачам на принцип Дирихле 2

С. В. Дворянинов, А. Б. Мамхегов. Две заметки для школьников 7

К. Э. Каибханов. Неравенство, связывающее радиусы окружностей и углы треугольника 11

Студентам и преподавателям математических специальностей

К. В. Курьянович, А. Е. Косова, С.С. Воронина, Б.А. Воронин. Параметризация и быстрый счёт в задаче о перемещении шара между пятью урнами и между произвольным числом урн 14

С. О. Гладков. К вопросу о главной части функции Грина основных уравнений математической физики в N-мерном случае 21

В. И. Игошин. Структура и содержание логико-дидактического образования будущих учителей математики 29

Предметные олимпиады

Н. А. Трубицина, Н. М. Трубицин. Олимпиадный обман современности: методы и защита 45

Из истории науки

Н. М. Трубицин, Н. А. Трубицина, М. А. Трубицин. История моделирования: от механического к математическому 51

Информация

От редакции. Замеченные опечатки в номере 2(118) 60

Учащимся и учителям средней школы

Несколько замечаний к задачам на принцип Дирихле

А. Н. Афанасьев

В заметке обсуждаются тонкости применения принципа Дирихле в решении задач олимпиадного типа, в частности, вопрос избыточности условия. Уменьшение избыточности обычно усложняет задачу и побуждает искать новые способы решения.

Начнем с условия известной задачи на принцип Дирихле [1].

Пример 1. *В школе учатся 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них отмечают день рождения в один и тот же день.*

Заметим, что число 400 (назовем это число "аргументом" задачи) в условии (второе число скрытое, это максимальное число дней в году), с одной стороны избыточно большое, достаточно было взять число 367. Но с другой стороны, это круглое число как нельзя лучше подходит для условия данного примера. Ведь, во-первых, если выбрать вместо 400 число 367, то это было бы подсказкой к решению, во-вторых, с этим числом условие более естественно и эстетично. То есть избыточность в условиях задач на принцип Дирихле допустима, более того, авторы задач часто выбирают в качестве "аргумента" то или иное круглое число, которое хотя и избыточно, но зато более естественно для данной задачи.

Избыточно или нет число, данное в условии задачи, не всегда очевидно. Рассмотрим это на примере. Если три целых числа при делении на 3 дают одинаковые остатки, то их сумма кратна 3. Этот факт натолкнул на появление следующего примера [2].

Пример 2. *Докажите, что из любых семи целых чисел можно выбрать три, сумма которых будет кратна 3.*

Доказательство. Разобьем данные семь чисел на три группы: в первую группу будем включать числа, кратные 3, во вторую группу — числа, дающие при делении на 3 остаток 1, в третью — числа, дающие при делении на 3 остаток 2. Так как чисел семь, а групп три, то по принципу Дирихле, какие то три из них попадут в одну из групп. Их сумма и будет кратна 3.

Все прекрасно, но следующий пример показывает, что условие первого примера избыточно.

Пример 3. *Докажите, что из любых шести целых чисел можно выбрать три, сумма которых будет кратна 3.*

Доказательство. Разобьем шесть чисел на три группы, как во втором примере. Если при этом не окажется пустой группы, то сумма трех чисел, взятых по одному из каждой группы, будет кратна 3. Если же есть пустая группа, то по принципу Дирихле, одна из групп содержит не менее трех чисел. Сумма трех чисел из этой группы будет кратна 3.

Оказывается, и этот пример можно улучшить. Только на этот раз мы сформулируем задачу не в виде утверждения, а в виде вопроса. Думаю, это несколько усложнит задачу.

Пример 4. *Можно ли утверждать, что из любых пяти целых чисел можно выбрать три, сумма которых будет кратна 3?*

Решение. Ответ будет да. Как и в предыдущих двух примерах, разобьем данные числа на три группы. И, оказывается, рассуждения предыдущего доказательства полностью подходят и в этом случае!

Мы получили три задачи разного уровня сложности.

В случае же четырех целых чисел не всегда получится выбрать из них три, сумма которых кратна трем. Так как в условиях нет требования различности чисел, то в качестве простейшего контрпримера можно рассмотреть следующие числа: 0, 0, 1, 1.

Рассмотрим теперь правильный треугольник с длиной стороны 1. Если на этом треугольнике отметим две точки (точки можно отмечать и на границе треугольника) то очевидно, что расстояние между ними не будет превышать 1. Если же потребовать, чтобы точки лежали внутри треугольника, то расстояние между ними будет меньше 1. Расстояние между точками также будет меньше 1, если потребовать только, чтобы точки не совпадали с вершиной треугольника. Теперь просто решить пример, который взят из книги [3], но немножко изменен. И в условии, и в решении мы поменяли 1 на 2, а 0,5 на 1.

Пример 5. *Внутри равностороннего треугольника со стороной 2 расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.*

Доказательство. Средние линии треугольника со стороной 2 разбивают его на четыре правильных треугольничка со стороной 1 (смотри Рис. 1).

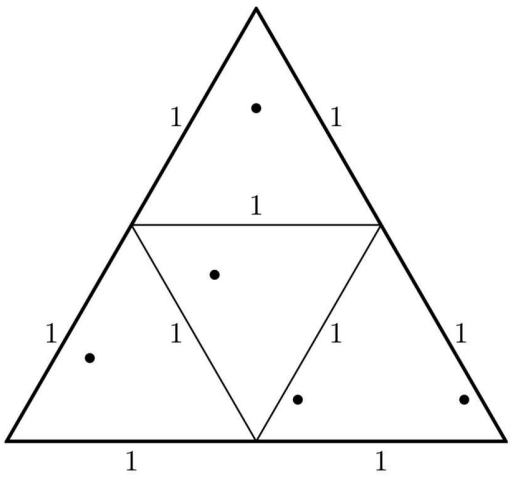


Рис. 1.

По принципу Дирихле из пяти точек хотя бы две окажутся в одном из четырех треугольничков. Расстояние между этими точками меньше 1, поскольку точки не лежат на вершинах треугольничков. (Здесь использована известная лемма о том, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, меньше длины его наибольшей стороны).

Заметим, что в последнем примере, число 5 нельзя заменить на 4. Действительно, если мы расположим четыре точки в центрах четырех треугольничков, то расстояния между точками, лежащими в соседних по стороне треугольничках будут равны $\sqrt{3}$, что больше 1.

Конфигурация для следующего примера получается из конфигурации предыдущего примера заменой правильного треугольника со стороной 2 на правильный треугольник со стороной 3. Но сформулируем условие по-другому.

Пример 6. *Внутри равностороннего треугольника со стороной 3 расположено 10 точек. Можно ли утверждать, что расстояние между некоторыми двумя из этих точек меньше 1?*

В доказательстве предыдущего примера важным условием было то, что ни одна из 5 точек не могла быть вершиной одного из треугольничков разбиения. А в новом примере, если одна из

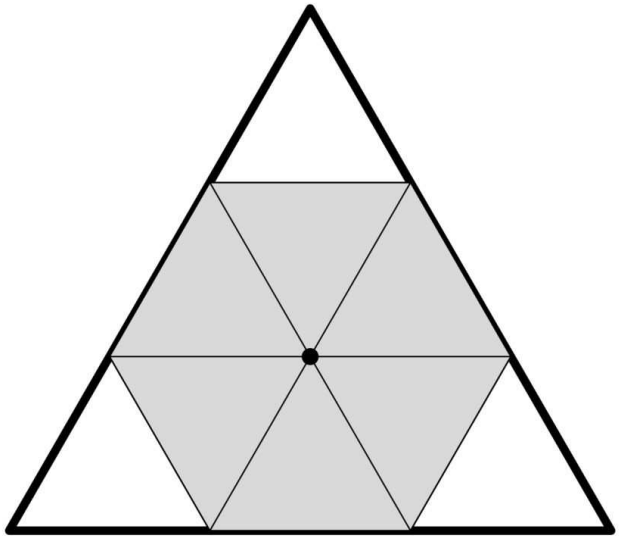


Рис. 2.

отмеченных точек совпадает с центром данного треугольника, то она является вершиной для шести треугольников разбиения (на Рис. 2 это серые треугольнички). Поэтому ответ на вопрос в примере не очевиден. Но тем не менее можно доказать, что ответ на вопрос — да.

Решение. Если ни одна из отмеченных точек не совпадает с центром данного треугольника, то ни одна из десяти отмеченных точек не является вершиной треугольничка разбиения, и, по прицину Дирихле, хотя бы две окажутся в одном из девяти треугольничков. Расстояние между этими точками меньше 1, поскольку точки не лежат на вершинах треугольничков.

Предположим, что одна из отмеченных точек совпадает с центром данного треугольника. Тогда, ни одна из остальных девяти точек не является вершиной ни одного треугольничка. Если при этом хотя бы одна из девяти оставшихся точек лежит в сером треугольнике, то расстояние от нее до центра треугольника меньше 1. Если же все девять оставшихся точек лежат в белых треугольничках, то найдутся две, расстояние между которыми будет меньше 1.

Если в последнем примере треугольник со стороной 3 поменяем на треугольник со стороной 4, и вместо девяти точек отметим шестнадцать точек, то приведенная схема доказательства не сработает. То есть мы получим принципиально новую задачу.

Заметим, что в последнем примере мы выбрали длину стороны треугольника равной 3, так как в этом случае треугольник разбивается на $3^2 = 9$ единичных правильных треугольника, и тогда для количества выбранных точек подходит круглое число 10. Заметим еще, что количество точек, являющихся вершинами единичных треугольников разбиения, тоже равно 10. Если выбраны эти десять точек, то расстояние от любой выбранной точки до другой точки либо равно, либо больше 1.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 7. *[2]. Внутри или на сторонах правильного треугольника со стороной длины 7 отмечены 50 точек. Докажите, что найдутся две точки, расстояния между которыми не превышает 1.*

Доказательство. Заметим, что прямыми, параллельными сторонам треугольника, данный

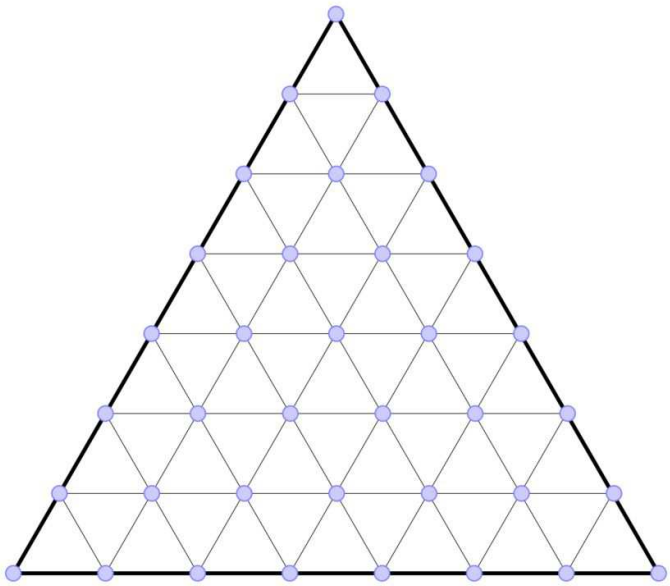


Рис. 3.

треугольник можно разбить на 49 единичных правильных треугольника (смотри Рис. 3). А так как отмеченных точек 50, то какие то два из них будут лежать на одном из единичных треугольников разбиения. Очевидно расстояние между ними не будет превосходить 1.

Давайте подсчитаем, число всех точек, являющихся вершиной какого нибудь единичного треугольника разбиения. Это число равно

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 7 + 8 = 36.$$

Закономерно возникает вопрос: "Можно ли в условии последнего примера, заменить число 50 на 36?" Ответ — да. Более того, верно более сильное утверждение.

Пример 8. *Внутри или на сторонах правильного треугольника со стороной длины 7 отмечено 37 точек. Докажите, что найдутся две точки, расстояния между которыми меньше 1.*

Доказательство. Из рисунка к предыдущему примеру видно, что 36 точек можно расположить так, что расстояние между любыми двумя было не меньше 1. При этом в каждый из 49 треугольничков разбиения входит по три из отмеченных точек. Если же отмечено 37 или более точек, то в какой-то треугольничек разбиения попадет 4 из отмеченных точек. Очевидно среди этих четырех найдутся две, расстояние между которыми меньше 1.

Таким образом, условие в примере 7 оказалось избыточным.

В конце приводим еще один пример, связанный с разбиением на правильные треугольники.

Пример 9. *Докажите, что в квадрат 7×7 можно поместить 68 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя точками не было менее 1.*

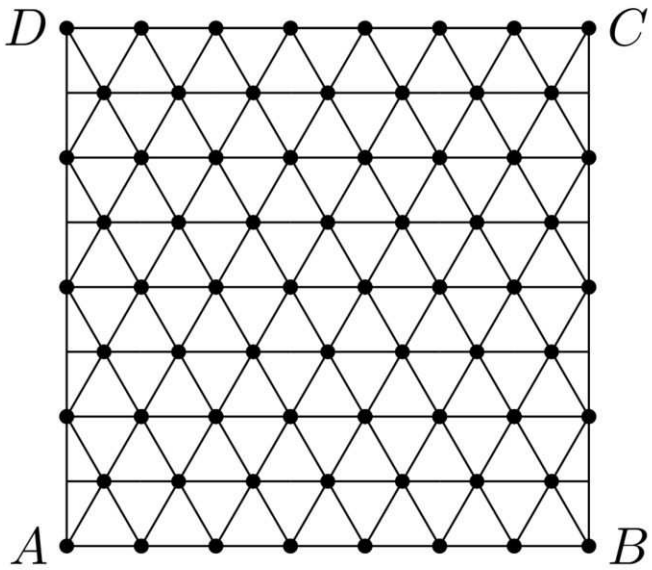


Рис. 4.

Доказательство. Как видим из рисунка 4, $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 68$ точек поместились в прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 7$ и $BC = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} < 7$, а значит поместятся и в квадрат 7×7.

Литература

1. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. 4-е изд. - М.: МЦНМО, 2008. - 96 с.

2. Афанасьев А.Н. Нестандартные задачи: 7 класс. - Чапаево: Изд-во физ.-мат. форума “Ленский край”, 2005. - 60 с.

3. Андреев А.А. и др. Принцип Дирихле. - Самара: Пифагор, 1997. - 21 с.

Афанасьев Александр Николаевич,
доцент кафедры теории и методики обучения
математике и информатике Института математики
и информатики Северо-Восточного Федерального
Университета им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.

E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru

Две заметки для школьников

В первой заметке, автор Дворянинов С.В., приводится забавный софизм, который предлагается разгадать школьникам и учителям. Во второй, авторы Дворянинов С.В., Мамхегов А.Б., разобрана поучительная задача с параметром, которая решается комбинированием геометрического метода с методами дифференциального исчисления.

1. Письмо в редакцию

Уважаемая Редакция!
Предлагаю доказательство того, что любое натуральное число равно 1.

Доказательство. Рассмотрим сумму квадратов n первых натуральных чисел от 1 до n:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Соответственно

$$S_{n-1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

В последнем равенстве раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по-другому:

$$S_{n-1} = (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 2n + 1$$

Получилось равенство

$$S_{n-1} = S_n - 2n + 1,$$

или

$$S_n = S_{n-1} + 2n - 1.$$

Но, очевидно, что $S_n = S_{n-1} + n^2$.

Следовательно, $n^2 = 2n - 1$, то есть

$$n^2 - 2n + 1 = 0, \quad (n-1)^2 = 0,$$

$$n^2 - 2n + 1 = 0, \quad n = 1.$$

Итак, доказано, что любое натуральное число равно 1.

2. Функция, производная, график, задача с параметром

Если спросить, *какая бывает математика*, то школьник скажет: алгебра и геометрия. Самый распространенный ответ у студентов — *высшая*. Конечно, студент мех-мата может уточнить вопрос и говорить о математическом анализе, алгебре, ТФКП, топологии... Однако в технических вузах все разделы современной математики объединены одним названием — "высшая математика". А что находится между школьной математикой и высшей? В 70–80-е годы прошлого века между ними располагалась *математика вступительных экзаменов*. Школьники-выпускники разыскивали варианты прошлых лет выбранного ими вуза и тренировались в их решении. Выходило много книг серии "поступающим в вузы" (рис.1). Среди них замечательные книги Моденова, Дорофеева, Потапова, Розова, Шабунина... Последние 20 лет будущему студенту надо успешно освоить математику ЕГЭ — от набранных баллов зависит судьба абитуриента. Параллельно развивается *олимпиадная математика*. Успех на олимпиаде открывает путь в университет.

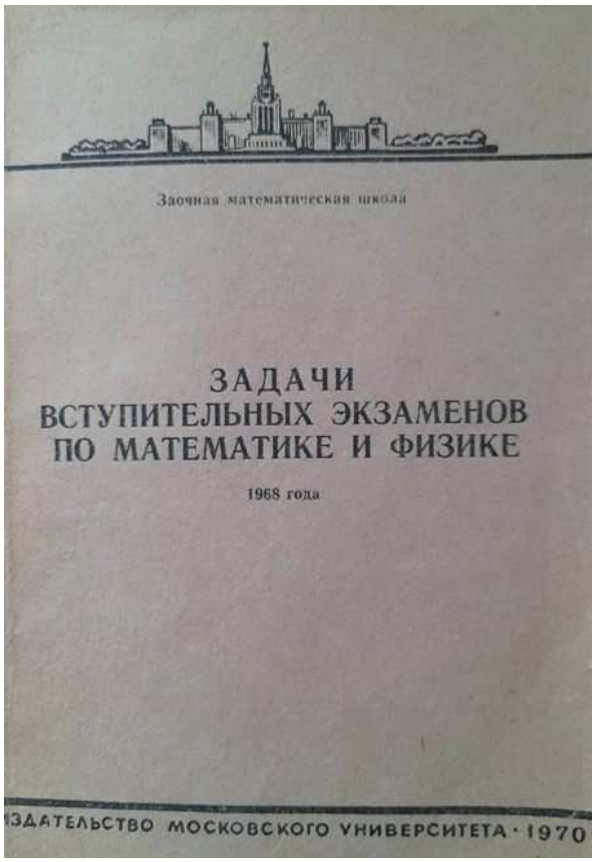




Рис. 1

Сейчас мы хотим представить задачу, которая относится к углубленной школьной математике. Ясно, что в школе надо глубоко освоить то, что потребуется в университете и позволит успешно сдать первую экзаменационную сессию. Эта задача ЕГЭ касается функций, производной, графиков [1]. Мы сейчас с вами решим эту задачу не так, как в сборнике [1], и сделаем упор на алгоритмическую сторону дела, связанную с исследованием функции. Так, как это делается на первом курсе университета.

Вариант 27. № 18 [1]. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{8-2x-x^2}+2+a=a|x|$$

имеет ровно один корень.

Шаг 1. Как всегда начинаем с *области определения* задачи. Подкоренное выражение неотрицательно: $8-2x-x^2\geq 0$.

Следовательно, $-4\leq x\leq 2$, — все события будут развиваться на этом отрезке числовой прямой.

Шаг 2. В уравнении присутствует модуль. Стандартный ход: *подмодульное выражение приравниваем к нулю*. Точка $x=0$ делит отрезок [-4;2] на два отрезка — $[-4;0]$ и $[0;2]$. На каждом отрезке уравнение записывается по-своему.

Сначала рассмотрим уравнение на левом промежутке при $x\leq 0$:

$$\sqrt{8-2x-x^2}+2+a=-ax-a.$$

Далее находим a из полученного уравнения:

$$a=\frac{\sqrt{8-2x-x^2}+2}{-x-1} \tag{1}$$

Деление возможно, так как знаменатель не равен нулю (убедитесь, что значение $x = -1$ не является корнем нашего уравнения).

Формула (1) задаёт функцию $a = a(x)$ на множестве $[-4; -1) \cup (-1; 0]$. Теперь будем использовать производную. Здесь самое главное кратко формулируем так:

Если производная положительна на интервале, то функция возрастает на этом интервале.
Если производная отрицательна на интервале, то функция убывает на этом интервале.

Пожалуйста, найдите производную функции (1), используя правила дифференцирования дроби и сложной функции. Производная окажется дробью с положительным знаменателем, и поэтому знак производной совпадает со знаком числителя:

$$sign(a') = sign((1 + x)^2 + 8 - 2x + 2)$$

Так как сейчас у нас $x \le 0$, то значение производной не меньше 10, и производная положительна. Следовательно, функция $a(x)$ возрастает на промежутке $[-4; -1)$ и возрастает на промежутке $(-1; 0]$. Теперь находим границы значений функции на каждом промежутке.

На промежутке $[-4; -1)$ находим значение функции $a(-4) = 2/3$. При приближении аргумента x к (-1) слева функция неограниченно возрастает. Следовательно, здесь множество значений функции — это промежуток $[\frac{2}{3}; +\infty)$.

Теперь берем промежуток $(-1; 0]$ и находим $a(0) = -2 - 2\sqrt{2}$. При приближении аргумента x к (-1) справа функция неограниченно убывает (обратите внимание: аргумент убывает, и функция убывает!). Следовательно, на промежутке $(-1; 0]$ множество значений функции — это бесконечный промежуток $(-\infty; -2-2\sqrt{2}]$. В итоге при $x \le 0$ приходим к рис. 2, точнее, к его части, включающей ось Oa и полуплоскость слева от этой оси.

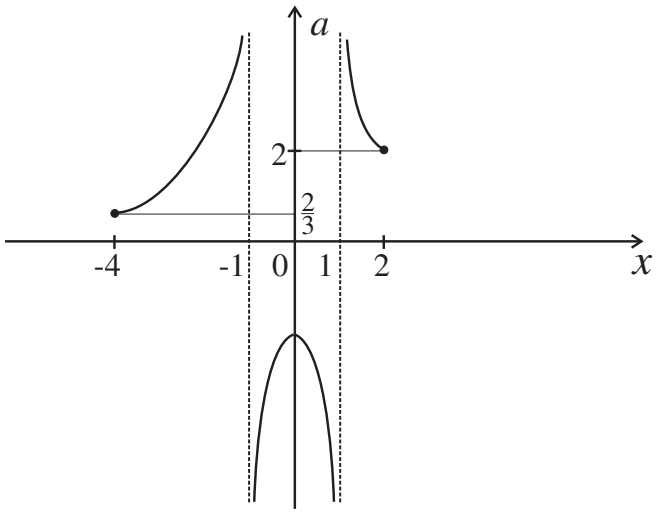


Рис. 2

Предлагаем читателю аналогичным образом рассмотреть данное уравнение при $x \ge 0$ и исследовать соответствующую ему функцию на множестве $[0; 1) \cup (1; 2]$. Укажем основные промежуточные формулы:

$$\sqrt{8 - 2x - x^2} + 2 = ax - a, \quad a(x) = \frac{\sqrt{8 - 2x - x^2} + 2}{x - 1},$$

$$sign(a') = sign(-2\sqrt{8-2x-x^2} + x^2 + x - 9).$$

При $x \in [0;2]$ $x^2 + x \leq 6$, значение производной не больше (-3), поэтому производная оказывается здесь отрицательной. Следовательно, функция убывает на промежутке $[0;1)$ и убывает на промежутке $(1;2]$. Её график также показан на рис.1.

Итак, график данного уравнения построен. Начальная задача касалась уравнения. Для построенного графика задача ставится так: найдите все горизонтальные прямые (параллельные оси абсцисс), которые пересекают график ровно один раз. Примечательно то, что подобные задачи есть в вариантах ОГЭ. Читая график на рис.2, получаем

Ответ. $\{a\} = \{-2 - 2\sqrt{2}\} \cup \left[\frac{2}{3}; 2\right)$.

В заключение скажем, что для многих задач с параметром основой решения служит график функции. От задачи с параметром — к графику, и от него — к ответу.

Литература

[1] ЕГЭ-2026. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 36 вариантов. Под ред. И.В.Ященко. - М.: Изд. Национальное образование.

Дворянинов Сергей Владимирович,
преподаватель творческой лаборатории "2 × 2",
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Мамхегов Астемир Билостанович,
старший методист Центр непрерывного
повышения профессионального мастерства
педагогических работников Минпросвещения
Кабардино-Балкарской Республики

E-mail: mamkhegov@mail.ru

Неравенство, связывающее радиусы окружностей и углы треугольника

К. Э. Каибханов

В заметке доказано интересное неравенство, связывающее радиусы окружностей и углы треугольника. Ранее оно было предложено автором в качестве задачи в журнале “Математическое Просвещение”, выпуск 19, 2015 г.

В этой заметке мы докажем неравенство

$$\frac{R}{r} < \frac{\pi}{\alpha\beta\gamma}, \tag{1}$$

где R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, α, β, γ — углы треугольника, выраженные в радианах.

Нам понадобится равенство

$$\frac{r}{R} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

из которого следует

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\frac{\gamma}{2}}.$$

Для удобства обозначим $x = \frac{\alpha}{2}$, $y = \frac{\beta}{2}$, $z = \frac{\gamma}{2}$; тогда

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}\frac{\sin z}{z}, \tag{2}$$

$x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Ключевую роль в нашем доказательстве играет следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *Тогда для любого* $x \in (0;\alpha)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin(\alpha - x)}{\alpha - x} > \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{3}$$

Сначала покажем, что из неравенства (3) вытекает (1). Зафиксируем z, придав ему значение $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда $x + y = \varphi$, $y = \varphi - x$, и

$$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin y}{y} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin(\varphi - x)}{\varphi - x} > \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Еще раз пользуясь (3), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin y}{y}\frac{\sin z}{z} > \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\frac{\pi}{2} - \varphi} > \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi},$$

и, обратившись к (2), приходим к тому, что

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma} > \frac{1}{\pi},$$

а это равносильно неравенству (1).

Таким образом, всё, что осталось, — это доказать Лемму, к чему и переходим.

Введём в рассмотрение функции

$$h(x) = \frac{\sin x}{x},\ g(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(\alpha - x)}{\alpha - x},\ x \in (0; \alpha).$$

Доопределим $h(x)$ и $g(x)$ в точках $x = 0$ и $x = \alpha$ по непрерывности, положив $h(0) = h(\alpha) = 1$, $g(0) = g(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. (Как известно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)

Согласно формуле Тейлора, существует $0 < \theta < 1$, такое что

$$h(x) = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\sin(\theta x)}{8!}x^8\right) >$$
$$> 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^6}{5040} \geq 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{5040}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 > 0.$$

Т.к. $(\alpha - x) \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то из этого следует, что $h(\alpha - x) > 0$.

$$h'(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots\right)' = -\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \frac{8}{9!}x^7 - \dots =$$
$$= x\left(-\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!}x^2 - \frac{6}{7!}x^4 + \frac{8}{9!}x^6 - \dots\right).$$

Заметим, что

$$-\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!}x^2 - x^4\left(\frac{6}{7!} - \frac{8}{9!}x^2\right) - x^8\left(\frac{10}{11!} - \frac{12}{13!}x^2\right) - \dots < -\frac{1}{3} + \frac{1}{30}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < -\frac{1}{4};$$

отсюда следует $h'(x) < -\frac{x}{4}$. Учитывая, что $(x - \alpha) < 0$, аналогично устанавливаем, что $h'(x - \alpha) > -\frac{x-\alpha}{4}$, или $h'(x - \alpha) > \frac{\alpha - x}{4}$. Это влечет неравенство

$$h'(x)h'(x - \alpha) < -\frac{x}{4} \cdot \frac{\alpha - x}{4} < 0.$$

Оценим $h''(x)$:

$$h''(x) = \left(-\frac{2}{3!}x + \frac{4}{5!}x^3 - \frac{6}{7!}x^5 + \frac{8}{9!}x^7 - \dots\right)' =$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{10}x^2 - x^4\left(\frac{6\cdot 5}{7!} - \frac{8\cdot 7}{9!}x^2\right) - x^8\left(\frac{10\cdot 9}{11!} - \frac{12\cdot 11}{13!}x^2\right) - \dots <$$
$$< -\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0.$$

Аналогично устанавливается, что $h''(x - \alpha) = h''(\alpha - x) < 0$.

А теперь докажем, что функция $g(x)$ является выпуклой вверх. Т.к. $g(x) = h(x)h(\alpha - x) = h(x)h(x - \alpha)$, то

$$g''(x) = h''(x)h(x - \alpha) + 2h'(x)h'(x - \alpha) + h(x)h''(x - \alpha).$$

Из вышеприведённых выкладок следует, что каждое слагаемое последней суммы является отрицательным; значит, $g''(x) < 0$ при $x \in (0; \alpha)$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\min_{0\leq x\leq\alpha} g(x) = g(0) = g(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Таким образом,

$$g(x) > \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

при $0 < x < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Неравенство (3) доказано, а вместе с ним доказано и неравенство (1).

Доказанное неравенство было предложено автором в качестве задачи и опубликовано в журнале "Математическое Просвещение", выпуск 19 (2015), стр. 258, а в следующем выпуске 20 (2016), стр. 267, приведено её решение, принадлежащее А.А. Заславскому.

Каибханов Карахан Эйбханович,
доцент Департамента Математики ФЭН,
НИУ "Высшая Школа Экономики", Москва,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: kkaib@yandex.ru

Студентам и преподавателям математических специальностей

Параметризация и быстрый счёт в задаче о перемещении шара между пятью урнами и между произвольным числом урн

К. В. Курьянович, А. Е. Косова, С.С. Воронина, Б.А. Воронин

В работе рассматривается задача (с использованием формулы полной вероятности) о шарах черного и белого цвета в случае пяти и большего числа урн. Данная работа является продолжением нашей работы, когда задача была решена в общем виде для одной, двух, трёх и четырёх урн. Достают из урны, не глядя, один шар, и перекладывают в другую урну; в каждой урне одинаковое число шаров и по числу, и по цвету (т.е. в каждой урне общее число шаров одинаково, а также одинаково отношение числа белых шаров к числу черных). Нужно посчитать вероятность того, что в конце из последней урны достали белый шар. Получается простая формула, которая может быть легко использована преподавателями и учителями для того, чтобы задавать студентам разные задачи. Также можно после параметризации программировать данный тип задач, например, в среде Moodle.

Имеется много различных учебников по теории вероятности и математической статистике, например, в ТУСУРе (Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники) активно используется [1].

Можно отметить применение стандартных задач в образовательном процессе. Например, известна задача по расчёту вероятности при извлечении белого шара из урны, в которой находятся только белые и чёрные шары. Ответ зависит только от общего числа шаров и их отношения: сколько белых и сколько чёрных шаров. Сложнее студентам вычислить вероятность, если у нас есть две урны с одинаковым числом шаров каждого цвета; из одной урны, не глядя, переносят один шар в другую урну; спрашивается, какова вероятность достать белый шар из второй урны. Например, в нашей предыдущей работе мы параметризовали вероятность извлечения белого шара из последней урны при перемещении одного белого шара для 1-й, 2-х, 3-х и 4-х урн [2]. Ещё можно отметить разные варианты использования простых примеров задач, например, подбрасывание монетки [3]. В настоящей работе мы рассмотрим вопрос возможности обобщения одной задачи, которая раньше была решена в [2], с применением формулы полной вероятности. Данный подход может быть распространен на широкий класс задач и использован в системе Moodle.

Тривиальная задача

В работе [2] сначала рассматривалась задача для одной урны. Имеется урна, в ней 5 шаров: 2 белых и 3 чёрных. Вынимается случайным образом один шар. Требуется посчитать вероятность того, что этот шар белый (см. рис.1 и 2).

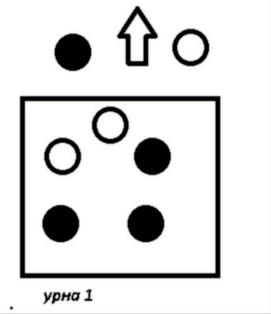


Рис.1. Одна урна, в ней 5 шаров, 3 черных и 2 белых

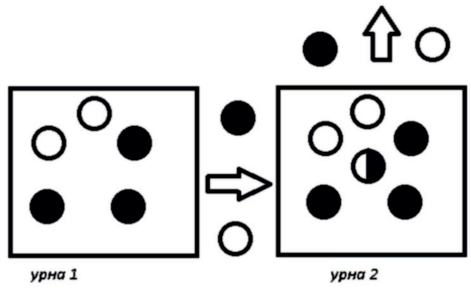


Рис.2. Две урны, в каждой по 5 шаров - 3 черных и 2 белых в каждой, и во 2-ую урну добавили 1 шар

Решение тривиальное, $P(A) = 2/5$. A — "из урны достали белый шар". В целом, для одной урны понятно, что решение можно записать в виде $P(A) = n/(n+m)$, где n — число белых шаров, m — число черных шаров, а $n+m$ число всех шаров в урне.

Для случая 2-х, 3-х и 4-х урн нужно уже записывать гипотезы, что из первой урны взяли белый шар и переложили во вторую, или из первой урны взяли чёрный шар и переложили во вторую урну и все аккуратно считать. Тут необходимо использовать формулу полной вероятности (1):

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i). \tag{1}$$

Для случая 2-х урн нас интересует вероятность, что из второй урны достали белый шар, а какой переложили из первой во вторую нам неизвестно (см. рис. 2).

Для решения подобных задач полезно использовать формулы быстрого умножения, и, возможно, треугольник Паскаля.

Для частных (имеется в виду конкретные количества черных и белых шаров в каждой урне) и для общего (n белых и m черных шаров в каждой урне) случаев для 2-х, 3-х и 4-х урн было показано, что ответ будет одинаковым. Т.е., например, для случая 4-х урн нас интересует вероятность того, что из четвёртой урны достанут белый шар, притом, что до этого из первой урны не глядя, достали шар и переложили во вторую, из второй в третью и из третьей в четвёртую. Теперь вопрос: какова вероятность достать из 4-й урны белый шар? Важно отметить, что во всех урнах одинаковое число шаров по числу и цвету.

В работе [2] было показано, что для 1-й, 2-х, 3-х и 4-х урн, вероятность будет одинаковая: $P(A) = n/(n+m)$. Это было показано и для частных случаев, и в общем случае.

Для упрощения работы с гипотезами предложено использовать бинарный код, 0 или 1. Из первой урны достали белый шар — 1, достали чёрный шар — 0. Это оказалось весьма удобным. Встаёт вопрос, будет ли это работать для случая 5-и урн в частном и общем случаях, а также, можно ли это решение экстраполировать на произвольное число урн.

Задача про 5 урн

Попробуем обобщить результат на случай 5-и урн.

Итак, имеется 5 урн, n — белых, m — чёрных шаров в каждой. "1"(n) достали белый шар, "0"(m) — достали чёрный шар, тогда получается 16 гипотез. В последней колонке таблицы, в конце кода только 1, так как мы считаем вероятность достать только белый шар из 5-ой урны. Сначала решим задачу для конкретного случая, 5 урн и в каждой 2 белых и 3 чёрных. Для случая 1, 2, 3 и 4 урн мы решали задачу ранее в работе [2].

Первая гипотеза — из первой урны во вторую перекладываем белый шар, вторая гипотеза — чёрный шар. $P(H_1) = 2/5$, $P(H_2) = 3/5$.

Далее при выборе шара из второй урны в третью у нас есть уже 4 гипотезы по цвету шаров (11, 10, 01, 00).

$P(H_3/H_1)$ — вероятность вытащить белый шар и $P(H_4/H_1)$ — вероятность вытащить чёрный шар при добавлении из первой урны белого шара, $P(H_3/H_2)$ — вероятность вытащить белый и $P(H_4/H_2)$ — вероятность вытащить чёрный шар при добавлении из первой чёрного.

Тогда

$P(H_3/H_1) = 2/5 \cdot 3/6 = 1/5$, $P(H_4/H_1) = 2/5 \cdot 3/6 = 1/5$, $P(H_3/H_2) = 2/5 \cdot 3/6 = 1/5$, $P(H_4/H_2) = 3/5 \cdot 4/6 = 2/5$.

Следующий этап: при добавлении шара из третьей в четвёртую возникает уже 8 гипотез (111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000). В дальнейшем, для учета нескольких гипотез мы будем использовать не прямой слэш "/", а запятую ",". Хотя это решение дискуссионное, но запись так кажется короче и понятнее.

$P(H_5, H_3, H_1)$ — вероятность вытащить белый шар при добавлении из 11, $P(H_6, H_3, H_1)$ — вероятность вытащить чёрный шар при добавлении из 11. Аналогично вероятности $P(H_5, H_4, H_1)$ и $P(H_6, H_4, H_1)$ — при добавлении из 10, $P(H_5, H_3, H_2)$ и $P(H_6, H_3, H_2)$ — при добавлении из 01, $P(H_5, H_4, H_2)$ и $P(H_6, H_4, H_2)$ — при добавлении из 00.

$P(H_5, H_3, H_1) = 2/5 \cdot 3/6 \cdot 3/6 = 1/10(111)$, $P(H_6, H_3, H_1) = 2/5 \cdot 3/6 \cdot 3/6 = 1/10(110)$, $P(H_5, H_4, H_1) = 2/5 \cdot 3/6 \cdot 2/6 = 1/15(101)$, $P(H_6, H_4, H_1) = 2/5 \cdot 3/6 \cdot 4/6 = 2/15(100)$, $P(H_5, H_3, H_2) = 3/5 \cdot 2/6 \cdot 3/6 = 1/10(011)$, $P(H_6, H_3, H_2) = 3/5 \cdot 2/6 \cdot 3/6 = 1/10(010)$, $P(H_5, H_4, H_2) = 3/5 \cdot 4/6 \cdot 2/6 = 2/15(001)$, $P(H_6, H_4, H_2) = 3/5 \cdot 4/6 \cdot 4/6 = 4/15(000)$.

Последний этап: при добавлении шара из четвёртой в пятую возникает уже 16 гипотез (1111, 1110, 1101, 1100, 1011, 1010, 1001, 1000, 0111, 0110, 0101, 0100, 0011, 0010, 0001, 0000).

$P(H_7, H_5, H_3, H_1)$ — вероятность вытащить белый шар при добавлении из 111, $P(H_8, H_5, H_3, H_1)$ — вероятность вытащить чёрный шар при добавлении из 111.

Аналогичным образом рассчитываются вероятности во всех остальных случаях: $P(H_7, H_6, H_3, H_1)$ и $P(H_8, H_6, H_3, H_1)$ для 110, $P(H_7, H_5, H_4, H_1)$ и $P(H_8, H_5, H_4, H_1)$ для 101, $P(H_7, H_6, H_4, H_1)$ и $P(H_8, H_6, H_4, H_1)$ для 100, $P(H_7, H_5, H_3, H_2)$ и $P(H_8, H_5, H_3, H_2)$ для 011, $P(H_7, H_6, H_3, H_2)$ и $P(H_8, H_6, H_3, H_2)$ для 010, $P(H_7, H_5, H_4, H_2)$ и $P(H_8, H_5, H_4, H_2)$ для 001, $P(H_7, H_6, H_4, H_2)$ и $P(H_8, H_6, H_4, H_2)$ при добавлении из 000.

Последний необходимый этап — нахождение вероятности вытащить белый шар из 5-й урны:

$$P(A/H_7) = 3/6, P(A/H_8) = 2/6,$$

где H_7 — "переложили белый шар из 4-й урны в 5-ю", а H_8 — "переложили чёрный шар из 4-й урны в 5-ю".

Теперь нам нужно перемножить все значения по соответствующим строкам и сложить, используя ту же формулу (1).

Полная вероятность рассчитывается по формуле

$P(A) = P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_5, H_3, H_1) + P(A/H_8)P(H_8, H_5, H_3, H_1) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_6, H_3, H_1) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_6, H_3, H_1) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_5, H_4, H_1) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_5, H_4, H_1) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_6, H_4, H_1) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_6, H_4, H_1) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_5, H_3, H_2) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_5, H_3, H_2) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_6, H_3, H_2) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_6, H_3, H_2) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_5, H_4, H_2) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_5, H_4, H_2) + P(A/H_7) \cdot P(H_7, H_6, H_4, H_2) + P(A/H_8) \cdot P(H_8, H_6, H_4, H_2)$.

Подставим значения:

$P(A) = 1/2 \cdot 1/20 + 1/3 \cdot 1/20 + 1/2 \cdot 1/30 + 1/3 \cdot 1/15 + 1/2 \cdot 1/30 + 1/3 \cdot 1/30 + 1/2 \cdot 2/45 + 1/3 \cdot 4/45 + 1/2 \cdot 1/20 + 1/3 \cdot 1/20 + 1/2 \cdot 1/30 + 1/3 \cdot 2/30 + 1/2 \cdot 1/15 + 1/3 \cdot 1/15 + 1/2 \cdot 4/45 + 1/3 \cdot 8/45 = 1/40 + 1/60 + 1/60 +$

$1/45+1/60+1/90+2/90+4/135+1/40+1/60+1/60/+2/90+1/30+1/45+4/90+8/135 = 24/60 = \mathbf{2/5}$ (!)

У нас опять получился тот же результат $2/5$, как и значения из первых примеров.

Можно отметить, что в общем случае для k урн количество гипотез равно 2^{k-1}.

Теперь нам нужно решить задачу для любого одинакового числа шаров в урнах, с учётом того, что $n > 1$ и $m > 1$, кроме того n и m ограничены общим количеством шаров в урне.

Если добавляется шар нужного белого цвета (в 4 столбце код 1), то в знаменателе будет $(n + 1)$; если шар чёрного цвета (в 4 столбце код 0), то в знаменателе будет n.

Для 5-ти урн уже будет 16 гипотез, в общем виде гипотезы представлены в таблице 1, а условные вероятности $P(A, H_i)$ представлены в таблице 2. Но для нас актуальны только 8 гипотез, так как мы считаем случай, что достали из пятой урны белый шар.

Таблица 1

Гипотезы для 5-и урн, n белых и m черных в каждой.

H_i	$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 5$
H_1	$n/(n+m)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$
H_2	$n/(n+m)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$
H_3	$n/(n+m)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$
H_4	$n/(n+m)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$
H_5	$n/(n+m)$	$m/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$
H_6	$n/(n+m)$	$m/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$
H_7	$n/(n+m)$	$m/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$
H_8	$n/(n+m)$	$m/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$
H_9	$m/(n+m)$	$n/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$
H_{10}	$m/(n+m)$	$n/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$
H_{11}	$m/(n+m)$	$n/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$
H_{12}	$m/(n+m)$	$n/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$
H_{13}	$m/(n+m)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$	$(n+1)/(n+m+1)$
H_{14}	$m/(n+m)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$	$m/(n+m+1)$
H_{15}	$m/(n+m)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$n/(n+m+1)$
H_{16}	$m/(n+m)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$	$(m+1)/(n+m+1)$

Таблица 2

Условные вероятности $P(A|H_i)$ для 5 урн, n белых и m черных.

H_i	$P(A/H_i)$	Код $0-1$
Для нечетных H_1, H_3, H_5, H_7, H_9, H_{11}, H_{13} и H_{15}	$(n+1)/(n+m+1)$	11111, 11011, 10111, 10011, 01111, 01011, 00111 и 00011
Для четных H_2, H_4, H_6, H_8, H_{10}, H_{12}, H_{14}, H_{16}	$n/(n+m+1)$	11101, 11001, 10101, 10001, 01101, 01001, 00101 и 00001

Получается в итоге тот же результат, что и в случае 1-й, 2-х ,3-х и 4-х урн. В случае, если число шаров в урнах отличается (по числу шаров и/или по числу цветов), то необходимо всё считать строго по формуле полной вероятности (1).

А если урн много, больше 5-и?

Как было показано выше, для случая числа урн от 1 до 5 всё хорошо работает. Но возникает вопрос: будет ли это работать для произвольного числа урн? Метод математической индукции, предложенный арабскими математиками около 1000 лет назад, сформулированный для европейцев Блезом Паскалем в 1665 году [4, 5], вполне подходит для такого исследования. В математических дисциплинах данный метод и сейчас широко используется, например в [6]. Интересно его применить к реальной, а не учебной задаче.

Кратко суть сформулирована в [6] следующим образом:

Пусть $P(n)$ есть некоторое высказывание, определённое для всех натуральных n и при каждом n принимающее значения “истина” или “ложь”. Если выполнены два условия:

1) $P(1)$ истинно (база индукции);

2) $P(2)$ [иногда полезно проверить для 3,4 и 5] истинно (база индукции); — это не обязательный шаг

3) Для каждого n из того, что $P(n)$ истинно следует, что $P(n+1)$ истинно (шаг индукции).

4) Тогда $P(n)$ истинно для всех натуральных n.

Также можно отметить, что иногда проверку стоит сделать не только для единичного случая, но и для бóльших n. Например, как у нас было ранее сделано для 2, 3, 4 и 5.

1. Постановка задачи

Имеется k урн. В каждой урне изначально одинаковое количество шаров: m чёрных, n белых.

Процесс:

1. Из урны 1 берём один случайный шар и кладём в урну 2.

2. Из урны 2 (куда уже добавился этот шар) берём один случайный шар и кладём в урну 3. И так далее до урны k: из урны $k-1$ взяли шар, переложили в урну k.

Наконец, из k-й урны наудачу извлекаем один шар. Нужно найти вероятность того, что шар, извлечённый из k-й урны, окажется белым.

Наше предположение, что вероятность вынуть шар из k-ой урны равна n/N, где $N = m + n$.

2. Обозначения

Пусть B_i — событие “извлечённый из i-й урны шар (в процессе перекладывания) — белый”.

Пусть $W_i = P(B_i)$ — вероятность этого события. Обратим внимание: после перекладывания шар попадает в следующую урну, значит, состав следующей урны меняется, но общее число шаров в каждой урне перед её собственным извлечением одинаково.

Изначально в каждой урне: m чёрных, n белых, всего шаров $N = n + m$.

3. Процесс по шагам:

До начала процесса:

Урна 1: $m-$ч, $n-$б, $W_1 = P(B_1) = n/N$

Урна 2: $m-$ч, $n-$б

...

Шаг 1: Из урны 1 выбираем случайный шар и кладём в урну 2.

Теперь в урне 2: либо m ч и $n+1$ б (если переложили белый), либо $m+1$ ч и n б (если переложили чёрный).

Шаг 2: Вынимаем из урны 2 случайный шар.

Перед этим вынманием в урне 2 стало $N + 1$ шар. Вероятность вынуть белый равна:

$$W_2 = P(B_2) = \frac{n(n+1)+nm}{N(n+1)} = \frac{n(n+1+m)}{N(n+1)} = \frac{n(N+1)}{N(n+1)} = \frac{n}{N} \tag{2}$$

Шаг.3. Гипотеза и доказательство.

$W_1 = W_2$. Теперь делаем предположение, что вероятность извлечь белый шар из k-ой урны после $k-1$ перекладываний шаров между урнами с одинаковым числом шаров по цветам тоже равна $W_k = P(B_k) = n/N$. Нам нужно теперь доказать, что $W_{k+1} = P(B_{k+1}) = n/N$.

В k-ой урне всего $N + 1$ шар. Вероятность извлечь белый шар из k-ой урны получается $W_k = P(B_k) = n/N$, вероятность извлечь чёрный шар $1 - W_k = 1 - P(B_k) = 1 - n/N = m/N$.

$$W_{k+1} = P(B_{k+1}) = W_k \frac{n+1}{N+1} + (1 - W_k)\frac{n}{N+1} = \frac{n}{N} \tag{3}$$

Ч.т.д., как пишут некоторые преподаватели математики.

Шаг.4. Т.е. мы доказали, в предположении верности k-ого шага, что для $k+1$, утверждение истинно. Таким образом, данное решение верно для произвольного числа шаров равных по цвету и при произвольном количестве урн, между которыми перекладывается ровно один шар.

Вероятно, возможны и другие доказательства. Но мы использовали математическую индукцию.

Получается, что, если число шаров в каждой урне одинаково и по числу, и по цвету, то каждому ученику можно выдать персональную задачу, например, про 3 урны. Также мы показали, что результат будет такой же для случая с произвольным числом шаров. Допустим, номер в списке ученика или студента будет обозначать число белых шаров, а число черных шаров будет фиксированным, например, 10, и всё. Таким образом, преподаватель имеет возможность проверить ответы устно. Это легко сгенерировать, легко подсчитать преподавателю и легко проверить. Данная формула $n/(n+m)$ позволяет легко программировать данный тип задач в среде Moodle.

Благодарности

Работа выполнена частично в рамках ГЗ ИОА СО РАН. Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры математики ТУСУР проф. В.И. Старикову и доценту А.А. Ельцову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Магазинников Л.И. Высшая математика IV. Теория вероятностей: учебное пособие. - Томск: Томский университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. - 151 с.

[2] Воронин Б.А. О возможности параметризации и быстрого счета в одной задаче на формулу полной вероятности // Современное образование: повышение конкурентоспособности университетов. Материалы международной научно-методической конференции, в 2 частях, Томск, 28–29 января 2021 года. Том 1. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2021.

[3] Воронин Б.А., Воронин Я.Б. Расчет выпадения орла или решки на примере опытов с монетой в 1 рубль // Современные тенденции развития непрерывного образования: вызовы цифровой экономики. Материалы международной научно-методической конференции, Томск, 30-31 января 2020 года - Томск: Изд-во ТУСУР, 2020. - С. 218–219.

[4] Pascal Blaise. Traité du triangle arithmétique. - 1654. 5 (publié en 1665)

[5] Descotes Dominique. Sur la genése du Traité du *Triangle arithmé-tique* // Courrier Blaise Pascal. - 41-42. - 2020. - P. 155-180; Descotes Dominique. Sur la genèse du Traité du Triangle arithmétique // Courrier Blaise Pascal. - 41-42. - 2020.

URL: http://journals.openedition.org/cbp/387

[6] Введение в математический анализ. Индивидуальные домашние задания. сост. Галанова Н.Ю., Зюбин С.А. - Томск: Томский гос. ун-т, 2023. - 63 с.

URL: http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001130904

Курьянович Ксения Викторовна,
старший преподаватель кафедры АСУ
ТУСУР, инженер ИОА СО РАН имени
академика В.Е. Зуева.

E-mail: kseniia.v.kurianovich@tusur.ru

Косова Анастасия Евгеньевна,
старший преподаватель кафедры АСУ ТУСУР.

E-mail: kosova_ae@mail.ru

Воронина Светлана Станиславовна,
учитель математики ОГБОУ "Томский физико-технический лицей", г.Томск
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: Svet_lana_voronina@mail.ru

Воронин Борис Александрович,
снс Института оптики атмосферы имени академика В.Е. Зуева СО РАН, доцент кафедры АСУ ТУСУР, Томск,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: vba_iao@mail.ru

К вопросу о главной части функции Грина основных уравнений математической физики в N-мерном случае

С. О. Гладков

Приведен алгоритм подробных вычислений главной части функций Грина для неоднородного N-мерного уравнения теплопроводности, уравнения Пуассона и волнового уравнения. Проанализированы некоторые предельные случаи полученных решений и, в частности, показано, что при переходе от уравнения теплопроводности к статическому случаю, функция Грина плавно переходит в функцию Грина уравнения Пуассона. Отмечены также некоторые физические аспекты пространственной и временной локальности.

1. Введение

Вопрос, на котором мы хотели бы остановиться в настоящей работе, относится к общим классическим задачам математической физики. Дело в том, что при внимательном знакомстве с известными монографиями, посвященных уравнениям в частных производных ([1] – [7], см. также работу [8]), мы не обнаружили в них подробностей вывода функции Грина для уравнений, как параболического, так и гиперболического и эллиптического типов в произвольном N-мерном случае.

С нашей точки зрения было бы полезно привести соответствующее подробное вычисление, а также проанализировать некоторые предельные случаи общих формул в N-мерном евклидовом пространстве. Приведенная ниже методика вычислений будет полезна не только студентам физико–математических специальностей в плане их более детального знакомства с отдельными тонкостями, как математического, так и чисто физического решения поставленной задачи, но и преподавателям.

Решение этих задач мы начнем с уравнения Фурье.

2. Функция Грина для уравнения теплопроводности

Начнем с трехмерного случая. В стандартном представлении неоднородное уравнение теплопроводности в трехмерном декартовом пространстве имеет хорошо известный вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \Delta u + f(\mathbf{r}, t), \tag{1}$$

где χ — коэффициент температуропроводности, а $f(\mathbf{r}, t)$ — заданная функция на некотором ограниченном множестве, включая также поверхность x, y, $z \in V$, Σ_V.

Функция Грина для уравнения (1) должна подчиняться тождеству

$$\hat{L}G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'), \tag{2}$$

где линейный оператор

$$\hat{L} = \chi\triangle - \frac{\partial}{\partial t},$$

а $\delta(x)$ — дельта-функция.

Будем решать уравнение (2) с помощью разложения в интеграл Фурье. Имеем

$$G(R, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{\omega,\mathbf{q}} e^{-i\omega\tau + i\mathbf{qR}} d\omega d^3q, \tag{3}$$

где $G_{\omega,\mathbf{q}}$ — Фурье-образ функции Грина.

$$\delta(\tau,\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau+i\mathbf{qR}}d\omega d^3q, \tag{4}$$

и введены сокращенные обозначения

$$\tau = t - t',\ \ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}',\ \ R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \tag{5}$$

Подстановка разложений (3) и (4) в уравнение (2) немедленно приводит к искомому решению для Фурье-образа функции Грина

$$G_{\omega,\mathbf{q}} = \frac{1}{i\omega - \chi q^2}. \tag{6}$$

Подстановка решения (6) в определение (3) дает

$$G(R,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau+i\mathbf{q}}}{i\omega - \chi q^2}d\omega d^3q. \tag{7}$$

Внутренний интеграл по частоте легко вычислить с помощью теории вычетов. Действительно, имеем

$$J_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau+i\mathbf{q}}}{i\omega-\chi q^2}d\omega = \frac{1}{i}\oint\limits_c \frac{e^{-iz\tau}}{z+i\chi q^2}dz = 2\pi res\left[\frac{e^{-iz\tau}}{z+i\chi q^2},\ z=-i\chi q^2\right] = 2\pi e^{-i\chi q^2\tau}. \tag{8}$$

Подстановка (8) в (7) приводит нас к следующему ответу

$$G(R,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi q^2\tau+i\mathbf{qR}}d^3q.$$

После перехода в сферическую систему координат с полярной осью, направленной вдоль вектора $\mathbf{R}$, отсюда следует, что

$$G(R,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\chi q^2|\tau|+i\mathbf{qR}}d^3q = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_0^{\infty} q^2e^{-\chi q^2|\tau|}dq\int\limits_0^{\pi} e^{iqR\cos\theta}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{\infty} q^2e^{-\chi q^2|\tau|}dq\left(\frac{-e^{iqR\cos\theta}}{iqR}\right)|_0^{\pi} = \frac{2}{(2\pi)^2R}\int\limits_0^{\infty} q\sin qRe^{-\chi q^2|\tau|}dq = \int\limits_0^{\infty} e^{-\chi q^2|\tau|}\cos qR =$$

$$= -\frac{e^{-\frac{R^2}{4\chi|\tau|}}}{(4\pi\chi|\tau|)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, искомая функция Грина для уравнения теплопроводности есть

$$G(R,\tau) = -\frac{e^{-\frac{R^2}{4\chi|\tau|}}}{(4\pi\chi|\tau|)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9}$$

Строгое математическое доказательство того, что функция (9) является функцией Грина, основано на самом уравнении (2). В самом деле, если его проинтегрировать по t, то в результате приходим к следующему соотношению

$$\chi\triangle\int\limits_{-\infty}^{\infty}Gdt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial G}{\partial t}dt=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{10}$$

Второй интеграл в левой части уравнения (10) приводится к выражению

$$G\,\big|_{-\infty}^{\infty}$$

которое, согласно решению (9), тождественно обращается в нуль.

Таким образом, уравнение (10) автоматически трансформируется в такое:

$$\triangle\overline{G}=\frac{1}{\chi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{11}$$

где функция Грина для уравнения Пуассона (11) в результате несложного интегрирования определяется, как

$$\overline{G}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Gdt=-2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{\frac{R^2}{4\chi|\tau|}}}{(4\pi\chi|\tau|)^{\frac{3}{2}}}dr=-\frac{1}{4\pi\chi R}. \tag{12}$$

То есть, как и должно быть, функция Грина для уравнения Пуассона обратно пропорциональна R.

Следовательно, поскольку $\overline{G}$ — функция Грина, то автоматически отсюда следует, что и G также является функцией Грина.

Однако, возвращаясь к уравнению (2), мы убеждаемся, что при $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ левая часть согласно решению (9) будет равна $\frac{-1}{(4\pi\chi|\tau|)^{\frac{3}{2}}}$, а правая обращается в бесконечность из-за наличия дельта–функции $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Естественным образом здесь вполне законно возникает вопрос об этом противоречии.

На самом же деле все довольно просто. В самом деле, поскольку дельта–функция впервые была введена в рассмотрение П. Дираком, исходя из чисто физических соображений, то фактически они базировались на ее определении через функцию Лоренца.

Действительно, имеем для нее

$$\lim_{l\to 0}\frac{l}{\pi(x^2+l^2)}=\delta(x), \tag{13}$$

где параметр l — длина свободного пробега некоторой частицы (или квазичастицы).

В газокинетическом приближении длина свободного пробега определяется с помощью соотношения

$$l\approx\sqrt{\chi\tau'}, \tag{14}$$

где коэффициент температуропроводности оценивается с помощью формулы

$$\chi\approx\frac{l\overline{\mathrm{v}}}{3}=\frac{\overline{\mathrm{v}}^2\tau'}{3}, \tag{15}$$

где $\overline{\mathrm{v}}$ — средняя тепловая скорость частицы, а τ' — время ее пробега, определяемого с помощью соотношения $\tau'=\frac{l}{\overline{\mathrm{v}}}$.

То есть, формула (9) означает, что поскольку $R>l$, то стремление R к нулю должно быть позднее, чем стремление к нулю длины свободного пробега l. В результате при $l\to 0$ функция Грина будет стремиться к бесконечности, как и правая часть, определяемая дельта–функцией.

Что, таким образом, и снимает последнее возникшее противоречие.

В результате решение неоднородного уравнения (1) можно записать как

$$u(\mathbf{r},t)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{V}G(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')f(\mathbf{r}'-t')dt'dV'=-\frac{1}{(4\pi\chi)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{V}\frac{e^{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4\chi|t-t'|}}}{|t-t'|^{\frac{3}{2}}}f(\mathbf{r}'-t')dt'dV'. \tag{16}$$

Обобщение решения (7) на N-мерный случай вполне очевидно. В самом деле, имеем

$$G(R,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^{N+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau+i\mathbf{qR}}}{i\omega-\chi q^2}d\omega d^Nq. \tag{17}$$

А в соответствии с (8) получаем

$$G(R,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^{N+1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau+i\mathbf{qR}}d^Nq. \tag{18}$$

Переход к сферической N — мерной системе координат позволяет переписать решение (18) следующим образом

$$G(R,\tau)=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N+1}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}q^{N-1}dq\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\dots\int\limits_{0}^{\pi}e^{iqR\cos\psi}\sin\psi d\psi\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{N-2}d\theta_1d\theta_2\dots\theta_{N-2}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi$$

Отсюда сразу же следует, что

$$G(R,\tau)=\frac{2\pi\cdot2^{N-2}}{(2\pi)^N}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}q^{N-1}dq\int\limits_{0}^{\pi}e^{iqR\cos\psi}\sin\psi d\psi=$$

$$=\frac{4\pi\cdot2^{N-2}}{(2\pi)^NR}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}q^{N-2}\sin qRdq=\frac{1}{\pi^{N-1}R}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}q^{N-2}\sin qRdq. \tag{19}$$

Получившийся интеграл нетрудно вычислить с помощью довольно удобного правила дифференцирования по параметру. Действительно, имеем

$$G(R,\tau)=-\frac{1}{4\pi^{N-1}R}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}q^{N-2}\sin(qR)dq=-\frac{(-1)^{N-2}}{4\pi^{N-1}R}\frac{\partial^{N-2}}{\partial R^{N-2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}\cos(qR)dq. \tag{20}$$

Поскольку фигурирующий здесь интеграл вычисляется довольно элементарно, а именно

$$\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\chi q^2\tau}\cos(qR)dq=\sqrt{\frac{\pi}{\chi\tau}}e^{\frac{R^2}{4\chi\tau}}, \tag{21}$$

то функция Грина в N-мерном случае согласно (20) и с учетом ответа (21) будет

$$G(R,\tau)=-\frac{(-1)^{N-2}}{4\pi^{N-1}R}\sqrt{\frac{\pi}{\chi\tau}}\frac{\partial^{N-2}}{\partial R^{N-2}}\left(e^{-\frac{R^2}{4\chi\tau}}\right). \tag{22}$$

В случае, если $N=3$ из (22) сразу же следует формула (9), то есть

$$G(R,\tau)=-\frac{e^{-\frac{R^2}{4\chi\tau}}}{(4\pi\chi|\tau|)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Функция Грина уравнения Пуассона в N-мерном случае

Согласно общему определению [1] уравнение Пуассона можно записать как

$$\triangle u = f(\mathbf{r}). \tag{23}$$

В трехмерном случае (также, как и в N-мерном) функция Грина для него подчиняется уравнению

$$\triangle G_3(R) = \delta(\mathbf{R}), \tag{24}$$

из которого, если воспользоваться интегральными преобразованиями Фурье, следует, что

$$G_3(R) = -\frac{1}{4\pi R}, \tag{25}$$

где, напомним, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

В четырехмерном случае абсолютно идентично имеем

$$\triangle_4 G_4 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(x_4 - x_4'), \tag{26}$$

где $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ и аналогично $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$.

Если теперь проинтегрировать уравнение (26) по x_4 в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, то мы автоматически приходим к уравнению (18). Действительно,

$$\triangle_3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_4 dx_4 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G_4}{\partial x_4^2} dx_4 = \delta(\mathbf{R}). \tag{27}$$

Второй интеграл от полного дифференциала в левой части дает нуль, поскольку функция Грина вместе со всеми своими производными на бесконечности стремится к нулю. А это означает, что

$$G_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_4 dx_4. \tag{28}$$

Удивительно простое интегральное уравнение (28) позволяет нам без труда вычислить интересующую нас функцию G_4.

В самом деле, благодаря ответу (25), имеем

$$\frac{1}{4\pi R} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_4 dx_4. \tag{29}$$

Ищем решение этого уравнения в единственно возможном виде

$$G_4 = -\frac{a}{R^2 + (x_4 - x_4')^2}, \tag{30}$$

где a — некоторая константа, которую нетрудно найти из уравнения (29). Подставив (30) в (29), имеем

$$\frac{1}{4\pi R} = a \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_4}{R^2 + (x_4 - x_4')^2} = \frac{\pi a}{R}.$$

Откуда

$$a = \frac{1}{4\pi^2}. \tag{31}$$

И, следовательно, после подстановки (31) в (30), приходим к интересующему нас ответу для функции Грина в четырехмерном случае

$$G_4(R) = -\frac{1}{4\pi^2 R^2}, \tag{32}$$

где

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 + (x_4 - x_4')^2}$$

.

При $N = 5$ вполне идентично находится функция Грина и в пятимерном случае.

Опираясь на алгоритм (29) – (31), получаем

$$G_5(R) = -\frac{1}{8\pi^2 R^3}, \tag{33}$$

где

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 + (x_4 - x_4')^2 + (x_5 - x_5')^2}$$

.

Поэтому вполне аналогично при $N = 6$ имеем

$$G_6(R) = -\frac{1}{4\pi^3 R^4}.$$

При $N = 7$

$$G_7(R) = -\frac{3}{16\pi^3 R^5}$$

При $N = 8$

$$G_8(R) = -\frac{1}{4\pi^4 R^6}$$

При $N = 9$

$$G_9(R) = -\frac{15}{32\pi^4 R^7}$$

и т.д.

Полученные формулы позволяют без труда написать общий алгоритм вычисления функции Грина в N мерном случае.

Для четных $N = 2n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$G_N(R) = -\frac{1}{4\pi^{\frac{N}{2}} R^{N-2}}, \tag{34а}$$

где

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2 + (x_4 - x_4')^2 + \ldots (x_N - x_N')^2}$$

.

Для нечетных $N = 2n + 1$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$G_{2n+1} = -\frac{(2n-3)!!}{2(2\pi)^n R^{2n-1}}. \tag{34б}$$

Таким образом, общее рекуррентное соотношение для вычисления функции Грина в N-мерном евклидовом пространстве есть

$$G_{N-1}(R) = \int_{-\infty}^{\infty} G_N(R, x_n - x_N')dx_N \tag{35}$$

или

$$G_3(R) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_N(R, x_4 - x'_4, x_5 - x'_5, x_6 - x'_6, \dots x_N - x'_N)dx_4dx_5\dots dx_N. \tag{36}$$

4. Уравнение Даламбера в N-мерном случае

Согласно общепринятому определению (см. [1] – [3]) волновое уравнение записывается в виде

$$\Box u = f(\mathbf{x}, t), \tag{37}$$

где оператор Даламбера

$$\Box = \triangle - \frac{1}{\mathtt{v}_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{38}$$

$\mathtt{v}_0$ — скорость волны.

В N-мерном случае

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{39}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N).$$

Поэтому, чисто формально, считая пространство N-мерным, где дополнительная координата обязана временной компоненте, то есть, переходом к мнимой переменной $x_N = i\,\mathtt{v}_0 t$, решение (34) в случае нечетных $N = 2n + 1$ следует записать как

$$G_{2n+1} = -\frac{(2n-3)!!}{2(2\pi)^2}R^{2n-1}, \tag{40a}$$

а в случае четных $N = 2n$

$$G_N(R) = -\frac{1}{4\pi^{\frac{N}{2}}R^{N-2}}, \tag{40$б$}$$

где после очевидной замены $x_N = i\,\mathtt{v}_0 t$ имеем

$$R = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2 + \ldots (x_{N-1} - x'_{N-1})^2 - \mathtt{v}_0^2(t - t')^2}. \tag{41}$$

И, таким образом, решение уравнения (37) в общем виде может быть записано теперь следующим образом.

Для четных $N = 2n$

$$u = (\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathtt{v}_0}{4\pi^{\frac{N}{2}}} \to$$

$$\to \int\limits_{\Omega_N}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{x}', t')d\Omega'_{N-1}dt'}{\left[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2 + \ldots (x_{N-1} - x'_{N-1})^2 - \mathtt{v}_0^2(t - t')^2\right]^{\frac{N}{2}-1}} \tag{42a}$$

Для нечетных $N = 2n + 1$

$$u = (\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathtt{v}_0(N-2)!!}{2(2\pi)^{\frac{N-1}{2}}} \to$$

$$\to \int\limits_{\Omega_N}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{x}', t')d\Omega'_{N-1}dt'}{\left[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 + (x_4 - x'_4)^2 + \ldots (x_{N-1} - x'_{N-1})^2 - \mathtt{v}_0^2(t - t')^2\right]^{\frac{N}{2}-1}} \tag{42$б$}$$

Отсюда, в частности видно, что в трехмерном случае ($N = 3$, третья координата – время) оно переходит в такое решение

$$u = (\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathtt{v}_0}{4\pi} \int\limits_{\Omega_N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{x}', t')dx'dy'dt'}{(x-x')^2 + (y-y')^2 - \mathtt{v}_0^2(t-t')^2}. \tag{43}$$

А в четырехмерном случае ($N = 4$, четвертая координата – время)

$$u = (\mathbf{x}, t) = -\frac{\mathtt{v}_0}{4\pi^2} \int\limits_{\Omega_N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{x}', t')dx'dy'dz'dt'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - \mathtt{v}_0^2(t-t')^2\right]}. \tag{44}$$

Если временну́ю координату убрать, то решение должно иметь вид (34). То есть, при $N = 3$ функция Грина $G = -\frac{1}{4\pi R}$.

Стоит также заметить, что на двумерном множестве (без временной координаты) формула (34) “не работает”, и в этом случае вычисления следует производить отдельно (см. [8]), что приводит к безразмерному ответу $G = -\frac{1}{2\pi} \ln R$.

5. Заключение

Заканчивая настоящее сообщение, отметим

1. Подробно продемонстрировано решение неоднородного уравнения теплопроводности с помощью строго найденной функции Грина в N-мерном случае;

2. Рассмотрен предельный переход к уравнению Пуассона;

3. Дана физическая интерпретация идентичности поведения левой и правой частей уравнения для функции Грина;

4. Приведено общее решение неоднородного волнового уравнения в N-мерном случае.

Литература

[1] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 712 с.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 256 с.

[3] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1999. - 799 с.

[4] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4, ч.2. - М.: Наука, 1981. - 551 с.

[5] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высшая школа, 1977. - 432 с.

[6] Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1971. - 843 с.

[7] Розендорн Э.Р., Соболева Е.С., Фатеева Г.М. Уравнения с частными производными. - М.: Физматлит, 2017. - 336 с.

[8] Gladkov S.O. On some class of solutions to the two-dimensional Laplace equation on a three dimensional manifold // Siberian Mathematical Journal. - 2024. - V. 65. - No 6. - P. 1423-1428.

Гладков Сергей Октябринович,
профессор Московского авиационного института
(национального исследовательского университета),
доктор физико-математических наук.

E-mail: sglad51@mail.ru

Структура и содержание логико-дидактического образования будущих учителей математики

В. И. Игошин

В статье обсуждается педагогическая проблема отбора содержания для логического образования будущих учителей математики. При этом логическое образование рассматривается на двух уровнях — бакалавриата и магистратуры, и состоит из двух компонентов — логической подготовки и логико-дидактической подготовки. Профессионально отобранное содержание в значительной степени обуславливает формирование логических и логико-дидактических компетенций будущих учителей. Рассматриваются вопросы развития, с помощью математики, логического мышления. Логическая подготовка должна стать системообразующим фактором во всей системе подготовки будущих учителей математики. Обучение на уровне магистратуры должно отвечать принципу преемственности и стать естественным продолжением обучения на уровне бакалавриата.

Представлен комплекс учебных и методических пособий для логической подготовки, разработанных автором на протяжении более чем 40 лет работы в педагогике высшей школы. Характеризуется ряд научно-методических статей и учебников автора, в которых обсуждаются вопросы логико-дидактической подготовки будущих учителей математики.

Введение: математика, логика, учитель. Как известно, мышление обладает двумя важнейшими неотъемлемыми качествами — интуицией и логикой. Интуиция представляет собой способность постижения истины путем прямого ее усмотрения без обоснования с помощью логически строгого доказательства (латинское слово intuitio означает “пристальное всматривание”). Таким образом, интуиция — своего рода антипод, противовес логике и строгости. Отличительной особенностью логического мышления является то, что оно от истинных посылок всегда приводит к истинному заключению, не опираясь при этом на опыт, интуицию и другие внешние факторы. По образному выражению А. Пуанкаре: “Доказывают при помощи логики, изобретают при помощи интуиции” [1]. Занятие математикой развивает как логическое, так и интуитивное мышление. Этому развитию посвящена работа автора [2].

В настоящей работе рассматриваются вопросы развития, с помощью математики, логического мышления. Это качество математики отмечал ещё Л.Н. Толстой: “Математика имеет задачей не обучение исчислению, но обучение приёмам человеческой мысли при исчислении”. Многие качества мышления, необходимые любому человеку в его будущей деятельности, в том числе и на гуманитарном поприще, формируются наиболее эффективно во время занятий математикой. Это формирование происходит в определённых, годами проверенных возрастных рамках, на определённом фактическом материале, при выполнении и фиксации интеллектуальных и практических действий, известных лишь учителям-математикам.

Чтобы учитель в процессе своей педагогической деятельности сумел реализовать этот развивающий потенциал, заложенный в учебном предмете “математика”, он должен быть к этому целенаправленно подготовлен. Процесс подготовки будущего учителя математики имеет ряд особенностей. На вузовской скамье будущий учитель математики должен не просто изучить широкий круг научных математических дисциплин, но и суметь понять, как этот научный материал будет трансформирован в содержание тех учебных математических предметов, которые ему предстоит преподавать в средней школе. Это означает, что процесс математической подготовки будущих учителей математики не может быть безотносительным, а должен быть профессионально-педагогически направлен, т.е. направлен на будущую педагогическую деятельность нынешнего студента. Подготовка может считаться успешной, если в ходе её у будущего учителя математики будет сформирована система методических взглядов, своего рода методическое кредо.

Среди математических дисциплин, изучаемых будущим учителем математики, есть одна поистине уникальная — математическая логика. Логика как наука сформировалась в Древней Греции в V – IV вв. до н.э., и её основоположником по праву считается величайший мыслитель древности Аристотель. В это же время трудами древнегреческих учёных, из которых выделяется Евклид, математика превратилась из эмпирически-описательной науки в науку доказательную, дедуктивную, т.е. приняла тот облик, который она сохраняет до настоящего времени и который выделяет математику из совокупности всех прочих наук. С этого момента логика навсегда вошла в математику и математика стала строиться по законам логики, стала логичнейшей из наук. Потребовалось более двадцати веков, чтобы произошло встречное движение. В XIX в. английский математик Дж. Буль впервые начал применять в логике математические методы, математика вошла в логику и логика стала разделом математики — математической логикой. А в 1931 г. австрийский математик К. Гёдель получил результат, ставший триумфальным для математической логики. Он доказал, образно выражаясь, что метод установления истины, общепризнанный и единственный в математике, основанный на рассуждениях в соответствии с законами логики, не является всемогущим: существует истина, которая этим методом не может быть обоснована. Круг, очерчивающий уникальность математической логики, замкнулся: математика своими собственными методами установила свою ограниченность и границы своей применимости. Это она смогла сделать только с помощью математической логики. Итак, математика и логика стали неразделимыми. Поэтому, воспитывая и формируя будущего учителя математики, невозможно не обратить особое внимание на его подготовку в области логики.

Проблемам логической подготовки будущих учителей математики посвятил автор свои исследования, которые проводились на протяжении более чем 40 лет сначала в рамках физико-математического факультета Саратовского педагогического института имени К.А. Федина, а с 1999 г. — в рамках механико-математического факультета СГУ. В результате этого исследования фактически создана оригинальная методическая система логической и логико-дидактической подготовки будущих учителей математики в педагогических вузах, важнейшим достоинством которой является её ярко выраженная профессионально-педагогическая направленность. В силу той роли, которую играет логика в математике как науке и, значит, должна играть в обучении математике, профессионально-педагогическая направленность именно логической подготовки будущих учителей математики наиболее важна в системе их подготовки. В то же время профессионально-педагогическую направленность этой части подготовки осуществить наиболее трудно, и до настоящих исследований этого сделано не было. В исследовании разработана целостная система логической и логико-дидактической подготовки будущих учителей математики, разработаны основные её элементы и указаны пути её дальнейшего совершенствования.

В настоящей работе представлены кратко основные этапы и результаты этого исследования.

Принципы логики. В процессе обучения математике происходит дидактическое взаимодействие математики и логики. Проанализировав это взаимодействие, автор выявил и обосновал принципы логики в обучении математике и в образовании учителя математики [2]. Их четыре: принцип обучения строению (структуре) математических утверждений, принцип обучения понятию доказательства математической теоремы, принцип обучения методам доказательства математических теорем, принцип обучения строению математических теорий.

Это те общие положения, связанные с логикой, которые имеют фундаментальное значение для методики обучения математике. Фундаментальность этих принципов для методики обучения математике состоит в том, что при несоблюдении их в процессе обучения математике последняя утрачивает свои основные черты как наука, т.е. те качества, которые, собственно, и выделяют её из системы прочих наук. В итоге обучаемый получает искажённое представление как об общей картине математики, так и об отдельных её деталях. Эти принципы указывают основные направления проникновения логики в педагогику математики, служат дополнением к общедидактическим принципам педагогики применительно к педагогике математики, уточняют структуру той части педагогической науки, которая связана с обучением математике и её преподаванием.

В ходе логической подготовки этим принципам логики в обучении математике даётся научное обоснование с позиций математической логики. У будущего учителя математики в процессе обучения в педагогическом вузе эти принципы должны быть сформированы под влиянием курса математической логики и других математических курсов. Математическая логика помогает обосновать применение указанных логических принципов. Студенты учатся использовать эти принципы и следовать им в процессе преподавания конкретных тем школьного курса математики. Математическая логика облегчает применение указанных логических принципов.

Формулировка концепции. Выявленные принципы логики служат основным ориентиром при создании всей системы логической и логико-дидактической подготовки будущих учителей математики. В фундаменте этой подготовки лежит профессионально-педагогически ориентированный курс математической логики. Предлагается концепция системообразующей роли этого курса в системе подготовки будущих учителей математики в педвузах. Эта концепция создаёт теоретическую основу для решения важной и актуальной практической задачи — повышения уровня логической подготовки будущих учителей математики. Существо концепции состоит в том, что, во-первых, в профессионально ориентированном курсе математической логики студенты приобретают такие знания и вырабатывают такие умения по логике, которые будут необходимы им в их будущей педагогической работе. В этом состоит этап логической подготовки будущих учителей математики. Во-вторых, от основополагающего курса математической логики понятия, идеи и методы математической логики проникают во все математические курсы педвуза — геометрии, алгебры и теории чисел, математического анализа, числовых систем, дискретной математики, теории алгоритмов, а также в курсы психолого-педагогических основ обучения математике, методики преподавания математики, истории и методологии математики. В этих курсах акцентрируется внимание студентов на тех вопросах, которые имеют принципиальное логическое значение. Тем самым завершается этап логической и начинается этап логико-дидактической подготовки будущего учителя математики. В-третьих, через педвузовские математические курсы понятия, идеи и методы математической логики естественным образом будут простираться в основания соответствующей школьной учебной математической дисциплины, которую предстоит преподавать будущим учителям. В методических же курсах педвуза демонстрируется, как именно знания логики используются в процессе преподавания конкретных разделов и тем школьного курса математики. При этом исключительно важно проанализировать с логических позиций весь школьный курс математики как в глобальном аспекте, так и в отдельных его частностях и деталях.

Именно при таком подходе к вопросам логики студенты наиболее отчетливо и зримо ощутят всепроникающее влияние логики на математику и логические знания будут заложены в фундамент научно-педагогического мировоззрения будущего учителя математики. Подобный подход к логической подготовке, конечно, требует высокой профессиональной готовности преподавателей педвузов, значительных усилий с их стороны и координации их действий, но эти усилия приведут к улучшению качества подготовки специалистов [3], [4].

Профессионально-педагогически ориентированный курс математической логики и система учебных пособий для него.

Итак, ядром логической и логико-дидактической подготовки будущих учителей математики является профессионально-педагогически направленный курс математической логики. Автор впервые познакомился с этим курсом в 1963 г., будучи учащимся 9 класса средней школы, в Юношеской математической школе при СГУ [5], созданной также по инициативе и при участии профессора В.В. Вагнера.

Курс математической логики в Саратовском государственном университете читается с 1960 г. по инициативе профессора В.В.Вагнера. Окончив Саратовский государственный университет [6], аспирантуру, автор с 1978 г. начал работать в Саратовском государственном педагогическом институте и начал сам читать курс математической логики и теории алгоритмов. Здесь и обнаружилось практи-

чески полное отсутствие учебных пособий по этим дисциплинам, пригодных для обучения будущих учителей математики. Возникла проблема создания таких учебных пособий.

Первым вышел сборник задач [7]. Он был издан в Москве тиражом 25000 экз., разошелся по всем педагогическим институтам Советского Союза и был встречен педагогическим сообществом с большим одобрением. Он реально был доступен студентам педагогических вузов, содержал задачи не только по математической логике, но и задачи, отражающие связь логики с математикой. Автор получил множество отзывов с положительной оценкой этого задачника и с пожеланиями написать к этому сборнику задач еще и учебник.

Учебник появился через 5 лет [8] и был издан в Саратове в издательстве Саратовского университета. Он был рекомендован Министерством просвещения СССР всем педагогическим вузам страны, по которым он и разошелся тиражом 3000 экз. Учебник был также написан в строгой, но доступной для понимания широкой студенческой общественностью педагогических вузов СССР форме, и также был встречен положительно. Это было мое первое поколение учебных пособий по математической логике и теории алгоритмов для педагогических вузов.

Почти двадцатилетний опыт работы с этими пособиями привел к их существенной переработке, в результате чего автором было разработано и издано второе поколение учебных пособий для будущих учителей математики по этим дисциплинам — учебник [9] и сборник задач [10]. Эти учебные пособия, выросшие из своих предшественников XX века, представляют собой учебники XXI века. Главное их достоинство — удачное сочетание фундаментальности приводимых в них знаний с доступностью изложения для современного студента. Именно это качество пособий привело к тому, что за шесть лет они выдержали в Издательском центре “Академия” (Москва) по несколько изданий. Большое число педагогических (и не только педагогических) вузов и университетов России продолжают использовать эти пособия в своём учебном процессе.

Развернувшаяся в России реформа высшего образования, переход его на двухуровневую систему (бакалавриат и магистратура), а также на компетентностную образовательную парадигму потребовал дальнейшей переработки и совершенствования пособий по курсам математической логики и теории алгоритмов. Автор выпускает третье поколение своих учебных пособий, состоящее из двух учебников [11] и [12]. Их содержание спланировано так, чтобы они могли быть использованы при обучении будущих учителей математики и информатики как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры. Что касается использования этих учебников при обучении будущих учителей математики и информатики на уровне бакалавриата и на уровне магистратуры, то соответствующие соображения высказаны автором в ряде его журнальных публикаций [13], [14].

Важным практическим дополнением к перечисленным учебным пособиям служит “Тетрадь с печатной основой по математической логике” [15].

В 2012 г. Издательский центр “Академия” (Москва) предложил автору подготовить два учебника — по математической логике и по теории алгоритмов для системы среднего профессионального образования. Такие учебники автором были написаны, и они составили четвертое поколение его учебных пособий по курсам математической логики [16] и теории алгоритмов [17].

Содержание данных учебников по сравнению с содержанием соответствующих учебников [12] и [13] отобрано более тщательно и сделано более лаконичным. Данные учебники с успехом используются не только в системе среднего профессионального образования, но и при подготовке будущих учителей математики на уровне бакалавриата.

Наконец, в 2017 г. выходит пособие, примыкающее к четвертому поколению учебных пособий автора по курсам математической логики и теории алгоритмов — сборник задач [18]. Оно представляет собой существенно переработанный и дополненный сборник задач [10] из второго поколения учебных пособий.

Все перечисленные учебники, сборники задач и учебные пособия регулярно переиздаются в издательствах Москвы, и продолжают активно работать в образовательном пространстве России. Они будут полезными также и студентам гуманитарных специальностей вузов — юристам, философам,

политологам, социологам, экономистам, историкам, филологам, лингвистам — изучающим традиционную логику и желающим узнать, как математические методы проникают в гуманитарные области знания, в частности, студентам направления “Прикладная информатика” в разных областях.



Логическое и логико-дидактическая подготовка в системе двухуровневого образования учителя математики.

При обучении будущих учителей математики двухуровневая система подготовки может оказаться весьма естественной и даже плодотворной, если придерживаться определенного подхода к ней.

Бакалавриат следует условно подразделить на две ступени:

• первая (1–2-й курсы) — образовательная, преследующая цели выравнивания и профориентации;



• вторая (3–4-й курсы) обеспечивает образовательную и профессиональную подготовку наиболее массовой категории учителей-предметников для неполной средней школы.

В зависимости от выбранного направления и успехов в обучении выпускник получает образовательную квалификацию “бакалавр педагогического образования” (по соответствующей специальности) и профессиональную квалификацию “учитель 5–9-х классов” (по соответствующему предмету).

Третья ступень — магистратура (1–2 года) — позволит готовить преподавателей (учителей) для всех типов средних учебных заведений (“магистров образования”), а также преподавателей вузов и научных работников в области методики преподавания соответствующих дисциплин (“магистров наук”). Магистратуру заканчивают около 25% получивших степень бакалавра. Выпускники магистерского уровня призваны пополнять контингент учителей-предметников 10–11-х классов, а также учителей, работающих в лицеях, гимназиях, колледжах и прочих специализированных школах и классах с углубленным изучением математики. В рамках магистратуры также может осуществляться быстрая “штучная” подготовка по индивидуальному заказу учебного заведения — преподавателей вузов и научных работников (“магистров наук”).

Такая дифференциация всей системы образования требует глубокой переработки учебных планов и рабочих программ изучаемых дисциплин, в частности, соответствующего уровневого ранжирования изучаемых предметов.

Система подготовки бакалавриат-магистратура может быть организована в трех модификациях: общее обучение, углубленное обучение в бакалавриате, обучение в магистратуре. Общее обучение применимо на первом, образовательном, уровне бакалавриата. Углубленное может быть применено в курсах по выбору (спецкурсах и спецсеминарах) на втором, профессиональном, уровне (ступень бакалавра). Наконец, высший уровень может быть достигнут при обучении ограниченного числа студентов на третьей ступени — в магистратуре. Такая градация позволит основной массе будущих учителей математики и информатики освоить элементарные основы дискретных математических наук, а некоторым из них приобрести и более глубокие знания в этой области.

Анализируя более чем двухтысячелетнюю историю развития логики и математической логики, современное её состояние можно представить в виде трёхэтажного здания, каждый этаж которого разделён на два крыла. Этажи представляют собой три грандиозных раздела математической логики, сформировавшихся на последовательных этапах развития и становления данной науки. Это: теория высказываний — первый, самый нижний этаж; далее, теория предикатов; и, наконец, — теория аксиоматических теорий, или метатеория — третий, самый высший этаж. Крылья этих этажей суть подходы, выработанные математической логикой к изучению этих разделов. Таких подходов два — содержательный (или семантический) и формальный (или синтаксический).

Содержательный (или семантический) подход происходит из практического анализа содержательных рассуждений, начало которому и положил Аристотель, и из такого анализа возникли алгебра высказываний (АВ), логика предикатов (ЛП) и содержательные аксиоматические теории (САТ), располагающиеся в левых крыльях трех этажей здания математической логики. При таком подходе к логике её основными атрибутами являются понятия “истина (1)” и “ложь (0)”.

Напротив, подход формальный (или синтаксический) представляет собой как бы полную противоположность подходу содержательному. Он возник, уже когда содержательный подход был в достаточной мере сформирован практикой, и возник он чисто теоретически, в полном отрыве от практики. Этот подход сформировал правые крылья на трёх этажах здания математической логики — формализованное исчисление высказываний (ФИВ), формализованное исчисление предикатов (ФИП) и формальные аксиоматические математические теории (ФАМТ). Таким образом, формальный подход есть порождение теории. Основным понятием при таком подходе является понятие *доказуемости*.

Содержание курса “*Математическая логика*” должно быть разделено на две составные части — бакалаврскую и магистерскую. При этом чрезвычайно важно, особенно на уровне бакалавриата, не допустить ослабления фундаментальности подготовки будущих учителей математики и информатики. Курс “*Математическая логика*”, с одной стороны, призван показать цементирующее значение логики для математики, существо основного логического метода математики — аксиоматического, включая построения формальной теории высказываний и ее метатеории, заложить базу для освоения логического и логико-атематического языков. С другой стороны, курс должен продемонстрировать колоссальные прикладные возможности логики в ее математическом обличье: показать применение ее методов в конструировании элементов компьютера (функциональные и переключательные схемы), проектировании языков логического (хорновского) программирования, при анализе алгоритмов на правильность.



Базовый курс математической логики предназначен для изучения всеми будущими учителями математики. Его содержание составляют темы “Алгебра высказываний”, “Начала теории булевых функций”, “Логика предикатов”, “Аксиоматический метод в математике” (все три этажа левого крыла здания математической логики). В статье [19] анализируется, в какой мере использование аксиоматического метода влияет на три обучающих фактора: логическая строгость изложения математики, развитие логического мышления учащихся, развивающее обучение математике. Приводятся аргументы как за, так и против того, что это влияние положительное. Отмечается, что однозначного и окончательного решения методическая проблема использования аксиоматического метода в обучении математике не имеет. Решать её в каждом конкретном педагогическом случае придётся учителю. А для этого ему необходимо в процессе обучения в университете (педагогическом или классическом) овладеть всеми теми методами построения и анализа математических теорий, которые выработала математика в союзе с логикой и математической логикой на протяжении многовековой истории их совместного развития. Некоторые вопросы, связанные, например, с теоремой Поста о полноте систем булевых функций, с проблемами разрешения для выполнимости и общезначимости формул логики предикатов, изучаются в базовом курсе в обзорном порядке, без доказательства содержащихся в них теорем. На этом этапе целесообразно обратить более пристальное внимание на ряд аксиоматических теорий, лежащих в основании школьного курса математики. Это прежде всего аксиоматическое построение геометрии. Дать краткий обзор построения геометрии на основе систем аксиом Евклида, Д. Гильберта, Г. Вейля. Полезной здесь может оказаться статья [20], в которой описывается возникновение аксиоматизаций двух важнейших геометрических пространств — евклидова векторного пространства (на базе системы аксиом векторного пространства) и аффинного точечного пространства (на базе системы аксиом Г. Вейля), и осуществляется начало построения аксиоматических теорий на базе этих систем аксиом. Более подробно вопросы обоснования геометрических теорий на базе различных систем аксиом и исследования метатеорий возникающих аксиоматических теорий рассмотрены в пособии [21].

Курс “Числовые системы”, читаемый будущим учителям математики в педагогическом вузе, прекрасным образом служит их логико-дидактической подготовке и являет собой уникальный образец, на котором методы математической логики и аксиоматического построения математической теории могут быть представлены студентам исключительно наглядно и с полными доказательствами. Подобными методическими возможностями не обладает даже курс геометрии.

Курс “Числовые системы” имеет ярко выраженное аксиоматическое построение. С четких первоначальных понятий и аксиом Пеано начинается построение теории натуральных чисел. Доказа-

тельства теорем о натуральных числах имеют четкую логическую структуру, строго опираются на сформулированные аксиомы. После того, как сама аксиоматическая теория натуральных чисел достаточно развита, приступают к изучению свойств этой теории, т.е. к её метатеории. Здесь строго доказываются метатеоремы о непротиворечивости этой теории (с помощью построения её модели), о её категоричности, о независимости системы её аксиом. Аналогичным образом строятся аксиоматические теории целых, рациональных, действительных и комплексных чисел, исследуется вопрос о возможностях дальнейшего расширения систем чисел. Аксиоматические теории числовых систем служат фундаментальной основой школьных курсов алгебры и начал анализа. Более подробно методика преподавания этого курса изложена в статье [22].

В статье [23] приведены найденные с помощью компьютера модели, доказывающие независимость девяти систем, определяющих полурешетку.

Углубленный курс математической логики на уровне бакалавриата служит продолжением базового и может быть освоен не всеми студентами педвуза, а лишь теми из них, кто обнаружил склонность и проявил интерес к изучению математической логики. Со студентами подробно разбираются доказательства теорем, которые были опущены на базовом уровне. Кроме того, они занимаются формализованными исчислениями высказываний и предикатов. Построение исчислений осуществляется на базе некоторой системы аксиом, производятся детальные доказательства свойств формализованного исчисления высказываний (полнота, непротиворечивость, разрешимость, независимость системы аксиом). Свойства формализованного исчисления предикатов рассматриваются в обзорном порядке, без подробных доказательств (первый и второй этажи правого крыла здания математической логики).

Формализованное исчисление высказываний может служить прекрасной методической моделью для демонстрации того, как, используя предмет и методы курса математической логики, формировать у будущих учителей математики понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. На примере этой формальной аксиоматической теории будущему учителю математики могут быть подробно и со всеми доказательствами продемонстрированы как процесс построения такой теории, так и процесс исследования ее свойств (метатеория такой теории). Подобными методическими возможностями не обладает ни курс геометрии, ни даже курс числовых систем. В работе [24] рассматривается один аспект такого исследования, связанный с построением аксиоматической теории на базе двух различных систем аксиом — трехаксиомной системы Мендельсона и тринадцатиаксиомной системы Генцена — Клини. Устанавливается эквивалентность этих двух систем аксиом посредством формальных доказательств того, что каждая аксиома первой системы является теоремой аксиоматической теории, построенной на базе второй системы аксиом, наоборот, каждая аксиома второй системы аксиом является теоремой аксиоматической теории, построенной на базе первой системы аксиом. В процессе этих исследований ярко представляются компоненты логических принципов в обучении математике — понятия доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. В заключение рекомендуется рассмотренную методику формирования у будущих учителей математики понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории применять, используя другие системы аксиом, на базе которых может быть построено формализованное исчисление высказываний. Кратко результаты этой статьи изложены в [25].

В работе [26] проводятся аналогичные рассмотрения для системы Мендельсона. Первая система аксиом $\sum_1$:

$(A1)$ $F \to (G \to F)$,

$(A2)$ $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$,

$(A3)$ $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$.

и следующей системы аксиом Лукасевича — Розенблюма, которые получаются из предыдущей системы аксиом заменой аксиомы (A3) аксиомой $(A3')$:

$(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$.

Итак, $\sum_1 = \{(A1), (A2), (A3)\}$, $\sum_2 = \{(A1), (A2), (A3')\}$.

В статье [27] доказывается эквивалентность ещё двух систем аксиом для формализованного исчисления высказываний, а в монографиях [28], [29] приводится ещё ряд систем аксиом, на базе которых может быть построено формализованное исчисление высказываний. Для рассматриваемых в этих монографиях систем аксиом приводятся доказательства их независимости с помощью построения соответствующих моделей. В работе [30] прослеживается исторический путь развития аксиоматического метода в математике от зарождения в Древней Греции, когда он начал развиваться на интуитивно-логической основе, до феноменальных результатов К. Гёделя, полученных в XX в. с помощью высокоразвитых методов математической логики. Сравниваются два феномена: процесс построения аксиоматической теории и модель Аристотеля мыслительного процесса.

По мнению автора, работа будущих учителей математики по построению формализованного логического анализа, основанного на различных системах аксиом, будет способствовать лучшему усвоению концепции строгих математических доказательств, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Эти фундаментальные логические категории пронизывают всю математическую науку, неразрывно связаны с каждым ее разделом, без них не могло бы происходить обучение учителя математики или учащихся математике.

Выпускники современной средней школы слабо владеют понятием и методами доказательства математических, прежде всего геометрических, теорем. Это обусловлено как системой организации изучения геометрии в школе, так и недостаточным уровнем логико-дидактической подготовки будущих учителей математики на уровнях бакалавриата и магистратуры в реформированных классических университетах. Курс математической логики способствует лучшему уяснению будущими учителями математики понятия строгого доказательства математических теорем. Прекрасной методической моделью для этого может служить формализованное исчисление высказываний. В статье [31] показывается, что доказательства теорем школьного курса геометрии полностью укладываются в концепцию строгого математического доказательства, предлагаемую формализованным исчислением высказываний.

Известно логическое различие двух методов доказательства математических теорем — метода от противного и метода приведения к абсурду.(нелепости, противоречию). В работе [32] эти методы представляются формулами алгебры высказываний, включаемыми в две системы аксиом формализованного исчисления высказываний. Исследуются логические взаимоотношения между этими исчислениями, вследствие чего делаются следующие выводы:

— метод доказательства от противного равносилен методу доказательства приведением противоположного утверждения к абсурду;

— метод доказательства приведением данного утверждения к абсурду слабее метода доказательства приведением противоположного утверждения к абсурду, а значит и метода доказательства от противного,

— метод доказательства приведением данного утверждения к абсурду выравнивается по дедуктивной силе с методом доказательства приведением противоположного утверждения к абсурду, а также с методом доказательства от противного, если будет дополнен возможностью использовать в процессе доказательства правило снятия двойного отрицания.

На уровне магистратуры курс “Математическая логика” углубляется изучением формальных аксиоматических теорий. Логическая подготовка учителей математики и информатики в рамках магистратуры имеет все условия для того, чтобы не ограничиться только элементарной частью математической логики. На наш взгляд, следует начать с понятия формальной аксиоматической теории, подробно рассмотреть свойства формализованного исчисления предикатов (синтаксическая и семантическая выводимость, оправданность аксиоматизации, теорема Гёделя о существовании модели, синтаксическая и семантическая непротиворечивость, полнота, теорема компактности Гёделя-А.И. Мальцева, теорема Лёвенгейма-Сколема). Далее, нужно относительно подробно рассмотреть формальные аксиоматические теории (элементарные теории первого порядка): теории первого по-

рядка с равенством, формальные теории множеств, формальную арифметику, формальные теории числовых систем, формальные геометрию и математический анализ. Наконец, базируясь на идеях и методах теории алгоритмов, познакомить студентов с теоремой Гёделя о неполноте формальной арифметики, теоремой Тарского о невыразимости понятия истинности в формальной теории на языке самой этой теории, теоремой Чёрча о неразрешимости всякой формальной теории первого порядка, содержащей арифметику натуральных чисел (второй и третий этажи правого крыла здания математической логики).

Этот материал продемонстрирует будущему учителю математики торжество методов математики, превративших традиционную аристотелеву логику в логику математическую, в познание процессов мышления.

Как известно, вопрос "*Что есть истина*?" был задан почти 2 тыс. лет назад. Тогда же на него и был дан ответ. Несколько позже об истине был задан другой вопрос: "*Доказуема ли истина*?" Ответ на него оказался не таким простым, и в полной мере на него смогла ответить именно математическая логика. Этот вопрос как бы соединил два крыла на каждом этаже грандиозного здания математической логики.

Пройдёмся по его этажам. На первых двух ответ на последний вопрос оказался положительным: две теоремы полноты в каждой из теорий — высказываний и предикатов — установили, что доказуемыми в правых крыльях соответствующего этажа являются те и только те предложения, которые содержательно истинны в левом крыле того же этажа.

Сложнее всего обстановка сложилась на третьем этаже. Здесь математическая логика добралась до анализа математическими методами не саму себя, как это было на первых двух этажах, а математических теорий и, более того, всей математической науки в целом. Ответ, данный в 1930 г. в теоремах К. Гёделя, оказался обескураживающим: существуют математические теории, в которых не все истинные утверждения могут быть доказаны, а также непротиворечивость некоторых математических теорий не может быть доказана её собственными методами.

Ещё в XVII в. Г.В. Лейбниц мечтал о создании машины, которая если бы и не доказывала истинные утверждения, то хотя бы давала ответ на вопрос, доказуемо или нет то или иное утверждение. В правом крыле третьего этажа здания математической логики был дан ответ и на этот вопрос: в 1936 г. А. Тьюринг, введя строгое понятие *алгоритма*, доказал, что существуют массовые проблемы, которые не имеют алгоритма для своего решения, откуда и вытекало отсутствие машины (алгоритма), распознающей доказуемые утверждения в математических теориях. Такие теории стали называться неразрешимыми. В том же году А. Тарский доказал, что если теория, содержащая арифметику, непротиворечива, то понятие истины не может быть выражено на языке этой теории.

Эти теоремы К. Гёделя, А. Тьюринга и А. Тарского, представляющие собой высокие достижения математической логики и располагающиеся в правом крыле её верхнего этажа, доказаны с использование методов теории алгоритмов. Более того, неразрешимыми оказались не только некоторые математические теории, но чисто логическая теория — формализованное исчисление предикатов (ФИП, располагается в правом крыле второго этажа), что доказал А. Чёрч в 1936 г. При этом, он также использовал методы теории алгоритмов. Так что эти две теории — математическая логика и теория алгоритмов (здание которой в процессе обучения строится рядом со зданием математической логики), вступают в самое, что ни на есть, плодотворнейшее взаимодействие на своих самых верхних этажах. (См. учебники автора по математической логике и теории алгоритмов [33], а также статьи [34], [35], в которых рассматриваются вопросы методики преподавания курса теории алгоритмов).

Через результаты исследований А. Тьюринга, Ж. Эрбрана, Дж. Робинсона, А. Кольмероэ математическая логика вступает в тесную связь с программированием и системами искусственного интеллекта. Теория программирования, по существу, становится разделом математической логики, в котором понятие "алгоритм" предстает как частный случай понятия "логическое исчисление", каждая компьютерная программа выглядит как сложная формула в некоторой формальной логической системе, а доказательство правильности программы сводится к доказательству логической

выводимости формулы в этой формальной системе. В математической логике находятся истоки ряда языков программирования, призванных управлять базами данных и системами искусственного интеллекта (язык PROLOG, хорновское логическое программирование). На уровне магистратуры могут быть рассмотрены также вопросы, связанные с разнообразными нетрадиционными логиками — многозначными, модальными, интуиционистской, нечёткой и т.п.

Также одной из тем, рассматриваемых на уровне магистратуры, может служить дальнейшее углубление теории числовых систем [36]. В этой работе рассматривается курс "Числовые системы" — важнейший в методологическом плане курс для будущих учителей математики, и показывается, каким содержанием должен быть наполнен этот курс на уровне бакалавриата и на уровне магистратуры. На уровне бакалавриата предлагается изучить классические системы чисел — натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных. Дальнейшие расширения систем чисел изучаются на уровне магистратуры. Теория возникающих здесь числовых систем предстает как теория алгебраических систем, возникшая на стыке алгебры и математической логики. Здесь изучаются алгебры над полем, алгебры с делением над полем, альтернативные алгебры с делением над полем, йордановы алгебры, алгебры Ли.

Что касается логико-дидактической подготовки будущих учителей математики, т.е. подготовки их к применению логики в обучении математике — второго этапа формирования их логической компетентности, то ее основой призваны служить книги автора [37], [29] и [38], [39]. В первых двух книгах подробно показывается, как принципы логики применяются при обучении различным разделам математики. В обеих книгах в части I рассматриваются теоретические основы и технология реализации в обучении математике первого принципа логики — принципа обучения строению (структуре) математических предложений. Основными математическими предложениями являются, как известно, формулировки теорем. Здесь необходимо, во-первых, научиться видеть логическую структуру математического предложения, а во-вторых, необходимо научиться понимать, какие предложения равносильны каким, т.е. научиться преобразовывать структуру математического предложения равносильным образом. Первая глава этой части (глава 1) посвящена понятиям в математике и их определениям, вторая (глава 2) — математическим теоремам.

В части II будут рассмотрены теоретические основы и технология реализации в обучении математике второго и третьего принципов логики — принципа обучения понятию доказательства и принципа обучения методам доказательства математических теорем. Для этого вначале будет обсуждено понятие *истины* и способы её обоснования в математике (глава 3). Математические доказательства основываются на элементарных шагах — умозаключениях, основы теории которых были заложены ещё Аристотелем. В главе 4 представлены два подхода к теории доказательств, выработанные математической логикой: гильбертовский подход и генценовский подход. В главе 5 обсуждаются методы доказательства математических теорем. Наконец, в главе 6 описывается ряд методик обучения доказательствам математических теорем в школе.

Наконец, в заключительной части III будут рассмотрены теоретические основы и технологии реализации в обучении математике четвёртого принципа логики — принципа обучения строению математических теорий. Здесь имеется в виду уяснение сути аксиоматического метода при построении математической теории и при её преподавании, уяснение сути первоначальных (неопределяемых) понятий теории, её аксиом и теорем, вплоть до метатеории (свойств этой теории) — непротиворечивости, полноты, категоричности, независимости системы аксиом. Именно здесь раздел "Аксиоматические теории" курса математической логики должен получить своё естественное продолжение во всех математических курсах педагогического вуза. В каждом из этих курсов с позиций математической логики должны быть рассмотрены соответствующие аксиоматические теории, лежащие в основании соответствующей математической дисциплины. Эти математические основания естественным образом будут простираться в основания соответствующей школьной учебной математической дисциплины.

В главе 7 рассматриваются общие вопросы, связанные с существом аксиоматического метода в

математике, с историей его формирования, с использованием его в процессе обучения математике. В главе 8 рассматриваются аксиоматические теории, лежащие в основаниях школьных математических курсов: аксиоматические теории числовых систем как основание школьного курса алгебры и начал анализа и их свойства, а также аксиоматизация понятия величины, канторовская теория мощностей множеств, элементы теории упорядоченных множеств; даётся обзор систем аксиом, на основе которых может быть построено формализованное исчисление высказываний.

Важным компонентом логико-дидактической подготовки будущего учителя математики является изучение им традиционной аристотелевой логики. Для этого используются пособия [38], [39]. В них традиционная Аристотелева логика, изучающая законы и формы правильного мышления, излагается с позиций современной математической логики. Опыт показывает, что будущие учителя математики не владеют понятиями и методами традиционной аристотелевской логики. В учебнике [39] показаны основные пути проникновения математики в традиционную логику и изложен курс традиционной логики с позиций математической логики.

Глава 1 носит вводный характер. В ней рассматриваются вопросы взаимоотношения логики и интуиции в мыслительных процессах и роль языка в них. Характеризуется место логики в мыслительных процессах, выделяется её предмет, основные логические законы, приводятся сведения исторического характера.

В главе 2 даются основные сведения из математической логики: характеризуется здание математической логики как науки и как учебного предмета в целом, излагаются элементы двух фундаментальных разделов математической логики — алгебры высказываний и логики предикатов. С этими разделами тесно связана теория множеств и отношений, элементы которой также излагаются в этой главе.

Главы 3, 4 и 5 посвящены классическим разделам традиционной логики — понятиям, суждениям и дедуктивным умозаключениям соответственно. Но излагаются эти разделы с использованием изученного в главе 2 аппарата математической логики. Математизация начинается при изучении темы “Понятие” (глава 3), продолжается при изучении темы “Суждение” (глава 4) и достигает наибольшей своей эффективности при изучении дедуктивных умозаключений (глава 5). Таким образом, математизации подвергается наиболее действенная часть традиционной логики.

Глава 7 посвящена логике в математике или логическим вопросам математических теорий. Как известно, математика на всем протяжении своего многовекового развития самым тесным образом взаимодействовала с логикой. Именно в математических рассуждениях и доказательствах логика проявляла себя наиболее зримо и эффективно. В свою очередь, вместе с развитием математики развивалась и логика, вырабатывая все более и более сильные критерии строгости для построения математических теорий и осуществления доказательств в них. Наконец в XX веке, сделавшись математической, логика смогла доказать фундаментальные методологические теоремы о существе математического метода и о математических теориях. Этим вопросам взаимодействия математики и логики, строения математических теорий, существу и методам доказательства математических теорем посвящается глава 7. Студент-гуманитарий при первом прочтении может её пропустить, но студент-математик, а тем более будущие учителя математики должны непременно изучить.

Автор отдает себе отчет в том, насколько трудна задача для гуманитария — проникнуться математическим стилем мышления. Поэтому мы постараемся не доводить математизацию до абсурда и не оторваться окончательно от того основания традиционной логики, на котором все же базируется современная математическая логика. Думается, что спасительными островами для гуманитария будут служить главы 1 и 6. О содержании первой главы говорилось выше, а в главе 6 — правдоподобные умозаключения.

После добросовестного изучения глав 3, 4, 5 и 7 глава 6 убедительно покажет, насколько менее действенной и более бедной становится логика после того, как она лишается возможности использовать математические методы по существу.

Наконец, заключительная глава 8 может показаться несколько неожиданной под занавес книги

о строгой науке логике. Она посвящена элементам теории нечётких множеств и нечёткой логики. В этой главе строгая логика как бы расплывается, становится нечеткой. Но именно эта расплывчивость и нечёткость открывают такие прикладные возможности преображённой древней науки, которые нашли чрезвычайно эффективные применения в широчайших и многочисленных сферах практической человеческой деятельности.

Изучение основ традиционной логики чрезвычайно важно в образовании студентов математических и технических специальностей вузов, которые изучают математическую логику, ибо, изучая её, они нередко осваивают лишь математическую часть (в особенности, если математическая логика поглощена курсом дискретной математики) и совершенно не видят логики — науки о мышлении и рассуждениях.

Прежде чем знакомить школьников с основными классическими универсальными законами мышления, нужно познакомить с этими законами их будущих учителей, и в первую очередь учителей математики, да и другим учителям-предметникам курс логики будет чрезвычайно полезен. Еще Мефистофель наставлял Фауста:

"*Употребляйте с пользой время.*
Учиться надо по системе.
Сперва хочу вам в долг вменить
На курсы логики ходить.
Ваш ум, не тронутый доныне,
На них приучат к дисциплине.
Чтоб взял он направленья ось,
Не разбредаясь вкривь и вкось".

И.В. Гёте. "Фауст" (Пер. Б.Л. Пастернака)

Заключение. Знание законов логики, умение логически грамотно давать определения понятиям и формулировать суждения о вещах, владеть методами рассуждений, доказательства и опровержения — эти качества составляют логическую компетентность, необходимую каждому современному специалисту, в какой бы области он ни работал.

Формирование этих качеств личности чрезвычайно актуально в современном мире, поскольку цифровые технологии всё более сужают сферу применения *мыслительных* способностей человека, всё более расширяя горизонты его детерминированно-алгоритмического поведения и толкая во власть искусственного (имитационного) интеллекта. Формирование указанных качеств личности на интуитивном уровне должно начинаться на школьной скамье под руководством специально подготовленных для этого учителей-предметников. Сознательное освоение категорий и методов логики должно произойти при подготовке будущего специалиста в вузе.

О том, как наиболее целесообразно организовать методическую систему логико-дидактического образования будущих учителей математики на уровне бакалавриата с продолжением этого образования на уровне магистратуры, автор написал в серии статей: [40], [41], [42], [43], [44].

Литература

[1] Пуанкаре А. О науке. - М., 1983.

[2] Игошин В.И. Дидактическое взаимодействие логики и математики // Педагогика. - 2002. - № 1. - с. 51-55.

[3] Игошин В.И. Бакалавры и магистры педагогического образования — учителя XXI века. // Актуальные проблемы непрерывного математического образования: сб. науч. трудов. / Отв. редактор к.ф.-м.н. Захаров А.М. - Саратов: Изд–во Сарат. ун-та, 2014. - 480 с.

[4] Игошин В.И. О качестве подготовки бакалавров и магистров педагогического образования по профилю “Математическое образование” // Известия Саратовского университета. Философия. Психология. Педагогика. Новая серия. - 2018. - т. 18, - вып. 4. - с. 468-473.

[5] Игошин В.И. Воспоминания о годах учебы в ЮМШ (1963 – 1966) // Очерки истории физико-математического образования в Саратовском университете / под общ. ред. В.М. Аникина. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2019. - 172 с.

[6] Игошин В.И. Математика на механико-математическом факультете СГУ (1966 – 1971) // Очерки истории физико-математического образования в Саратовском университете / под общ. ред. В.М. Аникина. - Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2019. - 172 с.

[7] Игошин В.И. Сборники задач по математической логике: Учебник для студентов. - М.: Издательство “Просвещение”, 1986. - 160 с.

[8] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник для студентов. - Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1991. - 256 с.

[9] Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник для студентов. - М.: Издательство “Academia”, 2004, 2008, 2008, 2010. - 448 с.

[10] Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: Учебник для студентов. - М.: Издательство “Академия”, 2005, 2006, 2007, 2008. - 304 с.

[11] Игошин В.И. Математическая логика. - М.: Издательство “ИНФРА-М”, 2012. - 399 с. + CD-R.

[12] Игошин В.И. Теория алгоритмов. - М.: Издательство “ИНФРА-М”, 2012. - 318 с.

[13] Игошин В.И. Подготовка будущих учителей математики и информатики по дискретной математике в бакалавриате и магистратуре // Образование и наука. - 2013. - 7 (106). - с. 85-100.

[14] Игошин В.И. О значении теории алгоритмов для системы современного профессионального образования и методике ее преподавания // Профессиональное образование в современном мире. - 2019. - Т. 9. - № 2. - С. 2753-2764.

[15] Игошин В.И. Тетрадь по математической логике: Учебник для школьников и студентов. - Саратов: Издательство “Научная книга”, 1996, 1999, 2010, 2019. - 88 с.

[16] Игошин В.И. Элементы математической логики: Учебник для студентов средних профессиональных учебных заведений. - М.: Издательство “Academia”, 2016, 2017, 2018. - 320 с.

[17] Игошин В.И. Теория алгоритмов: Учебник для студентов средних профессиональных учебных заведений. - М.: Издательство “Academia”, 2013, 2017, 2019. - 320 с.

[18] Игошин В.И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: Учебник для студентов.- М.: Издательство “КУРС: ИНФРА-М”, 2017. - 392 с.

[19] Игошин В.И. Аксиоматический метод в обучении математике и в образовании будущих учителей математики // Известия ВГПУ (Волгоградского государственного педагогического университета). -2022. - № 4 (167). - с. 102-111.

[20] Игошин В.И. О точках и векторах в геометрии // Математическое образование. - 2017. - № 2 (82). - с. 27-43.

[21] Игошин В.И. Основания геометрии. - Саратов: Изд-во “Научная книга”, 2004. - 84 с. (Серия “Лекции по геометрии»).

[22] Игошин В.И. Курс числовых систем для педагогического вуза // Математика в высшем образовании. - 2010. - № 8. - с. 19-36.

[23] Игошин В.И. Независимость систем аксиом для полурешеток. Часть 2 // Вторые математические чтения памяти М.Я. Суслина (1894 – 1919). - Саратов, 23-28 сентября 1991. Тезисы докл. - Саратов, 1991. - с. 88-89.

[24] Igoshin V.I. et al. To the question of the method of studying the concept of proof and the axiomatic method by bachelors and masters of pedagogical education // International Journal of Advanced Science and Technology. - Vol. 29. - No. 06. - 2020. - p. 1964-1972.

[25] Игошин В.И. О методике изучения понятия доказательства и аксиоматического метода бакалаврами и магистрами педагогического образования // Математическая подготовка в школе и вузе: содержание и технологии: материалы 43-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, 26-28 сентября 2024 г. - Сыктывкар: Издательство СГУ им. Питирима Сорокина, 2024. - 416 с.

[26] Игошин В.И. Аксиоматический метод в образовании будущих учителей математики: эквивалентность двух систем аксиом исчисления высказываний. // Математическое образование. - 2025. - № 2 (114). - с. 37-51.

[27] Igoshin V.I. On the Equivalence of Two Systems of Axioms for Propositional Calculus // Modern Problems of Mathematics and Mechanics. Proceedings of the International Conference Devoted to the 80th Anniversary of Academician Akif Gadjiev. - Baki, Azerbaijan, 6-8 december 2017. - 268 p.

[28] Igoshin V.I. Mathematical logic as the pedagogy of mathematics. (Scientific monograph). - Saratov: Publishing House “Nauka”, 2009. - 360 p. (In Russian).

[29] Igoshin V.I. Mathematical logic in teaching of mathematics. Logical-didactic training of mathematics teachers. - Saarbruken: Palmarium Academic Publishing, 2012. - 517 p. (In Russian).

[30] 30. Игошин В.И. Аксиоматический метод: от математики к логике и обратно к математике. // Творчество студентов и школьников в области математики и информатики и методы его развития: материалы 44-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов, г. Минск, 25–27 сентября 2025 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. Максима Танка. - Минск : БГПУ, 2025. - 477 с.

[31] Игошин В.И. О понятии доказательства математических теорем // Н.И. Лобачевский и мат. образование в России: материалы междунар. форума по мат. образованию, посв. 225-летию Н.И. Лобачевского, IFME - 2017, 18-22 окт. 2017 - Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 2017. - Т.2. - 278 с.

[32] Игошин В.И. Формально-логический подход к сравнению методов доказательства от противного и приведением к абсурду // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики (Посв. 100-летию со дня рожд. акад. А.Н. Колмогорова). - Ярославль: изд. ЯГПУ, 2003. - с. 108-115.

[33] Игошин В.И. Математическая логика. - М.: ИНФРА-М, 2020. - 399 с.; Элементы математической логики. - М.: Академия, 2021. - 320 с.; Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. - М.: Изд. центр “Академия”, 2004, 2008, 2008, 2010. -

448 с.; Теория алгоритмов: Учебное пособие. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 318 с.; Теория алгоритмов: Учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. - М.: Издат. центр “Академия”, 2013, 2017, 2018, 2021. - 320 с.

[34] Игошин В.И. О значении теории алгоритмов для системы современного профессионального образования и методике ее преподавания // Профессиональное образование в современном мире. - 2019. - Т.9. - № 2. - С. 2753-2764.

[35] Игошин В.И., Дубракова Л.А. Начало курса “Теория алгоритмов” в обучении будущих учителей математики и информатики. - Учитель-ученик: проблемы, поиски, находки. Сб. научно-методич. трудов: Вып. 6. - Саратов: Издательский центр “Наука”, 2008. - 80 с.

[36] Игошин В.И. Курс числовых систем в формате двухуровневой подготовки учителей математики // Образование и наука. - 2017. - т. 19. - № 1. - с. 81-102.

[37] Игошин В.И. Математическая логика как педагогика математики. (Научная монография). - Саратов: Издательский центр “Наука”, 2009. - 360 с.

[38] Игошин В.И. Логика с элементами математической логики: Учебник для студентов. - Саратов: Издательство “Научная книга”, 2004. - 144 с.

[39] Игошин В.И. Логика с элементами математической логики. Учебник. - М.: ИНФРА-М, 2023. - 418 с.

[40] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть I) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2019. - Т. 19. - вып. 1. - С. 113-117.

[41] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть II) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2020. - Т.20. - вып. 1. - С. 105-111.

[42] Игошин В.И. Учить логике будущих учителей математики. (Часть III) // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Философия. Психология. Педагогика. - 2022. - Т. 22. - вып. 2. - С. 202-207

[43] Игошин В.И. Математика и логика: их связь в подготовке учителей математики. // Proc. 13th International Congress on Mathematical Education, ICME-13 Monographs. - p. 456; Hamburg: Springer-open, 2017. - 766 p.

[44] Игошин В.И. Математика и логика: их связь в преподавании математики // Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research, ICME-13 Monograph. - p. 253-271; Springer International Publishing AG.

Игошин Владимир Иванович,
профессор кафедры геометрии Саратовского
национального исследовательского государственного
университета имени. Н.Г. Чернышевского,
профессор, доктор педагогических наук,
кандидат физико-математических наук.

E-mail: igoshinvi@mail.ru

Олимпиадный обман современности: методы и защита

Н. А. Трубицина, Н. М. Трубицин

В статье рассмотрены основные способы нечестного участия в олимпиадах в современных усдовиях, а также методы противодействия.

1. Введение

История школьных олимпиад в России начинается в 1930-х годах с математических кружков при университетах, а в 1964 году уже появляются первые всесоюзные соревнования [1]. Современная система, регулируемая приказами Министерства просвещения и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации [2,3], включает три ключевых направления: Всероссийскую олимпиаду школьников (ВсОШ) [4], олимпиады из перечня Российского совета олимпиад школьников (РСОШ) трёх уровней сложности [5], а также внутренние вузовские олимпиады, организуемые региональными университетами. Каждый уровень имеет свою целевую аудиторию и академический вес, формируя единую систему выявления талантливой молодёжи.

Участие в олимпиадах открывает значительные карьерные и образовательные перспективы. Победители и призёры ВсОШ и олимпиад РСОШ 1–3 уровней получают право на поступление без вступительных испытаний (БВИ) в профильные вузы, автоматическое выставление 100 баллов ЕГЭ по соответствующему предмету, а также доступ к грантам, стипендиям и целевым программам поддержки [6]. Высокая конкуренция и растущая социальная значимость олимпиадного статуса превратили их из добровольных интеллектуальных состязаний в стратегический элемент образовательной траектории.

Именно эта повышенная ставка стимулирует часть участников искать обходные пути. Традиционные методы списывания, такие как бумажные шпаргалки, в современных условиях теряют эффективность: задания олимпиад смещены в сторону исследовательского мышления, требуют нестандартных доказательств и редко допускают механическое воспроизведение готовых формул. В ответ на это сформировались изощрённые схемы обмана, опирающиеся на цифровую инфраструктуру, социальную инженерию и административные уязвимости платформ регистрации.

2. “Сливы” заданий олимпиад и ответов на них

Цифровизация коммуникаций кардинально изменила ландшафт олимпиадных утечек. Закрытые каналы в Telegram, Discord и VK превратились в теневые площадки, где задания и решения распространяются организованно и коммерчески. Периодически фиксируются случаи, когда за несколько дней до олимпиады в сеть попадают полные варианты и даже ответы на них [7-10]. Это создаёт асимметрию условий: участники с доступом к инсайдерской информации получают несправедливое преимущество над теми, кто решает задачи самостоятельно.

Механизмы сливов разнообразны и часто носят гибридный характер. Источниками становятся сотрудники региональных методических комиссий, не прошедшие должную проверку, взломанные

почтовые ящики организаторов или целевой фишинг участников и кураторов. В отдельных случаях утечки организуются через подставные аккаунты, имитирующие официальные рассылки, что позволяет собирать данные и распространять “ответы” под видом методических рекомендаций.

Последствия систематических сливов выходят за рамки искажения индивидуальных результатов. Они девальвируют статус олимпиад, снижают мотивацию к подлинному интеллектуальному труду и создают риски для репутации вузов-организаторов, чьи приёмные комиссии опираются на эти достижения. Кроме того, коммерциализация утечек формирует теневой рынок, где цены на “гарантированные ответы” достигают десятков и сотен тысяч рублей, что усиливает социальное неравенство среди участников.

Противодействие требует комплексного технико-правового подхода. Организаторам необходимо внедрять криптографически защищённые системы дистрибуции вариантов с раздельными ключами шифрования и печатью материалов непосредственно в аудиториях. Должны применяться рандомизация пулов заданий, задержка публикации официальных решений до окончания всех этапов, а также активный мониторинг мессенджеров с привлечением специалистов по информационной безопасности [11, 12]. В случае выявления виновных нужно привлекать их к ответственности в соответствии со статьями 138 и 272 уголовного кодекса Российской Федерации (нарушение тайны переписки и неправомерный доступ к компьютерной информации) [13].

3. Использование микронаушников

Технологии миниатюрной аудиопередачи изначально разрабатывались для спецслужб, журналистов и медицинских целей [14], однако вскоре произошло их массовое внедрение в схемы нарушения академической честности и мошенничества (жульничества) в различных сферах системы образования. Студенты и школьники быстро оценили потенциал скрытых аудиоприёмников для получения внешней помощи во время экзаменов и олимпиад [15,16]. Переход от кустарных самодельных устройств к заводским моделям обеспечил стабильность связи, миниатюризацию и доступность, что сделало микронаушники одним из самых распространённых технических средств обхода контроля.

Современный рынок предлагает два основных типа устройств [17]. Проводные модели маскируются под элементы одежды или воротник, передавая звук через скрытый кабель к внешнему источнику. Наибольшей скрытностью обладают беспроводные Bluetooth и радиомодули, которые работают на расстоянии до 10-15 метров от телефона. При этом оба типа устройств имеют достаточно доступную цену для большей части молодёжи: простейшие модели можно приобрести в пределах 1000 рублей, а стоимость самых продвинутых может достигать 20000 рублей и более.

В условиях олимпиад эти устройства используются для организации удалённого наставничества в реальном времени. Ассистент, обладающий высокой квалификацией в предмете, решает задачу самостоятельно или с помощью вспомогательных инструментов, после чего передаёт ответ голосом или преобразует ключевые шаги в короткие вибрационные коды. Современные модификации интегрируются с умными часами, одеждой с токопроводящими нитями и портативными аккумуляторами, обеспечивая автономную работу до 12 часов. Техническая незаметность и высокая надёжность передачи данных делают этот метод устойчивым к стандартным формам прокторинга.

Борьба с применением микронаушников должна строиться на сочетании аппаратного контроля и поведенческого анализа. На входе в аудитории необходимо устанавливать сертифицированные металлодетекторы и RF-сканеры, способные фиксировать сигналы в запрещённых частотных диапазонах. В рамках действующего законодательства нужно применять радиоподавляющие комплексы локального действия, блокирующие внешнюю связь в зонах проведения этапов. Дополнительно следует внедрять видеомониторинг с алгоритмами распознавания микродвижений глаз, частого моргания или неестественных пауз, а также случайную рассадку участников с увеличенным расстоянием между местами [18,19].



Рисунок 1. Структура и особенности применения проводного микронаушника



Рисунок 2. Внешний вид беспроводного микронаушника

4. Применение нейросетей для решения олимпиадных задач

Генеративный искусственный интеллект совершил качественный скачок в решении математических и естественнонаучных задач. Крупные языковые модели (GPT-4o, Claude 3.5, YandexGPT 3) и специализированные исследовательские системы (Minerva, AlphaGeometry) демонстрируют способность анализировать условия, выстраивать цепочки логических выводов и проверять корректность доказательств. Интеграция с интерпретаторами Python, символическими вычислителями и геометрическими движками позволяет автоматически подбирать контрпримеры, оптимизировать параметры и верифицировать алгебраические преобразования в режиме реального времени.

В олимпиадном контексте нейросети особенно эффективны на задачах, требующих работы с комбинаторикой, теорией чисел, планиметрией и базовым математическим анализом. Модели успешно генерируют пошаговые рассуждения, адаптируют известные методы к новым условиям и предлагают несколько вариантов доказательства, что снижает риск единственной ошибки. Наиболее продвинутые системы искусственного интеллекта стабильно проходят отборочные этапы и успешно решают большую часть заданий регионального уровня, а иногда демонстрируют результаты, сопоставимые с призёрами заключительных этапов всероссийской и даже международной олимпиады [20-22].

Несмотря на прогресс, у нейросетей сохраняются системные ограничения. Глубоко оригинальные задачи, требующие интуитивного прозрения, нестандартной конструкции или выхода за рамки известных теорем, остаются уязвимым местом для искусственного интеллекта. Модели склонны к "галлюцинациям" в условиях неполных данных, могут пропускать скрытые условия задачи и испытывают трудности с оформлением строгих формальных доказательств без человеческой верификации. Тем не менее, при дистанционных форматах или слабом контроле за устройством участник может использовать искусственный интеллект как «усилитель» собственного интеллекта, комбинируя машинные подсказки со своими знаниями, навыками и интуицией [23].

Противодействие использованию искусственного интеллекта требует пересмотра форматов проведения и оценивания. Ключевым шагом остаётся обязательный офлайн-режим с полным отключением интернета и изъятием личных электронных устройств. В задания следует включать компоненты, требующие оригинального доказательства, рефлексивных эссе-обоснований или устной защиты решения перед экспертной комиссией. Для дистанционных сегментов необходимо внедрять локальные интрасети с фильтрацией запросов к внешним ИИ-сервисам, а также системы детекции машинно-сгенерированного текста. При этом организаторы должны учитывать рекомендации ведущих исследовательских центров о необходимости обязательной человеческой верификации результатов ИИ-анализа, чтобы избежать ложных обвинений [24,25].

5. Регистрация подставных школьников на площадках проведения олимпиад

В последние годы в олимпиадном движении появилась практика массовой регистрации несуществующих или подставных участников. Их иногда называют "Мёртвые души" в честь известного романа Н.В. Гоголя [26]. Стоит отметить, что также известны случаи присутствия таких "призраков" (причём с большими баллами по ЕГЭ) в списках абитуриентов московских медицинских университетах [27,28].

Схемы реализуются через автоматизированных ботов, использующих утёкшие базы персональных данных, сгенерированные паспортные номера или договорённости с другими школьниками. Искусственное занятие квот на отборочных и заключительных этапах проводится с целью увеличения шанса занять на олимпиаде призовое место, поскольку существуют строгие лимиты по региональным площадкам, а количество призёров и победителей олимпиады, как правило, ограничивается четвертью от общего количества (зарегистрированных) участников олимпиады. В результате реальные школьники сталкиваются с технической невозможностью пройти регистрацию, несмотря на соответствие критериям допуска.

Механизм работы таких схем опирается на уязвимости форм регистрации и недостаточную кросспроверку данных [29]. Это искажает статистику участия, перегружает логистику мероприятий и создаёт риски невыполнения нормативных показателей по охвату талантливой молодёжи. Искажение данных, в свою очередь, затрудняет планирование ресурсов, снижает качество отбора и подрывает доверие к олимпиадной инфраструктуре. Кроме того, использование несуществующих или чужих персональных данных без согласия нарушает базовые принципы информационной безопасности и законодательство о защите приватности.

Эффективное противодействие требует интеграции на уровне государственной инфраструктуры. Регистрация должна переводиться на платформу ЕСИА (Госуслуги) с обязательной двухфакторной аутентификацией и привязкой к верифицированным паспортным данным. Перед допуском к

этапу нужно применять биометрическую или очную паспортную верификацию, исключающую использование скомпрометированных аккаунтов. Технические ограничения могут включать запрет на регистрацию с одного IP-адреса или устройства более одного раза, ручную модерацию списков региональными центрами и публикацию открытых реестров участников для общественного контроля. При этом нарушители должны быть привлечены к ответственности по статье 327 уголовного кодекса Российской Федерации (подделка документов) [13] и нормам Федерального закона № 152 “О персональных данных” [30].

Заключение

Олимпиадное движение в России прошло путь от добровольных интеллектуальных кружков до ключевого элемента образовательной траектории, что неизбежно привлекло внимание лиц, стремящихся к нечестному преимуществу. Эволюция методов обмана отражает общие технологические тренды: от цифровых утечек к беспроводным микроустройствам, от ручного списывания к генеративным нейросетям и от индивидуального мошенничества к системной регистрации фейковых участников. Поэтому устойчивость олимпиадной системы должна обеспечиваться не только ужесточением контроля, но и смещением акцента с формального результата на процесс интеллектуального роста, а также воспитанием академической честности и академической культуры.

Метод нечестного участия	**Технические и организационные особенности**	**Основные способы противодействия**
Сливы заданий и ответов	Коммерческие мессенджер-каналы, инсайдерский доступ, фишинг	Криптозащита вариантов, рандомизация пулов, правовое преследование, мониторинг сетей
Микронаушники	Bluetooth/индукционные модели, скрытая интеграция	RF-сканеры, металлодетекторы, видеомониторинг поведения, ограничение электроники
Нейросети	LLM и математические модели, интеграция с интерпретаторами	Офлайн-режим, устные защиты, задания на оригинальное доказательство, ИИ-детекция
Регистрация подставных школьников	Боты, утекшие базы, сговор с другими школьниками, массовая регистрация	ЕСИА-интеграция, двухфакторная аутентификация, биометрия, ручная модерация, открытые реестры

Таблица 1. Основные методы мошенничества современных школьников в олимпиадах, их особенности и способы противодействия им

Однако ни один технологический или административный барьер не является абсолютным. Долгосрочная защита олимпиад должна строиться на балансе между строгим контролем, инновационными форматами заданий и формированием этических стандартов среди школьников, учителей и организаторов. Только комплексный подход позволит сохранить олимпиады как достоверный инструмент выявления истинного потенциала молодёжи.

Литература

1. Майорова Н.С., Щербинина О.С. Школьное олимпиадное движение: история, теория и практика // Социально-политические исследования. - 2024. - № 4 (25). - С. 175-188.

2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27 ноября 2020 г. № 678 “Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников”.

3. Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 16 января 2026 г. № 16 “Об утверждении Порядка проведения олимпиад школьников, критериев определения уровней олимпиад школьников и образцов дипломов победителей и призеров олимпиад школьников”.

4. URL: https://vos.olimpiada.ru
5. URL: https://rsr-olymp.ru
6. URL: https://www.kp.ru/edu/vuzy/lgoty-olimpiadnikam-pri-postuplenii-v-vuz
7. URL: https://www.e1.ru/text/education/2025/03/08/75182441
8. URL: https://63.ru/text/education/2024/02/19/73244648
9. URL: https://regnum.ru/news/2847396
10. URL: https://www.kp.ru/daily/27665/5053948
11. URL: https://mel.fm/ucheba/shkola/9042815-rosolymp
12. URL: https://mel.fm/novosti/5306148-orgkomitet-vsosh-provodit-proverku-v-svyazi-so-slivami-zadany-v-internete
13. "Уголовный кодекс Российской Федерации" от 13.06.1996 № 63-ФЗ (ред. от 09.04.2026).
14. URL: https://vk.com/@1more_russia-evoluciya-naushnikov-ot-sredstva-kommunikacii-k-polnocennomu
15. URL: https://mel.fm/zhizn/razbor/3951742-v-ukhe–dinamik-mikrofon-v-rukave-mikronaushniki-na-ekzamenakh-kak-ikh-ispolzuyut-i-opasno-li-eto
16. URL: https://micra.by/realnye-istorii-studentov
17. URL: https://garniturannov.ru/blog/kakie-mikronaushniki-luchshe-besprovodnye-ili-provodnye
18. URL: https://pedsovet.org/article/spisat-ese-trudnee-sozdano-ustrojstvo-zasekausee-mikronausniki-na-ekzamenah
19. URL: https://www1.ru/news/2025/05/23/glusilki-protiv-spisyvaniia-na-ege-v-rossii-pered-ekzamenami-ustanovili-bolee-11-tys-ustroistv-nei.html
20. URL: https://tass.ru/nauka/19752821
21. URL: https://sysblok.ru/dajdzhest/nejroseti-pomogajut-uchenym-issledovat-uravnenija-llm-pobezhdajut-v-olimpiade-po-programmirovaniju
22. URL: https://nplus1.ru/news/2024/07/26/alphaproof-alphageometry2-deepmind
23. URL: https://www.nakanune.ru/news/2023/03/27/22708031
24. URL: https://www.pnzgu.ru/news/2026/05/28/9211701
25. URL: https://media.foxford.ru/news/teach-uchitelya-protiv-ii-skrytye-prompty-v-zadaniyah
26. URL: https://vk.com/wall-76552532_69820?offset=20.
27. URL: https://lenta.ru/news/2013/08/05/sechenov.
28. URL: https://25.hse.ru/development/story6.
29. URL: https://school.mos.ru/help/instructions/olympiad/acquaintance-olympiad/registration-olympiad-student
30. Федеральный закон "О персональных данных" от 27.07.2006 № 152-ФЗ.

Трубицина Надежда Анатольевна,
доцент ФГБОУ ВО РГУПС, Ростов-на-Дону,
кандидат технических наук.

E-mail: nadint73@mail.ru

Трубицин Никита Михайлович,
Сотрудник Московского центра фундаментальной
и прикладной математики, Москва.

E-mail: trubitsin.nik@mail.ru

Из истории науки

История моделирования: от механического к математическому

Н. М. Трубицин, Н. А. Трубицина, М. А. Трубицин

В статье рассмотрен процессы развития механического моделирования и замещения его математическим, обусловленное увеличением сложности изучаемых физических и технических объектов.

1. Механическая модель как способ познания реальности

История научного познания неразрывно связана с историей создания моделей, представляющих собой упрощённые образы изучаемых объектов, которые позволяют исследователю проникнуть в сущность явлений, недоступных для непосредственного наблюдения. На заре научной мысли, начиная с античности и вплоть до конца XIX века, доминирующей формой научного моделирования была механическая модель. Этот подход базировался на фундаментальной установке, согласно которой понять явление означает свести его к движению материальных тел, подчиняющихся законам механики.

Истоки механического моделирования уходят корнями в глубокую древность. Уже в трудах Архимеда мы видим попытки создания механических устройств, которые не просто выполняли практические функции, но и демонстрировали принципы работы природных сил. Его знаменитые планетарии и сферы, воспроизводившие движение небесных тел, были первыми попытками создать физическую модель космоса [1].



Рисунок 1. Небесная сфера Архимеда

Однако систематическое развитие механическое моделирование получило в эпоху Возрождения и научной революции. Леонардо да Винчи, исследуя гидравлику и механику полёта птиц, создавал подробные чертежи и рабочие прототипы, рассматривая природу как совокупность механизмов.

Этот подход был позже обоснован Рене Декартом, который в XVII веке провозгласил идею «мира-машины». Для Декарта и его последователей все физические явления, от движения планет до работы человеческого тела, могли быть объяснены через контактное взаимодействие материальных частиц. Животные рассматривались как автоматы, а человеческий организм — как сложная гидравлическая система. Эта картина мира требовала создания моделей, которые были бы наглядными, осязаемыми и воспроизводимыми в материале [2].

Расцвет механического моделирования связан с именем Исаака Ньютона. Хотя сам Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии» использовал мощный математический аппарат, интерпретация его законов в сознании современников и последующих поколений была сугубо механистической [3]. Гравитация, несмотря на своё действие на расстоянии, воспринималась как сила, передаваемая через некую среду или непосредственно между телами, подобно натяжению нити или столкновению бильярдных шаров. Успех ньютоновской механики в предсказании движения планет, приливов и отливов, а также траекторий снарядов, укрепил веру в универсальность механического подхода. Ключевым принципом здесь была визуализируемость: учёный должен был иметь возможность представить себе модель явления в виде пространственной конструкции. Если теория не позволяла построить такую конструкцию, она считалась неполноценной или метафизической.

В XVIII веке механическое моделирование достигло своего апогея в небесной механике. Пьер-Симон Лаплас в своей работе “Изложение системы мира” продемонстрировал, что вся Солнечная система может быть описана как гигантский механический часовой механизм, где будущее и прошлое однозначно вычисляются из настоящего состояния [4]. Модели этого периода представляли собой сложные системы шестерёнок, рычагов и орбит, часто воплощенные в физических приборах — оррери, демонстрирующих движение планет вокруг Солнца. Эти устройства были не просто игрушками, а серьёзными научными инструментами, позволяющими проверять гипотезы о резонансах и возмущениях орбит. Успех механического моделирования в этот период обусловлен тем, что человеческое познание адаптировано к восприятию макрообъектов. Наш мозг лучше всего обрабатывает информацию о формах, движениях и столкновениях твёрдых тел. Поэтому механическая модель, будучи проекцией нашего повседневного опыта на научные объекты, обеспечивала высокую степень интуитивного понимания.

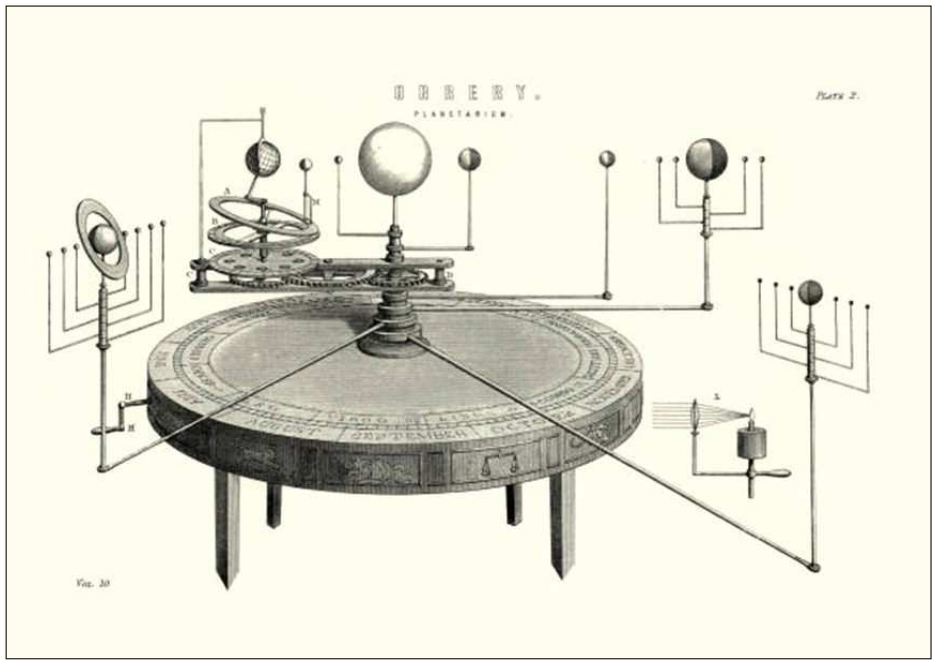


Рисунок 2. Оррери — модель Солнечной системы

В XIX веке, с развитием термодинамики и электродинамики, механическое моделирование столкнулось с новыми вызовами, но пока ещё удерживало свои позиции. Теплота долгое время моделировалась как невидимая жидкость — "теплород", который перетекает от горячих тел к холодным. Хотя эта модель позже была отвергнута, она позволяла строить эффективные механические аналогии для тепловых двигателей. Сади Карно, создавая теорию идеальной тепловой машины, использовал аналогию с водяным колесом, где тепло падает с высокого температурного уровня на низкий, совершая работу, подобно тому, как вода падает с высоты, вращая мельницу. Эта механическая аналогия позволила сформулировать фундаментальные законы термодинамики без знания молекулярной структуры вещества.

Однако наиболее ярко стремление к механическому объяснению проявилось в электродинамике. Джеймс Клерк Максвелл, создатель теории электромагнитного поля, изначально пытался обосновать свои уравнения с помощью механической модели эфира. В своей работе "О физических силовых линиях" (1861) [5] Максвелл представил эфир как среду, состоящую из мельчайших вихревых ячеек, разделённых слоем частиц-"катков". Вращение вихрей моделировало магнитное поле, а смещение катков — электрический ток. Эта сложная механическая конструкция была нужна Максвеллу не потому, что он верил в её буквальную истинность, а потому, что она позволяла ему "ощутить" математику поля через привычные механические образы. Модель сработала блестяще: она привела к выводу о существовании электромагнитных волн и совпадению их скорости со скоростью света. Тем не менее, сам Максвелл позже признавал, что эта модель была лишь временным костылём для мышления.

В то же время лорд Кельвин (Уильям Томсон), представитель викторианской физики, абсолютизируя механицизм, заявлял: «Я не могу удовлетвориться теорией, если не могу создать механическую модель явления». Для школы Кельвина понять электричество означало построить модель из шестерёнок, пружин и жидкостей, которая вела бы себя так же, как электрическая цепь. Это привело к созданию множества громоздких и искусственных конструкций, таких как модель эфира в виде упругой твёрдой среды, которая должна была одновременно быть достаточно жёсткой для распространения световых волн с огромной скоростью и достаточно проницаемой для движения планет без сопротивления.

Механическое моделирование в этот период работало успешно там, где системы были дискретными, макроскопическими и подчинялись законам классической динамики. Оно позволяло инженерам строить мосты, паровые машины и механизмы, опираясь на наглядные расчёты напряжений и движений. Ключевыми учёными, внёсшими вклад в развитие этого подхода, помимо упомянутых, были Христиан Гюйгенс, создавший волновую теорию света на основе механических аналогий, и Михаил Ломоносов, развивавший корпускулярную теорию теплоты. Однако к концу XIX века накопление экспериментальных данных начало выявлять границы применимости этого метода и готовить почву для фундаментального сдвига в науке.

2. Кризис механицизма и зарождение математического моделирования

Конец XIX века стал переломным моментом в истории естествознания, ознаменовавшимся глубоким кризисом механистической картины мира. Накопленные экспериментальные факты всё чаще вступали в противоречие с попытками свести их к механике ньютоновских частиц. Кризис механицизма был вызван рядом фундаментальных проблем, решение которых требовало отказа от наглядных механических моделей в пользу абстрактных математических структур. Этот переход не был мгновенным; он представлял собой болезненный процесс перестройки научного мышления, в ходе которого понятие «модель» трансформировалось из физической копии в символическое отображение.

Одной из главных причин кризиса стала проблема эфира. Механическая модель световых волн требовала существования материальной среды — светоносного эфира, заполняющего всё пространство. Физики десятилетиями пытались придать эфиру механические свойства: упругость, плотность,

вязкость. Однако эксперимент Майкельсона-Морли (1887) показал отсутствие “эфирного ветра”, что означало невозможность обнаружения движения Земли относительно эфира [6]. Попытки спасти механическую модель эфира путём введения сложных гипотез об увеличении эфира или его сжатии (гипотезы Лоренца и Фитцджеральда) делали модель всё более громоздкой и искусственной. Механическое объяснение электромагнетизма зашло в тупик: свойства требуемого эфира были внутренне противоречивы (он должен был быть твёрдым для поперечных волн света и жидким для прохождения планет).

Второй удар по механицизму нанесла термодинамика и статистическая физика. Попытки объяснить тепло как движение частиц сталкивались с парадоксами. Например, проблема теплоёмкости газов: классическая механика предсказывала одно значение, эксперимент показывал другое. Более того, второе начало термодинамики, утверждающее необратимость процессов (рост энтропии), плохо стыковалось с обратимостью законов механики Ньютона. Если мир состоит из механических частиц, почему тепло не перетекает само собой от холодного к горячему? Механическая модель не могла объяснить направленность времени. Именно здесь ключевую роль сыграл Людвиг Больцман. Он предложил отказаться от отслеживания траекторий каждой частицы и перейти к вероятностному описанию [7]. Модель Больцмана была не механической в классическом смысле, а статистической. Он ввёл понятие фазового пространства и показал, что макроскопические свойства вещества определяются распределением вероятностей микросостояний. Это был первый шаг к математическому моделированию, где объект моделирования — не конкретная частица, а функция распределения. Больцман утверждал, что модель не обязана быть единственной картиной реальности; главное — чтобы она позволяла выводить следствия, согласующиеся с опытом.

Третий фронт кризиса открылся в области атомной физики и излучения. Классическая электродинамика предсказывала, что электрон, вращающийся вокруг ядра, должен непрерывно излучать энергию и падать на ядро, что делало бы атом нестабильным. Механическая модель атома (планетарная модель Резерфорда) была внутренне неустойчива с точки зрения законов Максвелла. Кроме того, проблема излучения абсолютно чёрного тела привела к «ультрафиолетовой катастрофе»: классическая теория предсказывала бесконечный рост энергии излучения на высоких частотах, что не наблюдалось в эксперименте. Решение этой проблемы, предложенное Максом Планком в 1900 году, потребовало введения кванта энергии. Это было чисто математическое допущение, не имевшее механического обоснования. Энергия стала дискретной не потому, что так устроен механизм осциллятора, а потому, что так требовала математическая формула, совпадающая с экспериментом.

Процесс зарождения математического моделирования был связан с осознанием того, что математический формализм может опережать физическую интерпретацию. Генрих Герц, ученик Максвелла, в своей книге “Принципы механики” (1894) предложил рассматривать теории как “образы” реальности [8]. Для Герца важнее была логическая непротиворечивость образа и его соответствие опыту, чем его механическая реализуемость.

Однако настоящий прорыв произошёл с созданием специальной теории относительности Альбертом Эйнштейном в 1905 году. Эйнштейн полностью отказался от механической модели эфира. Пространство и время перестали быть абсолютной сценой, на которой разворачиваются механические события, и сами стали динамическими переменными, описываемыми геометрией пространства Минковского. Модель мира стала четырёхмерным геометрическим континуумом, который невозможно представить механически в трёхмерном пространстве. Это была победа математической модели над механической интуицией. Ключевыми учёными, обеспечившими этот переход, стали не только Больцман, Планк и Эйнштейн, но также Джозайя Гиббс, разработавший формализм статистической механики, и Анри Пуанкаре, показавший ограничения механических аналогий в топологии и динамических системах. В начале XX века, с развитием квантовой механики (Гейзенберг, Шрёдингер, Бор), математическое моделирование стало доминирующим. Волновая функция Шрёдингера не описывала никакую материальную волну в пространстве; это был математический объект в гильбертовом пространстве, квадрат модуля которого давал вероятность обнаружения частицы. Механическая на-

глядность была принесена в жертву математической точности и предсказательной силе.

Зарождение математического моделирования произошло в связи с необходимостью описания систем, где число степеней свободы огромно (статистическая физика) или где принципы классической механики нарушаются (квантовый мир). Математическая модель позволяла абстрагироваться от несущественных деталей механизма и фокусироваться на структурных связях и функциональных зависимостях. Если механическая модель спрашивала "как это устроено внутри?", то математическая модель спрашивала "как это ведёт себя?". Этот сдвиг позволил науке продвинуться в области субатомных частиц, космологии и сложных систем, где построение механического макета было принципиально невозможно. Математика стала языком, на котором природа говорит с человеком, даже если этот язык лишён привычной пространственно-временной наглядности. Таким образом, кризис механицизма не означал крах моделирования как такового, а означал его эволюцию на более высокий уровень абстракции, где моделью стала сама математическая структура теории.

3. Критика математических моделей

Переход от механических к математическим моделям не прошёл бесследно для научного климата. Зарождающееся математическое моделирование столкнулось с серьёзной критикой со стороны видных учёных того времени, которые опасались потери связи с физической реальностью и превращения науки в бесплодную игру символами. Эта критика была обусловлена глубокими противоречиями между традиционным пониманием научного объяснения и новым формализмом.

Одним из самых известных критиков модельного подхода, особенно в его механистическом варианте, но также и предостерегавшим от излишней абстракции, был французский физик Пьер Дюгем. В своей фундаментальной работе "Физическая теория: её цель и строение" (1906) Дюгем выступил против попыток искать в теориях отражение скрытой сущности вещей [9]. Однако его критика была направлена и против бесконтрольного использования моделей. Дюгем утверждал, что физическая теория не должна стремиться к «объяснению» в смысле раскрытия механических причин, а должна служить лишь для "классификации" экспериментальных законов. Он опасался, что введение гипотетических сущностей (будь то механические шестерёнки или абстрактные математические объекты) создает иллюзию понимания там, где есть лишь удачная аппроксимация. Для Дюгема модель была потенциально опасной, если она начинала восприниматься как реальность. Он критиковал английскую школу физиков (Максвелл, Кельвин) за их одержимость механическими моделями. Но и чистая математизация вызывала у него осторожность: теория должна оставаться привязанной к измеряемым величинам.

Другим видным критиком был Эрнст Мах. Он подверг сомнению реальность атомов именно потому, что их нельзя было наблюдать непосредственно, а только через математические следствия. Для Маха научные модели должны были быть экономным описанием ощущений. Его критика оказала влияние на поколение физиков, заставляя их быть осторожными с интерпретацией математических объектов. Однако парадоксально, что именно она подтолкнула некоторых учёных к более строгому математическому формализму, чтобы избавиться от «лишних» сущностей.

В начале XX века, с появлением квантовой механики, критика математических моделей усилилась. Многие физики старой школы, включая самого Эйнштейна, были недовольны вероятностным характером новых моделей. Эйнштейн заявил: "Бог не играет в кости". Его недовольство было связано с тем, что математический аппарат квантовой механики (волновая функция) отказывался описывать индивидуальное поведение частицы детерминированно, ограничиваясь статистическими предсказаниями. Для Эйнштейна это означало неполноту модели, скрытие какой-то более глубокой механической или полевой реальности ("скрытые параметры"). Критика заключалась в том, что математическая модель стала "чёрным ящиком": она давала верный ответ на входе и выходе, но не рассказывала историю о том, что происходит внутри процесса. Потеря причинности и наглядности воспринималась как ущерб для понимания природы.

Также существовало недовольство относительно уникальности математических моделей. Если одну и ту же систему уравнений можно интерпретировать разными способами (как показал ещё Больцман), то какая из них истинна? Критики указывали на то, что математическое моделирование ведёт к инструментализму: теория становится просто инструментом для предсказания, а не зеркалом истины. Анри Пуанкаре утверждал, что аксиомы геометрии и физические теории — это соглашения, удобные для описания мира, но не обязательно истинные в абсолютном смысле. Это вызывало тревогу у реалистов, считавших, что наука должна открывать объективную истину, а не просто создавать удобные модели.

Сторонники математического моделирования, в частности представители Копенгагенской интерпретации квантовой механики (Нильс Бор, Вернер Гейзенберг), отвечали на эту критику радикальным пересмотром понятия реальности [10]. Они утверждали, что требование механической наглядности для микромира является ошибкой переноса макроопыта на микроуровень. Бор ввёл принцип дополнительности, согласно которому разные математические модели (волновая и корпускулярная) не противоречат друг другу, а дополняют описание явления в разных экспериментальных условиях. Ответ критикам заключался в том, что "понимание" в науке не должно сводиться к визуализации. Понимать — значит знать правила использования математического формализма для предсказания исходов измерений. Гейзенберг подчёркивал, что математический язык квантовой механики точнее отражает структуру природы, чем любые механические аналоги, которые неизбежно искажают реальность попыткой втиснуть её в привычные рамки.

Кроме того, сторонники нового подхода указывали на эвристическую силу математических моделей. Уравнения Дирака, полученные из требований математической симметрии, предсказали существование позитрона ещё до его открытия. Это было мощным аргументом: математическая модель может вести исследователя туда, куда механическая интуиция не допускает. Ответом на критику «чёрного ящика» стало развитие интерпретаций и новых форм наглядности (диаграммы Фейнмана позже, в середине века, вернули элемент визуализации в квантовую теорию поля, но уже на качественно новом уровне). В итоге, спор между критиками и сторонниками математического моделирования привёл к компромиссу: наука признала, что модели являются инструментами познания, а не абсолютными копиями реальности, и что математическая абстракция является неизбежной платой за доступ к фундаментальным уровням устройства мироздания. Критика помогла очистить математическое моделирование от догматизма, заставив учёных чётко разграничивать математический формализм и его физическую интерпретацию.

Взаимодополняемость механических и математических моделей в науке XXI века

В настоящее время, в середине 2020-х годов, дискуссия о противопоставлении механических и математических моделей утратила свою остроту, уступив место концепции их глубокого синтеза и взаимодополняемости. Современная наука и инженерия не выбирают между механикой и математикой; они используют их в симбиозе, создавая гибридные системы моделирования, которые объединяют точность вычислений с наглядностью представления. Развитие вычислительной техники, искусственного интеллекта и технологий виртуальной реальности позволило преодолеть исторический разрыв между этими двумя подходами, реализовав мечту учёных прошлого об универсальном инструменте познания.

Механические модели в современном понимании не исчезли, но трансформировались. Физическое прототипирование остаётся незаменимым там, где требуется учёт сложных нелинейных эффектов, которые трудно формализовать, или где важна надёжность в экстремальных условиях. Например, краш-тесты автомобилей и испытания новых двигателей на стендах по-прежнему проводятся с использованием реальных механических объектов. Ни одна математическая модель не может гарантировать полный учёт всех микроскопических дефектов материала или непредвиденных аэродинамических возмущений. Механическая модель здесь выступает как финальный арбитр истины.

Также в робототехнике создание физических манипуляторов необходимо для проверки динамики взаимодействия с реальной средой, где трение и люфты могут вести себя иначе, чем в уравнениях.

С другой стороны, математическое моделирование достигло невиданных высот благодаря росту вычислительных мощностей. Климатическое моделирование является ярким примером области, где механическая модель принципиально невозможна — мы не можем создать копию Земли в лаборатории [11]. Глобальные циркуляционные модели, используемые в 2026-м году для прогноза изменения климата, представляют собой системы из миллионов дифференциальных уравнений, описывающих физику атмосферы, океана, криосферы и биосферы. Здесь математическая модель является единственным окном в будущее планеты.

Подобным образом, в фармакологии и молекулярной биологии моделирование сворачивания белков производится исключительно математическими методами на суперкомпьютерах, позволяя проектировать лекарства без необходимости синтезировать тысячи химических соединений вручную [12]. Квантовые вычисления, ставшие к 2026 году более доступными, позволяют моделировать химические реакции на уровне электронных орбиталей с точностью, недоступной классическим компьютерам, что открывает новые горизонты в материаловедении.

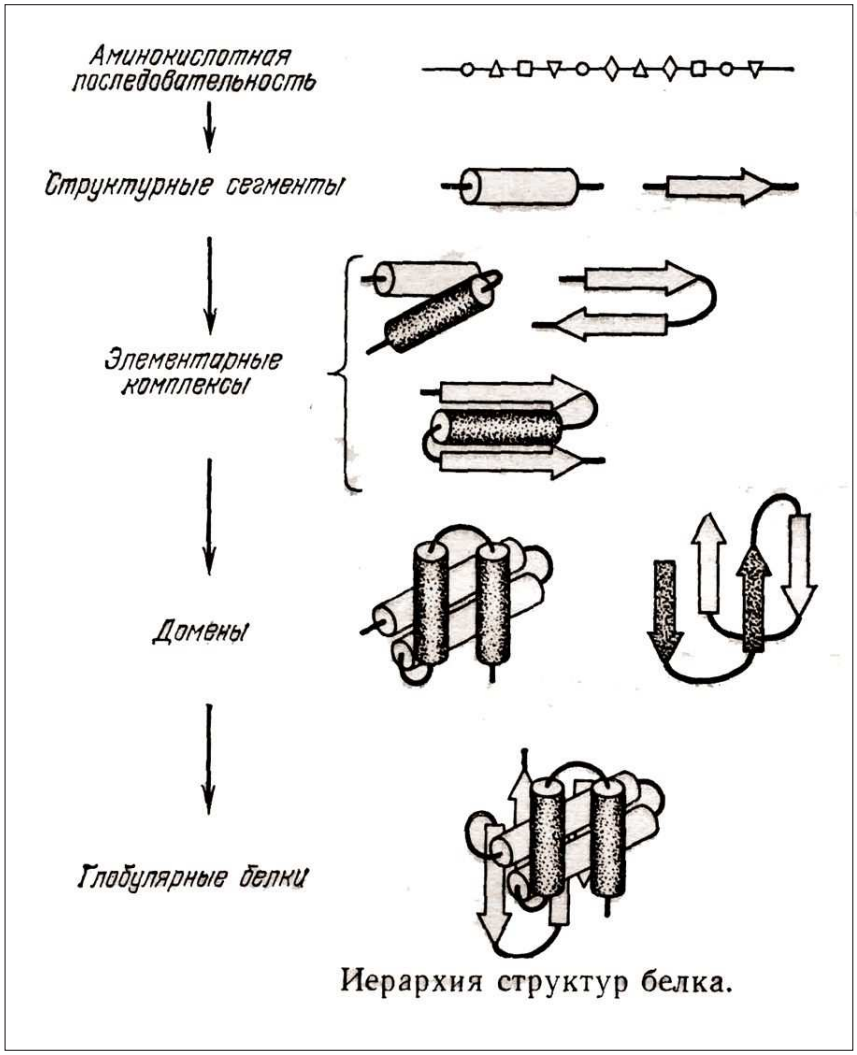


Рисунок 3. Моделирование сворачивания белков

Однако наиболее интересным явлением современности стало слияние этих подходов в концепции “Цифрового двойника”. Цифровой двойник — это виртуальная математическая копия физического

объекта или системы, которая обновляется в реальном времени данными с датчиков, установленных на реальном объекте [13]. Например, современная ветряная турбина или реактивный самолет имеют своего цифрового двойника. Математическая модель прогнозирует износ деталей, оптимизирует режимы работы и предсказывает поломки, а физический объект предоставляет данные для калибровки модели. Здесь механическое и математическое неразделимы: физический объект является источником истины, а математическая модель – инструментом её осмысления и экстраполяции. Это реализация идеи Больцмана о множественности моделей в практическом ключе: одна и та же турбина существует одновременно как металл в пространстве и как код в сервере, и обе сущности необходимы для её эффективной эксплуатации.

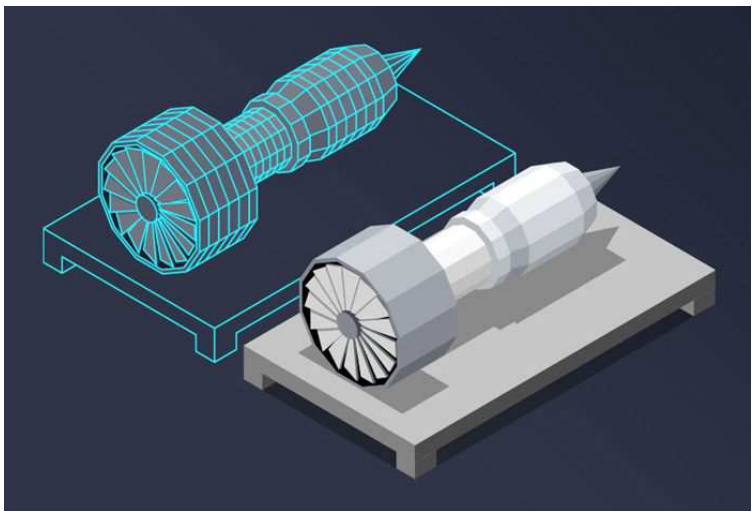


Рисунок 4. Цифровой двойник

Визуализация вернулась в науку в новом качестве. Компьютерная графика позволяет «видеть» математические модели. Инженеры могут надеть очки дополненной реальности и увидеть распределение напряжений внутри детали, рассчитанное методом конечных элементов (математическая модель) и наложенное на реальный объект (механическая реальность). Это удовлетворяет потребность человеческого мозга в наглядности, не жертвуя точностью математики. В образовательном процессе виртуальные лаборатории позволяют студентам взаимодействовать с математическими моделями так, как если бы они были механическими приборами, меняя параметры и наблюдая последствия в реальном времени.

Искусственный интеллект добавил новый слой в эту архитектуру. Нейросетевые модели, обученные на больших данных, часто работают как «чёрные ящики», напоминающие критикуемые Дюгемом инструменты, которые предсказывают, но не объясняют. Однако современная тенденция “объяснимого ИИ” стремится вскрыть внутреннюю логику этих моделей, фактически создавая новые типы математических моделей, которые могут быть интерпретированы человеком. В некоторых случаях ИИ используется для открытия новых физических законов, предлагая математические формы уравнений, которые затем проверяются на физических установках.

Таким образом, в настоящее время мы наблюдаем зрелость научного моделирования. Механическая модель хороша там, где важны надёжность и учёт сложных граничных условий реального мира. Математическая модель незаменима там, где объекты слишком велики, слишком малы, слишком быстры или слишком сложны для физического воспроизведения. Их сочетание в киберфизических системах создаёт синергетический эффект, позволяя решать задачи, которые ранее считались неразрешимыми. История моделирования прошла путь от простых механических игрушек до абстрактных математических структур и вернулась к сложным гибридным системам, где граница между реальным и виртуальным стирается. Этот путь показал, что модель – это не цель, а мост

между человеческим разумом и природой, и чем прочнее опоры этого моста с обеих сторон, тем дальше может зайти наука в своем познании Вселенной.

Литература

1. Alexandr O. “Планетарий Архимеда” и сопряжение дискурсов в античности (астрономические модели круговращения небесных тел и механические устройства античности) // Vox. Философский журнал. – 2012. – № 13. – С. 106-119.

2. Погорельская Е.Ю. Техника на пути к собственной свободе // Социум и власть. – 2018. – № 6 (74). – С. 7-15.

3. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Т. 7. – М-Л: Издательство Академии наук СССР, 1936.

4. Лаплас Пьер Симон П.В.М. Изложение системы мира (Exposition du systeme du monde). – М: Наука, 1982.

5. Максвелл Д.К. О физических силовых линиях / Избранные труды по теории электромагнитного поля. (Перевод с английского).— М.: ГИТТЛ. – 1954. – С. 107-193.

6. Кочетков В.Н. Попытка обоснования невозможности подтверждения теории эфира с помощью эксперимента Майкельсона-Морли // Доклады независимых авторов. - № 51. - 2021.

7. Николаев П.Н. Кинетическое уравнение Больцмана и проблема обоснования статистической механики // Ученые записки физического факультета Московского Университета. – 2022. – № 5. – С. 2250602-1-2250602-6.

8. Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. Серия Классики науки. – 1959.

9. Дюгем П. Физическая теория // Ее цель и строение. - М.: КомКнига, 2007.

10. Санько С.И. Копенгагенская интерпретация квантовой механики и космогония “Ригведы”. – Библиотека БГУИР, 2017.

11. Зеленина Л.И., Федькушова С.И. Климатическое моделирование Арктики (на примере г. Нарьян-Мар) // Инноватика. – 2014. – № 2. – С. 13-26.

12. Калишенко Е.Л., Кринкин К.В. Система топологического моделирования структуры белковых молекул // Прикладная информатика. – 2009. – № 4. – С. 114-124.

13. Сосфенов Д.А. Цифровой двойник: история возникновения и перспективы развития // Интеллект. Инновации. Инвестиции. – 2023. – № 4. – С. 35-43.

Трубицин Никита Михайлович,
Сотрудник Московского центра фундаментальной
и прикладной математики, Москва.

E-mail: trubitsin.nik@mail.ru

Трубицина Надежда Анатольевна,
доцент ФГБОУ ВО РГУПС, Ростов-на-Дону,
кандидат технических наук.

E-mail: nadint73@mail.ru

Трубицин Михаил Анатольевич,
доцент ФГБОУ ВО РГУПС, Ростов-на-Дону,
кандидат технических наук.

E-mail: mihail_trubicin@mail.ru

Информация

Замеченные опечатки в номере 2(118)

От редакции

В печатном варианте номера 2(118) в статье И.Г. Малышева “О четырёхугольнике, имеющем в своём арсенале более четырёх десятков формул, а представленном в учебнике одной” автором указаны следующие опечатки (на сайте журнала исправления внесены):

1. Стр. 4, строка 3 сверху от формулы (3), правая формула.
Напечатано

$$R^2 \sin\varphi = r^2 \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}.$$

Должно быть

$$R^2 \sin\varphi = r^2 \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta}.$$

(вместо знака сложения в знаменателе должен быть знак умножения).

2. Стр. 4, строка 1 снизу от формулы (3). Напечатано $\sin\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$, должно быть $\sin\varphi = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$ (в числителе вместо умножения синусов должно быть сложение).

3. Стр. 6, Таблица 1, строка под номером 2. В последней клетке напечатано $\frac{5\sqrt{145}}{6}$. Должно быть $\frac{5\sqrt{145}}{8}$.

4. Стр. 10, третья строка снизу после Рис. 6, вторая формула после указания источника [18]. Напечатано $\frac{MF}{ME} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\delta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$. Должно быть $\frac{MF}{ME} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$.

Приносим свои извинения читателям.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

Адрес для корреспонденции Фонда: 141080 г. Королев Московской обл., ул. Подлесная, 2-22 .

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Журнал в электронном виде размещается в формате PDF по указанному адресу.

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2026 год (1 экз., включая стоимость пересылки): 200 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2026 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки): 150 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами, а также материалы в электронном виде в форматах TeX, Word, PDF и т.п.

Внимание!

Представление статьи в редакцию означает согласие автора (авторов) на размещение ее в Интернете в архиве журнала, см. выше, а также в Научной электронной библиотеке (НЭБ), в Российском индексе научного цитирования (РИНЦ) и в базе math-net.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. Редакция принимает материал к публикации или отклоняет без объяснения причины. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

A. Afanasiev. Some Remarks on Problems Involving the Dirichlet Principle **2**

This note discusses the nuances of applying the Dirichlet principle to Olympiad-style problems, specifically the issue of condition redundancy.

S. Dvoryaninov, A. Mamkhegov. Two Notes for Schoolchildren **7**

The first note, by S. Dvoryaninov, presents an amusing piece of sophistry for students and teachers to unravel. The second, by S. Dvoryaninov and A. Mamkhegov, analyzes an instructive problem involving a parameter, solved by combining a geometric approach with methods of differential calculus.

K. Kaibhanov. Inequality Relating the Radii of Circles and the Angles of a Triangle **11**

This note proves an interesting inequality relating the radii of circles to the angles of a triangle.

K. Kurianovich et al. Parametrization and Rapid Computation for the Problem of Moving a Ball between Five Urns and between an Arbitrary Number of Urns. **14**

This paper examines a problem involving black and white balls distributed across five or more urns, utilizing the law of total probability. A ball is drawn at random from one urn and transferred to another; each urn initially contains the same number of balls and the same ratio of white to black balls. The objective is to calculate the probability that a white ball is ultimately drawn from the final urn. This yields a simple formula that educators can easily use to create various problems for students.

S. Gladkov. On the Principal Part of the Green's Function for the Fundamental Equations of Mathematical Physics in the N-dimensional Case **21**

An algorithm is presented for the detailed calculation of the principal part of Green's functions for the inhomogeneous N-dimensional heat equation, Poisson's equation, and the wave equation. Certain limiting cases of the obtained solutions are analyzed; in particular, it is shown that the transition from the heat equation to the static case results in a smooth transition of the Green's function into the Green's function for Poisson's equation. Certain physical aspects of spatial and temporal locality are also noted.

V. Igoshin. Structure and Content of the Logical-Didactic Education of Future Mathematics Teachers **29**

The article discusses the pedagogical issue of selecting content for the logic education of future mathematics teachers. This education is examined at two levels, bachelor's and master's, and comprises two components: training in logic and training in logic-related didactics. Carefully selected content plays a significant role in shaping the logical and logic-didactic competencies of future teachers.

N. Trubitsina, N. Trubitsin. Modern-Day Olympiad Cheating: Methods and Safeguards **45**

The article examines the main methods of dishonest participation in academic competitions in the modern context, as well as countermeasures.

N. Trubitsin, N. Trubitsina, M. Trubitsin. The History of Modeling: From Mechanical to Mathematical **51**

The article examines the processes of the evolution of mechanical modeling and its replacement by mathematical modeling, driven by the increasing complexity of the physical and technical objects.

Current Information **60**

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >