Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год седьмой

№4 (27)

Октябрь - декабрь 2003 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 4 (27), 2003 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (27), октябрь – декабрь 2003 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2003 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 08.01.2004 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 6,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Слово о Лузине

И. П. Костенко

В настоящем номере мы публикуем материалы, связанные с деятельностью выдающегося русского советского математика Николая Николаевича Лузина. О научной, педагогической и человеческой роли Лузина размышляет в заметке "Слово о Лузине" постоянный автор нашего журнала Игорь Петрович Костенко. Следующие две публикации представляют собой письма Н. Н. Лузина, в которых затронуты интересные вопросы математического образования и формирования научного мировоззрения.

Имя Николая Николаевича Лузина стоит особо в ряду великих русских математиков от Лобачевского и Чебышева до Понтрягина, Колмогорова, Шафаревича. Эта "особость" связана не только с его огромным вкладом в науку, вкладом, может быть, еще недооцененным, но со всей его личностью и с его уникальным педагогическим даром.

Обычно говорят, что Лузин создал сильную московскую школу теории функций. Это верно, но банально и далеко не достаточно. Ведь каждый большой математик прокладывает новые пути в науке и ведет за собой учеников. Лузин сделал неизмеримо больше, — из него вышла вся советская математика, которую он "выдвинул на одно из первых мест в мире".

Доказательством является оценка истории, данная в конце XX в. В 1992 г. в Люксембурге состоялся Международный симпозиум, посвященный развитию математики в первой половине XX в. В трудах этого симпозиума приведен перечень важнейших математических результатов, полученных за этот период, среди них "теоремы Егорова и Лузина, гипотеза Лузина о рядах Фурье, его диссертация "Интеграл и тригонометрический ряд" и книга об аналитических множествах, открытие Суслиным самих этих множеств, результаты Колмогорова, Александрова, Хинчина, Лаврентьева, А. А. Андронова, Понтрягина, Петровского, И. Р. Шафаревича и др. московских математиков".[1]

Своеобразным и необычным свидетельством особой роли Н. Н. Лузина в истории отечественной математики является так называемое "древо Лузина" на стене механико-математического факультета МГУ.

Но этого недостаточно для понимания феномена Лузина. Суть этого явления русской интеллектуальной истории — в магическом духовно-интеллектуальном поле, которое исходило от его личности, изумляло, покоряло и изменяло (!) каждого,

[1]Природа, 1997, 9, с. 110.

кто оказывался вблизи него. Такой счастливец получал творческий импульс на всю жизнь. Сохранял священную память об этом явлении, как о чуде, до конца дней. Невольно передавал часть полученной чудесной энергии своим ученикам.

Сказанное может показаться экзальтированным преувеличением, поскольку в обычном нашем житейском опыте такого не наблюдается. Ну, так давайте послушаем людей, непосредственно ощутивших на себе магию Лузина.

П. С. Александров — один из четырех первых учеников Лузина (три других — Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, М. Я. Суслин): "Я впервые встретился с Н. Н. Лузиным в 1914 году, будучи студентом второго курса Московского университета. Впечатление от этой встречи было, можно прямо сказать, потрясающим (!) и навсегда запомнилось мне. ... Даром увлекать умы и воспламенять сердца Н. Н. Лузин обладал в высшей степени. ... Я узнал человека, жившего в сфере высших человеческих духовных ценностей, куда не проникает никакой тлетворный дух."[2]

Последняя фраза знаменательна. Обычно, когда хотят возвеличить известного ученого, говорят, что он интересовался не только своей наукой, но и искусством, знал литературу и пр. Все это можно сказать о Лузине. Бывая подолгу в Европе (научные командировки), он изучал ее культуру, музеи, посещал малые города. Но П. С. Александров говорит иное: Лузин именно жил (!) в сфере высшего духа. Такая концентрация духовности в одном человеке и оказывала столь потрясающее воздействие на окружающих.

"В нем поражали большая свобода и непринужденность, отсутствие всякой официальности и замена внешних проявлений почтительности со стороны студентов действительно глубоким уважением, часто переходившим в восторженное преклонение", — продолжает П. С. Александров.

"Это был человек исключительного (!) духовного богатства",[3] — свидетельствуют другие его ученики, — Нина Карловна Бари и Владимир Васильевич Голубев (чл.-корр. АН СССР).

Наверное, именно этим, не только математическим, а духовным богатством личности Учителя объясняется рождение в Москве, в начале 20-х годов XX в. легендарной "Лузитании". Так назвали себя молодые талантливые математики, кристаллизовавшиеся вокруг Лузина. Их объединяли дружеские чувства, молодая, веселая, жизнерадостная энергия, горячая любовь к математике и бескорыстное поклонение своему "командору" Н. Н. Лузину. Кроме имен, перечисленных выше, в "орден" входили В. В. Степанов, П. С. Урысон, Л. А. Люстерник, М. А. Лаврентьев, А. Н. Колмогоров, Л. Г. Шнирельман, П. С. Новиков, Л. В. Келдыш, В. И. Гливенко, В. Н. Вениаминов, В. В. Немыцкий, В. С. Федоров, Ю. А. Рожанская и др. Увлекательные описания кипучей жизни Лузитании дают воспоминания, опубликованные УМН в 1965, 1967, 1970 гг.

А вот грани педагогического гения Н. Н. Лузина.

"Это был удивительный лектор. Каждая его лекция представлялась нам вдохновенным творческим процессом поиска и открытия истины ... все мы испытывали необыкновенное увлечение ... мы чувствовали себя взволнованными почти как в

---

[2]УМН, 1979, т. XXXIV, вып. 6 (210), с. 242; т. XXXV, вып. 3, с. 241-278.

[3]Н. Н. Лузин. Собрание сочинений, т. III. Изд. АН СССР. М., 1959, с. 482.

Художественном театре после какого-либо монолога Качалова ... И волшебство (!) начиналось ...",[4] — вспоминает А. П. Юшкевич, известный историк математики, слушавший в 20-х годах лекции Лузина.

Математик и методист Н. М. Бескин возвращается к Лузину в 90-х гг.: "Однако, все еще недостаточно освещено его громадное влияние на тысячи (!) людей, которые не примкнули к его научной школе, а только слушали его лекции или общались с ним на семинарах. Я назвал это влияние громадным, но это слишком мало. Он влиял на формирование личности, на научное мировоззрение. К нему применимы слова австрийского физика Людвига Больцмана: "Если бы не было Шиллера, то не было бы и меня. То есть, был бы человек с такой же бородой и формой носа, но это был бы не я." Многие и многие математики (и я в том числе) могут сказать то же самое и о Лузине. ...Лично мне лекции Лузина дали бесконечно много. Я впервые приобщился к важным математическим проблемам. Моя математическая методология и математическое мировоззрение сложились под влиянием Лузина. Я до сих пор не забыл ничего, что слышал от него."[5]

Еще одна грань. В 1921 году Лузин ввел в высшую школу учебник американского математика и педагога В. Э. Грэнвиля (1863-1943), ежегодно редактировал его и совершенствовал. В 1933 г. издал свой учебник, но по редкой деликатности оставил на титуле имя Грэнвиля. Этот учебник почти 30 лет был стабильным и направлял преподавание математики в наших втузах. Его роль в формировании высококачественного инженерного корпуса страны неоценима.

"Эта книга, как и все, написанное Н. Н. Лузиным, отличалась необыкновенной живостью и ясностью изложения, красочностью языка; автор не только доказывает, но и в живой, образной форме разъясняет (!) содержание курса".[6]

Собственно математическое творчество Лузина так же изумляло современников. Его выдающиеся ученики Л. В. Келдыш и П. С. Новиков характеризуют научный дар Учителя так: "Благодаря исключительной интуиции и способности глубоко видеть самое существо вопроса, Николай Николаевич нередко предсказывал математические факты, доказательство которых оказывалось возможным только много лет спустя и требовало создания совершенно новых методов математики. Он был одним из крупнейших математиков-мыслителей нашего времени."[7]

"Математик-мыслитель"! Математик-философ! К кому еще из великих приложимо это определение? Разве лишь, к Анри Пуанкаре. Между прочим, оба они (и, повидимому, только они) сразу поняли, "что идея Гильберта о возможности формализовать всю математику является ошибочной".[8] Поняли задолго до того, как была доказана теорема Геделя. Более того, Лузин предвосхитил теорему Геделя, высказав предположение, что "среди задач арифметики есть задачи абсолютно неразрешимые".[9]

---

[4]Сборник научно-методических статей по математике, 1976, вып. 6, с. 101.

[5]Историко-математические исследования, 1993, вып. XXXIV, с. 172. В дальнейшем будем обозначать это издание кратко — ИМИ.

[6]Н. Н. Лузин. Собрание сочинений, т. III. Изд. АН СССР. М., 1959, с. 481.

[7]УМН, 1953, т. VIII, вып. 2 (54), с. 102.

[8]Там же, с. 102.

[9]Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб, РХГИ, 1999, с. 18.

Для того, чтобы не согласиться с Гильбертом — первым авторитетом в математике своего времени, — надо было обладать высшим, не столько математическим, сколько философским мышлением. Мышлением, органично и глубоко связанным с сущим, а не с логической системой.

На эту невиданную в математике особенность изумленно обращали внимание зарубежные ученые. Анри Лебег в своем предисловии к монографии Лузина об аналитических множествах, изданной в Париже в 1930 г., пишет: "Г-н Лузин исследует вопросы с философской точки зрения и приходит к математическим результатам: беспрецедентная оригинальность!"[10] Французы почтительно величали его "русский геометр". Знаменитый А. Данжуа, друг Лузина, (он даже просил его быть крестным отцом своего сына), через много лет после смерти Николая Николаевича назвал его в своей статье "одним из самых великих аналистов в мире".[11]

По свидетельству А. П. Юшкевича, Н. Н. Лузин до конца своих дней не переставал думать над проблемой обоснования анализа, — проблемой, которая поразила его еще в юности кривой Weierstrass'a. Изумительное исповедальное описание интеллектуальной "душевной драмы", пережитой с этой кривой, представлено в этом номере "Математического образования" (письмо к М. Я. Выгодскому). Намек на непрекращающиеся терзания слышен в письме А. Н. Крылову:

"Вся деятельность — моих личных учеников и моя — состоит в усилиях как-то уничтожить эту идею (актуальной бесконечности, — И. К.), но вместо триумфа мы натолкнулись на ряд загадок, полностью разгадать которые мы не умеем, но которые не оставляют ни малейшего сомнения (!) в том, что дело математического анализа поставлено неправильно (!?) при введении в него идей Cantor'a."[12]

В чем же состоит "неправильность"? Похоже, этот вопрос сегодня никого не интересует. Чуть далее Н. Н. Лузин говорит даже о "яде, который содержится в атмосфере современного анализа".

Возможно, что эта и другие математико-философские мысли Н. Н. Лузина, преждевременны. Возможно, о них вспомнят в далеком будущем, когда будет осознан очередной кризис математики. Кризис, который чувствуется уже сегодня, в частности, в математическом образовании.

Математика объективно пошла по иным путям не столь глубоких, сколько широких обобщений и творчества в рамках строгих логических систем, оставив позади мысль и страдания Лузина. Не ведут ли эти догматические рамки к вырождению мысли в схоластику?

Возьмем современное общепризнанное определение функции. Функция — однозначное соответствие между двумя множествами. Строго, просто и ясно. Не вызывает никаких сомнений. Незыблемо. Окончательно!

А Лузин посвятил истории и разъяснению этого понятия 20 больших страниц в 1-м издании Большой Советской Энциклопедии. И резюмировал так: "Понятие

---

[10] УМН, 1985, т. XXXX, вып. 3 (243), с. 10.

[11] ИМИ, 1978, вып. XXIII, с. 315.

[12] ИМИ, 1989, вып. XXXI, с. 244. Относительно того, как Н. Н. Лузин понимал "неправильность" постановки математического анализа, см. статью "Дифференциальное исчисление" в БСЭ, 1-е изд., т. 32, 1934, с. 622-642. Статья эта перепечатана в Собр. соч. Н. Н. Лузина, т. III, 1959, с. 292-318.

функции — одно из самых основных понятий современной математики. Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому *ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия* (курсив мой, — И. К.), усвоить которое возможно, лишь проследив основные линии его развития, теснейшим образом связанного с развитием естествознания, в частности математической физики."[13]

После этого резонно спросить, способна ли современная математика мыслить в категориях Лузина? И кто здесь прав? Ответит будущее.

Мышление, стремящееся проникнуть в глубины, проявлялось не только в сфере математики, а во всем, чего касался ум Лузина. Вот простой пример.

В предисловии к учебнику 30-х годов, Николай Николаевич объясняет нам причину появления плохих учебников и показывает механизм создания хорошего учебника. Актуальные поныне вопросы. Их многими десятилетиями решают "научные" подразделения АПН и РАО, а также масса сочинителей современных нечитаемых учебных книг.

"Предлагаемый в настоящий момент курс анализа сложился у И. И. Жегалкина в течение более чем тридцатилетнего личного преподавания и является результатом непрерывных педагогических размышлений".[14] Почему же необходим столь длительный опыт и столь напряженные размышления?

Потому, что нельзя "исходить при составлении учебника от обычного представления об *идеальном читателе.* А между тем большинство учебников именно и отправляются от этого представления, наделяя этого абстрактного читателя беспредельными внимательностью, понятливостью, догадливостью и сообразительностью. ... Когда вдумываются в причины возникновения иллюзии "идеального читателя", то немедленно замечают, что *под таким читателем автор просто разумеет себя самого и именно то состояние своего ума, которое он имеет в момент создания учебника, но отнюдь не то состояние ума, которое было у автора, когда он сам впервые знакомился с излагаемыми им идеями* (курсив Лузина, — И. К.). Об этом последнем обычно говорят очень неохотно, вспоминая его исполненным всяческих недоумений и рассматривая его поэтому как *"неправильное"*, тогда как именно оно самое и было вполне *"правильным"*, потому что являло действительность, наблюдаемую у всех без исключения".[15]

Для того, чтобы понять реальное состояние ума учащегося, необходим длительный опыт "глубокого (!) научного (!) анализа тех иллюзий и заблуждений, которые зарождаются в уме учащихся, которые раскрываются в их неверных проверочных ответах и источником которых, в конце концов является неверная оценка их умом

[13] Статья "Функция" в БСЭ, 1-е изд., 1935, т. 59, с. 314. См. также Н. Н. Лузин, Собрание сочинений, т. III, 1959, с. 319. Во 2-м издании БСЭ 1957 г., т. 45 упомянутая статья Н. Н. Лузина изъята и заменена справочной заметкой И. П. Натансона, озаглавленной так же. Математическим редактором этого издания был А. Н. Колмогоров.

[14] И. И. Жегалкин, М. И. Слудская. Введение в анализ. М., 1935, с. X.

[15] Там же, с. XI.

тех или других элементов обыденной жизни".[16]

Какое глубокое проникновение в истину! И как пошл в сравнении с подлинной мудростью современный "плюрализм".

А вот пророческие мысли о развитии науки, высказанные в письмах к А. Н. Крылову в 1934 г. Мысли, неявно подтверждаемые современной философией, констатирующей кризис науки и даже самого научного метода (кризис рациональности).[17]

"По-видимому, мы имеем дело вообще с громадным (!) понижением научной чуткости, с явной утратой чувства гармонии и истины. ...Но опять-таки, это не главное, так как не люди виноваты. А здесь есть что-то другое, бесконечно более глубокое, что надвигается на ищущий истины ум, как луна на солнце. Измельчание, утрата пафоса — все это налицо; все это явные признаки надвигающейся на науку тени."[18]

Наконец, надо сказать, что судьба Н. Н. Лузина трагична. Как и судьба многих талантливых русских людей в XX веке. Он изведал долголетнюю изощренную травлю,[19] попытки затереть его имя в науке,[20] предательство части своих учеников.[21] Феномен Иуды вечен. Как вечен императив: "Уничтожь лучшего!".

---

[16] Там же, с. X.

[17] Современная философия науки. М. Логос. 1996.

[18] ИМИ, 1989, вып. XXXI, с. 252.

[19] Там же, с. 204-206. Математический сборник, 1931, т. 38, вып. 3-4, с. 5, 6, 11.

[20] Вестник РАН, 2002, т. 72, 8, с. 740.

[21] Надо назвать имена травивших, предавших и пособников. Сегодня можно документально установить следующие их имена: Л. З. Мехлис, Э. Я. Кольман, Н. П. Горбунов, В. И. Гальперин, О. Ю. Шмидт, П. С. Александров, С. Л. Соболев, Л. А. Люстерник, А. О. Гельфонд, А. Н. Шнирельман, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, Б. И. Сегал, С. А. Яновская, Н. Н. Бухгольц, А. Ф. Бермант, Ф. Р. Гантмахер, Д. А. Райков и др. (см. УМН, 1937, вып. 3; Вестник АН СССР, 1936, 8-9; 1989, 4, с.102-113; Природа, 1997, 9, с. 109; Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб, РХГИ, 1999).

В защиту Н. Н. Лузина выступили П. Л. Капица, И. П. Павлов, В. И. Вернадский, Н. В. Насонов, Н. С. Курнаков, А. Н. Крылов, С. Н. Бернштейн.

Вопрос о тайных целях травителей все еще считается открытым. Так бывает, когда страшновато посмотреть правде в глаза и она невольно "вытесняется" из сознания. Правда, некто А. Е. Левин, философ-эмигрант из России, недавно дал в иностранном издании установку объяснять "дело Лузина" некими стратегическими замыслами И. В. Сталина. Эту установку отрабатывают составители книги "Дело академика Николая Николаевича Лузина". Вместе с тем, они признают, что "инициаторами" были Мехлис (главный редактор "Правды") и Кольман (зав. отделом науки МК ВКПб), а "прокурором" - математик П. С. Александров.

Следует обратить внимание на связь "дела Лузина" с "реформой-70": именно математики, травившие Н. Н. Лузина в 30-х годах, в 60-х изгнали из высшей школы его учебник, после чего началась деградация математического образования инженеров (см. Университетская книга, 1997, 6, с. 14-18; 8, с. 21-26; 9, с. 32-35); в 70-х они же провели школьную реформу, разрушившую фундамент отечественного математического образования. Принцип этой реформы (строго-формализованное и обобщенно-абстрактное преподавание) отрицался всей научной и педагогической жизнью Н. Н. Лузина (см. там же). Принцип этот родился в абстрактных умах московских математиков именно в 30-е годы (см. там же). Тогда же началась его теоретическая разработка (Хинчин, Бермант и пр.) и первые попытки внедрения. Существенным препятствием для инноваторов-30 был учебник Лузина (там же). В случае успеха "дела Лузина" его учебник уничтожался бы автоматически.

Но правда и тайна Лузина тихо живет. Живет в душах тысяч людей, когда-либо прикоснувшихся к его слову и мыслям.

Есть люди, у нас и за рубежом, которые изучают наследие Н. Н. Лузина. На протяжении 70-90-х гг. в международных журналах появился целый ряд работ, посвященных Н. Н. Лузину и его школе.[22] Ch. Ford начинает свою статью 1997 года многозначительными словами: "Николай Николаевич Лузин — один из ведущих деятелей математики XX века".[23] Из Вермонта (США) едет в Москву некто R. Kuc, чтобы поработать с его архивом. Публикуются поразительная переписка со священником П. А. Флоренским, инженером-кораблестроителем А. Н. Крыловым[24] и др., приоткрывающая "исключительное" богатство духовного мира, невероятное для нашего рационализированного, упрощенного сознания. Вот маленький пример из письма 22-летнего Лузина к отцу Павлу из Парижа в 1906 году.

"Мне слишком тяжело жить, иногда мучительно тяжело, ...я не могу найти решения к "проблеме жизни". ...Это ужас, ужас, бесконечный ужас видеть окрест себя эгоизм, один только эгоизм, без просвета ...Но одной наукой жить не могу ...Я готов отказаться от личной жизни, чтобы только знать, где искать истину. ..."[25]

Тихо отмечаются юбилеи. Десять лет назад, в год 110-летия рождения Н. Н. Лузина периодический альманах "Историко-математические исследования" посвятил памяти Н. Н. Лузина четыре статьи. Достойно отмечена эта дата в издании American Mathematical Society.[26] Журнал "Успехи математических наук" не поместил ни строчки. Помпезных собраний не устраивается, парадных речей не произносится. Это и хорошо.

Вспоминаются мудрые слова, сказанные на II Международном конгрессе по математическому образованию 1972 г. одним из очень немногих глубоких современных математиков Рене Томом: "таков закон нашего общества, а именно: в нем самые важные вещи совсем не те, о которых говорят".[27]

Похоронен Н. Н. Лузин на Введенском кладбище в Москве, на одной аллее с А. М. Ляпуновым.

28 октября 2003, г. Краснодар

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной
педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

[22] ИМИ, вторая серия, вып. 2 (37), 1997, с. 42-43.
[23] Там же, с. 33.
[24] ИМИ, вып. XXXI, 1989, с.116-272; вторая серия, вып. 2 (37), с. 33-43.
[25] ИМИ, вторая серия, вып. 2 (37), с. 35-37.
[26] Там же, с. 42.
[27] На путях обновления школьного курса математики. М. Просвещение. 1978, с. 274.

Письмо Н. Г. Ованесову

Н. Н. Лузин

Письмо было написано Николаем Николаевичем Лузиным в 1948 году и предоставлено для публикации адресатом Н. Г. Ованесовым; впервые опубликовано в "Сборнике научно-методических статей по математике", вып. 3, 1973, с. 110-115. Для настоящей публикации материал предложен Игорем Петровичем Костенко. Письму предшествует пояснительная заметка Н. Г. Ованесова.

Письмо академика Николая Николаевича Лузина

В 1947 году автору было поручено руководство студенческим кружком по математическому анализу в Астраханском пединституте.

Одна из групп студентов занималась изучением истории развития математического анализа. Эту группу интересовала роль советской математики в истории науки, что привлекло их внимание к личности академика Николая Николаевича Лузина.

Некоторые сведения о трудах Н. Н. Лузина имелись, но их было недостаточно. Многое нас поражало в этом замечательном ученом, в особенности, его талант вовлекать в научное творчество своих учеников, многие из которых впоследствии сами стали выдающимися учеными-математиками.

Осенью 1947 года на заседаниях кружка нередко возникали вопросы, касающиеся генезиса научной личности Н. Н. Лузина. В конечном итоге руководителю кружка, в то время молодому ассистенту, пришлось довольно робко обратиться с рядом вопросов к самому Николаю Николаевичу.

Николай Николаевич точно определил наше желание знать о генезисе его научной личности, из каких элементов она возникла, как постепенно слагалась и проявилась для него и окружающих, как крепла и развивалась, и какие факторы содействовали этому.

В ответном письме выдающийся ученый приводит достаточно подробное описание многих очень интересных фактов, которыми так богата его жизнь, очень интересные и поучительные сведения из своих детских и юношеских лет.

Беседы со многими учеными-математиками убедили меня в том, что это письмо не следует рассматривать как мою личную собственность и что с его содержанием полезно познакомить широкие круги математиков, в особенности молодых, начинающих.

Ниже приводится полный текст письма Николая Николаевича Лузина с сохранением всех особенностей его написания.

Н. Г. Ованесов (Астрахань)

Москва
Сретенский бульвар,
д. 6/1, кв. 105,
6 янв. 1948

Глубокоуважаемый и дорогой
Николай Гаврилович,

простите, что столь замедлил ответом на Ваше письмо от 13-го декабря, глубоко меня тронувшее: эти недели мне сильно нездоровилось.

Ваше письмо такого рода, что на него отвечают с полным вниманием, и я постараюсь сказать Вам, что смогу.

Прежде всего, не ищите моих биографических данных в печати. Их просто нет, я думаю. Время теперь столь горячее, и оно столь быстро идет — не только для Вашей юности, но и для моего возраста — что всякая остановка в пути является помехой. А биография всегда есть остановка.

Однако, Академия Наук СССР, в целях чтобы наши имена не стерлись, все же сделала распоряжение об описании жизни и трудов каждого из нас. Меня "описывали" двое из моих учеников: проф. Димитрий Евгеньевич Меньшов и проф. Петр Сергеевич Новиков. Оба они — мужи достойные и сильные — взяли, каждый по одной моей "половинке": первый — метрическую часть Теории Функций действительного переменного, второй — ее дескриптивную часть.

Список моих научных работ был тщательно прослежен по обзорам и непосредственным поиском по различным библиотекам.

Что же касается до данных моей биографии, то здесь я уже проследил за писанием Д. Е. Меньшова и П. С. Новикова: чтобы они не очень то увлекались.

Таким образом, биография вышла совсем схематическая: что и требовалось иметь. Вроде тех curriculum vitae — жизнеописаний — которые уже и Вам, вероятно, приходилось давать в различные учреждения по разным поводам, или еще предстоит многократно давать.

Сейчас эти материалы направлены Президенту Академии Сергею Ивановичу Вавилову, потом поступят в печать, и потом я буду иметь удовольствие прислать лично Вам экземпляр всего этого, Николай Гаврилович.

Я прекрасно понимаю, что именно движет Вами и Вашими учениками: это — желание знать о генезисе моей научной личности, из каких элементов она возникла, как постепенно слагалась, как проявилась, для меня самого и для окружающих, как крепла и развивалась, и какие факторы, внутренние и внешние, содействовали этому. Ведь я верно угадал, не правда-ли?

Так вот, ЭТОГО Вы не найдете нигде, ни относительно меня, ни относительно других. А между тем я с полнейшим уважением и пониманием отношусь к этому желанию, так как знаю, что не праздное любопытство движет юными умами, когда они домогаются ЭТОГО, а желание **почувствовать** биение научной зарождающейся жизни у других, с тем, чтобы сравнить с этим и себя самого, в целях, чтобы ПОНЯТЬ САМОГО СЕБЯ и правильно оценить те могущественные интеллектуальные порывы, которые представляются НЕОСОЗНАННЫМИ и СОВЕРШЕННО ТЕМНЫМИ для юного ума, впервые вступающему в жизнь.

Правильно говорили античные мыслители, что правило "ПОЗНАЙ САМОГО СЕБЯ" – есть важнейшее из всех правил. Но только они относили его к состоянию зрелости ума, а не к пробуждающемуся к жизни юному интеллекту. А, между тем, это последнее, как раз, **неизмеримо важнее**, ибо правильно понятые юным умом свои собственные порывы, устремления, желания и надежды делают, в дальнейшем из человека даровитость, талант и гений. Все это зависит не от мифической "мощи" ума, которую — неправильно и грубо — иногда понимают, как своего рода мотор в голове, но от правильного понимания себя самого в отношении своих вкусов и стремлений. Понять самого себя — это значит пробудить себя к творческой жизни, **родиться в творческую жизнь**.

На этом пути сколько встречается недоразумений, непонимания, страшных роковых для жизни ошибок и, наконец, прямого невежества! Средний интеллигент не знает и не понимает здесь многого.

Наиболее правильно данная классификация возрастов человеческой жизни принадлежит античным римлянам. Вот эта классификация:

"Puer", т. е. "мальчик" до 20 лет,
"juvenes", т. е. "юноша" до 40 лет,
"vir", т. е. "муж" до 60 лет,
и "senex", т. е. "старик" от 60 лет.

Эта классификация — общая, т. е. относится более к исполнению гражданских обязанностей, чем к искусству и науке.

В этом последнем отношении, в условиях современной культуры, должно быть внесено **некоторое дополнение** (и не изменение).

В музыке интеллект осознает себя раньше всего: около 15 лет. Склонность к физике, химии начинает осознаваться около 20 лет. Около того же времени человек чувствует себя натуралистом. В математике интеллект осознает себя полностью лишь около 40 лет (т. е. понимает свое призвание и понимает то, что в выборе математики им не было сделано ошибки). В философии органическое понимание своих сил и призвания происходит лишь около 50 лет. В дипломатии около 60 лет (ибо там необходимо знание страстей и целей). Повторяю, пробуждение ума для той или иной области есть дело не столько этого ума, сколько самой той области, в которой он пожелал жить и работать. И именно поэтому то мне столь ясны и для меня так законны желания Ваши и Ваших учеников иметь раскрытым научный путь той или другой личности. Ведь верно я Вас понял, не правда-ли?

Так вот, этих-то данных как раз и нельзя найти в печати, и не только касательно меня лично, но и всякого другого!

Почему? спросите Вы. Право не знаю. **В печати** этого не делают. Но в УСТНОМ ПРЕДАНИИ это дается, и ЭТО как раз и составляет то, что называют ЖИЗНЬЮ ШКОЛЫ. И, прибавлю, это то и есть **важнее всего**, а не те печатные мемуары, журналы, книги, которые можно купить везде.

Представьте себе только, что — преодолев пространство и время — Вы, войдя в Ваш городской сад, могли бы увидеть Аристотеля, прогуливающегося по аллее со своими учениками, и, вмешавшись в их толпу, слышать его рассуждения, непосредственно ощущать все движения его ума, прикасающегося к вещам, слышать его голос, видеть его жесты. Разве ЭТО не дало бы Вам бесконечно больше, чем все скучные и длинные изложения, которые Вы можете прочесть в бесчисленных курсах по истории философии? Книги никогда не преодолевают пространства и времени.

Я много читал, изучал и думал. Но, уверяю Вас, все это не стоило и четверти того, что я понимал, видел и чувствовал, соприкасаясь всякий раз с какой-либо могущественной живой математической школой. У нас есть несколько прекрасных математических школ, в разных городах, идущих в различных математических направлениях. И, следует со всею силою подчеркнуть, что, чем старее школа, тем она ценнее. Ибо школа есть совокупность накопленных веками творческих приемов, традиций, **устных преданий об отшедших ученых или ныне живущих**, их манере работать, их взглядах на предмет исследований. Эти устные предания, — накапливающиеся столетиями и не подлежащие печати или сообщению тем, кого считают неподходящим для этого — эти устные предания суть сокровища, действенность которых трудно даже представить себе и оценить. В недрах старой школы даже от природы "несильный" человек делает важнейшие вещи. Здесь личность члена школы **неотделима от целого школы**, т. е. от совокупности составляющих ее математиков, как отшедших, так и ныне живущих и действующих.

Если искать каких-либо параллелей или сравнений, то возраст школы, накопление ею традиций и устных преданий, есть не что иное, как энергия школы, в неявной форме.

Ленинградская школа (прежде: петербургская) у нас самая старая и самая крепкая. Московская — моложе и, потому, слабее: устных преданий у нас, в Москве, меньше, чем в Ленинграде. Но есть, вообще, школы, насчитывающие почти тысячелетие и ведущие счет от Альберта Великого (Albertus Magnus, 1193—1280 г.). Немецкая школа совсем молодая, насчитывающая не более 185 лет, и потому менее всех интересная. Вообще, молодая школа может блестеть именами, но эти люди не спаяны, каждый из них изолирован и, **как целое**, школа лишена большой силы. А высокая индивидуальность отдельных деятелей такой школы ведет к появлению центробежных сил, взаимного соперничания и развитию неприязненных отношений, что окончательно ослабляет целое.

Когда я, сибиряк из города Томска, впервые попал в недра большой школы, у меня создалось странное ощущение. О носителях прославленных имен говорили в таком тоне, как будто бы к ним можно было пойти на чашку чая, хотя уже столетие или два столетия, как они умерли. Их идеи, их образы, их манера мыслить буквально висела в воздухе, и для меня само время стало исчезать. Я перестал порою понимать, идет ли речь о лице, которое еще читает лекции, или он, член плеяды блестящих имен, давно отошел. Грань времен стерлась и я, через посредство живых вступил в столь же живое общение с отшедшими. Чувство было очень странное, непривычное и поражающее.

И здесь-то мне стало ясным, почему поляк, прекрасно владеющий французским языком, не задумываясь говорит и пишет: "Soit E un ensemble de la puissance du continu", – тогда как француз **никогда** таким образом не выразится и напишет: "Soit E un ensemble ayant la puissance du continu".

Тысячелетняя давность школы, от Альберта Великого и Петра Абеляра, **повелевает никогда не склонять слово "мощность"**. Для француза нет понятия, адэкватного слову "мощность". Это слово для француза пустое место, дырка, *X* — природа которого, со временем, выявится. Юные же деятели Варшавской школы (вернее: деятели юной Варшавской школы) простодушно употребляют слово "мощность" в родительном падеже *("de la")*, веря, что они развивают дальше идеи теории функций!

И, потом, их новое словотворчество, их "открытие", что, раз говорят:

fini и infini,

то надо говорить

denombrable и indenombrable

вместо

non denombrable,

— совершенно явно указывают на юный возраст Варшавской школы и ее наивность.

Вы понимаете, что дело идет НЕ О СЛОВАХ, а о стоящих за ними **идеях**.

Простите, за затянувшееся письмо. Уверяю Вас, я — из своего общения со старыми школами — знаю такое, что нельзя узнать из книг, и не нужно знать. Да Вы и сами в этом убедитесь, если мы лично увидимся или если сохранится наша переписка.

Пока же скажу Вам несколько слов о себе, которых Вы не найдете в печати и что не должно никогда быть напечатанным.

Родился я в Сибири, городе Томске. Глухой город, однако "столица" Сибири. Его окружала глухая тайга и вековечная борьба за существование и в растительном мире, и в мире животных. Томск стоит на берегу небольшой реки "Томь". За рекою — медвежьи берлоги. Я учился в "классической гимназии". У моих сверстников был культ физической силы; вполне понятно почему: близость столь сильных зверей, как медведи и рассказы о них заставляли видеть в физической силе высшее благо.

Я был физически очень слабым (хотя и нормальным) и робким. Товарищи хотели меня приохотить к их интересам и, злоупотребляя своею силою, достигали обратного. Я просто боялся быть в их обществе и уединялся, когда только мог. Был в Томске единственный книжный магазин, в который тогдашняя "Европейская Россия" пересылала всякую ненужную литературу: была полная мешанина, разбираться в которой я быстро приохотился. Я был единственным ребенком у моих родителей. Отец — торговый служащий. Оба были полуобразованы, но все же читать и писать могли. Понимая мое отчуждение от товарищей, они предоставляли мне полную свободу действий **внутри меня самого**. За эту свободу – вечное им спасибо! Я рос "сам из себя", и моя голова была полна **миром фантазии**. Я читал буквально все, что видел на прилавке магазина и, конечно, **ничего не понимал**. Я читал Канта "Критику Чистого Разума" ранее романов Жюль-Верна. Книги философские больше всего меня привлекали, **потому что я их не мог понять** и я искал тайного смысла их, хотел понять его, похитить его, даже "силом". Я был одинок абсолютным образом, у меня не было никого ни из товарищей, ни из взрослых, интересы которых все вращались около охоты и вина.

Жюль Верна я считаю своим учителем, так как именно он привил мне веру в науку, любовь к ней и жажду сделаться инженером. Но я хорошо понимал, что без математики невозможно быть инженером. И я пожелал овладеть ею.

Учителя в Томской гимназии были очень средние люди, выброшенные из недр "Европейской России" за их отрицательные качества. Учителя по математике, по геометрии особенно, заставляли учить наизусть теоремы И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Механическая память у меня была слабая и я стал все отставать и отставать. Учился я средне из за "фантастики" и отсутствия механической памяти, т. е. способности "зазубривания". Я стал приносить из гимназии отметки по математике 4, потом 3, потом 2. Здесь отец нанял мне "репетитора", так как неуспеваемость по математике грозила мне оставление на 2-ой год в классе ("второгодник" – кличка была позорная). Репетитор был взят отцом из студентов Томского политехникума, недавно открывшегося в Томске. В Университете было только два факультета: Медицинский и Юридический для оказания помощи "краю", т. е. Сибири. Студент, благодаря моей судьбе, оказался очень даровитым. Он заметил мою неспособность к механическому запоминанию и поставил дело на дальнейшее развитие фантазии, оплодотворенной логикой. Именно, он прямо заставил меня решать задачи из задачника Рыбкина по тригонометрии и геометрии. Когда же я стал возражать говоря, что для этого надо знать теорию, т. е. "зубрить", он отвечал: "Ну, она-то Вам и будет ясна из практики". Короче, я минуя всякую схоластику и зубрежку, прямо начал под его наблюдением решать задачи, справляясь с теорией по мере лишь необходимости и беря из нее лишь то, что непосредственно нужно было для решения задачи и получения ответа, указанного в задачнике. Этот метод позволил мне познакомиться с теорией не путем зазубривания, а совершенно реально, как с рессурсом необходимости. Мои отметки по математике стали повышаться, возвратилась 3, потом 4 и через год и 5. Я стал лучшим "решателем" задач в классе. Но, хотя теорию (алгебры и геометрии) я знал, однако, все же не понимал ее внутренне: у меня уже стал появляться научный вкус.

Я хотел идти в инженеры, именно в **морские**, под влиянием Жюль-Верна. Но в тогдашнем Петербургском Морском Училище надо было преодолеть "конкурсные экзамены": на человека приходилось по 4-5 соперников. Будучи робким, я отказался идти на конкурс. Тогда отец посоветовал поступить на Физико-Математический Факультет, так как, после двухлетнего учения, молодые люди, сдав экзамены за 2 года, могли поступить в Морское Училище **без конкурса**. Это решило мою судьбу: я поехал в Москву и поступил на Математ. Отделение Московского Университета, **из за отвращения к математике**, которой очень боялся и которую не любил, считая ее рядом "фокусов".

Но на первой же лекции, незабвенного проф. Николая Васильевича Бугаева, я был буквально уничтожен до утраты сознания, где я нахожусь. Профессор буквально сказал следующее (ex cathaedral): “Поздравляю вас с поступлением. Вы, конечно, пошли сюда, движимые голосом сердца, по любви. И, конечно, вы хотите сделаться знаменитыми математиками. Так вот вам указание и рецепт: для этого надо **забыть** элементарную математику. И чем радикальнее вы ее забудете, тем больше преуспеете. Забудьте как можно полнее, до конца и начинайте снова все заново: математика высшая есть самая высокая музыка, самое высокое искусство, это — гармония общих идей и интуиции”. Я понял, что мне теперь не уйти от проф. Бугаева, пока я не пойму до конца то, что он обещал. И я остался, пройдя 2 года, еще на 2 года, чтобы кончить математическое отделение.

Отвращение и страх к элементарной математике у меня до сих пор сохранились. Но я успокаиваю себя тем, что “это не наука”.

Моя склонность к бесконечной фантастике и философии нашли пищу в теории функций. И это так обращало внимание, что и избран-то в Академию я был не на кафедру Математики, а на кафедру Философии. Только потом меня перевели, с освобождением кафедры после ухода акад. Успенского в Америку.

Вот Вам моя исповедь **Этого** Вы не найдете нигде. Извините за длинное письмо.

Глубоко уважающий Вас Н. Лузин.

P. S. Имейте ввиду, что время сейчас поистине гениальное и что личность Декарта, открывающего начала Новой Науки в офицерской палатке, нашему времени очень близка.

О бесконечно малых величинах в преподавании и в науке

Н. Н. Лузин

Письмо Николая Николаевича Лузина М. Я. Выгодскому впервые опубликовано в сборнике научно-методических статей по математике "Проблемы преподавания математики в вузах", вып. 7, М., "Высшая школа", 1978. Письму предшествует вступительная заметка И. Н. Бронштейна. Для настоящей публикации материал предложен И.П.Костенко.

Ниже впервые публикуется письмо выдающегося русского математика акад. Николая Николаевича Лузина проф. М. Я. Выгодскому в связи с получением от него учебника "Основы исчисления бесконечно малых" (1931 г.). Этот учебник был построен на принципах, в корне отличавшихся от общепринятых тогда (да и в настоящее время): в основу преподавания математического анализа была положена не теория пределов, а постоянные бесконечно малые величины.[1]

Письмо хранится в Государственном архиве Москвы[2] вместе с двумя другими письмами того же автора. Оно не имеет ни даты, ни подписи и, кажется, не окончено: — вероятно, оно было в таком виде передано адресату лично. Дату написания письма следует отнести между 1931 (выход в свет книги М. Я. Выгодского) и 1933 г. (во втором письме Н. Н. Лузина от 1933 г. имеется ссылка на это письмо).

Читателю, несомненно, будет интересно познакомиться с взглядами такого замечательного ученого и педагога, каким был Лузин, на вопросы обоснования в преподавании математического анализа. Написанное в своеобразной увлекательной манере письмо дает возможность читателю непосредственно ощутить и личность автора, и "аромат эпохи" математической жизни в Московском университете в начале нашего столетия.

И. Н. Бронштейн

Глубокоуважаемый Марк Яковлевич, позвольте искренне поблагодарить Вас за Ваш чудесный и ценный подарок: за присылку мне Вашего курса Анализа. Я давно слышал о его появлении и слышал о страстных спорах, возбуждаемых им. По-видимому совсем нет, или есть очень мало лиц, спокойно к нему относящихся. Всякий, знакомящийся с ним, становится или горячим его поклонником, или столь же страстным его противником. И это меня не удивляет ничуть, так как Вы мужественно коснулись самой болезненной точки Анализа вообще, современного — в особенности, метнув камень в "осиное гнездо".

---

[1]См. доклад М. Я. Выгодского "О принципах преподавания анализа бесконечно малых во втузах" (1930), вопроизведенный в вып. I сборника научно-методических статей по математике, 1971, с. 54-67.

[2]Личный фонд М. Я. Выгодского.

Чтение же Вашей книги меня окончательно убедило, что иначе и быть не могло и что, действительно, все категории лиц, знакомых с основами Анализа, должны чувствительно реагировать на нее.

Много времени прошло с момента ее появления, и большинство успело так или иначе высказаться, и Вы, вероятно, знаете суждения о ней. Для Вас не ново, что, в то время как педагогические круги в своем большинстве чрезвычайно благоприятно встретили ее появление, (1)[3] отношение теоретических кругов, опять в их большинстве, было сдержанным. В Москве я слышал разговоры о возобновлении в науке теории флогистона или упреки в декаденстве. В Ленинграде, воспитанном более однообразно, говорили о том, что Дарвин начертил путь эволюции человека, описав его путь развития от ходьбы на четвереньках до вертикального положения и что стремиться обратить этот процесс в математике... Короче, почти все теоретики высказываются за неизбежное базирование Анализа на теории пределов и лишь, снисходя к "человеческой слабости", допускают, в виде возможности, краткий этап знакомства с Анализом без теории пределов, лишь для самых начинающих, с тем непременным условием, чтобы "уж потом все было как следует...".

Мне кажется, что то, что я написал, более или менее верно в отношении отзывов теоретических кругов. Ваше изложение встречает в них или чисто отрицательное отношение, или снисходительно допускается в виде педагогического приема. Попыток иного отношения я не встречал.

После изучения большей половины Вашей книги мне также захотелось высказаться. С этой целью я избираю форму письма к Вам. Я более люблю это: в письме можно остановиться и подумать, что затруднительно в живой речи. И потом, это более соответствует моему темпераменту. Извините меня, если письмо выйдет длинным. В такого рода вещах лучше быть длинным, но зато понятным до конца. Вероятно, это письмо я буду писать много дней, с перерывами и под влиянием разных состояний ума.

Конечно, я мог бы избавить Вас от чтения моего письма, просто присоединившись к той или иной группировке высказывающихся лиц. Но для меня затруднительно это, так как ни одна из них не отвечает моим мыслям. В противоположность моим коллегам, я думаю, что попытка пересмотра идеи бесконечно малого как переменного конечного количества есть совершенно научная попытка и что предложение заменить переменные бесконечно малые стационарными вовсе не имеет лишь одно чисто педагогическое значение, но имеет за собою нечто неизмеримо более глубокое, и что для нее в современном Анализе растут корни. Короче, если бы была нужна краткая формула, я бы ее формулировал в виде положения: "современная наука не имеет возражений против этого рода идей".

Вот об этом-то я и хотел бы более пространно написать Вам. Сначала лишь замечу, что идея актуально малого имеет какие-то бесконечно глубокие корни в уме. Когда ум *начинает* (2) свое знакомство с анализом, словом, когда для него весна, он начинает всегда именно с актуально малых, которые можно называть "элементами" количеств. Но постепенно, шаг за шагом, по мере накопления у него знаний, теорий, пресыщения к абстракциям, усталости, ум начинает забывать свои

[3]См. примечания в конце статьи.

первоначальные стремления, улыбаться их "ребячеству". Короче, когда приходит осень ума, он дает себя убедить в единственности правильного обоснования при помощи пределов.

Вашу книгу иногда обвиняют в излишней страстности, едкости, желчности. Для меня это так понятно, что, по-моему, иначе, в первых поисках, и быть не может. То, что считают желчностью, это есть просто отголосок сильного интеллектуального страдания и боли, и чем страдание сильнее, тем лучше, потому что оно есть источник творчества.

Для того, чтобы Вы не думали, что я стараюсь быть приятным для Вас, я расскажу Вам кое-что из своих личных воспоминаний: Вы увидите, что я кое-что понимаю в этих вещах, раз до сих пор сохранил столь живые воспоминания, навсегда врезавшиеся мне в память. Обычно такого рода страдания всегда тщательно скрывают и очень неохотно говорят другому о них, и то лишь в виде намеков. Не знаю, почему это так, но действительно приходятся делать над собою усилие. Однако его нужно сделать.

Я вспоминаю себя студентом 2-го курса (3). Обстановка была такая: в стороне стоял Л. К. Лахтин с его диктованием основ анализа. На его диктанты я не ходил: зачем, раз можно купить или занять для прочтения его литографированные записки? Тон был задан Болеславом Корнелиевичем Млодзеевским, пылким и властным геометром европейского масштаба и точным строгим Д. Ф. Егоровым, лишь начавшим свое вхождение в жизнь Университета. Л. К. Лахтин держался от них в стороне, Б. К. Млодзеевский властвовал, но считался с точно и строго работающим умом Д. Ф. Егорова.

Я начинал свое знакомство с анализом по беспорядочно и жадно читаемому разнообразию книг. Все зависело от случая: есть или нет такой-то книги в библиотеке, и как она внешне выглядит, солидно или так себе. В голове была каша, Хаос, обрывки нитей, срастающихся случайно. Руководства не было, контакта с профессурой никакого. Просто попал в воду и барахтался, должно быть, как умел, чтобы не утонуть. И кто знает, не лишило ли бы систематическое руководство того богатства и многоцветности, которое как-то сознаю в себе, и не придало ли бы оно, если бы было в действительности, однотонный колорит и скуку деятельности ума? Но не в этом дело.

Главное в том, что *я не знал ни Goursat'a, ни Jordan'a,* а воспитывался на старинных курсах Анализа: Lacroix и других (4). Самым новым для меня был 7-томный курс Laurent'a ("Traite d' Analyse"). В нем автор гордился, что он — ученик Cauchy. Теория множеств и теория функций действительного переменного пришли ко мне лишь в момент окончания Университета, вернее, при стадии оставления при Университете. Такое старинное воспитание было обусловлено *чистою случайностью,* так как когда я был в Университете (1901—1908), курс *Goursat* был уже в полном ходу за границей и у нас в кругах, близких к профессорским; я же его не знал, и читал все "автодидактом".

Такое "старинное" воспитание, вернее, самовоспитание, которое я получил, и обусловливает мое своеобразие и свободу в отношении математических взглядов. Во всяком случае, когда я проходил Университет, у меня не было дисциплинирующих курсов Д. Ф. Егорова, ни *Goursat*, ни логически непреклонного Vallee-Poussin'a; был же хаос, может быть и творческого характера. Теория пределов вошла в меня механически, грубо, не утонченно, а скорее полицейски принудительно, по формуле: "замолчи, я тебе говорю!" Вообще, я люблю старинные курсы, где есть все, что относится к делу, и где, еще больше, есть то, что прямо не относится к делу, но что важно для проникновения наукой. Современные же курсы напоминают мне французские канцелярии, где могут и накричать, если позабыл снять шляпу, и отправить с формальной отпиской. И в моих стараниях по Грэнвилю я невольно брал палитру с красками и раскрашивал Теорию пределов (5), живо помня, как угнетающе действовала на меня начавшая входить Теория пределов, нерасцвеченная ничем.

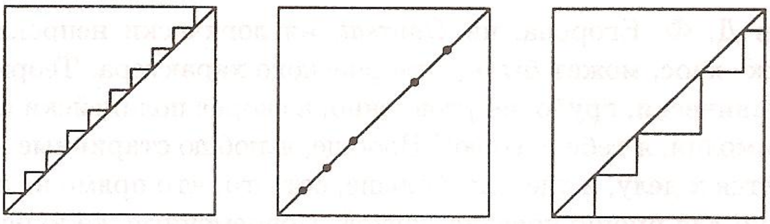
Я живо помню состояние моих идей по Анализу бесконечно малых. Я был на втором курсе. На заявления профессоров о том, что $\frac{dy}{dx}$ есть предел отношения, я думал: "Какая скука! Чудно и непонятно. Нет! Не надуют: просто отношение бесконечно малых, и только". Живо помню, как с величайшей болью я воспринимал кривую Weierstrass'a без касательной (6), не верил, пытался опровергнуть и десятки раз перечитывал доказательство Duhamel'a о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема. Эта боль, действительно почти нестерпимая, при мысли о кривой Weierstrass'a понятна: ведь если $y(x)$ есть функция Weierstrass'a, то она непрерывна, и раз существует dx, то должен существовать и dy. И однако *нет* $\frac{dy}{dx}$! Почему? Короче, глубоко естественная идея актуально малых у меня начала подтачиваться кривой Weierstrass'a и *теория пределов в меня вошла как паталогия функций.*

Борьба с кривой Weierstrass'a была для меня родом кошмара. Я ею грезил во снах. Теперь я понимаю, что она была для меня чудовищем, с которым я нелепо боролся. И не будучи в состоянии победить, я предпринял обходное движение: я вознамерился показать, что кривая Weierstrass'a не диво и что с помощью элементарных построений можно сделать то же самое и притом СОХРАНЯЯ ИДЕЮ СТАЦИОНАРНОГО БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО.

Собравшись с духом (я не любил соприкасаться с профессорами: будучи робким — просто боялся их. Не боялся лишь И. И. Жегалкина), я после лекции у нас по Геометрии Б. К. Млодзеевского, робко подошел к нему и попросил позволения побеседовать с ним относительно кривых без касательных.

Первая ошибка *уже* была сделана: я был слушателем, профессор казался высшим существом: я не думал, что он может чувствовать усталость. А между тем, я, молодой, сидел целый час и начал разговаривать с ним, когда он изнемогал от усталости. Поэтому голос Б. К. Млодзеевского, повысившийся до окрика, я принял на свой счет, а не за счет его усталости. Такие вещи нужно было обсуждать лишь с отдохнувшим человеком.

Итак, я начал: "Болеслав Корнелиевич, мне кажется, кривую без касательной можно построить совсем элементарно и я хотел бы знать Ваше мнение". Он: "Ммм..., ну давайте — у Вас есть чертеж?" Я: "Да, Болеслав Корнелиевич, вот он:



разделим диагональ квадрата на n частей, равных между собой, и на каждом делении, как на основании, построим равнобедренный прямоугольный треугольник. Получаем нечто вроде ажурной пилочки. Теперь делаю $n = \infty$. Пилочка делается непрерывной кривой, бесконечно мало отличающейся от самой диагонали. Значит, у ней касательной должна служить сама диагональ. И, однако, совершенно ясно, что у ней касательная то параллельна оси OX, то параллельна оси OY. Я думаю, что то же самое происходит и с пресловутой кривой Weierstrass'a ". Он: "Ну, знаете ли, если Вы это серьезно... такой круг идей... Но ведь это же нелепость, то, что Вы говорите. Поймите, *актуальной бесконечности нет.* И ∞ не число. Стороны Ваших треугольников не $1/\infty$. И треугольников нет... И вообще ничего нет... Есть только Ваше непонимание. Поймите, что n есть конечное число. И для всякого n своя ажурная пилка, как выражаетесь Вы. И когда n безгранично возрастает, то у Вас на плоскости, как на экране кинематографа,— мелькание: пилка сменяет пилку с все возрастающей быстротой. Вот и все. Единой пилки нет. Есть серия пилок. Ну-с, о касательной к какой пилке Вы теперь говорите?!" Я: "О той, которая получится в пределе". Он (видимо теряя терпение): "Кажется, сказка о белом бычке... Поймите, ∞ не есть число. Серия пилок безгранично приближается к диагонали. Пределом же явится сама диагональ. Разумеется, касательная к диагонали есть: она сама для себя служит своей собственной касательной". Я сказал наивно: "Но ведь я же вижу, что касательные к сторонам треугольников параллельны оси OX и оси OY и никогда не параллельны диагонали". Он, мгновенно смягчившись и ласково... "Аааа... - Вот что... запомните: *касательная к пределу не есть предел касательной.* Ведь сама касательная есть предел. Ну так вот: у Вас перестановка двух переходов к пределу, то, чего делать просто нельзя. Поймите (он взял мел):

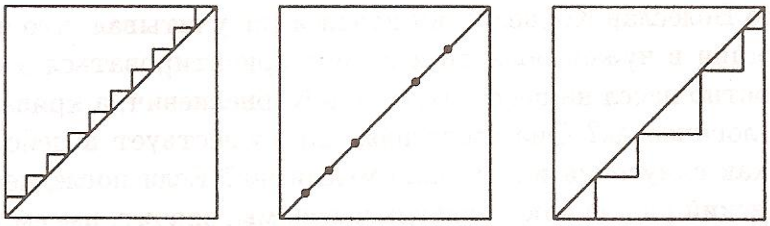
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+n}=1 \quad\text{и}\quad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}=0,$$

ну, значит,

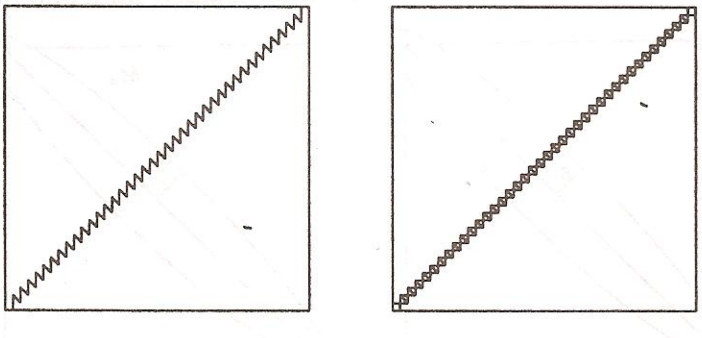
$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+n}\neq\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{m}{m+n}.$$

Это — история старая: *длина предела не равна пределу длины.* Ведь если Вы измерите длину Вашей ажурной пилки, то она равна 2. А ведь длина диагонали $\sqrt{2}$. Переворачивать пределы нельзя. Подумайте над этим. Это сразу Вам не дастся. До свиданья". И он ушел; оставив меня в недоумении на то, что я не был понят, как мне казалось тогда.

Не надо забывать, что я был студентом 2-го курса. Через неделю случаю было угодно, чтобы один товарищ 4-го курса затащил меня на лекцию по действительному переменному того же самого Болеслава Корнелиевича для студентов 4-го курса. И я выслушал его, блестящую по обыкновению, лекцию о понятии мощности и счетной мощности. Это было для меня почти откровением. Боясь пошевелиться, я слушал его вдохновенную речь про мощность, про N_0, а сам думал: "Да ведь это сплошные противоречия: в Анализе говорят, что всякое число конечно и скромно умалчивают о бесконечно удаленных точках прямых. В Геометрии, наоборот, твердят о бесконечно удаленных точках и выводят чудесные вещи. Неделю тому назад Болеслав Корнелиевич меня оборвал, вскрикнув, что "актуальной бесконечности нет". А теперь сам-то что он делает! Нет; чего-то я не понимаю. Должно быть напрасно я здесь: сделаться бы мне физиком!". Обдумав слова, я после лекции твердо подошел к нему и сказал: "Болеслав Корнелиевич, я к Вам с вопросом относительно непрерывных кривых без касательных... " Он болезненно сморщился и сказал удрученно: "Вы все о том же... Вы находите дело неясным... в чем же дело?" Я: "Видите ли, Болеслав Корнелиевич, неделю тому назад я строил Вам треугольники и, должно быть, неудачно. Теперь я желал бы пересмотреть вопрос. Пусть на диагонали квадрата лежит конечное множество (тут он вздрогнул при слове "множество") точек:



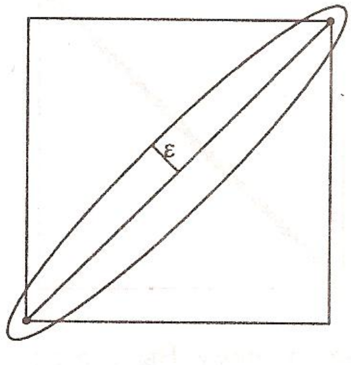
Нужные мне треугольники я раньше строил постепенно, на каждом отрезке в отдельности. И в этом была моя ошибка. Теперь я это могу сделать *сразу*. Возьмем совокупность всех параллелей осям OX и OY; проходящих через наши точки. И затем я обрезываю сразу все "лишние" части прямых и получаю сразу пилку. . . ":

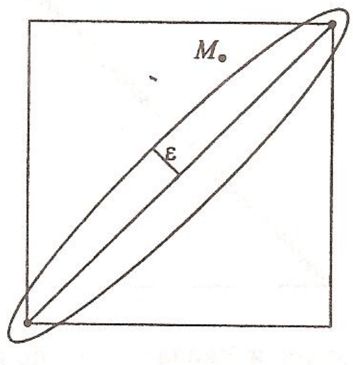


Он оборвал меня и сказал: "Не понимаю, к чему Вы все это. Ну, ясно, что это так. Ну, а дальше?" Я: "Так вот, Болеслав Корнелиевич, вместо конечного множества я беру счетное множество, например, все точки диагонали, отстоящие от начала диагонали на соизмеримое расстояние.

И дальше повторяю все то, что только что Вам сказал: беру все параллели, проходящие через точки этого множества и параллельные осям OXи OY и, наконец, уничтожаю “лишние” части прямых. Что я должен получить, *теперь уже без всякого перехода к пределу?* То же, что и раньше: т. е. **пилку**, но с актуально малыми зубцами!

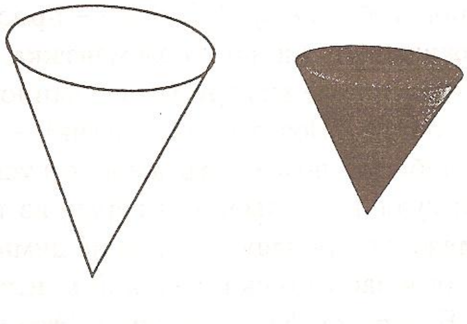
Значит, имеется *индивидуальная* неподвижная “кривая”, **бесконечно мало отличающаяся от диагонали**. В прошлый раз, когда я пришел с ней, Вы, Болеслав Корнелиевич, сказали, что мое построение основано на ошибке, так как “нет актуальной бесконечности”. И Вы запретили мне употреблять ∞ как число. Но теперь, на лекции, Вы же сами говорили об актуальной бесконечности, о счетной мощности. И вот я изменил построение, в согласии с Вашим изложением, не употребляю ∞ как число, а отправляюсь лишь от счетного множества и получаю то же самое: пилку с актуально малыми зубцами, т. е. неподвижную индивидуальную кривую, бесконечно мало отличающуюся от диагонали”. Болеслав Корнелиевич внезапно затих, потом чрезвычайно деликатно с оттенком некоторой почтительности заговорил: “Не понимаю, как Вы попали на мою лекцию... Послушайте: не ходите больше; *Вам* это вредно, пока Вы не окрепнете. Что же касается до Вашей кривой, то она *логическая, не настоящая, не подлежащая интуиции* (“хорошо! хорошо!” — прервал он сам себя). Она существует в логике, но не геометрически. Она словесная, а не реальная. О ней говорить можно, но она не настоящая.” Я мгновенно понял, что Болеслав Корнелиевич попался (не учитывая, что человек просто *устал* после лекции в чужой области и не мог ориентироваться в моих возражениях) и безжалостно насел на него: “Болеслав Корнелиевич, а кривая Weierstrass’а настоящая или логическая? Она словесная, или существует в действительности? Она реальная, как синусоида или только мыслимая? Если последнее, то, обрывая тригонометрический ряд на каком-нибудь члене, мы, значит, имеем реальную кривую, а беря его весь мы уже имеем лишь словесное образование.” Но я имел дело со страшным противником, который устал, растерялся от натиска, но который мгновенно оправился, просто *выгадывая время* своими словами о словесных кривых, и который, воспрянув, нанес мне страшный удар: “Послушайте, — сказал он с загоревшимся внезапно гневом, — что за галиматью Вы мне несете! Возьмите-ка гомофокальный эллипс (7) с фокусами в концах Вашей диагонали:





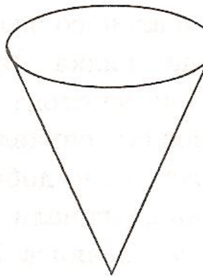
Отвечайте мне прямо, без увиливания: “Ваша пилка будет ведь внутри этого эллипса? Да!” Я: “Конечно, Болеслав Корнелиевич!” Он: “Но малая ось эллипса, обозначим ее через ε, может быть мала как угодно. Да?” Я: “Да, Болеслав Корнелиевич!” Он; “Значит, Вы согласны, что Ваша кривая находится внутри всех эллипсов с фокусами в концах диагонали?” Я: “Разумеется, Болеслав Корнелиевич”.

Он: "Но ведь *предел* такого гомофокального эллипса, когда ε стремится к нулю, есть лишь сама диагональ, а не Ваша пилка. Значит, ее нет, этой Вашей пилки и все Ваше подновленное рассуждение не стоит большего, чем то, что Вы показывали мне неделей раньше!" Я замолчал, справляясь с нанесенной мне раной. Но теперь роли переменились и он безжалостно добавил: "Поймите, ведь если какая-либо точка, M например, *не* лежит на диагонали, то ведь, при достаточно малом ε, она окажется *снаружи гомофокального* эллипса. Значит, *пределом* гомофокального эллипса будет только диагональ, в лице всех ее точек; и никакая другая чужая точка M, не лежащая на диагонали. Ясно?" Но я уже оправился и сказал: "Все это так, пока ε конечное. Но если ε есть актуальное малое..." Но меня прервала буря негодования: "Semper idem! — воскликнул он,— ведь я же толкую Вам полчаса о пределах, а не об Ваших актуально малых, которых нет в действительности. Ведь это же я доказываю в своем курсе. Походите на него, чего, впрочем, я Вам пока не советую, и Вы убедитесь в этом... Вы что-то еще хотите мне сообщить?" Я, действительно, был сильно задет и начал говорить, насколько я вспоминаю теперь, так. Я: "Болеслав Корвелиевич, я думаю, что возможно отправляться не только от чисто математических рассуждений, но и от общенаучных тенденций. В химии, например, в действительности нет химически чистой воды, ибо всегда *в реальной воде,* будут иметься группы молекул, не входящие в состав воды. И, однако, химия-наука имеет H_2O и говорит нам о **химически чистой воде** H_2O. Что это такое? Абстракция? Нет, это есть идеализированная вода, идеализация! Процесс идеализации, видимо, неизбежен для всякой стадии науки. Пусть химически чистой воды нет в действительности, но H_2O *есть в науке* и говорить об H_2O есть дело науки. Возьмем теперь гипс и процесс образования формы. 'Вы, например, имеете полый конус, математически точный:



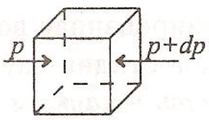
Но Вы наливаете туда-раствор в воде жидкого гипса, чтобы снять форму конуса. Что же такое этот процесс? Гипс застывает и Вы вынимаете из пустого конуса его копию, *кажущуюся Вам точной:*

Но на деле это не так. Процесс застывания гипса есть процесс. КРИСТАЛЛИЗАЦИИ и то, что Вы вынимаете из конуса, это не будет конус или его точная копия, это в действительности будет кристаллическое тело, лишь приближенное к конусу, почти по принципу Cavalieri. Если мы теперь *идеализируем этот процесс* и застывание идеального гипса будем понимать, как процесс идеальной кристаллизации, с актуально малыми кристалликами, то вынув форму, мы убедимся, что мы имеем не конус, а тело, актуально малое...":



Но он плохо кончился, этот разговор. Мне стыдно сказать, но Болеслав Корнелиевич просто ушел, посоветовав мне принести к следующему разу баночку *такого* гипса. Больше я уже с Болеславом Корнелиевичем не разговаривал никогда на эту тему, но через 2 года натолкнулся на взволновавшую меня картину.

Прежде чем о ней передать Вам, расскажу Вам еще одну черточку, характеризующую состояние тогда моего ума. Я помню себя студентом 3-го курса, сидящим на первой скамейке на лекции по механике Николая Егоровича Жуковского. Точнее: это была лекция по *гидродинамике.* Аудитория была огромная, профессор был человек крупный, массивный и очень умный. Как сейчас помню, он стоял; перед огромной во всю стену чистой черной доской и с мелом в руке говорил нам о силах, действующих на жидкость. "Возьмем, — говорил он, **элементик жидкости**":



И с этими словами он, приняв во внимание размеры огромной аудитории, битком набитой студентами (3-го + 4-го курса: соединяли курсы ради экономии), нарисовал большой куб, *величиной с метр.* "Пусть, — продолжал он p и $p + \mathrm{d}p$ суть давления на противоположные стенки этого элементика..." И он принялся делать сложное геометрическое построение внутри нарисованного им куба.

Меня точно кто подтолкнул: "Вот так элементик! — пронеслось у меня в голове, — да сюда можно свободно поместить живого гуся! *А ведь построение-то стационарное.* Вот они актуально малые, в которые из приличия никто не хочет верить, но которые то и дело употребляют, когда не думают о приличиях!" Но тут я сосредоточился на лекции и забыл о скандальной мысли.

Возвращусь теперь к Болеславу Корнелиевичу. Это было год спустя, когда я был на 4-м курсе, значит, 2 года спустя после последнего разговора с Болеславом Корнелиевичем о пилках. Помню: — нас двоих, Бюшгенса и меня, пригласили на заседание математического общества. Тогда студенты не допускались туда совсем и нужно было специальное приглашение профессуры. На заседании было немного членов, человек, должно быть, 12. Все они сидели за длинным столом, покрытым зеленым сукном и пили чай с сухариками (мне казалось удивительным совмещение прозаического чая с наукой). Доклад делал не помню кто именно *об уравнениях Pfaff'a.* Я сидел на стуле во втором ряду, позади Болеслава Корнелиевича и Д. Ф. Егорова, сидевшего за столом рядом с Млодзеевским. А тем временем докладчик покрывал доску уравнениями *Pfaff'a* в полных дифференциалах:

$$\omega_i' = \sum_{h,k} A_{ihk} \left(\mathrm{d}x_h \delta x_k - \mathrm{d}x_k \delta x_y\right),$$
$$\omega^{(2m-6)}\, \mathrm{d}f_1\, \mathrm{d}f_2\, \mathrm{d}f = 0,$$
$$\omega_i' \equiv k_i \left(\mathrm{d}x_{r+1} \delta x_{r+2} - \mathrm{d}.,, \ldots\ldots_1, \ldots, \omega_r\right)$$

Формула струилась за формулой, значки полных дифференциалов d текли изобильной струей, один за другим, складываясь, вычитались, умножались, подставлялись один в другой, выражались линейно через аналогичные значки d, δ полных дифференциалов. Я внимательно глядел на доску, сначала старался ухватить смысл, но не зная (как понимаю теперь) теории проблемы Pfaff'а, заблудился мыслью и поймал себя на том, что просто любовался внешностью потока формул. И вдруг меня осенила мысль: "Ну вот, я не понимаю почему-то: но по крайней мере я знаю, что такое d, δ. А если бы кто другой сейчас пришел сюда, хорошо знающий алгебру, но незнакомый совсем с Дифференциальным Исчислением. Что бы он подумал? Подумал бы, что речь идет об алгебраических преобразованиях, о каких-то неизвестных количествах $\mathrm{d}x$, δf и т. д. И он начал бы так же точно выражать одни через другие и решать их. Ведь это же, в самом деле, настоящая *алгебра* количеств d, δ".

Только что я подумал про себя это, как слышу оживленный голос Болеслава Корнелиевича, говорящий сидящему рядом Д. Ф. Егорову: "Я всегда думал, что символы полных дифференциалов являются особенными символами. Посмотрите, как он оперирует с ними! Ведь они в его руках просто *постоянные* числа: он их складывает, вычитает, множит, подставляет, преобразует. Ведь можно совсем забыть об их истинном происхождении и оперировать с ними, как с постоянными бесконечно малыми. И Вы знаете, Димитрий Федорович, что вовсе не безнадежна попытка, в духе Hilbert'а, аксиоматически..." Тут докладчик, которому мешал этот оживленный голос, с упреком взглянул на Болеслава Корнелиевича и тот, прервав себя, сказал ему: "Я слушаю, слушаю!", а сам, поглядев на Димитрия Федоровича, спросил более тихо: "Что Вы об этом, Димитрий Федорович, думаете?" Но Димитрий Федорович Егоров тихо покачивал головою, как бы говоря: "Так-то оно так, Болеслав Корнелиевич, а все-таки..."

У меня внутри поднялась настоящая буря: "Ах, вот оно что! — пронеслось у меня, — нас, маленьких, учат одному, а сами-то взрослые, что между собою говорят. Значит, взаправду, дело не так уже стоит тут твердо, раз у них самих такие разговоры. Я впился глазами в них и чувствовал, как они у меня горели. Не знаю, что произошло: может быть подо мною скрипнул стул, или это была одна из тех таинственных случайностей, когда люди как будто чувствуют пронизывающий их сзади взгляд. Только Болеслав Корнелиевич внезапно оглянулся и, заметив мой горящий взгляд, наклонился и что-то тихо сказал Димитрию Федоровичу. Тот ему ответил что-то столь же тихо, и далее они не разговаривали более друг с другом.

Я это так подробно описываю Вам, просто желая дать психологический документ о состоянии ума в его ранней ступени развития. Может быть, Вам это и будет интересным. Вероятно, я смог бы, терпеливо побродив в сумраке воспоминаний, вынести из него на свет еще что-нибудь, может быть, даже и ценное (в отношении математического воспитания). Но, говоря откровенно, я *боюсь* уходить в этот сумрак. А страшусь вынести из него, на дневной свет, какие-нибудь вещи, глубоко связанные с первыми движениями математического ума или математического сознания, которые сильно захватят сейчас меня и лишат меня возможности проследовать намеченным в науке путем. То же, что я рассказал Вам — это всегда со мною, так как сильно врезалось в память.

Дальше же со мною было следующим образом. Воспитанный на старинных трактатах Анализа, я *прямо перешел к теории множеств и теории функций,* минуя теорию пределов. Это произошло по окончании Университета, когда я, получив от Д. Ф. Егорова предложение остаться при Университете, его отклонил и ушел на 1/2 года сначала на медицинский факультет (из моральных соображений), а затем на 1/2 года на бывший историко-филологический факультет, так как я не мог видеть трупов и хорошего медика из меня бы не вышло. Лишь после этих 1/2 года на историко-филологическом факультете, где я слушал всех известных тогда философов и не вынес, почему-то, страсти к их рассуждениям, я возвратился к математике, и, приняв предложение Д. Ф. Егорова, принялся за пополнение математического образования, не спрашивая советов и руководясь, как раньше, случаем.

Большая пережитая душевная драма с кривой Weierstrass'а заставила меня сосредоточить все внимание на теории функций и вообще на микроматематике, как я называл изучение бесконечно малых структур функций или множеств.

Примечания к письму Н. Н. Лузина

[1] Н. Н. Лузин не совсем точно оценивает отношение "педагогических кругов" к книге М. Я. Выгодского. Оно было "в своем большинстве" не только не "чрезвычайно благоприятным", а явно враждебным: автор отвергал в преподавании анализа и теорию пределов, и традиционный порядок изложения материала: сначала дифференциальное, а потом интегральное исчисление. Среди преподавателей вузов были и сторонники М. Я. Выгодского, в частности к ним принадлежал А. Ф. Бермант: в первом издании своего известного учебника он также начинал с интегрального исчисления. Но среди "теоретических кругов" Н. Н. Лузин был почти единственным защитником системы преподавания М. Я. Выгодского.

[2] В этом письме Н. Н. Лузин прибегает к трем видам выделения в тексте: подчеркиванию непрерывной чертой (передано здесь *курсивом),* подчеркиванию прерывистой чертой (здесь — **полужирным**) и печатными буквами (здесь — ПРОПИСНЫМИ БУКВАМИ).

[3] Н. Н. Лузин поступил в Московский университет в 1901 г. Таким образом, начало этих воспоминаний относится к 1902 г. Ниже он упоминает профессоров, хорошо известных математикам старшего поколения, учившихся в МГУ. О деятельности этих ученых см. *А. П. Юшкевич.* "История математики в России", а также воспоминания А. П. Юшкевича в вып. 6 сборника. Леонид Кузьмич *Лахтин*(1853-1927, в МГУ с 1896) — видный алгебраист; много лет читал в МГУ курсы "Введение в анализ", "Дифференциальное исчисление" и "Интегральное исчисление"; неизменно дословно диктовал свои лекции. Два геометра — Болеслав Корнелиевич

Млодзеевский (1858-1923, в МГУ с 1895) и Дмитрий Федорович *Егоров*(1869-1931, в МГУ с 1893) — руководящие деятели математического отделения МГУ конца XIX и первой четверти XX вв.; Млодзеевскнй впервые начал преподавать в МГУ теорию функций действительного переменного, а Егорова можно считать основателем московской школы ТФДП, главой и наиболее выдающимся представителем которой стал позже ученик Егорова Н. Н. Лузин. Иван Иванович *Жегалкин* (1869-1945, в МГУ с 1902) успешно культивировал в МГУ теорию множеств и математическую логику. Наконец, ученик Егорова геометр Сергей Сергеевич *Бюшгенс* (1882-1963, в МГУ с 1906) был товарищем Лузина по курсу.

[4] Н. Н. Лузин приводит учебную литературу по анализу того времени; она была исключительно французской (на русском языке выходили лишь литографированные лекция профессоров). Это два трехтомных курса Гурса и Жордана (первые два тома *Э. Гурса* "Курс математического анализа" были позже переведены на русский язык под ред. Б. К. Млодзеевского и изданы в 1911 и 1912 гг.; в советское время все три тома были переизданы в 1933-1934 гг. в переработке В. В. Степанова; книга C. Jordan'a "Course d'Analyse a l'Ecole Polytechnique", 1882-1887, на русский язык не переводилась). Первое издание распространенного курса Лакруа (S. F. Lacroix "Traite du calcul differentiel et du calcul integral") вышло в свет еще в 1797-1798 гг., а "самый новый" 7-томный трактат Лорана (H. Laurent "Traite d'Analise") вышел в 1885-1891 гг. Наконец, "дисциплинирующие" курсы Д. Ф. Егорова по различным отделам анализа и дифференциальной-геометрии выходили до революции только в литографированном виде, а логически непреклонный Валле-Пуссен (Ch-J. de la Vallee-Poussin. "Cours Analise infinitesimal") дважды переводился на русский язык и издавался уже значительно позже времени, о котором идет речь в письме.

[5]Говоря о "раскрашивании" теории пределов, Н. Н. Лузин вспоминает известный очень формальный английский учебник дифференциального и интегрального исчислений В. Грэнвиля, перевод которого он переработал настолько, что позднее учебник стал издаваться уже под именем Лузина.

[6] Кривая Вейерштрасса — пример графика функции, не имеющей производной ни в одной точке — был указан Вейерштрассом в 1887 г. Позже было установлено, что пример такой кривой был уже предложен Б. Больцано еще в 1835 г.

[7] Гомофокальные эллипсы — очевидно, эллипсы, имеющие общие фокусы (софокусные).

Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (продолжение)

И. П. Костенко

Продолжаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуется лекция 9 с соответствующими упражнениями. Лекции 6, 7, 8 опубликованы в номерах 2(25), 3(26) за 2003 г.

Лекция 9. Непрерывные с.в. Закон распределения вероятностей

Тот факт, что случайные величины делятся на дискретные и непрерывные, вам известен (лекция 5, п. 4). До сих пор мы имели дело только с дискретными с.в. Этой лекцией начинаем изучение непрерывных с.в.

Непрерывные с.в. чаще возникают в прикладных исследованиях. Они более сложные и требуют более сложного математического аппарата для своего описания и исследования (функции, интегралы).

Центральное понятие этой и последующих лекций — *закон распределения* вероятностей с.в. Вы знакомы с этим понятием для дискретных с.в. — ряд распределения (таблица) и был законом распределения дискретной с.в. Это — то, что содержит всю вероятностную информацию о с.в. и позволяет, следовательно, решать разнообразные практические задачи.

Распределение вероятностей непрерывной с.в. нельзя задать таблицей, оно задается функцией. Ваша цель — хорошо понять, как возникает эта функция, которую мы назовем законом распределения.

1. Дискретные и непрерывные с.в. (различие)

В вашем опыте и в вашей памяти есть много примеров дискретных с.в. Но почти нет непрерывных. Поэтому надо начать с набора примеров непрерывных с.в. и хорошо их понять.

Но помните ли вы, что такое вообще случайная величина (с.в.)? Это переменная величина, связанная с некоторым опытом, различные значения которой появляются случайным образом в результате проведения опыта. И дискретная, и непрерывная с.в. подчиняются этому определению.

Напомню, что различие между ними — во множестве значений. Если значения с.в. можно отделить друг от друга интервалами, это дискретная величина. Если значения с.в. заполняют "сплошь" (непрерывно) некоторый промежуток, — непрерывная величина. Приведу пример.

Пример 1. Опыт состоит в том, что производятся 3 выстрела из орудия в цель. Предполагается, как обычно, что опыт можно повторять много раз без изменения основных условий (одно и то же орудие, расстояние до цели, наводчик, его состояние и пр.).

В зависимости от задач, которые решаются посредством этого опыта, можно рассматривать разные случайные величины. Если необходимо оценить качество стрельбы опытного наводчика, то имеет смысл ввести с.в. K — число попаданий, чтобы прогнозировать, как часто следует ожидать то или иное число попаданий. Это будет биномиальная с.в., как вы знаете.

Эксперимент в этом случае будет состоять в том, чтобы определить статистическую вероятность поражения цели одним выстрелом. Для этого нужно будет сделать много выстрелов и посчитать относительную частоту попадания. После этого рассчитываются вероятности значений с.в. K по формуле Бернулли, строится ряд распределения, на основе которого и делаются прогнозы. Подобные задачи вы решали.

Если орудие попадает редко, качество стрельбы придется оценивать иначе. Можно, например, ввести с.в. $S_{\min}$ — наименьшее расстояние от точек трех разрывов до цели. На практике предпочитают другую с.в $\bar{S}$ — среднее расстояние (среднее арифметическое трех расстояний).

Очевидно, все с.в. — K, $S_{\min}$, $\bar{S}$ — случайные, ибо нельзя однозначно предсказать результат опыта. Нетрудно понять, что первая с.в. K — дискретная, другие две — непрерывные. Поясню.

Множество всех возможных значений с.в. K состоит из четырех чисел — $\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. Это множество *дискретное*, его элементы можно отделить интервалами $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ 3)$, не содержащими значений с.в. K (рис. 1).

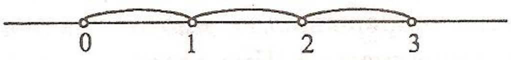


Рис. 1

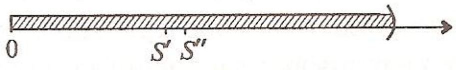


Рис. 2

Множество значений с.в. $\bar{S}$ (так же, как и $S_{\min}$) есть промежуток $[0; \bar{s})$[1], где $\bar{s}$ — некоторое максимально возможное отклонение разрыва снаряда от цели. Значения с.в. $\bar{S}$ заполняют этот промежуток "сплошь", — никакие два ее значения s' и s'' нельзя отделить интервалом, не содержащим других значений (рис. 2). Следовательно, с.в. $\bar{S}$ и с.в. $S_{\min}$ — *непрерывные* с.в.

[1]Напомню, что раньше (лекция 5, п. 4, примечание 1) мы обращали внимание на то, что правый край промежутка $[0;\ \bar{s})$ "размыт", его нельзя определить точно. Поэтому употребляется круглая скобка.

Замечание 1. Данный пример показывает вам также, что в одном и том же опыте можно по разному вводить случайные величины, в зависимости от целей опыта. Если бы надо было отработать корректировку стрельбы, то удобнее ввести пару с.в.: S_x — поперечное отклонение снаряда от цели (вправо-влево) и S_y — продольное отклонение (перелет-недолет).

Замечание 2. Не следует думать, что дискретные множества обязательно конечны. Если, к примеру, изменить наш опыт и стрелять до первого попадания, то возникает новая с.в. K_∞— число выстрелов до первого попадания. Множество ее значений тоже дискретно $\{1;\ 2;\ 3;\ ...k;\ ...\}$[2]. С.в. K_∞ мы подробно рассматривали в лекции 5, п. 9, она относится к классу геометрических распределений.

Замечание 3. Выше мы почти как очевидное приняли, что все рассмотренные нами величины случайные. Хочу призвать вас к бдительности и большей критичности. Вы считали само собой разумеющимся, что орудие стреляет с промахами. А если стрельба ведется самонаводящимися ракетами? Тогда все наши "с.в." перестают быть случайными, а станут детерминированными и постоянными, будут принимать в любом опыте одно значение — нуль. Вот как существенны условия опыта, — их надо осознавать.

В заключение сформулируем еще раз знакомые основные определения:

Определение 1. *Случайная величина* (кратко — *с.в.*) — это переменная величина, связанная с конкретным опытом, значения которой определяются случайными исходами этого опыта.

Определение 2. Случайная величина называется *дискретной (д.с.в.)*, если множество всех возможных ее значений или конечно, или может быть расположено в виде бесконечно возрастающей (или убывающей) последовательности.

Определение 3. Случайная величина называется *непрерывной*[3] *(н.с.в.)*, если множество ее значений заполняет "сплошь" некоторый промежуток (он может быть и неограниченным).

Примечание. Строгое теоретическое определение непрерывной с.в. отличается от приведенного — оно требует не только непрерывности множества значений с.в., но и непрерывности распределения их вероятностей. Что значит "распределение вероятностей с.в." — вы узнаете в этой лекции. Причины, по которым требуется непрерывность этого распределения, я вам сейчас объяснить не могу. Да это и не нужно. Но факт существования иного определения вы должны знать — оно может встретиться вам при чтении литературы. Вы должны понимать, что новое определение уточняет данное выше.

---

[2]Подобные множества, элементы которых можно расположить в последовательность (не обязательно монотонную) называются в математике *счетными*. Они не всегда дискретны, — например, множество всех рациональных чисел сегмента $[0;\ 1]$ счетно, но не дискретно. Множество всех действительных чисел сегмента $[0;\ 1]$ (и вообще, любого сегмента $[a;\ b]$и $(-\infty;\ +\infty)$) не дискретно и не счетно, его называют *континуумом*.

[3]Напоминаю, — существуют еще и *смешанные* с.в., но в нашем курсе они не будут встречаться

Контроль 1. Опыт состоит в том, что орудие стреляет в мишень один раз. Введем некую "упрощенную" величину S_0 так: если снаряд разрывается за целью (перелет), то S_0 принимает значение $s_1 = 1$; если недолет, то $s_2 = -1$; если попадание, то $s_3 = 0$. Покажите, что эта величина является случайной. Каково множество ее значений? Дискретно оно или непрерывно? В чем отличие с.в. S_0 от с.в. S_y?

2. Два примера непрерывных случайных величин (н.с.в.)

Как уже было сказано, цель лекции — ввести функцию, характеризующую распределение вероятностей с.в. К этому непростому понятию я подведу вас через два характерных примера.

Пример 2. Рассмотрим с.в. T_M — время ожидания поезда в метро. Задумаемся — что это значит? Где здесь опыт? Какие возможны значения? Дискретно множество значений или непрерывно?

Опыт состоит в том, что в случайный момент времени вы спускаетесь в метро, выходите на платформу и засекаете время ожидания ближайшего поезда. Поймите правильно — фиксируется не время прибытия поезда, а отрезок времени, в течение которого вы его ждете, отрезок времени, протекший от момента вашего выхода на платформу (пусть, для определенности, к первому вагону) до момента прибытия (остановки) поезда.

Длина t отмеченного вами промежутка времени и будет значением с.в. T_M, **появившимся** при выполнении опыта. При повторении опыта, наверное, появится другое значение t'. Ясно, что эти значения нельзя предсказать заранее. Т.е., налицо все три условия определения 1: **опыт, различные** числовые значения, которые появляются в опыте, и **случайность** значений.

Вы знаете, что, говоря об опыте, надо осознавать **основные условия** опыта, которые могут существенно влиять на результат. Поезда метрополитена ходят с разной частотой в разное время суток — в часы "пик" часто, ночью реже. Нормальным считается режим, когда поезда идут друг за другом регулярно через две минуты. Добавим это условие. Тогда значения с.в. T_M будут попадать в сегмент $[0; 120]$, если время измеряется в секундах. Вопрос — "каково множество **всех** значений с.в. T_M?" — следует обсудить.

Если вы измеряете время секундомером с делениями в одну секунду, то возможных значений будет 121: $\{0; 1; 2; \ldots; 120\}$ — это множество дискретное. Если секундомер имеет десятые доли, то число значений резко увеличивается — их будет 1201. Ясно, что строить дискретную модель с таким огромным множеством значений не разумно. Поэтому будем считать, что с.в. T_M имеет континуум "точных", идеализированных значений, которые заполняют "сплошь" сегмент $[0; 120]$. С.в. T_M, следовательно, непрерывная с.в.[4]

Пример 3. Работа АТС состоит в том, что она принимает вызовы и соединяет абонентов. Для организации работы надо знать, как часто будут поступать вызовы

[4]Вопрос о дискретном и непрерывном моделировании реальности мы уже обсуждали в лекции 5, п. 4.

в то или иное время суток. Возникает с.в. T_{ϕ} — интервал времени между двумя соседними телефонными вызовами на АТС. Уточню.

Опыт состоит в том, что в определенный период суток, например, с 8 до 9 часов утра, на АТС выбирается случайно какой-то телефонный разговор и фиксируется промежуток времени от момента его начала (точнее, с момента, когда поступил вызов) до момента следующего за ним вызова. Результатом опыта является некоторое число t — время, прошедшее между двумя вызовами.

При повторении опыта (выбор другого разговора в этот же день или на следующий день) может появиться другое значение t'. Предсказать, какое значение появится, конечно, нельзя.

Понятно, что чаще будут появляться небольшие и очень малые значения t. Но не исключено, что могут появиться и очень большие промежутки между вызовами. Теоретически допустимо появление даже часового промежутка (первый вызов в 8 часов, а следующий в 9). Поэтому множеством всех возможных значений с.в. T_{ϕ} будем считать интервал $(0;\ 60)$, при условии, что единица измерения времени — минута. Следовательно, T_{ϕ} — непрерывная с.в.

Контроль 2. Автоматический станок производит детали заданного размера l_0. Понятно, что реальные размеры деталей l будут немного отличаться от l_0 и друг от друга из-за многочисленных случайных колебаний технологического процесса. Рассмотрите две с.в.: L — размер l детали, сделанной станком, и ΔL — отклонение размера детали от номинала, т.е. разность $l - l_0$. Каковы множества значений той и другой с.в.? Размыты их границы, или нет? Как определить границы приближенно? Дискретны или непрерывны с.в. L и ΔL?

3. Распределение появившихся значений с.в.

Случайные величины, рассмотренные выше, отличались друг от друга промежутками значений: $[0;\ 120]$ — для T_M; $(0;60)$ — для T_{ϕ}; $(l_0 - \varepsilon;\ l_0 + \varepsilon)$ — для L. Эти различия не существенны. Главное различие обнаруживается при многократном повторении опыта — появляющиеся значения по разному распределяются на промежутках.

Значения с.в. T_M будут почти равномерно возникать в разных местах сегмента $[0;\ 120]$. Значения с.в. T_{ϕ} густо заполнят начало интервала $(0;60)$ и значительно реже его правую половину. Значения с.в. L окажутся плотными в средней части интервала $(l_0 - \varepsilon;\ l_0 + \varepsilon)$ и весьма редкими по краям (почему?). Чтобы увидеть это, надо провести статистическое исследование. Проследим порядок действий на примерах.

Пример 2 (продолжение). Допустим, вы живете в столичном городе и пользуетесь транспортом "метро" 5 раз в день, когда интервалы движения поездов 2 минуты. За месяц вы регистрируете $k = 150$ значений с.в. T_M и получаете *простую статистическую совокупность*: $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(150)}$ (напомню, верхние индексы используются для обозначения **появившихся** в серии опытов значений с.в.).

Чтобы увидеть, как значения $t^{(j)}$ распределяются на разных участках промежутка $[0;\ 120]$, надо провести *группировку* (см. лекцию 5, п. 4). Разбейте сегмент [0; 120], например, на 8 равных участков: $\Delta t_1 = [0;\ 15)$, $\Delta t_2 = [15; 30)$, $\ldots$, $\Delta t_8 = [105;\ 120]$. Посчитайте, сколько значений $t^{(j)}$ попадает в каждый из участков Δt_i, — получите *частоты* $k_1, k_2, \ldots, k_8$ (чему равна их сумма?). Вычислите *относительные частоты* k_i/k, $i = 1,\ 2,...,8$. Занесите все это в таблицу 1 — она называется *группированным статистическим рядом*. Четвертая строка оставлена для высот столбиков гистограммы h_i, — о том, как вычисляются эти высоты, скажу позже.

Таблица 1

Δt_i	$0 \div 15$	$15 \div 30$	$\ldots$	$105 \div 120$	Σ
k_i	k_1	k_2	$\ldots$	k_8	150
k_i/k	$k_1/150$	$k_2/150$	$\ldots$	$k_8/150$	1
$h_i = k_i/(k \cdot \Delta t_i)$			$\ldots$		

Выше мы наметили схему первичного статистического исследования. Реально провести его вы, наверное, не сможете. Но попробуйте ответить на вопрос: как должны распределиться значения $t^{(j)}$ по участкам Δt_i? На каких участках время ожидания поезда будет появляться чаще? Какие значения $t^{(j)}$ появятся чаще — маленькие или большие? Как вам кажется?

Может быть, подумав, вы решите, что до опыта (априори) ответить на такой вопрос невозможно. Тогда поставлю его иначе: видите ли вы причины, которые заставили бы значения $t^{(j)}$ появляться в каком-то из участков Δt_i значительно чаще (или реже), нежели в других? И вы, наверное, согласитесь, что таких причин, повидимому, нет.[5]

Следовательно, логично предположить, что в каждый из участков Δt_i значения $t^{(j)}$ должны попадать **примерно** одинаковое число раз. Поскольку число участков 8, а число опытов $k = 150$, то $k_i \approx 150 : 8 = 18,75$. Значит, частоты k_i должны, в основном, принимать значения 17, 18, 19, 20.

Это **прогноз**, но прогноз вероятностный. Если провести реальный эксперимент (серию опытов), то с большой вероятностью прогноз подтвердится. Вместе с тем, вы должны понимать, что не исключаются и "плохие" серии опытов, в которых некоторые частоты k_i будут далеки от прогнозируемых (на рис. 3 и 4 такова третья частота). Но такие серии редки. В дальнейшем вы научитесь численно оценивать вероятность появления подобных "плохих" экспериментов.

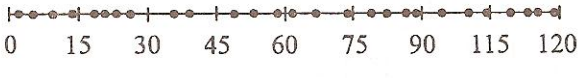


Рис. 3

[5]Если допустить, что вы знаете расписание движения "М"-поездов и можете скрупулезно руководствоваться им, то в вашем эксперименте будут чаще возникать малые значения $t^{(j)}$. Такая ситуация, конечно, не реальна.

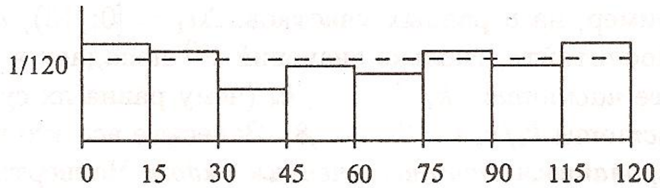


Рис. 4

Итак, мы поняли закономерность, которой подчиняется распределение значений с.в. T_M: они почти равномерно распределяются по всем участкам сегмента $[0;\ 120]$. На рис. 3 условно изображено подобное распределение. Более точно изобразить его затруднительно из-за большого числа значений ($k = 150$).

Точный наглядный образ дает *гистограмма* (рис. 4). Напомню, как она строится. Над каждым промежутком Δt_i строится прямоугольник, площадь которого равна соответствующей относительной частоте $S_i = k_i/k$ (в нашем примере все $S_i \approx 1/8$) и, следовательно, высота прямоугольника вычисляется по формуле $h_i = S_i/\Delta t_i = k_i/(k \cdot \Delta t_i)$ (в нашем примере все $h_i \approx 1/(8 \cdot 15) = 1/120$). Характерная особенность гистограммы для с.в. T_M — ее верхние основания проходят близко от прямой $h = 1/120$ (рис. 4). Не забудьте важную особенность любой гистограммы — сумма площадей ее "столбиков" равна единице (почему?).

Пример 3 (продолжение). Случайная величина $T_ф$ — время между двумя произвольными соседними вызовами на АТС от 8 до 9 часов утра.

Допустим, что мы проделали статистическое исследование, такое же, как в примере 2: каждый день фиксировали несколько значений с.в. и в течение месяца набрали $k = 300$ появившихся значений. Как мы уже отмечали, среди этих значений очень много малых (рис. 5). Поэтому при группировке надо делить интервал $(0;\ 60)$ на достаточно мелкие части, например, на 20 трехминутных промежутков Δt_i (или мельче). Частоты k_i и относительные частоты k_i/k будут большими в первых интервалах и очень малыми, даже нулями в последних. Поэтому гистограмма будет иметь вид, условно показанный на рис. 6.

Рис. 5

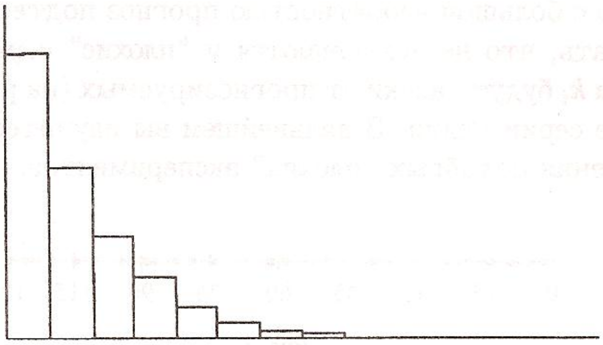


Рис. 6

Заметим, — если проводить эксперимент в другое время суток, например, от 22 до 23 часов вечера, то распределение значений $t^{(j)}$ изменится, длительные промежутки между вызовами будут возникать чаще. Однако, общий характер распределения останется прежним — сначала густо, потом редко. "Горка" станет ниже и более пологой (нарисуйте вид гистограммы).

Контроль 3. На рис. 4 высота третьего "столбика" гистограммы равна $h_3 \approx 1/150$. Сколько значений с.в. T_M появилось в третьем промежутке Δx_3? Определите приблизительно число значений $x^{(j)}$ с.в. T_M, появившихся в каждом из промежутков Δx_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 8$ и заполните таблицу 1.

Указание. Частоты k_i найдите приближенно по рисунку 4 так, чтобы их распределение соответствовало площадям S_i "столбиков" гистограммы. Проконтролируйте правильность ваших частот суммированием.

4. Распределение вероятностей с.в. T_M

Ближайшая наша цель — получить картину распределения не частот, а вероятностей. Для этого надо увеличивать число опытов k и следить за изменением гистограмм, предельное положение которых и покажет, как распределены вероятности.

Пример 2 (окончание). Взгляните еще раз на рис. 4. Изображенная на нем гистограмма получена (условно) в результате серии из $k = 150$ опытов над с.в. T_M и отражает распределение частот k_i, i = 1,2,...,8 в этой серии.

Если провести другую серию с тем же числом опытов, то возникнут иные частоты и вид гистограммы несколько изменится (рис. 7). Однако характер распределения частот в обеих сериях будет сходным — высоты "столбиков" гистограммы будут примерно одинаковыми, близкими к $h = 1/120$.

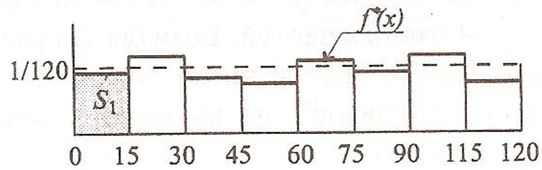


Рис. 7

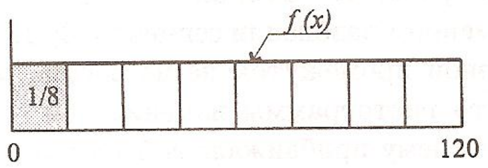


Рис. 8

Можете ли вы предсказать, как будут изменяться гистограммы, если неограниченно увеличивать число опытов и проводить серии из 300, 450, 600 опытов и т.д. Думаю, сможете, — вы скажете, что верхние основания столбиков станут приближаться к прямой линии $h = 1/120$ и в пределе сольются с ней (рис. 8). Верно. А почему так произойдет? Поясню на примере первого "столбика".

Согласно посторению гистограммы, площадь первого "столбика" равна относительной частоте события $A = (T_M \in [0;\ 15))$ — "ждал менее 15 сек.", т.е. $S_1 = k_1/150$. Если увеличивать число опытов $k \to \infty$, то относительные частоты k_1/k события A будут меняться и, по закону стабилизации частот, будут приближаться к вероятности $\mathbf{P}(A)$, т.е. $k_1/k \xrightarrow{(p)} \mathbf{P}(A)$[6]. Вероятность эту легко рассчитать, учитывая равномерность распределения частот: с ростом k они уравниваются, т.е. $k_1 \approx k_2 \approx \ldots \approx k_8 \approx k/8$, значит, $k_1/k \xrightarrow{(p)} 1/8$ и $\mathbf{P}(A) = 1/8$. Высоты первых "столбиков" $h_1 = S_1/\Delta t_1 = k_1/(k \cdot \Delta t_1) \approx 1/(8 \cdot 15) = 1/120$ с ростом k будут приближаться к $1/120$. Это рассуждение проходит для любого "столбика" — все высоты приближаются к одному числу $1/120$, а верхние основания "столбиков", следовательно, к прямой $h = 1/120$.

Ступенчатая функция $f^*(x)$, график которой составляют верхние основания гистограммы, называется *статистической функцией распределения* частот, ее график выделен на рис. 7 жирными "ступеньками". Предельная функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* вероятностей (рис. 8). Для с.в. T_M формула плотности распределения получена выше:

$$f(x) = \frac{1}{120}, \ x \in [0;\ 120]. \tag{1}$$

Замечание. У вас может возникнуть вопрос: о распределении каких вероятностей речь? Взгляните на рис. 7 и 8 и сравните первые "столбики". Площадь "столбика" гистограммы равна относительной частоте события $A = (T_M \in [0;\ 15))$ — "ждал менее 15 сек.". Площадь соответствующего "столбика" на рис. 8 равна пределу этой частоты, т.е. вероятности того же события. Вот и получается, что график функции $f(x)$ отражает распределение вероятностей событий $(T_M \in \Delta t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Все эти вероятности одинаковы и равны $1/8$. Распределение вероятностей строго равномерное, в то время, как распределение частот почти равномерное (случайное).

Неслучайность предельной функции. Обращаю ваше внимание на очень важный факт: гистограмм у с.в. много, а предельная функция $f(x)$ **одна**. Выше мы получили эту функцию (p)-предельным переходом $(k \to \infty)$ от гистограмм при неизменном разбиении сегмента $[0;\ 120]$ на 8 равных частей. Если бы мы разбивали основной промежуток не на восемь, а на любое другое число "интервальчиков" Δt_i, то гистограммы изменили бы число "столбиков", но их верхние основания попрежнему приближались бы к прямой $h = 1/120$.

Можно сказать, что статистические функции распределения (как и гистограммы) отражают свойства с.в. приближенно, на них влияют случайные факторы эксперимента и способ группировки. Предельная функция не зависит от этих факторов, она однозначно и объективно представляет свойства самой с.в.

Как найти предельную функцию? В данном примере нам удалось найти функцию $f(x)$, благодаря равномерности распределения частот по основному промежутку значений с.в. Если равномерности не будет, то задача отыскания (p)-предела сильно осложнится. Придется подбирать аналитическое выражение функ-

---

[6]Напоминаю: стрелочкой $\xrightarrow{(p)}$ обозначается *вероятностный* предельный переход, в нашем примере — реальное приближение относительных частот k_i/k к вероятности $\mathbf{P}(A)$ при неограниченном увеличении числа опытов $k \to \infty$ (см. лекцию 1, п. 2).

ции $f(x)$, график которой "похож" на гистограммы, а затем проверять, удачен ли подбор, используя сложные вероятностно-статистические методы (оценка правдоподобия гипотез), понятие о которых я постараюсь дать вам в конце курса.

Контроль 4. На рис. 4 изображена гистограмма, полученная после проведения серии из $k = 150$ опытов над с.в. T_M и группировки результатов по восьми промежуткам Δx_i, $i = 1, 2, ..., 8$. Изобразите вид гистограммы после проведения $k' = 300$ опытов и группировки результатов по шестнадцати равным промежуткам $\Delta x_i'$, $i = 1, 2, ..., 16$. Выделите график статистической функции распределения частот $f^*(x)$. К какой предельной линии будет приближаться этот график при неограниченном увеличении числа опытов $k' \to \infty$ и группировки по тем же интервалам $\Delta x_i'$?

5. Распределение вероятностей с.в. T_Φ

Пример 3 (окончание). Итак, мы провели статистический эксперимент над с.в. T_Φ и набрали $k = 300$ значений. Сгруппировали их по двадцати промежуткам: $\Delta t_1 = [0;\ 3)$, $\Delta t_2 = [3;\ 6)$, ..., $\Delta t_{20} = [57;\ 60]$. Посчитали частоты k_i и относительные частоты k_i/k. Нашли высоты $h_i = k_i/(k \cdot \Delta t_i)$ "столбиков" гистограммы и построили ее (рис. 6). Поскольку среди появившихся значений с.в. очень много малых, то гистограмма имеет вид быстро падающей "горки".

Увеличим число опытов, например до $k = 450$. Сгруппируем новые появившиеся значения по тем же двадцати промежуткам и построим новую гистограмму. Она будет несколько отличаться от предыдущей, но характер "падающей горки" сохранится (рис. 9).

Если продолжать увеличение числа опытов $k \to \infty$, то, как мы уже знаем, верхние основания гистограмм будут приближаться к "ступенькам" графика некоторой предельной функции $f_1(x)$ (на рис. 9 "ступеньки" выделены). Однако, если по-другому провести группировку, например, разбить основной промежуток $[0;\ 60]$ не на 20, а на 40 равных "интервальчиков" Δt_i, то предельная функция $f_2(x)$ изменится, она будет иметь не 20, а 40 "ступенек"

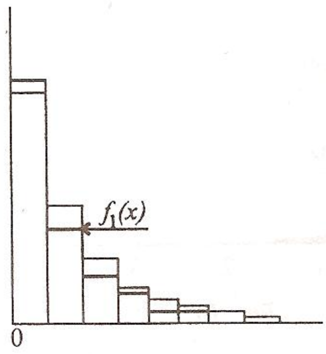


Рис. 9

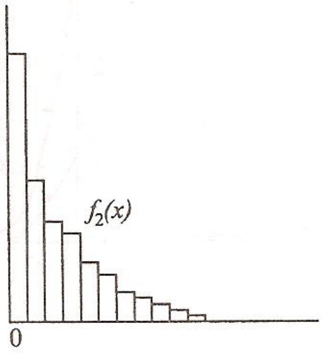


Рис. 10

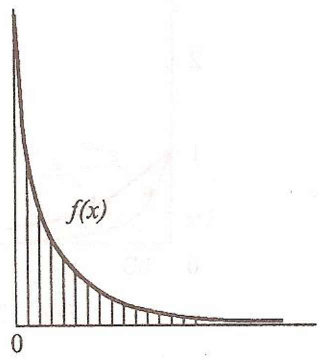


Рис. 11

Чтобы снять "плюрализм" предельных функций, давайте одновременно с увеличением числа опытов $k \to \infty$ станем измельчать интервалы $\Delta t_i \to 0$. Например, после $k = 450$ опытов будем группировать значения по 40 интервальчикам длины $\Delta t_i = 1,5$, после $k = 600$ опытов — по 60 интервальчикам длины $\Delta t_i = 1$, после $k = 750$ опытов — по 120 интервалам длины $\Delta t_i = 0,5$ и т. д. Нетрудно согласиться, что после достаточно большого числа опытов ступеньки гистограммы сольются с некоторой кривой линией — плавно и быстро падающей "горкой" (рис. 11). Это будет график предельной функции $f(x)$ — *функции распределения вероятностей* с.в. T_Φ, не зависящей от случайностей эксперимента и способа группировки, лишь бы $\Delta t_i \to 0$.

Формула предельной функции $f(x)$ для с.в. T_Φ известна

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \; x \in [0; \infty). \tag{2}$$

Параметр λ в этой формуле подбирается определенным образом (как? — узнаете из лекции 11).

Вас, конечно, беспокоит вопрос: "откуда взялась" формула (2)? Могу показать рассуждение, которое к ней подводит.

Из рис. 11 видно, что предельная функция $f(x)$ убывает и быстро приближается к нулю с ростом x. Спросим себя: какие известные нам элементарные функции обладают подобными свойствами? Вспомним экспоненту $y = e^{-x}$, $x \in [0; \infty)$ (рис. 12). Сравнивая рис. 11 и 12, видим, что нам нужна несколько иная функция, которая быстрее убывает, нежели экспонента и которая гораздо "выше" в начале. Но мы умеем преобразовывать графики. "Сожмем" экспоненту $y = e^x$, приблизив все ее точки к оси OX, например, в три раза: для этого вместо x ставим $3x$ и получаем функцию $y = e^{-3x}$ (рис. 12). "Поднимем" теперь график функции $y = e^{-3x}$ по оси OY, умножая все ординаты, например, на 3, получим функцию $y = 3e^{-3x}$, график которой (рис. 13) становится "похожим" на график нашей предельной функции $f(x)$ (рис. 11). Множитель $\lambda = 3$ в данном рассуждении, конечно, условен.

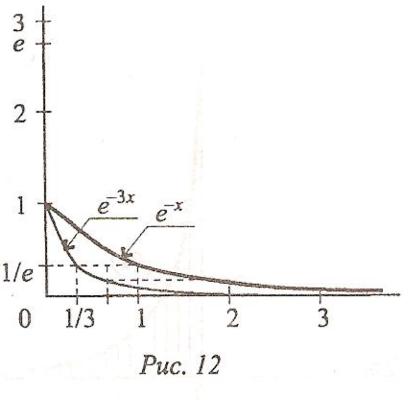


Рис. 12

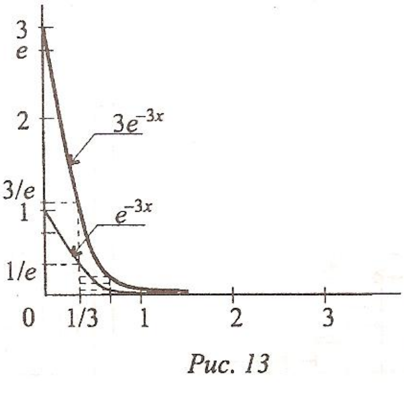


Рис. 13

Контроль 5. На рис. 14 показана гистограмма некоторой с.в. Нарисуйте предположительный вид графика предельной функции. Подберите множитель λ в формуле (2), моделирующей предельную функцию $f(x)$. Постройте график этой функции. Сравните его с предполагаемым. Близки?

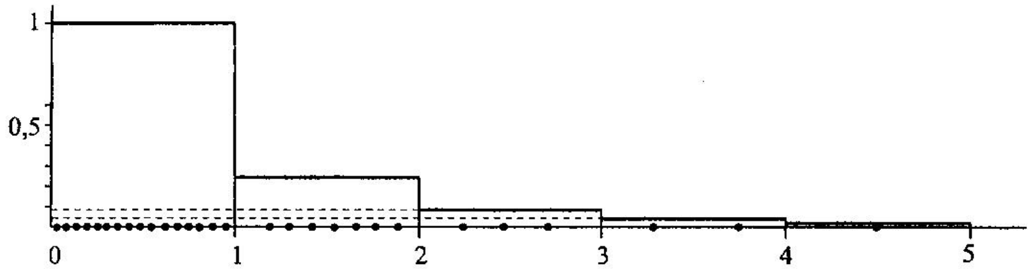


Рис. 14

Указание. Вид гистограммы (рис. 14) подсказывает, что надо "расширить" и "опустить" экспоненту — отдалить ее точки от оси OY в два раза дальше и приблизить к оси OXв два раза ближе. Значит, $\lambda = 0,5$. При построении модели функции распределения учтите, что $e^{-0.5} \approx 0{,}6$; $e^{-1} \approx 0,4$; $e^{-1{,}5} \approx 0{,}2$; $e^{-2} \approx 0,1$.

6. Плотность распределения

Мы только что подробно разобрали два примера, в которых перешли от гистограмм к ступенчатым функциям $f^*(x)$ и далее к предельной функции $f(x)$. Теперь надо распространить эту процедуру на произвольную непрерывную с.в., т.е. зафиксировать ее в абстрактных терминах. Таким образом мы придем к двум фундаментальным понятиям математической статистики и теории случайных величин.

Определение 1. *Статистической плотностью* распределения с.в. X с множеством значений $(a;\ b)$ называется функция $f^*(x)$, которая определяется в результате следующих практических действий:

1) проводится серия из k опытов над с.в. X и фиксируются появившиеся значения $x^{(1)},\ x^{(2)},\ \dots,\ x^{(k)} \in (a;\ b)$;

2) основной интервал $(a;\ b)$ разбивается на непересекающиеся промежутки Δx_i, $i = 1, 2, ..., m$ и вычисляются относительные частоты k_i/k появления значений с.в. X в каждом Δx_i;

3) значения функции $f^*(x)$ на каждом промежутке Δx_i постоянны и определяются так:

$$f^*(x) = \frac{k_i}{k \cdot \Delta x_i}, \quad \text{если} \quad x \in \Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., m.^7 \qquad (3)$$

Уточнение. Данное определение имеет смысл не только для непрерывных с.в. Все операции, указанные в нем, могут быть выполнены для дискретной с.в. с одним

[7] В литературе функция $f^*(x)$ обычно продолжается на всю числовую прямую так: $f^*(x) = 0,\ x \notin (a;\ b)$.

уточнением: на промежутки Δx_i придется разбивать сегмент $[x_{\min};\ x_{\max}]$, ограниченный наименьшим и наибольшим из появившихся в эксперименте значений с.в. Этот сегмент (а не $(a;\ b)$) будет в этом случае областью определения функции $f^*(x)$. Сказанное относится и к непрерывной с.в., множество возможных значений которой не ограничено $(a, b = \infty)$.

Почему $f^*(x)$ — *"плотность"* ? Почему использован физический термин? Посмотрите на рис. 14: в каждом промежутке Δx_i условно выделены точки — значения с.в., попавшие в этот промежуток. Вы видите, что чем больше точек в Δx_i (их число k_i), тем больше относительные частоты k_i/k, тем больше $h_i = k_i/(k \cdot \Delta x_i)$ — высоты "ступенек" гистограммы, которые и являются значениями функции $f^*(x)$, $x \in \Delta x_i$. Следовательно, величина $f^*(x)$ характеризует густоту, плотность появившихся в Δx_i значений с.в.: чем больше $f^*(x)$, тем гуще, плотнее заполняют промежуток Δx_i значения $x^{(j)}$.

Свойства функции $f^*(x)$.

1°. $f^*(x)$ — **ступенчатая** функция, определенная на $(a;\ b)$;

2°. $f^*(x)$ — **неотрицательная** функция: $f^*(x) \geqslant 0,\ x \in (a;\ b)$;

3°. $f^*(x)$ — **интегрируемая** на $(a;\ b)$, как всякая ступенчатая функция, и ее интеграл равен **единице**:

$$\int_a^b f^*(x)\ dx = 1. \tag{4}$$

Другими словами, сумма площадей всех "столбиков" гистограммы равна единице:

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{(\Delta x_i)} f^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{k \cdot \Delta x_i} \cdot \Delta x_i = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i = 1$$

(сумма всех частот k_i равна числу появившихся в эксперименте значений $x^{(j)}$, т. е. равна числу опытов k).

Определение 2. *Плотностью распределения* вероятностей непрерывной с.в. X с множеством значений $(a;\ b)$ называется вероятностный предел статистической плотности при неограниченном увеличении числа опытов $k \to \infty$ и измельчении промежутков $\Delta x_i \to 0$, т. е.

$$f(x) = (p) - \lim_{k\to\infty, \Delta x_i \to 0} f^*(x)\,,\ x \in (a;\ b)\,. \tag{5}$$

Смысл равенства (5) . Данное определение нельзя назвать строго математическим, ибо операция (p)-предельного перехода от $f^*(x)$ к $f(x)$ связана с последовательностью экспериментов над с.в. X, а в реальности их нельзя осуществить бесконечно. В определении, в сущности, зафиксирован эмпирический (опытный) факт “стабилизации” статистических функций $f^*(x)$ — в сериях с очень большим числом опытов они мало отличаются друг от друга. Следовательно, можно считать, что с ростом $k \to \infty$ и уменьшением всех $\Delta x_i \to 0$ **значения функций $f^*(x)$ в точке x неограниченно приближаются к какому-то числу** $f(x)$. Но это смысл и строго математического понятия предела.

Здесь, конечно, возникает законный вопрос: **как найти число** $f(x)$? В отличие от строго математического предела, вероятностный предел нельзя считать однозначно определенным. Здесь математики обычно довольствуются каким-то удобным приближением — функцией $f(x)$, имеющей достаточно простое аналитическое выражение и “близкой” к $f^*(x)$ при больших k. Мы уже имели дело с подобной задачей в несложных конкретных примерах 2 и 3. В лекции 11 займемся ею более фундаментально.

Свойства функции-плотности $f(x)$. Предельные функции могут быть очень разнообразными, но все они обладают двумя общими свойствами, вытекающими из их связи с гистограммами и статистическими функциями $f^*(x)$.

1°. $f(x)$ — **неотрицательная** функция: $f(x) \geqslant 0,\ x \in (a;\ b)$;

2°. $f(x)$ — **интегрируемая** функция и ее интеграл равен **единице**:

$$\int_a^b f(x)\ dx = 1. \tag{6}$$

Отметим здесь же, что во всех практически важных и часто возникающих задачах предельная функция **непрерывна**. Однако, надо знать, что встречаются и разрывные.

Добавление. Кроме функции-плотности $f(x)$ существуют иные характеристики распределения вероятностей непрерывной с.в. X. Можно использовать первообразную $F(x) = \int_a^x f(x)\ dx$. Согласно геометрическому смыслу интеграла от неотрицательной функции, значение $F(x)$ есть площадь подграфика функции $f(x)$ в пределах от a до x (рис. 15). Но эта площадь равна вероятности появления в опыте значений с.в. X, попадающих в промежуток $(a;\ x]$ (см. следующий п. 7). Следовательно, функцию $F(x)$ можно определить так: $F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$ — она тоже показывает распределение вероятностей с.в. X. Функцию эту называют *интегральной* функцией распределения, а $f(x)$ — *дифференциальной* функцией распределения. Строгое определение непрерывной с.в., о котором я говорил в начале лекции, требует непрерывности именно интегральной функции распределения вероятностей $F(x)$ и, более того, дифференцируемости этой функции.

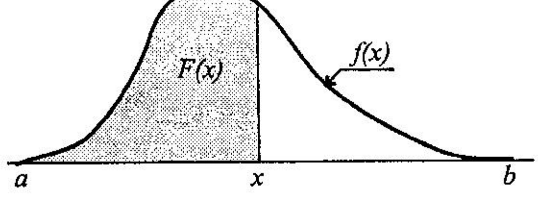


Рис. 15

Контроль 6. С.в. L — размер детали, изготавливаемой автоматическим станком (контроль 2). Нарисуйте предположительный вид графика статистической плотности $f^*(x)$ и графика плотности $f(x)$ с.в. L. Какое свойство подграфика этих функций должно соблюдаться?

7. Задача о попадании н.с.в. в заданный интервал

Одна из основных практических задач, которая решается с помощью функции-плотности $f(x)$, следующая.

Задача. Изучается непрерывная с.в. X, область значений которой — промежуток $[a;\ b]$ и плотность распределения которой известна — $f(x)$. Исследователя интересует некоторый участок возможных значений $(\alpha;\ \beta) \subset [a;\ b]$. Как узнать вероятность события A, состоящего в том, что при выполнении опыта появится значение x с.в. X, попадающее в интервал $(\alpha;\ \beta)$? Событие A, как вы помните, обозначается так: $A = (X \in (\alpha;\ \beta))$.

Замечание. Задача эта неоднократно возникала раньше, при изучении дискретных с.в.. Вспомните вопрос о вероятности появления суммы очков 6, 7 или 8 при подбрасывании двух игральных костей (лекция 5, п. 1). Вспомните практически важную задачу о попадании в заданный интервал биномиальной с.в. — задача решена формулой Муавра-Лапласа (лекция 4, п. 8).

Решение дает простая формула

$$\mathbf{P}(X \in (\alpha;\ \beta)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Прежде чем обосновывать эту формулу, я продемонстрирую вам ее эффективность примерами.

Пример 4. Какова вероятность того, что после спуска в метро и выхода на платформу мы будем ждать поезда не более полминуты?

Вопрос сформулирован на обыденном языке. Переведенный на теоретический язык, он превращается в задачу: какова вероятность того, что с.в. T_M примет в опыте значение t, попадающее в промежуток $[0;\ 30]$?

Функция-плотность для с.в. T_M нам известна — (1): $f(x) = 1/120$, $x \in [0;\ 120]$. Применяем формулу (7):

$$\mathbf{P}(T_M \in [0;\ 30]) = \int_0^{30} \frac{1}{120}dx = \frac{1}{120}(30 - 0) = \frac{1}{4}.$$

Прогноз. В среднем, из четырех поездок в метро один раз мы будем ждать поезда не долго (не более 30 секунд), а три раза — долго. Не забудьте ограничение, при котором сделан прогноз: учитываются поездки, которые происходят в период нормального режима движения поездов — через две минуты.

Пример 5. Автоматический станок штампует детали заданного размера l_0. Стандартом допускается отклонение размера l от заданного не более, чем на величину δ. Какова вероятность появления стандартной детали?

Перед нами с.в. L — размер детали, значения которой — $(l_0 - \varepsilon;\ l_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > \delta$ (контроль 2). Формула (7) принимает вид

$$\mathbf{P}(|l - l_0| < \delta) = \int\limits_{l_0-\delta}^{l_0+\delta} f(x)\,dx.$$

В отличие от предыдущего примера, функция-плотность $f(x)$ для с.в. L нам не известна. Поэтому мы не можем сейчас довести решение до числа. Через одну лекцию вы узнаете, как определяется эта функция, какой вид примет записанный выше интеграл и как его вычислять.

Обоснование формулы (7).

1. На рис. 16 изображен график функции-плотности $f(x)$ произвольной с.в. X и показан интервал $(\alpha;\ \beta)$. Изобразим над этим участком график некоторой статистической плотности $f^*(x)$, "близкой" к $f(x)$. Точки α и β можно считать включенными в число точек, разбивающих основной промежуток $[a;\ b]$ на интервальчики Δx_i при группировке и построении гистограмм.

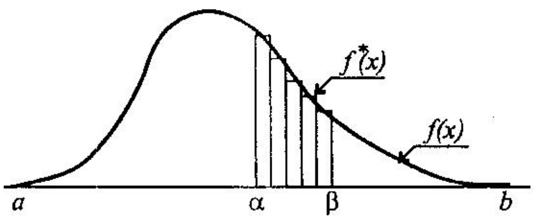


Рис. 16

2. Очевидно, площадь S гистограммы над $(\alpha;\ \beta)$ равна относительной частоте k_0/k события $(X \in (\alpha;\ \beta))$ (число k_0 значений с.в. X, появившихся в $(\alpha;\ \beta)$ равно сумме частот значений, появившихся в интервальчиках Δx_i, составляющих $(\alpha;\ \beta)$), т.е.

$$S = k_0/k.$$

3. Если число опытов k неограниченно увеличивается и $\Delta x_i \to 0$, то график функции $f^*(x)$ приближается к графику $f(x)$. Следовательно, площадь S гистограммы приближается к площади подграфика $f(x)$, которая равна интегралу, т.е.

$$k_0/k = S \xrightarrow{(p)} S_f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

4. В этих же условиях, согласно закону стабилизации частот, относительные частоты события $(X \in (\alpha;\ \beta))$ приближаются к вероятности этого события:

$$k_0/k \xrightarrow{(p)} \mathbf{P}\left(X \in (\alpha;\ \beta)\right).$$

5. Сравнивая последние два соотношения, приходим к формуле (7).

Контроль 7. На рис. 14 высоты "столбиков" гистограммы равны соответственно, 0,60; 0,25; 0,08; 0,04; 0.03 . Определите относительную частоту попадания с.в. на участок [1; 3]. Определите вероятность этого события.

Указание. Напоминаю, — плотность распределения вероятностей определена в контрольном упражнении 5 так: $f(x) = 0,5 \cdot e^{-0,5x}$.

8. Парадоксы нулевых вероятностей

В заключение лекции — для любознательных о неожиданных следствиях формулы (7).

Парадокс 1. Если плотность распределения с.в. X есть непрерывная функция $f(x)$, то вероятность любого возможного значения x_0 с.в. X равна нулю:

$$\mathbf{P}(X = x_0) = 0. \tag{8}$$

Обоснование.

1. Введем события $A = (X = x_0)$ и $B = (X \in [x_0,\ x_0 + \Delta x])$, где Δx — любое небольшое приращение аргумента функции $f(x)$, не выводящее $x_0 + \Delta x$ за пределы множества значений с.в. X.

2. Почти очевидно, что $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$. Обоснуем это неравенство формально. Согласно статистического определения вероятности, имеем:

$$\mathbf{P}(A) = (p) - \lim_{k\to\infty} \frac{k_0}{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}(B) = (p) - \lim_{k\to\infty} \frac{k'}{k},$$

где k_0 — частота появления значения x_0 в серии из k опытов, а k' — частота появления значений с.в., попадающих в сегмент $[x_0,\ x_0 + \Delta x]$.

Далее идет цепочка логических следствий:

$$x_0 \in [x_0,\ x_0 + \Delta x] \Rightarrow k_0 \leqslant k' \Rightarrow \tfrac{k_0}{k} \leqslant \tfrac{k'}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p) - \lim_{k\to\infty} \tfrac{k_0}{k} \leqslant (p) - \lim_{k\to\infty} \tfrac{k'}{k} \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B).$$

(Здесь использована теорема о предельном переходе в неравенствах, которую мы считаем справедливой и для вероятностных пределов.)

3. Покажем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \mathbf{P}(B) = 0.$[8]

[8]Здесь предельный переход обычный — функциональный, а не вероятностный.

Используя формулу (7) и теорему Лагранжа, преобразуем нашу вероятность так:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(X \in [x_0,\ x_0 + \Delta x]) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)\ dx = f(c) \cdot \Delta x,\ c \in [x_0,\ x_0 + \Delta x].$$

Устремим $\Delta x \to 0$ и с учетом того, что $x_0 \leqslant c \leqslant x_0 + \Delta x$, и непрерывности функции $f(x)$, получим

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow x_0 + \Delta x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0 \Rightarrow f(c) \to f(x_0).$$

Теперь можно перейти к пределу в равенстве $\mathbf{P}(B) = f(c) \cdot \Delta x$, в результате получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(B) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) \cdot \Delta x = f(x_0) \cdot 0 = 0.$$

4. Используя теорему о сохранении знака неравенства в пределе и неотрицательность вероятности, окончательно получаем

$$\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B) \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{P}(B) \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leqslant 0 \Rightarrow \mathbf{P}(A) = 0.$$

Обсуждение. В чем парадоксальность следствия? Оно утверждает, что **возможное** событие имеет **нулевую** вероятность. Этот вывод резко противоречит вашему опыту и интуиции, — ведь нулевую вероятность должны иметь именно невероятные, невозможные события.

Интуиция эта сформировалась классической моделью. Вспомните определение $\mathbf{P}(A) = m/n$, где знаменатель n — число всех равновозможных исходов опыта, а числитель m — число исходов, благоприятствующих появлению события A. Если A — возможное событие, оно обязательно появится при каком-то исходе (группа исходов полна), поэтому $m > 0$ и $\mathbf{P}(A) > 0$.

Как же разрешается парадокс? Причина его в том, что свойства вероятности, справедливые для случаев конечной группы исходов опыта, переносятся на случаи бесконечного множества исходов. Т.е. парадокса просто нет! В ситуациях, в которых применимо классическое определение, любое возможное событие имеет положительную вероятность. Если же классическое определение не применимо, точнее, — если “количество” всех равновозможных исходов опыта бесконечно, то вероятности этих исходов нулевые.

Но может быть, несмотря на всю логичность рассуждений, у вас остается психологическая неудовлетворенность? Ведь при каждом выполнении опыта какой-то исход появится. Как же его вероятность нулевая? Чтобы окончательно рассеять ваши сомнения, приведу пример.

Представьте, что вы купили один билет лотереи. Зная немного теорию вероятностей, вы зададите себе вопрос — какова вероятность выигрыша? Вы понимаете, что вероятность зависит от общего числа билетов n и от числа выигрышных m.

Эти сведения организаторы лотерей обычно держат в секрете. Допустим, вам удалось узнать, что лотерея содержит очень-очень много билетов, ну — миллион, 10^6 билетов, из которых выигрывают 10. После этого вы, наверное, выбросите ваш билет. Так? Ну, а теперь представьте, что лотерея содержит бесконечное "число" билетов. Какова вероятность вашего выигрыша?

Данный пример приводит нас к важному выводу: *следует различать теоретическую возможность появления события и практическую.* Событие может быть теоретически возможным, но ожидать его появления при реальном выполнении опыта не имеет смысла. Действовать, исходя из предположения возможности появления этого события, неразумно.

Придадим этому выводу форму еще двух парадоксов.

Парадокс 2. Пусть опыт имеет бесконечное число исходов. Если вероятность некоторого события равна нулю, то в любой конечной серии опытов оно не появится ни разу.

Парадокс 3. Если X — непрерывная с.в., то в любой конечной серии опытов **все** появившиеся ее значения **разные**.

Контроль 8. Перед выходом на перрон станции метро вы загадали, что поезд подойдет ровно через 30 сек. Какова вероятность этого события? Может ли это событие произойти? Аргументируйте свой ответ.

9. Упражнения

1. С помощью эксперимента установлено, что орудие поражает цель примерно 40 раз из 100 выстрелов. Определите наиболее вероятное число попаданий при залпе из 5 таких орудий. Какую с.в. введете для решения этой задачи? Дискретная она или непрерывная? Почему?

2. В условиях предыдущего упражнения постройте ряд распределения и многоугольник распределения введенной вами с.в. Какие прогнозы можете сделать? Оцените расположение математического ожидания, потом рассчитайте его точно. Сделайте то же для дисперсии и среднего квадратического отклонения. Выполняется ли правило трех сигм?

3. Определите параметр a, при котором функция $f(x) = a/\sqrt{x}$, $x \in [1;\ 9]$, будет плотностью распределения вероятностей некоторой с.в. Постройте график этой плотности. Какие значения с.в. будут появляться в опыте чаще, какие реже (укажите участки)? Во сколько раз реже? Оцените вероятность появления значений, меньших 4 и рассчитайте эту вероятность точно.

4. При экспериментальном исследовании с.в. $T_Л$ — время непрерывной работы электролампы до выхода ее из строя — получен нижеследующий группированный статистический ряд (временные промежутки даны в часах):

Таблица 2

Продолжительность жизни лампы	Число ламп	Продолжительность жизни лампы	Число ламп
950 – 1000	2	1550 – 1600	28
1000 – 1050	2	1600 – 1650	25
1050 – 1100	3	1650 – 1700	21
1100 – 1150	6	1700 – 1750	16
1150 – 1200	7	1750 – 1800	12
1200 – 1250	12	1800 – 1850	8
1250 – 1300	16	1850 – 1900	6
1300 – 1350	20	1900 – 1950	3
1350 – 1400	24	1950 – 2000	2
1400 – 1450	27	2000 – 2050	1
1450 – 1500	29	2050 – 2100	1
1500 – 1550	29	Всего	300

Постройте гистограмму (примите интервал в 50 часов за единицу). Сделайте прогнозы. Определите промежуток, в который будут попадать значения с.в. $T_Л$ с вероятностью, большей, чем $0,8$.

5. К какому классу относится с.в. $T_Л$ (дискретная или непрерывная)? Каково множество ее значений? Границы этого множества размыты или нет? Как вы думаете, однотипны ли распределения с.в. $T_Л$ и L? Что у них общего? Нарисуйте предположительный вид графика предельной функции $f(x)$ с.в. $T_Л$. Попробуйте подобрать аналитическое выражение этой функции.

Игорь Петрович Костенко,
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
действительный член Международной педагогической академии.
email: kost@kubannet.ru

Алгебра*. Часть I. Числа и решетки

А. Н. Земляков

Продолжаем публикацию учебных материалов ФМШ №18 (ныне СУНЦ) при МГУ. В настоящем номере начинаем печатать тезисы спецкурса по алгебре, который читался учащимся ФМШ в конце 70-х годов прошлого столетия.

Сады моей души всегда узорны...

Н. Гумилев

I. Иррациональность и решетки

Но очень трудно найти уравнение, в котором корнем было бы такое немыслимое число.

Р. Фейнман

1. Доказательство иррациональности числа $x = \cos 20°$ общеизвестно:

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0,$$

а последнее уравнение не имеет рациональных корней.

2. Имеет место более общая **теорема**: косинус любого рационального числа градусов между 0° и 90°, кроме 60°, иррационален. Рассуждения тезиса 1 (в дальнейшем "тезис" обозначаем "т.") на общий случай обобщить затруднительно, и мы пойдем в обход.

3. **Определение.** Точечной плоской решеткой называется множество точек

$$L = \{(m\vec{a} + n\vec{b})(O) \mid m, n \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные неколлинеарные векторы, O — начальная точка. Проводя через точки решетки прямые, параллельные базисным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, мы получим т.н. решетку параллелограммов. Отметим, что одна и та же решетка может быть задана с помощью разных базисов, поэтому решетка параллелограммов связана с точечной решеткой не инвариантным образом.

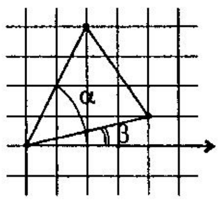
Важный пример — целочисленная решетка на координатной плоскости:

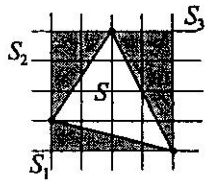
$$\mathbb{Z}^2 = \{(m; n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

4. **Основное свойство решетки** состоит в том, что она отображается на себя при любом параллельном переносе вида $\overrightarrow{AB}$, где A и B — точки решетки.

Точки решетки называются ее узлами. Основное свойство означает, что если три вершины параллелограмма лежат в узлах, то и четвертая — узел.

5. Многоугольник называется вписанным в решетку, если все его вершины лежат в узлах решетки. Пример: в целочисленную решетку нельзя вписать никакой правильный треугольник. Два доказательства этого факта опираются на следующие картинки.



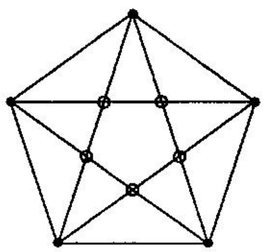


$$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \qquad S_i \in \mathbb{Q},\ S \notin \mathbb{Q}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \tfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \in \mathbb{Q} \qquad S_1 + S_2 + S_3 + S \in \mathbb{Q}$$

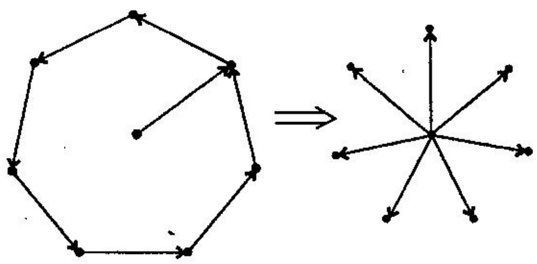
6. **Задача.** Докажите, что ни в какую решетку нельзя одновременно вписать и квадрат, и правильный треугольник.

7. Очевидно, существуют решетки, в которые можно вписать квадрат, правильные треугольник и шестиугольник. Оказывается, справедлива **теорема**: никакой другой правильный многоугольник не может быть вписан ни в одну решетку. Доказательство этого факта дано на следующих картинках (оно опирается на основное свойство решеток и на то, что не существует точек решетки на сколь угодно малом расстоянии одна от другой):

n = 5

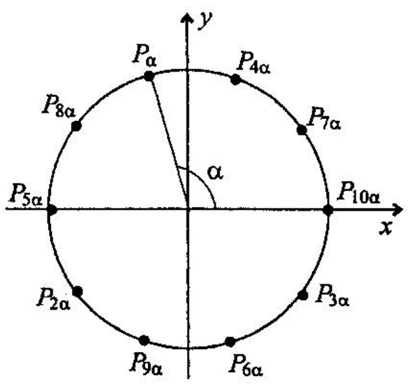


n ⩾ 7



8. Теперь докажем теорему т. 2:

$$\alpha = \frac{m}{n} 2\pi, \ \frac{m}{n} \in \left(0, \frac{1}{4}\right), \ \frac{m}{n} \neq \frac{1}{6} \Rightarrow \cos\alpha \notin \mathbb{Q}.$$



Заметим, что для таких чисел α точки $P_{k\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ($P_t = R_0^t(1;0)$ — образ при повороте точки $(1;0)$ на угол t) единичной окружности образуют правильный n-угольник, если только дробь $\frac{m}{n}$ несократима (это вытекает из леммы о представлении Н.О.Д.). Сейчас мы докажем, что если $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$, то около этого n-угольника можно описать решетку.

9. Основная лемма. Пусть $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$; обозначим через s число $\sin\alpha$. Тогда при любом k число $\cos k\alpha$ рационально, а число $\sin k\alpha$ рационально кратно числу s:

$$\cos k\alpha = \frac{p_k}{q_k}, \ \sin k\alpha = s\frac{p'_k}{q'_k}.$$

Доказательство проводится индукцией по k.

10. Обозначим через N и N' общие знаменатели дробей P_k/q_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, и P'_k/q'_k, $1 \leqslant k \leqslant n$. На координатной плоскости проведем прямые $x = a/N$ и $y = a/N'$, где a — любое целое. Точки пересечения этих прямых образуют решетку, и из леммы 9 вытекает, что n-угольник из т. 8 вписан в нее.

11. Применяя теорему т. 7, получаем, что если $\cos\frac{m}{n}2\pi \in \mathbb{Q}$, то n может быть равно 3, 4 или 6. В интервале $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ из таких $\frac{m}{n}$ лежит только $\frac{1}{6}$. Теорема т. 2 доказана.

12. Эта теорема (т. 2) не только забавна, но и полезна — позднее мы покажем, как она помогает при решении 3-й проблемы Гильберта (о равносоставленности равновеликих многогранников).

13. Задача. Найдите все острые углы, измеряемые рациональным числом градусов, для которых: а) синус, б) тангенс — будет рациональным числом.

14. Задача. Рассмотрим семейство параллельных прямых на одинаковых расстояниях одна от другой (плоскость «в линейку»). Докажите, что если правильный n-угольник можно расположить всеми своими вершинами на линиях семейства, то $n = 3$, 4 или 6 (!).

15. Пространственной точечной решеткой называется множество точек

$$L = \{(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c})(O) \mid m, n, p \in \mathbb{Z}\},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора, O — фиксированное начало.

Задача. Пусть A, B, C — три узла пространственной решетки. Докажите, что в пересечении плоскости (ABC) с этой пространственной решеткой получится плоская решетка (в плоскости (ABC); считается, что точки A, B, C не лежат на одной прямой).

16. Задача. а) Показать, что в целочисленную пространственную решетку

$$\mathbb{Z}^3 = \{(m, n, p) \mid m, n, p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^3$$

можно вписать куб, октаэдр и правильный тетраэдр.

б) Доказать, что додекаэдр и икосаэдр не могут быть вписаны ни в какую пространственную решетку.

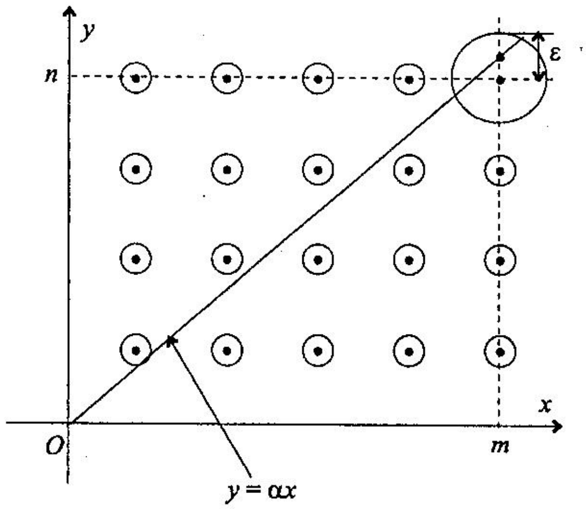
17. Замечание. Из теоремы т. 7 легко вывести, что у плоских орнаментов (или в двумерных кристаллографических группах) не бывает центров поворотов порядка 5, 7 и более. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что различных типов орнаментов (или неизоморфных двумерных кристаллографических групп) — в точности 17! (Теорема Е.С.Федорова.)

II. Иррациональность и плотность.

Призма переходит в генератрису, генератриса превращается в касательную, касательная съеживается в лемнискату, лемниската распадается на две окружности, одна из них вытягивается в эллипс, эллипс развертывается в параболу, парабола закручивается в спираль, спираль тихонько обвивает мозг, ее когда-то раскрутивший...

Мигель Отеро Сильва

18. Рассмотрим прямую $y = \alpha x$ на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то прямая, очевидно, пройдет через бесконечное множество целых точек, т.е. точек решетки $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. В случае $\alpha \notin \mathbb{Q}$ на прямой будет лежать единственная целая точка $(0;0)$.



19. Теорема. Если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то прямая $y = \alpha x$ проходит сколь угодно близко от ненулевых целых точек: скажем,

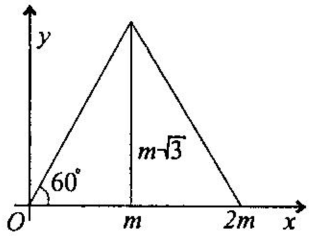
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\quad | m\alpha - n | < \varepsilon$$

Иногда эту теорему формулируют так: если в точке $(0;0)$ сидит охотник, а в остальных целых точках — зайцы радиуса $\varepsilon > 0$, то при любом направлении выстрела охотник обязательно попадет хотя бы в одного зайца (сколь бы мал ни был радиус зайцев).

20. Доказательство теоремы 19. Для истинности неравенства $| m\alpha - n | < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\{m\alpha\} < \varepsilon$. Заметим, что все точки $\{k\alpha\}$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат промежутку $[0;1)$ и отличны одна от другой. Если разбить $[0;1)$ на N полуинтервальчиков длины $\frac{1}{N} < \varepsilon$, то среди точек $\{k\alpha\}$, $k = 1, \ldots, N+1$, найдутся две, попадающие в один полуинтервальчик: скажем, $\{k_2\alpha\} > \{k_1\alpha\}$. Но тогда $\{(k_2 - k_1)\alpha\} = \{k_2\alpha\} - \{k_1\alpha\} < \frac{1}{N} < \varepsilon$. Требуемое доказано.

21. Определение. n-угольник называется ε-вписанным в решетку L, если все вершины этого n-угольника расположены на расстоянии $\leqslant \varepsilon$ от n различных узлов решетки.

Следствие из т. 19. При любом $\varepsilon > 0$ в целочисленную решетку можно ε-вписать правильный треугольник (см. картинку).



22. Для обобщения результата т. 21 на случай произвольного многоугольника нужно гарантировать одновременное приближение кратных к целым.

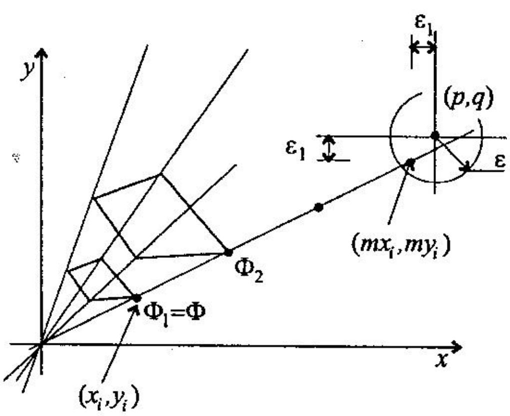
Теорема Кронекера.

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ m \neq 0, n_1, \ldots, n_s\ \forall r = 1, \ldots, s\ | m\alpha_r - n_r | < \varepsilon.$$

23. Доказательство теоремы Кронекера. Разобьем промежуток $[0;1[$ на N полуинтервальчиков длины $\frac{1}{N} < \varepsilon$: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$. Каждому числу $k \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие упорядоченный набор из s полуинтервальчиков $M_k = (\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_s})$, где Δ_{i_r} — тот из Δ_i, в который попадает число $\{k\alpha_r\}$, $r = 1, 2, \ldots, s$ (среди Δ_{i_r} могут встречаться повторяющиеся). Всего возможных наборов по s из N полуинтервалов имеется $K = N^s$, поэтому среди первых $K+1$ наборов M_k найдутся два совпадающих: скажем, $M_{k_2} = M_{k_1}$. Осталось взять $m = k_2 - k_1$.

24. Следствие. При произвольном $\varepsilon > 0$ в целочисленную решетку можно ε-вписать многоугольник, гомотетичный любому наперед заданному многоугольнику Φ.

Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность многоугольников $\Phi_m = H_0^m(\Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, и применить теорему Кронекера, взяв в ней в качестве α_i все координаты x_i, y_i вершин Φ, а в качестве ε — число $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ (тогда $\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$ — см. картинку).



25. Задача. а) Докажите утверждение т. 24 для произвольной плоской решетки.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение в пространственном случае.

26. Из доказательства теоремы 19 (т. 20) вытекает т.н. **теорема Якоби**: если $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то числа $\{k\alpha\}, k \in \mathbb{N}$ всюду плотно заполняют полуинтервал $(0;1)$ —

каков бы ни был интервальчик $\Delta \subset (0;1)$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\{k\alpha\} \in \Delta$ (объясните; конечно, для рациональных чисел α это утверждение неверно).

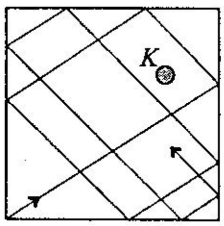
Приведем многочисленные следствия из этой теоремы (большей частью в виде задач).

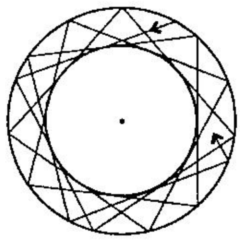
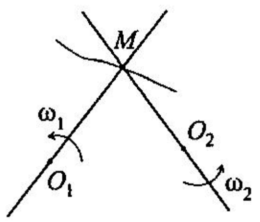
27. Теорема. Число $2^n, n \in \mathbb{N}$ может начинаться с любого наперед заданного набора цифр.

Доказательство. Число 2^n начинается с набора цифр (с числа) A, если при некотором $m \in \mathbb{N}$ выполняется условие $A \cdot 10^m \leqslant 2^n < (A+1) \cdot 10^m$, то есть $\lg A + m \leqslant n \lg 2 < \lg(A+1) + m$, или $\{\lg A\} \leqslant \{n \lg 2\} < \{\lg(A+1)\}$.
Осталось заметить, что $\lg 2 \notin \mathbb{Q}$ (почему?) и воспользоваться теоремой Якоби. (Ясно, что вместо 2 можно взять любое c т.ч. $\lg c \notin \mathbb{Q}$.)

28. Задача. Найдите и исправьте ошибку в приведенном доказательстве.

29. Задача. Из вершины квадратного биллиардного стола выпущен точечный биллиардный шарик под углом φ к борту таким, что $\operatorname{tg}\varphi \notin \mathbb{Q}$. Выведите из теоремы Якоби, что траектория шарика всюду плотно заполнит весь квадрат — для любого (сколь угодно малого) кружка K в квадрате траектория рано или поздно пересечет K.



30. Задача. Докажите, что биллиардная траектория в круге либо замкнута (периодична), либо всюду плотно заполняет некоторое прилегающее к границе круга кольцо (см. картинку).

31. Задача (о двух прожекторах). Две прямые (или луча) вращаются каждая около своей точки, с разными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 (см. картинку). Докажите, что если ω_1 и ω_2 несоизмеримы (т.е. $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{Q}$), то кривая, по которой движется точка пересечения прямых, заполняет всюду плотно всю плоскость.

32. Фигурой Лиссажу называется траектория точки, обе координаты которой меняются по гармоническому закону:

$$\{(x,y) = (A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Задача. Докажите, что если частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, то фигура Лиссажу всюду плотно заполняет прямоугольник $\{(x,y) \mid |x| \leqslant A_1, |y| \leqslant A_2\}$.

33. Теорема. Если наименьшие периоды двух периодических непрерывных функций несоизмеримы, то сумма этих функций не будет периодической.

Схема доказательства. Если данные функции имеют максимумы A и B при одном и том же значении аргумента, то сумма принимает значение $A+B$ только при одном значении аргумента и периодической быть не может. В противном случае из теоремы Якоби выводится, что сумма может принимать значения, сколь угодно близкие к $A+B$, но никогда не принимает значения в точности $A+B$ — это противоречит непрерывности суммы.

34. Задача (не имеющая отношения к теореме Якоби). Приведите пример двух разрывных функций с несоизмеримыми наименьшими периодами, сумма которых была бы периодична.

III. Квадратичные приближения

Алмазны скрепы всех соотношений,
Везде узор их музыки ловлю.

К. Д. Бальмонт

35. На практике вместо чисел используются их приближенные значения. Нас будут интересовать приближения чисел обыкновенными дробями. Хотелось бы, чтобы знаменатель дроби был поменьше, а точность приближения — побольше. Заметим, что для $\alpha = a_0, a_1a_2a_3\ldots \in \mathbb{R}$ n-ое десятичное приближение имеет вид

$$\alpha_n = a_0, a_1\ldots a_n = \frac{p}{10^n}, \quad \text{причем } |\alpha - \alpha_n| = \left|\alpha - \frac{p}{10^n}\right| < \frac{1}{10^n}.$$

Приближения $\frac{p}{q}$ числа α такие, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$, называют линейными. Рассматривая точки $\frac{x}{q} \in \mathbb{R}$, где $x \in \mathbb{Z}$, мы можем получить бесконечно много линейных приближений любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

36. Займемся квадратичными приближениями — такими, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Утверждение. Если $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, то α имеет не более, чем конечное число квадратичных приближений, отличных от α.

Доказательство. Для любой дроби $\frac{p}{q} \neq \alpha$ имеем:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|mq - np|}{nq} \geqslant \frac{1}{nq}.$$

Если $\frac{p}{q}$ — квадратичное приближение α, то отсюда $\frac{1}{q^2} > \frac{1}{nq} \Rightarrow q < n$.

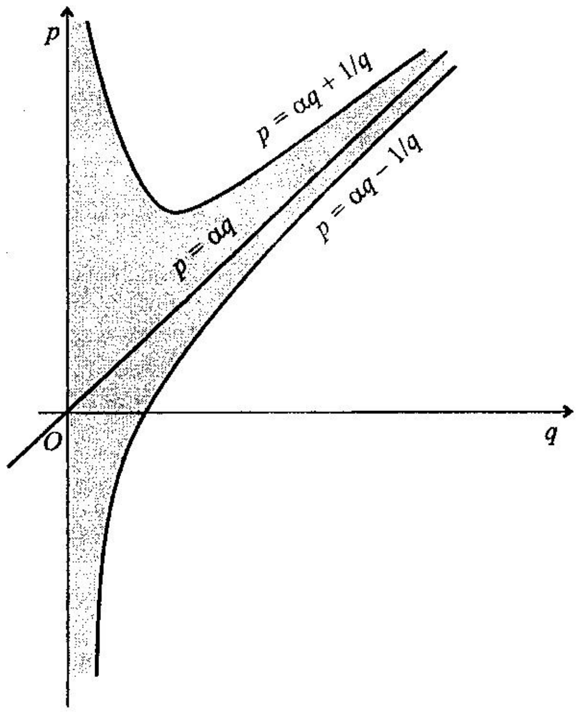
Комментарий. Беда невелика — само α рационально.

37. Для дробей $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ обозначим $\Delta_r = \left(r - \frac{1}{q^2}; r + \frac{1}{q^2}\right)$. Тогда $\frac{p}{q}$ — квадратичное приближение α, если $\alpha \in \Delta_r$. Очевидно существование квадратичных приближений со знаменателем 1 или 2 для любого иррационального α — соответствующие интервалы $(p-1; p+1)$ или $\left(\frac{p}{2} - \frac{1}{4}, \frac{p}{2} + \frac{1}{4}\right)$ покрывают все иррациональные точки. Но это малоинтересно. Кажется очевидным существование квадратичных приближений со сколь угодно большим знаменателем: дроби p/q со знаменателями $q \geqslant N$ (N — любое фиксированное) расположены на числовой оси всюду плотно, и соответствующие интервалы $\Delta_{p/q}$ «должны» покрывать всю ось. Однако это — обман зрения!

38. Пример. Пусть для $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $\Delta'_r = (r - \frac{1}{5q^2}; r + \frac{1}{5q^2})$. Покажем, что, несмотря на всюду плотность $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$, ни при каком r $\sqrt{2} \notin \Delta'_r$. В случаях $r \leqslant 0$ или $r \geqslant 3$ это очевидно. Пусть $r \in (0; 3)$. Тогда

$$|\sqrt{2} - r| = \left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| = \frac{\left|2 - \frac{p^2}{q^2}\right|}{\sqrt{2} + \frac{p}{q}} = \frac{1}{q^2}\frac{|2q^2 - p^2|}{\sqrt{2} + r} > \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + 3} > \frac{1}{5q^2}$$

и опять $\sqrt{2} \notin \Delta'_r$. Вопреки «очевидности», $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \Delta'_r \neq \mathbb{R}$.



39. Попробуем интерпретировать дроби $\frac{p}{q}$ как точки (q, p) целочисленной решетки. На координатной плоскости (q, p) квадратичные приближения фиксированного числа α суть те целые точки, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \Longleftrightarrow |q\alpha - p| < \frac{1}{q} \Longleftrightarrow \alpha q - \frac{1}{q} < p < \alpha q + \frac{1}{q}$$

т.е., попадают в соответствующую область (между двумя гиперболами). Хотя при рациональном α прямая $p = \alpha q$ проходит сколь угодно близко от целых точек (теорема т. 19), совсем не очевидно, попадут ли они в нашу область.

40. Просматривая доказательство теоремы 19, мы получаем, что

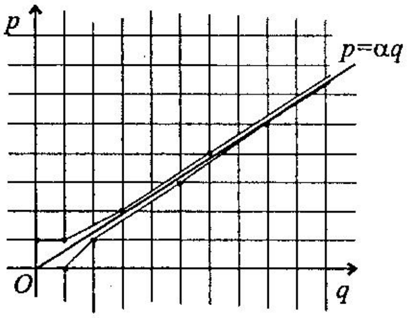
$$\forall N \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Z}\ \ |q| \leqslant N \& \{q\alpha\} < \frac{1}{N} \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} |q\alpha - p| < \frac{1}{N} \quad (q \neq 0)$$

Изменив, если надо, знаки q и p, будем считать, что $q > 0$. Тогда, так как $q \leqslant N$, то $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{q^2}$, и $\frac{p}{q}$ будет квадратичным приближением α. Поскольку N произвольно, квадратичными приближениями из этой конструкции можно подобраться к α сколь угодно близко, и квадратичных приближений должно быть бесконечно много. Дадим формальное доказательство последнего.

41. Теорема о квадратичных приближениях. (ТКП.) Любое иррациональное число имеет бесконечно много квадратичных приближений.

Доказательство. Хотя бы одно квадратичное приближение существует — см. т. 37 или т. 40. Допустим, что квадратичных приближений для α только конечное множество — это p_i/q_i, $i = 1, 2, \ldots, s$. Пусть $\varepsilon = \min\{|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| \,|\, 1 \leqslant i \leqslant s\}$; тогда $\varepsilon > 0$ (объясните), и найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Применяя для этого N конструкцию из т. 40, получаем существование еще одного квадратичного приближения, для которого $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$ — противоречие. ТКП доказана.

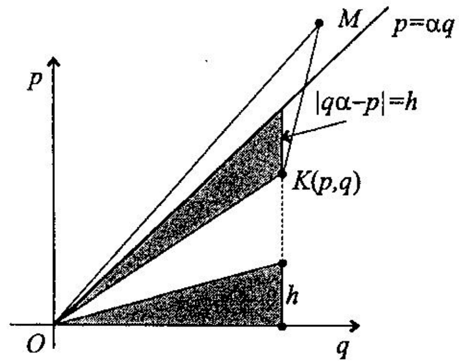
42. Замечание. При изучении вопроса о приближениях незачем заботиться о несократимости дробей $\frac{p}{q}$ — после сокращения оценка $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$ сохраняется.



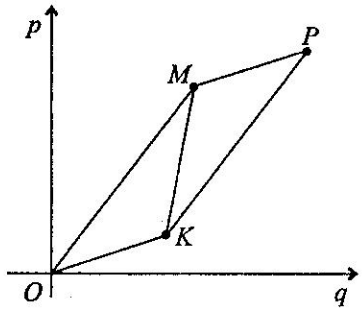
43. Клейн предложил чисто геометрическое доказательство ТКП. Именно, пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и $\alpha > 0$. Прямая $p = \alpha q$ на координатной плоскости (q, p) делит множество всех целых точек первого квадранта $(q \geqslant 0, p \geqslant 0)$ на два подмножества — верхнее и нижнее. Рассмотрим выпуклые оболочки этих множеств.

Границы выпуклых оболочек будут ломаными с бесконечным числом точек излома (объясните!), которые мы назовем точками Клейна.

Теорема Клейна. Любая точка Клейна (кроме точки (0;1)) отвечает некоторому квадратичному приближению числа α.



44. Вывод теоремы Клейна. Нужно доказать, что для точки Клейна $K(q;p)$ выполнено неравенство $|q\alpha - p| < \frac{1}{q}$, т.е. расстояние по вертикали от этой точки до прямой $p = \alpha q$ не превосходит $\frac{1}{q}$. Пусть M — точка Клейна на другой ломаной, имеющая большую абсциссу. Согласно нашей конструкции, ни внутри треугольника OKM, ни на его сторонах нет ни одной целой точки.

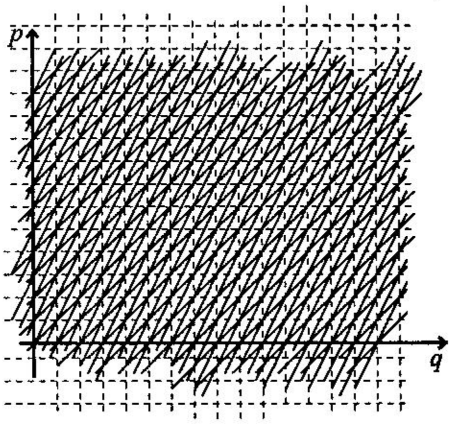


Лемма Пика. Площадь любого такого треугольника равна в точности 1/2. Картинка с двумя равновеликими треугольниками показывает, как отсюда выводится теорема Клейна:

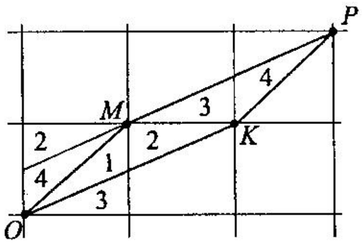
$$S_\Delta = \frac{1}{2} q \cdot h < \frac{1}{2} \Rightarrow \; h = |q\alpha - p| < \frac{1}{q}.$$

45. Объяснение леммы Пика. Достроим $\Delta\, OKM$ до параллелограмма; внутри него и на его сторонах (не считая вершин) не будет ни одной целой точки (объясните). Следовательно, порожденная этим параллелограммом решетка будет иметь те же узлы, что и целочисленная — квадратная.

Площадь «крупной» фигуры можно примерно считать равной числу умещающихся в нем квадратиков или принадлежащих ей целых точек: $S(\Phi) \cong N$. С другой стороны, аналогично, $S(\Phi) \cong N \cdot S_0$, где S_0 — площадь нашего параллелограмма. Поэтому должно быть $S_0 = 1$, и $S(\text{OKM}) = 1/2$.



46. Точное доказательство леммы Пика можно получить, разбивая наш параллелограмм $OKPM$ по линиям решетки квадратов и перенося каждый из получающихся кусочков в фиксированный квадрат (параллельным переносом на целочисленный вектор).



Задача. Докажите, что кусочки без перекрытий заполнят весь квадрат.

Следовательно, параллелограмм и квадрат равновелики, и $S(\text{OKPM}) = 1$.

47. **Задача.** Докажите общую формулу Пика: площадь вписанного в целочисленную решетку многоугольника равна $S = \frac{1}{2}(n_0 + n_1) + n_2 - 1$, где n_0 — число вершин многоугольника, n_1 — число целых точек на его сторонах, n_2 — число целых точек, попавших внутрь многоугольника.

IV. Цепные дроби

Мы не испытываем привязанности к чему бы то ни было, пока не придали этому смысл, и мы не уверены, что это за смысл, пока самоотверженно не потрудились над тем, чтобы вложить его в объект нашей привязанности.

Торнтон Уайлдер

48. Алгоритм Евклида для отыскания Н.О.Д (q, p) можно записать в следующей изящной форме:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q}{r_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{r_1}{r_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}} = \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

В таком виде он обобщается на любые числа, только в случае $\frac{p}{q} = \alpha \notin \mathbb{Q}$ получающаяся т.н. цепная дробь будет бесконечной.

Примеры.

1) $$\frac{23}{17}=1+\frac{6}{17}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{6}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}};$$

2) $$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\to 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}};$$

3) $$\pi=3,14\ldots=3+0,14\ldots=3+\frac{1}{7+\ldots}\to 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\ldots}}$$

(стрелка означает формальное соответствие).

49. Разложение числа $\alpha\notin\mathbb{Q}$ в цепную дробь можно описать рекуррентно:

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_0+r_0, && a_0=[\alpha], && r_0=\{\alpha\}=\alpha-a_0;\\
&= a_0+\frac{1}{a_1+r_1}, && a_1=\left[\frac{1}{r_0}\right], && r_1=\left\{\frac{1}{r_0}\right\}=\frac{1}{r_0}-a_1;\\
&\ldots\\
&= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_n+r_n}}}, && a_n=\left[\frac{1}{r_{n-1}}\right], && r_n=\left\{\frac{1}{r_{n-1}}\right\}=\frac{1}{r_{n-1}}-a_n\\
&\ldots && && \left(\frac{1}{r_{n-1}}=a_n+r_n\right).
\end{aligned}$$

Интересно выяснить: (1) какое отношение бесконечная цепная дробь имеет к исходному числу α? (2) любая ли бесконечная цепная дробь отвечает какому-нибудь иррациональному числу?

50. Обрывая бесконечную дробь и приводя ее к обыкновенному виду, получим т.н. подходящие дроби:

$$\frac{p_n}{q_n}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Например,

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1},\quad \frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1},$$

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_0(a_1+\frac{1}{a_2})+1}{a_1+\frac{1}{a_2}}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{a_2(a_0a_1+1)+a_0}{a_2\cdot a_1+1}.$$

Попробуем оценить разность между $\dfrac{p_n}{q_n}$ и α. Для $\dfrac{p_1}{q_1}$ вычисления просты:

$$\alpha=a_0+\frac{1}{a_1+r_1},\ \frac{p_1}{q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}\Rightarrow\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|=\left|\frac{1}{a_0+r_1}-\frac{1}{a_0}\right|=\frac{r_1}{a_0(a_0+r_1)}<\frac{1}{a_0^2}$$

— получаем, что p_1/q_1 является квадратичным приближением для α (скажем, для числа π $\dfrac{p_1}{q_1}=3+\frac{1}{7}=22/7$ — знаменитое архимедово приближение!). При больших n непосредственные вычисления резко усложняются. Поэтому мы пойдем в обход, но прежде выведем рекуррентные соотношения для подходящих дробей.

51. Теорема. Если дробь $\frac{p_n}{q_n}$ рассматривать как формальное выражение от переменных $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, то

$$\begin{cases} p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},\\ q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}.\end{cases}$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n=1$ формулы справедливы (см. выше выражение для p_2/q_2). Пусть наши формулы справедливы для $n-1$:

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

Выражение для $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ получается при подстановке в эту формулу $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ вместо a_n (объясните!):

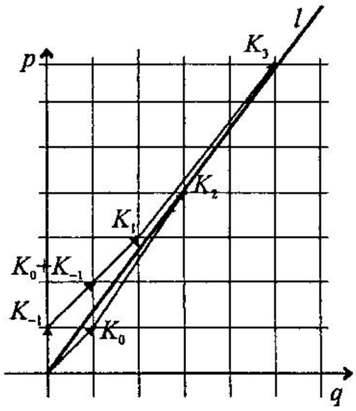
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{(a_n+\frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1}+p_{n-2}}{(a_n+\frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

(согласно допущению), ч.т.д.

Следствие. Для цепных дробей с натуральными элементами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ q_n и p_n стремятся к бесконечности при $n\to\infty$. (Докажите.)

52. Оказывается, подходящие дроби для данного иррационального числа имеют простую геометрическую интерпретацию.

Теорема Клейна-Смита. Подходящие дроби $\frac{p_n}{q_n}$ отвечают точкам Клейна $K_n=(q_n;p_n)$ из конструкции Клейна. (!)



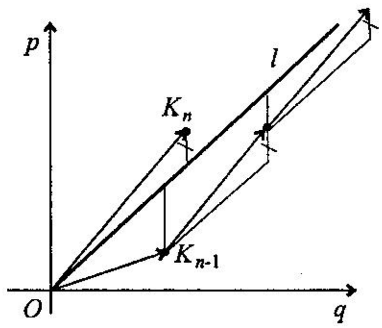
53. Чтобы доказать эту теорему, придадим конструкции Клейна рекуррентный характер. Пусть l — прямая $p = \alpha q$. В качестве двух начальных точек K_{-1} и K_0 возьмем $(0;1)$ и $(1;a_0)$, где a_0 — целая часть α (см. картинку). Для удобства отождествим точки K с векторами $\overrightarrow{OK}$. Прибавив K_0 к K_{-1}, получим точку на ломаной Клейна, $K_0 + K_{-1}$, лежащей выше l (ибо вектор K_0 направлен ниже l). Прибавив K_0 к K_{-1} наибольшее возможное число раз c_1, получим следующую за K_0 точку Клейна $K_1 = K_{-1} + c_1K_0$ над прямой l (объясните, почему в такой точке ломаная Клейна обязана иметь излом). Прибавив K_1 к K_0, получим точку $K_1 + K_0$ ниже l (в противном случае точка

$$K_1 + K_0 = (K_{-1} + c_1K_0) + K_0 = K_{-1} + (c_1 + 1)K_0$$

лежала бы выше l, что противоречит выбору c_1). Точка $K_1 + K_0$ принадлежит нижней ломаной Клейна, ибо $\vec{K}_1$ направлен выше l. Прибавляя K_1 к K_0 наибольшее возможное число раз c_2, получим следующую точку Клейна $K_2 = K_0 + c_2K_1$ под l. Продолжая так далее, мы можем выписать рекуррентную формулу для точек Клейна:

$$K_{n+1} = K_{n-1} + c_{n+1}K_n, \quad K_k = (q_k; p_k).$$

Из приведенного описания конструкции Клейна следует, что точки Клейна K_n расположены в порядке возрастания их абсцисс и находятся попеременно с разных сторон l (свойство чередования).



54. Теперь выясним, как можно определить целые числа c_n аналитически. Расстояние от точки K_{n-1} до прямой l по вертикали равно $|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$. При добавлении к K_{n-1} вектора K_n это расстояние каждый раз уменьшается на одну и ту же величину, равную расстоянию от K_n до l, т.е. $|q_n\alpha - p_n|$. Следовательно,

$$c_{n+1} = \left[\frac{|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|}{|q_n\,\alpha - p_n|}\right] = \left[-\frac{q_{n-1}\,\alpha - p_{n-1}}{q_n\,\alpha - p_n}\right]$$

(модуль снят с учетом свойства чередования). Обозначим

$$h_n = -\frac{q_n\,\alpha - p_n}{q_{n-1}\,\alpha - p_{n-1}};$$

тогда $c_{n+1} = \left[\frac{1}{h_n}\right]$, причем после подстановки в выражение для h_n значений

$$(q_n; p_n) = c_n(q_{n-1}; p_{n-1}) + (q_{n-2}; p_{n-2})$$

получим:

$$h_n = -\frac{(c_nq_{n-1} + q_{n-2})\alpha - (c_np_{n-1} + p_{n-2})}{q_{n-1}\alpha - p_{n-1}} = -c_n + \frac{1}{h_{n-1}}, \; c_n = \left[\frac{1}{h_{n-1}}\right].$$

Эти формулы позволяют рекуррентно вычислять c_k, причем для c_1:

$$c_1 = \left[\frac{1}{h_0}\right], \text{ где } h_0 = \{\alpha\}.$$

55. Сравнивая найденные формулы с рекуррентными соотношениями для цепных дробей из т. 49, получаем:

$$h_0 = \{\alpha\} = r_0,\ c_1 = \left[\frac{1}{h_0}\right] = \left[\frac{1}{r_0}\right] = a_1,$$

$$h_1 = \left\{\frac{1}{h_0}\right\} = \left\{\frac{1}{r_0}\right\} = r_1, c_2 = \left[\frac{1}{h_1}\right] = \left[\frac{1}{r_1}\right] = a_2,$$

и так далее. Итак, при любом $n \in \mathbb{N}$ $c_n = a_n$, где a_n — элементы цепной дроби числа α. Поскольку для координат точек Клейна имеет место рекуррентное соотношение (т. 53)

$$(q_{n+1}; p_{n+1}) = c_{n+1}(q_n; p_n) + (p_{n-1}; q_{n-1}) = a_{n+1}(q_n; p_n) + (a_{n-1}; p_{n-1}),$$

совпадающее с рекуррентным соотношением для подходящих дробей (т. 51), а первая точка Клейна $K_0 = (a_0; 1)$ отвечает подходящей дроби $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0}{1}$, то **все** точки Клейна соответствуют подходящим дробям. Теорема Клейна-Смита доказана.

56. Следствие 1. $\forall \alpha \notin \mathbb{Q}$ $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ (ответ на вопрос (1) т. 49).

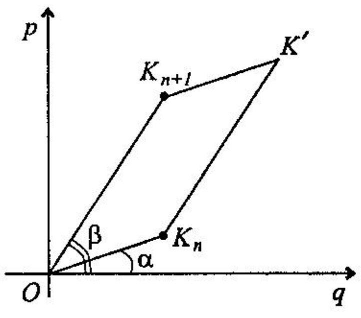
Следствие 2. Подходящие дроби являются квадратичными приближениями для числа α.

То и другое вытекает из доказанного для точек Клейна неравенства

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \qquad (\text{с учетом того, что } \quad q_n \to \infty \quad \text{при } n \to \infty).$$

57. Следствие 3. $\forall n$ $q_n p_{n+1} - q_{n+1} p_n = (-1)^n$.

Доказательство. Согласно лемме Пика, площадь параллелограмма со сторонами OK_n и OK_{n+1} равна 1. С другой стороны,



$$\begin{aligned} S_{OK_nK'K_{n+1}} &= |K_n||K_{n+1}|\sin(\beta - \alpha) = \\ &= |K_n||K_{n+1}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = \\ &= q_n p_{n+1} - q_{n+1} p_n. \end{aligned}$$

Следствие 4. Все подходящие дроби несократимы. (Это очевидно из теоремы Клейна-Смита и определения точек Клейна, а также вытекает из следствия 3.)

58. Следствие 5. Из каждых двух соседних подходящих дробей одна является квадратичным приближением α с коэффициентом $\frac{1}{2}$, т.е. для нее

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{q^2}$$

Доказательство. Из следствия 3 и неравенства $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ вытекает:

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|q_n p_{n+1} - q_{n+1}p_n|}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{2}\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{q_{n+1}^2} \qquad (q_n \ne q_{n+1}).$$

Число α заключено между $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ (свойство чередования), поэтому

$$\text{либо } \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{q_n^2}, \qquad \text{либо } \left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{q_{n+1}^2}.$$

59. Задача*. а) Докажите, что из каждых трех последовательных подходящих дробей одна является квадратичным приближением с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{5}}$, т.е. для нее

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q^2}.$$

б) Докажите, что при любом $c < \frac{1}{\sqrt{5}}$ число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ имеет лишь конечное число квадратичных приближений с коэффициентом c (!).

60. Задача. Пусть имеется произвольная цепная дробь с натуральными элементами $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (выписанная «с потолка»), p_n/q_n — ее подходящие дроби. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\text{а) } D_n = q_n p_{n+1} - q_{n+1} p_n = (-1)^n, \qquad \text{б) } D'_n = q_{n-1}p_{n+1} - p_{n-1}q_{n+1} = (-1)^n a_{n+1}.$$

(Указание. Используя формулы из теоремы т. 51, выведите рекуррентные соотношения для D_n и D'_n.)

61. Задача. а) Докажите, что для произвольной цепной дроби отрезки

$$\Delta_n = \left[\frac{p2n}{q2n}; \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right]$$

образуют стягивающуюся последовательность: $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, и длина Δ_n стремится к 0 при $n \to \infty$.

Пусть α — общая точка всех этих отрезков.

б)* Докажите, что исходная цепная дробь совпадает с цепной дробью, построенной для числа α. (Тем самым будет получен ответ на вопрос (2) из т. 49.)

(Указание к пункту а). Воспользуйтесь результатами задачи 60.)

V. Трансцендентные числа

Как бы отпраздновал Пифагор такое открытие, если открытие иррациональных чисел казалось ему достойным целой гекатомбы!

Феликс Клейн

62. Вслед за рациональными числами естественно изучать такие, которые получаются из целых не только с помощью арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), но и путем извлечения корня произвольной (натуральной) степени. Такие числа по своему определению образуют поле R — чисел, представимых с помощью радикалов (знаков корня). Несколько удобнее рассматривать вместо них т.н. алгебраические числа — те, которые являются корнями всевозможных уравнений с целыми (или рациональными) коэффициентами. Таким образом, мы имеем цепочку включений

$$\mathbb{Q} \subset R \subset \mathbb{A} \subset \mathbb{R}$$

63. Все эти включения, оказывается, строгие! Еще во времена Пифагора (VI–V в. до н.э.) установили, что $\mathbb{Q} \neq R$ ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). В начале XIX века Абель и Галуа доказали существование уравнений с целыми коэффициентами, корни которых не выражаются в радикалах, поэтому $R \neq \mathbb{A}$ (к теории Абеля и Галуа впоследствии мы вернемся). Наконец, в том же XIX веке было установлено, что $\mathbb{A} \neq \mathbb{R}$, то есть существуют действительные, но не алгебраические числа — трансцендентные («запредельные»). Именно, в 1873 г. Г. Кантор доказал, что множество всех алгебраических чисел счетно (т.е. элементы можно занумеровать натуральными числами), а множество всех действительных чисел несчетно; следовательно, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \neq \varnothing$ и, более того, множество трансцендентных чисел несчетно. Это рассуждение, однако, не дает возможности указать хотя бы только одно трансцендентное число (чистая теорема существования, как принято говорить).

64. Еще в 1844 г. Лиувилль указал, как можно построить сколь угодно много трансцендентных чисел. Например, таким будет число

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,\underset{1\,2}{110}\;\underset{6}{001}\;000\;000\;000\;000\;000\;\underset{24}{001}\;000\;000\;\ldots.$$

Характерное свойство λ в том, что оно очень быстро приближается дробями:

$$\text{для} \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = \frac{p_n}{10^{n!}} \qquad |\lambda - \lambda_n| = \left|\lambda - \frac{p_n}{10^{n!}}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} < \frac{2}{10^{(n+1)!}},$$

т.е. если $q_n = 10^{n!}$ — знаменатель приближения, то $|\lambda - p_n/q_n| < 2/q_n^{n+1}$. С другой стороны, например, алгебраическое число $\sqrt{2}$ нельзя приблизить даже с точностью $1/5q^2$ — см. пример из т. 38. Приведенные там рассуждения нетрудно обобщить. Начнем с примеров.

65. Пример 1. Пусть $\alpha = \sqrt{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{Q}$. Оценим разность $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ снизу. Если $\left|\frac{p}{q}\right| > |\alpha| + 1$, то $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$; в противном случае имеем:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\sqrt{\frac{m}{n}} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\frac{m}{n} - \frac{p^2}{q^2}}{\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{p}{q}}\right| = \frac{|mq^2 - np^2|}{q^2 \cdot n \cdot \left|\alpha + \frac{p}{q}\right|} \geqslant \frac{1}{q^2 \cdot n \cdot (2|\alpha| + 1)}.$$

Вывод: существует постоянная M такая, что $\forall \frac{p}{q}$ $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^2}$ (в частности, такие иррациональности имеют только конечное число кубических приближений — с точностью до $1/q^3$).

66. Пример 2. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} \notin \mathbb{Q}$. Попробуем провести аналогичную оценку. Если $\left|\frac{p}{q}\right| \leq |\alpha| + 1$, то

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{\left|\alpha^3 - \frac{p^3}{q^3}\right|}{\left|\alpha^2 + \frac{p}{q}\alpha + \frac{p^2}{q^2}\right|} = \frac{|mq^3 - np^3|}{nq^3\left|\alpha^2 + \frac{p}{q}\alpha + \frac{p^2}{q^2}\right|} \geqslant \frac{1}{Mq^3},$$

где

$$M = n(|\alpha|^2 + |\alpha|(|\alpha| + 1) + (|\alpha| + 1)^2).$$

67. Напрашивается мысль оценить разность $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ для произвольного иррационального алгебраического числа α, сравнивая значения $f(\alpha)$ и $f\left(\frac{p}{q}\right)$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, для которого $f(\alpha) = 0$.

Теорема Лиувилля. Пусть $\alpha \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ — корень многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами; без ограничения общности можно считать, что f не имеет рациональных корней. Пусть n — степень f. Тогда существует постоянная M такая, что

$$\forall \frac{p}{q} \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^n}.$$

68. Доказательство теоремы Лиувилля. Условившись затем взять $M > 1$, будем рассматривать только такие p/q, что $|p/q| \leqslant |\alpha| + 1$. Пусть

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1) Так как $f(\alpha) = 0$, то

$$\left|f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_n\frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0\right| = \frac{|a_n p^n + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n|}{q^n} \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

2) С другой стороны,

$$\left|f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \left|\alpha^k - \frac{p^k}{q^k}\right| \leqslant M \cdot \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|,$$

где $M = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|(|\alpha|^{k-1} + |\alpha|^{k-2}\beta + \ldots + \beta^{k-1})$, $\beta = |\alpha| + 1$ (мы воспользовались формулой $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1})$).

3) Таким образом,

$$\forall \frac{p}{q} \qquad M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \left|f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^n} \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^n}.$$

69. Следствие. Число Лиувилля λ из т. 64 трансцендентно.

Доказательство. Допустим противное. Если n — степень f из теоремы Лиувилля, то $\forall\, k$ для дробей $\frac{p_k}{q_k}$ из т. 64 мы должны иметь:

$$\frac{2}{q_k^{k+1}} > \left|\lambda - \frac{p_k}{q_k}\right| \geqslant \frac{1}{Mq_k^n} \Rightarrow \forall\ k\ (q_k)^{k+1-n} < 2M,$$

а последнее, конечно, неверно при достаточно больших k (ведь $q_k = 10^{k!}$).

70. Задача. Постройте аналогичным образом континуум трансцендентных чисел (т.е. множество $C \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, эквивалентное $\mathbb{R}$).

71. Интересно, что теорема Лиувилля впоследствии была значительно усилена: теорема Туэ дает оценку $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^{1+\frac{n}{2}}}$, теорема Зигеля — $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^{2\sqrt{n}}}$, наконец, в 1958 г. английский математик Рот доказал, что при любом $\varepsilon > 0$ для любого алгебраического числа α существует M т.ч.

$$\forall \frac{p}{q} \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Mq^{2+\varepsilon}}.$$

Теорема Рота показывает, что для алгебраических чисел квадратичные приближения, рассматривавшиеся в предыдущих параграфах — это предел возможностей.

72. Впервые предположение о существовании трансцендентных чисел, точнее, о трансцендентности числа π, высказал в XVIII веке Эйлер. Доказана трансцендентность π была лишь в 1882г.; доказательство этого весьма специфично, но поучительно, и мы его позже изложим. Трансцендентность другого знаменитого числа, e, доказывается гораздо проще, однако и здесь теоремы Лиувилля не хватает. Остановимся на этом.

73. Последовательность

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

ограничена: $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$, поэтому $e_n < 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}) < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$, — и возрастает, поэтому существует предел $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n < 3$. Обычно пишут

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (= 2,718281\ldots),$$

понимая под бесконечной суммой предел соответствующих частичных сумм e_n. Выясним, с какой скоростью (точностью) дроби $e_n = \frac{p_n}{n!} = \frac{p_n}{q_n}$ приближают e. Имеем:

$$\begin{aligned}|e - e_n| &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) < \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

или, через знаменатель, $\left|e - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{n+2}{(n+1)^2}\,\frac{1}{q_n}$ — приближения всего лишь линейные; хотя коэффициент $\frac{n+2}{(n+1)^2}$ и стремится к 0, даже теорема Рота ничего не дает.

74. Полученная оценка, однако, позволяет установить иррациональность e. Рассуждая от противного, допустим, что $e = \frac{p}{q}$. Согласно т. 73 $e = \frac{p_n}{n!} + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n < \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{(n+1)!}$. Взяв $n = q$, получим:

$$e = \frac{p}{q} = \frac{p_q}{q!} + \varepsilon_q \;\Rightarrow\; p \cdot (q-1)! - p_q = q!\; \varepsilon_q.$$

Слева в последнем равенстве стоит целое положительное число, а справа — дробь: $q!\;\varepsilon_q < \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1$ — противоречие.

75. Поскольку e плохо (медленно) приближается дробями e_n, можно попытаться приблизить одновременно $e, e^2, e^3, \ldots$. Схема доказательства трансцендентности e такова.

Допустим, что e алгебраическое:

$$a_n e^n + \ldots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Подберем такие числа m и $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, что при любом k

$$|me^k - m_k| < \varepsilon \;\Rightarrow\; me^k = m_k + \varepsilon_k, \quad |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

(ср. с теоремой Кронекера из т. 22). Подставляя в уравнение $e^k = \frac{m_k + \varepsilon_k}{m}$, получим соотношение

$$(a_n m_n + \ldots + a_1 m_1 + a_0 m) + (a_n \varepsilon_n + \ldots + a_1 \varepsilon_1) = M + E = 0.$$

Число M — целое, а E за счет выбора ε можно сделать меньше 1, поэтому сумма $M + E$ равняться 0 не может (!?).

Единственное (но какое!) возражение — в том, что может оказаться $M = 0$, и заодно $E = 0$. Как подобрать приближения для степеней e так, чтобы $M \neq 0$, будет показано в следующем параграфе.

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

E-mail: zemmm@yandex.ru

Локальное и глобальное при изучении функций, или что такое неявная функция

С. В. Дворянинов

Заметка призвана познакомить школьников старших классов с понятием неявной функции. Приводится достаточное условие, при котором заданная уравнением кривая на плоскости является, в окрестности данной точки, графиком некоторой функции.

Понятия *локальный* и *глобальный* широко используются в различных ситуациях. Это слова латинского происхождения. Первое означает местный, свойственный данному месту, не выходящий за определенные границы. Второе переводится как всеобщий. Такими характеристиками обладают, например, понятия чемпион страны и чемпион мира, мировой рекорд и олимпийский рекорд.

В разных разделах математики разные свойства изучаемых объектов также могут проявляться и локально, и глобально. Расскажем об этом на примере теории функций.

Начнем со значения данной функции в точке и множества значений этой функции. Первое относится к одной точке, это понятие локальное. Второе — глобальное.

Существуют функции, которые возрастают (или убывают) на всей своей области определения. Такие функции называют монотонными. Монотонными являются, например, функции

$$y = ax + b \text{ (при } a \neq 0), \quad y = x^3, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = a^x, \quad y = \log_a x.$$

Любая квадратичная функция не является монотонной. Тем не менее можно изучать промежутки монотонности квадратичной функций. Тем самым это свойство — монотонность — изучается не глобально, не на всей области определения функции, а лишь на некоторых ее частях. Это оказывается и важным, и полезным. Например, функция $y = \sin x$ имеет бесконечно много промежутков монотонности. Глобально монотонной она не является.

Сравним теперь два других понятия — наибольшее значение функции и максимальное значение функции. Первое понятие является глобальным. Речь идет о самом большом значении функции. При этом на графике функции ищется самая высокая точка (в этом случае подразумевается, что ось ординат вертикальна; например, график рисуется на доске, которая закреплена на вертикальной стене).

Понятие "максимальное значение функции" является локальным. Значение функции $f(x_0)$ называют максимальным при том условии, что это значение является наибольшим значением функции лишь на некотором интервале $(x_0 - h; x_0 + h)$. Это определение хорошо иллюстрирует поговорка о том, что «всяк кулик на своем болоте велик».

Сравним отыскание наибольшего значения и максимальных значений функции, заданной графиком. В первом случае мы должны охватить взглядом весь график целиком. Во втором — мы должны смотреть на график словно сквозь узкую щель, края которой параллельны оси ординат OY. Эта щель движется слева направо по всей плоскости, и при этом мы должны анализировать ту часть графика, которая располагается внутри соответствующей вертикальной полосы. Если окажется, что внутри этой полосы какая-то точка графика лежит выше всех остальных, то ордината этой точки — это максимальное значение функции, а абсцисса этой точки — точка максимума функции.

Иногда говорят, что вблизи точки максимума график имеет вид холма. Это верно лишь отчасти. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определяемую условиями

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \textit{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \textit{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что для этой функции точка $x_0 = 0$ является точкой максимума, хотя график на холм здесь не похож. Чтобы этот максимум увидеть, ширина щели, через которую мы сканируем график функции, не должна превышать единицу.

Для функции $y = \sin x^2$ не существует такой щели, которая позволяет разглядеть каждую точку максимума этой функции. При больших значениях $|x|$ точки максимума неограниченно сближаются, и потому в любую сколь угодно узкую вертикальную полосу будут попадать не одна, а несколько точек максимума. И потому при увеличении значений $|x|$ ширину полосы следует уменьшать. Это же верно и для функции $y = \sin \frac{1}{x}$ (здесь предельной точкой для точек экстремума является точка ноль).

В том случае, когда функция оказывается непрерывной, ее сканирование с целью поиска точек максимума можно осуществлять не с помощью вертикальной полосы, а с помощью «иллюминатора». Помните, почему каюту в трюме теплохода относят к третьему классу? Одна из причин — ограниченный обзор, который возможен сквозь небольшое круглое окно, именуемое иллюминатором. Давайте назовем иллюминатором открытый круг, центр которого лежит на графике функции. (Здесь слово *открытый* означает, что граница круга — то есть окружность — исключается из круга.) Будем рассматривать лишь ту часть графика, которая оказывается внутри этого круга. Пусть теперь центр круга движется по графику функции, а мы по-прежнему обращаем внимание лишь на ту часть графика, которая попадает внутрь этого круга.

Если при некотором положении круга ***внутри*** иллюминатора мы обнаружим точку графика, которая выше всех других видимых в иллюминатор точек, то ордината этой точки и является максимальным значением этой функции. В этом случае график действительно имеет вид холма. Научное название нашего иллюминатора — *окрестность точки на плоскости*.

Заметим, что иллюминатор должен иметь достаточно малый радиус — достаточный для того, чтобы иллюминатор не захватывал сразу две или несколько точек максимума, или другими словами, чтобы в иллюминаторе нельзя было увидеть сразу две точки максимума (или минимума).

Итак, поиск локальных максимумов и минимумов функции требует определенной сосредоточенности, умения концентрировать свой взгляд. Между прочим, в театре это достигается тем, что сцена обычно ярко освещена, и все остальное пространство зала при этом становится как бы «невидимым». Подобным образом действуют фокусники (и мошенники), специально отвлекающие внимание второстепенными деталями.

Локальный взгляд на график функции требует определенного сужения угла зрения. Тот же эффект используется в биноклях, зрительных трубах и других оптических приборах.

При чтении графика функции два крайних случая таковы: или мы рассматриваем график в целом, или же изучаем значение функции в одной единственной точке. Крайности обычно бывают вредны (или малосодержательны). Некоторый промежуточный взгляд, связанный с периодическими функциями, сводит изучение таких функций к их анализу на промежутке, длина которого равна периоду функции.

Вспомним еще одну задачу, которая решается обычно сразу после того, как дается определение числовой функции $y = f(x)$. Учитель рисует на доске в системе координат XOY некоторую линию и спрашивает, является ли эта кривая графиком какой-либо функции. При ответе на этот вопрос следует помнить, что функция каждому значению аргумента из области определения ставит в соответствие единственное значение функции. Геометрически это обстоятельство проявляется так: любая вертикальная прямая (то есть прямая параллельная оси ординат) либо не пересекает нарисованную линию, либо пересекает ее в одной точке. Ясно, что для решения этой задачи необходим глобальный взгляд на эту линию, линию нужно рассмотреть в целом.

Не будем сейчас говорить о том, как эту задачу распознавания решает наш мозг. Решение подобных задач обычно разъясняется на примерах.

При решении такой задачи возможны ровно два варианта ответа. Первый вариант — да, заданную линию можно считать графиком некоторой функции. Второй вариант — нет, данная линия не является графиком никакой функции $y = f(x)$. На этом рассмотрение данной линии обычно и заканчивается.

Первый вариант с точки зрения теории функций является интересным, ибо тогда исследование функции, заданной графически, можно продолжить. Второй вариант в этом смысле является неинтересным — функции нет, и дальше делать нечего. Тем не менее попытаемся, как иногда говорят спортивные комментаторы, спасти ситуацию. Давайте посмотрим на данную линию не глобально, а локально. Возьмем на линии произвольную точку $M(x_0; y_0)$ и рассмотрим на плоскости открытый круг радиуса r с центром в этой точке. При этом часть линии окажется внутри круга. Если эта *часть линии* является графиком некоторой функции $y = g(x)$, то такую точку M для краткости назовем *хорошей*. Ясно, что если точка является хорошей при некотором значении r, то при меньшем радиусе точка также будет хорошей.

Пусть при данном значении r точка не является хорошей. Проявим настойчивость в поисках функции, и с этой целью будем уменьшать r. Не исключено, что в границах круга некоторого малого радиуса часть линии будет выглядеть как график некоторой функции. Если же ни при каком значении r внутри соответствующего круга мы не увидим графика функции, то такую точку на данной линии назовем *плохой*. Можно сказать, что мы рассматриваем данную линию через некоторый иллюминатор. Так вот, если глядя сквозь такой иллюминатор мы увидим график функции, то точка на линии — центр иллюминатора — является хорошей.

Итак, все точки данной линии распадаются на два множества — множество хороших точек и множество плохих точек.

Рассмотрим примеры. В качестве линий на координатной плоскости XOY возьмём изображения букв русского алфавита. На рис. 1 на каждой линии отмечены кружком плохие точки. Буква П изображена по-разному, при этом во втором случае все точки на двух вертикальных отрезках оказываются плохими. Среди плохих точек — точки самопересечения линий, точки вертикальных отрезков. На линии O — это крайняя левая и крайняя правая точки.

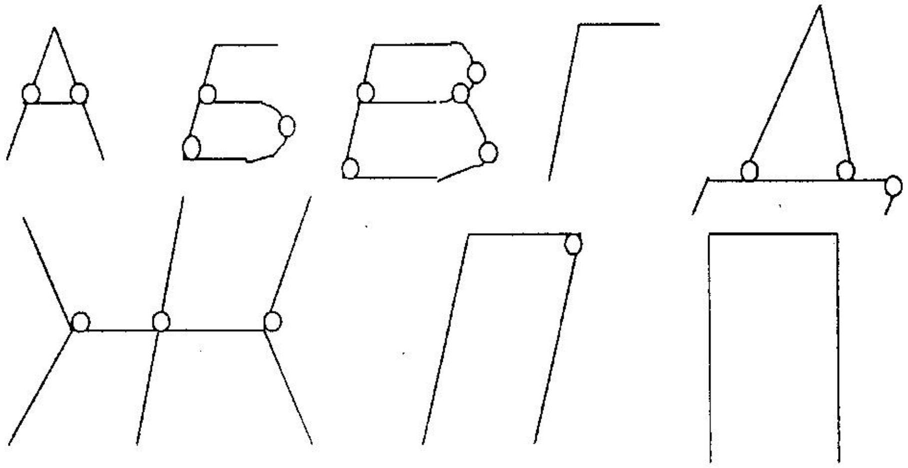


Рис. 1.

Упражнение 1. Укажите плохие точки на линиях, изображающих остальные буквы алфавита.

Замечание 1. Изображение буквы $\ddot{E}$ содержит две изолированные точки. Конечно, одну точку можно считать графиком функции, и тогда изолированную точку следует считать хорошей. Заметим лишь, что соответствующая этой точке функция оказывается уж очень неинтересной. Её область определения состоит из одной точки, и потому не имеет смысла говорить, например, ни о монотонности этой функции, ни о непрерывности, ни о точках экстремума. Это обстоятельство дает возможность уточнить классификацию точек произвольной кривой на плоскости: точки делятся на хорошие, плохие, изолированные.

Существуют и такие линии, которые обладают странными и непривычными свойствами. Например, существует линия, проходящая через все точки квадрата. Ясно, что по нашей классификации все точки такой линии (ее называют кривой Пеано) являются плохими. Мы же для начала ограничимся привычными, можно сказать, школьными линиями на плоскости.

В математике ту функцию, график которой мы видим в иллюминатор, называют неявной функцией, или функцией, заданной неявно.

Итак, для некоторых линий на плоскости мы визуально, на наглядном уровне строгости, можем находить плохие и хорошие точки, а также выделять графики неявных функций.

Рассмотрим теперь линии, которые на координатной плоскости XOY задаются уравнением вида $F(x,y)=0$. Так, уравнение $x^2+y^2-1=0$ задаёт на плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат. На этой окружности (так же, как и на букве O) имеется две плохие точки — крайняя левая точка $(-1;0)$ и крайняя правая точка $(1;0)$. Все остальные точки окружности — хорошие. Напомним, что это означает следующее: для каждой хорошей точки окружности можно нарисовать круг достаточно малого радиуса, внутри которого часть окружности будет являться графиком некоторой функции $y=g(x)$.

Замечание 2. Конечно, не всякое уравнение вида $F(x,y)=0$ задает линию. В общем случае такое уравнение определяет на плоскости некоторое множество G — график этого уравнения. Так уравнению $(x-|x|)(y-|y|)=0$ удовлетворяют координаты всех точек плоскости, кроме точек третьей четверти, где x и y — отрицательны. Очевидно, каждая точка графика этого уравнения — плохая.

Упражнение 2. Нарисуйте на плоскости множество, заданное уравнением, и среди его точек укажите плохие:

а) $x^2-4y^2=0$; б) $(2-|x|)(1-|y|)=0$; в) $|x|+|y|-1=0$;
г) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$; д) $|x+y|+|x-y|-1=0$.

Теперь сформулируем основную задачу: как по данному уравнению $F(x,y)=0$, не зная его графика, находить хорошие и плохие точки?

Теоремы, дающие полное решение этой задачи, изучаются в университетах в курсе математического анализа. Здесь мы расскажем лишь о некоторых основных моментах и не будем излагать строгое доказательство. Для первого знакомства с теорией неявных функций этого вполне достаточно.

Итак, пусть данному уравнению $F(x,y)=0$ удовлетворяют координаты точки $M(x_0;y_0)$. **Не претендуя** на полноту и строгость, скажем, что справедливо следующее ***утверждение 1*** о хороших точках:

$$F'_y(x_0;y_0)\neq 0 \Rightarrow \textit{точка } M \textit{ является хорошей.} \qquad \text{(У1)}$$

Другими словами, условие $F'_y(x_0;y_0)\neq 0$ является достаточным для того, чтобы точка $M(x_0;y_0)$ была хорошей.

Поясним обозначения. Штрих обозначает производную функции F по переменной y. Такую производную называют частной производной. При ее вычислении переменную x следует считать постоянной. Затем эту частную производную следует вычислить в точке M, то есть при $x=x_0$, $y=y_0$. Наконец, полученное числовое значение следует сравнить с нулем.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y-f(x)=0$. Здесь $F(x,y)=y-f(x)$, поэтому $F'_y(x,y)=1\neq 0$ при всех значениях аргументов. Следовательно, все точки кривой являются хорошими. Это, конечно, согласуется с тем, что данное уравнение на деле задает функцию $y = f(x)$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение окружности $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Здесь $F'_y(x, y) = 2y$. Поэтому, согласно утверждению, все точки нашей окружности, у которых ордината отлична от нуля, являются хорошими. Об этом мы говорили выше.

Заметим, что утверждение 1 содержит лишь достаточное условие того, что данная точка кривой является хорошей. Необходимым это условие не является. Вот простой пример.

Рассмотрим уравнение $x - y^3 = 0$. Здесь

$$F'_y(x, y) = (x - y^2)'_y = -2y.$$

Согласно утверждению 1 все точки кривой, у которых $y \neq 0$, являются хорошими. Следовательно, плохие точки содержатся среди тех, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x - y^3 = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = 0$, $y = 0$. Следовательно, точка $(0; 0)$ — единственный кандидат в плохие точки. Но и эта точка, как легко видеть, является на самом деле хорошей. Все точки, задаваемые данным уравнением $x - y^3 = 0$, являются хорошими, ибо это уравнение глобально определяет функцию $y = \sqrt[3]{x}$.

Ясно, что утверждение 1 равносильно следующему утверждению 2:

Координаты плохих точек, отвечающих уравнению $F(x, y) = 0$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y) & = & 0, \\ F'_y(x, y) & = & 0. \end{cases} \tag{У2}$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Координаты точек — кандидатов на звание плохих точек — согласно (У2) находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ -2x + 2y = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим две точки $(-1; -1)$ и $(1; 1)$. Теперь возникает вопрос — действительно ли это плохие точки? В статье [3] *«Что такое кривые второго порядка»* говорится, что уравнение (1) определяет на координатной плоскости эллипс. На всяком эллипсе (как и на окружности) имеются две плохие с точки зрения неявных функций точки. Именно эти точки мы и нашли. На эллипсе это крайняя левая (крайняя западная) и крайняя правая (крайняя восточная) точки.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$y^2 + 2xy - x - 1 = 0. \tag{2}$$

Система (У2) здесь такова $\begin{cases} y^2 + 2xy - x - 1 = 0, \\ 2y + 2x = 0. \end{cases}$

Легко убедиться, что решений она не имеет. Следовательно, все точки на кривой второго порядка, заданной уравнением (2), являются хорошими. Локально, или, как еще говорят, в окрестности любой своей точки, эта кривая является графиком функции $y = g(x)$.

Легко видеть, что уравнение (2) задает две функции $y = -x \pm \sqrt{x^2+x+1}$, каждая которых определена на всей прямой и графики которых не пересекаются. Графиком каждой из них является одна из ветвей гиперболы.

Замечание 3. Доказательство теоремы о существовании неявной функции можно найти, например, в [2]. Схема доказательства такова. Пусть для определенности $F'_y(x_0; y_0) > 0$. Тогда $F'_y(x_0; y) > 0$ вблизи точки $M(x_0, y_0)$. Поэтому функция $F(x_0, y)$ возрастает. Следовательно, F положительна в некоторой точке A, лежащей выше точки M, и F отрицательна в некоторой точке B, лежащей ниже точки M. Отсюда следует, что F положительна на некотором горизонтальном отрезке, проходящем через точку A, и что Fотрицательна на некотором горизонтальном отрезке, проходящем через точку B. Эти отрезки можно считать равными. Рассматривая функцию $F(x, y)$ на произвольном вертикальном отрезке (то есть при фиксированном x^*), соединяющем две точки этих горизонтальных отрезков, мы обязательно обнаружим такое значение y^* , что $F(x^*; y^*) = 0$. Такое y^* — единственное. Следовательно, соответствие $x^* \to y^*$ является функциональным. Теорема доказана. Заметим, что в этих рассуждениях важна непрерывность всех функций.

По поводу доказательства теорем приведем выдержку из книги [1]:

> Самым же лучшим будет тот вывод, который вы придумаете сами. Эта возможность отнюдь не исключена. Профессор Василий Петрович Ермаков (1845-1922), весьма известный в высшей математике и много делавший также для улучшения преподавания математики в школе, владел особым способом чтения математических книг. Он читал первую страницу новой книги, чтобы узнать, какую задачу ставит себе автор, затем последнюю страницу, чтобы узнать, к какому результату автор приходит, и, закрыв книгу, самостоятельно находил путь получения результата. Не раз способ решения, найденный таким образом Ермаковым, оказывался отличным от того, которым пользовался автор книги. Наука в таких случаях обогащалась новыми методами.
>
> Желательно, чтобы школьник, читая рассказы о решении новых для него задач, поступал по способу профессора Ермакова, стараясь каждый раз самостоятельно найти решение задачи или, что еще лучше, дать свой оригинальный способ решения. С таких попыток самостоятельного решения задач началась творческая работа почти всех крупных математиков.

С простейшим вариантом теоремы о неявной функции каждый сталкивается при решении простейшего линейного уравнения $ay - b = 0$ с двумя параметрами относительно y. Условие $a \neq 0$ совпадает с тем, что частная производная правой части уравнения по искомой переменной y отлична от нуля.

Приведем не очень строгую, но краткую и потому удобную для запоминания формулировку основного условия теоремы о неявной функции: «Производная уравнения по искомой переменной не равна нулю».

Снова вернемся к уравнению эллипса из примера 3

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

В этом уравнении переменные x и y равноправны. Следовательно, из (1) можно искать переменную x как функцию y. Найдем те точки эллипса, которые при этом окажутся плохими.

В общем случае координаты таких плохих точек, отвечающих уравнению $F(x,y)=0$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ F'_x(x,y) = 0. \end{cases} \tag{У3}$$

Для уравнения (1) система (У3) имеет вид

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим два решения $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2})$ и $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2})$. Две соответствующие точки — S и N — это самая нижняя точка и самая верхняя точка на эллипсе (можно сказать «южный полюс и северный полюс»). Отсюда, в частности, легко найти проекцию эллипса (1) на ось ординат OY — это отрезок $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Вместо послесловия. Впервые автор узнал о неявных функциях в далекие теперь послевоенные годы. На занятия в ШРМ (сокращение означает *школа рабочей молодежи*) ученики приходили вечером. На одном из уроков математики старенький учитель начертил на доске кривую и потом выключил электричество. «Давайте искать функцию», — сказал он, взяв в руки трофейный фонарик. Свет его упал на доску, захватил часть кривой. Чем ближе к доске — тем меньше световое пятно. Оно движется по доске, словно луч прожектора по небу. Ничего не видно, кроме части кривой внутри светлого круга. Этот круг в нашей статье мы назвали иллюминатором. А простой фонарик в руках учителя навсегда высветил (где? — на доске? — или в сознании?..) понятие неявной функции...

Литература

[1] Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л., Детгиз, 1957.

[2] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М., «Наука», 1970.

[3] Дворянинов С. В. Что такое кривые второго порядка. // Математическое образование, №2 (25) 2003.

Дворянинов Сергей Владимирович
Самарский государственный университет
доцент, к.ф.-м.н.
e-mail: dvoryan@ssu.samara.ru

Равенство треугольников по стороне и биссектрисам двух прилежащих углов

В. Оксман

В заметке доказан признак равенства треугольников по стороне и биссектрисам двух прилежащих углов, из которого, в частности, следует теорема Штейнера-Лемуса.

Теорема. Если сторона и биссектрисы двух прилежащих к ней углов одного треугольника соответственно равны стороне и биссектрисам двух прилежащих углов другого треугольника, то эти треугольники равны.

Доказательство.

Обозначим в ΔABC: $BC = a$, $AC = x$, $AB = y$, биссектрису угла B через l_1, биссектрису угла C через l_2. Тогда из известных формул получим:

$$l_1^2 = ay\left[1 - (\frac{x}{a+y})^2\right], \qquad l_2^2 = ax\left[1 - (\frac{y}{a+x})^2\right], \quad \text{откуда}$$

$$x^2 = (a+y)^2\left[1 - \frac{l_1^2}{ay}\right], \qquad y^2 = (a+x)^2\left[1 - \frac{l_2^2}{ax}\right].$$

Обозначим $l_1^2/a = t_1$, $l_2^2/a = t_2$. Заметим, что $t_1 < y$, $t_2 < x$.

Тогда $y = (a+x)\sqrt{1 - \frac{t_2}{x}}$ (*), $x = (a+y)\sqrt{1 - \frac{t_1}{y}}$ (**).

Исследуем функцию $y(x) = (a+x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}$, $0 < t < x$.

Очевидно, что данная функция непрерывна при $t < x < \infty$.

Прямая $y = x + a - t/2$ является ее наклонной асимптотой.

$$y' = \sqrt{1 - \frac{t}{x}} + (a+x)\frac{\frac{t}{x^2}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}} > 0, \text{ поэтому } y \text{ возрастает на } (t, \infty).$$

Докажем, что y выпукла вверх. Для этого достаточно проверить, что $y'' < 0$.

$$y' = \frac{2(1 - \frac{t}{x}) + \frac{at}{x^2} + \frac{t}{x}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}} = \frac{2 - \frac{t}{x} + \frac{at}{x^2}}{2\sqrt{1 - \frac{t}{x}}},$$

$$y'' = \frac{2\sqrt{1-\frac{t}{x}}\left(\frac{t}{x^2}-\frac{2at}{x^3}\right)-\left(2-\frac{t}{x}+\frac{at}{x^2}\right)\frac{t}{x^2\sqrt{1-\frac{t}{x}}}}{4(1-\frac{t}{x})} =$$

$$\frac{2(1-\frac{t}{x})(\frac{t}{x^2}-\frac{2at}{x^3})-(2-\frac{t}{x}+\frac{at}{x^2})\frac{t}{x^2}}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} =$$

$$= \frac{\frac{t}{x^2}[2(1-\frac{t}{x})(1-\frac{2a}{x})-2+\frac{t}{x}-\frac{at}{x^2}]}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} = \frac{\frac{t}{x^2}(2-\frac{2t}{x}-\frac{4a}{x}+\frac{4at}{x^2}-2+\frac{t}{x}-\frac{at}{x^2})}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} =$$

$$= \frac{t}{x^2}\frac{\frac{3at}{x^2}-\frac{t+4a}{x}}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}} = \frac{t}{x^4}\cdot\frac{3at-x(t+4a)}{4(1-\frac{t}{x})\sqrt{1-\frac{t}{x}}}$$

Очевидно,что знак полученного выражения совпадает со знаком выражения $3at - x(t+4a)$.

$$x(t+4a) > t(t+4a) = t^2 + 4at > 3at, \text{ поэтому } \quad 3at - x(t+4a) < 0.$$

Таким образом, $y'' < 0$.

На рис. 1 изображен примерный график функции $y(x)$.

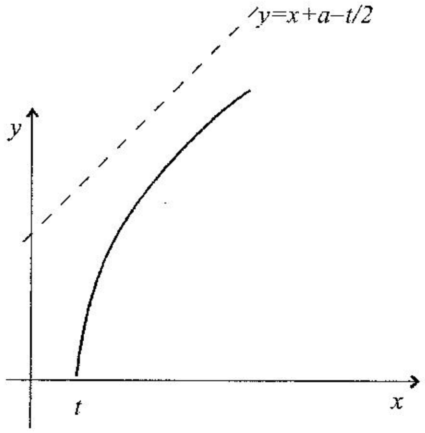


Рис.1

Лемма. Если функция $f(x)$ определена, непрерывна, выпукла на интервале (t,∞) и имеет наклонную асимптоту $y = \kappa x + m$,то любая прямая $y = \kappa x + n$ $(n \in R)$ не может пересекать график $f(x)$ более чем в одной точке.

Доказательство. Предположим для определенности, что $f(x)$ выпукла вверх (такое предположение не меняет общности рассуждений). Нетрудно доказать,что в этом случае $f(x) < \kappa x + m$ для любого $x \in (t,\infty)$.

Пусть прямая $y = \kappa x + n$ (параллельная асимптоте) пересекает график $f(x)$ в точках $N_1(x_1, y_1)$ и $N_2(x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$ (рис. 2).

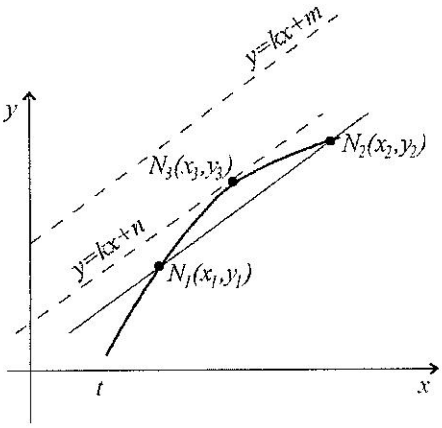


Рис. 2

Согласно теореме Лагранжа о среднем значении существует такая точка $N_3(x_3, y_3)$ на дуге N_1 N_2 графика, в которой касательная к нему параллельна прямой, проходящей через точки N_1, N_2, т.е. параллельна асимптоте $y = \kappa x + m$. Пусть уравнение этой касательной имеет вид $y = kx + p$. В точке N_3 $f(x_3) = y_3 = kx_3 + p < kx_3 + m$. Поэтому $p < m$. Так как $f(x)$ выпукла вверх, то во всех точках x интервала (t, ∞), отличных от x_3, имеем $f(x) < kx + p$. Отсюда $kx + m - f(x) > kx + m - (kx + p)$, т.е. $kx + m - f(x) > m - p$ для всех $x \in (t, \infty)$, что противоречит тому, что прямая $y = kx + m$ является наклонной асимптотой функции $f(x)$.

Вернемся к доказательству основной теоремы. Рассмотрим два уравнения:

$y = (a + x)\sqrt{1 - \frac{t}{x}}$ (1) и $x = (a + y)\sqrt{1 - \frac{t}{y}}$ (2). Очевидно, что если точка (u, w) принадлежит кривой, определенной уравнением (1), то точка (w, u) принадлежит кривой, определенной уравнением (2), и наоборот. Поэтому эти уравнения определяют взаимно обратные функции. Поскольку функция y, заданная уравнением (1), определена на интервале (t, ∞), непрерывна, выпукла вверх на нем, имеет наклонную асимтоту $y = x + a - t/2$ и область значений $(0, \infty)$, то обратная ей функция определена на интервале $(0, \infty)$, непрерывна на нем, выпукла вниз и имеет наклонную асимтоту $y = x - a + t/2$ (ее график симметричен графику функции (1) относительно прямой $y = x$, рис.3). График функции (1) при любом допустимом значении параметра t не может иметь более одной общей точки с прямой $y = x + n$, $n \in R$ (Лемма). Аналогично, график любой функции, определенной уравнением (2), при любом допустимом значении параметра t также не может иметь более одной общей точки с прямой $y = x + n$, $n \in R$.

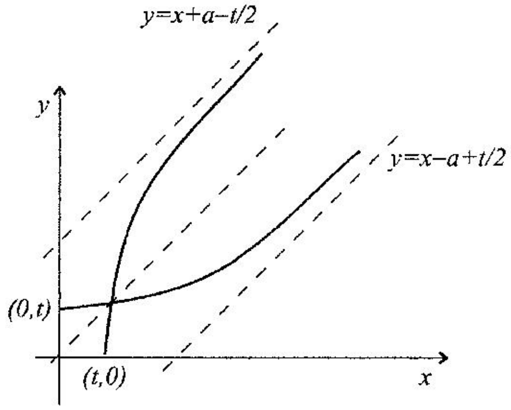


Рис.3

Докажем, что графики (*) и (**) не могут пересекаться более, чем в одной точке. Предположим, что у них существуют две общие точки $(u_1,\ w_1)$ и $(u_2,\ w_2)$, $u_1 < u_2$. Проведем через точку $(u_1,\ w_1)$ прямую $y = x + n$. Заметим, что при этом должно выполняться: $-a + t_1/2 < n < a - t_2/2$.

Кривая (*), помимо $(u_1,\ w_1)$, не имеет с прямой $y = x + n$ других общих точек. Поэтому либо для всех точек (x, y) кривой (*) при $x > u_1$ выполняется неравенство $y > x + n$, либо неравенство $y < x + n$.

Второе неравенство невозможно, т.к. противоречит тому, что $y = x+a-t_2/2$ — асимптота функции (*). Поэтому для функции (*) при $x > u_1$ имеем $y > x+n$. Аналогично, для кривой (**) при $x > u_1$ имеем $y < x+n$, Поэтому при $x > u_1$ у кривых (*) и (**) нет общих точек, что противоречит предположению о существовании точки $(u_2,\ w_2)$ (рис.4).

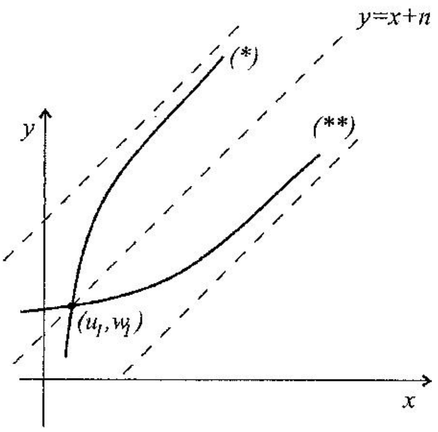


Рис.4

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} x = (a+y)\sqrt{1-\frac{t_1}{y}} \\ y = (a+x)\sqrt{1-\frac{t_2}{x}} \end{cases}$$

не может иметь более одного решения. Это означает, что одна сторона треугольника и биссектрисы двух прилежащих к ней углов однозначно определяют две другие его стороны, т.е. однозначно определяют треугольник, что и доказывает основную теорему.

В заключение заметим, что из доказанной теоремы в качестве элементарного следствия получаем, что треугольник, у которого биссектрисы двух углов равны, является равнобедренным (теорема Штейнера-Лемуса). Предоставляем читателю самостоятельно проверить это.

Виктор Оксман
Колледж Западной Галилеи (Израиль)
E-mail: voxman@research.haifa.ac.il

М-конфигурация треугольника

А. Г. Мякишев

Настоящая публикация представляет собой частично переработанную и дополненную авторскую версию статьи «The M-Configuration of a Triangle», опубликованную в американском электронном журнале «Forum Geometricorum», Vol.3 (2003), pp. 135–144[1].

Речь пойдет о точках A_a, B_a, C_a, расположенных на сторонах треугольника ABC и обладающих следующим свойством: ломаная M с вершинами в B, C_a, A_a, B_a, C состоит из четырех отрезков одинаковой длины. Мы рассмотрим конфигурацию, образованную тремя такими ломаными в треугольнике, способы ее построения и различные свойства, а также некоторое отображение центральных точек, связанное с этой конфигурацией.

1. Введение

В произвольном треугольнике ABC рассмотрим точки A_a на прямой BC, B_a на луче CA и C_a на луче BA такие, что $BC_a = C_aA_a = A_aB_a = B_aC$. Ломаную $BC_aA_aB_aC$ обозначим (для краткости) буквой M_a — поскольку эта ломаная в случае остроугольного треугольника действительно слегка напоминает букву M см. рис. 1а. Случай тупоугольного треугольника представлен на рис. 1b.

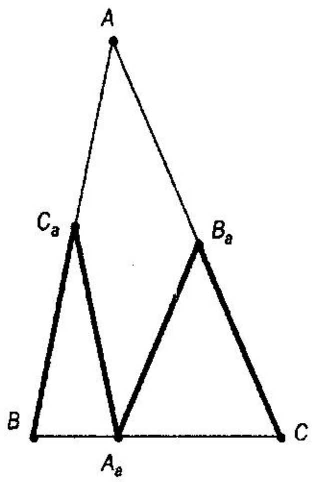


Рис. 1а

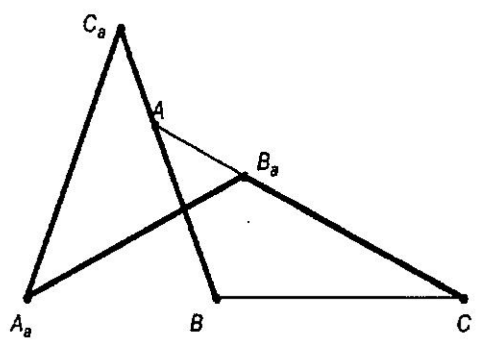


Рис. 1б

M_b и M_c определяются аналогично.

[1] см. http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200315index.html/

Будем говорить, что *три ломаные* M_a, M_b, M_c *образуют М-конфигурацию треугольника* ABC[2] (см. рис. 2).

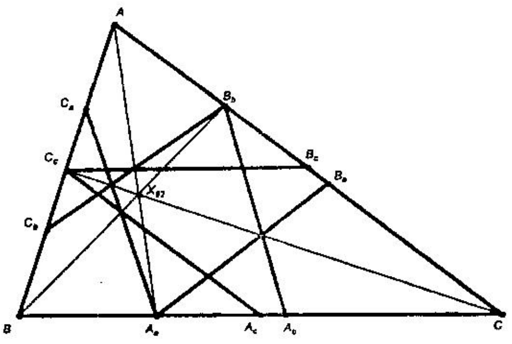


Рис. 2

Предложение 1. *Предположим, что М-конфигурацию можно построить для всякого треугольника. Тогда прямые* AA_a, BB_b, CC_c *пересекаются в точке с барицентрическими координатами* $\left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}\right)$.

Доказательство. Пусть l_a — длина отрезков $BC_a = C_aA_a = A_aB_a = B_aC$. Тогда *ориентированная* длина (длина отрезка положительна, если при прохождении вершин треугольника против часовой стрелки мы движемся от начала отрезка к его концу — в противном случае считаем длину отрицательной) $BA_a = 2l_a \cos B$ и $A_aC = 2l_a \cos C$, следовательно, $BAa : A_aC = \cos B : \cos C$. Из тех же соображений, $CB_b : B_bA = \cos C : \cos A$ и $AC_c : C_cB = \cos A : \cos B$. Конкурентность прямых AA_a, BB_b, CC_c в точке с указанными выше координатами теперь сразу следует из теоремы Чевы.

Точка с такими координатами имеет порядковый номер 92 в *коллекции центральных точек проф. Кимберлинга* (см. [1], [2]) — но геометрически определяется там совсем по-другому.

Замечание. Поскольку $2l_a \cos B + 2l_a \cos C = a = 2R \sin A$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, то

$$l_a = \frac{a}{2(\cos B + \cos C)} = \frac{R \sin A}{\cos B + \cos C} = \frac{R \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2}}. \tag{1}$$

В дальнейшем нам также понадобятся *нормированные* (т.е. с единичной суммарной

[2] Точнее, конечно, «3*М-конфигурацию*» или «*МММ-конфигурацию*». Однако, во-первых, такое название, по-видимому, у многих бы вызвало неприятные ассоциации — финансовая пирамида, воздвигнутая в свое время братьями-прохиндеями, до сих пор еще свежа в памяти. (Фундаментом пирамиды отчасти послужила и математическая необразованность некоторых слоев населения. Перельмана следовало читать в детстве! — например, см. «Живая математика», история о «лавине дешевых велосипедов»). А во-вторых, не скрою, автору было приятно обнаружить забавное совпадение между названием конфигурации и первой буквой его собственной фамилии.

массой) координаты точек A_a, B_a и C_a. Запишем их, выразив через l_a:

$$
\begin{aligned}
A_a &= \frac{2l_a}{a}\left(\cos C \cdot B + \cos B \cdot C\right), \\
B_a &= \frac{1}{b}\left(l_a \cdot A + (b - l_a) \cdot C\right), \\
C_a &= \frac{1}{c}\left(l_a \cdot A + (c - l_a) \cdot B\right).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Предложение 2. *М-конфигурация существует в любом треугольнике.*

Доказательство. Разделив отрезок BC в отношении $\cos C : \cos B$, построим точку A_a (если какой-то из углов — тупой, то эта точка будет делить отрезок *внешним* образом).

Далее, проведем серединный перпендикуляр к отрезку BA_a и, отметив точку его пересечения с лучом BA, получим точку C_a. Пересечение серединного перпендикуляра к A_aC с лучом CA даст нам точку B_a. Легко проверить, что $C_aA_a = A_aB_a$.

2. Построение ломаной M_a

В принципе, доказательство **Предложения 2** дает нам способ построения ломаной M_a. В этом параграфе мы укажем несколько других, менее очевидных, менее, что ли, «лобовых», методов.

Предложение 3. *Пусть A_1 — точка пересечения биссектрисы угла A и описанной около треугольника ABC окружности. Тогда*

(a) *A_a есть точка пресечения прямой BC и прямой, проходящей через ортоцентр H (точку пересечения высот), параллельно биссектрисе AA_1.*

(b) *B_a (соответственно C_a) есть точка пересечения прямой CA (BA соответственно) и прямой, проходящей через центр описанной окружности O, параллельно CA_1 (соответственно BA_1)* (см. рис. 3 а, 3 б).

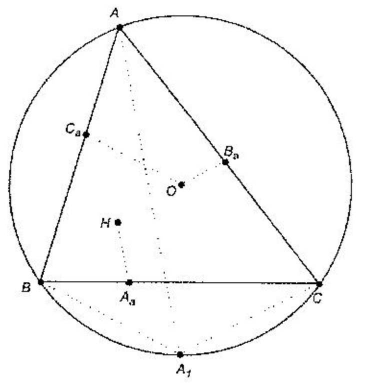


Рис. 3а)

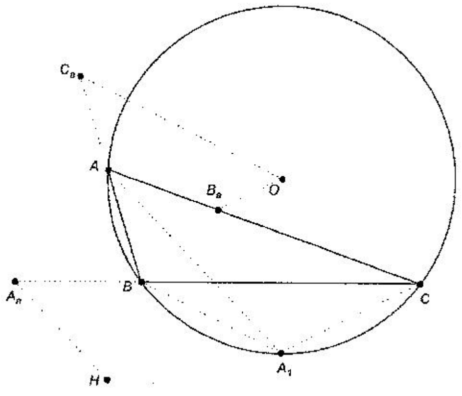


Рис. 3б)

Доказательство.

(a) Здесь мы воспользуемся барицентрическими координатами (разумеется, это совсем не обязательно — есть и много других доказательств, читатель при желании без труда придумает какое-нибудь свое). Все необходимые для понимания дальнейшего сведения можно найти, например, в [4].

Точка A_a имеет координаты $(0 : \cos C : \cos B)$, а ортоцентр

$$H = (\frac{a}{\cos A} : \frac{b}{\cos B} : \frac{c}{\cos C}).$$

Уравнение прямой, через них проходящей, запишется так:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos C & \cos B \\ \dfrac{a}{\cos A} & \dfrac{b}{\cos B} & \dfrac{c}{\cos C} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Оно приводится к виду

$-(b-c)x\cos A + a(y\cos B - z\cos C) = 0.$

Поскольку для прямой $px + qy + rz = 0$ ее бесконечно удаленная точка имеет координаты $(p(q-r) : q(r-p) : r(p-q))$, в нашем случае получим:

$$(-a(\cos B + \cos C) : a\cos C - (b-c)\cos A : (b-c)\cos A + a\cos B) =$$
$$= (-a(\cos B + \cos C) : b(1-\cos A) : c(1-\cos A)).$$

Точно так же, бесконечно удаленная точка биссектрисы угла A имеет координаты $(-(b+c) : b : c)$. Посредством нехитрой тригонометрии несложно убедиться в том, что координаты обеих точек совпадают (с точностью до общего ненулевого множителя), т.е. прямые имеют общую бесконечно удаленную точку, или параллельны.

(b) (см. рис. 4)

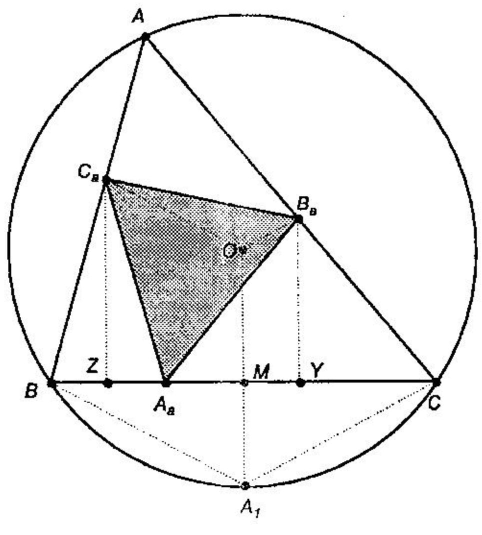


Рис. 4

Пусть M — середина отрезка BC, а точки Y, Z — ортогональные проекции B_a, C_a на прямую BC. Имеем:

$$OM\frac{a}{2}\operatorname{ctg} A = l_a(\cos B + \cos C)\operatorname{ctg} A,$$
$$C_aZ = l_a \sin B,$$
$$MZ = \frac{a}{2} - l_a\cos B = l_a(\cos B + \cos C) - l_a\cos B = l_a\cos C.$$

Отсюда найдем тангенс (*острого*) угла между прямыми C_aO и BC:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C_aZ - OM}{MZ} = \frac{\sin B - (\cos B + \cos C)\operatorname{ctg} A}{\cos C} =$$
$$= \frac{\sin B\sin A - (\cos B + \cos C)\cos A}{\cos C\sin A} = \frac{-\cos(A+B) - \cos C\cos A}{\cos C\sin A} =$$
$$= \frac{\cos C(1-\cos A)}{\cos C\sin A} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Таким образом, тангенсы равны; равны, следовательно, и углы — и параллельность C_aO и BA_1 доказана (ведь AA_1 — *биссектриса*, и потому $\angle CBA_1 = \angle CAA_1 = \frac{A}{2}$). Параллельность B_aO и CA_1 доказывается аналогично.

Замечание. Из способа построения точки A_a сразу следует, что прямая HA_a образует угол $\frac{\pi}{2} - \frac{|B-C|}{2}$ с прямой BC. Понятно также, что углы, опирающиеся на дугу AA_2 (где A_2 — середина дуги BC, содержащая вершину A), равны $\frac{|B-C|}{2}$. Наконец, как хорошо известно (см., к примеру, [3], [5]), точка H_1, симметричная ортоцентру H относительно прямой BC, лежит на описанной окружности. Отсюда заключаем, что точки H_1, A_a, A_2 лежат на одной прямой. Более того, мы нашли еще один способ построения точки A_a: нужно провести высоту из вершины A до пересечения с описанной окружностью в точке H_1 и отметить точку A_2 — середину дуги BC. Тогда прямые H_1A_2 и BC пересекутся в точке A_a (см. рис. 5).

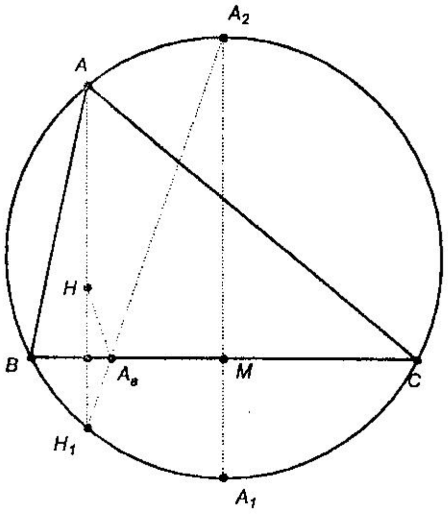


Рис. 5

Следующее забавное свойство M-конфигурации, указанное Ф. ван Ламойеном (Floor van Lamoen), оставляем читателю в качестве упражнения.

Упражнение 4. *Вырежем из остроугольного треугольника ABC треугольники BC_aA_a, $C_aA_aB_a$, A_aB_aC и расположим их таким образом, чтобы они соприкасались вершинами при основаниях, причем основания BA_a, B_aC_a, A_aC лежат на одной прямой (все треугольники находятся в одной полуплоскости). Тогда точки C_a, A_a и B_a коллинеарны* (рис. 6).

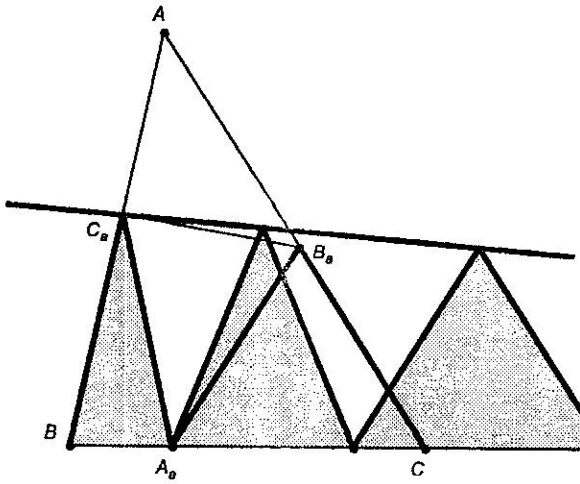


Рис. 6

(Разумеется, это остается верным и для случая тупоугольного треугольника — с той только разницей, что, если фигурки действительно вырезать, одного экземпляра исходного треугольника явно недостаточно. Что касается доказательства: используя многочисленную равнобедренность, легко подсчитать углы между прямыми (без малейшей тригонометрии), проходящими через любую пару вершин, и прямой BC).

3. Описанные окружности и М-конфигурация

Заметим, что $\angle B_aAC_a = A$. Из теоремы синусов поэтому следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников $B_aA_aC_a$ и B_aAC_a, совпадают. Пользуясь соотношением (1), вычислим длину радиуса:

$$R_a = \frac{l_a}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)} = \frac{l_a}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{R}{2\cos\frac{B-C}{2}}. \tag{3}$$

Предложение 5. *Окружность, описанная около треугольника AB_aC_a, содержит:*

(i) точку O — центр окружности, описанной около треугольника ABC,

(ii) точку H_a — ортоцентр треугольника $A_aB_aC_a$,

(iii) точку A_2 — середину дуги BAC

(см. рис. 7).

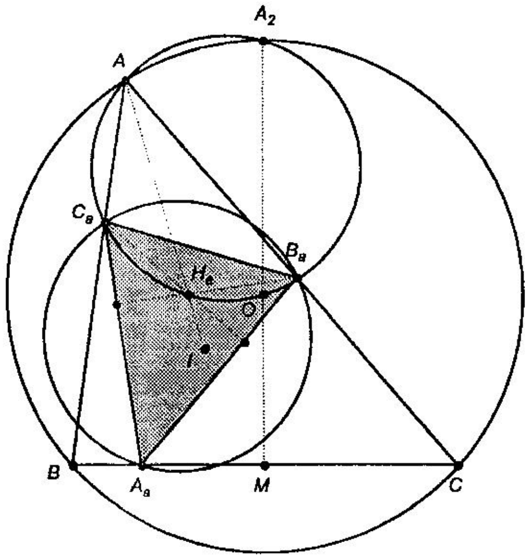


Рис. 7

Доказательство.

(i) Из **Предложения 3b** следует, что $\angle C_aOB_a = \pi - \left(\frac{A}{2} + \frac{A}{2}\right) = \pi - A$. Точки A, C_a, O, B_a должны лежать на одной окружности, поскольку сумма противоположных углов этого четырехугольника составляет развернутый угол.

(ii) Понятно, что $\angle B_aH_aC_a = \pi - \angle B_aA_aC_a = \pi - \angle BAC = \pi - \angle C_aAB_a$. Поэтому H_a лежит на описанной около AB_aC_a окружности. Кроме того, поскольку треугольник $A_aB_aC_a$ — *равнобедренный*, то $B_aH_a = C_aH_a$, т.е. стягивающие эти хорды дуги равны. Значит, H_a *лежит* и *на биссектрисе угла* A.

(iii) Простой подсчет углов показывает, что $\angle AA_2O = \frac{\pi}{2} - \frac{|B-C|}{2}$. Также легко сосчитать, что $\angle AC_aO = \frac{\pi}{2} + \frac{|B-C|}{2}$ ($C + \frac{A}{2}$, если $C \geq B$, и $B + \frac{A}{2}$ в противном случае). В сумме эти углы образуют развернутый.

Замечания.

(1) Как видим, точки B_a и C_a являются точками пересечения окружности, описанной около треугольника OAA_2, с прямыми AC и AB. Это доставляет еще один, нетривиальный, способ построения ломаной M_a.

(2) Если, наряду с «буквой» M_a, мы также рассмотрим M_b и M_c, то, как следует из (i), окружности, описанные около треугольников AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c проходят через O — центр описанной окружности треугольника ABC.

(3) Из доказательства (ii) следует, в свою очередь, что ортоцентры треугольников $A_aB_aC_a, A_bB_bC_b, A_cB_cC_c$ образуют треугольник, перспективный ABC с центром перспективы в точке I — центре вписанной окружности треугольника ABC (т.е. прямые AH_a, BH_b, CH_c пересекаются в точке I.)

Предложение 6. O_a — *центр окружности, описанной около треугольника* $A_aB_aC_a$, — *равноудален от центра* O *описанной около треугольника* ABC *окружности и его ортоцентра* H.

Поскольку этот результат является основным в нашей статье, приведем два его доказательства. Первое принадлежит автору, а второе было найдено И. Ф. Шарыгиным и практически не содержит вычислений. (*Некоторые* доказательства *некоторых* теорем[3] элементарной геометрии настолько красивы и элегантны, что их хотелось бы выделять как-то особо: предварять, например, грифом вроде *«Хранить вечно!»*. Пожалуй, доказательство И. Ф. Шарыгина имеет все основа́ния примкнуть к этому славному семейству).

Доказательство 1. (См. рис. 8.)

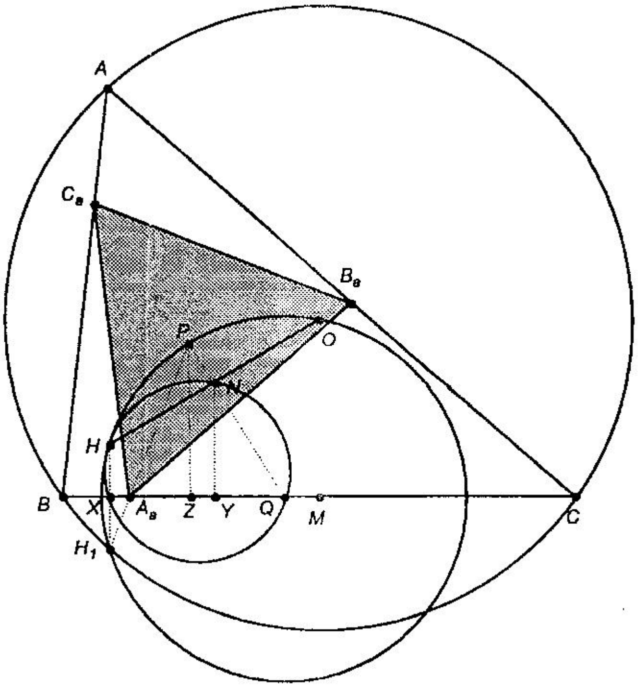


Рис. 8

Построим окружность, проходящую через точки H и O, так чтобы ее центр был расположен на прямой BC. Обозначим его буквой Q. Достаточно показать, что точка P, середина дуги BC, совпадает с точкой O_a. Пусть N — середина отрезка OH, а X, Y, M — основания перпендикуляров, опущенных (соответственно) из H, N, O на прямую BC. Угол между прямыми BC и PQ обозначим через φ.

Напомним несколько классических свойств точки N (см. [3], [5]): эта точка является центром окружности Эйлера (или окружности девяти точек), которая проходит, в частности, через основания высот, и радиус ее равен половине радиуса описанной около ABC окружности, т.е. $NX = \frac{R}{2}$. Кроме того, $\angle XNY = \frac{|B-C|}{2}$.

[3]Как не вспомнить тут крылатую фразу В. И. Арнольда «Об одном свойстве одного решения одного дифференциального уравнения», которую академик специально изобрел для емкой характеристики малосодержательных научных работ. С этой точки зрения, будучи достаточно разрозненным набором более–менее привлекательных задачек–головоломок, элементарная геометрия, безусловно, никакой наукой быть не может и даже не вправе претендовать на это. Ну, а если не наука, тогда что же? Может быть, *искусство*?

Заметим далее, что точки H, X, Q, N лежат на одной окружности с диаметром QH (который одновременно является радиусом окружности OPH), причем

$$QH = \frac{NX}{\sin\varphi} = \frac{R}{2\sin\varphi}.$$

Понятно, что точка H_1, симметричная точке H относительно BC, лежит на окружности OPH. Поэтому

$$\angle HH_1P = \frac{1}{2}\angle HQP = \frac{1}{2}\angle HQN = \frac{1}{2}\angle HXN = \frac{|B-C|}{2}.$$

Следовательно, прямая H_1P образует с прямой BC угол $\frac{\pi}{2} - \frac{|B-C|}{2}$. Простой подсчет углов показывает, что таким же будет угол между A_aO_a и BC. Наконец, в силу *Замечания* к *Предложению* 3, тот же самый угол возникает и при пересечении с BC прямой H_1A_a. Эти совпадения углов означают, что точки H_1, A_a, O_a и P лежат на одной прямой. Пусть теперь Z — основание перпендикуляра, опущенного из P на BC. Тогда

$$A_aP = \frac{PZ}{\cos\dfrac{(B-C)}{2}} = \frac{QP\sin\varphi}{\cos\dfrac{(B-C)}{2}} = \frac{R}{2\cos\dfrac{(B-C)}{2}} = R_a.$$

Последнее в этой цепочке равенство, завершающее доказательство, есть не что иное, напомним, как соотношение (3).

Доказательство 2. (См. рис. 9).

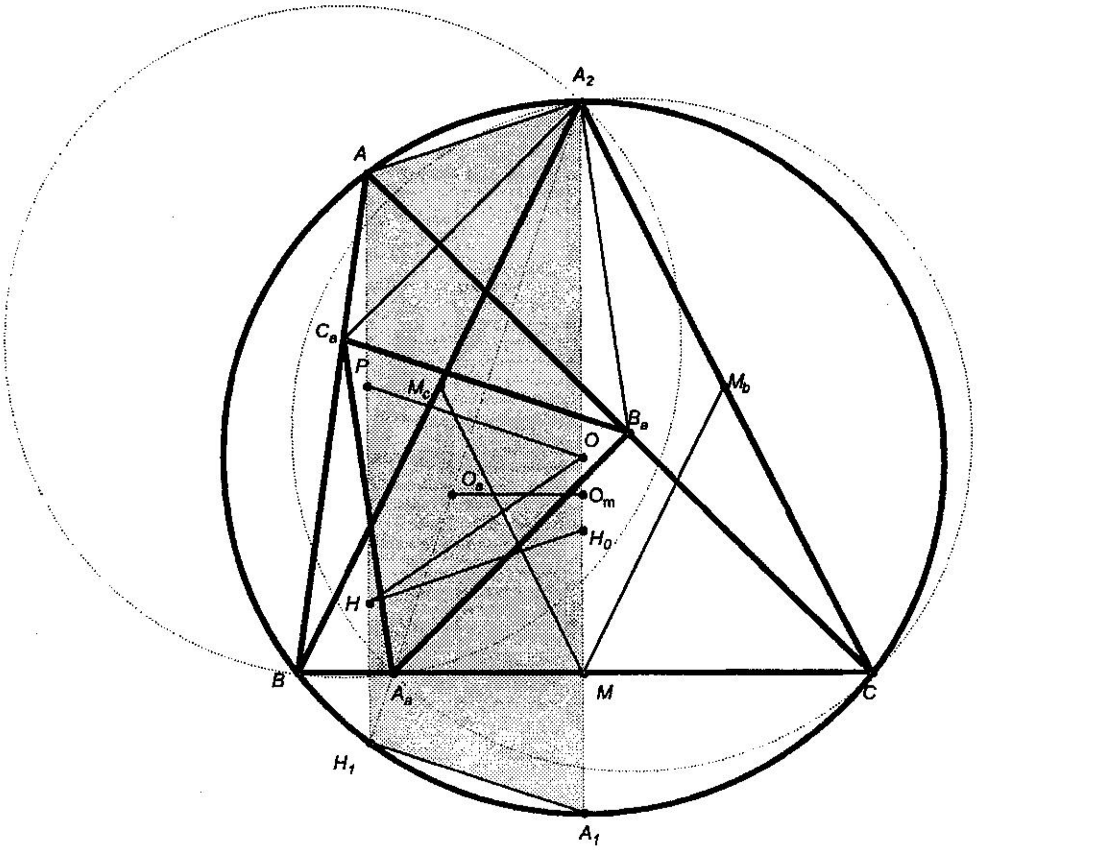


Рис. 9

Достроим треугольник $A_aB_aC_a$ до ромба с четвертой вершиной в точке A_2. Рассмотрим окружности с центрами в точках C_a и B_a с общим радиусом, равным боковой стороне равнобедренного треугольника $A_aB_aC_a$ (т.е. равным l_a в наших обозначениях). Первая окружность проходит через точки B, A_a, A_2 , а вторая — через C, B_a, A_2. Поскольку радиусы равны, то равны и углы, величину которых обозначим через $\psi = \angle ABA_2 = \angle ACA_2$, что означает также совпадение равнобедренных треугольников BC_aA_2 и CB_aA_2. Поэтому равнобедренным является также треугольник BA_2C, причем сумма углов при его основании $(B-\psi)+(\psi+C)$ (или $(C-\psi)+(\psi+B) = \pi - A$). Это означает, что точка A_2 лежит на описанной около ABC окружности и является серединой дуги BAC.

Согласно *Замечанию к Предложению* 3, точки H_1 (пересечения высоты и описанной окружности), A_a, A_2 лежат на одной прямой. Ей же, как убедились выше (*Доказательство* 1), принадлежит и точка O_a.

Пусть H_0 — ортоцентр треугольника BA_2C, M_cMM_b — его серединный треугольник и O_m — центр описанной около серединного треугольника окружности (или центр окружности Эйлера для треугольника BA_2C). Так как центр окружности девяти точек расположен в середине отрезка, соединяющего ортоцентр треугольника с центром описанной окружности (см. [3], [5] — это одно из главных свойств окружности Эйлера), то O_m — середина отрезка OH_0 .

Поскольку ромбы $B_aA_aC_aA_2$ и $M_cMM_bA_2$ *подобны* друг другу, то соответственные точки O_a и O_m делят диагонали A_aA_2 и MA_2 в одинаковых отношениях, значит, O_aO_m параллелен BC, т.е. O_aO_m является *серединным перпендикуляром* к отрезку OH_0 .

Наше утверждение будет доказано, если докажем, что O_a — центр окружности, описанной около треугольника HOH_0 (и один серединный перпендикуляр, содержащий O_a, уже найден!).

В любом треугольнике расстояние от вершины до ортоцентра равно удвоенному расстоянию от центра описанной окружности до противоположной стороны (еще один факт из геометрической классики, см. [3], [5]). Но треугольники ABC и A_2BC имеют общую описанную окружность и основание, поэтому $AH = AH_0$, следовательно, AHA_2H_0 — параллелограмм, т.е. отрезки AA_2 и HH_0 параллельны и равны.

Так как в окружность можно вписать только равнобочную трапецию, то равнобочной будет и трапеция $AH_1A_1A_2$ (A_1A_2 — диаметр, проходящий через середину BC), откуда заключаем, что $HH_0 = H_1A_1$.

Рассмотрим теперь прямую, проходящую через O параллельно H_1A_1. Пусть она пересекает прямую AH_1 в точке P. Возникает еще одна равнобочная трапеция HH_0OP.

Остается заметить, что прямая H_1O_a перпендикулярна PO (угол $A_1H_1A_2$ опирается на диаметр) и делит этот отрезок пополам ($OH_1 = OA_1$, как радиусы, и $OA_1 = H_1P$, т.к. PH_1OA_1 — параллелограмм; стало быть, треугольник PH_1O — *равнобедренный*) — выявлен и второй серединный перпендикуляр (правда, может быть не совсем тот, который мы предполагали найти — напрашивался ведь «в розыск» перпендикуляр к HH_0 — но ничуть не хуже).

Мы показали, что O_a совпадает с центром описанной около равнобочной трапеции HH_0OP окружности — он же и центр окружности, описанной около треугольника HOH_0.

Аналогичным свойством, конечно, обладают и ломаные M_b и M_c. Фактически мы доказали теорему:

Теорема 7. *Центры окружностей, описанных около треугольников $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$ лежат на одной прямой. Эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка OH.*

См. рис. 10.

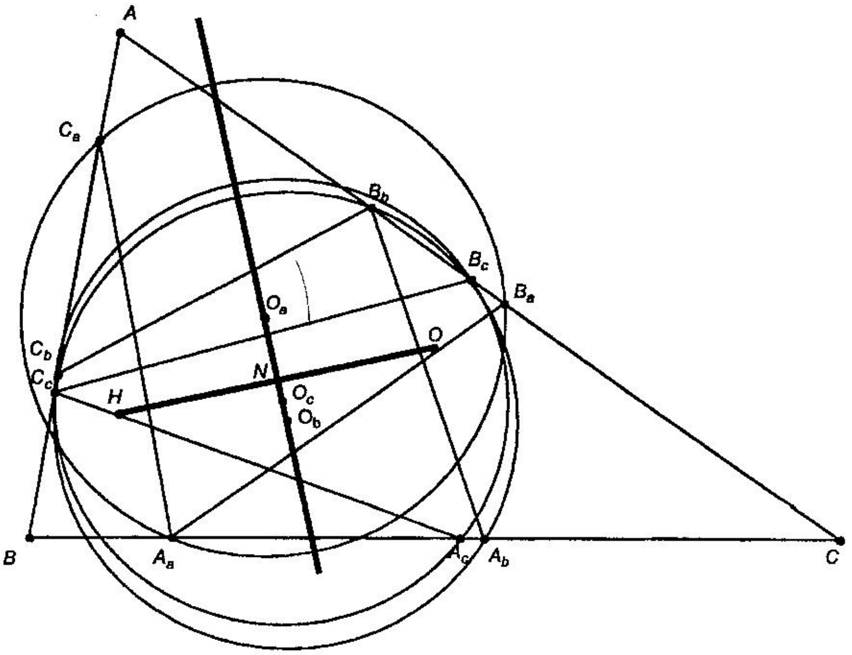


Рис. 10

Прямая, проходящая через точки O, H, называется прямой Эйлера и обладает множеством интереснейших свойств — в частности, середина OH, как уже было здесь упомянуто — точка N, центр окружности Эйлера. Поэтому второму предложению в сформулированной теореме можно придать несколько другой вид:

Эта прямая перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ABC, и проходит через центр окружности Эйлера данного треугольника.

Краткий лирический комментарий.

Впервые я узнал о прямой и окружности Эйлера в далеких восьмидесятых (годах уже прошлого века!), будучи студентом, когда мне в руки попалась дивная книжка Кокстера[4] и Грейтцера «Новые встречи с геометрией» (сейчас, наконец, переизданная — см. [3]). Эти (да и многие другие, в изобилии рассыпанные по страницам книги) геометрические жемчужины сразу, что называется, запали в душу. Конечно, в то время я не мог и не смел даже предположить, что когда-нибудь и мне посчастливится вставить небольшую реплику по сему классическому поводу.

Предложение 8. *Уравнение серединного перпендикуляра к отрезку OH имеет вид:*

$$\frac{\sin 3A}{\sin A}x + \frac{\sin 3B}{\sin B}y + \frac{\sin 3C}{\sin C}z = 0.$$

Доказательство. Условие перпендикулярности в барицентрических координатах записывается весьма громоздко, но можно обойтись и без него. Согласно *тео-*

[4]Возможно, не всем читателям известно, что земной путь одного из крупнейших геометров минувшего столетия завершился совсем недавно, 31 марта 2003 г. Достигший весьма преклонного возраста (96 лет), сам корифей на вопросы типа «в чем секрет Вашего долголетия» обыкновенно ответствовал двумя излюбленными фразами: «I am extremely fortunate for being paid for what I would have done anyway» и «I am never bored». («Мне крайне повезло: я получал деньги за то, чем занимался бы в любом случае»; «Я никогда не растрачивал время по пустякам»).

реме 7 достаточно показать, что точка O_a лежит на этой прямой (понятно, что для другого центра пройдет, буквально дословно, точно такое же доказательство, просто во всех выкладках следует осуществить циклическую перестановку углов A, B, C). Координаты O_a относительно треугольника ABC находятся при помощи следующей стандартной процедуры (см. [1]):

1. Составляем *матрицу перехода* от треугольника $A_aB_aC_a$ к треугольнику ABC. Для этого нужно найти нормированные координаты точек A_a, B_a, C_a (относительно ABC) и «транспонировать» их, т.е. записать, как *столбцы* искомой матрицы. Координаты этих точек, кстати, нами уже были предусмотрительно найдены заранее, см. соотношение (2).

2. Записываем координаты O_a относительно треугольника $A_aB_aC_a$. В данном случае

$$O_a^{A_aB_aC_a} = \left(\sin 2A : \sin 2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\Big) : \sin 2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\Big)\right) =$$
$$= (\sin 2A : \sin A : \sin A) = (2\cos A : 1 : 1).$$

3. Умножаем матрицу перехода на вектор, составленный из координат O_a. Результат произведения и есть искомые координаты.

Далее следует найденные координаты подставить в уравнение прямой и убедиться, что равенство левой части нулю действительно имеет место. Технические детали мы оставляем читателю — и если среди них есть такие, которым нравится возиться с тригонометрией, они, вероятно, получат большое удовольствие. Между прочим, в процессе вывода возникают порой весьма небанальные тригонометрические тождества для углов треугольника! Чтобы получить приблизительное представление, какие именно, подставьте, например, координаты центра окружности девяти точек $N = (\sin A\cos(B-C) : \sin B\cos(C-A) : \sin C\cos(A-B))$ в уравнение прямой.

4. Центральное отображение

В этом параграфе мы опишем некий «генератор» замечательных точек, довольно естественным образом порожденный М-конфигурацией. (Все необходимые сведенья о замечательных, или центральных, точках и их барицентрических координатах можно найти в [1], [2], [4], [5]).

Пусть P — произвольная *центральная* точка треугольника с барицентрическими координатами, рассматриваемыми как функции углов *(f(A,B,C) : f(B,C,A) : f(C,A,B))*, где $f = f_P$ удовлетворяет равенству *f(A,B,C)=f(A,C,B)*. Если исходный треугольник — равнобедренный (например, $AB = AC$), то P лежит на его оси симметрии, серединном перпендикуляре к BC, и ее координаты приводятся к виду $(F_P : 1 : 1)$, где координата F_P может быть выражена только как функция угла $B(= C)$ при основании равнобедренного треугольника ABC.

Например, для центра вписанной окружности I (X_1 — если следовать нумерации Кимберлинга в [1], [2]) $= (\sin A, \sin B, \sin C)$, и, для равнобедренного треугольника, $= (\sin(\pi - 2B), \sin B, \sin B) = (2\sin B\cos B, \sin B, \sin B) = (2\cos B, 1, 1)$. Таким образом, $f_I = \sin A; F_I = 2\cos B$. Вот еще несколько соотношений (в справедливости которых читатель без труда может убедиться самостоятельно):

Точка	f_P	F_P
X_2 — центроид (точка пересечения медиан)	1	1
X_3 — центр описанной окружности	$\operatorname{tg} A$	$-2\cos 2B$
X_4 — ортоцентр	$\operatorname{ctg} A$	$\dfrac{-2\cos^2 B}{\cos 2B}$
X_6 — точка Лемуана (изогонально сопряженная центроиду)	$\sin^2 A$	$4\cos^2 B$
X_7 — точка Жергонна (точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими точками касания вписанной окружности с его сторонами)	$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$	$\dfrac{\cos B}{1-\cos B}$
X_8 — точка Нагеля (точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими точками касания вневписанных окружностей с его сторонами)	$\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$	$\dfrac{1-\cos B}{\cos B}$
X_9 — точка Лемуана треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей.	$\sin A \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$	$2(1-\cos B)$
X_{10} — точка Шпикера (центр вписанной окружности серединного треугольника)	$\sin B + \sin C$	$\dfrac{2}{1+2\cos B}$

Итак, рассмотрим произвольную центральную точку P и соответствующую ей (т.е. имеющую аналогичные барицентрические координаты, как функции углов) точку $P_{a,b}$ в равнобедренном треугольнике C_aBA_a нашей конфигурации. Координаты соответствующей точки имеют «равнобедренный» вид $(F_P(B) : 1 : 1)$ относительно этого треугольника.

Несложно проверить (см. *Доказательство Предложения* 8), что относительно уже основного треугольника ABC получим

$$P_{a,b} = \left(\frac{F_P(B)l_a}{c} : \frac{F_P(B)(c-l_a)}{c} + 1 + \frac{2l_a}{a}\cos C : \frac{2l_a}{a}\cos B\right).$$

Точно так же, для соответствующего центра равнобедренного треугольника B_aA_aC,

$$P_{a,c} = \left(\frac{F_P(C)l_a}{b} : \frac{2l_a}{a}\cos C : \frac{F_P(C)(b-l_a)}{b} + 1 + \frac{2l_a}{a}\cos B\right).$$

Далее, произведя стандартные действия, найдем координаты точки пересечения прямых $BP_{a,b}$ и $CP_{a,c}$:

$$\begin{aligned} P_a &= \left(\frac{F_P(B)F_P(C)l_a^2}{bc} : \frac{2F_P(B)l_a^2\cos C}{ca} : \frac{2F_P(C)l_a^2\cos B}{ab}\right) = \\ &= (aF_P(B)F_P(C) : 2bF_P(B)\cos C : 2cF_P(C)\cos C) \\ &= \left(\frac{aF_P(B)F_P(C)}{2\cos B\cos C} : \frac{bF_P(B)}{\cos B} : \frac{cF_P(C)}{\cos C}\right). \end{aligned}$$

(Отметим, что для вычислений нам не понадобились «длинные» координаты двух центральных точек равнобедренных треугольников, т.к. они умножаются на нуль).

Рис. 11 иллюстрирует случай точки Жергонна: $P = X_7$

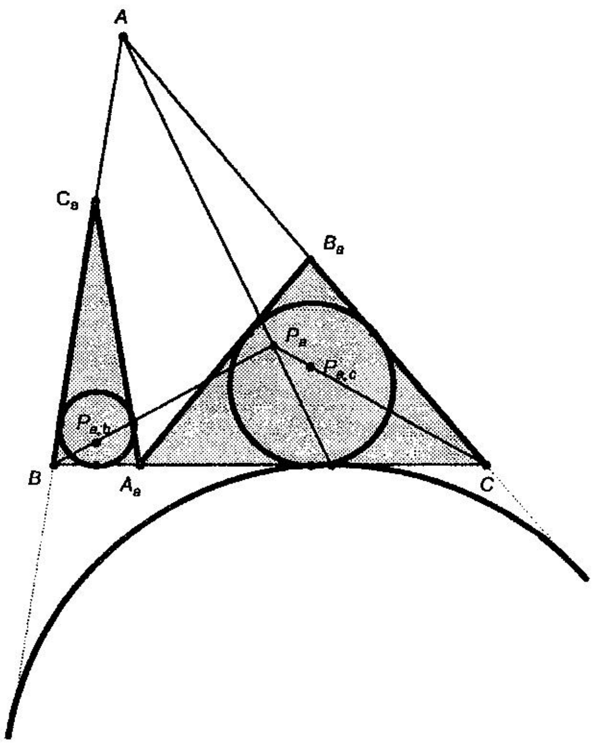


Рис.11

Таким образом, выбрав произвольно центральную точку P, мы, используя ломаную M_a М-конфигурации, сначала построили точки $P_{a,b}$, $P_{a,c}$, а затем и точку P_a.

Совершенно аналогично, рассмотрев две другие ломаные, построим, в конце концов, точки P_b и P_c, координаты которых получаются из координат P_a циклическими перестановками. В заключение, применив теорему Чевы, мы обнаружим, что прямые AP_a, BP_b, CP_c пересекаются в точке $\Phi\,(P)$ с координатами

$$\Phi\,(P) = \left(\frac{aF_P(A)}{\cos A} : \frac{bF_P(B)}{\cos B} : \frac{cF_P(C)}{\cos C}\right) = (F_P(A)\operatorname{tg} A : F_P(B)\operatorname{tg} B : F_P(C)\operatorname{tg} C)\,.$$

Мы не только указали конструкцию *центрального отображения*, но и доказали его *корректность*.

Посмотрим, куда при этом отображении переходят некоторые точки.

Совершенно очевидно, что центр вписанной окружности I является неподвижной точкой центрального отображения, но давайте убедимся в этом «формально».

Для первой координаты $\Phi\,(I)$ имеем: $2\cos A \operatorname{tg} A = 2\sin A$. Две другие также равны удвоенному синусу соответствующего угла. (На вопрос – *есть ли другие неподвижные точки?* – автор, честно говоря, ответа не знает).

Читателю не составит, при желании, труда проверить справедливость нижеперечисленных утверждений (приведены порядковые номера точек *по Кимберлингу*; для экономии места всюду выписаны лишь первые координаты)[5]:

P	$\Phi(P)$
$X_2\ (1,\dots,\dots)$	$X_4\ (\operatorname{ctg} A,\dots,\dots)$
$X_3\ (\operatorname{tg} A,\dots,\dots)$	$X_{24}\ (\operatorname{tg} A\cos 2A,\dots,\dots)$
$X_4\ (\operatorname{ctg} A,\dots,\dots)$	$X_{68}\ (\operatorname{tg} 2A,\dots,\dots)$
$X_6\ (\sin^2 A,\dots,\dots)$	$X_3\ (\operatorname{tg} A,\dots,\dots)$
$X_7(\operatorname{tg}\frac{A}{2},\dots,\dots)$	$X_8(\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\dots,\dots)$
$X_8(\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\dots,\dots)$	$X_{1118}(\operatorname{tg} A\frac{1-\cos A}{\cos A},\dots,\dots)$
$X_9(\sin A\operatorname{ctg}\frac{A}{2},\dots,\dots)$	$X_{34}(\operatorname{tg} A\sin^2\left(\frac{A}{2}\right),\dots,\dots)$
$X_{10}(\sin B+\sin C,\dots,\dots)$	$?(\frac{\operatorname{tg} A}{1+2\cos A},\dots,\dots)$

Приведем также краткие *геометрические* характеристики полученных образов.

X_{24} — центр перспективы исходного треугольника и треугольника, являющегося ортотреугольником для ортотреугольника исходного;

X_{68} — центр перспективы исходного треугольника, и треугольника, образованного точками, диаметрально противоположными вершинам ортотреугольника относительно окружности Эйлера. Недавно этой точке было присвоено *имя собственное* : теперь она называется в энциклопедии Кимберлинга *точкой Прасолова* (см. [2], [5] — задача 5.125).

X_{1118} (этот четырехзначный номер — не опечатка!) можно построить, рассмотрев вписанную в треугольник окружность. Пусть она касается CA в точке Y, а AB — в точке Z. Опустим из этих точек перпендикуляры на BC и отметим «вторые» точки их пересечения со вписанной окружностью: Y_1 и Z_1 соответственно. Отметим точку пересечения прямых BZ_1 и PY_1 — P_a. Аналогично построим точки P_b, P_c. Тогда центром перспективы треугольников ABC и P_a, P_b, P_c и будет X_{1118}. Эту конструкцию несколько лет назад изобрел Антреас Хатциполакис (Antreas Hatzipolakis).

X_{34} — центр перспективы ортотреугольника и треугольника, симметричного относительно центра вписанной окружности треугольнику, образованному прямы-

[5] Подобные утверждения в подобной форме сильно отдают схоластикой. Не исключено, что за иным отдельно взятым фактом скрывается самобытная геометрия, полностью «умерщвленная» общей алгебраической формулой. Вообще, как однажды остроумно заметил И. Ф. Шарыгин, сведение (низведение?) всей элементарной геометрии к каталогу центральных точек напоминает известную историю из жизни обитателей сумасшедшего дома — поскольку все анекдоты пронумерованы, сумасшедшие рассказывают друг другу их так: «Анекдот номер такой-то» и весело смеются.

ми, каждая из которых есть общая внутренняя касательная к вписанной и вневписанной окружности.

Что касается образа точки Шпикера $\Phi(X_{10})$ — на данный момент точка с такими координатами отсутствует в энциклопедии.

Напоследок приведем одно интересное свойство центрального отображения, найденное Полем Ю. (Paul Yui).

Предложение 9. *Пусть P_I обозначает изогональный образ точки P.*

Тогда $\Phi(P_I) = (\Phi(P))_I$ — т.е. центральное отображение и изогональное сопряжение коммутируют друг с другом.

Доказательство. Изогональное сопряжение связано с симметрией чевиан треугольника, проходящих через точку P, относительно биссектрис соответствующих углов (см. [4], [5]). Но биссектрисы углов исходного треугольника являются также биссектрисами углов в равнобедренных треугольниках, порождающих центральный образ.

Литература

[1] C. Kimberling. Triangle Centers and Central Triangles. — Winnipeg, 1998.

[2] C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. — `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`.

[3] Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. — Москва-Ижевск. : РХД, 2002.

[4] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. — М.: МЦНМО, 2002. — (Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 19)

[5] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.

Мякишев Алексей Геннадьевич
Московский Химический Лицей
e-mail: `alex_geom.@mtu-net.ru`

Проблема Ферма в контексте Гёделевских теорем

В. А. Еровенко, Н. В. Михайлова

В статье обсуждается влияние результата Геделя о существовании в достаточно богатых формальных системах истинных, но недоказуемых утверждений на развитие математики и, более широко, на естественно-научное мировоззрение.

Теорема Гёделя о неполноте — это результат, плохо воспринимаемый психологически не только гуманитариями, но и многими математиками. Как сказал, по этому поводу логик и философ математики Н. Н. Непейвода: "Она подрывает вульгарно понимаемую веру в познаваемость мира научными методами, являющуюся одной из догм "религии прогресса": оказывается, что даже самая точная из наук не может познать даже простейшее множество объектов — натуральные числа" [1, с.364]. Возможно, поэтому открытия австрийского математика и логика Курта Гёделя какое-то время не замечались математическим сообществом, как не имеющие отношения к ее реальным проблемам, до тех пор, пока Поль Коэн не поколебал эту уверенность своим результатом о неразрешимости континуум-гипотезы в традиционной системе теории множеств.

Важнейший результат Курта Гёделя, а именно, доказательство принципиальной неполноты достаточно богатых формальных систем, в том числе аксиоматической теории множеств, был опубликован в статье "О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем" в 1931 году. Первая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то она неполна, то есть содержит истинные утверждения, которые недоказуемы и неопровержимы в этой системе. Полнота системы буквально означает, что каждое общее утверждение об объектах, к которым относятся аксиомы, может быть получено из этих аксиом с помощью вывода. Формальная система в конструкции Гёделя состоит из конечного множества символов и конечного числа правил, по которым эти символы можно объединять в формулы или предложения, часть из которых рассматривается как аксиомы. Каждый, кому доводилось изучать элементарную геометрию, знает, что она строится как дедуктивная наука, отличаясь этим от экспериментальных знаний.

Еще в Древней Греции была понята сила и возможности логического доказательства и именно греческие математики открыли "аксиоматический метод" для изложения геометрии, который наиболее широко стал применяться в течение двух последних столетий. Поэтому вполне естественным выглядело в среде математиков убеждение, что для любого раздела математики можно указать набор аксиом, достаточный для вывода всех истинных предложений этой науки. Работа Гёделя показала несостоятельность такого глубоко укоренившегося убеждения. Возможности аксиоматического метода оказались существенным образом ограничены. Мощности дедуктивных методов не хватает даже на то, чтобы из конечного числа аксиом вывести все истинные утверждения о целых числах, сформулированные на языке школьной алгебры, то есть формально нужно иметь бесконечно много новых идей. При общепринятом понимании смысла теоремы Гёделя, утверждающей, что полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует, творческий характер математики выявляется с особой силой.

Когда математик прерывает бесконечную операцию вычисления, он считает, что в принципе эта операция бесконечно воспроизводима, и поэтому ее можно предположить завершенной. С течением времени нестрогие доказательства стали встречаться на практике все чаще, поэтому их надежность, вообще говоря, не зависит от гипотетически возможного "чистого", но не реализованного доказательства. Доказательство в общем случае не гарантировано от неявных допущений в языке. Поэтому принципиальный вопрос обоснования состоит в том, существуют ли в математике окончательные доказательства? Формальные доказательства, хотя и могут быть сами по себе вполне надежными, тоже являются гипотетичными, так как могут противоречить неформальным теориям, выступающим в качестве интуитивной основы формализованной теории. В силу этого, значение теоремы Гёделя о неполноте оказывается довольно тонким вопросом в проблеме обоснования математической строгости. Основной философско-методологический смысл результатов Гёделя состоит в том, что мышление человека богаче любых его дедуктивных форм и что нельзя, основываясь только на формальной логике, смоделировать искусственный интеллект.

Вопреки определенным усилиям философов представить результаты Гёделя как сенсацию, его теоремы все же не оказали "революционного влияния" ни на представление о своей науке большинства работающих математиков, ни тем более на их практическую деятельность. Курт Гёдель не изобрел математическую логику, но он глубоко изменил своими исследованиями содержание этой науки. Гёдель доказал, что если достаточно богатая формальная система непротиворечива, то в ней обязательно имеются формулы, которые истинны, но не являются доказуемыми. Но так ли уж необходимо нам знать все истины? Истинность теоремы — это лишь часть знания, содержащегося в ее доказательстве. Загадочное несоответствие человеческой и формальной логики отражено в несоответствии между понятием "истинности" и понятием "доказуемости". Американский математик и физик Даглас Хофштадтер считает, что "таков возможный романтический взгляд на эту ситуацию" [2, с.86]. Более реалистичный взгляд предполагает необходимость глубокого понимания того, каким образом математический смысл выражается в формальных системах.

Интерпретаторами теорем Гёделя упускается иногда следующее важное дополнение. Программа Гёделя, в действительности, была лишь частью длительных поисков математиков в надежде выяснить, что собой представляет "доказательство". Для математиков и логиков доказательства являются таковыми лишь внутри определенных жестких систем. В работе Гёделя такой жесткой системой, к которой относится слово "доказательство", является фундаментальный труд английских логиков и философов Бертрана Рассела и Альфреда Уайтхеда "Principia Mathematica", написанный в 1910-1913 годах. Первая теорема Гёделя по существу утверждает, что какая бы непротиворечивая система аксиом ни использовалась, всегда найдутся вопросы, на которые математика не сможет найти ответ, — то есть полнота недостижима. Но есть еще дополнительная трудность в современных формальных системах. "Вторая теорема Гёделя, — по мнению английского физика Саймана Сингха, — утверждает, что математики никогда не смогут быть уверены в том, что их выбор аксиом не приведет к противоречию, — непротиворечивость никогда не может быть доказана" [3, с.141]. Но что в математике означает слово "непротиворечива"?

Непротиворечивость системы аксиом означает, что не существует такого утверждения, которое в этой системе чисто логическим путем выводимо одновременно с отрицанием этого утверждения. "Противоречивые системы аксиом вредны и их не следует вводить, — поясняет математик и логик В. А. Успенский, — но дело в том, что противоречивость может не сразу выявиться" [4, с.25]. Математики, безусловно, хотели бы знать заранее, что противоречащие друг другу утверждения не появятся. Исчерпывающее объяснение по этой проблеме, скорее всего, невозможно, но некоторые косвенные, психологически убедительные признаки все же существуют. Работы Гёделя о неразрешимости внесли элемент сомнения и в вопрос о том, разрешима ли проблема Ферма, но истинных фанатиков великой теоремы Ферма это ничуть не разочаровало.

Принципиальная трудность теоремы Ферма, а также других математических проблем, состоит в том, что рассматриваемое множество объектов, в данном случае натуральных чисел, бесконечно, поэтому проверить его все целиком нет даже принципиальной возможности. Однако математическое доказательство позволяет нам единым образом обозреть все это бесконечное множество и получить, если повезет, точный ответ. Проблема, верно или нëверно на множестве $\mathbf{N}$ утверждение

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall n\ ((x+1)^{n+3} + (y+1)^{n+3}) \neq (z+1)^{n+3},$$

стояла более 350 лет. Эта проблема известна под названием "Великой теоремы Ферма". Математики довольно часто хронометрируют свое время не столько конкретной датой получения решения той или иной проблемы, сколько временем поиска идеи этого решения. Поиск доказательства теоремы Ферма — последний из примеров такого рода. На обычном математическом языке она формулируется следующим образом. Доказать, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$ не имеет решений в положительных целых числах. Эта формулировка понятна любому школьнику. Примечательно то, что при n=2 существует бесконечно много таких решений — это так называемые пифагоровы тройки (3, 4, 5), (5, 12, 13) и так далее.

После основополагающих открытий Гёделя о неразрешимых предложениях, математики задавали и такой вопрос: Может быть проблема Ферма неразрешима в существующей системе математики? Пьер Ферма сумел сформулировать такой вопрос, который, несмотря на его естественность и простоту, не додумались задать даже древние греки, и в результате чего он стал автором труднейшей головоломки, решать которую пришлось другим поколениям математиков. История современной математики усеяна многочисленными ложными заявлениями "фермастов", которым якобы удалось доказать эту теорему. Тем не менее, английскому математику из Принстонского университета Эндрю Уайлсу, удалось в 1995 году получить завершающее доказательство "великой теоремы Ферма". Заметим, что доказательство этой теоремы настолько объемно и сложно, что это отчасти мешало его окончательному признанию, поскольку найти ошибку в сложном и длинном рассуждении во много раз труднее, чем написать его.

Пьер Ферма никогда не раскрывал своих доказательств, что вызывало у его коллег вполне естественное чувство разочарования. Когда Блез Паскаль настаивал на публикации некоторых работ Ферма, то он ответил: "Какая бы из моих работ ни считалась достойной опубликования, я вовсе не желаю, чтобы мое имя появилось в печати" [3, с.51]. Пьер Ферма сознательно жертвовал славой ради того, чтобы критики не досаждали ему своими придирками. Но история науки непредсказуема и в настоящее время все специалисты твердо убеждены в том, что Ферма не обладал доказательством этой теоремы и, более того, элементарными методами, доступными Ферма, ее нельзя было решить. Теорема Ферма — это частный случай задачи, связанной с диофантовыми уравнениями. Напомним, что диофантово уравнение, названное по имени греческого математика Диофанта Александрийского, жившего в III веке до нашей эры, — это алгебраическое уравнение вида $P(z_1, \ldots, z_n)=0$, где P — полином с целыми коэффициентами.

Обычно интересуются решениями диофантовых уравнений в целых или целых неотрицательных числах. Выдающийся немецкий математик Давид Гильберт не включил теорему Ферма в перечень двадцати трех важнейших проблем, стоящих перед математикой XX века. Правда, он включил в этот ряд проблем общую проблему разрешимости диофантовых уравнений: "Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли заданное диофантово уравнение в целых числах". Это знаменитая 10-я проблема Гильберта. Невозможность существования алгоритма, распознающего разрешимые диофантовы уравнения (то есть то, что требуемого в проблеме способа не существует) была окончательно установлена в 1970 году 22-летним ленинградским аспирантом Юрием Матиясевичем.

По поводу основной теоремы Матиясевича о числах Фибоначчи, явившихся для него вспомогательным средством для установления весьма общих и важных закономерностей, можно сказать, что по своей формулировке и методам доказательства она похожа на сложную олимпиадную задачу. В основном содержании работы Матиясевича может самостоятельно разобраться даже талантливый школьник, поскольку оригинальная часть его работы посвящена доказательству теоремы, формулировка и метод доказательства которой вполне элементарны. Он воспользовался, как принято говорить, "редукциями" проблемы к более специальным задачам, а ключевой идеей было сведение всего к свойствам чисел Фибоначчи. Наряду с пониманием проблем современной математики, дополнительной составляющей успеха

Юрия Матиясевича стало искусство нахождения неожиданных, пусть даже и вполне элементарных, путей решения специальных математических задач.

Заметим, что для диофантовых уравнений не выше второй степени общий метод, следуя которому, можно было бы за конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в числах или нет, был найден. Однако диофантовы уравнения третьей степени никаким усилиям не поддавались, но в начале XX века Давид Гильберт и не подозревал, что соответствующего "алгоритма" не существует! Для конкретного диофантова уравнения задача о нахождении целочисленных решений и задача о нахождении решений в целых неотрицательных числах, то есть натуральных числах, — это, вообще говоря, разные задачи. Однако, если мы интересуемся сразу всеми уравнениями, то эти две задачи совпадают. В отличие от нахождения искомого общего метода, для доказательства несуществования некоего общего метода для решения определенного класса задач, требуется дать точное определение тому, что представляет собой этот общий метод и какими средствами он может быть реализован.

Соответствующие определения были выработаны в новом направлении современной математики — теории алгоритмов. Именно десятая проблема Гильберта послужила одним из стимулов для создания этой теории. С доказательством теоремы Матиясевича в математической логике выделился законченный теоретико-числовой фрагмент, то есть теория диофантовых множеств, которым можно достойно завершить любой курс элементарной теории чисел. Хотя в связи с неудачами в этом направлении изначально возникло подозрение, что общего метода, о котором говорится в проблеме Гильберта, вообще говоря, не существует. Преодолев трудности доказательства этой рабочей гипотезы, математикам на этот раз, так же как и четверть века спустя в случае проблемы Ферма, удалось все же уйти с проблемного поля теоремы Гёделя о неполноте. Доказательство теоремы Гёделя о неполноте опирается на автореферентное, то есть описывающее само себя, математическое суждение, подобно тому как парадокс Эпименида — это такого же рода суждение о языке.

В русском языке слово "парадокс" означает суждение, противоречащее "общепринятым мнениям" или "логическим нормам". Парадокс Эпименида можно видоизменить так, что получится настоящий парадокс. Еще в IV веке до нашей эры это сделал философ мегарской школы Эвбулид, предложивший изречение: "Предложение, которое я сейчас произношу, ложно". Парадокс возникает, когда мы пытаемся определить, истинно или ложно это утверждение. Из истинности сформулированного предложения следует, что "оно ложно", а из его ложности вытекает, что оно не ложно, то есть "оно истинно". Вот это и есть подходящее утверждение для "парадокса лжеца". Говорить о языке, используя для этого язык, вполне естественно. Гораздо труднее представить, как может говорить само о себе математическое суждение о числах. Курт Гёдель предположил, что "суждение теории чисел" могло бы быть "о суждении теории чисел", возможно, даже и о себе самом, если бы с помощью чисел можно было бы обозначать суждения.

Так возникла идея кода, именуемая "гёделевской нумерацией", в котором символы и последовательности символов обозначаются числами. Идея нумерации позволила формулировать гёделевские неразрешимые предложения в терминах диофантовых уравнений, которые веками были вполне "благонамеренными" объектами чисто математических исследований. После того, как Гёдель изобрел свою кодирующую систему, парадокс Эпименида на формальном языке теории чисел, с учетом сделанного замечания об его трактовке доказательства, стал звучать приблизительно так: "Это суждение теории чисел не имеет доказательства в системе Рассела-Уайтхеда". Это предложение без формализации понятия "доказательства" может создать немалую путаницу. В действительности, теоремы Гёделя были лишь частью долгих поисков, предпринятых математиками в надежде выяснить, что же такое доказательства.

В чем же тогда состоит эффект открытия Гёделя? Эффект в том, что модифицированное высказывание Эпименида создает парадокс, поскольку оно не является ни истинным, ни ложным, а высказывание Гёделя не доказуемо, хотя оно и истинно в системе "Principia Mathematica". В частности, это означает, что эта система неполна, так как существуют истинные суждения теории чисел, не доказуемые методами доказательства самой системы теорем. Согласно одной из трактовок второй теоремы Гёделя о неполноте, непротиворечивость математической системы может быть доказана только методами, более "сильными", чем сама эта система, поскольку ее методы доказательства оказываются иногда слишком "слабыми". Это достаточно традиционное понимание второй теоремы Гёделя не вполне точное, так как в этом случае упускается из вида дуализм интуитивного и формального в программе Гёделя.

Как вообще философы науки понимают дуализм? Это "мысленное" разделение мира на категории. "Разбиение мира на категории происходит гораздо глубже самого высокого уровня мышления: дуализм настолько же процесс восприятия мира, как и его понимания" [2, с.242]. Современные аксиоматические теории описывают не все те средства, которые используются в рассуждениях, поэтому теорема Гёделя о непротиворечивости не дает, вообще говоря, оснований предполагать, что для доказательства непротиворечивости некоторой аксиоматизированной математической теории нужны более сильные средства, вроде каких-то дополнительных постулатов, чем те, что уже фактически используются при построении этой теории. Дело в том, что аксиоматические теории используют интуитивную идею натурального числа, а также различные правила "следований", "отождествлений" и "различений". Но эти дополнительные средства по существу содержатся в любой аксиоматической теории, хотя и не описываются ими, поэтому нет никаких оснований считать какие-то из них "более сильными" в указанном смысле.

Вторая теорема Гёделя, с точки зрения известного логика А. С. Есенина-Вольпина, вовсе не разрушает надежды на получение таких доказательств, которые основаны на более глубоком рассмотрении этих средств. То есть ситуация с результатами Гёделя намного тоньше и сложнее, чем она представляется математикам и философам науки. Не случайно некоторые математики призывают не верить никаким философским комментариям к теореме Гёделя, поскольку практически все популярные философские комментарии к этой теореме неверны. Основная проблема состоит в том, что в программе Гёделя используется фундаментальная двойственность теории чисел в логике: когда она аксиоматизирована, она становится "объектом" изучения, а с другой стороны, используемая неформально, она является "орудием", при помощи которого могут изучаться формальные системы. Поэтому в окрестностях теоремы Гёделя нет простых и однозначных истолкований.

Современные поиски доказательств непротиворечивости мотивируются по-разному и имеют более серьезные цели, чем просто избежание противоречий. Из второй теоремы Гёделя о неполноте следует, что доказательство непротиворечивости не может быть формализовано. Поэтому ни одна система аксиом не может охватить всех математических истин. Известный российский математик А. Н. Паршин высказался однажды в том духе, что "если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы" [5, с.94]. Теорема Гёделя показывает не только ограниченность логических средств, она говорит о каком-то фундаментальном свойстве мышления, в том смысле, что если мы хотим что-то понять в мышлении человека, то это можно сделать не вопреки теоремам Гёделя, а как раз благодаря им.

Существование альтернативных, отличных от гёделевского, подходов к понятию "доказательства" указывает на реальную сложность перевода неформального понятия на язык формальной математики. Именно в работах Гёделя была доказана неосуществимость идеи универсальной формализации мышления. Его результаты располагаются на границе между неформальной и формальной математикой. Поэтому все еще остается открытым вопрос о методологических выводах, следующих из теорем Гёделя, после успеха, достигнутого коллективными усилиями современных математиков в доказательстве Великой теоремы Ферма.

Литература

1. Непейвода Н. Н. Прикладная логика: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск, 2000. – 490 с.

2. Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах: Эта бесконечная гирлянда. – Самара, 2001. – 752 с.

3. Сингх С. Великая теорема Ферма. История загадки, которая занимала лучшие умы мира на протяжении 358 лет. – Москва, 2000. – 288 с.

4. Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод? – Ижевск, 2001. – 96 с.

5. Паршин А. Н. Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии. – 2000. – 6. – С. 92-109.

Еровенко В. А.
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой общей
математики и информатики БГУ

Михайлова Н. В.
ассистент кафедры математики
Минского государственного высшего
радиотехнического колледжа

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д. 3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2003 год (включая стоимость пересылки) – 45 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2003 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 35 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 45 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Mathematical Education № 4 (27), 2003

Contents