# Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восьмой

№2 (29)

Апрель - июнь 2004 г.

Москва

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

*Периодическое издание в области математического образования*

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения





№ 2 (29), 2004 г.





Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (29), апрель – июнь 2004 г.

# Содержание

**Памяти М. М. Постникова**

*М. М. Постников.* Мысли о школе 2

**Учебное пособие в журнале**

*И. П. Костенко.* Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (окончание)

Лекция 12. Приложения формулы Гаусса 20

Сообщение о выходе книги И. П. Костенко 46

**Учащимся и учителям средней школы**

*С. В. Дворянинов.* Математические заметки

Что стимулировало возникновение понятия графика функции 48

О двух классических теоремах евклидовой геометрии 51

**Содержание образования**

*А. Н. Земляков.* Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий 55

---

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2004 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 23.08.2004 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

## Памяти М. М. Постникова

27 мая 2004 года скончался выдающийся русский математик Михаил Михайлович Постников. Кроме непосредственно научных математических исследований Михаил Михайлович серьезно занимался вопросами математического образования. В частности, он является автором многих замечательных учебных пособий для студентов, а также ряда книг по интересным разделам математики для школьников. В номере 2, 1997 г., нашего журнала, посвященном 70-летию М. М. Постникова, опубликована подборка материалов, отражающая широту творческих интересов Михаила Михайловича. Известно, что Михаил Михайлович уделял много внимания вопросам школьного образования. В настоящем номере мы публикуем “Мысли о школе”, составленные самим М. М. Постниковым из статей и интервью конца 80-х годов.

# Мысли о школе

*М. М. Постников*

Подборка составлена из статей и интервью, опубликованных в 1987-88 гг. в “Литературной газете” (ЛГ) и “Учительской газете” (УГ), самим Михаилом Михайловичем Постниковым. Напомним, что это было время активного поиска путей, по которым пойдет реформа школьного образования. Многие соображения, высказанные Михаилом Михайловичем, не утратили остроты и интереса до сих пор.

## 1. Школа с уклоном в будущее

*(ЛГ, №13(5131) от 25 марта 1987 г.; интервью корреспондента Н. К. Логинова)*

Ежегодно наблюдаю, как тысячи молодых людей штурмуют вуз. Подавляющее большинство остаётся за барьером, то есть получает страшный эмоциональный, психологический, нравственный удар.

Никогда не мог понять, почему мы не бережём молодое поколение и зачем ему начинать самостоятельную жизнь со стресса.

Постоянно слышу упрёки в адрес школы: она не готовит людей для практической жизни, не воспитывает гражданина, гармонически развитую личность. Жду, кто же и когда объяснит, почему школа не отвечает запросам общества. Жалуются на перегрузку, на неудачные программы, методики... А главное противоречие школы как системы остаётся невскрытым.

Между тем оно было заложено, когда после революции из всех типов школ именно гимназия стала прообразом советской школы.

За сорок послевоенных лет школа менялась лишь "косметически" (раздельное обучение — совместное; одиннадцать лет — снова десять; политехническая — снова обычная и т.д.), но никто почему-то не вглядывался в корень её неверного устройства.

Главное противоречие современной школы заключается в том, что её массовый характер и трудовая направленность не сочетаются с устаревшим элитарно-гимназическим принципом изучения "предметов" или так называемых "основ наук". Это противоречие поддерживается всеми специалистами так называемых школьных "наук", и они будут до последнего вздоха защищать свои "основы" в том объёме, какой им удалось протащить в школу на сегодняшний день. И все схватки, все сражения идут по линии "часов", которые то сокращают, то возвращают в школьную программу. И нет в системе народного просвещения специалистов по... народному просвещению, которые сумели бы подняться над ведомственными спорами, чтобы решить проблему глобально: чему и как учить.

Ключом к такому решению, на мой взгляд, является формула из документа ЦК КПСС по школьной реформе: школа должна готовить к жизни.

Забудем про опыт гимназии и чисто теоретически посмотрим, что значит быть готовым к жизни. Это значит, что нужно владеть знаниями и навыками, которые условно можно разделить на четыре полностью равноправных цикла: грамотность, этика, эстетика, здоровье (физическая культура).

**Грамотность.** Это умение не только читать и писать на родном языке. Это такое же знание иностранного языка. Это арифметическая грамотность. Это умение общаться с компьютером, знать язык программирования. Иметь общее представление о науках.

**Этика.** Это воспитание человека для жизни в обществе. Здесь проблемы мировоззрения, поведения, умения ориентироваться в обществе, владеть собой. Это знание законов и социальных норм общества, своих прав и обязанностей как гражданина. Тут и проблемы семьи. И социальная грамотность (куда и как обратиться в обществе для разрешения жизненных проблем).

Если для первого цикла школа в принципе готова, имеет большой опыт преподавания, то второй цикл почти не разработан. Например, литература имеет колоссальное значение для воспитания гражданского чувства. Но сегодня преподают не литературу, а основы литературоведения, а точнее, судя по газетным дискуссиям, "препарирование" классических произведений. Но для второго цикла требуется иной ракурс преподавания литературы: и классика, и современные произведения должны давать лишь материал для размышлений человека о месте в обществе.

**Эстетика.** Это совершенно не изученная, не решённая и практически не начатая работа в школе — воспитание эстетического чувства в молодом человеке. Это снова литература, но опять в ином ракурсе — просто научить любить книгу, возбудить острое желание читать. Это и музыка, пение, и рисунок, графика, живопись. И танец, конечно. В общем, вся эстетическая сфера, без которой воспитание молодёжи нельзя считать полноценным.

Легко объяснить, почему у нас эстетическое воспитание оказалось в загоне. Ученик гимназии получал ещё и домашнее воспитание, барышни непременно пели и бренчали на фортепьяно. В гимназии, взятой как модель государственной единой школы, естественно, не нашлось места для эстетического цикла. Сетка часов осталась почти неизменной. Отсюда и расхожее мнение, что из гимназии почему-то выходили "культурные" люди, а из нашей средней школы — не очень.

**Физическая культура.** Понятно, что гармонически развитый человек должен быть здоровым, владеть своим телом, знать, что происходит в его организме, уметь оказать себе и другим первую медицинскую помощь. Этот цикл абсолютно равноправен с тремя другими, а для всей последующей жизни — чуть ли не самый важный. Не понимаю, почему детей освобождают от уроков физкультуры по медицинским показаниям, когда давным-давно существует лечебная физкультура. Ни один школьник не должен быть лишён этих занятий, но каждый имеет право на индивидуальную программу. Коли перенесших инфаркт лечат физическими упражнениями, то странно освобождать детей от самых жизненно нужных им движений.

Но учитель не должен готовить разрядников в школе, его основная забота — массовость и здоровье учеников. Я бы даже дисквалифицировал учителя, который особое внимание уделяет спортсменам, у них есть своя база и свои тренеры.

Пресловутых домашних заданий быть не должно. Если каждый день посвятить один урок предмету каждого цикла, то никакой нужды в домашних заданиях не будет. Субботу следует отдать физкультуре, быть может, в сочетании с познавательными экскурсиями и турпоходами. Несправедливо загружать детей обычной работой шесть дней в неделю при пятидневке у родителей.

После учёбы в такой школе после 8-9 лет (больше не нужно) общество получит полноценный "продукт" — гармонично развитую личность. В последний год в рамках этического (или, лучше сказать, социального) цикла особое внимание должно быть уделено вопросам профориентации, чтобы 15-летний выпускник мог сознательно выбирать свою будущую специальность.

Вы спросите, а где же наука — математика, физика, химия, биология, история, география? Думаю, одного часа в день, то есть пятого урока, достаточно для общего ознакомления — без подробностей! — с ними.

Ещё раз подчеркну: ни одна из них в отдельности не может быть приравнена (а значит, и уравнена в часах) с названными выше циклами.

Рассмотрим это положение на примере математики. Сегодня она занимает пятую часть всей школьной программы. Кто-нибудь скажет мне: зачем? Кто из вас, нематематиков, решал в быту квадратные уравнения? Кто хоть раз воспользовался теоремой о внутренних углах треугольника? Почему же никто не спросит о тех потерях, которые несут одно за другим целые поколения, не имеющие времени изучать медицину, музыку, ремесло и т.д.? Сколько математики нужно для жизни — столько она и должна занимать детского времени, ни больше, ни меньше.

Только массовым гипнозом могу объяснить тот факт, что никто за десятилетия не взялся оспорить стереотип: математика-де развивает дедуктивное мышление, которое жизненно необходимо культурному человеку. Но ведь это не так! Дедуктивное мышление составляет лишь небольшую долю среди прочих его видов. И требуется оно исключительно учёным-теоретикам. Даже в прикладной математике дедуктивное мышление, как правило, мешает, а главную роль играет мышление рациональное (по "здравому смыслу").

Теперь окинем взглядом так называемую "систему" знаний по математике. Откуда взялась та геометрия, которую изучают школьники? Из Древней Греции. А что за алгебра, которой мы мучаем детей? Это создание пятнадцатого-шестнадцатого веков. Недавно колоссальным напряжением внедрили в школу интегралы (может быть, скоро уберут). Это создание семнадцатого века. Вот и всё. Вы думаете, что в последние триста лет математика не развивалась? Да нет же, последние триста лет — время интенсивнейшего развития этой науки, чрезвычайно богатого, идейного, культурного... Где же её открытия в школьной программе? И о какой вообще "системе" мы ведём речь?

Если сравнить с литературой, то это всё равно, что закончить её изучение былинами и парой летописей. Зачем же называть этот предмет "основами науки", "систематическими знаниями"?

Примерно такое же положение со школьной физикой и химией, хотя из-за описательности многих их частей ситуация здесь полегче. Но всё же кто из нас знает формулу равноускоренного движения или реакцию омыления жиров? Да и не нужно в жизни это знать...

По-моему, учителю обидно пять лет заставлять детей учить формулы, реакции, решать задачи, чтобы выпускник немедленно выбросил их из головы и никогда вновь не возвращался к этим материям.

Думаю, что одного урока в неделю хватило бы, чтобы школьник получил некое представление о математике. Ни в коем случае не "систематичность" её изучения - это всегда будет ложная систематичность (как сегодня). Но именно представление! Нужны живые, непринуждённые рассказы о неевклидовой геометрии Лобачевского, пространствах большой (даже бесконечной!) размерности, о симметрии в алгебре, об экстремумах, об изопериметрах, о парадоксах бесконечного и т.д. и т.п. Умело преподнесённые, все эти темы вполне доступны школьнику начиная с 5-го класса. Много тем есть и для младших классов — орнаменты и бордюры, паркеты и кристаллы, правильные многоугольники и многогранники... Никаких иных целей, кроме повышения культурного уровня, преподавание математики не должно иметь. И отметки здесь неуместны, и экзамен просто недопустим.

Одного часа в неделю достаточно, чтобы дать представление о любой школьной "науке", позволить хотя бы одним глазком взглянуть на её увлекательнейшие пейзажи и возбудить желание к дальнейшим, более детальным экскурсиям.

Историю культурный человек должен знать. Но не так, как её преподают в школе: уйма подробностей, всё засушено-пересушено, ничего не говорит ни уму, ни сердцу — и нет целого представления. Обратите внимание, какой интерес вызывает историческая беллетристика, даже не лучшего качества. Вот симптом неблагогополучия нашего преподавания истории. То есть само прошлое людей интересует, но из сухого учебника они взять ничего не могут и вынуждены черпать сведения из беллетристики, литературы. А богатая историческая литература остаётся вне школы.

Конечно, никакой систематичности (литературоведческой) не должно быть и в преподавании литературы, писатель советского периода должен непринуждённо сменяться классиком, и, наоборот, по разным поводам — несколько раз.

Что касается географии, то — да простят меня специалисты — я разделяю мнение г-жи Простаковой. Во всяком случае, нескольких обзорных лекций-рассказов в течение года вполне достаточно, чтобы дать представление о странах и континентах, климатических зонах, знаменитых путешественниках и экономических принципах международной торговли. Нельзя же десятилетиями делать вид, что телевидения не существует! А разве сравнится один цветной научно-популярный фильм, скажем, об Исландии с параграфом в учебнике, для которого будто специально искали и нашли авторов, не владеющих литературным языком.

Рассказы о науках должны быть поставлены так, чтобы ученик сам захотел узнать больше в свободное время. Открываются неограниченные перспективы для факультативных курсов во второй половине дня (на продлёнке). Здесь же необходимо наладить обучение и трудовым навыкам (не профессиям!). Нужно, чтобы ученик мог починить проводку, сменить у крана прокладку, сколотить скворечник, врезать замок, приготовить обед и т.п.

Спросят: а кого набирать в вузы? Откуда мы возьмём инженеров, учителей, гуманитариев, физиков? Тут другое дело, которое не надо путать со школой.

Подготовка кандидатов в студенты — дело настолько важное, что его нельзя доверять Министерству просвещения. Просто потому, что это не его задача. И до тех пор, пока оно, это министерство, будет стоять на распутье — готовить ли молодое население к жизни или к дальнейшей учёбе в вузе? — оно будет губить оба дела. Его контингент — дети от шести до четырнадцати лет. Оно обязано выпустить их из школы здоровыми, воспитанными, культурными, умелыми. Без отвращения к учёбе. Желательно — ориентированными на определённую профессию, с учётом личных качеств, интересов и способностей.

После этого за дело должны взяться другие — Комитет по профтехобразованию, Министерство высшего и среднего специального образования, а также Министерство культуры.

Основная масса подростков поступает в училища и техникумы, где она получает профессию. Здесь и нужно преподавать основы тех наук, которые нужны профессии. Если школа справилась со своим делом, то никаких других предметов не нужно. Только специальные знания — до мельчайших подробностей, чтобы от зубов отскакивало! Сейчас же мы потому и выпускаем из техникумов неполноценных специалистов, что они распыляют внимание на ненужные школьные предметы.

Сейчас — после реформы — старшие классы школы оказались в ложном положении. Фактически у них одна задача — готовить в вузы, но с этой задачей они не справляются.

Позвольте же вузам самим готовить своих будущих студентов! Зачем нам весь первый год “выбивать” из студентов ошибки школьного образования, школярское мышление, зачем 17-летних учить работать с азов, когда проще этому выучить 15-летних? Дайте вузам набрать, скажем, по 300 человек на каждые 200 мест факультета для двухлетнего предварительного обучения. Назовите эти два года учёбы “подготовительными курсами”, или как хотите иначе, колледжем, например. Вот где мы начнём систематическое изучение науки с самого начала и в формах, нам нужных! Иногородние одарённые дети могут жить в интернатах при вузах. Компьютер будет непрерывно следить за успехами претендентов и располагать их в ряд. И если к моменту перехода — безэкзаменационного — в основной состав студентов ученик имеет 215-й номер, то никакого стресса он не испытает: сам видит, что успехи его недостаточны. Сама собой отпадает лотерея вступительных экзаменов, исчезают неврозы и ломка судеб. Этот 215-й ученик не пропадёт, он всего лишь — выпускник “спецшколы” с уклоном, если говорить нынешним языком. Но это не мифический “уклон”, а глубокие знания, которые не достаточны для вуза, но годятся для работы в среднем звене.

Зато вуз получит студентов, которых он знает и в которых уверен. Это, в частности, решит и проблему отсева.

Конечно, определённый процент мест надо оставить для абитуриентов “со стороны”. Здесь экзамен — и очень строгий! — необходим. Но такой абитуриент заранее знает, на что он идёт...

Всё это явится стройной и эффективной системой обучения и воспитания нашей молодёжи — строителей нашего будущего.

## 2. Как построить школу будущего

*(УГ №138(8919) от 19 ноября 1987 г.; интервью корреспондента А. О. Зверева; газетные подзаголовки убраны)*

*- Михаил Михайлович, хотелось бы начать наш разговор с того, что сейчас особенно волнует общественную педагогическую мысль. Как разрешить возникшее противоречие между необходимостью учить всех и индивидуальными способностями ребёнка? Возможно ли соединить индивидуальное (в зависимости от склонностей ученика) и общее направление образования?*

- Одним из основных достижений нашей школы всегда считалось её единство (единые программы, преподавание, требования), поскольку в нём находит выражение идея социальной справедливости и равных прав. Но существует ли это единство на практике? Сравните какую-нибудь школу в Москве и приспособленную под занятия сельскую малокомплектную школу! Поэтому в целом ряде публикаций в последнее время задаётся вопрос: не лучше ли честно признать это единство фикцией и вернуться к системе школ, дающих в зависимости от склонностей учащихся и их способностей образование, по-разному ориентированное (в гуманитарном или естественнонаучном направлении) и даже различающееся по качеству и глубине?

Но как определить склонности ребёнка? Его увлечения (если они уже есть) часто очень неустойчивы: сегодня это биология, завтра — история, послезавтра —

техника. Даже устоявшись, они не застрахованы от всевозможных неожиданностей. Яркий пример — Гаусс, великий учёный, двести лет назад заложивший фундамент почти всей современной математики. До восемнадцати лет он собирался стать филологом, усердно изучал языки и другого будущего для себя не представлял. Но в возрасте семнадцати лет ему удалось решить стоявшую ещё со времён Евклида проблему правильных многоугольников, и — раз! — он резко меняет направление всей жизни, становится профессионалом-математиком. А что было бы с Гауссом, учись он в современной спецшколе с языковым уклоном? Во всяком случае, все формальные пути к математическому поприщу были бы для него закрыты.

Я не говорю уже о том, что разделение школ вызовет их деление на престижные и непрестижные и приём в первые будет в основном зависеть не от способностей ученика, а от социального статуса и пробивной силы его родителей.

В Англии практикуется разделение одиннадцатилеток на два потока при помощи социальных тестов. В итоге одни оказываются в школах повышенного уровня, открывающих прямую дорогу в вузы, другие же — в массовой школе, кончив которую, ни в какой вуз не поступишь. Но что это — оценка способностей или качества домашней подготовки, ведь в школы высшего уровня попадают в основном представители привилегированных сословий?

А как устраивать специализированные школы в малых деревнях?

Словом, по всем статьям эта идея явно порочна.

Вместе с тем, если убрать из школы пресловутые "основы наук", единство школы — реальное, а не прокламируемое! — безусловно, окажется достижимым.

*- Но обеспечив такое единство, не оставим ли мы без знаний — и, значит, фактически безграмотным — население всей страны?*

- А много ли знаний выносит из школы сегодняшний ученик? И какая их часть остаётся в его голове через пять лет? Программы наши хороши, но как они реализуются?

Моё предложение сводится к тому, чтобы дать школе реальные, выполнимые программы, формирующие полноценного человека и полезного члена общества.

Ребёнок получает колоссальное количество информации, так сказать, самоходом. Только часть её (своя для каждого) нуждается в систематизации. Такую систематизацию вполне могут обеспечить ПТУ, а для ребят, идущих в вузы, — двухтрёхлетние подготовительные курсы (колледжи) при них.

*- К сожалению, излагая свой проект, вы почти не уделили места рассказу об организации учёбы в колледжах. Нельзя ли поподробнее поговорить об этом?*

- Приём в колледжи должен быть открыт для всех желающих без каких-либо вступительных экзаменов, а в особых случаях даже — страшно сказать! — без аттестата об окончании школы. Интенсивный опрос (по 60-80 ответов в неделю), результаты которого немедленно заносятся в память компьютера, позволит за полмесяца выяснить знания и способности студентов и присвоить каждому порядковый номер (рейтинг). Студенты со слишком низким рейтингом, понявшие бесперспективность дальнейшего обучения, будут непрерывно отсеиваться. Преимущество (но не во время поступления, а в ходе учёбы) тут будут иметь более подготовленные. Поэтому необходимым дополнением к системе колледжей должна стать гибкая, широкая и разветвлённая сеть предварительного внешкольного обучения “второй половины дня”, в определённой мере аналогичная существующей ныне сети детского музыкального образования и включающая в себя индивидуальные занятия с репетитором, учёбу в кооперативных училищах, работу в кружках и факультативах при школах и любые другие формы познавательной активности. Главное — не допустить сюда чиновника с его регламентационным прессом и — никакой формализации! Давать систематические знания надо очень осторожно, только если сами дети этого захотят.

- *Но как это будет согласовываться с требованием закона о всеобщем среднем образовании?*

- Его фактическое невыполнение привело к тому, что всё большее число людей сегодня задаётся вопросом: не было ли принятие этого закона преждевременным и не пора ли в связи с этим сократить школьное обучение до семи-восьми лет?

- *То есть тут вы полностью сошлись во мнениях с критиками среднего образования?*

- Вовсе нет! На мой взгляд, в наших представлениях о среднем образовании мы не забежали вперёд, а наоборот, отстали лет на триста, упорно продолжая отождествлять среднее образование со школьным. На самом же деле основной запас представления о жизни (и даже о науках) ребёнок уже давно получает вне и часто вопреки школе. Я считаю, что среднее образование должно быть десяти- или даже одиннадцатилетним, но состоять при этом первые 7-8 лет из двух частей — утреннее, школьное (в рамках намеченных в проекте четырёх циклов) и послеобеденное, внешкольное, когда ребёнок пробует “на зуб” все разнообразные науки и умения.

Затем обучение завершается в ПТУ или колледже, где подводятся итоги и осуществляется систематизация определённого — необходимо узкого! — раздела науки. Таким образом, тяжесть среднего образования распределится между Минпросом, Госпрофобром, Минвузом и различными неформальными видами индивидуального и кооперативного обучения.

- *А живущие вдалеке от вузовский городов деревенские ребята должны будут покинуть дом и в лучшем случае — жить в интернате (со всеми вытекающими отсюда организационными, психологическими трудностями)?*

- Проблем, конечно, будет здесь много (по налаживанию быта, воспитания), а с другой стороны — живут же сегодняшние учащиеся ПТУ в общежитиях! Но давайте посмотрим на теперешнюю ситуацию в деревенской школе трезвыми глазами. Вот типичная в этом смысле история.

В глухой сибирской деревушке, в школе с острой нехваткой специалистов, математику не от хорошей жизни (заодно с физкультурой) преподаёт бывший сержант-десантник без высшего образования. Вдруг появляется в его классе очень талантливый парень Вася, которые все задачи щёлкает, как орехи, и любые задания выполняет. Все восторгаются: вот будущий наш Ломоносов! Посылают Васю в пединститут на целевое обучение. Но целевой студент должен получить на экзаменах хотя бы тройку. Вася же (при таком преподавании) получает одни двойки, поэтому в вуз не попадает и возвращается назад, заменив — поскольку в математике он чувствует себя всё же увереннее — сержанта, и с тех пор он — деревенский учитель. Практически сейчас у Васи нет шансов получить высшее образование (если, конечно, он не попадёт в интернат при МГУ или НГУ). В то же время система, которую предлагаю я, даёт ему этот шанс.

В той же деревне может оказаться инженер леспромхоза, который знает математику и согласен немножко подзаработать или просто из уважения к юному дарованию с ним позаниматься. (Сейчас это было бы вмешательством в дела школы). Летом Вася поедет в соседний город или большое село и там у кооперативных или индивидуальных репетиторов всегда найдёт возможность что-нибудь да выучить. Этого ему будет достаточно, чтобы попасть в колледж и хорошо там заниматься.

*- Многие читатели спрашивают: будет ли полноценным образование, если систематически не учить детей математике? Как входить без математики в век компьютеров?*

- Общение с компьютером возможно и без знания математики, как вождение автомобиля — без знания его устройства. Практическое же обучение работе с компьютером (предмет компьютерной грамотности) является неотъемлемым элементом моего первого цикла.

*- И всё же как быть с царицей наук? Ведь каждый школьник знает, какая из них "ум в порядок приводит" или, говоря словами простых оппонентов, осуществляет ту целенаправленную тренировку, без которой мозг остаётся хилым, пассивным накопителем?*

- Мнение, что математика развивает мозг, на мой взгляд, абсолютно неверно.

Математика — вещь формальная, а в жизни на умении обращаться с формальными системами далеко не уедешь. Мозг развивает не математика, а живое общение, жизнь. Единственное, чему учит математика, — это дедуктивному мышлению: умение выводить из одной системы посылок другую. Но даже в прикладной математике это умение недостаточно. Главным является рациональное мышление: здравый смысл, преломлённый на ситуацию. То есть и здесь здравое мышление — самое важное. Оно должно тренироваться всей школьной (и нешкольной) жизнью.

*- Другая группа ваших критиков пришла, мягко говоря, в недоумение по поводу того, что вы отпускаете на науку в школе только по одному часу в день. По их мнению, уж лучше давать на уроках столь нелюбимые вами основы наук, чем их суррогат...*

- А никакого суррогата наук и не нужно: я именно никаких наук (не входящих в четыре цикла) и не хочу давать в своей школе, это — цель колледжей. Школьные же уроки математики, химии или физики должны представлять собой лишь общий разговор, экскурсию по саду науки, обзор её пейзажей без каких-либо требований что-нибудь выучивать или даже понимать.

*- Любой учитель тут не выдержит: можно ли, гуляя по саду, освоить систему сложнейших представлений, воспитать усидчивость, волю к постижению научных знаний, умения, навыки, наконец?*

- Я уже говорил, что цель школы — возбудить тягу к знанию, дать умение узнавать. Живые рассказы о науках будут лишь подстёгивать любопытство и ориентировать ученика в мире науки и техники. Ничего другого и нельзя ожидать от одного в неделю, к тому же пятого, урока.

Воспитание же усидчивости и воли вполне может быть обеспечено, скажем, на уроках языка и музыки, в производительном труде вне школы.

- *Новое сомнение — отбор кандидатов в студенты в колледжах при помощи компьютера. Не вызовет ли это нечто похожее на абитуриентский стресс, только переживаемый в более раннем возрасте?*

- О том, попадёт или не попадёт учащийся колледжа в институт, он будет знать заранее. В компьютерном табеле он двухсотый, а для поступления в вуз нужен рейтинг сто. Он хочет свой рейтинг повысить, происходит состязание, в ходе которого каждый приучается оценивать свои силы. А если вы хотите вовсе лишить человека испытаний — оберните его ватой и положите в ящик.

Я категорически против сохранения "вступительных стрессов" в их сегодняшней форме. Они не только часто наносят травму на всю жизнь и отрезают дорогу в вуз талантливым ребятам, но и по своим фактическим результатам могут быть приравнены к бросанию монеты.

А в колледже два-три года ученик непрерывно имеет информацию о своём рейтинге и всегда будет знать, на что ему рассчитывать.

Правда, при номере пять у него может закружиться голова ("Да я всё это левой ногой сделаю!"), и он перестанет работать. Но тогда рано или поздно он обнаружит, что уже не пятый, а сорок пятый или сто двадцать пятый, и это будет ему своевременным сигналом тревоги.

Вполне вероятно и такое: человек сегодня имеет сороковой номер и вдруг через неделю обнаруживает, что отброшен на шестидесятый. В чём дело? Он же прекрасно отвечал! А просто двадцать других ребят поднатужились и его обогнали. Ясное сознание, что и такая ситуация возможна, естественно держит учащегося в тонусе, в напряжении — но так и должно быть. Ведь жизнь состоит в том, чтобы быть в напряжении, а не в расслабленном состоянии. Но не в таком, конечно, бешеном, как когда идёшь на мировой рекорд или сдаёшь экзамен в наш вуз.

- *Тут попутно было бы интересно услышать ваше мнение и о действующей системе школьных отметок.*

- Она противоречива: с одной стороны оценивает ученика, а с другой — учителя, и в результате мы имеем процентоманию, многие другие беды. Оценки необходимы для ученика — он должен знать свой уровень знаний в оценке учителя, но их не надо формально фиксировать в дневнике или в классном журнале. Во всяком случае они не должны сообщаться "наверх".

- *А как же тогда судить о работе учителя?*

- Один из множества способов — организовать "госприёмку", систематические экзамены: переходные, внутри года или даже четверти. Они должны проводиться без участия учителя и иногда даже совершенно неожиданно. Их результаты детям не сообщаются, а учителю — в зависимости от ситуации. В конце года на педагогическом совете проводится аттестация учителей.

Другой способ — анонимные опросы педсовета, родителей и учеников: удовлетворяет ли их тот или иной учитель? Если учитель получает меньше трети голосов “за” — ставится вопрос о его профессиональной непригодности.

*- Но не подорвёт ли это авторитет учителя?*

- Авторитет нельзя ни получить, ни подорвать “по приказу”. Учитель без авторитета — нонсенс, и от таких специалистов нам надо избавляться.

От авторитета учителя надо отличать авторитет учительской профессии. Он у нас упал недопустимо низко, а предпринимаемые меры по его повышению (увеличение зарплаты и т.п.) явно недостаточны. Я уже говорил об этом в передаче “Родительский день — суббота”. Надо не только резко увеличить вилку заработной платы учителей, но, скажем, принять решительные меры по улучшению их быта (особенно на селе). В качестве временной меры можно для начала, скажем, установить такой порядок. Если педагог приезжает в село, а для него не готова хорошая квартира со всем обеспечением, то председатель колхоза или другое, быть может, ещё более значительное лицо должны непременно выехать из своего дома, чтобы поселить туда учителя. Если раз-другой так сделать, то, думаю, проблема жилья для сельского учителя отпадёт.

*- Михаил Михайлович, похоже, в ходе нашего разговора ваша “школа с уклоном в будущее” обнаруживает всё более реальный, сегодняшний уклон, или вы так не считаете? Как бы вы оценили перспективу реализации вашей идеи сегодня, в нынешних условиях?*

- Обвинение в том, что я написал научно-фантастический рассказ, повторяется довольно часто. Хотя, на мой взгляд, проект можно довольно быстро превратить в реальность, потому что всё уже созрело в недрах, всё есть: опыт музыкальных и художественных школ, многочисленный отряд репетиторов, подготовительные курсы при вузах и недовольство безобразной подготовкой, которую даёт выпускникам школа. Нужно просто упорядочить курсы при вузах, объединить, скооперировать их и нацелить не только на непосредственную подготовку к экзаменам, но и на систематическое изложение необходимых предметов. Такая переориентация реальна, если инициативу возьмёт на себя, например, Министерство высшего образования или сами вузы.

Но для начала, конечно, нужны люди, которые бы этой идеей загорелись и занялись её воплощением.

Два-три года уйдут на подготовку неформальных кооперативных училищ, создание колледжей, а тогда уже и школа быстро сама перестроится и оживёт (конечно, главные трудности будут с весьма запущенными у нас эстетическим и этическим циклами). Всего же — если сразу, всерьёз и активно взяться за такую перестройку — на её осуществление понадобится, думаю, пятилетка.

*- Впрочем, реформ наша школа пережила немало. Почему же многие считают, что каждая из них лишь понижала уровень образования в стране?*

- Да потому, что они совершались — и совершаются! — без общей концепции и некомплексно. Вот и сейчас имеются предложения урезать математику в каждом классе на час в неделю. Существует и альтернативная программа В. Хадаева из 315-й московской школы, где сокращение ещё ощутимее. И авторы этих программ — как мне стало известно — ссылаются, в частности, на меня. Но я-то — совсем о другом!

Безусловно, действующая программа такова, что, имей педагоги на то разрешение, многие из них могли бы полностью изложить годовой материал за четверть и три четверти заниматься чем угодно, развивая творческие потенции ребят. Программа рассчитана на очень тупого учителя и самого глупого ученика. Но введение сейчас новой урезанной прграммы по математике — вещь вредная, и я категорически против неё. Нельзя проводить никаких изменений, пока не существует гарантий, которые смогли бы сгладить возможные катастрофические последствия экспериментирования со школой. Реально для этого нужно лишь широко распространить описанную мной систему широкого неформального внешкольного обучения, никак не связанную с аппаратом Минпроса. Тогда уже в самой школе поймут, что многому из того, что она даёт, учить не нужно и начнут действительно учить жизненно необходимым вещам.

- *В чём же, на ваш взгляд, причины пробуксовки школьной реформы?*

- По существу школьная реформа была первой ласточкой перестройки. Представьте себе, что было бы с перестройкой хозяйственного механизма, если она была бы поручена министерствам... Чтобы реформа школы была успешной, нужны решения на более ответственном уровне.

Что тормозит реформу школы? Некоторые говорят: плохие люди. Надо заменить министра А на Б, он хороший человек, энергичный, он всё сделает. Или: "Надо заменить директора Института методов обучения товарища В на Г", и прочее, прочее. Это не совсем так. В министерстве сидят и люди толковые, и умные, и знающие, но они знают в своём направлении, в рамках той системы, в которой привыкли жить и работать. Но в перестройке-то нуждается сама система, организация школьного обучения. И такую реорганизацию не могут осуществить люди внутри, а только находящиеся вне и над министерством — как это мы в промышленности и видим.

- *Михаил Михайлович, а каким видится вам идеальное взаимодействие между школой, районо и министерством?*

- Наш Минпрос — плоть от плоти всей административно-командной системы прошлого, и подобно хозяйственным министерствам он сейчас оценивает работу учителя не по конечному результату, а по этапам. Так же, как заводам, школе нужна свобода манёвра, невмешательство в её дела по пустякам.

Все её методические вопросы должны решаться педсоветом. И никто — ни гороно, ни районо, ни министерство — не вправе вмешиваться в его работу. Ни в коем случае! Обязанности министерства — давать рекомендации, учебники на выбор педсовета и учителя. А уж как преподавать — дело педагога. Министерство создаёт новые школы, комплектует их; однако вся кадровая работа уже сложившейся школы — опять дело педсовета. Педсовет, родительский и ученический комитеты — три кита, на которых должна стоять школа. Роль и функции каждого из этих компонентов трудно предугадать заранее, это должно решаться на месте, на основе очень гибкого устава школы, далёкого от мелочной регламентации.

Как проверять работу школы? По конечному результату! Чтобы оценить этот результат, нужны систематические экзамены "госприёмки".

*- Всё острей и шире идёт в стране дискуссия о роли педагогической науки в жизни общества. А каковы ваши соображения на этот счёт?*

- Точек зрения по этому горячему вопросу в последнее время высказывается немало, в том числе и среди моих коллег. Думаю, читателям небезынтересна будет позиция некоего условного (но на девяносто процентов всё-таки живого) профессора Е., вобравшая мнения очень многих из них. Она такова.

Наша педагогическая наука — явление совершенно уникальное. Нигде в мире ничего подобного просто нет. Есть instruction of teaching — то, что у нас называется частной методикой: приёмы и методы, которыми пользуются учитель и школьный коллектив. И есть ещё так называемая philosophy of education — философия образования (то, чем я в данную минуту занимаюсь; при этом я совершенно не хочу сказать, что занимаюсь педагогической наукой).

Вы возражаете: ну как же! Педагогическая наука не выдумана, она существует. Сколько издаётся диссертаций, книг, исписывается бумаги, сколько людей трудится в этой области! Но ещё больше книг и диссертаций защищается ежегодно по астрологии, скажем, во Франции. Их существование, однако, ещё не означает, что астрология — наука.

Другой способ ответить, наука это или нет, — провести аналогию, например, с электроникой. Электроника — наука, потому что благодаря ей мы смотрим телевизор. Электроника развивается: от чёрного изображения к цветному. Учёный-электронщик может вам чётко объяснить, почему один аппарат лучше другого. А может ли специалист-педагог сделать то же самое по отношению к школьным учебникам?

Если существует наука педагогика, она должна иметь научные критерии, тесты для определения качества учебника, какие существуют в электронике для определения качества телевизора. Конечно, качество телевизора можно оценить и без всякой науки — просто включив его в сеть. Фактически тем же методом сейчас оцениваются учебники — на основе их практического использования. Но если вы хотите определить качество учебника заранее, нужна наука, а не комиссия, где голосуют, хороший это телевизор или плохой? Это уже одно доказывает отсутствие педагогической науки.

Безусловно, в академии есть институты, которые занимаются делом — проблемами дефектологии, школьной мебели, гигиены. Хотя хочется спросить: а почему, собственно, конструирование школьной мебели — это наука? Впрочем, чтобы какое-нибудь полезное дело получило у нас статус и финансирование, по-видимому, необходимо назвать его наукой...

Итак, поскольку современная советская педагогика находится на уровне астрологии, нужно Академию педнаук закрыть, людей, которые ещё могут работать, послать в школы, а тех, кто уже безнадёжно оторвался от школы, отправить на пенсию, даже если возраст ещё не подошёл. Их деятельность за зарплату обходится дороже, чем если бы они получали пенсию — даже в полном объёме зарплаты. Стало быть, лучше от них откупиться!

*- Здесь, Михаил Михайлович, вы входите в полемический запал...*

- Не забывайте, что это не моё мнение, а профессора Е.! Моё мнение другое.

Хотя я во многом согласен с Е., но всё же не полностью. Сравнение педагогической науки с астрологией не представляется мне удачным. Лучше, по-моему, сравнить её современное состояние с состоянием медицины XVI века в той же Франции.

В то время уже существовало преподавание медицины в университетах и были доктора медицины — знатоки трудов Галена и Гиппократа. Но лечили они, скажем, бьющихся в лихорадке скарлатинозных детей погружением в холодную воду и в лёд. Известный доктор медицины парижского факультета сорок лет боролся со скарлатиной этим способом. Все дети от его лечения умирали. Но он был очень упрямый научно ориентированный человек, и однообразие результата не мешало ему продолжать "эксперименты". Были, конечно, "врачи от бога" как среди докторов медицины, так и вне официальной науки. Впрочем, недипломированных самоучек, которые иногда делали просто чудеса, доктора медицины, как правило, презирали, преследовали, гоняли из города в город — в точности, как это происходит сейчас с некоторыми педагогами-новаторами. Параллель здесь, по-моему, очень точная, и её можно продолжать очень глубоко. Достаточно сравнить схоластику средневековой медицины со схоластикой наших педагогических сочинений.

Предположим, что, имея какое-то влияние на прошлое и пользуясь им, мы закрыли все эти схоластические медицинские факультеты и отлучили учёных докторов медицины от больных. Что бы произошло? Непрерывная цепь развития науки прервалась бы, и в настоящее время мы бы не имели современной научной медицины с её бесспорными достижениями. Поэтому механически пресекать, как предлагает профессор Е. и его единомышленники, у нас развитие педагогики было бы, по-моему, неправильным. Но с другой стороны, имей мы возможность воздействовать на того врача, который сорок лет убивал детей, — пустили бы мы его к постели больного? И лечения кровопусканием, когда по три литра крови выливалось отчаянными адептами этого метода (и люди от этого тоже умирали) мы бы тоже не приняли.

- *Так как же извлечь из истории необходимый урок?*

- Академию педнаук надо всё же сохранить — правда, в очень ограниченном объёме — для развития того, что в будущем станет наукой. Но полностью лишить её какого-либо влияния на школу! Чтобы не портили детей. Если у них возникнут какие-нибудь предложения, как нужно преподавать конкретно, — пускай обращаются в совет школы и только в случае его согласия проводят свой эксперимент, но без всякого давления со стороны Минпроса.

С течением времени, после того, как учёные педагоги завоюют в школе авторитет, Академию педнаук можно будет постепенно и расширять — в чёткой зависимости от её реального вклада в практику образования.

## 3. Больше реалистичности!

*(УГ №122(9059) от 15 октября 1988 г.; интервью В. С. Лысенко)*

Недавно были представлены для обсуждения два проекта концепций общего среднего образования — концепция ВНИКа "Базовая школа" и концепция АПН СССР (УГ №100(9037) от 23 августа 1988г. и УГ №101(9038) от 25 августа 1988г.).

Концепция АПН столь же схоластична и не ориентирована на практику как вся деятельность академии, и служить основой для содержательного обсуждения не может.

Этого нельзя сказать о Концепции ВНИКа, в которой гораздо больше серьёзности и обдуманности в подходе к проблемам школы и путям перестройки народного образования, и, что особенно важно, творческий опыт явно преобладает над пустым теоретизированием, хотя её авторы тоже отдали дань былым призывам и заклинаниям.

Глубоко продумав почти все основные вопросы перестройки школы, ВНИК кое-где остался на старых позициях "академической педагогики". (Быть может, члены ВНИКа не успели выработать единое мнение по всем позициям и пошли на временный компромисс между собой, скрыв недоработанные вопросы за лесом трескучих фраз).

В первую очередь это касается идеи школы III ступени. Зачем эта ступень нужна, в концепции ВНИКа толком не объясняется. Говорится, например: "Для обеспечения более глубокой дифференциации обучения школа III может ввести одно или несколько направлений" (далее перечисляются эти направления), но не сказано, какую цель преследует дифференциация. Между тем совершенно ясно, что имеется в виду подготовка к учёбе в вузе.

Но тогда и отбросить надо всякие недомолвки, не боясь возможных упрёков от ретроградов, и сказать прямо: два года отдаются школьникам для изучения специальных предметов, соответствующих тому или иному вузовскому профилю. А если так, то кому, как не вузу, организовать это изучение, сообразуясь со своими потребностями и возможностями. Тем самым школа III ступени станет, по сути дела, двухгодичными подготовительными курсами. И ничего страшного тут нет, сама жизнь диктует такую форму. Тогда, кстати, и конкурсные экзамены не понадобятся: если ученик прошёл специальную подготовку, значит, он может учиться в вузе, иначе какой смысл в этой подготовке...

Наибольшие возражения вызывает раздел Концепции, посвящённый трудовому обучению и воспитанию. По этому вопросу Концепция ВНИКа не содержит ничего нового, и здесь она неотличима от Концепции АПН. Всё сведено по существу к производительному труду, хотя и промелькнуло что-то насчёт "познавательного" и "умственного" труда. Говорится: "Школьники должны быть участниками законченного трудового цикла с понятным им и полезным результатом". "Трудовая ориентированность школы призвана дать обобщённые трудовые умения, способы практической и познавательной деятельности, помогать осмысливать трудовые процессы в концепции культуры труда". Всё это — традиционный набор громкий лозунговых фраз, за которыми не видно практического смысла...

Вообще с понятием труда в нашей педагогике давно творится что-то неладное. Когда после революции вырабатывалась концепция единой трудовой школы, то первое, что определяло подход к построению новой школы, была естественная реакция на прошлое: наша школа не должна растить белоручек. Теоретическим обоснованием этого подхода явился вульгарный силлогизм: труд создал человека из обезьяны, а потому труд развивает, воспитывает и т.д. Практическое же воплощение этого принципа, несмотря на неимоверные усилия, колоссальные затраты, неоднократные постановления на самом высоком уровне, ничего хорошего в массовом масштабе за 70 лет не дало. (Тезис о воспитывающей роли труда проник из школы в исправительные заведения и тоже — как мы теперь узнали — с катастрофическими последствиями...)

На самом же деле этот тезис ложен: труд как таковой не может ни воспитывать, ни развивать, ни облагораживать. Каждый труд возможен только для достижения определённой цели: избежать наказания, заслужить лишнюю миску баланды, заработать деньги, помочь ближнему своему, выполнить свой долг перед страной, народом или всем человечеством, достичь творческого успеха.

Стремление к цели преодолевает отрицательные стороны труда, заставляет человека трудиться. Широко распространённая неудовлетворённость трудом связана в первую очередь с недостаточно развитой его социальной мотивацией, которую, как и всякую психологическую способность, необходимо долго и тщательно воспитывать...

На первых порах труд может мало отличаться от игры. Но с самого начала ребёнок должен видеть его результаты и ощущать его общественную значимость, выражаемую в форме похвалы и — страшно сказать! — обязательно оцениваемую в денежном выражении. Подкреплённый таким образом труд надо мало-помалу усложнять и всё дальше уводить от игры. Это постепенно воспитывает волевые качества, и внутренняя приемлемость любого, даже самого неприятного — но социально обусловленного! — труда глубоко внедрится в подсознание и сделается внутренним императивом. Это и есть настоящая цель так называемого трудового воспитания.

Но ясно, что в условиях массовой школы эту программу осуществить невозможно.

Конечно, есть школы, в которых трудовое воспитание успешно осуществляется, — подобно тому, как даже в самые тяжёлые для нашего сельского хозяйства времена существовали колхозы-миллионеры. Таким школам честь и хвала. Но для большей части наших детей необходимо предусмотреть их непосредственное участие в окружающей жизни и производительном труде.

Сравнительно недавно уже была законодательно разрешена трудовая деятельность четырнадцатилетних. Но этого мало! Не надо вообще регламентировать возраст. Если ученик начальной школы хочет (и может) заработать себе на мороженое, надо дать ему такую возможность. Он мог бы продавать то же мороженое, разносить газеты, подстригать клумбы и т.д. и т.п. Важно, чтобы труд был посильным, доставлял удовлетворение и не был слишком продолжительным. Естественно, что здесь необходимы определённые организационные формы, чтобы исключить сверхэксплуатацию детей и не нанести вреда их здоровью (физическому и психическому). Не нужно только устраивать бюрократический контроль и ограничивать инициативу массой детальных инструкций.

Наконец, я ещё раз хотел бы обратиться к некоторым истинам, до сих пор, к сожалению, игнорируемым.

Чего, вообще говоря, мы хотим от школьника? Мы хотим, чтобы он владел родным языком, был достаточно грамотным, умел оперировать числами — без этого прожить невозможно или, во всяком случае, трудно. Грамотность должна быть и техническая: школьник должен уметь пользоваться простыми инструментами и обращаться, к примеру, с электроприборами; стыдно, если подросток не умеет починить утюг, заменить "пробки" и т.п. Грамотность должна быть и компьютерная: сейчас во всём мире компьютер встречается чаще, чем пишущая машинка. Компьютерная революция нашу страну не минует, а мы должны научиться видеть завтрашний день и быть готовыми к нему.

Особое внимание надо обратить на преподавание национального языка. Обязательно надо знать язык народа, среди которого живёшь. Тем более — своего народа. Есть такие представители народов СССР, которые не знают своего языка или знают его плохо. Это безобразие. Каждый человек обязан знать язык своего народа, а также и русский — как язык межнационального общения. Русский или грузин, живущий, скажем, в Уфе, должен знать язык и культуру башкирского народа, а башкир, живущий в Грузии, обязан — чисто по-человечески — знать грузинскую культуру и говорить по-грузински. Вместе с тем грузин в Уфе должен иметь возможность учить своих детей грузинскому, а башкир в Тбилиси — башкирскому языку. Без этого всякие разговоры об уважении одной нации к другой — пустой звук.

Всё это в Концепции должно быть учтено.

Школа обязана руководить социализацией ребёнка, чтобы он знал и понимал мир, в котором живёт. Как это практически осуществлять, сказать пока трудно, однако некоторый опыт в этом деле есть.

Можно, например, устраивать дискуссии по материалам газет и обсуждать текущие политические события, не опасаясь, что школьники могут говорить "не то". Можно устраивать диспуты-турниры: одна группа школьников защищает какую-нибудь политическую доктрину, систему, идеологию, а другая выступает как оппонент. Скажем, можно обсуждать вопрос, хорошей или плохой политической системой является монархия, и одни защищают её, а другие отрицают, выдвигая, например, республиканский строй. А потом группы меняются ролями... В таких диспутах школьники приобретут значительно больше знаний и — главное — более глубокое понимание сложных политических вопросов, чем из учебника, где всё раз навсегда определено.

К сожалению, у нас пуще огня боятся учителя обсуждать с детьми вопросы политического свойства, особенно такие, по которым нет определённого решения или указания "сверху". Мы слепо что-то утверждаем и так же слепо отрицаем. Но чтобы отрицать, надо хорошо знать, что именно ты отрицаешь, надо понимать логику отрицаемого — без этого ни о каком плюрализме нечего и говорить. Понять логику другого — значит признать право другого на эту логику. Это и есть реальный гуманизм. Это и есть реальная демократия.

А пока что наши педагоги боятся думать даже о таких вещах, как политические диспуты, не говоря уже о спорах на темы, связанные с религией. Наш ученик твёрдо знает, что "бога нет", но это до тех пор, пока ему не встретился хорошо подкованный теолог, который в два счёта может обратить нашего "атеиста" в истово верующего — по простой причине: школьник наш привык жить в одном измерении, в одной логике, и других измерений, других логик не знает.

Мне кажется, эта проблема очень важна, и её следовало бы рассмотреть особо. Чтобы концепция общего среднего образования была документом по-настоящему действенным, в ней должны быть учтены все ныне существующие виды робости, боязни, страха — эмоций, которые мешают реалистичному взгляду на проблемы педагогики и от которых школьный учитель, как правило, самостоятельно избавиться не в состоянии — надо ему в этом помочь.

Учебное пособие в журнале

# Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений (окончание)

*И. П. Костенко*

Завершаем публикацию учебного пособия по теории вероятностей. В данном номере публикуется лекция 12 с соответствующими упражнениями. Лекции 10, 11 опубликованы в номере 1(28) за 2004 г. В ближайшее время пособие выйдет отдельной книгой, см. рекламное сообщение в конце лекции.

## Лекция 12. Приложения формулы Гаусса

В журнальной публикации опущена таблица значений функции Гаусса $\varphi(x)$. Ее можно найти, например, в [5], см. список литературы в конце лекции.

В предыдущей лекции была отмечена особая роль нормальных (Гауссовских) распределений в теории случайных величин и ее приложениях. Математический инструментарий, построенный при их исследовании (формулы Гаусса и Лапласа), позволяет решать многие практические задачи.

В данной лекции мы рассмотрим задачи, связанные с часто встречающимися биномиальными распределениями, и задачу о точности и надежности оценок $m^*$ и $D^*$ математического ожидания и дисперсии произвольной с.в. Последняя задача не раз возникала прежде. Теперь ее решение становится возможным, потому что эти оценки оказываются нормально распределенными с.в. В заключение оценим ошибку от замены вероятности частотой.

Теоретической базой, позволяющей широко использовать закон Гаусса, является так называемая "центральная предельная теорема", где указаны условия, при выполнении которых появляются нормальные распределения. С этого и начнем.

### 1. Почему нормальные с.в. распространены в природе?

Вы уже знаете, что нормальные с.в. часто возникают при исследовании разнообразных природных процессов — во всех естественных науках (физике, химии, биологии), в технических, социальных (экономика, социология). Интересно — почему? В чем причина?

Причина понята, как ни удивительно, математиками. Оказывается, если с.в. $X$ получается в результате суммирования большого числа с.в. $X_i$, каждая из которых мало влияет на результат, то распределение с.в. $X$ близко к нормальному. Формулировка эта упрощена с целью выпукло выделить суть: *сумма большого числа малых* **влияний** *дает эффект нормального распределения.* Это и происходит в природе: колебания веса, размеров и других характеристик представителей органического и неорганического мира вызываются суммарным воздействием огромного множества факторов, среди которых нет доминирующего.

Обращаю внимание на возможную ошибку восприятия слов. Читая вышеприведенную формулировку, вы можете подумать, что слагаемые $X_i$ должны быть малыми с.в. Однако сказано иное: слагаемые $X_i$ мало **влияют** на результат, т.е. значения с.в. $X_i$ сами по себе могут быть большими, но их колебания, влияющие на изменения значений суммы $X$, должны быть все "одного порядка". В следующем разделе лекции я поясню это примером.

В инженерной практике нормальные с.в. постоянно возникают в экспериментах, связанных с необходимостью оценивать ошибки: ошибки измерений, ошибки стрельбы, ошибки выполнения команд автоматизированным устройством, ошибки вывода космического корабля в заданную точку пространства, отклонения выходных параметров сложных технических устройств от номинала и пр., и пр. Эксперименты свидетельствуют, что все эти ошибки являются случайными величинами, распределенными по закону Гаусса. И теперь понятно, почему: каждое отклонение результата опыта от планируемого вызывается множеством малых случайных влияний. Рассмотрим этот эффект подробнее на примере.

**Пример 1.** Некоторое тело взвешивается на точных, аналитических весах.[1] Ясно, что полученный в опыте вес будет чуть отличаться от истинного веса[2] $x_0$, и ошибка определится разностью $\Delta x = x - x_0$, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Если повторить взвешивание того же (или другого) тела, то появится другое значение веса $x'$ и чуть другая ошибка $\Delta x' = x' - x_0$. Следовательно, ошибка является случайной величиной — обозначим ее через $\Delta X$.

В чем причина изменения от опыта к опыту значений ошибки $\Delta x$? В том, что при каждом последующем взвешивании чуть-чуть меняются случайные условия — положение тела на чашке весов, колебания воздуха, его температура, влажность, меняется вибрация стола, положение глаза наблюдателя и пр. и пр.

Обозначим через $\Delta x_1$ ту малюсенькую часть ошибки, которую вызвало изменение положения тела на чашке весов, — это будет значение с.в. $\Delta X_1$. Обозначим через $\Delta x_2$ часть ошибки от колебания воздуха в момент опыта — значение с.в. $\Delta X_2$, и т. д. Ясно, что значение $\Delta x$, которое приняла ошибка в данном опыте, получено суммированием $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ....$ Согласно определению суммы случайных величин (лекция 7, п. 6), можно записать $\Delta X = \sum \Delta X_i$. Все значения $\Delta x_i$ очень малы, более того — все они однопорядково малы, среди них нет доминиру-

[1] При "грубом" взвешивании значение веса округляется до ближайшего деления шкалы прибора и при повторении опыта оно не меняется, а при "точном" взвешивании — меняется.

[2] Но существует ли "истинный" вес? Это, конечно, абстракция и она имеет вероятностный характер.

ющего, который мог бы сильнее всех других повлиять на результат. Значит, с.в. $\Delta X$ должна иметь нормальное распределение.

**Контроль 1.** В условиях примера 1 рассмотрите другую с.в. $X$ — вес тела. Учтите, что при "точном" взвешивании одного и того же тела его вес меняется при каждом новом взвешивании. Будет ли с.в. $X$ распределена нормально? Обоснуйте. В чем отличия от обоснования в случае с.в. $\Delta X$? Каковы математические ожидания с.в. $X$ и с.в. $\Delta X$? Одинаковы ли дисперсии? Почему?

## 2. Центральная предельная теорема

Нам предстоит точнее сформулировать закон появления нормальных с.в. Продумаем необходимые уточнения с помощью следующего, обещанного выше примера. Он более абстрактен, чем пример 1, но позволяет проследить механизм возникновения эффекта нормализации.

**Пример 2.** Будем суммировать равномерные на $[0;\ 1]$ с.в. $X_i$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ ...$, плотности распределений которых одинаковы: $f_i(x) = 1,\ x \in [0; 1]$ (рис. 1а). Ясно, что все $X_i$ не малы (они принимают значения от 0 до 1) и среди них нет доминирующей.

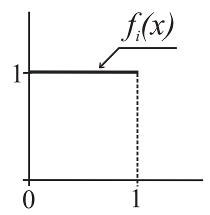


*Рис. 1а*

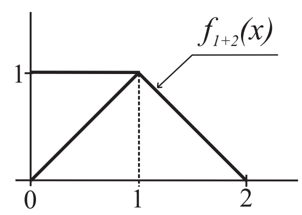


*Рис. 1б*

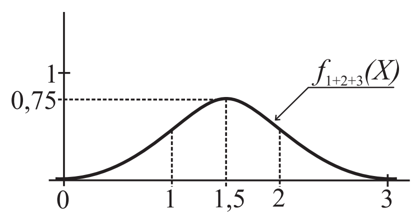


*Рис. 1в*

На рис. 1б показана плотность распределения суммы двух с.в. $X_1 + X_2$, на рис. 1в — трех $X_1 + X_2 + X_3$. Вы видите, что третья кривая очень похожа на Гауссовский "колокол" (на самом деле она составлена из трех кусков парабол, стыкующихся в точках с абсциссами 1 и 2). Если сложить шесть с.в. $X_1 + X_2 + ... + X_6$, то получится с.в., функция-плотность которой практически не отличима от нормальной.

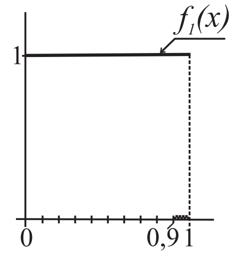


*Рис. 2а*

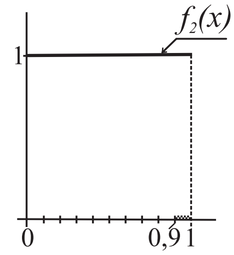


*Рис. 2б*

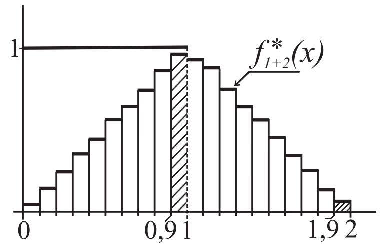


*Рис. 2в*

**Пояснение.** Я понимаю, что рис. 1б (а также рис. 1в) вызывает у вас вопрос: как получилось распределение в виде равнобедренного треугольника? Строго обосновать этот факт я здесь не могу, — это специальная теоретическая задача, требующая дополнительных знаний (см. [3], гл. IX и с. 371). Сошлюсь на эксперимент: если проводить опыты над двумя с.в. $X_1$ и $X_2$, набирать статистический материал $x_1^{(1)}+x_2^{(1)},\ x_1^{(2)}+x_2^{(2)},\ \dots,\ x_1^{(k)}+x_2^{(k)}$, затем его группировать и строить гистограмму, она получится близкой к равнобедренному треугольнику (рис. 2в).

Могу пояснить, почему вероятности крайних значений с.в. $X_1 + X_2$ значительно меньше, чем вероятности средних значений. Почему, например, столбик гистограммы над отрезком $[0,9;\ 1]$ значительно выше, чем над $[1,9;\ 2]$ (рис. 2в)? Заметьте, что во второй отрезок значения с.в. $X_1 + X_2$ попадут тогда, когда обе с.в. примут значения из первого отрезка (например, 0,9+1 или 0,95+0,96). Это будет не часто, ибо первый отрезок составляет десятую часть всех возможных значений с.в. $X_1$ и $X_2$. Во второй отрезок $[1,9;\ 2]$ сумма попадет значительно чаще, — ведь какое бы значение $x_1 \in [0;\ 1]$ не приняла первая с.в., найдутся значения второй с.в. $x_2$(десятая их часть), такие, что $x_1 + x_2 \in [0,9;\ 1]$.

В данном примере складывались одинаковые с.в. Вместе с тем, ясно, что если немного менять распределения слагаемых, то эффект нормальности будет сохраняться. Теоретическая проблема состоит в том, чтобы понять, в каких пределах можно варьировать слагаемые, не нарушая нормальности суммы. Ответ в общих чертах мы знаем — *надо, чтобы дисперсии слагаемых были примерно одинаковы.*

Обращаю внимание на еще одно уточнение — *слагаемые с.в. $X_i$ должны быть независимыми* (или слабо зависимыми). Так, в примере 1 часть $\Delta x_1$ общей ошибки веса, вызванная положением тела на чашке весов (значение с.в. $\Delta X_1$) не зависит (или очень слабо зависит) от того, какое будет в этот момент малое движение воздуха, т.е. не зависит от того, какое значение $\Delta x_2$ примет с.в. $\Delta X_2$. В этом и состоит физический смысл независимости случайных величин.[3] Если бы слагаемые $\Delta X_i$ были сильно взаимосвязаны, этот фактор оказал бы заметное влияние на распределение суммы, исказив эффект ее нормализации.

Теперь можно дать достаточно определенную общую формулировку *закона нормализации сумм с.в.*, которая известна, как

**Центральная предельная теорема:** Если с.в. $X$ можно представить в виде суммы достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) с.в., т. е. $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, причем все слагаемые имеют примерно одинаковые дисперсии, то закон распределения с.в. $X$ близок к нормальному (тем ближе, чем больше число слагаемых).

Фраза “примерно одинаковые дисперсии”, конечно, требует уточнения. Уточнения могут быть разными, — в зависимости от этого получаются разные формы центральной предельной теоремы. Приведу две.

[3] Понятие *независимости случайных величин* имеет точное математическое определение (лекция 7, п. 8). Оно означает, что появление или непоявление какого-то события, связанного с одной с.в., не влияет на вероятность появления любого события, связанного с другой с.в. Данное понятие очень важно в теории случайных величин, — многие закономерности, устанавленные для систем с.в. существенно используют условие их независимости.

**Теорема 1 (Ляпунова)**[4] Пусть $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n,\ ...$ — независимые с.в., математические ожидания которых — $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n,\ ...$, а дисперсии — $D_1,\ D_2,\ ...,\ D_n,\ ...$. Если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\left(|X_1-m_1|^3\right)+M\left(|X_2-m_2|^3\right)+...+M\left(|X_n-m_n|^3\right)}{\sqrt{(D_1+D_2+...+D_n)^3}}=0, \qquad (1)$$

где $C_i = M\left(|X_i-m_i|^3\right) = \int\limits_a^b |x-m_i|^3 f_i(x)\,dx$ — абсолютный (лек.10, п. 6, (12″)) третий центральный момент с.в. $X_i$, то при $n\to\infty$ закон распределения с.в. $Y_n = X_1+X_2+...+X_n$ неограниченно приближается к нормальному.

Условие (1) как раз и оформляет совершенно точно описательную фразу "примерно одинаковые дисперсии". Из него можно вывести (я этого делать не буду), что теорема исключает два случая: 1) когда среди с.в. $X_i$ есть с.в., влияние которых на рассеивание суммы подавляюще велико, сравнительно с влиянием всех остальных слагаемых; 2) когда среди с.в. $X_i$ есть большое число слагаемых, влияние которых исчезающе мало.

Следующая форма центральной предельной теоремы имеет особую ценность для приложений, — она часто используется при решении практических задач. Вы сейчас увидите, что эта форма легко выводится из теоремы Ляпунова. Однако исторически она была первой, поэтому называется не следствием, а теоремой. Эта теорема обобщает факт, установленный нами в примере 2.

**Теорема 2**. Сумма достаточно большого числа $n$ одинаково распределенных независимых с.в. $X_i$ с математическим ожиданием $m$ и дисперсией $D$ распределена приблизительно по закону Гаусса с параметрами $a = nm, \quad \sigma = \sqrt{nD}$.

**Доказательство**. Поскольку с.в. $X_i$ одинаково распределены, то $m_1 = m_2 = ...$ $... = m_n = m$, $D_1 = D_2 = ... = D_n = D$, $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$, значит левая часть условия Ляпунова (1), стоящая под знаком предела, принимает вид $\frac{nC}{\sqrt{(nD)^3}} = \frac{nC}{n\sqrt{n}\sigma^3} = \frac{C}{\sigma^3\sqrt{n}}$. Вычисляем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{C}{\sigma^3\sqrt{n}} = 0$, — получается нуль, ибо числитель дроби постоянный, а знаменатель неограниченно растет. Условия теоремы Ляпунова выполняются, следовательно, закон распределения с.в. $Y_n = X_1+X_2+...+X_n$ при достаточно большом значении $n$ становится практически неотличимым от нормального.

**Примечание**. Число слагаемых $n$, которое можно считать "достаточно большим", и при котором с.в. $Y_n$ распределена нормально, зависит от значений $m$ и $D$. В примере 2 нормальность суммы с.в. достигалась уже при шести слагаемых, в обычной практике достаточно десяти.

**Контроль 2**. Имеются независимые с.в. $X_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ ...$ с одинаковым законом распределения $f_i(x) = 0,5,\ x\in[0;\ 2]$. Сложите две с.в. $X_1+X_2$: определите промежуток значений суммы и нарисуйте вид графика функции-плотности (по

[4] А. М. Ляпунов (1857-1918) — крупный русский математик и механик, внесший вклад в развитие теории вероятностей.

аналогии с рис. 1б). Сделайте то же для суммы трех с.в. $X_1 + X_2 + X_3$. Проверьте выполнение условия Ляпунова для данной последовательности с.в.

## 3. Нормальное распределение — предел биномиальных

Справедливость теоремы 2 была впервые подмечена А. Муавром (1667–1754) на примере биномиальных с.в.[5] и привела его к решению ряда практических задач, связанных с этим распределением. Давайте и мы пронаблюдаем, как изменяется распределение б.с.в. с ростом числа опытов.

**Пример 3**. Рассмотрим с.в. $X_k$ — число появлений герба при подбрасывании монеты $k$ раз. Вы знаете, что вероятности значений $l = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k$ этой с.в. вычисляются по формуле Бернулли $P\left(W_l\right) = C_k^l \cdot p^l \cdot (1-p)^{k-l}$ (лекция 4, п. 2, (*Б*)), которая в нашем случае ($p = 0,5;\ 1 - p = 0,5$) принимает вид:

$$P\left(W_l\right) = \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots [k-(l-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots l} \cdot \frac{1}{2^k}. \qquad (2)$$

Начнем увеличивать число опытов $k$ и расссмотрим первые шесть с.в. $X_k$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Для каждого $k$ рассчитаем по формуле (2) вероятности значений с.в. $X_k$ (сделайте это сами) и запишем ее ряд распределения вероятностей. Получим следующие шесть таблиц (1а–1е), под каждой из которых нарисованы соответствующие многоугольники распределения (рис. 3а–3е).

Таблица 1а

| $X_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Таблица 1б

| $X_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Таблица 1в

| $X_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

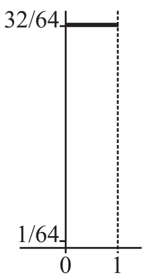



*Рис. 3а*

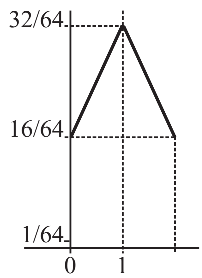



*Рис. 3б*

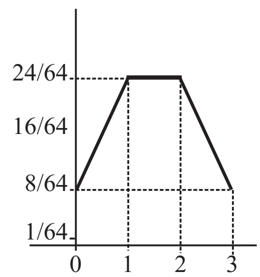



*Рис. 3в*

---

[5]Первое обобщение результата Муавра на сумму равномерно распределенных слагаемых с.в. (пример 2) сделал Лаплас в 1809 г. Дальнейшее обобщение принадлежит Пуассону (1837), который стал менять вероятности "успеха" в схеме Бернулли. Большой вклад в развитие и обогащение предельной теоремы внесли русские ученые — П. Л. Чебышев (1887), его ученик А. А. Марков (1898) и А. М. Ляпунов (1901). В дальнейшем это направление теории вероятностей успешно разрабатывалось советскими математиками — А. Я. Хинчиным (1935), Б. В. Гнеденко (1939, 1949), А. Н. Колмогоровым и др. (см. [5, с. 425-432]). Последний внес огромный вклад в становление теории вероятностей, как и во многие другие разделы современной математики.

Таблица 1г

| $X_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Таблица 1д

| $X_5$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

Таблица 1е

| $X_6$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{20}{64}$ | $\frac{15}{64}$ | $\frac{6}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

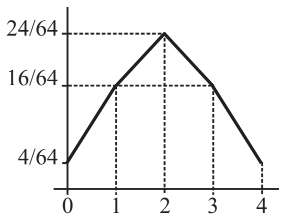



*Рис. 3г*

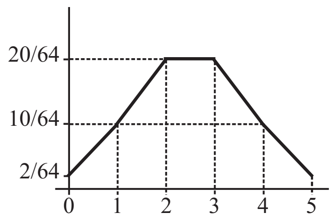



*Рис. 3д*

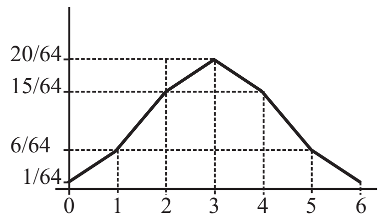



*Рис. 3е*

Вы видите, что многоугольник распределения с.в. $X_6$ похож на “колокол” Гаусса. Если увеличить число опытов, например, до $k = 10$, проделать аналогичные вычисления (проделайте их!), записать ряд распределения с.в. $X_{10}$ и построить ее многоугольник распределения, обнаружится еще большая близость его к соответствующему “колоколу” Гаусса.

**Дополнение**. Близость многоугольника распределения с.в. $X_6$ к “колоколу” Гаусса мы установили визуально. Степень этой близости можно оценить точно. Поясняю.

“Колокол” Гаусса, соответствующий с.в. $X_6$, определяется функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3}$$

параметры которой $a = m$ и $\sigma$ совпадают с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением с.в. $X_6$. Параметры биномиальной с.в. определяются, как известно по формулам $m = kp$, $\sigma = \sqrt{kp(1-p)}$ (лекция 7, п. 7, (15); п. 9, (22), (23)). Значит, в формуле (3) надо положить $a = 6 \cdot 0,5 = 3$ и $\sigma = \sqrt{6 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{1,5} \approx 1,214$.

Вычислим, к примеру, максимальное значение функции (3) в точке $x = 3$. Для удобства вычислений сведем (3) к табулированной функции Гаусса $\varphi(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}{2}} \right] = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{3'}$$

Вычисляем: $f(3) = \frac{1}{\sqrt{1,5}} \cdot \varphi\left(\frac{3-3}{\sqrt{1,5}}\right) \approx \frac{1}{1,214} \cdot \varphi(0) \approx 0,824 \cdot 0,399 \approx 0,329$.

Сравним полученное значение $f(3) = 0,329$ с Бернуллиевской вероятностью, которую вычислим по формуле (2): $P(W_3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16} \approx 0,313$. Видим, что $f(3) \approx P(W_3)$, и разница весьма мала — $0,016$. Вершина “колокола” Гаусса пройдет чуть выше вершины многоугольника на рис. 3е.

Аналогично можно посчитать остальные значения $f(l)$, $\quad l = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$ — различия с $p_l$ будут столь-же малы. Вычерчивая через точки $M_l(l, f(l))$ колокол Гаусса, мы практически пройдем через вершины многоугольника распределения с.в. $X_6$.

Факт приближения б.с.в. к нормальной, который вы увидели на данном примере, обобщается следующей теоремой.

**Теорема 3**. Закон распределения **любой** биномиальной с.в. $X_б$ с ростом числа опытов $k$ неограниченно приближается к закону Гаусса.

**Доказательство**. Имеем б.с.в. $X_б$ — число появлений некоторого события $A$ при повторении опыта $k$ раз (вероятность "успеха" $P(A) = p$ не меняется от опыта к опыту).

Введем $k$ простейших с.в. $I_i$, $i = 1, 2, ..., k$, каждая из которых принимает только два значения: 1, если в $i$-ом опыте событие $A$ появилось, 0, если не появилось (вероятности этих значений равны, соответственно, $p$ и $1-p$). Эти с.в. называются *индикаторами*.

Очевидно, число $l$ "успехов" после $k$ опытов равно сумме $l$ единиц и $k-l$ нулей — значений индикаторов, которые они приняли в этой серии опытов. Это значит, согласно определению суммы с.в., что $X_k = I_1 + I_2 + ... + I_k$ (лекция 7. п. 6, (9)).

Все индикаторы имеют одинаковые распределения вероятностей и независимы друг от друга (распределение любого индикатора не зависит от того, какие значения приняли другие, ибо вероятность события $A$ не меняется от опыта к опыту).

Итак, мы представили данную биномиальную с.в $X_k$ в виде суммы одинаково распределенных и независимых с.в. $I_i$. Следовательно, применима теорема 2, которая и утверждает, что при достаточно большом числе опытов $k$ распределение нашей с.в. $X_k$ становится Гауссовским.

**Примечание**. Раньше (лекция 8, п. 5) мы знали, что пределом биномиальных с.в. являются Пуассоновские, а сейчас установили, что пределом будут Гауссовские. Как это совместить? Обратите внимание: близость б.с.в. к Пуассоновской утверждалась (лек. 8. n. 5) при значениях $p$, близких к 0 или 1, и при не очень больших значениях $k$ ($k \cdot p < 10$). При таких параметрах распределение б.с.в. имеет значительную скошенность (лекция 7, п. 3, рис. 8-9) и заметно отличается от Гауссовского. С ростом $k$ скошенность уменьшается и при достаточно больших $k$ (когда $k \cdot p \geqslant 10$) распределение б.с.в. начинает лучше моделироваться Гауссовским. Это вы можете увидеть, выполнив следующее упражнение.

**Контроль 3**. Вероятность поражения цели одним выстрелом равна $0,15$. Случайная величина $Y_6$ — число поражений цели при шести выстрелах. Составьте ее ряд распределения и постройте многоугольник распределения. Какое распределение лучше моделируется кривой Гаусса, — $Y_6$ или $X_6$ (пример 3)? Почему? Как подобрать число выстрелов $k$, чтобы б.с.в. $Y_k$ можно было считать нормально распределенной с.в.?

## 4. Обоснование формул Муавра-Лапласа

В начале курса вы узнали две формулы, решающие задачи Бернулли (лекция 4, п. 4, ($M$) и п. 8, ($M - Л$)). Тогда же было сказано, что обоснование этих формул откладывается. Сейчас настал момент, когда обоснование может быть понято вами.

**Теорема Муавра (локальная)**. Пусть вероятность $p$ появления случайного события $A$ в каждом опыте постоянна, а число $k$ повторений опыта достаточно велико ($k \cdot p \geqslant 10$). Тогда вероятность того, что в $k$ независимых опытах событие $A$ наступит ровно $l$ раз, можно приближенно (с очень малой ошибкой) вычислить по формуле

$$P\left(X_k = l\right) \approx \frac{1}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}} \cdot \varphi\left(\bar{x}\right),\ \bar{x} = \frac{l - kp}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}}, \tag{$M$}$$

где $\varphi\left(x\right)$ — функция Гаусса:

$$\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{$\varGamma$}$$

**Доказательство**. Введем с.в. $X_k$ — число появлений события $A$ в серии из $k$ опытов. Эта с.в. биномиальная.

Согласно теореме 3, при достаточно большом числе опытов $k$ распределение биномиальной с.в. $X_k$ можно считать нормальным. И значит, вероятности ее значений $P\left(X_k = l\right)$ можно находить с помощью Гауссовской функции-плотности (лекция 11, п. 6, (13))

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}.$$

Сведем $f\left(x\right)$ к функции Гаусса $\varphi\left(x\right)$, — мы это делали раньше (п. 3 (3′)):

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Параметры $a$ и $\sigma$ нормального распределения, соответствующего с.в. $X_k$, должны совпадать с математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением данной с.в. $X_k$. Но числовые характеристики биномиальной с.в., как вы знаете, определяются формулами $m = a = kp$ и $\sigma = \sqrt{kp\left(1-p\right)}$ (лекция 7, (8), (14)). Следовательно, функция-плотность принимает вид

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}} \cdot \varphi\left(\frac{x-kp}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}}\right).$$

Подставляя сюда $x = l$, получаем:

$$P\left(X_k = l\right) = p_{k;\,l} \approx f\left(l\right) = \frac{1}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}} \cdot \varphi\left(\bar{x}\right),\ \bar{x} = \frac{l-kp}{\sqrt{kp\left(1-p\right)}}.$$

Остается обосновать условие $k \cdot p \geqslant 10$.

Выполняя контроль 3, вы видели, что при малом $p$ и не очень большом $k$ распределение б.с.в. сильно скошено (что иллюстрируется рис. 4а, где $p = 0,15$ и $k = 10$). С ростом $k$ скошенность ослабевает и распределение становится все более симметричным относительно математического ожидания $m = kp$ (рис. 4б, где $p = 0,15$, $k = 20$).

Очевидно распределение б.с.в. $X_k$ будет хорошо моделироваться Гауссовским тогда, когда число опытов $k$ станет столь большим, что весь трехсигмовый промежуток $[m - 3\sigma;\ m + 3\sigma]$ сдвинется вправо за нуль (рис. 4в), т. е. когда станет выполняться неравенство $0 < m - 3\sigma$. (Рис. 4в сделан для числа опытов $k = 67$, — поясняю, как найдено это число: $kp \geqslant 10 \Leftrightarrow 0,15k \geqslant 10 \Leftrightarrow k \geqslant 10/0,15 \Leftrightarrow k > 66,6$).

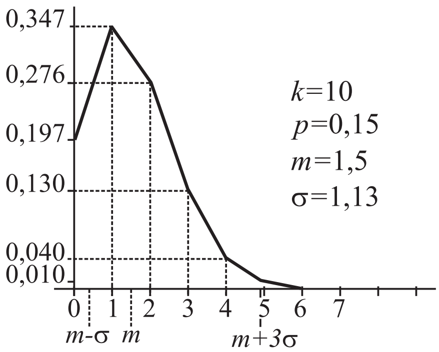



*Рис. 4а*

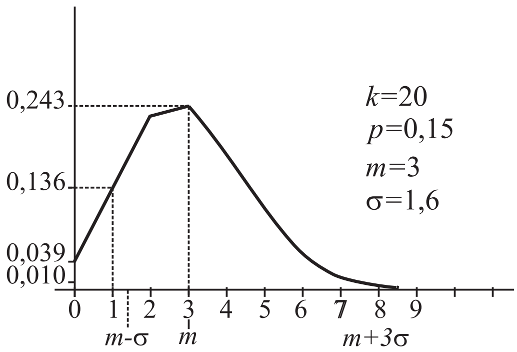



*Рис. 4б*

Поскольку характеристики б.с.в. определяются формулами $m = kp$ и $\sigma = \sqrt{kp\,(1-p)}$, неравенство $0 < m - 3\sigma$ принимает вид: $kp - 3\sqrt{kp\,(1-p)} > 0$. Нетрудно убедиться, что оно начнет выполняться, как только окажется, что $kp \geqslant 10$, т.е. как только число опытов $k$ станет больше, чем $10/p$ (чем меньше $p$, тем больше $k$). В самом деле, проследите за цепочкой:

$$kp \geqslant 10 \Rightarrow kp > 9 \Rightarrow kp > 9\,(1-p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (kp)^2 > 9kp\,(1 - p \Rightarrow) > 3\sqrt{kp\,(1-p)} \Rightarrow kp - 3\sqrt{kp\,(1-p)} > 0.$$

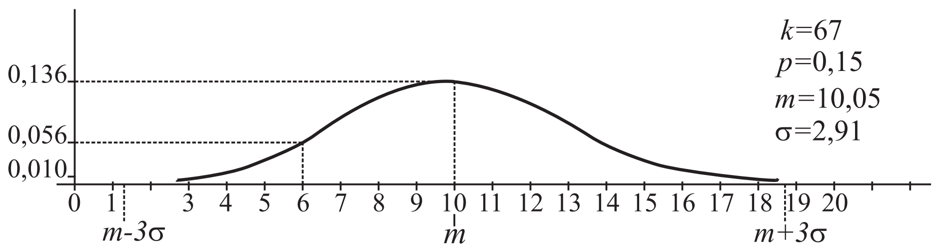



*Рис. 4в*

**Теорема Муавра - Лапласа (интегральная)**. Пусть вероятность $p$ появления случайного события $A$ в каждом опыте постоянна, а число $k$ повторений опыта достаточно велико ($k \geqslant 10/p$, или $kp \geqslant 10$). Тогда вероятность $p_{\alpha;\,\beta}$ того, что в $k$ независимых опытах событие $A$ наступит не менее $\alpha$ и не более $\beta$ раз, можно приближенно вычислить по формуле

$$p_{\alpha;\,\beta} \approx \Phi\left(\frac{\beta - kp}{\sqrt{kp\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - kp}{\sqrt{kp\,(1-p)}}\right), \qquad (M - Л)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (Л)$$

**Доказательство**. Как вы уже знаете, при $k \geqslant 10/p$ распределение биномиальной с.в. $X_k$ можно заменить распределением нормальной с.в. $X_N$ с теми же параметрами $a = m = kp$ и $\sigma = \sqrt{kp(1-p)}$. Значит, вероятность попадания с.в. $X_k$ в промежуток $[\alpha;\ \beta]$ можно вычислять, как вероятность попадания с.в. $X_N$ в тот же промежуток, т.е.

$$p_{\alpha;\ \beta} = \mathbf{P}(X_k \in [\alpha;\ \beta]) \approx \mathbf{P}(X_N \in [\alpha;\ \beta]). \qquad (4)$$

Но для решения последней задачи у нас есть формула (лекция 11, (25)), — напомню ее:

$$\mathbf{P}(X_N \in [\alpha;\ \beta]) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Заменяя в этой формуле $a$ на $kp$ и $\sigma$ на $\sqrt{kp(1-p)}$ и учитывая предыдущее равенство, получим формулу $(M - Л)$.

**Следствие**. Если промежуток $[\alpha, \beta]$ симметричен относительно математического ожидания с.в. $X_k$, т. е. $[\alpha, \beta] = [m - l,\ m + l]$, то формула $(M - Л)$ принимает вид

$$p_{m-l;\ m+l} = 2\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{kp(1-p)}}\right). \qquad (M - Л)'$$

**Доказательство**. Для случая промежутка $[\alpha, \beta]$, симметричного относительно математического ожидания $m$ нормальной с.в. $X_N$, имеется формула (лекция 11, $(25')$):

$$P(X_N \in [a - l;\ a + l]) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right).$$

Подставляя в последнее равенство вместо $\sigma$ значение $\sqrt{kp(1-p)}$ и учитывая (4), получаем требуемую формулу $(M - Л)'$.

**Пример 4**. Вероятность поражения цели при одном выстреле $p = 0,15$. Какова вероятность того, что при $k = 100$ выстрелах цель будет поражена: а) менее 20 раз; б) ровно 20 раз; в) от 20 до 30 раз; г) более 30 раз?

Задача состоит в вычислении $P(X_{100} = 20)$, а также вероятностей попадания б.с.в. $X_{100}$ в промежутки $[0;\ 19]$, $[20;\ 30]$, $[31;\ 100]$. Как вы думаете, какая вероятность больше? Не кажется ли вам, что последняя, поскольку последний промежуток имеет значительно большую длину, чем два других? Проверим это предположение точным расчетом.

**Решение**. Вычислим вначале $P\left(X_{100}=20\right)$, используя формулу $(M)$. Предварительно просчитаем $m$ и $\sigma$:

$$m=kp=100\cdot 0,15=15;\ \sigma=\sqrt{kp\left(1-p\right)}=\sqrt{15\cdot 0,85}=\sqrt{12,75}\approx 3,57.$$

$$P\left(X_{100}=20\right)\approx\frac{1}{3,57}\cdot\varphi\left(\frac{20-15}{3,57}\right)\approx\frac{1}{3,57}\cdot\varphi\left(1,40\right)\approx\frac{0,15}{3,57}\approx 0,042.$$

Далее используем формулу $(M-Л)$:

$$P\left(X_{100}\leqslant 19\right)=p_{0;\ 19}\approx\Phi\left(\frac{19-15}{\sqrt{12,75}}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{\sqrt{12,75}}\right)\approx$$
$$\approx\Phi\left(1,12\right)+\Phi\left(4,20\right)\approx 0,369+0,500=0,869;$$

$$P\left(20\leqslant X_{100}\leqslant 30\right)=p_{20;\ 30}\approx\Phi\left(\frac{30-15}{3,57}\right)-\Phi\left(\frac{20-15}{3,57}\right)\approx$$
$$\approx\Phi\left(4,20\right)-\Phi\left(1,40\right)\approx 0,5-0,419=0,081;$$

$$P\left(X_{100}\geqslant 31\right)=p_{31;\ 100}\approx\Phi\left(\frac{100-15}{3,57}\right)-\Phi\left(\frac{31-15}{3,57}\right)\approx$$
$$\approx\Phi\left(23,81\right)-\Phi\left(4,48\right)\approx 0,5-0,5=0.$$

Расчет, как видите, резко опровергает предположение. Дело в том, что первый промежуток содержит математическое ожидание $m=kp=15$, около которого чаще всего появляются значения нормальной с.в. Объединение первых двух промежутков содержит трехсигмовый интервал

$$\left(m-3\sigma;\ m+3\sigma\right)=\left(15-3\cdot 3,57;\ 15+3\cdot 3,57\right)=$$
$$=\left(15-10,71;\ 15+10,71\right)=\left(4,29;\ 25{,}71\right),$$

в который, как вы знаете, попадают практически все значения нормальной с.в.

**Контроль 4**. Какова вероятность, что среди 1000 новорожденных окажется а) одинаковое число девочек и мальчиков; б) больше девочек, чем мальчиков; в) не менее 460 и не более 540 девочек? Сделайте свои предположения и проверьте их точным расчетом, принимая вероятность рождения девочки равной $0,48$.

## 5. Точность и надежность оценки математического ожидания

Перейдем ко второму кругу задач, обещанных во вступлении.

**Задача 1 (о надежности оценки $m^*$).** Изучается с.в. $X$: опыт проведен $k$ раз, зафиксированы появившиеся значения $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(k)}$ и вычислены оценки математического ожидания $m$ и дисперсии $D$ с.в. $X$ по формулам

$$m^* = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} x^{(i)}, \tag{7}$$

$$D^{**} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x^{(i)} - m^*\right)^2. \tag{8}$$

Допустимая ошибка оценки $m^*$ задана малым числом $\varepsilon > 0$, — это значит, требуется, чтобы $m^*$ отклонилась от истинного значения математического ожидания $m$ (которого мы не знаем!) не более, чем на $\varepsilon$, т. е. $|m^* - m| < \varepsilon$. Рассчитать вероятность $p_{m^*;\,\varepsilon}$ этого события, т. е. найти

$$p_{m^*;\,\varepsilon} = P\left(|m^* - m| < \varepsilon\right) = P\left(m \in (m^* - \varepsilon;\ m^* + \varepsilon)\right) = P\left(m^* \in (m - \varepsilon;\ m + \varepsilon)\right).$$

**Примечание 1**. Ранее (лекция 6, п. 7) мы называли интервал $(m^* - \varepsilon;\ m^* + \varepsilon)$ *доверительным интервалом*, а вероятность $p_{m^*;\,\varepsilon}$ — *доверительной вероятностью*. Сейчас эту вероятность $p_{m^*;\,\varepsilon}$ будем называть *надежностью оценки*, а число $\varepsilon$ — *точностью оценки* математического ожидания. Аналогично определяется надежность оценки дисперсии — $p_{D^*;\,\varepsilon}$ и ее точность $\varepsilon$. Аналогично — точность и надежность оценки любой другой числовой характеристики с.в. или параметра.

**Смысл вопроса**. Напомню, что оценка $m^*$ является случайной величиной, но она связана не с данным опытом, в котором появляется с.в. $X$, а с экспериментом, представляющим серию $k$ таких опытов. Каждый эксперимент (каждая серия опытов) дает свое значение, $m^*$ и оно меняется от серии к серии. Спрашивается, — как часто (если провести эксперимент много раз) эти значения будут удовлетворять требуемой точности $\varepsilon$, т. е. как часто они будут попадать в интервал $(m - \varepsilon;\ m + \varepsilon)$?

**Решение**. 1) Перед нами стандартная задача о попадании с.в. в заданный интервал. В наших условиях формула для ее решения (лек. 9, (7)) принимает вид:

$$\mathbf{P}\left(m^* \in (m - \varepsilon;\ m + \varepsilon)\right) = \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f_{m^*}(x)\, dx,$$

где $f_{m^*}(x)$ — плотность распределения с.в. $m^*$. Но как найти $f_{m^*}(x)$?

2) Поможет центральная предельная теорема, согласно которой $m^*$ оказывается нормально распределенной с.в., независимо от того, как распределена с.в. $X$. Объясняю.

Формула (7) показывает, что с.в. $m^*$ можно рассматривать, как сумму одинаковых с.в. $(1/k)\cdot X_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, где через $X_i$ обозначена с.в., которая принимает в эксперименте значение $x^{(i)}$. Можно сказать, что с.в. $X_i$ есть $i$-ый экземпляр одной и той же с.в. $X$. Если число опытов достаточно велико, то по теореме 2 с.в. $m^*$ имеет распределение, близкое к нормальному. Следовательно, функция-плотность $f_{m^*}(x)$ с.в. $m^*$ определяется формулой Гаусса (3). Предстоит определить в этой формуле значения параметров $a = M(m^*)$ и $\sigma = \sigma(m^*)$.

3) Если бы истинные значения характеристик $M(X) = m$ и $D(X) = D$ данной с.в. $X$ были известны, а значит, все $M(X_i) = m$ и $D(X_i) = D$, то легко можно было найти характеристики $a$ и $\sigma$ с.в. $m^*$, используя свойства математического ожидания и дисперсии (лекция 10, п. 4), так:

$$a = M(m^*) = M\left(\frac{1}{k}\cdot\sum_1^k X_i\right) = \frac{1}{k}\cdot\sum_1^k M(X_i) = \frac{1}{k}\cdot km = m,$$

$$D(m^*) = D\left(\frac{1}{k}\cdot\sum_1^k X_i\right) = \frac{1}{k^2}\cdot\sum_1^k D(X_i) = \frac{1}{k^2}\cdot kD = \frac{D}{k},$$

$$\sigma = \sigma(m^*) = \sqrt{\frac{D}{k}}.$$

Заметьте, — математическое ожидание с.в. $m^*$ не зависит от числа опытов $k$, а дисперсия и среднее квдратическое отклонение — зависят: чем больше $k$, тем меньше разбросанность значений оценок $m^*$.

4) Поскольку мы не знаем точных значений $m$ и $D$, в полученных только что формулах придется заменить $m$ и $D$ их известными оценками: $m \approx m^*$ и $D \approx D^{**}$. В итоге, плотность распределения нормальной с.в. $m^*$ определится функцией

$$f_{m^*}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ a = m^*,\ \sigma = \sqrt{\frac{D^{**}}{k}}.$$

5) Применяем общую формулу для вычисления вероятности попадания нормально распределенной с.в. в симметричный интервал (лекция 11, (25′)) и окончательно получаем:

$$p_{m^*;\,\varepsilon} = \mathbf{P}(|m^* - m| < \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(m^*)}\right),\ \sigma(m^*) = \sqrt{\frac{D^{**}}{k}}, \tag{9}$$

где $\varepsilon$, $D^{**}$ и $k$ заданы условиями задачи.

**Примечание 2**. Формула (9) выведена при двух предположениях: 1) число опытов $k$ достаточно для того, чтобы считать с.в. $m^*$ нормально распределенной; 2) оценки параметров $m^*$ и $D^{**}$, вычисленные по результатам этих $k$ опытов, достаточно близки к истинным, т. е. $M(m^*) \approx m^*$ и $D(m^*) \approx D^{**}$. Практика подтверждает, что эти условия вполне удовлетворительно выполняются при числе опытов

$k = 20 \div 30$. Полезно знать, что существуют и более точные формулы, решающие данную задачу (см., например, [2, с.324-328]).

**Пример 5**. Серия из 20 опытов над некоторой с.в. дала оценки $m^* = 4,52$ и $D^{**} = 2,35$. Надежна ли оценка математического ожидания $m^*$, если требуемая точность задана числом $\varepsilon = 0,3$?

**Решение**. Применяем формулу (9):

$$\sigma(m^*) = \sqrt{\frac{2,35}{20}} \approx \sqrt{0,1175} \approx 0,343;$$

$$p_{m^*;\,\varepsilon} = \mathbf{P}\left(|m^* - m| < 0,3\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,3}{0,343}\right) \approx 2\Phi(0,87) \approx 2 \cdot 0,31 = 0,62.$$

**Ответ**: Надежность оценки $m^*$, полученной по результатам 20 опытов, невелика, — примерно в четырех случаях из десяти она будет давать значения, далекие от истинного ($|m^* - m| \geqslant 0,3$).

При экспериментальном исследовании с.в. $X$ надежность вычисленных по результатам эксперимента оценок ее числовых характеристик ($m^*$ и других) можно повысить за счет значительного увеличения числа опытов $k$. Это вы увидите на следующем примере.

**Пример 6**. В условиях предыдущего примера ($m^* = 4,52$; $D^{**} = 2,35$) рассчитать: сколько надо провести опытов, чтобы повысить надежность оценки $m^*$ до $p_{m^*;\,\varepsilon} = 0,95$?

**Решение**. Задача обратна предыдущей: если раньше были заданы $k$ и $\varepsilon$, а надо было найти $p_{m^*;\,\varepsilon}$, то здесь заданы $p_{m^*;\,\varepsilon}$ и $\varepsilon$, а ищется $k$. Формула (9) принимает вид

$$2\Phi\left(\frac{0,3}{\sigma(m^*)}\right) = 0,95, \quad \text{или} \quad \Phi\left(\frac{0,3}{\sigma(m^*)}\right) = 0,475.$$

По значению функции Лапласа $0,475$ находим в таблице приложения 2 соответствующий аргумент, — он оказывается равным $1,97$. Значит,

$$\frac{0,3}{\sigma(m^*)} = 1,97 \quad \Rightarrow \quad \sigma(m^*) = \frac{0,3}{1,97} \approx 0,152.$$

Итак, число опытов $k$ должно быть таким, чтобы среднее квадратическое отклонение с.в $m^*$ уменьшилось до $\sigma(m^*) \approx 0,152$. Но связь числа опытов $k$ и $\sigma(m^*)$ установлена второй формулой (9), подставляя в которую заданную дисперсию $D^{**} = 2,35$ и найденное $\sigma(m^*) \approx 0,152$, получаем

$$\sqrt{\frac{2,35}{k}} \approx 0,152. \tag{10}$$

Откуда и находим $k$:

$$\frac{2,35}{k} \approx 0,152^2 \approx 0,023 \quad \Rightarrow \quad k \approx \frac{2,35}{0,023} \approx 102.$$

**Уточнение**. Вы, наверное, не заметили одну нестрогость в проведенном рассуждении: число опытов $k$ в нем было переменным, а оценка $D^{**}$ — фиксированной (вычислена при $k = 20$), в то время как в формуле (9) эта оценка должна меняться с изменением $k$ (для каждого $k$ вычисляется своя оценка $D^{**}$). Наше рассуждение, следовательно, неявно предполагало малую изменчивость этой оценки с ростом числа опытов, что и позволило для всех $k \geqslant 20$ приближенно использовать в (10) одну и ту же оценку $D^{**}$. Данное предположение вполне разумно и оправдывается практическим опытом. Подобные предположения часто делаются в ориентировочных вероятностных расчетах (см., например, выше 4-й этап решения задачи 1).

Возможно еще одно обращение задачи 1: заданы число опытов $k$ и требуемая надежность $p_{m^*;\,\varepsilon}$ оценки математического ожидания $m^*$ некоторой с.в. $X$, а надо найти степень ее точности $\varepsilon$. Думаю, вы сможете решить эту задачу самостоятельно, — она конкретизирована в контрольном упражнении, заканчивающем данный раздел лекции.

**Замечание**. Обращаю внимание на связь надежности $p_\varepsilon$ и точности $\varepsilon$ оценки $m^*$ (и оценки любой другой числовой характеристики с.в $X$): если при данном числе опытов $k$ ужесточать требование надежности (увеличивать $p_\varepsilon$), то $\varepsilon$, вообще говоря, будет увеличиваться и, следовательно, точность падать (контроль 6, пример 8). Одновременно повышать надежность и точность оценки можно увеличением числа опытов $k$ (пример 6, контроль 7).

**Контроль 5 (задача о точности оценки $m^*$)**. В условиях примера 5 ($k = 20$, $m^* = 4,52$, $D^{**} = 2,35$) задана требуемая надежность $p_{m^*;\,\varepsilon} = 0,95$ оценки $m^*$. Рассчитать степень ее точности $\varepsilon$. Записать доверительный интервал и сделать прогноз о поведении оценки $m^*$ при многократном повторении эксперимента. На сколько повысится точность, если увеличить число опытов до $k = 50$?

## 6. Точность и надежность оценки дисперсии

**Задача 2 (о надежности оценки $D^{**}$)**. В условиях обобщенной задачи 1 числом $\varepsilon > 0$ задана точность оценки дисперсии (а не математического ожидания). Рассчитать надежность $p_{D^{**};\,\varepsilon}$ этой оценки.

**Решение**. Нормальное распределение оценки $D^{**}$ доказывается гораздо сложнее, чем оценки $m^*$. Примем этот факт на веру и запомним приближенные значения параметров этого распределения (при условии, что сама $X$ — нормально распределенная с.в.!)[6]:

$$a = M\left(D^{**}\right) \approx D^{**}, \quad D\left(D^{**}\right) \approx \frac{2}{k-1} \cdot \left(D^{**}\right)^2, \quad \sigma = \sigma\left(D^{**}\right) \approx D^{**} \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1}}.$$

[6] В отличие от распределения оценки $m^*$, параметры которой не зависели от распределения с.в. $X$, дисперсия оценки $D^{**}$ зависит от того, к какому типу относится исходная с.в. $X$. В частности, если $X$ — равномерно распределенная с.в., то для нее дисперсия оценки $D^{**}$ меняется так: $D\left(D^{**}\right) \approx \frac{0,8k+1,2}{k(k+1)} \cdot \left(D^{**}\right)^2$.

Формула для вычисления надежности оценки дисперсии вполне аналогична формуле (9):

$$p_{D^{**};\ \varepsilon} = \mathbf{P}\left(|D^{**} - D| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\left(D^{**}\right)}\right),\ \sigma\left(D^{**}\right) \approx D^{**} \cdot \sqrt{\frac{2}{k-1}}. \qquad (11)$$

Окончательный расчет проводится точно так же, как и в задаче 1.

**Пример 7**. В условиях примера 5 ($m^* = 4,52$, $D^{**} = 2,35$, $k = 20$) числом $\varepsilon = 0,3$ задана точность оценки дисперсии $D^{**}$. Рассчитать надежность этой оценки, т.е. вероятность $p_{D^{**};\ \varepsilon=0,3}$.

**Решение**. Определяем среднее квадратическое отклонение $\sigma$ случайной величины $D^{**}$ по второй формуле (11):

$$\sigma = 2,35 \cdot \sqrt{\frac{2}{19}} \approx 2,35 \cdot \sqrt{0,1053} \approx 2,35 \cdot 0,3244 \approx 0,762.$$

Подставляем значения $\sigma = 0,762$ и $\varepsilon = 0,3$ в первую формулу (11) и вычисляем $p_{D^{**};\ \varepsilon}$:

$$p_{D^{**};\ \varepsilon} = 2\Phi\left(\frac{0,3}{0,762}\right) \approx 2\Phi\left(0,39\right) \approx 2 \cdot 0,15 = 0,3.$$

**Прогноз**: Оценка $D^{**}$, найденная по результатам двадцати опытов над с.в. $X$, весьма ненадежна, — примерно семь раз из десяти она будет давать "плохие" результаты ($|D^{**} - D| \geqslant 0,3$). Можно сказать, что она в два раза хуже, чем оценка $m^*$.

**Пример 8 (задача о точности оценки** $D^{**}$**)**. Серия из $k = 20$ опытов над некоторой с.в. $X$ дала оценку дисперсии $D^{**} = 2,35$. Желательна высокая надежность этой оценки и она задается доверительной вероятностью $p_{D^{**};\ \varepsilon} = 0,95$. Определить степень точности $\varepsilon$ полученной оценки, т.е. найти доверительный интервал $(D^{**} - \varepsilon;\ D^{**} + \varepsilon)$, в который будет попадать истинное значение дисперсии $D$ в 95 экспериментах из 100 (примерно!). Напоминаю, эксперимент — это серия из 20 опытов над данной с.в. $X$.

**Решение**. Как и прежде, пользуемся формулами (11). Среднее квадратическое отклонение с.в. $D^{**}$ найдено в предыдущем примере по второй формуле (11): $\sigma = 0,762$.

Подставляем $\sigma = 0,762$ и заданную надежность $p_{D^{**};\ \varepsilon} = 0,95$ в первую формулу (11), оставляя $\varepsilon$ неопределенным, и получаем

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,762}\right) = 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,762}\right) = 0,475.$$

По значению функции Лапласа $\Phi\left(x\right) = 0,475$ находим в таблице приложения 2 соответствующий аргумент $x = 1,97$. Этот аргумент в нашем случае имеет вид $x = \varepsilon/0,762$, отсюда и находим $\varepsilon$:

$$\frac{\varepsilon}{0,762} = 1,97 \Rightarrow \varepsilon = 1,97 \cdot 0.762 \approx 1,5.$$

Итак, точность оценки дисперсии определена числом $\varepsilon = 1,5$, а доверительный интервал, следовательно, $(D^{**} - 1,5;\ D^{**} + 1,5) = (0,85;\ 3,85)$.

**Прогноз**. Если провести 100 экспериментов над с.в. $X$, т.е. 100 серий по 20 опытов в каждой серии, и после каждого эксперимента вычислить по формуле (8) оценку дисперсии $D^{**}$, то будем иметь 100 значений этой оценки. Наш расчет предсказывает, что примерно 95 этих значений будут отличаться от истинного значения дисперсии $D$ не более, чем на величину $\varepsilon = 1,5$. Эта величина не малая, размах колебаний оценки слишком велик.

**Контроль 6**. В результате некоторого эксперимента над с.в. $X$ вычислена оценка дисперсии $D^{**} = 2,35$. Сколько надо провести опытов, чтобы обеспечить высокую надежность $p_{D^{**};\ \varepsilon} = 0,95$ этой оценки и, одновременно, высокую точность $\varepsilon = 0,3$?

## 7. Оценка вероятности по относительной частоте

В заключение лекции (и в завершение курса) вернемся к тому, с чего начинали когда-то.

Помните, я заставлял вас много раз подбрасывать две монетки и считать относительную частоту появления события $ΓΓ$ (лекция 1, п. 2)? Вы видели, что с ростом числа подбрасываний частота $\mathbf{P}^*(ΓΓ)$ приближается к вероятности $\mathbf{P}(ΓΓ) = 0,25$. Причем, это приближение было очень неравномерным, с неожиданными отклонениями. Лишь после очень большого числа подбрасываний ($k = 500$) становилось отчетливо заметно уменьшение колебаний частот и близость их к вероятности. В сущности, тогда мы экспериментально решали задачу оценки вероятности события $ΓΓ$ по его относительной частоте.

Тогда же (лекция 1, п. 8, примечание) я сказал вам, что задача оценки ошибки от замены вероятности частотой откладывается на будущее, и проиллюстрировал примером вероятностный характер ответа. Сейчас, получив достаточный багаж знаний, вы сможете решить эту задачу теоретически. После этого применим полученные формулы к оценке надежности замены вероятности частотой при бросании монет и сделаем обоснованные прогнозы. Начнем, как и раньше, с задачи надежности.

**Постановка задачи**. Пусть нас интересует вероятность $\mathbf{P}(A) = p$ некоторого события $A$ в некотором опыте. Причем, точно рассчитать эту вероятность затруднительно или невозможно (например, вероятность поражения цели в опыте со стрельбой). В таких случаях приходится довольствоваться приближенным определением вероятности $\mathbf{P}(A) \approx p^*$, но так, чтобы ошибка была не более заданного малого положительного числа $\varepsilon > 0$, т.е. чтобы $|p^* - p| < \varepsilon$.

Задача эта, как вы знаете, решается экспериментальным методом: ставится эксперимент, состоящий из достаточно большого числа $k$ повторений данного опыта (чем меньше $\varepsilon$, тем больше $k$), определяется число $l$ появлений события $A$ в этом эксперименте и вычисляется относительная частота $\mathbf{P}^*(A) = p^* = l/k$. Статистическая вероятность $p^*$ и принимается за вероятность события $A$.

Но можем ли мы (не зная точного значения $p$) быть уверены, что ошибка укладывается в допустимые рамки, т.е. что $|p^* - p| < \varepsilon$? Конечно, нет. Ни при каком большом числе опытов $k$ не может быть в этом абсолютной уверенности. Но может быть большая практическая уверенность, если мы знаем, как часто (в экспериментах с тем же числом опытов $k$) найденная таким образом статистическая вероятность $p^*$ отклонится от истинной $p$ не более, чем на величину $\varepsilon$. Например, если мы знаем, что из 1000 экспериментов лишь в двух-трех ошибка может превысить допустимое $\varepsilon$, то это знание дает нам большую практическую уверенность в том, что статистическая вероятность $p^*$ найдена с ошибкой, не превышающей $\varepsilon$. И чтобы получить такое дополнительное знание, надо рассчитать в эксперименте вероятность события $W = (|p^* - p| < \varepsilon)$, т.е. так называемую доверительную вероятность.

Поставим теперь нашу задачу точно.

**Задача (о надежности замены вероятности частотой)**. В некотором опыте возможно событие $A$, вероятность которого $\mathbf{P}(A) = p$ (она может быть известна, а может быть не известна). Опыт повторен очень много раз — $k$ раз ($k$ — несколько сотен), в результате событие $A$ появилось $l$ раз ($0 \leqslant l \leqslant k$). Вычислена относительная частота события $A$ в этом эксперименте: $\mathbf{P}^*(A) = p^* = l/k$. Степень желаемой ошибки от замены истинной вероятности $p$ частотой $p^*$ задана малым числом $\varepsilon$. Определить надежность этой замены, т.е. найти доверительную вероятность

$$\mathbf{P}(|p^* - p| < \varepsilon) = \mathbf{P}(p^* \in (p - \varepsilon;\ p + \varepsilon)) = ?$$

**Решение.** 1) Введем в эксперименте из $k$ опытов случайную величину $X_k$ — число появлений события $A$. Возможные значения этой с.в. — $l = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k$. Ясно, что при повторении эксперимента будут появляться, вообще говоря, разные значения $l$, и их нельзя точно предсказать. Т. е., $X_k$, действительно, случайная величина, согласно определению с.в. (лекция 5, п. 2).

2) Вы знаете, что с.в. $X_k$ относится к классу биномиальных (лекция 7, п. 2). И знаете, как определяются ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение (лекция 7, (15), (23)):

$$M(X_k) = m = k \cdot p;\ \sigma(X_k) = \sigma = \sqrt{k \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

3) В данной лекции (п. 3, теорема 3) вы узнали, что при достаточно большом числе опытов ($k > 10/p$) биномиальная с.в. $X_k$ моделируется приближенно нормальным распределением, функция-плотность которого задается формулой Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

4) Введем теперь еще одну с.в. $X^*$ — относительную частоту появления события $A$ в эксперименте, состоящем из $k$ опытов. Ее возможные значения $l/k =$

0; $1/k$; $2/k$; ...; ($k$ - 1)/$k$; 1, — они, как вы видите, получаются уменьшением всех значений с.в. $X_k$ в $k$ раз. Следовательно, с.в $X^*$ и с.в. $X_k$ связаны линейной операцией так: $X^* = (1/k) \cdot X_k$ (лекция 10, п. 4). Поэтому числовые характеристики с.в. $X^*$ можно определить через соответствующие характеристики с.в. $X_k$, используя свойства линейных операций над с.в. (лекция 10, п. 4):

$$m^* = M(X^*) = M\left(\frac{1}{k} \cdot X_k\right) = \frac{1}{k} \cdot M(X_k) = \frac{1}{k} \cdot k \cdot p = p;$$

$$\sigma^* = \sigma(X^*) = \sigma\left(\frac{1}{k} \cdot X_k\right) = \frac{1}{k} \cdot \sigma(X_k) = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{k \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{k}}.$$

5) Нетрудно согласиться, что с.в. $X^*$, как и с.в. $X_k$, тоже распределена по нормальному закону: ведь при умножении $X^* = (1/k) \cdot X_k$ изменяются только значения с.в. $X^*$, а распределение вероятностей этих значений остается таким же, как и распределение с.в. $X_k$. Следовательно, функция-плотность с.в. $X^*$ тоже задается функцией Гаусса, меняются лишь значения параметров — $m = kp$ на $m^* = p$ и $\sigma = \sqrt{kp(1-p)}$ на $\sigma^* = \sqrt{[p(1-p)]/p}$:

$$f^*(x) = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m^*)}{2(\sigma^*)^2}}.$$

6) Найдем вероятность попадания нормально распределенной с.в. $X^*$ в симметричный промежуток $(p-\varepsilon;\ p+\varepsilon)$. Поскольку для с.в. $X^*$ выполняется равенство $M(X^*) = m^* = p$, установленное в 4), то $(p-\varepsilon;\ p+\varepsilon) = (m^*-\varepsilon;\ m^*+\varepsilon)$ и, следовательно, можно применить стандартную формулу (лекция 11, (25′)).

$$\mathbf{P}\left(X^* \in (p-\varepsilon;\ p+\varepsilon)\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^*}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{p(1-p)}}\right).$$

В итоге получаем формулу, решающую нашу задачу в случае, когда истинное значение вероятности $P(A) = p$ известно:

$$\mathbf{P}\left(|p^* - p| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{p(1-p)}}\right). \tag{12}$$

7) Если истинное значение вероятности $\mathbf{P}(A) = p$ не известно (что чаще всего и бывает), то в формуле (12) следует заменить $p$ ее приближенным статистическим значением, заданным в задаче, — $p \approx p^*$. В результате получаем вторую, сходную формулу:

$$\mathbf{P}\left(|p^* - p| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{k}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}\right). \tag{12′}$$

**Дополнение**. Не обратили ли вы внимание на различие требований к эксперименту при решении задачи надежности оценки числовых характеристик (п. 5 —

примечание 2 и примеры, п. 6) и при оценке вероятности по частоте? В первом случае требо-валось несколько десятков опытов, а во втором — несколько сотен. Почему на порядок увеличилось число опытов в эксперименте? Ответ: потому, что относительные частоты очень медленно приближаються к вероятности, а оценки числовых характеристик приближаются к ним значительно быстрее. Это показывает практика — многочисленные реальные эксперименты.

Интересно применить формулу (12) к эксперименту, проведенному вами в лекции 1, — подбрасыванию двух монет 500 раз. У меня, когда я проводил этот эксперимент, относительная частота появления двух гербов получилась равной $p^* = P^*(ГГ) = 0,23$, т.е. ошибка от замены истинной вероятности $p = \mathbf{P}(ГГ) = 0,25$ частотой составила $\varepsilon = 0,02$. Теперь, имея формулу (12), можно рассчитать надежность этой замены и предсказать, как часто статистическая вероятность будет отличаться от истинной вероятности менее, чем на $\varepsilon = 0,02$. Сделаем этот расчет.

**Пример 9**. Две монетки подбрасываются 500 раз и по результатам эксперимента вычисляется статистическая вероятность $p^*$ появления двух гербов (событие $ГГ$). Найти вероятность того, что ошибка от замены вероятности $p = \mathbf{P}(ГГ) = 0,25$ относительной частотой $p^*$ не превысит $\varepsilon = 0,02$, т.е. $p^*$ окажется в интервале $(0,23;\ 0,27)$.

**Решение**. Поскольку истинная вероятность $p$ известна, применяем формулу (12):

$$\mathbf{P}(|p^* - p| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02\cdot\sqrt{500}}{\sqrt{0,25\cdot 0,75}}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,02\cdot 22,361}{\sqrt{0,1875}}\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{0,447}{0,433}\right) \approx 2\Phi(1,032) \approx 0,698.$$

**Дополнение**. Если бы мы не знали истинной вероятности появления двух гербов, то надо было использовать формулу (12′), подставив туда вместо $p = 0,25$ полученную в результате эксперимента относительную частоту $p^* = 0,23$. При таком расчете мы бы имели:

$$\mathbf{P}(|p^* - p| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02\cdot\sqrt{500}}{\sqrt{0,23\cdot 0,77}}\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0,02\cdot 22,361}{\sqrt{0,1771}}\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{0,447}{0,421}\right) \approx 2\Phi(1,063) \approx 0,711.$$

Вы видите, что результат практически не отличается от предыдущего.

**Прогноз**. Если провести 100 экспериментов (каждый — по 500 подбрасываний двух монет), то примерно в 70-ти относительная частота появления двух гербов будет “близка” к истинной вероятности (ближе, чем на 0,02). Надежность замены $p$ на $p^*$ не высока.

Интересно было бы практически проверить этот прогноз. Это можно сделать, если все студенты группы, состоящей из 25 человек, проведут эксперимент. Примерно у $17-18$ студентов относительные частоты должны принадлежать интервалу $(0,23;\ 0,27)$.

Интересно также выяснить, сколько экспериментов $k$ надо провести, чтобы гарантировать попадание всех частот в интервал $(0,23;\ 0,27)$? Вероятностью, которая практически гарантирует это, принято считать $0,997$. Проведем расчет.

**Пример 10**. Сколько экспериментов $k$ надо провести в условиях примера 9, чтобы ошибка приближенного равенства $p \approx p^*$ не превысила $\varepsilon = 0,02$ с доверительной вероятностью $0,997$?

**Решение**. Нам нужно, чтобы выполнялось неравенство $\mathbf{P}\left(|p^* - p| < 0,02\right) \geqslant 0,997$. С учетом формулы (12), оно принимает вид:

$$2\Phi\left(\frac{0,02\cdot\sqrt{k}}{\sqrt{0,25\cdot 0,75}}\right) \geqslant 0,997 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0,02\cdot\sqrt{k}}{0,433}\right) \geqslant 0,499.$$

Найдем, пользуясь таблицей приложения 3, то значение аргумента $x$, при котором функция Лапласа $\Phi(x)$ принимает значение $0,499$, — оно приближенно равно $x = 3,1$. Поскольку функция Лапласа возрастающая, то из предыдущего неравенства следует

$$\frac{0,02\cdot\sqrt{k}}{0,433} \geqslant 3,1 \Leftrightarrow 0,02\cdot\sqrt{k} \geqslant 1,342 \Leftrightarrow \sqrt{k} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1,342}{0,02} \Leftrightarrow 67,1 \Leftrightarrow k \geqslant 67,1^2 \Leftrightarrow k \geqslant 4502,4.$$

**Прогноз**. Чтобы надежно добиться удовлетворительной точности определения вероятности по частоте, надо провести грандиозное число опытов — четыре с половиной тысячи. Вот как "плохо" сходится относительная частота к вероятности. Но сходится!

Решим теперь другую обратную задачу — определим ошибку $\varepsilon$ приближенного равенства $p \approx p^*$ при заданной доверительной вероятности его выполнения. Сделаем это на другом простом примере — при подбрасывании одной монетки, скажем, 1000 раз. Ответ на этот вопрос я дал вам в начале курса (лекция 1, п. 8, примечание) — $\varepsilon \leqslant 0,05$. Сейчас вы сможете получить его сами.

**Пример 11**. Монетка подбрасывается 1000 раз, после чего вычисляется относительная частота появления герба — $p^*$. Истинная вероятность появления герба известна: $p = 0,5$. Величина ошибки $\varepsilon$ от замены вероятности $p$ относительной частотой $p^*$ для данного эксперимента вычисляется просто: $\varepsilon = |p^* - p|$. Для разных экспериментов она разная. Мы хотим оценить ошибку для **всех** экспериментов. Это значит, что доверительной вероятностью надо выбрать число $0,997$.

**Решение**. Подставляем в левую часть формулы (12) значение выбранной доверительной вероятности $\mathbf{P}\left(|p^* - p| < \varepsilon\right) = 0,997$, а в правую часть — значения

$k = 1000$ и $p = 0,5$. В результате получаем уравнение для определения ошибки $\varepsilon$. Решаем его, используя найденный выше аргумент функции Лапласа $\Phi\,(3,1) \approx 0,499$:

$$0,997 = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{1000}}{\sqrt{0,5 \cdot (1-0,5)}}\right) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{31,6227 \cdot \varepsilon}{0,5}\right) \approx$$

$$\approx 0,499 \Leftrightarrow 63,2454 \cdot \varepsilon \approx 3,1 \Leftrightarrow \varepsilon \approx 0,0490.$$

**Прогноз**. Практически всегда после 1000 подбрасываний монетки относительная частота появления герба окажется заключенной в пределах $(0,45;\ 0{,}55)$, а число гербов, следовательно, в пределах $(450;\ 550)$. Прогноз этот проверить легче, нежели в опыте с подбрасыванием двух монет.

**Контроль 7**. Для определения вероятности поражения цели определенным орудием проведена серия из 100 выстрелов, из которых поразили цель 73 выстрела. Какова возможная ошибка от замены вероятности поражения цели относительной частотой, если доверительная вероятность должна быть не менее $0,9$? Какова максимальная практически возможная ошибка? Сделайте прогнозы в обеих случаях.

## 8. Упражнения

**1**. С.в. $X$ является суммой 24-х независимых с.в. $X_i, i = 1, 2, \ldots, 24$, каждая из которых равномерно распределена на промежутке $[0;\ 1]$. К какому классу относится с.в. $X$? Почему? Напишите приближенное выражение функции-плотности с.в. $X$. Найдите вероятность того, что при выполнении опыта над с.в. $X$ ее значения попадут в промежуток $[6;\ 8]$.

Ответ: 0,0023.

**Указание**. Числовые характеристики с.в. $X$ найдите, используя соответствующие формулы для равномерных с.в. (лек. 11, п. 2, (2) – (4)), а также свойство суммы математических ожиданий и дисперсий произвольных с.в. (лекция 10, п. 4).

**2**. С.в. $Z$ — число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи в течение суток. Известно среднее число вызовов $a = 73$. В предположении, что число вызовов в разные сутки не зависит друг от друга, найдите вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов не выйдет за пределы промежутка $[26500;\ 26800]$.

Ответ: 0,6422.

**Указание**. Проверьте, что поток вызовов простейший (лекция 8, пп. 7-9). Определите тип с.в. $Z$, ее параметр и числовые характеристики (лекция 8. п. 3). Введите сумму с.в. $Z_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 365$, найдите ее числовые характеристики (так же, как в предыдущем упражнении). Примените центральную предельную теорему, запишите функцию-плотность суммы и рассчитайте то, что надо.

**3**. К концу рабочего дня в кассе Сбербанка осталась сумма $d = 3500$ (руб.). В очереди стоит $n = 20$ человек. Известно, что средняя сумма, выплачиваемая одному лицу, составляет $m = 150$ (руб.), а среднее квадратическое отклонение $\sigma = 60$

(руб.). Как вы думаете, хватит ли денег в кассе для выплаты всем вкладчикам, стоящим в очереди? Точнее, — как вы интуитивно оцениваете вероятность этого события? Рассчитайте ее. Оправдалось ли предположение?

**4**. В условиях предыдущего упражнения рассчитайте, какую сумму надо иметь в кассе, чтобы практически гарантировать (с вероятностью 0,995) выплату всем 20-ти клиентам.

Ответ: 3691.

**5**. Сложная техническая система (ТС) состоит из достаточно большого числа $n$ идентичных технических устройств (ТУ), соединенных последовательно. В случае отказа $i$-го ТУ происходит мгновенное и безотказное переключение на следующее по порядку ТУ. Время безотказной работы каждого $i$-го ТУ есть случайная величина $T_i$, распределенная по показательному закону с параметром $\lambda$, одинаковым для всех ТУ. Случайные величины $T_i$ независимы между собой. Найдите вероятность того, что система ТС проработает безотказно время, не меньшее заданного $\tau$.

Ответ: $0,5 - \Phi\,(\lambda\tau - n)/\sqrt{n}$.

**6**. Имеется последовательность независимых с.в. $X_1,\ X_2,\ \dots\ ,\ X_k,\ \dots$ , причем, $k$-я с.в. $X_k\quad (k = 1,\ 2,\ \dots)$ равномерно распределена на промежутке $[0;\ 2 - 1/k]$. Как вы думаете, достаточно ли близки их дисперсии, чтобы суммы $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ приближались к нормальному распределению с ростом числа слагаемых $n$? Проверьте, выполняется ли условие Ляпунова?

**7**. В условиях предыдущего упражнения с.в. $X_k\quad (k = 1,\ 2,\ \dots)$ равномерно распределены на промежутке $[0;\ k]$. Вопросы те же.

**8**. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оцените вероятность того, что потребуется а) более 210 бросаний кости; б) менее 180 ; в) от 190 до 210.

Ответ: 0,85; 0,0013; 0,08 (порядок ответов другой).

**Указание**. Сначала сделайте интуитивное предположение, какая из искомых вероятностей больше, какая меньше, потом проверьте себя расчетом с помощью центральной предельной теоремы.

**9**. Автобусные билеты имеют шестизначные номера. Дети называют билет “счастливым”, если сумма первых трех цифр номера билета совпадает с суммой последних трех его цифр. Рассчитайте вероятность того, что купленный билет окажется “счастливым”. Расчет проведите двумя способами: непосредственным классическим подсчетом и с помощью центральной предельной теоремы. Сравните результаты.

**Указание**. Составьте вероятностную модель задачи, предполагая, что все билеты пронумерованы от 000000 до 999999 и выбор каждого билета равновероятен с выбором любого другого билета.

**10**. На улице стоит человек и продает газеты, которых у него 100 штук. Каждый из проходящих мимо него людей покупает газету с вероятностью 1/3. С.в. $\xi$ — число людей, прошедших мимо продавца за время продажи им всех газет. К какому типу относится с.в. $\xi$? Найдите $M$, $D$ и $\sigma$ этой с.в. С помощью правила "трех сигм" определите промежуток, в который практически достоверно попадают значения с.в. $\xi$. (Обозначения с.в. буквами греческого алфавита принято в университетских учебниках [5; 6]).

**Указание**. Введите с.в. $\eta_i$ — число людей, прошедших мимо продавца за время от продажи им $(i-1)$-й газеты до продажи $i$-й газеты.

**11**. Работа контролера на некотором производстве состоит в том, что он последовательно проверяет изделия одно за другим. Проверка каждого изделия состоит из одного или двух этапов: или контролер сразу оценивает качество изделия (этот этап длится 10 сек.), или на первом этапе принимает решение о более тщательной проверке и далее проводит такую проверку (второй этап тоже длится 10 сек.). Статистика показывает, что примерно половина всех проверяемых изделий подвергается тщательной проверке. Найдите вероятность того, что за 7-часовый рабочий день контролер проверит а) более 1800 изделий; б) более 1600 изделий; в) не менее 1500 изделий.

**12**. В условиях контрольного упражнения 3 составьте ряд распределения с.в. $Y_{10}$ — число поражений цели при 10-ти выстрелах (вероятность попадания одним выстрелом 0,15). Постройте многоугольник распределения с.в. $Y_{10}$ и сравните его с многоугольником для с.в. $Y_6$, — намного ли уменьшилась скошенность? На сколько нужно увеличить число выстрелов $k$, чтобы можно было моделировать с.в. $Y_k$ нормальной с.в.? Рассчитайте при этом $k$ (выберите его четным) вероятность попаданий а) ровно половины выстрелов; б) более половины; в) от $(k/2)-5$ до $(k/2)+5$ выстрелов.

**13**. Статистически определено, что 60% выпускаемых заводом изделий относятся к первому сорту. Приемщик наугад отбирает 200 изделий. Сколько в его выборке окажется изделий 1-го сорта (примерно)? Определите вероятность вашего предположения. (Не удивляет ли вас малость полученной вероятности? Как ее объяснить?). Рассчитайте вероятность того, что изделий 1-го сорта в выборке будет а) больше 120-ти; б) от 120 до 150 штук.

Ответ: б) 0,5.

**14**. Требуется выборочным методом определить среднюю длину выпускаемых заводом изделий. Известно, что среднее квадратическое отклонение с.в. $L$ — длины изделия не превышает 0,04 см. Сколько необходимо измерить изделий, чтобы с вероятностью, большей 0,9, можно было утверждать, что средняя длина в выборочной партии измеренных изделий отличается от математического ожидания с.в. $L$ не более, чем на 0,001 см?

Ответ: более 16000.

**15**. Произведено 20 опытов над некоторой с.в. $X$, по результатам которых вычислены оценки $m^* = 10,78$, $D^{**} = 0,064$. Допустимая ошибка задана числом $\varepsilon = 0,08$. Рассчитайте надежность оценки $m^*$.

**16**. В условиях предыдущего упражнения постройте доверительный интервал для оценки $m^*$ при доверительной вероятности $p = 0,86$. Сделайте прогноз. Как изменится доверительный интервал, если увеличить число опытов до 50?

Ответ: $(10,70;$ 10,86).

**17**. В условиях упражнения 15 рассчитайте: сколько надо провести опытов, чтобы повысить надежность оценки $m^*$ до $p = 0,95$?

**18**. Произведено 16 измерений начальной скорости снаряда. Результаты измерений (в м/с) следующие: 1235,6; 1237,5; 1232,9; 1236,2; 1238,5; 1234,2; 1235,9; 1233,3; 1234,5; 1236,8; 1237,6; 1233,1; 1234,3; 1237,5; 1235,4; 1234,7. Вычислите оценки $m^*$ и $D^{**}$ для с.в. $V$ — начальной скорости снаряда. Определите степень точности той и другой оценки, если их надежность должна быть не менее 0,9.

Ответ: 1235,5; 3,06; 0,72; 1,06.

**19**. В условиях предыдущего упражнения определите надежность оценок $m^*$ и $D^{**}$, если степень их точности задана числом $\varepsilon = 1$.

**20**. В условиях упражнения 18 рассчитайте: сколько надо провести измерений начальной скорости снаряда, чтобы обеспечить надежность оценки $m^*$, равную 0,95, при ее точности $\varepsilon = 0,5$? Тот же вопрос для оценки $D^{**}$.

**21**. Монетка подбрасывается 150 раз и по результатам этого эксперимента определяется относительная частота появления герба $p^* = P^*(\Gamma)$. Рассчитайте вероятность выполнения неравенства $|p^* - 0,5| < 0,05$. Сделайте прогноз. Как проверить ваш прогноз? Выполните эту проверку, если возможно.

**22**. Сколько подбрасываний монетки надо провести, чтобы ошибка приближенного равенства $p^* \approx P(\Gamma) = 0,5$ была меньше $\varepsilon = 0,05$ с доверительной вероятностью 0,9?

**23**. В условиях упражнения 21 неравенство $|p^* - 0,5| < \varepsilon$ выполняется с доверительной вероятностью 0,9. Найдите $\varepsilon$.

**24**. В некотором опыте возможно случайное событие $A$. Для статистического определения его вероятности проведено 300 опытов, в которых событие $A$ появилось 250 раз. Найдите вероятность того, что ошибка от замены истинной вероятности $p$ (которую мы не знаем) события $A$ его статистической вероятностью $p^*$ не превысит $\varepsilon = 0,05$. Найдите доверительный интервал $(p^* - \varepsilon;\ p^* + \varepsilon)$, покрывающий неизвестную вероятность $p$ с надежностью 0,95. Сколько опытов надо провести, чтобы интервал $(p^* - 0,05;\ p^* + 0,05)$ покрывал истинную вероятность $p$ события $A$ с доверительной вероятностью 0,95?

Ответ: $0,78 < p < 0,87$.

**25**. В страховой компании застраховано 10000 человек. Клиент платит в год 12 руб. страховых и при несчастном случае получает 1000 руб. Статистические наблюдения показывают, что в год происходит примерно 6 несчастных случаев на каждые 1000 клиентов. Рассчитайте вероятности событий: $A$ — в результате годовой деятельности компания потерпит убыток; $B$ — получит прибыль до 50 тыс. руб.; $C$ — прибыль ровно 50 тыс. руб.; $D$ — от 50 тыс. до 70 тыс. руб.; $E$ —

более 70 тыс. руб. Сделайте прогнозы.

**Указание**. Введите дискретную с.в. $Z$ — число несчастных случаев с клиентами страховой компании в течение года.

**Литература**

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. С-Пб.; Лань. 1998.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.; Наука. 1998.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.; Высшая школа. 2000.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М.; Высшая школа. 2000.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.; Наука. 1988.
6. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М.; МГУ. 1963.
7. Мостеллер Ф., Рурке Р ., Томас Дж. Вероятность. М.; Мир. 1969.
8. Фрай Т. Теория вероятностей для инженеров. М.-Л.; ГТТИ. 1934.

*Игорь Петрович Костенко,*
*кандидат физ.-мат. наук, доцент,*
*действительный член Международной*
*педагогической академии.*
*email: kost@kubannet.ru*

## Сообщение о выходе книги Костенко И. П. “Введение в вероятностное прогнозирование. Курс лекций и упражнений.”

Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. - 316 стр.

В книге даётся дидактически проработанное изложение основ теории вероятностей и математической статистики в органическом единстве с приложениями. Материал представлен в виде 12 лекций, к каждой из которых разработана система упражнений-задач, согласованных с содержанием лекции. Изложение подробное и частично проблемное. Цель - стимуляция мышления и действий учащегося для достижения осмысленного понимания. Органически взаимодействуют теория и практика. Основные понятия и теоретические обобщения подготавливаются и мотивируются примерами. Лекции структурированы на небольшие разделы, имеющие учебную цель, достижение которой учащийся может проверить с помощью контрольных заданий. Книга ориентирована на студентов технических специальностей вузов. Но неформальность языка и подробность подачи материала позволяют понять основное содержание любому читателю, способному логично мыслить.

Методика изложения может быть интересна преподавателям вузов и студентам пединститутов.

ISBN 5-93972-356-X. УДК 519.21, ББК 22.171.

**Рецензент:** академик РАО, доктор физ.-мат. наук, проф. И. И. Баврин.

## Содержание

Предисловие
Лекция 1. Понятие вероятности
Лекция 2. Расчет вероятностей, когда исходов много
Лекция 3. Расчет вероятностей с помощью теорем сложения и умножения
Лекция 4. Расчет вероятностей в схеме с повторением опытов
Лекция 5. Дискретные случайные величины (С.В.) (основные понятия)
Лекция 6. Начала математической статистики
Лекция 7. Биномиальные С.В.
Лекция 8. Пуассоновские С.В.
Лекция 9. Непрерывные С.В. Закон распределения вероятностей
Лекция 10. Числовые характеристики Н.С.В.
Лекция 11. Типы случайных величин (равномерные, показательные, нормальные)
Лекция 12. Приложения формулы Гаусса
Приложения (таблицы значений функций Гаусса, Пуассона, Лапласа)

# Математические заметки

*С. В. Дворянинов*

Предлагаем вниманию читателей две заметки по различным разделам математики, написанные нашим постоянным автором С. В. Двоияниновым. В первой из них рассматривается интерпретация нотной записи как ряда графиков функций от времени и высказывается гипотеза, что нотная запись могла влиять на становление понятия графика функции. Во второй обсуждается связь между двумя классическими геометрическими результатами — теоремой Понселе и теоремой Штейнера.

## Что стимулировало возникновение понятия графика функции

Известно [1], что однажды "в компании молодых физиков зашел шутливый спор о том, кто из современных поэтов лучше всего знает физику? После долгих дебатов пальма первенства была присуждена Михаилу Исаковскому за его популярную песню "Катюша". Героиня этого произведения, желая, чтобы ее песенка-привет поскорее долетела до милого друга, выбирает в качестве оптимальной скорости скорость света.

*Ой, ты, песня-песенка девичья,*
*Ты лети, как ясный солнца свет,*
*И бойцу на дальнем пограничье*
*От Катюши передай привет.*

Девушка права. Скорость света максимальная из всех возможных в природе."

Давайте поставим такой же вопрос относительно математики — кто (кроме математиков-профессионалов) лучше всего знает математику? Конечно, не будем вести речь обо всей математике — тогда предмет получится слишком обширным. Ограничимся только графиками функций. С функциями и их графиками каждый встречается в школе. Функция может быть задана, в частности, формулой или графиком. Определение свойств функции по ее графику называют чтением графика. Это очень важное умение. Оно важно в первую очередь даже не для математиков, а для специалистов многих других профессий. Так экономист должен уметь читать график, описывающий, например, выпуск продукции; метеоролог — кривую, выдаваемую самописцем прибора, фиксирующего изменение температуры, влажности или давления атмосферы. Кардиограмма, описывающая работу сердца, и энцефалограмма, представляющая процессы, протекающие в головном мозге, — важные источники информации для медиков. Все эти специалисты читают графики конкретных функций. Так кто же лучше всех читает графики функций?

Наш ответ может показаться неожиданным: лучше всех читают графики ... музыканты! Приведем, как это принято в математике, доказательство этого утверждения.

Во-первых, нотная запись — это своеобразное представление графика некоторой функции. В качестве аргумента этой функции выступает время. Музыкальное произведение начинается и заканчивается. Соответствующий временной промежуток — область определения этой функции. Каждому значению времени соответствует определенный звук или тон, высота которого и есть значение функции. Для простоты будем вначале говорить о самой простой такой функции, например, о музыкальном произведении для одного голоса. Нотная запись — это представление математических функций, которые называют кусочно-постоянными. Значение таких функций на некотором временно́м промежутке остается неизменным.

Обычно графики функций рисуют в декартовой прямоугольной системе координат. На горизонтальной оси — называемой осью абсцисс — отмечают значения аргумента, на вертикальной оси ординат — числовые значения функции. В нотной записи горизонтальная ось — временна́я — подразумевается (так иногда на циферблате часов вместо чисел в соответствующих местах ставят черточки, кружочки, или какие-нибудь другие знаки, и это не вызывает никаких недоразумений). Своеобразно в музыке отмечают и временной промежуток постоянства функции — длина этого промежутка оси абсцисс закодирована в написании самой ноты. Целой ноте соотносят отрезок времени, длительность которого принимается за единицу. Есть ноты половинные, четвертные, восьмые и т.д. Все это хорошо известно каждому, кто хоть чуть-чуть сталкивался с нотной грамотой, и составляет азы этой грамоты.

Современное нотное письмо было создано итальянским музыкальным теоретиком Гвидо Д'Ареццо (Guido d'Arezzo, 990 – около 1050), или Гвидо Аретинским. Его реформа нотного письма стала основой используемой ныне нотации. Для сравнения напомним, что в древнегреческой музыке звуки обозначались буквами, записываемыми в строчку. У Ареццо появился нотный стан, состоял он не из пяти линий как сейчас, а из четырех.

Хорошо известно, что современная музыка использует не все возможные звуки, а только некоторые (вспомните для примера клавиатуру рояля или фортепиано). Какие же звуки включают в музыкальной строй? Набор звуков не был неизменным во все времена, да и выбор их осуществлялся по-разному. Имеются два естественных условия, которым должен удовлетворять музыкальный строй: 1) требование благозвучности включаемых в музыкальную шкалу звуков и 2) возможность точного воспроизведения одной и той же мелодии на разных высотах — такой перенос мелодии называют транспонированием (последней операции в математике соответствуют параллельные переносы — или сдвиги — графиков функций вдоль вертикальной оси ординат вверх-вниз).

Два названных условия делают поставленную задачу — задачу выбора звуков музыкального строя — неразрешимой. Не существует никакого набора звуков, который удовлетворял бы сразу двум указанным условиям. Удивительно, что это обстоятельство связано с иррациональностью числа $\log_2 3$. Об этом доступно для старшеклассников рассказано в книгах Г. Е. Шилова [2] и Р. Ю. Волковыского [3]. (Между прочим, про иррациональные числа говорят в школе, когда объясняют несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Иррациональность числа $\sqrt{2}$ означает, что не существует такого отрезка, который укладывается целое число раз и на стороне, и на диагонали квадрата).

Следовательно, возможен лишь такой выбор звуков, который приближенно удовлетворяет двум условиям. Такой выбор называют темперированным музыкальным строем. Современный темперированный строй в музыке предложил в 1636 г. Марен Мерсенн (1588—1648) [3,4]. Этот человек широчайшей эрудиции и неутомимый пропагандист новых естественнонаучных идей получил хорошее образование в иезуитском коллеже, открытом в 1604 г. в городе Ла-Флеш. После завершения обучения он поступил в суровый монастырь миронитов. Монашеская келья Мерсенна стала центром французской науки. С 1635 г. в ней еженедельно происходят собрания физиков и математиков, на которых обсуждаются все научные новости. Но этого мало. Мерсенн был настоящим "человеком-учреждением". В то время, когда научных журналов еще не было, ученые узнавали о трудах друг друга главным образом путем переписки. Мерсенн стал ее центром. Он переписывался с Декартом, Гюйгенсом, Ферма, Торричелли, Кавальери и многими другими. Мерсенн в течение ряда лет играл роль европейского центра научной информации. Из его частных собраний друзей-ученых Academia Parisiensis уже после его кончины выросла Парижская академия наук.

В 1636 г. Мерсенн выполнил расчет современной равномерной темперации. Окончательно новый музыкальный строй утвердился почти через сто лет, здесь велика роль "Равномерно темперированного клавира" И. С. Баха.

Среди критиков Мерсенна, ставивших под сомнение математический принцип расчета музыкального строя, был и Рене Декарт, другой знаменитый воспитанник коллежа в Ла-Флеш. И вот что здесь является примечательным и на что хочется обратить внимание.

В 1637 г. (через год после изобретения Мерсенна) вышла в свет "Геометрия" Декарта. Он пишет: "Все точки линии ... обязательно находятся в некотором отношении ко всем точкам прямой линии, которое может быть выражено некоторым уравнением". Несколько перед этим Декарт объяснил, как вычислять значение функции по значению аргумента.

*От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике* — таков путь познания. Что же созерцал Декарт и что привело его к абстрактному понятию функции? Можно с уверенностью сказать, что здесь сыграло свою роль и созерцание ... нотных записей! Мерсенн был другом Декарта, Мерсенн рассказывал ему о своих занятиях теорией музыки. Возникавшие проблемы они обсуждали в письмах...

Шесть столетий существовал и использовался единственный особый вид графика функции — нотная запись. Это обстоятельство нельзя исключать из истории математики. Мерсенн, создав современный темперированный музыкальный строй, решил важную “прикладную” задачу. Об этом очень скупо говорится в математической литературе и популярных энциклопедиях. Быть может, это открытие Мерсенна важнее того, что он впервые измерил скорость звука в воздухе и о чем упоминают все словари. Работы Мерсенна по теории музыки безусловно стимулировали его друга Рене Декарта к открытию им понятия декартовой системы координат и понятия функции.

Общепризнанно, что точки роста нового знания возникают на стыке наук. Мы постарались показать, как соприкосновении музыки и математики, искусства и науки, привело к столь важному и глубокому понятию функции.

Вернемся все же к вопросу о том, кто лучше всех читает графики функций. Теперь вам понятно, что пианисту одновременно приходится читать до десяти графиков...

А сколько графиков одновременно читает дирижер?!

### Литература


1. Попов Ю., Пухначев Ю. Пневмоника // Наука и жизнь, 1965, №1.

2. Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. М.: Наука, 1980.

3. Волковыский Р. Ю. Музыка и наука. Популярный рассказ о музыкальной акустике. М.: Наука, 1993.

4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. Том второй. Математика XVII столетия. / Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1970.


# О двух классических теоремах евклидовой геометрии

*Мне осталась*
*Одна забава:*
*Сочинить, —*
*И отправить Вам...*

Начнем с недавней публикации в журнале “Квант” [1]. Это статья по геометрии. Геометрии элементарной и классической. В статье всего два небольших чертежа, но при этом умная и запоминающаяся иллюстрация. Теперь про то, о чем эта статья.

Наверняка, многим нашим читателям приходилось видеть подшипник. Подшипники бывают двух видов — шариковые и роликовые. Представим себе, что такие подшипники лежат на столе, а мы смотрим на них сверху. Мы увидим две концентрические окружности, соответствующие внешней и внутренней обоймам подшипника, а между ними еще несколько маленьких окружностей — видимые очертания шариков или же основания роликов (ролики имеют форму цилиндров). Эти маленькие окружности касаются двух первых. Во избежание ненужного дополнительного трения шарики и ролики не касаются друг друга — их отделяет один от другого сепаратор. Легко представить себе идеальную картинку, — при которой каждый шарик касается двух соседних (такие подшипники тоже используют). При этом цепочку из шариков можно перемещать между концентрическими окружностями по часовой стрелке или против — картина при этом качественно меняться не будет.

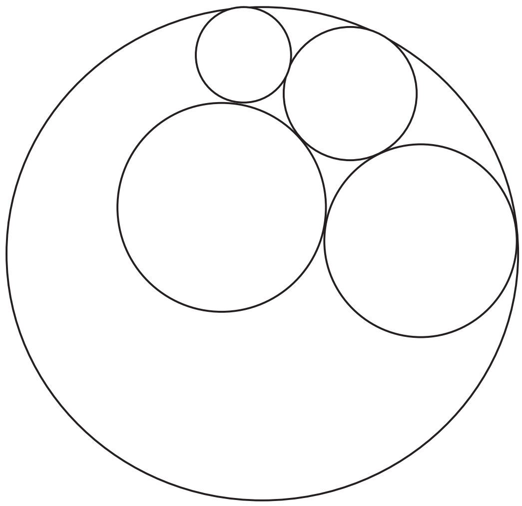
Можно теперь на плоскости взять две непересекающиеся *неконцентрические* окружности и рассмотреть кольцо — ограниченную ими часть плоскости. Эти окружности называют закрепленными. Если некоторая окружность расположена в кольце и касается обеих закрепленных окружностей, то ее называют вписанной в кольцо. *Цепочкой Штейнера* называют такую последовательность окружностей $C_1$, $C_2$, ... , вписанных в кольцо, что для каждого $n = 1$, 2, ... окружность $C_{n+1}$ касается окружности $C_n$ и расположена относительно $C_n$ по ходу часовой стрелки. Выбор окружности $C_1$ однозначно определяет всю цепочку окружностей, которую называют цепочкой Штейнера.

Если при некотором $n$ окружность $C_n$ коснется окружности $C_1$, то цепочка замкнется и превратится в *ожерелье Штейнера.* — Так называют набор из $n$ окружностей, вписанных в кольцо и таких, что каждая окружность касается ровно двух других окружностей этого набора. При этом вписанные окружности могут пересекаться.

Основное свойство этой конструкции представляет *теорема Штейнера*: если цепочка замкнулась при некотором выборе начальной окружности $C_1$, то при любом другом выборе начальной окружности $C_1'$ соответствующая цепочка Штейнера тоже замкнется и тоже возникнет ожерелье. При этом количество окружностей в ожерельях одинаково (рис. 1).

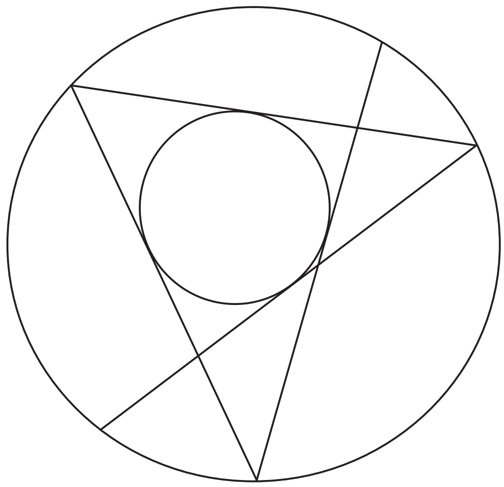
Прочитав это, я сразу вспомнил очень похожий чертеж из статьи [2] (рис. 2) и соответствующую теорему Понселе:

Пусть окружность $\beta$ лежит внутри окружности $\alpha$. Из точки $A$ окружности $\alpha$ проведем касательную к окружности $\beta$ и найдем вторую точку $A_1$ ее пересечения с $\alpha$. Из точки $A_1$ проведем касательную к $\beta$ и найдем вторую точку $A_2$ ее пересечений с $\alpha$ и т.д. Если для некоторой точки $A$ точка $A_n$ совпадает с $A$, то это будет выполнено и для любой другой точки окружности $\alpha$.



*Цепочка Штейнера из трех окржностей*

*Рис. 1.*



*Цепочка Понселе из четырех хорд*

*Рис. 2.*

Естественно последовательность хорд из этой теоремы назвать цепочкой Понселе, а замкнутую цепочку — ожерельем Понселе (1788—1867). Но вот что сразу бросается в глаза: при внешней схожести двух теорем — теоремы Штейнера и теоремы Понселе — в статье [1] не упомянут Понселе, а в статье [2] нет ни слова о Штейнере (1796—1863). А ведь жили они и работали в одно и то же время, читали одни и те же журналы! При этом в [1] нет никаких ссылок. В [2] единственная ссылка на задачи №№ 614 и 615 из [3], содержащие условие и доказательство теоремы Понселе (*без* указания имени).

В сборнике задач [4] параграф "Цепочки окружностей" содержит задачи 28.21 и 28.22 и их решение с применением инверсии, представляющие теорему Штейнера, но и здесь имя не названо. (Заметим, что такое же доказательство теоремы имеется в [1]).

Параграф "Вписанно-описанный четырехугольник" в [4] содержит частный случай теоремы Понселе для последовательности из *четырех* хорд. Имя Понселе также не упомянуто.

Ничего не говорится про цепочки и ожерелье Штейнера в очень интересной статье [5]. После этого не остается ничего другого, как обратиться к фундаментальной трехтомной истории математики [6]. И вот здесь нас подстерегает неожиданность...

В третьем томе [6] читаем: "Отметим еще работы Н. Фусса по "проблеме замыкания". Прежде всего он занялся задачей о четырехсторонниках, около которых можно описать и в которые можно вписать круги (Nova Acta, (1792) 1797); вскоре он обобщил задачу на некоторые виды многоугольников с числом сторон, большим четырех (Nova Acta, (1795-1796) 1802). Впоследствии задачей об условиях того, что многоугольник, образованный хордами круга, являющимися одновременно касательными к находящемуся внутри него другого круга, является замкнутым, занялся Я. Штейнер (1827), а полное решение проблемы замыкания для круга дал с помощью эллиптических функций К. Г. Якоби (1828). Понселе в своем трактате по проективной геометрии (1822) распространил эту проблему на конические сечения".

Итак, первым цепочки рассматривал Н. И. Фусс (1755—1825), — выходец из Швейцарии, непосредственный ученик великого Леонарда Эйлера (1707—1783), его секретарь (с помощью Фусса Эйлер написал около 250 работ), академик Петербургской академии наук. Затем цепочками хорд занимался Штейнер. Почему же соответствующая теорема носит имя Понселе?

Понселе распространил проблему на конические сечения, в частности, на окружности, почему же соответствующую теорему называют теоремой Штейнера?

Конечно, дело историков математики разобраться со всеми тонкостями и приоритетами в этой ситуации. Подобных случаев в истории науки найдется немало. Вполне возможно, что теорему швейцарца Якоба Штейнера, работавшего в Германии, доказал французский военный инженер и математик Жан Виктор Понселе. Придумал же эту задачу другой европеец Nikolaus Fuss, ставший российским ученым по имени Николай Иванович... Одно из многих тысяч свидетельств единства нашей науки. Быть может, со временем так и будут говорить: проблему Фусса о цепочках хорд и окружностей решает теорема Штейнера-Понселе. Тем более, что обе эти теоремы объединяет их доказательство, использующее инверсию.

## Литература

1. Р. Исмагилов. *Ожерелье Штейнера, или Любовь к вычислениям.* Квант, №2, 2003, с. 9–12.

2. А. А. Заславский, Г. Р. Челноков. *Теорема Понселе в евклидовой и алгебраической геометрии.* Математическое образование. Журнал Фонда математического образования и просвещения, №4 (19), октябрь—декабрь 2001 г.

3. И. Ф. Шарыгин. Задачник по геометрии. М., издательство "Дрофа", 1996.

4. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Часть II. М., Наука, 1986.

5. И. М. Яглом. *Якоб Штейнер.* Квант, №7, 1988, с. 2–9.

6. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах. Под ред. А. П. Юшкевича. М., Наука, 1972.

*Дворянинов Сергей Владимирович,*
*доцент Самарского государственного*
*университета, к.ф.-м.н.*

*e-mail: dvoryan@ssu.samara.ru*

Редакция предполагает опубликовать главы из учебно-методического пособия А. Н. Землякова «Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов», предназначенного для классов с углубленным изучением математики. В настоящем номере мы публикуем методический и методологический комментарий, представляющий самостоятельный интерес. Автор формулирует задачи углубленного математического образования, предлагает определенные нормы создания современного учебника, а также обсуждает возможные стили работы с учебным пособием.

# Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий

*А. Н. Земляков*

Данное пособие состоит из концептуальной части (раздел 1), содержащей *методический и методологический комментарий* ко всему курсу в целом, рассматриваемому в более широких рамках *углубленного математического образования* в старших классах средней школы, формально-описательной части (раздел 2), содержащей *программу* курса и комментирующие ее дополнения, а также общую характеристику *учебного пособия*, и практической части (раздел 3)[1], в которой дается собственно *методический комментарий* к учебному пособию.

Задача данного пособия — не только помочь учителю в проведении занятий рассматриваемого элективного курса, но и способствовать уяснению авторской педагогической и методологической точки зрения на всю проблему углубленного математического образования.

[1]Этот раздел, а также первые главы пособия предполагается напечатать в следующем номере журнала. — *Прим. ред.*

## Предисловие. Место данного курса в системе обучения математике в средней школе

*Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу...*

Юджин Вигнер[2] «Непостижимая эффективность математики в естественных науках», 1959

Курс «Математический анализ реальности» (далее просто **МА**) имеет сугубо прикладную направленность и важный мировоззренческий аспект. Собственно дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) суть главные математические модели реально протекающих во времени процессов, а также и других зависимостей, феноменов, явлений. Это хорошо понимал создатель математического анализа Исаак Ньютон — недаром в своем письме Лейбницу от 1676 г. Ньютон зашифровал слова «Полезно решать дифференциальные уравнения» (Лейбниц сумел понять это).

В базисном/профильном курсах фигурируют три дифференциальных уравнения: уравнение экспоненциального роста/убывания $y' = ky$, уравнение равноускоренного движения $y'' = a = \text{const}$ и уравнение гармонических колебаний $y'' = -\omega^2 y$. Однако, не выходя фактически за пределы изучаемого в школе курса алгебры и начал анализа, учащихся можно и целесообразно ознакомить с гораздо большим числом прикладных примеров — от модели атомного реактора до вынужденных колебаний с трением. В основном курсе есть несколько тем, к которым примыкают те или иные темы элективного курса **МА**. Это: производная, тригонометрические функции, первообразная, показательные и логарифмическая функции.

Ориентируя данный курс на изучение в рамках 11 класса, мы исходили из того, чтобы этот курс не опережал основной. Возможно, в заключительном полугодии учащимся следовало бы дать больше свободного времени — тогда можно ограничиться частью I (1-м, *основным* модулем, рассчитанным на 30 ч плюс 5 ч резервного времени) курса, предоставив заинтересовавшимся школьникам самостоятельно ознакомиться с частью II (дополнительным модулем). Поясним: для простоты как программа, так и учебное пособие курса разбиты на два модуля: основной модуль 1, в котором рассматриваются непрерывные процессы (дифференциальные уравнения и эволюционные модели); и дополнительный модуль 2* — звездочка указывает в данном случае не на сложность, а на специфику тем: они относятся, можно сказать, к одномерной динамике, основой которой является второй закон Ньютона.

[2] *Юджин Поль Вигнер* (Eugene Paul Wigner, 1902–1995) — американский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии (1963).

Отметим, что в проекте обязательного минимума содержания основных образовательных программ по математике, причем на базовом уровне, предусмотрено следующее содержание образования в отношении темы «Функции и начала анализа» (мы ограничиваемся фрагментами проекта госстандарта образования).

«*Сложные процессы в природе и обществе и необходимость создания специального математического аппарата — дискретных и непрерывных моделей — для их количественного описания.*

*Равномерные и равноускоренные процессы и их описание с помощью линейных и квадратичных функций.*

*Периодические процессы и их описание с помощью тригонометрии...*

*Процессы быстрого* (*экспоненциального*) *роста. Геометрическая прогрессия как дискретный пример процесса быстрого роста... ...Сложные проценты, примеры быстрого роста в живой и неживой природе.*

*Необходимость построения непрерывной модели для описания непрерывного процесса быстрого роста и соответствующего обобщения понятия степени.*»

Кроме того: «*Предметно-мировоззренческая компетентность выпускника старшей школы предполагает, что он*:

— *владеет приемами построения и исследования математических моделей при решении прикладных задач, задач из смежных дисциплин*;

— *понимает особенности применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе*»— конец цитаты.

Эти составляющие базового образования достаточно глубоко могут быть освоены, на наш взгляд, только в рамках классов естественно-научного и математического профилей, причем в том случае, если им уделяется специальное внимание. И в профильных классах, в рамках профильного курса математики, это практически невозможно — тем более, что в содержании профильного математического образования перечисленные вопросы далее не раскрываются. Конечно, в данном случае можно воспользоваться возможностями элективных курсов, в том числе и рассматриваемого курса **МА**.

Следует отметить, что в силу обширности затрагиваемого в этом курсе содержательного материала, относящегося к непрерывным моделям и дифференциальным уравнениям, за пределами курса **МА** остались *дискретные* процессы и модели и соответствующие им *разностные* уравнения. Мы полагаем, эта тематика, предусмотренная проектом госстандарта математического образования (и даже на базовом уровне), должна бы войти в специальный элективный курс (для 10-х профильных классов)[3].

[3]Отметим, что разности и разностные уравнения включены нами в «Упражнения» к главе 2.

# Раздел 1. Методические и методологические проблемы углубленного математического образования

*...Садясь за письменный стол, я втихомолку все же помышлял о читателях, и без подкрепляющей меня надежды на их участие и поощрение у меня, наверное, не хватило бы усидчивости довести свою работу хотя бы до нынешней ее стадии.*

Томас Манн

Прежде чем перейти к конкретным вопросам рассматриваемого элективного курса, проанализируем состояние *углубленного математического образования* (далее **УМО**) в целом — с тем, чтобы прояснить, какое место занимает в нем данный курс, какие методические и методологические взгляды в нем реализованы. Нам представляется, что такой более широкий взгляд на проблемы может существенно помочь в понимании ведущих идей курса и предполагаемых методик его преподнесения. Сугубый практик может пропустить этот раздел, обратившись сразу к разделу 2 или даже к конкретике 3-го раздела.

## 1.1. Современные тенденции и вопрос об углубленном математическом образовании

*Поэт — издалека заводит речь.*
*Поэта — далеко заводит речь.*

Марина Цветаева

Говорить о методических аспектах углубленного математического образования бессмысленно, если не решены соответствующие организационные проблемы. Поэтому мы начнем с анализа некоторых тенденций, сопутствовавших развитию и организации образования последние 10–15 лет.

Основные тенденции 1990-х гг. *в структуре системы образования, во взаимодействии общества и школы*, можно охарактеризовать следующими моментами.

1) Внутри системы — *тенденция к большей вариативности образовательных форм* (однако вариативность зачастую только *формальная*), выражающаяся в почти стихийной организации различных по названию «форм» образования (лицеи, гимназии, учебно-научные центры, etc.). Инициатива при этом чаще всего исходила изнутри учительства, а мотивы были разнообразными — от реализации конкретных или абстрактных идей до стремления к определенной самостоятельности. Это происходило при взаимодействии самой школы с остальным социумом (см. ниже).

2) В «социо-окружении»— *проявление и возрастание активности социума* в лице родителей, *уменьшение разрыва между семьей и школой*, непосредственное влияние или даже вмешательство родительского актива в постановку образования в школе. Здесь две стороны. Сближение семьи и школы может существенно помочь в индивидуализации обучения. Вместе с тем, как отмечал еще один из крупнейших психологов XX века Карл Густав Юнг, *многие* ***трудности*** *в формировании самосознания ребенка своим истоком имеют* (*часто* ***бессознательное***) *родительское влияние*[4]. Это обстоятельство требует особого внимания со стороны школы (и психологической компетентности педагогов), и мы к нему еще вернемся.

3) Еще одна тенденция — известное *преодоление разобщенности, отчужденности средней и высшей школы.* Сюда входит и приход в среднюю школу вузовских преподавателей, и организация всевозможных «подготовительных» курсов при вузах (не говоря о СУНЦах — специализированных учебно-научных центрах), и уже почти система предварительных экзаменов в вузы (когда даже не школьники приходят на экзамены, а экзамены — в вузы — проводятся в школах). Безусловно, это положительная тенденция, но здесь необходимо *очень аккуратно* соблюдать меру в методике обучения, в содержании образования, в формировании тех или иных социальных установок у школьников. С 2001 г. под эгидой Министерства образования начинает проявлять себя еще и форма «экзамена-симбиоза»: ЕГЭ — единый государственный экзамен (выпускной в школах, приемный в вузах, проводимый независимыми организациями). Так или иначе, поворот вузов к школам — это хорошо (хотя здесь могут быть издержки, о которых мы будем говорить специально), но система приемных экзаменов в вузы далеко не устоялась.

4) Наконец, по-прежнему проявляет себя тенденция к *ранней специализации* — начиная с 7–8 классов или даже еще раньше[5]. На мой взгляд, это противоречит тому, что, согласно тому же Юнгу, «*Школа есть не что иное, как средство целесообразного поддержания процесса образования сознания*», при этом «*максимально возможная степень сознательности*» есть *культура*[6]. Полагаю, что, особенно в средних классах, нужна отнюдь не специализация, а *индивидуализация* обучения (и воспитания), разностороннее развитие детей в отношении *культуры* (в широком смысле слова) — и, разумеется, внимание к способностям детей и к способным детям (сейчас, хотя на другом уровне, собственно в школе вновь *преобладает* внимание к — в том или ином отношении — «отстающим» школьникам, к «коррекции»; это, разумеется, важно, но ... — см. далее).

Перечисленные тенденции — разнообразие форм среднего образования, сближение семьи и школы, школы и вузов, — на мой взгляд, сохранятся и в ближайшее

[4] Юнг К. Г., *Собр. соч.: Конфликты детской души.* — М.: Канон, 1994; с. 55–57, 148–150 и др.

[5] Со специализацией отчасти связано и определенное развитие системы частного и платного образования, от обсуждения которой я воздерживаюсь.

[6] Цит. соч., с. 55–56.

время. Они идут «в русле» общих тенденций современных реформ, в том числе, модернизации самой системы образования. При соблюдении осторожности в экспериментировании, наличия чувства меры со стороны «экспериментаторов», отказа от администрирования или «внедрения» сверху, но при условии должного внимания к «перестройке» системы общего среднего образования в указанных отношениях со стороны органов образования и, что особенно важно, внимания и *помощи* со стороны *квалифицированных специалистов* в области педагогики, дидактики, методики и педагогической психологии эти тенденции могут привести к созданию *достаточно гибкой* системы среднего образования и обойти вполне возможные в настоящее время «перегибы» (к ним можно отнести и неумеренное, необоснованное рекламирование всего и вся — как то было с «новаторством»).

Упомянутая, иногда необходимая, целесообразная помощь — это, прежде всего, *донесение до учительства и общественности практико-ориентированных исследований* — через издание учебников, методик, через публикации; *организация (практико-ориентированных!) консультационных центров*, etc. Далее, нужны и основывающиеся на современном опыте теоретические исследования (в частности, касающиеся *специализации* в рамках общеобразовательной школы). Все это, однако, возможно, на мой взгляд, только при некоем «прорыве» в отношениях между педагогической наукой и учительской практикой (если этого не будет, «ниша» будет неизбежно заполняться, с одной стороны, вузовскими, а с другой стороны, самодеятельными и часто «самодостаточными» концепциями — то и другое может привести к издержкам в организации школьного образования, хотя *сразу* они и не будут очевидными!).

В те же 1990-е г. основные тенденции *внутри системы образования, воззрения на его главные цели и содержание* можно обрисовать так.

1) Главная тенденция — *превращение образования из массового в индивидуальное.* Она обусловливает сугубую важность правильного *психолого-педагогического подхода* к образованию каждого. Эта тенденция естественна в условиях демократизации, гуманизации общества, усиления внимания к *личности.*

2) Другая важнейшая тенденция — *углубление внимания к гуманитарному образованию* (главной проблемой здесь остаются учительские кадры — не только квалифицированные в специальном и профессиональном смысле, но *учителя́-личности*), *к гуманитаризации всего образования.* Подразумевается усиление роли «гуманитарной компоненты» в преподавании естественно-научных дисциплин и математики, особое внимание к взгляду на школьные предметы с точки зрения *культуры.* В этой связи отметим, что еще в 1956 г. на конференции ЮНЕСКО бельгийский математик и педагог Вилли Сервэ заявил: «*С выдающейся культурной ценностью математики может сравниться лишь ценность ее как орудия нашего воздействия на внешний мир*» [7].

[7]См. сб. «*Математическое просвещение*», вып. 1, М.: Физматгиз, 1957, с. 24.

3) Следующая важная особенность — усиление *дифференциации образования.* Стоит отметить связь дифференциации с индивидуализацией, с организацией системы школьной работы со способными или одаренными школьниками, особую важность этого в условиях социальных перемен. Опять-таки, К. Г. Юнг еще в 1946 г. отметил: «*... Своеобразная или способная на своеобразие личность имеет величайшее значение для общего блага народа. Поголовное усреднение народа как целого путем подавления естественной аристократической или иерархической структуры неизбежно — рано или поздно — приводит к катастрофе. Ведь если нечто выдающееся снивелировано, то утрачиваются ориентиры и страстное желание быть ведомым становится непреодолимым*» [8]. С дифференциацией связана и специализация, но таковая должна быть *разумной*[9].

Все перечисленные общие тенденции ведут как к *изменениям в содержании образования*, так и к переосмыслению *целей* общего среднего образования. В этих *тенденциях,* наряду с глобальной *информатизацией* и тотальной *глобализацией* всего мира, истоки перманентно идущей в российском образовании *реформы — модернизации — совершенствования...*

Для нас же важное и основное в дальнейшем: *признание и обществом, и государством необходимости и целесообразности дифференциации на старшей ступени образования*, а значит, и *углубленного математического образования* — при 12-летнем обучении или без оного, с ЕГЭ или без ЕГЭ...

И снова встают проблемы — в первую очередь, *проблема учебника* и *проблема учителя.*

### 1.2. Новые проблемы математической школы

> *В случае, если цивилизация будет продолжать развиваться, в следующие две тысячи лет преобладающим нововведением человеческой мысли будет доминирование математического понимания.*
>
> Альфред Норт Уайтхед, 1861–1947

Углубленное математическое образование в России существовало, можно сказать, всегда: конечно, открытая Петром I в 1701 г. в Москве так называемая «*Математических и навигацких, т. е. мореходно-хитростных наук школа*» (для обучения русских юношей, «*добровольно хотящих, иных же паче и со принуждением*»!) и есть первая российская школа с углубленным изучением математики (и не

[8] Указ. соч. Юнга, с. 161–162.

[9] Проблема очень непростая: «*... Трудно ответить на вопрос, действительно ли воспитание особо одаренных детей в отдельных классах ... несет с собой какие-то преимущества. По крайней мере я не хотел бы быть экспертом, которому вменяется в обязанность отбирать пригодных для этого детей. Если, с одной стороны, это сильно способствовало бы одаренным детям, то, с другой стороны, этому противостоит тот факт, что тот же самый ученик (в иных духовных и человеческих отношениях) отнюдь не всегда стоит на высоте своего дарования*». — К. Г. Юнг, там же, с. 159.

только ее). Система школ и классов с углубленным изучением математики (к ним можно отнести и школы/классы с углубленным изучением физики, ибо и в них математика изучалась на продвинутом уровне) практически всегда существовала и в Советском Союзе (не говоря о появившихся в 1960-е гг. ФМШ-интернатах при университетах). С чем же связаны вновь появившиеся проблемы учебника и учителя? Основных причин две.

1) *Внешняя* причина связана с упомянутой тенденцией резкого увеличения числа профильных классов и школ, причем разного уровня. Понятно, что давно признанные лидеры углубленного изучения предмета (такие, как московская 57, или петербургская 45, или белорецкая школы) сохранят свой весьма высокий уровень и так или иначе решат проблему учительских кадров. Но понятно также, что в каждом городе или районе должна появиться школа достаточно высокого уровня, в каждой или почти каждой крупной средней школе — класс такого уровня. Если в советской системе образования обучение в таких школах или классах (или у *такого* учителя) носило почти элитарный характер (почти как обучение в английских школах!), то в условиях перехода к «демократическому элитаризму» возникает **большая проблема** с учителями.

   Частично ее решение облегчается решением *проблемы учебника* (точнее, учебно-методического комплекса, но мы для краткости будем говорить просто «учебник»— тем более, что действительно «классный» учебник — почти «сам себе комплекс»), и к этому вопросу мы еще вернемся.

2) Вторая причина *внутренняя* и состоит в реальной необходимости пересмотра содержания углубленного математического образования. Вообще вопрос о пересмотре содержания образования стоит перманентно и относится не только к углубленному, но и основному уровню. Пересмотр основного содержания по естественным (например, экономическим) обстоятельствам все-таки происходит только время от времени (или в случае чрезвычайных обстоятельств — типа реабилитации «генетики» как «советской науки» ...). Как правило, пересмотр основного содержания подготавливается апробацией новаций в системе углубленного образования (школы, классы, факультативы), поэтому обновление содержания в этой системе должно происходить практически беспрерывно. Это осуществимо лишь на базе сравнительно небольшого числа «экспериментальных площадок»— школ, классов-лабораторий... А в рамках довольно значительной системы школ и классов с углубленным изучением предмета, как это обстоит с математикой, постоянное обновление содержания также практически неосуществимо. Как же конкретно обстоит дело с углубленным математическим образованием?

   Чтобы ответить на этот вопрос, придется возвратиться еще на 20–25 лет. В середине 1960-х началась перестройка содержания *основного* школьного математического образования, формально («худо-бедно») завершившаяся где-то к концу 1970-х. Здесь возможны разночтения в датах, но мы рассматриваем только старшую ступень, причем смену «Алгебры» и «Тригонометрии» «*Алгеброй и началами анализа*». Это был важный, принципиальный шаг: введение в школьный курс элементов математического анализа. В Германии Феликс Клейн ратовал за эту новацию для гимназий еще с начала XX века! Справедливости ради надо отметить, что элементы математического анализа были введены в программы российских гимназий еще «при Пушкине»— в 1804 г., но при нем же, в 1814 г. были и исключены (не иначе как из-за французов или из-за происков зловредного Жозефа де Местра!); после того элементы анализа изучались в российских реальных училищах с 1907 по 1917 г[10]. И, наконец, свершилось! К самому́ этому факту мы еще вернемся, а сейчас остановимся на содержании *углубленного* курса алгебры и анализа после перестройки основного курса математики.

Практически оно осталось прежним — и в части математического анализа по номенклатуре почти не отличалось от основного курса (хотя загодя, с 1965 г., стали выходить очень полезные сборники «*Проблемы математической школы*», в которых, в частности, обсуждались связи между высшим, углубленным и общеобразовательным курсами математики). Может быть, так и нужно было, но далее буквально ежегодно становилась все более ясной важность математики практически для всех областей науки, производственной и общественной деятельности. И на содержании школьного математического образования, хотя бы на углубленном уровне, это должно было отразиться.

На упомянутом «явлении» усиления роли математики в общественной практике, называемом «**математизацией**», мы остановимся специально. А пока же... перечитайте эпиграф к этой главке... — и, вслед за Борисом Пастернаком, спросите:

*Какое, милые, у нас*
*Тысячелетье на дворе*?..

[10]См. заметку Р. З. Гушель в журн. «Математическое образование», 2000, 4 (с. 76–78).

### 1.3. Курица или яйцо? Цели или программы? Программа или учебник?

*— Ты хочешь сказать, что думаешь, будто знаешь ответ на эту загадку? — спросил Мартовский Заяц.*
*— Совершенно верно, — согласилась Алиса.*
*— Так бы и сказала, — заметил Мартовский Заяц.*
*— Нужно всегда говорить то, что думаешь.*
*— Я так и делаю, — поспешила объяснить Алиса. — По крайней мере... По крайней мере я всегда думаю то, что говорю... а это одно и то же...*
*— Совсем не одно и то же, — возразил Болванщик.*
*— Так ты еще чего доброго скажешь, будто «Я вижу то, что ем» и «Я ем то, что вижу», — одно и то же!*
*— Так ты еще скажешь, будто «Что имею, то люблю» и «Что люблю, то имею», — одно и то же! — подхватил Мартовский Заяц.*

Льюис Кэрролл[11]

Итак, необходимо обновление содержания углубленного курса алгебры и анализа, и нужен новый учебник. Откуда его взять? — Не́откуда. Его нужно написать, разработать, подготовить (кому что нравится). А как? — Вот здесь и возникают проблемы первичности, курицы и яйца́. Учебник должен соответствовать новому содержанию, а новое содержание и есть содержание учебника... Содержание учебника отражено в чем? — В программе. А откуда программа? И т. д.

Однако, хватит тавтологий — изложу собственную, основанную на опыте (своем и чужом), интуиции (своей и чужой) и здравом смысле точку зрения. Работа над учебником, программой и соответствующими целями (углубленного математического) образования идет (должна идти) *одновременно* — вот как разработка «проектов» у бизнесменов. Но должен быть «бизнесплан», а у нас — просто *план действий*, и состоит он примерно в следующем.

1) Исходя из сути учебного процесса на современном этапе определяем *основные цели* УМО.

[11] Этот эпиграф такой длинный потому, что эта глава такая короткая.

2) Исходя из *принципиальных возможностей* учебника (учебной книги, литературного текста[12]) мы сопоставляем их с основными целями, анализируем *методические* (ныне модно говорить «технологические») *возможности* их использования учителем и учеником.

3) Исходя из итогов сопоставления целей и методических возможностей учебника (пока не существующего!), определяем адекватные тем и другим *принципы отбора содержания* и *принципы изложения* и **постепенно** и **одновременно** формируем как сам учебник, так и программу представляемого им курса, а вместе с ними и **«легенду»,** которая будет служить рабочей (и во многом идеальной!) *методикой преподавания данного курса по данному учебнику.*

Вот учебник, программа и адекватная им методика и будут готовы.

Именно по такому плану, с неизбежными перестановками, отступлениями, поправками и подправками (касающимися, в основном, собственно учебного процесса, а значит, и непосредственно *учащихся*) мы и излагаем основные общие и некоторые частные ***вопросы методики преподавания алгебры и анализа при углубленном изучении математики в старших классах***. Особое внимание при этом обращается на ***сочетание обучающего и воспитывающего аспектов в процессе преподавания***.

### 1.4. Учебная книга и цели курса

*В книге на каждой странице*
*Золотые да красные числа.*

Александр Блок

Начну с изложения учебного материала в учебной книге. Я полагаю, что очень важным качеством любого учебника (не только «углубленного»!) является его **интересность**: как текста, как *литературного текста* — и в отношении языка и стиля изложения, и в отношении некоей (математической!) фабульности.

Кроме того, каждая «мини-тема», в тексте отраженная как рассчитанный на изучение, скажем, в течение одной недели параграф[1] (вместе с задачами), должна быть в определенной степени неким *завершенным*, цельным этапом, *продвижением* в изучении курса, должна приносить изучающему чувство удовлетворения. В идеале, на каждом этапе обучения обучаемый (или *обучающийся* — см. далее) должен получить определенное *интеллектуальное удовольствие*!

Понятно, сколь трудно этого достичь в учебном тексте, но к этому нужно хотя бы стремиться. Учебник — не справочник, не собрание понятий, фактов, примеров, задач, комментариев, etc. **Учебная литература — это тоже литерату-**

[12] Здесь и далее мы *не обсуждаем* лежащие практически совсем в другой технологической плоскости возможности так называемых «электронных книг», eBooks.

[1] Именно так построено учебное пособие по элективному курсу «*Математический анализ реальности*»— см. далее подраздел 2.5.

**ра**[13], причем литература, в данном случае, для детей, для юношества, со всеми вытекающими отсюда следствиями и требованиями к учебному тексту[14].

Это мое давнее и глубокое убеждение, и когда-то я наткнулся на сходные взгляды Клейна, высказанные без малого век тому назад, и как раз по поводу преподавания алгебры, арифметики и анализа[15]. Он, в частности, писал, что ученика «*нужно не только услаждать и поучать, но что в нем надо будить силы, которые вели бы его дальше, побуждать его к самостоятельной деятельности*», уделяя достаточно «*внимания к собственно воспитательной задаче*». М. Я. Выгодский писал, что, «*имея в виду показать математическую дисциплину в ее целостности, Клейн старается возможно шире охватить ее возможные применения и вместе с тем представить ее — и всю математику — как составную часть общечеловеческой культуры*».

Таким образом, учебный текст должен *стимулировать интерес* обучающегося к предмету, показывать его *общекультурную ценность*. Разумеется, неинтересный текст мало в этом поможет. В то же время «интересность» ни в коем случае не может быть самоцелью, как то допустимо в популярной литературе. *Средства* достижения «интересности» и формирования интереса обучающихся *должны быть адекватными целям* учения. И они как бы определяют как содержание и структуру курса, так и методику подачи учебного материала.

Сначала *о целях углубленного математического образования в рамках средней школы*, как я их понимаю[16]. Остановлюсь на них кратко — более подробно некоторые из них изложены и обоснованы далее, в конце раздела 1. К сожалению, при этом придется прибегнуть к «высоким словам».

Основная посылка состоит в том, что *фундаментальной* целью углубленного математического образования является НЕ подготовка будущих математиков (физиков, инженеров, etc.), а *формирование на основе углубленного обучения математике сознательной и гармонически развитой личности*[17].

Дальнейшая наша концепция, прежде всего, включает **таксономию** — *иерархию приоритетов* — **целей образования**, которую мы сформулируем, минуя еще пока становящийся концепт «компетенции»/«компетентности» (о них будет речь в разделе 2).

*Важнейшими целями углубленного математического образования* (далее УМО) являются: воспитание интеллектуальных и моральных черт характера[18], эстети-

[13]И учебник А. П. Киселева по геометрии — *литература*, причем близкая, с нынешних позиций (на мой взгляд), к science fiction!

[14]Как известно, для детей нужно писать так же, как для взрослых, но еще лучше!

[15]В книгах «*Элементарная математика с точки зрения высшей*» и «*Лекции о развитии математики в XIX столетии*».

[16]*В настоящее время*, хотя сравнение с теми проблемами, которые волновали Клейна, показывает их как бы «*вневременность*».

[17]Эта задача не исключает привлечения потенциала всех учебных предметов к ее решению, а напротив, усиливает роль, например, предметов гуманитарного цикла при углубленном математическом образовании. Известно: «*Специалист подобен флюсу...*»!

[18]«*...Интеллектуальные привычки имеют свой моральный отголосок*», — *Анри Пуанкаре*, очерк «*Мораль и наука*». *А. Н. Уайтхед* в своем очерке «*Математика и добро*» упоминает знаменитую лекцию Платона на тему «*добра как такового*», в которой лектор говорил почти исключительно о математике!

ческого чувства; способствование формированию важнейших интеллектуальных умений и мышления, способностей ума; формированию сознания.

Далее, одна из основных целей УМО состоит в воспитании у школьников эстетического восприятия математики, формирования представления об исторически взаимообусловленном единстве математики с другими составляющими духовной культуры.

При УМО должна быть адекватным и доступным образом отражена математизация знаний и общественной практики.

Значительно должна быть усилена роль УМО в формировании научного мировоззрения — с этой целью в преподавание привносится знакомство с методологией математики, с математическим моделированием.

Наконец, УМО должно преследовать и традиционные социально-утилитарные цели, как то: развитие интересов, углубление и упрочение знаний и умений, подготовка к продолжению образования.

### 1.5. Цели и средства. Основная линия изложения

*И все суровые загадки*
*Находят дерзостный ответ.*

Александр Блок

Обозначая цели, нужно все время думать о *средствах* их *достижения* или, хотя бы, *приближения* к их осуществлению, *продвижения* к этим целям[19]. Кроме того, учитывая иерархию целей, следует учитывать и ее относительность, стремиться к какой-то «увязке» целей[20]. Сочетать далеко не всегда близкие и даже не рядоположные цели возможно лишь когда *весь курс сориентирован «вдоль» одной основной*, «стержневой», — существенной в самой науке–математике, и в «предмете–математике», и в приложениях математики, — *главной, «генеральной» линии, идеи.* Основываясь на анализе всевозможных подходов к модернизации школьного курса (алгебры), направленных на введение в курс *элементов математического анализа*, опробывая их в реальном преподавании (личном, вместе с коллегами — еще с 1969 г.), учитывая приобретенный опыт[21], был-таки определен ведущий подход — *«основной мотив»* — курса, апробированного в 1980–84 гг. и в 1988-98 гг. в разных школах.

Ограничусь в характеристике основного подхода к углубленному изучению алгебры и анализа ключевыми словами, главными тезисами.

*Математика, будучи фундаментальной наукой*, с одной стороны, *самодостаточна*, имеет самостоятельную ценность, подобно музыке или поэзии; с другой стороны, *математика* большей частью *всегда была направлена на практику и движима потребностями практики.* Реальным объектам, явлениям, процессам

[19] Известно, «*Благими намерениями ...*».

[20] А это как раз не так-то просто — «*В одну телегу впрячь не можно // Коня и трепетную лань*»!

[21] Можно достоверно сказать: *«методом проб и ошибок»* — какие-то подходы проваливались, другие, как бы неожиданно, приводили к успеху.

соответствуют те или иные **математические модели**, и математика, уже абстрагировавшись от реальности, изучает эти модели, исследует их свойства, конструирует другие математические абстракции. Математические выводы, будучи сформулированы на *«языке природы»* [22], опять приводят к той или иной практике.

*Основными моделями в математическом анализе являются* **функции**, *предметом изучения* — их **свойства**. *Второй основной класс моделей* — **динамические модели**, к каковым в анализе относятся **дифференциальные уравнения**. Вокруг **изучения свойств функций** и **исследования дифференциальных уравнений** и строится предлагаемый курс алгебры и анализа, предназначенный для углубленного изучения математики.

По сути, такой подход восходит к Ньютону, но, что касается анализа функций (дифференциального исчисления и смежных задач), предпочтительнее, на наш взгляд, прибегнуть к более поздним подходам к математическому анализу (от Д'Аламбера и Лагранжа до Коши и Вейерштрасса)[23]. Вообще, следование «вдоль» основной линии: **анализ функций (дифференциальное исчисление) $\longleftrightarrow$ исследование дифференциальных уравнений (интегральное исчисление[24])** отнюдь не должно быть догматичным. Некоторые, близкие или не очень, вопросы, темы и «мини-темы» обязательно следует «прицеплять» к основной линии изложения — в тех случаях, когда их изучение методически или методологически целесообразно, когда они «работают» на приближение к поставленным целям, «подкрепляют» основную линию или несут пропедевтическую нагрузку.

Довольно многие вопросы, включенные в рассматриваемый курс, на первый взгляд кажутся привнесенными искусственно — но это только на первый взгляд. Отобранные в ходе многих проб, они всякий раз помещаются в курс *целенаправленно*[25] и работают на развитие интереса, расширение кругозора, формирование адекватного взгляда на науку–математику.

---

[22] Ну как тут не вспомнить Галилея!

[23] И, конечно, не придумывать специальных, адаптированных специально для школы подходов. Словами Чехова: «*Умри, Денис, лучше не напишешь*»!

[24] Грубо говоря.

[25] Целью может быть и показ интересного, но неизменно существенного математического или прикладного примера!

### 1.6. Nota bene: стиль изложения!

*...Ибо речи тогда лишь волнуют нас, если они пышны, звучны, умело закручены, по-цицероновски великолепны, полны сочных образов, разящих эпитетов и завершаются крещендо...*

Алехо Карпентьер

*Основное содержание* курса вместе с его *программой* складывались в единое целое и оформлялись в некоторый итоговый вид *постепенно* — с каждым вновь преподаваемым курсом. Всякий раз особое внимание уделялось тем моментам, которые работали бы на *адекватную целям* УМО «интересность», стимулирующую развитие интересов, активное восприятие материала учащимися, их побуждение к самостоятельной и активной познавательной деятельности. Постепенно вырабатывалось то, что я называю **стилем** — стилем даже не преподавания, а *обучающе-воспитывающего двусторонне-активного диалога* преподавателя (лектора, учителя) с учащимися[26], **стилем общения и взаимодействия обучающего и обучаемых**.

Вообще-то, как правило, приходится говорить о *двух* стилях: *стиль преподавания, преподнесения материала* (теории, задач) — стиль, так сказать, ***объективный***; и *стиль «учительствования»* , форма и тон общения учителя со школьниками[27] — это уже стиль ***субъективный***, зависящий и от личности, и от квалификации, и от педагогического (и житейского!) опыта учителя, и от того, кто учил самого учителя, от того, как учитель начинал «учительствовать». На субъективный стиль преподавания влиять трудно, если не невозможно. На объективный стиль можно-таки повлиять — в (хороших!) методических пособиях для учителей такая попытка и предпринимается[28].

В данном случае в самих учебных текстах по рассматриваемому курсу предпринята попытка явным образом представить предполагаемый (и ненавязчиво предлагаемый!) стиль преподавания предмета, попытка показа почти диалогового стиля обучения. Понятно, что *эффективный* обучающий диалог не может быть построен на «пустом месте». Укажем основные аспекты процесса изучения/преподавания

[26]Лекционный урок в классе или «потоковая» лекция для двух, трех или пяти классов почти всегда строилась как диалог; конечно, реальная эффективность подобного «обучающе-воспитывающего» взаимодействия пришла только с опытом, и, опять-таки, диалогичность общения на лекциях-уроках отнюдь не возводилась в абсолют — что называется, «раз на раз не приходится»!

[27]Менторский или строгий тон общения, форма обращения с учащимися, форма обсуждения теории и решения задач, etc.

[28]Я имею в виду именно *настоящие методические пособия*, затрагивающие и *концептуальные*, и *методологические* вопросы, а не «КдУ» («Книги для учителя») с поурочными разработками (типа «***Что, где, когда, сколько***?»— вместо вопросов «***Зачем, почему, как***?»!) или пособия «Из опыта работы». Подобные книги, разумеется, полезны (в случае их достаточной добротности), однако, на мой взгляд, лишь в малой степени оказывают влияние на формирование собственного учительского стиля.

данного курса, способные привести к активному диалогу и учению с интересом; изложим их по пунктам.

1) *Формулирование с самого начала* (математических) *целей, перспектив.* Скажем, если речь идет об исследовании функций, то нужно объяснить, *что именно* — какие свойства функций — *мы исследуем.* Весьма полезен также «*обзор всего сверху*», без деталей, но с определенными психологическими напутствиями; это как бы рекогносцировка будущего поля исследований[29], и некоторая терапия, что ли.

2) Далее, по возможности *сразу нужно объяснить, а* ***почему*** *мы интересуемся теми или иными понятиями и свойствами.* Скажем, введение числовых тригонометрических функций[30] преследует отнюдь не последующее практикование в тригонометрических преобразованиях или в решении тригонометрических уравнений; введенные для описания вращательного движения, тригонометрические функции являются истинным фундаментом *теории колебаний*[31].

3) Развитие теории математиками–профессионалами всегда *мотивировано* — практическими, иногда эстетическими или даже эмоциональными причинами[32]. На наш взгляд, такая ***внутренняя мотивация непременно должна присутствовать и при углубленном изучении теории (математики) в старших классах***. В учебном процессе понятия (определения), свойства (теоремы), их доказательства НЕ ДОЛЖНЫ появляться «*с потолка*», «*с бухты-барахты*» (в сопровождении слов типа: «***А давайте*** *рассмотрим (определим)* ***то-то*** *и сделаем с этим …* ***что-то*** …»). Немотивированное преподнесение нового материала НЕ способствует его активному усвоению, НЕ активирует ассоциативные связи между отдельными «элементами знаний», фактически подавляет такое важное для человеческого мышления (особенно «математического», если таковое как-то возможно «выделить») качество, как *критичность* (а далее — и *самокритичность*, и вообще, привычку к самостоятельному мышлению).

   Отметим, что *внутренняя необходимость в мотивации*, в нужности тех или иных обоснований *присуща именно на рассматриваемом психолого-возрастном этапе.* Мотивация не так существенна в преподавании математики в младших и средних классах (более того, мотивирование, допустим, правила

[29]Здесь, по-моему, уместно привести слова Дж.Гэлбрэйта: «*В отличие от романа или пьесы, преждевременное раскрытие замысла не является недостатком*» «учебного текста» (у Гэлбрэйта — «*научного исследования*»). Чем раньше учащийся начнет знакомиться с соответствующей новой научной терминологией, сначала даже на «назывательном» и интуитивном уровне, тем прочнее и проще произойдет овладение соответствующими понятиями впоследствии.

[30]**Не геометрических** функций угла — с ними-то как раз все понятно!

[31]Не говоря об иных приложениях в качестве *специальных* (круговых) *функций.*

[32]Мы рассматриваем только *внутреннюю*, так сказать, *духовную мотивацию* — в удержании интереса к предмету исследования, в непроизвольном учете внутренних мотивов при развитии теории, при введении тех или иных понятий, определений, при отыскании свойств и формулировке теорем, etc. «Внешняя» мотивация — типа «материального стимулирования»— это нечто другое.

знаков при умножении скорее приведет к недопониманию, к чувству «*чего-то не того*», к «туману в мозгах»; в этом психологическом возрасте мотивацию вполне заменяют примеры, даже абстрактные). С другой стороны, роль внутренней мотивации в преподавании курсов математики в вузах, как правило, тоже невелика — можно допустить, что, раз школьник поступил в данный вуз, то он уже «достаточно замотивирован» (но на 1–2 курсах все-таки мотивация бывает существенна; ее формированию даже посвящают целые «спецкурсы», типа «Введения в специальность»). Иное дело — обучение математике в старших (X–XI) классах, а также в классах с углубленным изучением математики. Здесь *внутренняя мотивация* существенна, и *чтобы внутренне мотивированно, естественно и интересно преподать курс,* особенно все еще «новый» для средней школы курс, включающий азы математического анализа[33], *все средства хороши: от привлечения прикладных задач до использования исторически-математического контекста.*

4) Выше уже говорилось о том, что (в идеале, конечно!) на каждом значимом этапе обучения обучаемый (обучающийся) должен получать некое интеллектуальное удовлетворение, да и попросту ему должно быть интересно. Сколь бы ясно и мотивированно мы не формулировали задачи учения, соответствующим образом не продвигали процесс обучения, все это не будет ни интересным, ни полезным, а останется тщетой и суетой, если изложение не будет *ясным* и *доступным.* Красивейший пример (факт, теорема) пропадет втуне, если не будет доступен ученику — и опять — суета сует ...

5) Кроме тщательного отбора примеров по критериям целесообразности, интересности и доступности, необходимо озаботиться об адекватном психологическому возрасту и наличествующим знаниям и умениям учащихся преподнесению материала. *Доступность, более осознанное, прочное и глубокое понимание достигается всемерным привлечением средств наглядности*, благо в большинстве разделов математического анализа их достаточно много. Заметим: подразумеваются НЕ какие-то там специальные «наглядные пособия» (хотя бы и компьютерные!), а мыслительные ассоциации математического объекта с графическим образом, который может быть и достаточно условно представимым (скажем, как поле направлений на плоскости). Наглядные ассоциации не только позволяют лучше прочувствовать то или иное понятие или свойство, но и помогают нащупать связи между разными понятиями, усмотреть то или иное свойство вместе с его доказательством.

   Уместно еще раз обратиться к Феликсу Клейну. В 1908 г. он писал, что в некой учебной книге того времени «*элементарная математика систематически и логически развивается на зрелом математическом языке, доступном студенту, далеко продвинувшемуся в своих занятиях.* « ... » *Между тем изложение в школе, выражаясь образно, должно быть* ***психологическим,***

[33]«*Всё еще новизна*» проистекает от слишком медленного и идущего как бы «вразнобой» («кто во что горазд») накопления *методической традиции.*

*а не* ***систематическим***[34]*. Учитель должен быть, так сказать, дипломатом; он должен учитывать душевные движения юноши, должен уметь возбудить его интерес, а это будет ему удаваться лишь в том случае, если он будет излагать вещи в наглядной, доступной форме. Лишь в старших классах возможно также и более абстрактное изложение.*»

6) Наглядная, доступная форма изложения — это важный рычаг развития, поддержания, сохранения интереса к предмету. Еще один важный принцип — ***привлечение к изложению теоретического материала прикладных примеров*** — на всех этапах: перед рассмотрением нового материала (как «затравка»), при продвижении в новой теории (как «осязаемое подкрепление»), при подведении итогов (как уже «конкретный результат», вытекающий из проведенных математических рассмотрений), — играет и важную *воспитательную* роль, показывая *место математики в цивилизации*[35]. А любое «*Воспитание развивает способности*» [36].

7) С воспитательной, психологической точки зрения очень существенно, на наш взгляд, показать *место математики* (и *математиков*!) *в культуре вообще*, и *в духовной культуре*, в частности. И здесь в полной степени (ну, для начала, хотя бы в некоторой мере) можно и нужно использовать ***культурно-исторический дискурс*** предмета. Иными словами, при изучении тех или иных вопросов, при введении понятий, при формулировании и доказательствах теорем — во всех подходящих случаях *в математический контекст следует* (по возможности) *вносить соответствующий этому контексту культурно-исторический дискурс*, т.е. включать относящиеся *к конкретному математическому материалу* сведения конкретно-исторического характера — так сказать, историю предмета рассмотрения, причем ретроспективно («*что было — как стало*»). Сюда входит не только историко-биографические, но и лингвистические (иногда — просто этимологические) справки.

   Мы придаем использованию культурно-исторического дискурса в преподавании алгебры и анализа, особенно в выпускном классе, *существеннейшее* образовательно-воспитывающее значение.

[34] Мы сказали бы, «*не* ***догматическим***», что наблюдается почти «сплошь и рядом». Что касается систематичности, то «систематичность систематичности рознь».

[35] В узком смысле — как материальной культуры.

[36] Правда, «*не создает их*!»— Вольтер. Но: «*Что примера лучше действует*. . . ?» — А.С.Пушкин!

### 1.7. Подходы к курсу

*И ходи по путям, куда влечет тебя сердце,*
*И по зримым твоими очами...*

Экклезиаст

Теперь о том, ***как можно изучать рассматриваемый элективный курс, представленный в учебном пособии***. ***Оптимальный вариант*** — *углубленное изучение в классе соответствующего профиля*[37] *под непосредственным руководством учителя*. Даже если учитель достаточно хорошо разбирается в тематике данного курса, а учащиеся вполне определенно проявили интерес к предмету, при использовании данного пособия необходимо учесть его *специфику*: *ориентацию на прикладные вопросы* математики и прикладные же примеры, *мотивирование* почти каждого теоретического продвижения, *культурно-исторический дискурс при изучении теории*, предоставление значительной *свободы при отборе упражнений* и задач из числа представленных в пособии.

Отметим, что к каждой главе дается большой, избыточный набор задач — с одной стороны, с тем, чтобы «каждому нашлась задача по душе», а с другой — чтобы обеспечить в дальнейшем возможность повторения. Упражнения и задачи, как правило, *не ранжированы* по степени сложности, трудности. Это *принципиальная установка*, вытекающая из значительного опыта преподавания подобных курсов повышенного уровня. Трудность или легкость задачи всегда оценивается *субъективно*, и навешивание на задачу «бирки» («легкая», «средняя», «трудная») может привести к нежелательному в процессе обучения[38] психологическому воздействию на решающего и к возможным негативным последствиям. Задача, помеченная как трудная, может отпугнуть школьника. Задача, трудная для одного школьника (или для одного типа мышления), вполне может оказаться легкой для другого — отсюда возникает искаженная самооценка. Наконец, некто вдруг не справляется с задачей, помеченной как легкая — возникает околострессовая ситуация... Вспомним слова Клейна об учете *психологии* учащихся, о желательной *дипломатичности* учителя! Поэтому мы ограничиваемся только *указаниями — в методически целесообразных случаях.*

Другое дело — ***базовые задачи***, входящие в *минимум-миниморрум* доступных учащимся задач. Определение *миниморрума* — также довольно ответственное и тонкое дело, ибо для большинства учащихся миниморрума будет недостаточно, а наличие, обозначение такового чаще всего заранее «*занижает планку*», и при ориентировании именно на него велика вероятность как раз его-то и не достичь. Выход, который мы видим — отнесение к *базовому уровню* упражнений, включенных в основной текст в качестве *примеров*, упражнений *того же типа* в разделах «*Упражнения*», а также задач, разобранных в «*Упражнениях*». «Планку» же можно поднять и повыше, сообразуясь с уровнем школьников, с успешностью обучения.

[37] С углубленным изучением математики, но, возможно, в классе смешанного (например, физико-математического) профиля.

[38] Обучение — это не олимпиада!

Рассмотрим теперь другую существенную возможность изучения рассматриваемого курса по данному пособию. Эта возможность — ***самостоятельное изучение курса***, даже не в 11 классе, а ранее[39] или, напротив, позднее — для «освежения» знаний и взглядов на математику, для повышения квалификации как математической, так и преподавательской. Таким образом, следует выделить *два варианта самостоятельного изучения курса*: *при отсутствии априорных знаний предмета и при наличии таких знаний* — например, в объеме вузовского курса математики, хотя бы и подзабытого.

Я *утверждаю, что данное пособие доступно для самостоятельного изучения* в том и другом случае. Оно задумывалось как *интересный учебный текст по математике*, и, возможно, в ряде случаев это получилось. Кое-где получилась и фабула (как в случае производных косинуса и синуса), нашлись затейливо-полезные (или полезно-затейливые) примеры, красивые и общезначимые приложения (скажем, уравнение струны). Но это, все-таки, *содержание*, а *доступность* (и, отчасти, *интересность*) определяется *изложением* материала. Задача-максимум, которую я ставил перед собой — чтобы ученик, пропустивший занятие, смог прочитать его текст, причем так, чтобы, хотя бы отчасти, *почувствовать* ее *эмоциональный фон*[40]...

***В каком смысле «пособие доступно для самостоятельного изучения»?*** — Доступным (изложенным доступно) я считаю подавляющую часть представленного в параграфах теоретического текста, вместе с примерами и близкими к ним базовыми задачами из сопутствующих «*Упражнений*» (а также, большей частью, помещенные среди «*Упражнений*» теоретические комментарии). Это — ***остов*** предлагаемого курса, и *на его основе действительно можно довольно глубоко ознакомиться с математическим анализом и его приложениями.*

***Насколько «пособие доступно»?*** — Выше отчасти дан ответ на вопрос о том, ***чтó доступно***. Но если рассматривать пособие в целом, то, очевидно, решение ряда задач, приведенных в пособии, может вызвать трудности. В некоторых случаях мы приводим подсказки и/или ответы. Однако часть задач, на наш взгляд, нуждается не просто в *развернутых*, но и *прокомментированных*, *проанализированных* решениях. В комментариях нуждаются и отдельные фрагменты теоретического материала из параграфов[41]... Конечно, в таких случаев можно обратиться за помощью — ученику к учителю или старшему товарищу, а учителю... Как и в ситуации с конкретно-историческим материалом, *учебная, научная или методическая литература, которая адекватно нашим подходам освещала бы недостаточно раскрытые в учебном тексте вопросы, в одних случаях слишком многообразна, иногда — малодоступна, а в иных случаях — и просто отсутствует.*

[39] Думаю, не я один еще в 7–8 классах прочитал учебники по математике для старших классов (благо они были — у старшей сестры!), что нисколько не помешало дальнейшим школьным и нешкольным «университетам».

[40] Насколько это удалось осуществить, судить, конечно, читателям — школьникам и учителям.

[41] Увы — «*Есть ли на свете человек, который мог бы обнять необъятное?*»

Мы здесь видим один выход: дополнение учебных текстов соответствующими (краткими! — не длиннее учебных!) методическими текстами, которые сочетали бы учебно-математический дискурс с научно-педагогическим и методическим. ***Текст, который Вы читаете — один из них.***

### 1.8. Планирование спектакля

*Гул затих. Я вышел на подмостки.*

Борис Пастернак

**О планировании занятий.** Исходя из отведения двух часов в неделю на этот курс, приведем несколько рекомендаций, которые могут помочь учителю, начинающему вести занятия по данному пособию[42]. Прежде всего, каждое занятие должно иметь ***цель*** и ***сценарий***. Выбрать и сформулировать *цель* помогут приведенные далее методологические и методические комментарии к использованию учебного пособия. Важно помнить: одним из критериев удачности занятия будет ощущение учащихся — *узнали ли* они на этом занятии нечто *новое и интересное*, получили ли они хотя бы некоторое «интеллектуальное удовольствие». Поэтому цель в каком-то виде хорошо бы довести и до школьников.

*Сценарий* должен быть разбит на *действия*, как на «акты» пьеса[43]. Если уроков два, то действий может быть три. Скажем, ***первое действие*** — ***урок–лекция***, построенная как диалог с учащимися. Чтобы это действие прошло успешно, нужно выбрать из соответствующего параграфа *минимальное* число пунктов и примеров, наметить *кульминацию*, определить, какие пункты вполне можно оставить *для самостоятельной «проработки»,* какие — просто *для ознакомления.* Нужно оттенить как *начало* действия, так и его *финал* («*Чего мы хотим?*»— «*Пришли ли мы к требуемому?*»).

***Действие второе***, центральное: ***самостоятельный разбор примеров и решение упражнений*** из теоретического текста и «Упражнений и задач» из учебного пособия, с помощью учителя, с его подсказками (коли потребуются) — индивидуальными или общими (в зависимости от обстоятельств). Здесь важно заранее определить набор примеров и упражнений — по объему, возможно, чуть превосходящий «общедоступный» набор; в этот набор нужно включить и какие-то из *примеров* (из текста параграфов), и *базовые задачи* (решаемые «по образцу»), и упражнения, ориентированные на *зону ближайшего развития* учащихся.

***Третье действие*** (если уроки спаренные, то это действие может быть и покороче) — ***подведение итогов***: разбор наиболее интересных, поучительных или вызвавших затруднения[44] задач; конспективное повторение (может быть, лишь на

[42]Конечно, они основаны на опыте собственном и моих коллег, на своих ученических и студенческих наблюдениях за тем, как нас учили лучшие учителя и преподаватели ФМШ при МГУ и механико-математического факультета МГУ, а также на долгих раздумьях... Так что это довольно субъективные замечания, но, возможно, кому-то они помогут.

[43]А хорошее занятие должно производить впечатление спектакля. Только ученики должны быть не «зрителями», но со-участниками!

[44]Заметьте: мы не говорим о, так сказать, «трудных» задачах.

«назывательном» уровне!) пройденного материала; *формулировка домашнего задания* — обязательно *с комментариями* (не наспех!).

В этих трех действиях, при достаточно продуманном общем сценарии, найдут свое место и *обсуждение результатов домашней работы* учащихся, и *«пропедевтическое» повторение* необходимых деталей и моментов из предыдущего материала. Главное: найти ***нужный*** — приемлемый и для учителя, и для учащихся, — ***темп*** (незачем «гнать», но ни к чему и «мусолить» материал!).

Если продолжать театральную аналогию, то следует добавить необходимость намеченного на достаточно протяженный период *репертуара* — ***плана*** *проведения занятий по неделям, на несколько месяцев, на полугодие, с выделением и резерва, и контрольных работ, и зачетов или коллоквиумов.* По своему личному опыту, в начале сентября я знал, что буду «проходить» со школьниками в такой-то день в середине декабря[45].

На этом совсем общие рекомендации я закончу. Они тесно связаны со *стилем преподавания.* А он у каждого учителя — свой. И переучить учителя — ну, по крайней мере, нелегко.

### 1.9. Nota bene: самое начало

*Что нýжды? Смело в даль дорогою прямою,*
*Ученью руку дав . . .*

Александр Сергеевич Пушкин

**Следующее очень важно.** ***Главное*****:** *любой новый курс нужно начинать «за здравие»* , но ни в коем случае не «за упокой». Психологически ошибочно «давать время на раскачку», «на знакомство». То и другое приходит само, если учение учитель начал достаточно энергично — его энергия передастся и ученикам. Но опять: ни в коем случае нельзя «гнать»!

Данный элективный курс имеет несколько существенных особенностей, которые непременно нужно учесть с самого его начала.

**Во-первых**, уже во вводной теме 1 наличествует «куча» новых терминов или названий. Этого *не следует пугаться* — учителям, а тем более — ученикам. Термины, названия, примеры — со временем будут вполне ясны, и заучивать их пока ни к чему. *Психологический феномен*, который, очевидно, многие учителя, да и ученики, испытывали на себе — сталкивались в своей *познавательной практике*: некоторые (многие, если не все) абстрактные (математические в особенности) понятия, конструкты[46] и конструкции зачастую поначалу кажутся не очень понятными; однако, *проходит время* (у каждого свое!), и кажется уже странным, почему раньше соответствующий «объект» казался субъективно малопонятным[47]. Так что

[45] «*... Я утром должен быть уверен, // Что с Вами днем увижусь я...*» (Пушкин). Конечно, планы могут и рушиться, но они должны быть!

[46] Скажем, *поля направлений дифференциальных уравнений*, наглядные, но вместе с тем предполагающие определенный уровень восприятия абстракций.

[47] Между прочим, аналогично обстоит дело и с *пониманием* — лучше сказать, *чувствованием*, — *музыки*!

не следует торопить учащихся с пониманием нововведений в их внутреннем интеллектуальном математическом мире — на их понимание работает время! И, тем более, на этом этапе «вживания в математические образы» нужно как более часто прибегать к наглядным образам, иллюстрациям, конкретным примерам.

**Во-вторых**, начиная с темы 1 и далее, *систематически используется* не только (скорее всего, привычная или хотя бы знакомая) *теоретико-множественная символика* (связанная с множествами и их элементами) и *стандартные обозначения для числовых множеств* ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, различные промежутки), но и *новые логические знаки*: ***кванторы всеобщности*** $\forall$ ($\forall x \in M$) и ***существования*** $\exists$, знаки ***импликации*** (следования, $\Longrightarrow$) и ***эквивалентности*** (равносильности, $\Longleftrightarrow$), а также знаки логических операций — ***дизъюнкции*** («**ИЛИ**», $\bigvee$) и ***конъюнкции*** («**И**», $\bigwedge$ или **&**). «*Математический символизм*»— изобретение удобных обозначений — сыграл (и продолжает играть) огромную роль в математике на разных этапах ее развития — вспомним хотя-бы буквенно-степенное исчисление Виета–Декарта, многочисленные и весьма удачные формально-символические нововведения Лейбница (как известно, Лейбниц даже полагал унифицировать с помощью некоего «универсального языка» все человеческие рассуждения — по крайней мере, философские!), не говоря о символьных обозначениях Ньютона, Эйлера, Лагранжа... Так что *важность* ознакомления учащихся с современным символьным языком *бесспорна*. Однако как, насколько интенсивно это *можно* делать или *лучше* делать?

Опираясь, опять-таки, на опыт, полагаю, что все новые математические знаки следует вводить *по мере необходимости* — не следует бояться «переполнения» в умах учащихся, ибо осваивать-то новое они все равно будут *постепенно*. Учителю следует параллельно с символьной, краткой формулировкой теоремы (или задачи) давать и вербальную, развернутую формулировку[48]. Не стоит бояться, стесняться или «косо смотреть» на «*смешанные*» формулировки, когда в вербальную ткань предложения, утверждения включаются элементы математической символики — это ничуть не более «крамольно», чем употребление в русской речи иностранных слов или каких-то аббревиатур (но, конечно, при этом надо бы соблюдать как *чувство меры*, так и *эстетический вкус*!).

Укажем полезный как бы «*педагогический прием*», который может помочь школьникам в усвоении терминологии и символики[49]: предложить учащимся к следующему занятию прочесть соответствующий параграф (а может быть, его часть) — *просто прочесть*, даже если будет что-то непонятно! Восприятие учащимися на уроке материала, «осознанного» даже бессознательно, будет как раз более осознанным (по сравнению с тем, как получилось бы с абсолютно новым, так сказать, «неслыханным» материалом). Если такое «*предпрочтение*» вместе с последующим уроку «*постпрочтением*» войдет в обычай, это сильно активизирует «познавательный потенциал» школьника.

[48] И не только на первоначальном этапе, но и *каждый раз* — иначе школьники разучатся говорить *по-русски*!

[49] А на самом деле, *любого* нового материала, буде школьники привыкнут им пользоваться!

Возвращаясь к обозначенному нами как *оптимальный* вариант изучения курса: в классе с продвинутым уровнем изучения математики[50], — отметим еще один плюс такого варианта. В нем, наряду с явными *переносами*[51] «**учитель** $\longleftrightarrow$ **ученик**», «**ученик** $\longleftrightarrow$ **учебный текст**» (и «**учитель** $\longleftrightarrow$ **учебный текст**»!) имеет место психологически очень важный, сильный, многократно и долговременно задействованный *перенос/контрперенос* «**ученик** $\longleftrightarrow$ **ученик**». По-простому это называется *взаимообучением* и *взаимовоститанием* внутри коллектива (плюс учитель!) или *самообучением и самовоститанием самого коллектива.* Мне приходилось почти все время видеть значительное усиление обучающего (и воспитывающего) эффекта, проистекающего от самоощущения ученика членом некоего «микросоциума»— не себе подобных, а внутренне близких, соустремленных личностей; думаю, каждый учитель наблюдал в своих классах такое или нечто подобное.

Между прочим, в таких микросоциумах и *роль самого учителя* очень важна — однако, скорее, как *катализатора*, *модератора*, чем как лидера; я вообще считаю роль лидерства учителя в ученическом коллективе весьма тонкой и, отчасти, двусмысленной — учитель должен, напротив, *воспитывать лидеров* (заметьте: во множественном числе!).

* * *

Перейдем, наконец, к совсем конкретным вопросам, связанным с элективным курсом ***«Математический анализ реальности»***.

## Раздел 2. Курс «Математический анализ реальности»

### 2.1. Цели и задачи курса. Знания, умения, компетенции

**Цели и задачи курса.** Изучение элективного курса «**МА**» направлено на достижение следующих целей.

- Получение представления о дифференциальных уравнениях как важнейших моделях реальных процессов и явлений.

- Ознакомление с методами анализа дифференциальных уравнений и их решений на примерах линейных и нелинейных уравнений.

- Знакомство с конкретными прогностическими возможностями анализа дифференциальных уравнений на примерах (ядерное деление, атомный реактор, явление резонанса и биений и др.).

При изучении курса **МА** перед учащимися ставятся следующие **конкретные задачи**:

- освоение понятий дифференциального уравнения, его решений, начальных условий, поля направлений, интегральных кривых;

[50] Возможно, и других каких-то предметов, даже *гуманитарных* — если в преподавании курса переставить акценты: *ведущим* (предназначенным для изучения) сделать *культурно-образовательный дискурс* предмета, а *ведомым* — *собственно-математический дискурс*, предназначенный для (относительно содержательного) ознакомления!

[51] И неизбежными сопутствующими *контрпереносами.*

- овладение методами геометрического и аналитического исследования простейших дифференциальных уравнений, отыскания и анализа их решений;

- получение конкретного представления о сущности метода математического моделирования по схеме: процесс/явление $\longrightarrow$ математическая модель/дифференциальное уравнение $\longrightarrow$ анализ уравнения/описание (отыскание) его решений и свойств решений $\longrightarrow$ выводы $\longrightarrow$ их интерпретация в рамках исходного процесса/явления $\longrightarrow$ экспериментальная проверка.

**Образовательные результаты (планируемые результаты обучения). Предметные знания**

Эволюционные модели и дифференциальные уравнения $x'(t) = V(x,t)$. Конкретные примеры эволюционных моделей: модели Мальтуса, Ферхюльста, Вольтерры–Лотки.

Дифференциальное уравнение Ньютона $x'' = F$ как модель движения материальной точки по прямой. Одномерная динамика. Конкретные примеры: равномерное и равноускоренное движения.

Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений вида $y' = F(x,y)$ и их решений с помощью полей направлений и интегральных кривых. Ломаные Эйлера.

Частный случай: уравнение $y' = f(x)$ и его решения/первообразные. Теоремы единственности и существования. Интегральные суммы и интеграл.

Уравнение экспоненциального роста/убывания. Примеры. Экспоненты как решения. Экспоненциальный рост/убывание (сравнение со степенным).

Экспоненциальные модели: радиоактивный распад, ядерное деление, атомный реактор. Анализ решений и предсказания.

Динамические модели: свободное движение и свободное падение при наличии вязкого трения. Диссипация энергии.

Обобщение: уравнение $y' = g(y)$, его поле направлений, симметричное уравнение и его интегрирование. Формализм Лейбница.

Частные случаи: квадратичная модель роста $y' = \alpha y^2$, логистическое уравнение (модель Ферхюльста) $y'' = y(1-y)$.

Разделение переменных в уравнениях Вольтерры–Лотки. Модель «хищник–жертва»: вывод о биологическом равновесии.

В этом перечне вопросов опущены те, которые относятся к базисному/профильному курсам алгебры и начал анализа (производная, первообразная и т.д.). Далее перечислены вопросы, относящиеся к дифференциальному уравнению Ньютона и волновому уравнению (темы 5–6).

Разделение переменных в автономном уравнении Ньютона $x'' = F(x)$ и закон сохранения энергии. Фазовые портреты. Примеры.

Уравнение гармонических колебаний (случай упругой или псевдоупругой силы $F(x) = -kx$). Тригонометрические решения. Теорема единственности.

Уравнение вынужденных колебаний. Предсказания: резонанс и биения.

Гармонические колебания при наличии вязкого трения (вязко-упругая сила). Предсказания: апериодическое затухание и затухающие колебания.

Вынужденные колебания при наличии вязкого трения. Резонансная диаграмма.

Бегущие волны и волновое уравнение. Интерференция синусоидальных волн. Колебания струны. Интерференция набегающей и отраженной волн — стоячие волны. Случай закрепленных концов. Спектр собственных частот струны.

**Предметные умения**, которыми должны овладеть учащиеся по изучении данного курса:

— умение содержательно интерпретировать изученные дифференциальные уравнения и те или иные свойства их решений (монотонность, периодичность, асимптотическое поведение и др.);

— умение находить решения простейших из изученных уравнений, удовлетворяющие данным начальным или граничным условиям;

— умение отыскивать общие решения однородных и простейших неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка;

— умение описывать общие решения однородных и изученных неоднородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

**Общеинтеллектуальные умения:**

— умение распознавать и анализировать реальные ситуации применимости изученных математических моделей;

— умение объяснять те или иные свойства и характеристики реальных процессов с точки зрения математики;

— умение объяснять сущность математических методов познания реального мира;

— умение разъяснять основные этапы создания, исследования и интерпретации моделей при математическом моделировании.

**Общекультурные и мировоззренческие компетенции:**

— понимание соотношения математики как науки с реальной действительностью;

— понимание сущности процесса математизации знаний и непосредственной практики;

— понимание роли высшей математики и, в частности, математического анализа в изучении закономерностей окружающего мира.

### 2.2. Программа курса. Тематическое планирование

Приводимая ниже программа курса **МА** одновременно дает и (примерное) тематическое планирование — она структурирована по темам с указанием ориентировочного числа недель, отводимых на их изучение (2 ч занятий в неделю). Из курса могут быть исключены темы 5–6 (модуль 2; в учебное пособие по элективному курсу **МА** входят все темы). Полный вариант построения курса рассчитан на 25 учебных недель, и 10 недель отводится под резерв. Укороченный вариант рассчитан на 15 учебных недель и 5 часов резерва.

**Модуль 1 (основной)**

**Тема 1. Представление об эволюционных моделях** (2 недели)

Производная, ее наглядный, геометрический и кинематический смысл. Представление о дифференциальном уравнении. Постановка задачи. Простейшие примеры дифференциальных уравнений.

Примеры эволюционных математических моделей с непрерывным временем. Модель Мальтуса. Логистическая модель Ферхюльста. Модель биоценоза Вольтерры – Лотки.

Общее понятие динамической системы. Дифференциальные уравнения вида $x' = V(x,t)$ как математическая модель одномерного эволюционного процесса.

Движение как процесс. Второй закон Ньютона — основной закон динамики движения. Дифференциальное уравнение Ньютона $x'' = F(x, x', t)$. Пример: инерционная навигация.

Свободное движение. Равноускоренное движение. Свободное падение. Свободное движение и свободное падение с трением (уравнения).

**Тема 2. Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)$ и задача интегрирования** (4 недели)

Интегрирование как задача, обратная дифференцированию: задача восстановления функции по ее производной. Первообразные как решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$. Основные свойства решений/первообразных.

Геометрическая интерпретация общего дифференциального уравнения $y' = F(x,y)$ и его решений: поля направлений и интегральные кривые. Ломаные Эйлера как приближения интегральных кривых.

Ломаные Эйлера для дифференциального уравнения $y' = f(x)$ и интегральные суммы для функции $f(x)$. Теорема существования решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$.

Интеграл и его свойства. Формула Барроу–Ньютона–Лейбница. Геометрические примеры дифференциальных уравнений. Интегральные формулы для площадей и объемов.

**Тема 3. Линейные дифференциальные уравнения** (5 недель)

Модели процессов и явлений, приводящие к линейному дифференциальному уравнению вида $y' = ky$. Графический анализ уравнения $y' = y$.

Натуральные логарифмы как решения симметричного дифференциального уравнения $x' = \frac{1}{x}$. Натуральная экспонента $\exp x = e^x$, число $e$ (основание натуральных логарифмов).

Экспоненциальный рост и экспоненциальное убывание: сравнение со степенными законами. Сравнение роста логарифмической и степенной функции на бесконечности и в нуле.

Теорема существования и единственности решений дифференциального уравнения $y' = ky$. Примеры: закон радиоактивного распада, модель ядерного деления.

Модель атомного реактора. Неоднородные линейные уравнения $y' = ky + f(x)$. Теорема Д'Аламбера об общем решении неоднородного уравнения.

**Тема 4. Модели с разделяющимися переменными** (4 недели)

Автономные дифференциальные уравнения первого порядка. Анализ эволюционных дифференциальных уравнений вида $y' = g(y)$. Симметричные поля направлений и уравнения. Интегрирование автономного дифференциального уравнения.

Пример: квадратичная модель роста популяции. Анализ решений дифференциального уравнения $y'' = \alpha y^2$. Популяционный взрыв.

Формализм Лейбница. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Пример: решение логистического уравнения Ферхюльста.

Применение формализма Лейбница при анализе уравнения модели биоценоза Вольтерры–Лотки. Биологическое равновесие в модели «хищник–жертва».

**Модуль 2 (дополнительный)**

**Тема 5. Дифференциальное уравнение Ньютона $\boldsymbol{x'' = F}$** (8 недель)

Автономное дифференциальное уравнение Ньютона $x'' = F(x)$. Формализм Лейбница и закон сохранения энергии. Фазовые портреты одномерных динамических систем. Модель «шарик в желобе».

Примеры: однородное гравитационное поле, притягивающий центр (гармонические колебания), отталкивающий центр, притяжение по закону всемирного тяготения. Скорость убегания.

Анализ дифференциального уравнения гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$. Тригонометрические решения. Стандартный и канонический вид решений. Теорема единственности.

Сложение гармонических колебаний. Векторные диаграммы. Интерференция синусоидальных волн.

Вынужденные колебания. Случай гармонической вынуждающей силы. Явления резонанса и биений.

Анализ дифференциального уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции и их свойства.

Общее линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $x'' + px' + qx = 0$. Экспоненциальные решения $x = ae^{kt}$ и характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$. Случай положительного дискриминанта. Теорема единственности.

Гармонические колебания при наличии вязкого трения: анализ уравнения $x'' + \lambda x' + \omega^2 x = 0$. Случай сильного трения: апериодическое затухание. Случай слабого трения: затухающие колебания.

Вынужденные колебания при наличии вязкого трения. Явление резонанса.

**Тема 6. Волновое уравнение и колебания струны** (2 недели)

Одномерные бегущие волны и волновое уравнение $u''_{tt} = v^2 u''_{xx}$. Принцип суперпозиции и общий вид решений.

Вывод уравнения колебаний упругой струны. Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн. Стоячие волны.

Струна с закрепленными концами. Спектр собственных частот. Музыкальная акустика.

Стоячие волны и разделение переменных в волновом уравнении. Представление о рядах Фурье.

### 2.3. Общие и организационные рекомендации

#### 2.3.1. Методы преподавания и формы организации учебных занятий

Учебное пособие по курсу **МА** построено так, чтобы максимально облегчить работу по нему. Параграфы рассчитаны на 2 урока в неделю (это не обязательно спаренный урок). Занятия проводятся лекционно-семинарским методом, в стиле активного диалога с учащимися. К каждой главе (теме) приводятся не только упражнения на закрепление материала, но и значительное число задач с относительно нестандартным содержанием, предназначенных для самостоятельного решения учащимися, с последующим обсуждением результатов (для организации этой формы учебной деятельности и предусмотрен значительный резерв времени).

#### 2.3.2. Оценка уровня достижений учащихся

Учитывая, что по форме (но не по содержанию) изучаемый материал: примеры моделей, методы исследования и решения дифференциальных уравнений, — несколько в стороне от традиционного, требования к учащимся в курсе **МА** должны быть скорректированы. Главным является не формирование умений решать дифференциальные уравнения (этому достаточное внимание уделяется в вузовских курсах), а освоение идей решения, самой концепции математического моделирования реальных ситуаций с помощью дифференциальных уравнений. Соответственно, в качестве инструмента оценки уровня достижений учащихся целесообразно использовать коллоквиумы по обсуждению пройденных вопросов, возможно, с предложением простейших задач (эта форма оценки достижений также организуется за счет резерва учебного времени). Заметим, что, учитывая нестандартность и задач, рассматриваемых в курсе, и подходов к ним, следует считать удовлетворительным освоение примерно 40% теоретического материала. Оценке же отлично отвечает успешность освоения теории на 70–75%. Вообще же нужно, чтобы оценка знаний и умений по элективному курсу не довлела над учащимися.

### 2.4. Общая характеристика учебного пособия по курсу «МА»

Заодно мы опишем и замысел данного методического пособия. Мы сочли необходимым прежде всего разъяснить авторскую концепцию углубленного обучения математике, как в смысле содержания курсов, в том числе и рассматриваемого элективного курса, так и в методическом отношении, затрагивая в концептуально-методологическом разделе 1 методологию отбора содержания и методику проведения занятий при углубленном изучении математики, в частности, в рамках данного элективного курса. Этот раздел, можно сказать, и есть *методологический и методический комментарий* ко всему курсу **МА** (т. е. представляемому курсу «*Математический анализ реальности*»). Здесь описаны принципы, которым мы следовали при определении содержания курса и при разработке учебного пособия по нему. Эти принципы мы полагаем верными и существенными, а намерения — благими, но насколько удалось воплотить их в жизнь в курсе **МА** — об этом судить читателю — в первую очередь, учителю, а затем и школьнику или иному «пользователю». Мы осознаем, что во многом описанная в разделе 1 позиция идеализирована, ориентирована на некий идеал во всех смыслах (школы, профильных классов, школьников, учителей, учебной и методической литературы).

В настоящем разделе 2 дан комментарий, уже непосредственно относящийся к курсу **МА** и его преподаванию. Наконец, в последнем разделе 3 дается краткий, но максимально конкретный уже в первую очередь методический, в случае действительной его необходимости, а уже потом отчасти методологический комментарий к самому учебному пособию, по темам-главам и по занятиям-параграфам.

Основной дидактической единицей учебного пособия является параграф, рассчитанный на изучение в течение одного занятия — самое лучшее, если это будет один «спаренный урок» в неделю. Как правило, содержание параграфов (без иногда помещенных в них факультативных вопросов) по объему как текста, так и новых вводимых понятий, изучаемых теоретических предложений и рассматриваемых конкретных примеров, укладывается в обозначенные рамки двух уроков. Каждый параграф разбит на отдельные фрагменты, которые мы называем «пунктами», и предназначенные для донесения до школьника (или читателя) какой-то «законченной мысли». Параграфы объединены в главы, в которых теория, сразу завязанная с практикой — прикладными или чисто математическими примерами, — развивается в каком-то одном направлении. Если продолжать «театральную аналогию» из первого раздела, то главы можно сравнить с пьесами, их параграфы — с актами, а пункты — с действиями. Будучи хорошо подготовлены, отрепетированы, содержательные описания материала каждого пункта-действия или комментарии к ним укладываются во многих случаях в 5–10 минут учебного времени (конечно, при наличии опыта проведения подобных занятий по сходной тематике и с похожими на наши целями).

Главная идея всего курса **МА** — познакомить, дать настоящее, а не специально придуманное представление о практической пользе математического анализа. И, скорее всего, лучшей математической основы для этого, чем дифференциальные уравнения, не найдешь. Дифференциальные уравнения представлены в учебном пособии на двух уровнях — в двух модулях, или частях. В первой части, состоящей из 15 параграфов и рассчитанной, таким образом, на 30 часов (уроков) дается относительно полное представление об эволюционных моделях, описываемых теми или иными дифференциальными уравнениями первого порядка. Это «технически» сравнительно простой материал; опорные темы — интегрирование, решение линейных уравнений, формализм Лейбница и разделение переменных. Как указывалось в предисловии, этим модулем можно и обойтись, потратив оставшееся время на решение упражнений и задач, выполнение заданий, благо их имеется в достатке. Другой вариант — углубиться и в другой модуль, в часть II, материал которой уже далеко не так прост, хотя нельзя и сказать, что весь он труден — есть и простые, привычные вопросы, типа теории гармонических колебаний, и непривычные, часто поэтому кажущиеся более сложными, вопросы, такие как интегрирование в квадратурах общего уравнения Ньютона (2-го его закона) для одномерных консервативных динамических систем. Здесь можно и испугаться, но задача учителя — преодолеть боязнь школьников — в случае, если они действительно хотят разобраться в том, для чего бывает непременно нужен математический анализ, желают пройти «по стопам Ньютона», которому, по сути, и обязан обсуждаемый подход к анализу.

Весь курс в целом имеет, на наш взгляд, ясно и ярко выраженную *прикладную направленность*. И это не те якобы «приложения математики», которыми именуют, скажем, текстовые задачи на составление систем уравнений и тому подобные задачи — их разве что можно отнести к «псевдоприкладным». Это *настоящие*, хотя и самые простые *математические модели*, в основе которых основной класс современных математических моделей — *дифференциальные уравнения*. Разбирая их примеры, мы следуем общепринятой в приложениях математики *методологии*: от процесса или явления к модели, далее к ее математическому разрешению и/или количественному и/или качественному исследованию, далее — к практической интерпретации и, наконец, если это представляется или является возможным, к проверке теоретических выводов и возможных предсказаний.

Саму по себе прикладную направленность курса, реализованную, по мере возможностей, в учебном пособии, мы считаем важным рычагом развития интереса собственно к математике и математическим исследованиям, воспитания ценностных мировоззренческих установок, привития привычки к самостоятельной *поисковой активности*, к *креативной деятельности*, наконец, существенным *мотивационным стимулом* изучения не только и не столько данного элективного курса **МА**, но и математике вкупе с ее приложениями *вообще*.

На наш взгляд, курс и учебное пособие по нему помогут сформировать правильный взгляд на математику и на ее место в системе всех точных (и не только точных) наук, реально понять, в чем состоит такой давно уже действующий фактор, как *математизация* наук и практики. Другая направленность курса — на сознательную, осознанную ориентацию в будущих образовании и профессиональной деятельности, будь то направленность на получение естественно-математического образования или гуманитатного образования с важной математической составляющей, или, напротив, отторжение от такой направленности после реального ознакомления с некоторыми из основных математических методов изучения реальности.

Характерной чертой учебного пособия является наличие весьма большого и даже избыточного числа задач и упражнений к главам. Это обусловлено стремлением обеспечить самые разные интересы школьников, учителей и прочих пользователей. С этой стороны учебное пособие является заодно и «малым Демидовичем» [52] по тематике данного элективного курса. Хорошо это или плохо — по-нашему, и хорошо (есть из чего выбрать), и плохо (глаза разбегаются, да и мысли тоже...). По замыслу курса задачи и упражнения предназначены для самостоятельного их решения учащимися — для проведения занятий почти всегда достаточно примеров, приведенных в тексте параграфов. Но, как говорилось, можно устроить и «большой практикум» по решению задач к главам первой части — вместо изучения второй части.

[52] Мы имеем в виду сравнение с самым популярным сборником задач для университетов, точнее, для *физических* и *механико-математических* специальностей вузов; см., например: Б. П. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 10-е изд. — М.: Наука, 1990. *Борис Павлович Демидович* (1906–1977) — советский математик, с 1935 г. преподаватель МГУ им. М. В. Ломоносова.

Одна из главных идей, которой мы руководствовались при написании текстов учебного пособия — обеспечить возможность его использования для самообразования, самостоятельного освоения — с одной стороны; и возможность использования самих текстов, их структуры, стиля преподнесения материала как методического руководства для учителя — с другой стороны. Еще раз: мы полагаем, что само учебное пособие должно играть еще и роль методического пособия для изучения себя самого! Трудная задача, но все-таки, на наш взгляд, в принципе осуществимая и благодарная. В данном виде учебное пособие такими качествами не обладает в полной мере — ему еще нужна некоторая методическая подпорка (которую вы и читаете). Возможность его использования для самообразования худо-бедно реализована, хотя легким его чтение и разбор не назовешь.

*Александр Николаевич Земляков,*
*кандидат педагогических наук,*
*ведущий научный сотрудник*
*лаборатории дифференциации образования*
*Института общего среднего образования*
*Российской академии образования (ИОСО РАО).*

*E-mail: zemmm@yandex.ru*

**О Фонде математического образования и просвещения**

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

**Условия подписки и приема материалов**

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д. 3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2004 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2004 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

**Получатель:** ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

**Расчетный счет и банк получателя:**
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

**С сентября 2000 выходит "Обозрение Z"** — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

## Contents

**M. Postnikov. Thoughts about School** **2**

The outstanding Russian mathematician Mikhail M. Postnikov died on May 27, 2004. "Thoughts about School" contain some papers and interviews on school education in Russia made in late 80-th of the XX century.

**I. Kostenko. Introduction to Probabilistic Prediction (finished)** **20**

We finish to publish the manual on probability theory. This issue contains lecture 12 and the corresponding exercises. Lectures 10, 11 were published in the issue 1(28), 2004.

**S. Dvoryaninov. Notes on Mathematics** **48**

Two notes on interesting mathematical themes for high school students.

**A. Zemlyakov. Elective Course "Calculus of Reality".**
**Differential Equations as Mathematical Models of Real Processes.**
**Methodical and Methodological Comments** **55**

Methodical and methodological comments on problems of advanced mathematical education, on appropriate manuals, and on a proper style of teaching. A programme of a course for high school students "Elective Course "Calculus of Reality". Differential Equations as Mathematical Models of Real Processes"