Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год восьмой

№3 (30)

Июль - сентябрь 2004 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 3 (30), 2004 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (30), июль – сентябрь 2004 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2004 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 24.12.2004 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 7 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Учащимся и учителям средней школы

Задача Архимеда о быках алгоритм Евклида и уравнение Пелля

А. И. Щетников

В настоящей статье сделана попытка реконструировать метод решения уравнения Пелля в той форме, которой Архимед *мог пользоваться* (подчеркнём ещё раз — не «пользовался», а именно «мог пользоваться»). Отдавая себе отчёт в том, что всякая реконструкция такого рода будет откровенно гипотетической, мы всё же предприняли это изыскание, задавшись целью установить и изучить такие подходы к решению уравнения Пелля, которые соответствовали бы средствам, употреблявшимся в античной логистике (так древние греки называли своё искусство вычислений). (Комментарий автора — *Прим. ред.*).

1. Задача Архимеда о быках

До наших дней дошла любопытная математическая задача, которую Архимед предложил александрийским математикам в письме, адресованном Эратосфену Киренскому (см. Архимед 1962, с. 372–377). В этой задаче требуется узнать число быков и коров в четырёх стадах, принадлежащих богу Солнца Гелиосу, поэтому её обычно называют *задачей Архимеда о быках*.

Условие задачи Архимеда состоит из двух частей. В первой части требуется решить в натуральных числах систему из семи линейных уравнений с восьмью неизвестными. К этой задаче Архимед даёт такой комментарий:

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовёт хоть никто в числах невеждой тебя,
Всё ж к мудрецам ты причислен не будешь.

Когда ответы первой части получены, условие второй части приводится к следующему виду: «найти такое квадратное число, которое, будучи взято

$$M = 51\,285\,802\,909\,803 \text{ раз},$$

окажется равным некоторому треугольному числу». Об этой второй задаче Архимед говорит так:

Если ты это найдёшь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты всё до конца превзошёл.

Напомним, что треугольными называются числа, полученные суммированием последовательных натуральных чисел, начиная с единицы (рис. 1). Общая формула для q-ого треугольного числа записывается как $q(q+1)/2$.

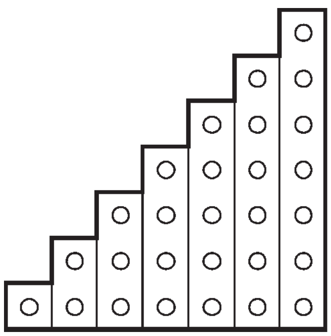


Рис. 1

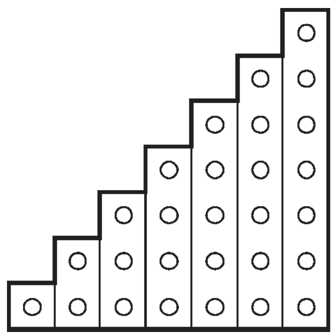


Рис. 2

Обозначим сторону искомого квадратного числа за x, сторону искомого треугольного числа за q. Восемь треугольных чисел с добавлением единицы дают квадратное число со стороной $y = 2q+1$ (стандартная геометрическая демонстрация этого факта изображена на рис. 2). Тем самым арифметическое ядро задачи Архимеда состоит в отыскании хотя бы одного целочисленного решения уравнения

$$y^2 = Nx^2 + 1 \tag{1}$$

для конкретного случая $N = 8M = 410286423278424$.

В докомпьютерную эру задача Архимеда рассматривалась в качестве примера такой задачи, которая хотя и имеет решение, но физически не может быть решена. A. Amthor (1880) установил, что наименьшее x, являющееся решением уравнения (1), выражается десятичным числом с 206530 цифрами; он же вычислил несколько первых и несколько последних цифр этого числа. Первое полное компьютерное решение задачи Архимеда получили в 1965 году C. Williams, R. A. German & C. R. Zarnke, для чего потребовалось 7 часов 49 минут работы вычислительной машины IBM 7040. Компьютер Cray 1 проделал ту же работу в 1981 году за 10 минут (Nelson 1981). Существенно более быстрые вычислительные алгоритмы для решения задачи Архимеда были разработаны Айланом Варди (Vardi 1998) и

Антти Нюгреном (Nygren 2001). Формулы последнего используют только целочисленную арифметику и требуют всего нескольких секунд работы персонального компьютера Pentium II.

Надо думать, что Архимед, предлагая задачу о быках своим коллегам, отдавал себе отчёт в её непосильности. Но тогда естественно будет предположить, что он поставил эту задачу не столько ради неё самой, сколько ради обсуждения общего метода решения уравнений вида (1), которым он сам владел и изложения которого он ждал от александрийских математиков.

К сожалению, мы не знаем ни того, как решал уравнение (1) сам Архимед, ни того, получил ли он какой-нибудь ответ от Эратосфена. В дошедших до нас античных математических текстах общие подходы к решению уравнения (1) нигде не обсуждаются. Диофант Александрийский в *Арифметике* рассматривает частные случаи уравнения (1) для случаев $N = 26(V_9)$ и $N = 30(V_{11})$. Однако в обоих этих случаях наименьшее решение находится с помощью специального приёма. Пусть $N = n^2 + m$, где n — наибольшее число, квадрат которого не превосходит N. Если при этом $2n$ кратно m, то можно использовать подстановку $y = nx + 1$, что даёт ответ $x = 2n/m$. Кажется, что этот частный приём не слишком много говорит нам о том, как древнегреческие математики могли решать уравнение (1) при произвольном N.

История уравнения (1) в Новое время начинается с вызова, который Пьер Ферма бросил в 1657 году своим коллегам-математикам: «Пусть дано любое неквадратное число, требуется найти бесконечное число квадратов, которые при умножении на данное число и увеличении на единицу составят квадрат... Найти, например, квадрат, который при умножении на 149, или 109, или 433 и при увеличении на единицу составит квадрат»(Ферма 1992, с. 68). Этот вызов приняли английские математики Уильям Броункер и Джон Валлис, представившие свои решения. Как решали уравнение (1) Ферма и Броункер, мы в точности не знаем. Методы, применявшиеся Валлисом, рассмотрены в статье А. А. Антропова 1986.

С уравнением (1) связан один исторический курьёз — Леонард Эйлер по ошибке назвал его *уравнением Пелля* (хотя английский математик Джон Пелль никогда этим уравнением не занимался, правильнее же было назвать его *уравнением Ферма*), и это название закрепилось в математической литературе.

Общую историю уравнения Пелля рассматривали Dickson 1920 и Weil 1984. Так называемый циклический метод, с помощью которых за тысячу лет до Ферма и его современников уравнение Пелля решали математики древней Индии, рассмотрен в статье Б. Л. Ван дер Вардена 1976.

2. О методологических принципах предлагаемой реконструкции

В настоящей статье сделана попытка реконструировать метод решения уравнения Пелля в той форме, которой Архимед *мог пользоваться* (подчеркнём ещё раз — не «пользовался», а именно «мог пользоваться»). Отдавая себе отчёт в том, что всякая реконструкция такого рода будет откровенно гипотетической, мы всё же предприняли это изыскание, задавшись целью установить и изучить такие подходы к решению уравнения Пелля, которые соответствовали бы средствам, употреблявшимся в античной логистике (так древние греки называли своё искусство вычислений).

Мы со школы приучены воспринимать всякое алгебраическое выражение как своего рода материю или «оперативный объект»воображения. Запись $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ не требует для нас «привязки»к какой-то иной материи (например, материи геометрических чертежей). Однако нашей символической алгебры у древних греков не было, и материей их математических рассуждений почти всегда служили геометрические чертежи или схематические изображения фигурных чисел. Поэтому мы считаем, что освоить греческое математическое мышление в его своеобразии — значит научиться работать с геометрическими образами даже там, где нам гораздо привычнее написать алгебраическую формулу.

И хотя для краткости записи в некоторых разделах настоящей работы мы пользуемся привычными алгебраическими формулами, эти формулы всегда допускают прямой перевод на «родной»для древнегреческой математики язык «геометрической алгебры», изложенный во II книге *Начал* Евклида (см. Fowler 1980, Щетников 2001). Что касается отрицательных числовых коэффициентов, которые мы вводим в уравнения для упрощения анализа различных случаев и которые заведомо не могли употребляться греческими математиками в эпоху Архимеда, то мы показываем, как можно провести наше рассуждение и без этого алгебраического средства. Само собой разумеется, что мы сознательно воздерживались от того, чтобы использовать в нашей реконструкции непрерывные дроби и алгебраические тождества вида $(a+b\sqrt{N})(a-b\sqrt{N}) = a^2-Nb^2$, содержащие иррациональные выражения — то есть от того математического аппарата, который со времён Эйлера и Лагранжа стандартно используется при изложении вопросов, относящихся к уравнению Пелля.

Помимо реконструкции метода решения уравнения Пелля, данная статья содержит также исследование вопроса, можно ли характерными средствами античной математики доказать, что уравнение Пелля разрешимо для любого неквадратного N.

3. Некоторые исходные прототипы задачи о быках

А. К уравнению $y^2 = 2x^2 \pm 1$ приводит пифагорейская задача об определении «рациональных сторон и диагоналей», то есть об отыскании таких рациональных приближений для $\sqrt{2}$, у которых квадрат знаменателя на единицу отличается от удвоенного квадрата числителя. В этой же предметной логике решение уравнения (1) связано с поиском таких рациональных приближений для $\sqrt{N}$, у которых квадрат числителя на единицу отличается от N раз взятого квадрата знаменателя.

Б. Автор анонимной схолии к диалогу Платона *Хармид* (165e) среди вопросов, которыми занимается логистика, упоминает как задачу Архимеда о быках, так и «обозримую материю задач, касающихся треугольных и многоугольных чисел». Эти последние задачи, как мы сейчас покажем, также могут приводить к уравнению Пелля.

Нетрудно видеть, что число 36 является квадратным и треугольным одновременно. Отсюда возникает задача найти все числа, которые являются квадратными и треугольными одновременно, которая приводит к уравнению $y^2 = 2x^2 + 1$.

Аналогичная задача об отыскании всех чисел, которые одновременно являются квадратными и пятиугольными, также приводит к уравнению Пелля. В самом деле, k-ое пятиугольное число выражается формулой $k(3k-1)/2$. Сложив вместе шесть таких чисел, получим гетеромекное[1] число $3k(3k-1)$. Сложив вместе четыре полученных гетеромекных числа и добавив к ним единицу, получим квадратное число $(6k-1)^2$. Тем самым наша задача привела к уравнению

$$(6k-1)^2 = 24n^2 + 1.$$

Сделав замену $6k - 1 = x$, $2n = y$, перепишем это уравнение в виде

$$x^2 = 6y^2 + 1.$$

Из совокупности решений этого уравнения для нашей задачи следует выбрать те решения, в которых $x + 1$ делится на 6.

4. Алгоритм Евклида в его исходной форме

В современном «школьном»понимании алгоритм Евклида представляет собой процедуру отыскания *наибольшего общего делителя* двух натуральных чисел, двух многочленов и т. д. В противоположность этому, древнегреческие математики использовали этот алгоритм (Евклидом не изобретённый, но лишь описанный в VII и X книгах *Начал*) для поиска *наибольшей общей меры* двух величин, включая сюда и числа. По-гречески процедура такого поиска называется «антифайресис»($\acute{\iota}\nu\theta\upsilon\phi \leq \iota\rho\varepsilon\sigma\iota\varphi$), что можно перевести на русский язык как «*взаимное вычитание*». Суть её состоит в следующем.

Возьмём две величины $A > B$ и вычтем B из A; в результате получим две величины B и $C = A - B$. Если они равны друг другу, то тогда C будет наибольшей общей мерой A и B. В противном случае возьмём пару B и C и вычтем меньшую величину из большей; мы получим новую пару величин, и т. д. Если эта процедура завершится на каком-нибудь шаге равенством образовавшихся величин, последний остаток будет служить наибольшей общей мерой начальной пары $\{A, B\}$. Если же нам удастся показать, что для данной пары величин эта процедура не завершится ни на каком шаге, то величины в данной паре придётся признать несоизмеримыми между собой.

Ещё раз подчеркнём разницу между современной и античной трактовками алгоритма Евклида. Мы делим одно число на другое и отыскиваем остаток, после чего составляем пару из делителя и остатка. Греки же вычитали одну величину из другой, после чего составляли пару из вычитаемого и разности. К примеру, когда мы применяем алгоритм Евклида к паре $\{37, 11\}$, мы делим $37 : 11$, находим

[1]В античной арифметике *гетеромекными* назывались прямоугольные числа, стороны которых разнятся на единицу. Выделение этого вида чисел связано прежде всего с тем, что четыре одинаковых гетеромекных числа с добавлением единицы дают квадрат (рис. 2).

остаток 4 и составляем пару $\{11, 4\}$. Греки же находили разность $37 - 11 = 26$, составляли пару $\{26, 11\}$, снова находили разность $26 - 11 = 15$, составляли пару $\{15, 11\}$, снова находили разность $15 - 11 = 4$, и только теперь составляли пару $\{11, 4\}$. Конечно же, итог оказывается тем же — но идейная основа обоих подходов, на наш взгляд, несколько различается.

Процедура антифайресиса использовалась в ранней античной теории пропорциональности для определения равенства отношений (см. Becker 1932, Fowler 1979), в логистике — для приближённого сокращения дробей с большими числителями и знаменателями (см. Зверкина 2000а).

5. Антифайретическое доказательство иррациональности $\sqrt{N}$ (отдельное для каждого частного случая)

Б. Л. Ван дер Варден (1959) выдвинул предположение о том, что древнегреческие математики могли использовать процедуру антифайресиса для доказательства иррациональности отношения $\sqrt{N} : 1$ (здесь $\sqrt{N}$ мы будем мыслить геометрически — как сторону квадрата, отношение площади которого к площади единичного квадрата выражается некоторым неквадратным числом N). В реконструкции Ван дер Вардена отношение $\sqrt{N} : 1$ разлагается в периодическую непрерывную дробь. Более изощрённую версию этой же реконструкции, основанную на преобразованиях чертежа в рамках «геометрической алгебры», предложил Дэвид Фаулер (Fowler 1980).

В противоположность этому, в нашей реконструкции метод взаимного вычитания применяется *не к паре данных отрезков, а к паре неизвестных натуральных чисел*, относительно которых предполагается, что они удовлетворяют уравнению

$$p^2 = Nq^2. \tag{2}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$p^2 = 7q^2$$

и будем искать его наименьшее решение в натуральных числах. Числа p и q в этом решении, если таковое существует, — взаимно простые (а иначе это решение не было бы наименьшим), и их наибольшая общая мера равна единице.

Ясно, что в искомом решении будет $p > q$. Тем самым возникает мысль вычесть p из q и сделать замену $p = q + r$:

$$(q + r)^2 = 7q^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 + 2qr = 6r^2.$$

Поскольку в новом уравнении сумма коэффициентов слева равна 3, а коэффициент справа равен 7, в искомом решении будет $q > r$. Сделаем замену $q = r + s$:

$$(r + s)^2 + 2(r + s)r = 7r^2 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 4rs = 3r^2.$$

Поскольку в новом уравнении сумма коэффициентов слева равна 5, а коэффициент справа равен 3, в искомом решении будет $s < r$. Сделаем замену $r = s + t$:

$$s^2 + 4(s + t)s = 3(s + t)^2 \quad \Rightarrow 2s^2 = 2st + 3t^2.$$

Временно остановившись на этом шаге антифайресиса, отметим, что опорой для представленных здесь рассуждений могут служить не только привычные нам буквенные алгебраические уравнения, но также и характерные для древнегреческой математики чертежи «геометрической алгебры». На фигурах, изображённых на рис. 3, квадрат над диагональю большого прямоугольника равен по площади семи квадратам под диагональю. Три фигуры, вычерченные одна за другой, соответствуют трём выписанным выше уравнениям. В каждой фигуре закрашены части квадратов, уже удалённые при антифайресисе.

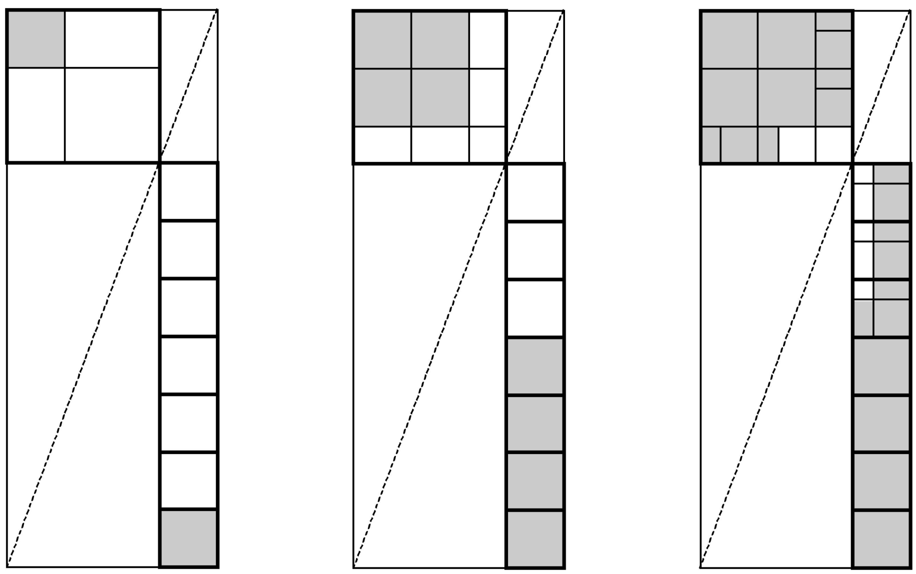


Рис. 3

Для следующих шагов антифайресиса мы не будем ни выписывать самих уравнений, ни вычерчивать эквивалентных этим уравнениям геометрических чертежей, — но ограничимся составлением таблицы числовых коэффициентов. Для краткости мы позволим себе перекрестный член bxy в уравнении $ax^2 + bxy = cy^2$ записывать во всех уравнениях слева от знака равенства, придавая коэффициенту b как положительные, так и отрицательные значения. Впрочем, эта вольность, не согласующаяся с отсутствием отрицательных чисел в греческой математике до Диофанта, легко может быть исправлена при некотором утяжелении табличных записей и правил манипулирования с ними.

Установим правило, по которому производится переход от коэффициентов $(a,\ b,\ c)$ предыдущей строки к коэффициентам $(a',\ b',\ c')$ следующей строки.

Если в данной строке выполняется неравенство	
$a+b<c$	$a+b>c$
то в этом случае следует сделать замену	
$x=y+z$	$y=x+z$
которая приводит к уравнению	
$az^2+(b+2a)xz=(c-a-b)y^2$	$(a+b-c)x^2+(b-2c)xz=cz^2$
Тем самым переход к коэффициентам следующей строки задаётся формулами	
$a'=a$, $b'=b+2a$, $c'=c-a-b$.	$a'=a+b-c$, $b'=b-2c$, $c'=c$.

(Замечание: из формул перехода следует, что коэффициенты a и c всегда остаются положительными.)

Завершению антифайресиса соответствовало бы получение на очередном шаге такого уравнения, решением которого была бы пара чисел $\{1,1\}$, и коэффициенты которого удовлетворяли бы соотношению $a+b=c$.

Ниже приведены таблицы преобразования коэффициентов (a, b, c) уравнений вида (2) для всех неквадратных N от 2 до 15. Из этих таблиц можно видеть, что во всех рассмотренных случаях условие $a+b=c$ не выполняется ни в одной из выписанных строк, зато на некотором шаге антифайресиса (отображённом в последней строке каждой таблицы) воспроизводится форма исходного уравнения. Это означает, что во всех этих случаях процедура антифайресиса приводит к построению периодической цепочки коэффициентов и не имеет завершения. Отсюда вытекает, что во всех этих случаях соответствующее отношение $\sqrt{N}:1$ является иррациональным.

Заметим также, что во всех таблицах наблюдается одна и та же палиндромическая структура: в строках, равно отстоящих от начала и конца таблицы, коэффициенты a и c попарно равны друг другу, а коэффициенты b меняют знак.

В таблицах для $N=2, 5, 10, 13$ имеется средняя строка, в которой происходит оборачивание коэффициентов начальной строки. В принципе, доказательство иррациональности отношения $\sqrt{N}:1$ можно было бы оборвать уже на этой строке, но в целях дальнейшего исследования мы продолжили построение таблицы вплоть до воспроизведения начальной строки. (Примечание: с этой же целью во всех таблицах выделена строка, коэффициенты которой удовлетворяют уравнению

$a+b=c+1$.)

1	0	$<$	2
1	2	$>$	1
2	0	$>$	1
1	-2	$<$	1
1	0		2

1	0	$<$	3
1	2	$>$	2
1	-2	$<$	2
1	0	$<$	2
1	0		3

1	0	$<$	5
1	2	$<$	4
1	4	$>$	1
4	2	$>$	1
4	-2	$>$	1
1	-4	$<$	1
1	-2	$<$	4
1	0		5

1	0	$<$	6
1	2	$<$	5
1	4	$>$	2
3	0	$>$	2
1	-4	$<$	2
1	-2	$<$	5
1	0		6

1	0	$<$	7
1	2	$<$	6
1	4	$>$	3
2	-2	$<$	3
2	2	$>$	3
1	-4	$<$	3
1	-2	$<$	6
1	0	$<$	7

1	0	$<$	8
1	2	$<$	7
1	4	$>$	4
1	-4	$<$	4
1	-2	$<$	7
1	0	$<$	8

1	0	$<$	10
1	2	$<$	9
1	4	$<$	6
1	6	$>$	1
6	4	$>$	1
9	2	$>$	1
10	0	$>$	1
9	-2	$>$	1
6	-4	$>$	1
1	-6	$<$	1
1	-4	$<$	6
1	-2	$<$	9
1	0		10

1	0	$<$	11
1	2	$<$	10
1	4	$<$	7
1	6	$>$	2
5	2	$>$	2
5	-2	$>$	2
1	-6	$<$	2
1	-4	$<$	7
1	-2	$<$	10
1	0		11

1	0	$<$	12
1	2	$<$	11
1	4	$<$	8
1	6	$>$	3
4	0	$>$	3
1	-6	$<$	3
1	-4	$<$	8
1	-2	$<$	11
1	0		12

1	0	$<$	13
1	2	$<$	12
1	4	$<$	9
1	6	$>$	4
3	-2	$<$	4
3	4	$>$	3
4	-2	$<$	3
4	6	$>$	1
9	4	$>$	1
12	2	$>$	1
13	0	$>$	1
12	-2	$>$	1
9	-4	$>$	1
4	-6	$<$	1
4	2	$>$	3
3	-4	$<$	3
3	2	$>$	4
1	-6	$<$	4
1	-4	$<$	9
1	-2	$<$	12
1	0	$<$	13

1	0	$<$	14
1	2	$<$	13
1	4	$<$	10
1	6	$>$	5
2	-4	$<$	5
2	0	$<$	7
2	4	$>$	5
1	-6	$<$	5
1	-4	$<$	10
1	-2	$<$	13
1	0		14

1	0	$<$	15
1	2	$<$	14
1	4	$<$	11
1	6	$>$	6
1	-6	$<$	6
1	-4	$<$	11
1	-2	$<$	14
1	0		15

6. Общее антифайретическое доказательство иррациональности $\sqrt{N}$

Относительно реконструированных Ван дер Варденом и Фаулером антифайретических доказательств иррациональности отношения $\sqrt{N} : 1$ принято замечать, что их недостатком является необходимость разлагать это отношение в непрерывную дробь заново для каждого N (или для некоторого специального класса N). В нашей версии доказательства этот недостаток легко устраняется: мы можем провести одно универсальное доказательство для всех неквадратных N.

Лемма 1. Значение выражения $b^2 + 4ac$ при переходе от предыдущей строки к последующей остаётся неизменным и равным $4N$.

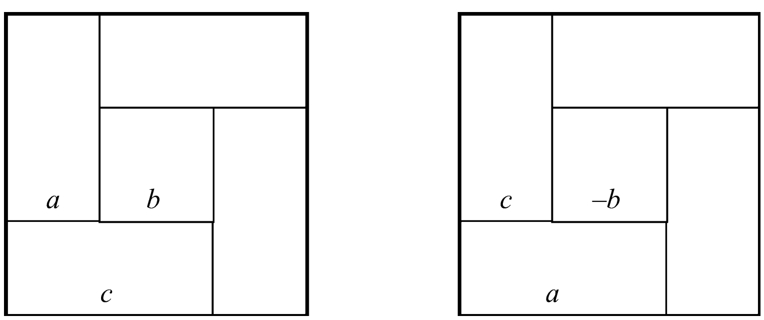
Доказательство. Пусть $a + b < c$, тогда

$$4a'c' + b'^2 = 4a(c - a - b) + (b + 2a)^2 = 4ac + b^2.$$

Пусть $a + b > c$, тогда

$$4a'c' + b'^2 = 4(a + b - c)c + (b - 2c)^2 = 4ac + b^2.$$

Поэтому значение выражения $b^2 + 4ac$ остаётся неизменным. Но в первой строке $a = 1$, $b = 0$, $c = N$, и тем самым $b^2 + 4 = 4N$.



(а) (б)

Рис. 4

Доказательство иррациональности $\sqrt{N}$. Предположим, что на каком-нибудь шаге антифайресиса мы доберёмся до завершающей строки, в которой будет $a + b = c$. Но тогда $b^2 + 4ac$ будет квадратным числом (рис. 4 (а) выполнен для случая $b > 0$; рис. 4 (б) — для случая $b < 0$).

В силу леммы 1 получается, что квадратное число $b^2 + 4ac$ равно неквадратному числу $4N$, что невозможно. Следовательно, сделанное выше предположение является ложным, и процедура антифайресиса не будет иметь завершения. Отсюда следует заключить, что $\sqrt{N}$ для любого неквадратного N есть величина, несоизмеримая с единицей.

7. Отыскание наименьшего решения уравнения Пелля (отдельное для каждого частного случая)

Вновь вернёмся к конкретному примеру, когда $N = 7$. Для отыскания наименьшего решения уравнения

$$p^2 = 7q^2 + 1$$

рассмотрим ту же таблицу, что и в предыдущем разделе. Спустимся по ней вниз до строки, в которой $a + b = c + 1$. Пририсуем к таблице дополнительные пятый и шестой столбцы (ниже они названы левым и правым), и запишем в оба столбца этой строки две единицы, а затем начнём подъём наверх. Если в следующей сверху строке стоит знак «<», запишем в её левый столбец сумму чисел предыдущей строки, а в правый столбец перепишем число из правого столбца предыдущей строки. Если в следующей сверху строке стоит знак «>», запишем в её правый столбец сумму чисел предыдущей строки, а в левый столбец перепишем число из левого столбца предыдущей строки. Таким образом мы поднимемся до первой строки; два записанные в ней числа дают искомое наименьшее решение.

1	0	$<$	7	8	3
1	2	$<$	6	5	3
1	4	$>$	3	2	3
2	-2	$<$	3	2	1
2	2		3	1	1

Проверка показывает, что и в самом деле $8^2 = 7 \cdot 3^2 + 1$.

8. Доказательство теоремы о том, что уравнение Пелля разрешимо в натуральных числах при любом неквадратном N

А. Для начала научимся вычислять по данной строке предшествующую строку. Набору (a, b, c) могут предшествовать два набора $(a, b - 2a, c + b - a)$ и $(a - b - c, b + 2c, c)$. Но одно из выражений $c + b - a$ либо $a - b - c$ является отрицательным. Поэтому если

$c + b > a$	$c + b < a$
то набору (a, b, c) предшествует набор	
$(a, b - 2a, c + b - a)$	$(a - b - c, b + 2c, c)$

Б. Теперь заметим, что во всех рассмотренных выше примерах равенство $a + b = c + 1$ выполняется в строке, находящейся непосредственно над блоком нижних строк, в которых $a = 1$. Представим N в виде $N = n^2 + m$, где n^2 — наибольший квадрат, не превышающий N. Несложно показать, что блок нижних строк и строка над ним будут иметь следующий вид:

$1-m+2n$	$-2n+2m$	m
1	$-2n$	m
1	$-2(n-1)$	$m+n^2-(n-1)^2$
...	...	...
1	-2	$m+n^2-1$
1	0	$m+n^2$

При этом в верхней строке действительно выполняется равенство

$$a+b=(1-m+2n)+(-2n+2m)=m+1=c+1.$$

В. Выше (раздел 6) мы доказали, что процесс антифайресиса для уравнения (2) никогда не завершается, — но мы ещё не доказали, что первая строка при этом обязательно повторится. Чтобы доказать это, заметим, что число наборов ($a>0$, b, $c>0$), для которых выполняется условие $b^2+4ac=4N$, является конечным. Поэтому рано или поздно повторится по крайней мере один из этих наборов. Но тогда повторятся и наборы предыдущих строк, и т. д. вплоть до первой строки. А поскольку первая строка повторится, то в указанном месте (см. пункт **Б**) над ней обязательно будет находиться строка, в которой $a+b=c+1$.

Г. Выше (пункты **Б** + **В**) мы доказали, что уравнение Пелля разрешимо в натуральных числах при любом N, и указали приём, позволяющий явно построить одно его решение. Осталось показать, что построенное таким образом решение является наименьшим. Для этого докажем, что строка, в которой $a+b=c+1$, встречается внутри периода от первой строки до её повторения только один раз.

Составим фигуру из квадрата b^2 и четырёх прямоугольников ac, как показано на рис. 5 (на рис. 5, (а) изображён случай $b<0$, на рис. 5, (б) — случай $b<0$). Площадь этой фигуры по лемме 1 равна $4N$; площадь закрашенной четверти этой фигуры равна N.

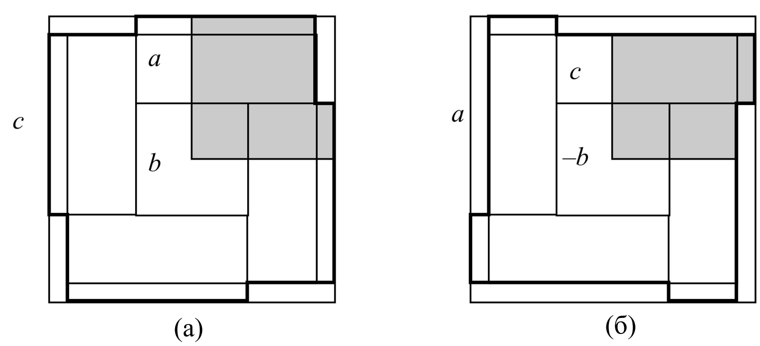


Рис. 5

Пусть $N=n^2+m$, где n^2 — наибольшее квадратное число, не превышающее N. Из рассмотрения чертежа следует, что m — это число единиц в закрашенных «выступах»(«выступе») единичной ширины; и это число равно c. Получаем, что из совместного выполнения условий $a + b = c + 1$ и $b^2 + 4ac = 4N$ следует, что коэффициенты строки, в которой $a + b = c + 1$, обязательно будут иметь вид

$$c = m, \qquad b = 2(m - n), \qquad a = 2n - m + 1.$$

Но это и есть решение, построенное выше (пункт **Б**).

Заметим теперь, что внутри периода от первой строки до её повторения любая строка может встретиться не более одного раза (в противном случае повторятся и наборы следующих строк, и т. д., вплоть до последней строки, и тем самым получится, что внутри периода встречается строка, совпадающая с последней строкой). Поэтому построенное выше решение уравнения (1) действительно является наименьшим.

9. Построение бесконечной цепочки решений уравнения Пелля

В формулировке задачи Архимеда требуется найти хотя бы одно решение уравнения (1) для заданного N. Однако само исследование уравнений вида (1) естественно приводит к задаче о построении последовательности всех решений каждого такого уравнения. Соответствующий алгоритм для частного случая $N = 2$ был известен ещё пифагорейцам (см. Паев 1965, Fowler 1982, Зверкина 1999, Щетников 1999).

Уравнение (1) имеет бесконечно много решений, поскольку в каждом периоде имеется строка, в которой $a + b = c + 1$. Все эти решения в принципе могут быть найдены обратным восхождением к первой строке.

Более быстрый приём отыскания последовательных решений уравнения (1) основывается на так называемом «тождестве Брахмагупты»

$$(x_1^2 - Ny_1^2)(x_2^2 - Ny_2^2) = (x_1x_2 + Ny_1y_2)^2 - N(x_1y_2 + x_2y_1)^2, \tag{3}$$

истинность которого можно проверить прямым раскрытием скобок. Из этого тождества следует, что если две пары чисел $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ (не обязательно различные) удовлетворяют уравнению (1), то и пара $\{x_1x_2 + Ny_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2\}$ также удовлетворяет уравнению (1).

Приём состоит в том, чтобы в качестве пары $\{x_1, y_1\}$ всё время брать наименьшее решение (1), а в качестве пары $\{x_2, y_2\}$ брать сначала это же наименьшее решение, затем — найденное на первом шаге второе решение, и т. д.

Так для $N = 7$ наименьшим будет найденное выше решение $\{8, 3\}$. Следующие решения находятся про указанному правилу:

$$\frac{8 \cdot 8 + 7 \cdot 3 \cdot 3}{8 \cdot 3 + 3 \cdot 8} = \frac{127}{48}, \ \frac{8 \cdot 127 + 7 \cdot 3 \cdot 48}{8 \cdot 48 + 3 \cdot 127} = \frac{2024}{765}, \ \frac{8 \cdot 2024 + 7 \cdot 3 \cdot 765}{8 \cdot 765 + 3 \cdot 2024} = \frac{32257}{12192}, \ \ldots$$

Спрашивается, мог ли о тождестве (3), содержащим выражения четвёртой степени, знать Архимед? Как это тождество устанавливается с помощью средств «геометрической алгебры»? (Выражения четвёртой степени встречаются в так называемой «формуле Герона», позволяющей вычислять площадь треугольника по длине трёх его сторон. Эта формула в действительности была открыта не Героном, описавшим её в своей *Метрике*, а Архимедом. В ходе доказательства площадь треугольника представляется как среднее геометрическое двух других площадей, то есть как корень квадратный из произведения этих площадей (Архимед 1962, с. 419–421)).

Г. Укажем ещё один приём, позволяющий по двум имеющимся решениям $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ построить новое решение $\{x_1x_2 + Ny_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2\}$. Рассмотрим следующую четвёрку рациональных приближений для $\sqrt{N}$:

$$\frac{Ny_2}{x_2}, \quad \frac{Ny_1}{x_1}, \quad \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x_2}{y_2}.$$

На первом шаге построения вычислим средние гармонические для первой (нижней) и для второй (верхней) пары приближений:

$$\frac{2Ny_1y_2}{x_1y_2 + x_2y_1}, \quad \frac{2x_1x_2}{x_1y_2 + x_2y_1}.$$

На втором шаге вычислим среднее арифметическое для этих средних гармонических:

$$\frac{x_1x_2 + Ny_1y_2}{x_1y_2 + x_2y_1}.$$

Можно прийти к этому же результату и в другом порядке, вычислив на первом шаге построения средние арифметические для первого и третьего и для второго и четвёртого приближений, а на втором шаге — среднее гармоническое для этих средних арифметических.

Литература

[1] Антропов А. А., 1986. О двух методах решения уравнения Пелля в работах Дж. Валлиса. *История и методология естественных наук*. **32**, с. 39–49.

[2] Архимед. *Сочинения*. Перевод, вступит. статья и комм. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.

[3] Ван дер Варден Б. Л., 1959. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* М., Физматгиз.

[4] Ван дер Варден Б. Л., 1976. Уравнение Пелля в математике греков и индийцев. *УМН*, **31**, вып. 5(191), с. 57–70.

[5] Диофант Александрийский. *Арифметика и книга о многоугольных числах*. Перевод И. Н. Веселовского; редакция и комм. И. Г. Башмаковой. М., Наука, 1974.

[6] Зверкина Г. А., 1999. Метод простой итерации: от Вавилона до Ньютона. *Историко-математические исследования*, **3(38)**, с. 270–315.

[7] Зверкина Г. А, 2000а. Алгоритм Евклида как вычислительное средство античной математики.*Историко-математические исследования*, **5(40)**, с. 232–243.

[8] Зверкина Г. А, 2000б. Уравнение Пелля-Ферма в античности. *Международная научная конференция «Образование, наука и экономика в вузах на рубеже тысячелетий». Сборник статей.* Vysoke Tatry, с. 210–213.

[9] Паев М. Е., 1965. О приближённом вычислении квадратных корней в древней Греции. *Историко-математические исследования*, **16**, с. 219–234.

[10] Ферма П. *Исследования по теории чисел и диофантову анализу.* Под ред. И. Г. Башмаковой. М., Наука, 1992.

[11] Щетников А. И., 1999. Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие «семенного логоса». *Математическое образование*, №1(**??**), с. 84–94.

[12] Щетников А. И., 2001. Вторая книга «Начал»Евклида: её математическое содержание и структура. *Вторая книга «Начал»Евклида: текст и интерпретации.* Новосибирск: АНТ, с. 19–40.

[13] Amthor A., 1880. Das Problema bovinum des Archimedes. *Zeitschrift für Math. und Phys., Hist.-litt. Abth.* **25**, s. 153–171.

[14] Becker O., 1932. Eudoxos-Studien, I. Eine voreudoxishe Proportionlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. *Quellen und Studien zur Geshihte der Math.* B**2**, s. 313–333.

[15] Dickson L. E., 1920. *History of the theory of numbers.* Vol. II, *Diophantine analysis.* Washington, Carnegie Institute. (Reprinted: AMS, 1999.)

[16] Fowler D. H., 1979. Ratio in early Greek mathematics. *Bull. AMS,* N. S., **1**, p. 807–846.

[17] Fowler D. H., 1980–82. Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences*, **22**, p. 5–36,**26**, p. 193–209.

[18] Nelson H. L., 1980–81. A solution to Archimedes' cattle problem. *J. of Recreational Math.*, **13**, p. 162–176.

[19] Nygrén A., 2001. A simple solution to Archimedes' cattle problem. *Acta Universitatis Ouluensis Scientiae Rerum Naturalium.* ISBN 951-42-5932-7.

[20] Vardi I., 1998. Archimedes' cattle problem. *Am. Math. Monthly*, **105**, p. 305–319.

[21] Weil A. , 1984. *Number theory: an approach through history.* Boston, Birkhäuser.

[22] Williams H. C., German R. A., Zarnke C. R., 1965. Solution of the cattle problem of Archimedes. *Math. Comp.*, **19**, p. 671–674.

Щетников Андрей Иванович,
координатор Лаборатории теоретической
и экспериментальной эпистемологии.

E-mail: schetnikov@ngs.ru
http://ltpe.stsland.ru

Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий

А. Н. Земляков

Начинаем печатать главы из учебно-методического пособия А. Н. Землякова «Элективный курс «Математический анализ реальности». Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов», предназначенного для классов с углубленным изучением математики. В настоящем номере мы публикуем методический и методологический комментарий, часть 3, а также главу 2.

Раздел 3. КОММЕНТАРИИ К КУРСУ

Часть I. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ (глава 1; 4[6] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 1

Это вводная тема, главная цель изучения которой — показать, что такое эволюционирующие системы и математические модели их эволюции. Эволюция понимается в широком смысле — так, что обычное механическое движение считается частным случаем эволюции. Более того, системы, описываемые одним числовым параметром $x = x(t)$, можно наглядно представлять себе как движение воображаемой точки $M_t = M(x(t))$ по конфигурационной оси Ox.

Главное *новое* содержание темы: запись законов эволюции как *дифференциальных уравнений* — считается, что в тех или иных предположениях мы можем получить информацию о *скорости* изменения параметров системы. Скорость — это производная, так и получается, что для систем с *одной степенью свободы*, т. е. описываемой одним параметром, закон эволюции принимает вид $x'(t) = V$, где чаще всего $V = V(x)$ ("*от времени законы природы не зависят*". Дифференциальное уравнение и является *математической моделью* рассматриваемой системы, и школьникам нужно сразу объяснить обычный ход исследований: сначала "создание" (формулирование, запись) модели, более-менее (т. е. при абстрагировании от некоторых черт рассматриваемой ситуации) адекватно отражающей изучаемый процесс или явление. Потом *математический анализ* этой модели, т. е. исследование получающегося дифференциального уравнения. В идеале — отыскание *всех* его решений и исследование их свойств или, как говорят, поведения. Если явное отыскание решений проваливается, то следует попытка описания свойств (неизвестных) решений, исходя непосредственно из дифференциального уравнения (как это делается, хорошо видно на примере заданий к главе 3, в которых сначала устанавливаются *априорные* свойства решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$, исходя только из этого уравнения, а уже потом, в данном случае, отыскание явного вида решений — экспонент).

В § 1.1 рассматривается только один пример с полным исследованием — *свободное движение* материальной точки вдоль прямой, описываемое уравнением Ньютона $x'' = 0$ или соответствующей *цепочкой* (системой) двух эволюционных уравнений $x' = v,\ v' = 0$. На нем показывается, что однозначное задание решений дифференциальных уравнений обеспечивается заданием *начальных условий* (в данном случае двух — начальных координаты и скорости). На это важное обстоятельство и существенное понятие *начальных условий* следует обратить особое внимание.

Естественно, ведя речь о дифференциальных уравнениях, нужно быть уверенным в том, что школьники достаточно хорошо и свободно владеют основным понятием дифференциального исчисления — производной. Поэтому конкретным примерам эволюционных моделей в § 1.1 предшествуют пункты, в которых напоминаются наглядно-кинематический и геометрический смыслы производной. Если школьники хорошо подготовлены, эти пункты можно просто конспективно прокомментировать, а остановиться на понятии *линейного приближения* — главного чисто математического понятия в этой главе. Оно потребуется при обсуждении примеров "псевдоупругой" силы в конце § 1.2.

Приводимые без исследования примеры популяционных моделей (Мальтуса, логистическая или Ферхюльста, квадратичная) должны быть доведены до понимания — в них показывается, как именно получаются дифференциальные уравнения. Если не хватит времени на разбор модели биоценоза из последнего пункта, это не страшно — к ней мы возвращаемся и полностью, на качественном уровне, ее исследуем в конце главы.

В § 1.1 объясняется еще одна важная с точки зрения и математики, и механики (кинематики) конструкция: *производная векторнозначной функции*, описывающей движение материальной точки в плоскости или в пространстве. Вот на эти пункты (1.1.6–7) при необходимости можно выделить дополнительное занятие (пару уроков), тем более, что на данные вопросы приведено *весьма значительное* число упражнений и задач. Для школьников материал только относительно нов — нечто в этом роде объясняется в курсе физики. Нужно дать строго математическое разъяснение и по возможности довести до всеобщего понимания приводимый кинематический вывод формул для производных косинуса и синуса (см. далее комментарии к § 1.1) — они будут нужны в примере гармонического осциллятора из

§ 1.2.

В § 1.2 три фундаментальных "физико-математических" понятия или концепта.

1) Второй закон Ньютона (для одномерных систем) как дифференциальное уравнение, описывающее поведение *динамической системы* (напомним, что в учебном пособии понятие динамической системы трактуется в традиционном смысле, как системы классической механики — или динамики).

2) Фазовая плоскость (для одномерных систем), т. е. плоскость в осях "координата–скорость", Oxv, точки которой полностью описывают состояние движущейся по прямой материальной точки (для описания состояния и будущего движения точки знание одной координаты недостаточно — нужно знать еще и скорость).

3) Закон сохранения энергии (для консервативных одномерных систем), который в данном случае задает геометрически фазовые траектории. Разумеется, рассматривать эти концепты рекомендуется только в тех рамках, которые очерчены в учебном пособии.

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
1.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
1.1.1	Смысл производной: скорость изменения величины	$\uparrow\downarrow$	
1.1.2	Касательная и геометрический смысл производной	$\uparrow$	**У**
1.1.3	Понятие линейного приближения	$!\downarrow +$	**У**
1.1.4	Движение по прямой	!!	
1.1.5	Одномерные эволюционные модели	!!	
1.1.6	Производные и скорости в механике (кинематике)	!!	***У**
1.1.7	Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости	$!!\downarrow$	*
1.1.8	Двумерная эволюционная модель Вольтерры–Лотки	$\downarrow +$	

Обозначения колонок таблицы:

"П.П." = пункт параграфа;

"Спец." = "спецификация" пункта (см. ниже);

"Прим." = примечания.

Смысл значков в "спецификации":

"!!" — очень важный пункт, на который следует обратить особое внимание;

"!" — важный пункт;

"$\downarrow$" — пункт, который существенно потребуется в дальнейшем;

"$\uparrow$" — пункт, материал которого должен быть знаком по основному/профильному курсу;

"+" — пункт, который достаточно кратко прокомментировать и оставить для самостоятельной проработки;

"$\times$" — пункт, который стоит целиком оставить для самостоятельной проработки;

"$\sim$" — пункт, который можно "пропустить", оставить для ознакомления по желанию учащихся.

В колонке "Примечания" звездочками помечен "сравнительный уровень сложности", буквой "Д" — дополнительный материал, буквой "У" — материал, который *можно* подкрепить упражнениями, через "У!" — материал, который *желательно* подкрепить упражнениями.

Повторение определения производной из п. 1.1.1 можно сразу же связать с важнейшим в приложениях понятием *линейного приближения* из п. 1.1.3, а потом обратиться и к касательной (этот-то материал должен быть уже хорошо знаком школьникам). В чем важность линейных приближений? — Отнюдь не только в приближенных вычислениях. Именно теорема о линейном приближении, фактически доказанная в п. 1.1.3 (*функция* ***дифференцируема*** *в точке тогда и только тогда, когда она* ***имеет линейное приближение*** *в этой точке* или *в окрестности этой точки*), позволяет многие задачи (и законы!) физики считать *примерно линейными*.

Для более четкого освоения понятия линейного приближения полезно прорешать со школьниками несколько упражнений на эту тематику (мы в таких случаях ссылаемся на раздел "Упражнения к главе" из учебного пособия и в дальнейшем эту ссылку-упоминание будем опускать).

В пункте 1.1.5 особое внимание следует обратить на понятие *конфигурационного пространства* — в данном случае прямой, по которой перемещается точка $x = x(t)$, *изображающая* значение рассматриваемого параметра в момент времени t. Получается, что произвольные эволюционирующие одномерные системы могут быть связаны с кинематическим образом, интерпретируются как движение воображаемой точки.

Введенное американским физиком и математиком *Уиллардом Гиббсом* (1839–1903), понятие конфигурационного пространства помогает более наглядному пониманию эволюции систем, описываемых произвольным числом параметров: вместо того, чтобы следить за одновременным изменением многих параметров, мы следим за воображаемым "движением" одной точки в *многомерном* конфигурационном пространстве (его размерность равна числу рассматриваемых параметров; например, движение пары точек в обычном трехмерном пространстве отвечает движению *одной* точки в шестимерном пространстве). Это весьма удобно и помогает работать в таких случаях и геометрической (многомерной!) интуиции.

Принципиально важны для дальнейшего пп. 1.1.6–7, в которых устанавливается эквивалентность *векторного* и *координатного* подходов к описанию движений материальной точки в плоскости или в пространстве. Хотя мы рекомендуем использовать для лучшего понимания упражнения, эта часть параграфа может быть дана и только в ознакомительном плане: когда данный материал реально потребуется, к нему можно возвратиться.

Теорема 1 из п. 1.1.6 доказывается красиво и просто, но это кажущаяся простота. Дайте доказательство для самостоятельного разбора, а потом попросите школьников воспроизвести его. Конечно, теорема 1 обсуждается для того, чтобы вывести из нее следствие 1 о покоординатном дифференцировании векторнозначных функций. Как раз это следствие закрепляется в упражнениях. Это следствие в совокупности с геометрическим смыслом производной векторнозначной функции из п. 1.1.7 дает возможность привести красивейший пример 6, в котором почти из "ничего" получаются формулы дифференцирования косинуса и синуса.

Следует отметить, что *совсем строгое* доказательство этих формул рассматриваемым методом требует доказательства того, что *предел отношения длины дуги окружности к длине ее хорды стремится к единице, когда длина дуги стремится к нулю* — иначе получается рассогласование между угловой скоростью и модулем скорости движения по траектории. Конечно, это утверждение эквивалентно выводу *замечательного предела*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

который приводится даже в основном курсе. Но процитируем по этому поводу американского математика и физика *Лебовица*: "*Нестрого не означает неверно, равно как строго не значит уместно или интересно*"! Только в таких случаях нужно четко указывать на появившийся в рассуждениях пробел — например, на использование, в рассматриваемом случае, "интуитивно ясных" положений.

Последний пункт и пример Вольтерры-Лотки можно оставить для самостоятельной проработки учащимися (для ознакомления). Здесь же при обсуждении есть повод поговорить о конфигурационных пространствах различных эволюционирующих систем.

§ 1.2. Представление о динамических системах

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
1.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
1.2.1	Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость	!!↓	
1.2.2	Равноускоренное движение и свободное падение	!!↓	
1.2.3	Двумерная динамическая система (пример)	↑!	
1.2.4	Консервативные одномерные системы. Модель "шарик в желобе"	!!↓	
1.2.5	Пример консервативной системы: шарик на пружинке	!↓	*

В п. 1.2.1 вводится второе важнейшее, наряду с конфигурационным пространством, понятие классической механики: *фазовое пространство*, т. е. пространство координат и скоростей. Оно поясняется на примере *фазовой плоскости* — и сразу же в п. 1.2.2 следует конкретный пример *фазового портрета*. Ненавязчиво всплывает *закон сохранения полной механической энергии* в простейшем случае движения по вертикали в постоянном однородном поле притяжения. Укажем, что, несмотря на простоту содержания первых двух пунктов, оно играет фундаментальную роль при изучении одномерных динамических систем (тема/глава 5).

В п. 1.2.3 разбирается с точки зрения математики (вернее, *классической механики*, по сути со времен *Ньютона* являющейся областью математики) известный школьникам из курса физики пример. Этот разбор целесообразно показать школьникам, указав на полезные "соображения сохранения энергии".

Ответ к заданию: конечно, траектория в фазовом пространстве будет *параболой*, лежащей в плоскости, задаваемой в трехмерном пространстве $Oxzv_z$ уравнением $gx + v_1 v_z = v_1 v_2$.

Два последних пункта 1.2.4–5 содержат интересный и, возможно, несколько неожиданный материал. Сначала объясняется универсальная при анализе одномерного движения материальной точки в консервативном силовом поле *модель* "шарик в желобе". Конечно, хорошо бы ее изготовить реально (желоб с изменяющимся, но достаточно прочным профилем можно, например, поместить между двумя параллельными прозрачными пластинами). Но если модели нет, не беда: и на картинке все достаточно понятно.

В п. 1.2.5 мы начинаем с *закона Гука*, а заканчиваем как бы его "развенчиванием", с помощью весьма уместной ссылки на *линейное приближение*: около положения равновесия якобы *всегда* получается закон Гука! Да, это так, но суть открытия Гука в том, что линейный закон упругости остается справедливым и при *относительно больших* отклонениях от положения равновесия.

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

Как и к остальным главам учебного пособия, к этой главе дано избыточное число задач — с тем, чтобы ученику и учителю было из чего выбрать. Непосредственно к материалу главы относятся задачи на касательные и линейные приближения, а также на задание и вычисление производных векторнозначных функций. Они, большей частью, не нуждаются в комментариях (некоторые указания и комментарии даны в самом разделе "Упражнения"). Ситуацией вводной темы стоит воспользоваться для того, чтобы как следует повторить вычисления производных и с производными. Мы полагаем, что стандартные в школе (да и вузе) вычисления и приложения производных, а это преимущественно исследование функций, построение графиков, отыскание экстремумов и наибольших/наименьших значений, менее всего подходят для эффективного повторения. Поэтому мы остановимся на задачах более-менее не "избитой" в основном школьном курсе тематики.

Задача 9(1). Требуется найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y = x^2 - 8x + 16$ до прямой $y = -2x + 1$.

Решение. Найдем сначала касательную к параболе, параллельную прямой $y = -2x + 1$, то есть имеющую угловой коэффициент $k = -2$. Приравнивая производную $y' = 2x - 8$ минус двум, отыскиваем точку касания:

$$2x - 8 = -2, \quad x = x_0 = 3; \quad y_0 = y(3) = 9 - 24 + 16 = 1.$$

Поэтому уравнение касательной имеет вид

$$y = 1 - 2(x - 3) = -2x + 7.$$

Теперь заметим, что любая точка параболы N лежит от прямой $y = -2x + 1$ дальше, чем точка касания $M(3, 1)$ — см. рисунок 1. Итак, кратчайшее расстояние от параболы по прямой есть длина перпендикуляра MH. Проще найти длину перпендикуляра AC (рис. 1) — полагая $|AC| = |MH| = x$ и записывая для прямоугольного треугольника ABC теорему Пифагора:

$$x^2 + (2x)^2 = |AB|^2 = 36$$

$$(|AC| = x, \quad |AB| = 7 - 1 = 6, \quad |BC| = |AC| \operatorname{tg} \angle A = 2x; \quad \operatorname{tg} \angle A = 2,$$

что следует из равенства выделенных на рисунке углов), — находим:

$$5x^2 = 36 \implies x = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

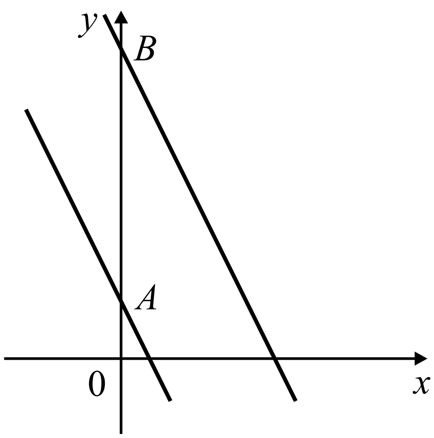


Рис.1

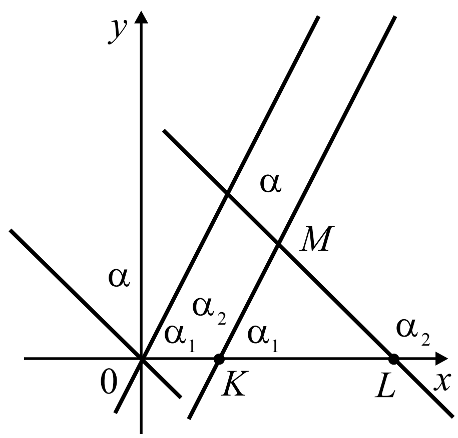


Рис.2

Задача 23. В п. 1 требуется найти угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Решение. Поскольку известны угловые коэффициенты прямых, то есть тангенсы углов, образуемых прямыми с положительной полуосью Ox, то естественно отыскивать как раз *тангенс* угла между прямыми. Заметим, что при переносе обеих прямых в начало координат получаем соответственно параллельные исходным прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$, пересекающиеся под тем же углом $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ($\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$), что и данные прямые (рис. 2; то же самое соотношение $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ можно получить и без переноса — из теоремы о внешнем угле треугольника KLM $\alpha_2 = \alpha + \alpha_1$). Теперь можно найти $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если угол α острый, то есть $\operatorname{tg} \alpha > 0$, то задача решена (только в конкретных случаях необходимо учитывать ориентацию — "направление отсчета" — углов; в нашем случае — рис. 2 — мы считали, что углы α_1 и α_2 отсчитываются в положительном направлении от оси Ox к данным прямым, причем $\alpha_2 > \alpha_1$). Если же угол α окажется тупым, то, согласно определению, углом φ между прямыми будет смежный к α угол $\varphi = \pi - \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = |\operatorname{tg}\alpha|$. Так или иначе, в том и другом случаях для тангенса *угла между прямыми* справедлива формула

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Но, кроме того, может случиться, что $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$; это соответствует тому, что $\cos\alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$, или $1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 1 + k_1 k_2 = 0$. Тем самым мы получили **условие перпендикулярности прямых**, т. е. решили и п. 2 задачи:

Прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = -1$.

Важное "утилитарное", т. е. применимое к решению других задач, в том числе и конкурсных, имеют **предложения из задач 15–16**. Докажем их.

Предложение 1 (о касательных к параболам; задача 15). *Не вертикальная прямая $y = kx + d$ является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда, когда она имеет* ***единственную*** *общую точку с этой параболой, то есть уравнение*

$$ax^2 + bx + c = kx + d \tag{$*$}$$

имеет единственное решение (иначе говоря, дискриминант уравнения $(*)$ равен нулю).

Доказательство. Если прямая имеет с параболой общую точку $(x_0; y_0)$, то $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ и ее уравнение записывается в виде

$$y = ax_0^2 + bx_0 + c + k(x - x_0).$$

Подставляя эту формулу в правую часть соотношения $(*)$, приходим к квадратному уравнению:

$$ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c + k(x - x_0) \iff$$

$$\iff a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) - k(x - x_0) = 0 \iff (x - x_0)(ax + ax_0 + b - k) = 0.$$

Из последней записи видно, что второй корень получившегося уравнения совпадает с x_0 тогда и только тогда, когда

$$ax_0 + ax_0 + b - k = 0 \iff k = 2ax_0 + b = y'(x_0),$$

т. е. когда рассматриваемая прямая является касательной, что и требовалось установить.

Замечание. Вертикальные прямые $x = x_0$ координатной плоскости также, как и касательные, имеют с параболой $y = ax^2 + bx + c$ только одну общую точку, но, конечно, касательными к этой параболе не являются.

Предложение 2 (о касательных к гиперболам; задача 16). *Не вертикальная и не горизонтальная прямая $y = kx + b$, $k \neq 0$, является касательной к гиперболе $y = \frac{c}{x}$ тогда и только тогда, когда она имеет* ***единственную*** *общую точку с этой гиперболой, то есть уравнение*

$$\frac{c}{x} = kx + d$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Если прямая имеет с гиперболой общую точку $(x_0; y_0)$, то $y_0 = \dfrac{c}{x_0}$, уравнение прямой

$$y = \frac{c}{x_0} + k(x - x_0),$$

и уравнение для абсцисс общих точек

$$\frac{c}{x} = \frac{c}{x_0} + k(x - x_0) \iff c\frac{x - x_0}{x_0 x} + k(x - x_0) = 0 \iff$$

$$\iff (x - x_0)\left(\frac{c}{x_0 x} + k\right) = 0 \iff \frac{1}{x_0 x}(x - x_0)(c + kx_0 x) = 0.$$

Второй корень последнего уравнения совпадает с x_0 тогда и только тогда, когда

$$c + kx_0 \cdot x_0 = 0 \iff k = -\frac{c}{x_0^2} = y'(x_0),$$

т. е. когда рассматриваемая прямая является касательной к гиперболе, что и требовалось доказать.

Замечание. Для гипербол из рассмотрения следует исключить не только вертикальные, но и горизонтальные прямые, т. е. случай, когда угловой коэффициент $k = 0$. Эти прямые имеют с гиперболой не более одной общей точки (ни одной точки с гиперболой не имеют ее асимптоты), но никоим образом касательными к гиперболе не являются. *Вопрос*: где в доказательстве предложения 2 использовано, что $k \neq 0$?

Касательные к параболам и гиперболам имеют еще примечательные свойства, которые дают способ их *точного построения* (циркулем и линейкой). Их предлагается открыть в задачах 18 и 22.

Задача 18. Требуется найти точку пересечения касательной к параболе $y = ax^2$ в точке $x = z$ с осью абсцисс.

Решение. Уравнение касательной имеет вид

$$y = az^2 + 2az(x - z) = 2azx - az^2 = 2az\left(x - \frac{z}{2}\right),$$

так что касательная пересекает ось абсцисс в середине отрезка между точками $O(0; 0)$ и $Z(z; 0)$. Отсюда получается такой способ точного геометрического построения касательной к параболе: делим отрезок OZ пополам и через эту середину и точку графика $M(z; az^2)$ проводим прямую.

Задача 22. Требуется установить, что касательная к гиперболе $xy = a^2$ образует с осями координат треугольник постоянной площади, причем точка касания является серединой гипотенузы этого треугольника.

Решение. Записываем уравнение касательной к гиперболе в какой-то точке $z \neq 0$:

$$y = -\frac{a^2}{z^2}(x - z) + \frac{a^2}{z} = -\frac{a^2}{z^2}x + \frac{2a^2}{z} = -\frac{a^2}{z^2}(x - 2z).$$

Отсюда понятно, что касательная пересекает оси координат в точках

$$(x_0; 0) = (2z; 0), \qquad (0; y_0) = \left(0; \frac{2a^2}{z}\right).$$

Катеты указанного треугольника равны x_0, y_0, и его площадь

$$S = \frac{1}{2}x_0 y_0 = \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot \frac{2a^2}{z} = 2a^2$$

не зависит от выбора точки z, что и требовалось установить.

Из тех же формул для катетов получаем, что они вдвое длиннее соответствующих координат точки касания, поэтому точка касания есть середина гипотенузы.

Чтобы построить касательную, проходящую через данную точку $M(z; y)$ гиперболы, удваиваем ее абсциссу и строим точку $N(2z; 0$ на оси абсцисс. Согласно доказанному, прямая MN и будет искомой касательной.

Представляют интерес изящные задачи 19–21 про свойства хорд и касательных к параболе. Они просты и довольно естественны, и вместо них решим задачу, приводящую к довольно неожиданному ответу.

Задача 28. Требуется найти множество точек, из которых парабола $y = ax^2$ видна под прямым углом.

Решение. Пусть $M(x_0; y_0)$ — точка искомого множества (как сейчас снова стало модно, можно и по старинке говорить о ”*геометрического места точек*”). Из нее (в случае, когда эта точка лежит по ”внешнюю” сторону параболы) можно провести *две* касательные к параболе $y = ax^2$. Чтобы найти их угловые коэффициенты $k_{1,2}$, запишем общее уравнение прямой, проходящей через точку M, т. е. линейную функцию $y = y_0 + k(x - x_0)$. Как мы видели в задаче 15, условие касания состоит в *единственности* общих точек этой прямой и данной параболы. Уравнение для абсцисс общих точек, таким образом, должно иметь *нулевой дискриминант*:

$$y_0 + k(x - x_0) = ax^2 \iff ax^2 - kx - (y_0 - kx_0) = 0,$$

$$D_x = k^2 + 4a(y_0 - kx_0) = k^2 - 4ax_0k + 4ay_0.$$

Получилось квадратное уравнение относительно k. Решив его, мы найдем значения $k = k_{1,2}$ и можем выписать уравнение касательных. Однако, они нам не нужны — условие перпендикулярности касательных записывается через произведение угловых коэффициентов: согласно задаче 23, оно имеет вид $k_1k_2 = -1$. *По* *теореме Виета* произведение k_1k_2 равно свободному члену квадратного трехчлена $D_x = D_x(k)$, т. е. $4ay_0$. Значит, если парабола видна из точки $M(x_0; y_0)$ под прямым углом, то $4ay_0 = -1$, т. е. точка M лежит на горизонтальной прямой $y_0 = -\frac{1}{4a}$. Рассуждения в обратную сторону показывают, что и наоборот, из любой точки указанной прямой парабола "видна под прямым углом", т. е. проведенные через нее касательные перпендикулярны. Таким образом, искомое множество (ГМТ) есть прямая, перпендикулярная оси (оси симметрии $x = 0$) параболы.

Эта прямая называется *директрисой* параболы (от лат. directrix — направляющая). Можно предложить учащимся исследовательскую задачу: отыскать точку F во внутренней области параболы такую, что парабола может быть описана как геометрическое место точек, равноудаленных от F и от директрисы. Эта точка — *фокус* параболы (лат. focus — очаг), и, соответственно названию, обладает тем свойством, что исходящие из нее лучи после отражения от параболы все идут параллельно оси параболы. Конечно, и наоборот: пучок параллельных оси лучей после отражения от параболического зеркала соберется в фокусе (вроде бы этим свойством, называемым *оптическим свойством параболы*, воспользовался *Архимед* — сжег таким сходящимся после отражения пучком (почти параллельных) солнечных лучей вражеский флот!). Оптическое свойство вплотную примыкает к данной тематике, и его доказательство — еще одна интересная тема исследования[1].

Тема 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (глава 2; 8[10] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 2

Рассмотрение и исследование решений дифференциальных уравнений естественно начать с основного уравнения *интегрального исчисления*. В этой теме и проводится последовательная линия на изложение интегрального исчисления на языке дифференциальных уравнений. В каком-то смысле мы здесь следуем программе *Исаака Ньютона*, полагавшего дифференциальные уравнения ключевым объектом, понятием математического анализа (недаром в письме *Лейбницу* он зашифровал слова "*Полезно решать дифференциальные уравнения*!).

Сначала, в § 2.1, в параллель с известным к тому времени школьникам языком первообразных[2] вводится язык дифференциальных уравнений: понятия решения, начального условия, устанавливается теорема единственности решений на промежутке.

§ 2.2 играет ключевую роль во всем курсе **МА**. В нем дифференциальным уравнением более общего вида $y' = F(x, y)$ и их решениям дается наглядная интерпретация с помощью *полей направлений* и их *интегральных кривых*. Заметим, что это наглядность довольно высокого уровня абстракции — ведь поле направлений есть

[1] Любопытно, что *Алексей Николаевич Толстой* чуть промахнулся, назвав свой знаменитый научно-фантастический роман "*Гиперболоид инженера Гарина*" — следовало бы употребить наименование "*параболоид*".

[2] Впрочем, изложение построено независимо от основного/профильного курсов и достаточно подробно, так что сугубой необходимости в априорном знакомстве со школьным интегральным исчислением нет.

функция на плоскости Oxy со значениями в множестве прямых. Излагается естественная, но весьма плодотворная идея *Эйлера* приближенного решения дифференциальных уравнений путем замены интегральных кривых ломаными, идущими в каждой точке излома вдоль заданного в этой точке направления.

В § 2.3 соображения Эйлера, примененные к основному дифференциальному уравнению интегрального исчисления $y' = f(x)$, приводят к интегральным суммам функции f и их интерпретации как площадей ступенчатых фигур, вписанных в соответствующую ограниченную сверху графиком $z = f(x)$ криволинейную трапецию. Предельный переход приводит к идее рассмотрения площади переменной криволинейной трапеции в качестве "кандидата" в решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Обратим внимание: главное в этом трехэтапном рассуждении — это наличие *мотивации* к рассмотрению переменных площадей — они не берутся "с потолка", а, повторимся, *естественно* возникают в ходе анализа решаемой задачи.

Отметим, что здесь и далее в этой главе *не обсуждаются* понятия площади или (далее) объема, или площади поверхности. Они предполагаются *данными*, и если не известными, то, во всяком случае, интуитивно ясными.

Далее в § 2.3, играющем центральную роль в этой теме, формулируется *основная теорема анализа* как теорема о производной переменной площади криволинейной трапеции "под" графиком непрерывной функции. Эту теорему, безусловно, очень хорошо понимал Ньютон: площадь под графиком скорости равна пройденному пути, а производная пути есть скорость. Возможно, стоит указать учащимся на эту интерпретацию перед тем, как приводить строгое ("по модулю" применения понятия площади и ее свойств) доказательство. В доказательстве неизбежно всплывет определение *непрерывности* функции — наверное, на нем не нужно акцентировать внимание школьников.

Заметим, что кинематическое обоснование ("площадь под скоростью есть путь") основной теоремы было понятно, в случае равноускоренного движения, еще *Галилео Галилею* (1564–1642), а задолго до него, по-видимому, и французскому математику, физику и экономисту *Николя Орему* (1323–1382), известному еще и тем, что он задолго до *Ферма* и *Декарта* построил прямоугольную систему координат.

Обычно под основной теоремой анализа понимают то или иное утверждение о *взаимной обратности* операций дифференцирования и интегрирования. Заранее объяснив школьникам, что на самом деле рассматриваемая (переменная) площадь еще называется и *интегралом*, можно и наше утверждение вернуть в лоно традиции — тем более, что дальше в этом же параграфе формулируется (без доказательства) *теорема Коши–Муаньо о производной интеграла по верхнему пределу.*

Обращая формулу из основной теоремы и пользуясь заранее доказанной (в § 2.1) теоремой о независимости приращений первообразных от их выбора, получаем *формулу Барроу* для вычисления площадей криволинейных трапеций.

Теперь собственно об интеграле. В § 2.3 интеграл *определяется* так же, как он *описывается* в учебнике под ред. А. Н. Колмогорова — для непрерывной функции как предел интегральных сумм частного вида. При этом мы явно (но опять-таки без доказательства) формулируем *теорему Коши–Римана* о существовании нужного предела. Интерпретация интеграла с помощью снабженной знаками площади между осью абсцисс и графиком интегрируемой функции вкупе с формулой Барроу для площадей дают *формулу Барроу для вычисления интеграла как приращения первообразной* — обычно носящую имена *Ньютона* и *Лейбница.* В очередной раз отметим, что эта формула содержится в "Лекциях" Барроу, изданных в 1669-70 гг. Ньютон, а тем более Лейбниц никогда не претендовали на открытие этой формулы, и мы, следуя известному российскому математику *В. И. Арнольду* (см. о нем в главе 3), как бы возвращаем формуле имя ее первооткрывателя.

Заключительный параграф главы посвящен важным геометрическим приложениям интеграла и исчерпывающе прокомментирован ниже.

§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.1.1	Интегрирование как решение дифференциального уравнения	!!	
2.1.2	Теорема единств. решений уравнения $y' = f(x)$ и св-ва первообразных	!!	
2.1.3	Вопросы существ. решений уравнения $y' = f(x)$ или первообразных	!↓	

В первом пункте описан перевод с языка первообразных, основного в интегральном исчислении, на язык решений дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$. Лемма (признак постоянства функции *на промежутке*) наверняка знакома школьникам по основному курсу, но ее стоит повторить, акцентируя внимание на то, что она "работает" только в одном промежутке. Таким образом, в принципе могут возникнуть "многозначные константы", константами на самом деле не являющиеся. Для них мы вводим специальное обозначение $\widehat{C}$.

Отметим (для учителя), что такая многозначность, а она может быть и "бесконечно-значной", как для первообразной $\operatorname{tg} x + \widehat{C}$ функции $\cos^{-2} x$, во многих вузовских учебниках игнорируется, равно как и в таблицах так называемых *неопределенных* интегралов (это *лейбницев* язык в интегральном исчислении). Конечно, практик при этом не ошибается, но неискушенный "аналитик" попасться может. Можно показать школьникам такой пример вычисления интеграла по формуле *Ньютона–Лейбница* (заметим, что мы ее вскоре переименуем в *формулу Ба́роу*, по имени первооткрывателя):

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (-(-1)) = -2,$$

а вроде бы интеграл должен быть положительным?!

В п. 1.2.2 рассматриваемое дифференциальное уравнение связывается с *начальным условием* и доказывается *теорема единственности решений* такого дифференциального уравнения (как это часто бывает в математике, теорема единственности предшествует *теореме существования*; школьников надо бы исподволь приучать к правильному и сознательному употреблению этих по сути логических наименований — теорем единственности/существования).

Здесь же выводится полезное следствие: теорема о равенстве приращений первообразных. Это чисто *методический* ход. Раз уж мы стали излагать интегральное исчисление "*по Ньютону*", будем последовательны — дадим в этом ключе все соответствующие теоретические и практические вопросы.

В последнем пункте параграфа затрагивается как раз вопрос о *существовании* первообразных или решений дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$. Первый пример — отсутствие первообразной у функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ — школьникам наверняка знаком. Стоит обратить внимание, что речь идет об отсутствии первообразной на любом промежутке, содержащем нуль. Второй пример — разрывная функция, имеющая первообразную, — более экзотический. Для учителя заметим, что у таких функций может быть разрыв только *второго рода*, с отсутствием предела в точке разрыва справа и/или слева. Данная функция *не интегрируема по Риману*. Однако в самом первом издании школьного учебника по алгебре и началам анализа для 10 класса[3] под ред. А. Н. Колмогорова приводилось определение интеграла через приращение первообразной, если она существует; в этом смысле указанная в примере 5 функция *интегрируема* (корректность такого, далеко не общепринятого определения интеграла[4] вытекает из теоремы 2 из предыдущего пункта.

К этому параграфу целесообразно примкнуть простые упражнения на вычисление первообразных (начиная с первого — с графического интегрирования).

§ 2.2. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.2.1	Поля направлений и интегральные кривые ДУ	!!↓	
2.2.2	Метод Эйлера построения интегральных кривых	!!↓	
2.2.3	Изоклины полей направлений и графическое интегрирование ДУ	$\sim$	**ФУ**

[Через "ДУ" мы обозначили "дифференциальные уравнения" (в соответствующем падеже). Значок "**Ф**" в примечаниях указывает на факультативность пункта, а "**ФУ**" — на то, что к этому факультативному пункту даны-таки упражнения.]

Это очень важный параграф — в нем дается принадлежащая *Леонарду Эйлеру* геометрическая, наглядная и пригодная для "интуитивных прозрений" трактовка

[3] В старом "классоисчислении" — по нынешнему — для 11 класса.

[4] Каково определение интеграла в основном курсе "*Алгебры и начал анализа*" в настоящее время, т. е. в действующих учебниках — сказать весьма затруднительно. Примерно так: это интеграл Римана для непрерывных функций с интегральными суммами частного вида.

дифференциальных уравнений первого порядка. Она поможет в курсе **МА** не один раз. Опорой этой интерпретации служит геометрическая интерпретация производной, которую мы повторили в § 1.1.

Кроме того, эта интерпретация дает возможность *приближенного* решения дифференциальных уравнений — путем замены решений *ломаными Эйлера* и устремления шага переменной x к нулю. В частности, этому подходу отвечают целых *три* метода *численного интегрирования*, т. е. вычисления интегралов с заданной точностью: просто *метод Эйлера*, *модифицированный* метод Эйлера и *исправленный* метод Эйлера, о которых мы еще упомянем (один из этих методов, причем не самый точный, есть популярный *метод трапеций*, когда вместо ступенчатой фигуры в криволинейную трапецию вписывается совокупность "тонких вертикальных" прямоугольных трапеций).

В п. 2.2.1 вводятся два основных понятия: *поле направлений* дифференциального уравнения и *интегральные кривые* поля направлений или соответствующего дифференциального уравнения, т. е. графики решений этого уравнения. В следующем параграфе описывается важная конструкция: построение *ломаных Эйлера*, исходящих из какой-то начальной точки (отвечающей *начальному условию*) и строящихся с каким-то (у нас — *постоянным*) *шагом* по оси аргумента x. Существенно сопроводить эту конструкцию *формулами* — они понадобятся в следующем параграфе. И, конечно, объяснить и сформулировать *основную гипотезу* о пределе "вторых концов" ломаных Эйлера.

Пункт 2.2.3 не очень существен для дальнейшего. Его можно объяснить с тем, чтобы предложить школьникам несколько задач на построение *изоклин* и по ним — приближенных интегральных кривых. Сами по себе приводимые в учебном пособии конкретные примеры отыскания интегральных кривых с помощью построения изоклин довольно интересны. Они помогают лучше понять, какие решения бывают у *неавтономных* дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$, и предоставляют еще раз попрактиковаться в вычислении производных, в том числе фактически и *производных неявных функций* (т. е. функций $y = y(x)$, заданных с помощью уравнения от x и y, $H(x, y) = \mathrm{const}$, т. е. $H(x, y(x)) \equiv \mathrm{const}$).

§ 2.3. Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.3.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
2.3.1	Ломаные Эйлера и интегральные суммы	!	
2.3.2	Интегральные суммы и квадратуры (площади)	!!	
2.3.3	Основная теорема анализа: производная переменной площади	!!	
2.3.4	Теоремы существования решений уравнения $y' = f(x)$ и первообразных	!	
2.3.5	Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных	!!	**У**
2.3.6	Интегральные суммы и интеграл	!	

Суть этого параграфа — применение интерпретации Эйлера к уравнениям вида $y' = f(x)$. Их характерная особенность — постоянство вдоль вертикалей (иначе, *инвариантность* при параллельных переносах вдоль оси ординат). Отсюда сразу, без вычислений, а только из наглядно-геометрических соображений, следует *теорема единственности* из предыдущего параграфа. Кроме того, формула для конечного значения ломаной Эйлера имеет простую и ясную геометрическую интерпретацию как *интегральной суммы*, с помощью *площади ступенчатой фигуры*, вписанной в график $z = f(x)$ правой части рассматриваемого дифференциального уравнения. Это все разбирается в первых двух пунктах параграфа, *естественно* подводя к т. н. *основной теореме анализа* из п. 2.3.3.

В разных курсах математического анализа эту теорему трактуют по-разному. Мы остановились на *наглядно-геометрической* ее трактовке, через производную площади переменной *криволинейной трапеции*. Здесь понятие *площади* полагается *известным* или, по крайней мере, *интуитивно ясным*. Доказательство, естественно, использует непрерывность правой части рассматриваемого дифференциального уравнения.

В следующем п. 2.3.4 собирается урожай с доказанной основной теоремы: теоремы существования решений рассматриваемых уравнений и первообразных для непрерывных функций.

В п. 2.3.5 формула из основной теоремы "переворачивается" так, что *площадь* отыскивается с помощью первообразных, а не первообразная как переменная площадь. С помощью теоремы о независимости приращений первообразных из п. 1.2.2 формулируется *теорема Барроу*, основное содержание которой — *формула Барроу* для вычисления площадей. Сразу же рассматриваются классические примеры отыскания площадей криволинейных трапеций — задачи *Архимеда* и *Паскаля*.

В п. 2.3.6 мы снова возвращаемся к *интегральным суммам* и определяем интеграл от непрерывной функции как предел ее интегральных сумм, ссылаясь при этом на *теорему Коши–Римана* о существовании этого предела, приводимую без доказательства.

Вслед за тем формула Барроу для площадей переписывается как *формула Барроу для интегралов*, которая чаще и "несправедливо" называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Далее приводится еще одна формулировка *основной теоремы анализа* о производной интеграла по верхнему пределу. Она в каком-то смысле факультативна, но среди упражнений есть относящиеся к ней (впрочем, для их решения всегда можно воспользоваться формулой Барроу).

Это занятие весьма насыщенное, так что его необходимо тщательно подготовить, выверить на два урока. Еще один урок "из резерва" можно потратить на решение упражнений на вычисление интегралов — как площадей, а также с помощью формулы Барроу — если только школьникам не надоело это занятие на уроках по основному/профильному курсам (в подобных случаях лучше либо вообще не отвлекаться на упражнения, либо предлагать менее стандартные задачи; в данной главе это, например, задачи, связанные с *исчислением разностей* и *разностными уравнениями* — они распределены по двум *циклам* задач).

§ 2.4. Геометрические приложения интеграла

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
2.4.1	Основная идея: применение формулы Барроу	!	
2.4.2	Площади плоских фигур	$\sim$	
2.4.3	Объем общего прямого цилиндра	!!	
2.4.4	Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений)	!!	**У**
2.4.5	Объем общего конуса	!	
2.4.6	Объем тела вращения	!	
2.4.7	Объем шара	!!	
2.4.8	Замечание о площади сферы	!!	
2.4.9	Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери	$\sim$	

Цель включения этого параграфа, на самом деле весьма *косвенно* связанного с дифференциальными уравнениями, состоит в *реабилитации* интегрального подхода к вычислению геометрических мер (площадей, объемов, а в "Упражнениях" — и длин дуг графиков или иных кривых). Появившись было в учебниках по стереометрии в качестве простейшего идейно и в вычислительном плане способа вывода элементарных формул для объемов, в последнее время этот способ постепенно оказался изгнанным из курса геометрии[5]. Мы полагаем, что школьники должны быть ознакомлены с таким подходом.

В п. 2.4.1 объясняется общая идеология интегрального подхода, и она даже худо-бедно связывается с дифференциальными уравнениями. В основе подхода

[5] Мы имеем в виду наиболее распространенный учебник А. В. Погорелова.

лежит *формула Барроу* для восстановления функции по ее производной. Отметим, что эта формула служит и для записи решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$ с заданным начальным условием $y(x_0) = y_0$: тогда

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\,du.$$

В этом же пункте употребляется термин *измеримость* фигуры. Не следует на нем акцентировать внимание школьников, но если будет задан непосредственный вопрос — указать, что бывают и, например, плоские фигуры, не имеющие площади в *естественном* смысле этого слова. Пример: криволинейная трапеция, "ограниченная сверху" графиком *функции Дирихле*[6].

В следующем пункте обобщается формула для выражения площади криволинейной трапеции через интеграл. Его можно оставить для самостоятельной проработки учащимися, записав только саму формулу (в двух вариантах: для произвольной хорошей плоской фигуры и для "разности" двух криволинейных трапеций) — она потребуется в следующем пункте. В нем выводится формула для объема общего прямого цилиндра уже фактически как интеграл от площадей сечений. В п. 2.4.4 речь уже об общей формуле *объема как интеграла площадей сечений*. В п. 2.4.5 она применяется для вычисления объема общего конуса, в пп. 2.4.6–7 — для вычисления объема произвольного тела вращения и затем шара.

Пункт 2.4.8 есть некоторое отступление от линии вычисления объемов — из формулы для объема шара *дифференцированием* выводится формула для площади сферы. Подобный подход, имеющий в своей основе идею вычисления *меры Минковского*, выдвинутую известным немецким математиком и физиком *Германом Минковским* (1864–1909; более всего он известен своей интерпретацией четырехмерного *пространства–времени*, моделирующей *специальную теорию относительности Альберта Эйнштейна* и называемой просто *пространством Минковского*). Грубо говоря, идея Минковского состоит в том, что "длина дороги равна ее площади, деленной на ширину". Подход Минковского к определению площадей произвольных поверхностей через объемы их "утолщений" — ε-окрестностей: такой объем делится на толщину слоя 2ε, которая затем устремляется к нулю, — был реализован в первых вариантах предназначенных для школы учебников геометрии академика *Алексея Васильевича Погорелова* (1919–2002), а еще до того, в несколько "препарированном" виде — в учебниках под ред. З. А. Скопеца. Примерно в таком виде идея Минковского и изложена в учебном пособии.

В заключительном пункте параграфа и всей главы обсуждается подход к вычислению геометрических мер не с помощью формулы Барроу, а непосредственно через интегральные суммы. Здесь как бы нет ничего нового для школьников, за исключением *принципа Кавальери* и красивого примера его применения — вывода из него знаменитой *формулы Архимеда*: объем шара равен двум третьим описанного около него прямого кругового цилиндра.

---

[6] Напомним, что это функция $D(x)$, равная 1 при рациональных значениях x и нулю при иррациональных значениях. Вместо нее, если угодно, можно взять функцию $f(x) = D(x) + 1$.

В целом этот заключительный параграф главы 2 вполне укладывается в одно занятие, если пп. 2.4.2 и 2.4.9 спланировать на самостоятельную проработку учащимися.

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

Большинство упражнений к главе 2 суть стандартные задачи интегрального исчисления примерно на основном/профильном уровнях и в особых комментариях не нуждаются. К менее стандартным или более сложным задачам сразу же приведены указания и/или комментарии в самом учебном пособии. Это же относится и к выпадающим из основной темы задачам про разности последовательностей и разностные уравнения. Некоторые из приведенных задач данной тематики можно рассматривать как пропедевтику изучения/исследования линейных дифференциальных уравнений из следующей главы, и к ним мы обращаемся в комментариях к § 3.1.

Тема 3. ЭКСПОНЕНТА И ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (глава 3; 10[8] ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 3

С этой темы, можно сказать, начинаются "настоящие" дифференциальные уравнения, не сводящиеся сразу к простому отысканию интегралов или первообразных. При этом рассматриваемый класс *линейных дифференциальных уравнений*, пока преимущественно *первого порядка* (линейные уравнения второго порядка "всплывут" в главе 5 в связи с дифференциальными уравнениями Ньютона), имеет очень много применений — от модели размножения простейших до модели атомного взрыва.

Глава начинается с трех примеров линейных эволюционных моделей (включая движение с вязким трением) и с демонстрации трех подходов к уравнениям вида $y' = ky$: эйлерова, как в § 2.2, ньютонова, с излюбленными им степенными рядами, и с точки зрения аналогии с линейным разностным уравнением, сводящимся к уравнению геометрической прогрессии $y_{n+1} = qy_n$. Все подходы хороши — выбирай на вкус, казалось бы... В основном/профильном курсе школьники, скорее всего, сначала знакомятся с показательной функцией, затем с логарифмом, причем как бы "повисает в воздухе" вопрос о существовании производной экспоненты — в лучшем случае принимается *гипотеза* о существовании числа "e" такого, что функция $x \mapsto \mathrm{e}^x$ имеет в нуле производную, равную 1. Обоснование этой гипотезы требует либо громоздкой возни с пределами (в духе эйлерова или ньютонова подходов), либо применение *интегрирования* обратной пропорциональной зависимости, немедленно приводящего к натуральным логарифмам. Мы выбрали второй путь и реализовали его в § 3.2.

По тематике первых двух параграфов этой главы в разделе "Упражнения" дано "проектное задание", которое стоит предложить учащимся выполнять не индивидуально, а группой из нескольких человек. В задании предлагается определенная тема для самостоятельного исследования, связанная с рассматриваемым материалом — априорное исследование функциональных свойств решений линейных дифференциальных уравнений.

Хотя, в принципе, для выполнения заданий не требуется ничего, выходящего за рамки обязательного минимума (формулы дифференцирования, правила вычисления производных, признаки постоянства и монотонности функций), задание сопров виде "наводящих вопросов". Задания не следует трактовать как (обязательные или нет) домашние задания: это, скорее, *творческие проекты.* Непременно следует предусмотреть для выполняющих задания консультации учителя, на которых школьники могут показать свои достижения, сказать о встретившихся трудностях, задать те или иные вопросы. Разумеется, школьники могут пользоваться любой помощью: литературой; при возможности, советами родителей и других взрослых, разбирающихся в тематике заданий. Литературу может порекомендовать и учитель, но специфика заданий в этой и других главах такова, что полное изложение темы заданий в большинстве случаев отсутствует в готовом виде в учебниках или иной литературе.

Можно порекомендовать оформить результаты исследований в форме этакого "научного трактата" (с постановкой проблемы, леммами, теоремами, следствиями, выводами...) — с тем, чтобы все учащиеся могли ознакомиться с полученными результатами. Можно, конечно, устроить и "научную конференцию" — симпозиум с докладами, вопросами, обсуждением в более широком кругу, чем участники занятий по спецкурсу; конечно, при этом нужно охватить несколько тем данного спецкурса (т. е. курса "Дифференциальные уравнения"), а при возможности, охватить этим "мероприятием" и тематику других спецкурсов (с подобными проектами и "трактатами", подготовленными их слушателями).

Чтобы обеспечить выполнение этих работ на достаточно хорошо понимаемом учащимися и осознанном уровне, в атмосфере стимулирования поисковой активности учащихся, учитель сам должен хорошенько ориентироваться в затрагиваемой тематике. Поэтому проектные задания далее подробно разбираются и комментируются. Кроме того, в рекомендациях приводятся небольшие списки дополнительных задач, заданий и тем для дальнейшего продвижения в рассматриваемых направлениях (тоже с указаниями и комментариями). Они предназначены, по замыслу, уже для индивидуальной проработки теми учащимися, которые заинтересовались основными темами.

Возвращаясь к теоретическому материалу главы, отметим, что до того, как применять наши знания о производной экспоненты к конкретным моделям, мы посвящаем § 3.3 сравнению роста показательных, степенных и логарифмических функций. Надо отметить, что доказательства теорем о сравнении отнюдь не банальны — их нужно подробненько разобрать со школьниками. "Сверхзадача" этого параграфа в том, чтобы было понятно, что экспонента с *любым* основанием, хотя бы "чуть-чуть" большим единицы, растет очень быстро — и это может привести к неожиданным эффектам. Это демонстрируется в следующем параграфе на примере модели ядерного деления.

В этом параграфе 3.4 появляется *новая* математическая идея "широкого применения" — *метод Д'Аламбера* решения неоднородных линейных уравнений, в данном случае дифференциальных (см. ниже комментарии к параграфу). В заключительном параграфе 3.5, помеченном как факультативный, с одной стороны, резюмируются предыдущие достижения, а с другой, показываются и новые методы справляться с линейными дифференциальными уравнениями (с переменными коэффициентами). Это параграф стоило бы преподнести учащимся в форме обзорной лекции-беседы.

§ 3.1. Линейные процессы и дифференциальное уравнение $y' = ky$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.1.1	Пример: рост популяций	!	
3.1.2	Пример: радиоактивный распад	!	
3.1.3	Пример: вязкое трение	!	
3.1.4	Анализ дифференциального уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Эйлера	!!	
3.1.5	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: подход Ньютона	!!	
3.1.6	Анализ уравнения $y'(x) = ky(x)$: разностный аналог	!!	

Узловые вопросы[7], которые должны четко уяснить учащиеся на данном занятии:

1. Вид линейного дифференциального уравнения первого порядка.

2. Проверка того, удовлетворяет ли та или иная функция конкретному дифференциальному уравнению. *[8] Запись дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$, которые можно записать после дифференцирования конкретных элементарных функций. (См. примеры ниже.)

3. Трактовка дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$ с помощью поля направлений на координатной плоскости Oxy. Интегральные кривые как графики решений $y = y(x)$ дифференциального уравнения. * Характерные свойства полей направлений для дифференциальных уравнений частных видов $y' = g(y)$ и $y' = f(x)$ (постоянство вдоль горизонталей $y = \text{const}$ или вертикалей $x = \text{const}$).

Параграф 5.1 начинается с краткого напоминания об общем дифференциальном уравнении вида $y'(x) = F(x, y)$. Отметим, что мы довольно часто (здесь и далее) меняем обозначение основной независимой переменной $t \longleftrightarrow x$. Учащиеся должны к этому привыкнуть. Поясним: когда речь идет о "чисто математическом" анализе вопроса — допустим, дифференциального уравнения, безотносительно к практической ситуации или обстоятельствам его появления как математической модели реального процесса или явления, — мы используем "безразмерные" (числовые, не именованные) переменные, чаще всего x, y. Когда же речь идет о конкретной прикладной ситуации — о процессе или о движении, — то используются размерные переменные: t — время, та или иная "буква" — числовая характеристика зависимой (от времени) переменной.

Для того, чтобы учащиеся освоились с дифференциальными уравнениями более общего вида, чем в предыдущей главе, целесообразно рассмотреть несколько примеров такого, например, типа.

---

[7] Мы перечисляем те, преимущественно, теоретические вопросы, которые существенны для успешного дальнейшего продвижения в данной теме, а также некоторые практические вопросы, относящиеся к важным в дальнейшем умениям и навыкам.

[8] Звездочка поставлена перед *факультативными* вопросами, в том числе теми, которые возникают сейчас, но будут повторены на следующих занятиях темы.

(1) Функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет не только дифференциальному уравнению $y' = 2x$, но и уравнению

$$y' = \frac{2y}{x},\ x \neq 0 \qquad \left(y' = 2x = \frac{2x^2}{x} = \frac{2y}{x} \right). \tag{1}$$

Предложите указать еще какое-нибудь решение дифференциального уравнения. — В этом случае, легко увидеть (тем более, проверить), решениями будут любые функции вида $y = Ax^2$, $A = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$. Уточним: так как $x \neq 0$, эта формула задает не одну, а две функции — одну на положительной, другую на отрицательной полуосях оси x. Объясним: дифференциальное уравнение $y' = F(x, y)$ рассматривается только в области определения правой части, т. е. в тех точках $(x; y)$ координатной плоскости Oxy, где определена функция $F(x, y)$. (В данном случае других решений, кроме указанных [считая нулевую константу: $A = 0$], уравнение (1) не имеет — это будет ясно из доказанного в следующей главе, § 4.2.)

(2) Функция $f(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = -x^{-2}$, а это соотношение можно записать как уравнение $y' = -y^2$. В этом случае другие решения так просто не укажешь: функции вида $y = Af(x) = Ax^{-1}$ дифференциальному уравнению $y' = -y^2$ уже не удовлетворяют:

$$y' = Af' = -Ax^{-2}, \qquad -y^2 = -A^2x^{-2} = Ay' \neq y',$$

если $A \neq 1$. Другие решения можно получить, заметив, что поле направлений уравнения $y' = -y^2$ постоянно вдоль горизонталей $y = \mathrm{const}$, а в этом случае, как замечено в п. 3.1.4, "*отсюда следует, что при параллельном переносе вдоль оси Ox любая интегральная кривая переходит в интегральную кривую. Аналитически это означает, что если функция $y = y(x)$ является решением дифференциального уравнения* (...), *то "сдвинутая" функция $y = y(x + c)$ также будет решением уравнения* (...)". Таким образом, в этом случае другими решениями дифференциального уравнения $y' = -y^2$ будут "сдвинутые" обратные пропорциональные зависимости $y(x) = (x + c)^{-1}$. Если добавить к семействам ветвей гипербол ось абсцисс (график нулевой константы), то это будут *все* интегральные кривые соответствующего поля направлений (гл. 4, §§ 4.1–2).

Данный пример (2) можно связать как раз с рассмотрением эйлерова подхода к дифференциальным уравнениям из п. 3.1.4. *Вопрос* к учащимся (он, а точнее, ответ на него, может показаться довольно неожиданным): какие функции заведомо удовлетворяют аналогичному (отличающемуся "только" знаком правой части) дифференциальному уравнению $y' = y^2$? — *Ответ*: кроме нулевой константы, это будут функции $y(x) = -(x + c)^{-1}$ и только они. Записанное уравнение есть просто "нормированное" *уравнение квадратичного роста* или *взрыва* ($y' = \alpha y^2$) из § 4.1.

Пример (2) можно заменить следующим похожим примером, также приводящим к нелинейному уравнению вида $y' = g(y)$.

(3) Функция $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad y' = \frac{1}{2y}. \tag{3}$$

Второму из уравнений (3) удовлетворяет функция $y(x) = -f(x) = -\sqrt{x}$, но другие функции вида $y = Af(x)$ ему не удовлетворяют. Зато, как и в примере (2), интегральными кривыми уравнения (3) будут всевозможные "сдвинутые полупараболы" — графики функций $y = \pm\sqrt{x+c}$.

Семейство всех этих интегральных кривых можно записать одним уравнением: $y^2 = x + c$ или $y^2 - x = c = \text{const}$ (при каждом значении c задаваемая этими уравнениями "горизонтальная" парабола $x = y^2 - c$ содержит две интегральные кривые — полупараболы, на которые парабола делится осью абсцисс, т. е. прямой $y = 0$). Заметим, что дифференциальное уравнение (3) может быть получено *дифференцированием* общего уравнения интегральных кривых:

$$y^2 - x = c = \text{const} \iff 2y \cdot y' - 1 = \text{const}' = 0, \qquad 2yy' = 1, \qquad y = \frac{1}{2y}$$

(так как речь о зависимости $y = y(x)$, выражение y^2 дифференцируется по правилу дифференцирования сложной функции, т. е. композиции $x \mapsto y(x) \mapsto y^2 = y^2(x)$).

В достаточно подготовленной группе учащихся и при наличии времени (вообще-то данное занятие не слишком насыщено новым материалом, так что лишнее время может найтись) можно показать общий прием выписывания дифференциального уравнения для семейства кривых, задаваемых общим уравнением вида $F(x, y) = c = \text{const}$. Для этого надо просто записать функцию $\varphi(x) = F(x, y(x)) = c$ и продифференцировать ее *как сложную функцию* и приравнять результат нулю (производной константы). Разумеется, не следует выписывать общую формулу дифференцирования функций, задаваемых подобным образом (т. е. общее "правило" с частными производными). Достаточно показать, как дифференцировать такие функции, на конкретных примерах.

1) Семейство гипербол с *асимптотами* — осями координат — записывается уравнением $xy = c = \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получаем, что

$$(xy)' = (xy(x))' = 1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = y + xy' = 0, \qquad xy' = -y, \qquad y' = -\frac{y}{x}.$$

Последнее уравнение и есть дифференциальное уравнение семейства гипербол $y = \frac{c}{x}$ (вместе с общими асимптотами $xy = 0$).

2) Уравнение семейства окружностей с центром в начале координат записывается в виде $x^2 + y^2 = c$, $c = R^2 > 0$. Дифференцируя его, находим:

$$(x^2 + y^2)' = 2x + 2y \cdot y' = 0, \qquad yy' = -x, \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Легко проверить, задающие верхние и нижние полуокружности функции $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ удовлетворяют выписанному уравнению.

3) Уравнение $y^2 - x^2 = c$, $c \in \mathbb{R}$ — любое, задает семейство так называемых равнобочных гипербол с асимптотами $y = \pm x$ (они получаются при $c = 0$) и центром в начале координат. Дифференцируя, записываем дифференциальное уравнение этих гипербол:

$$(y^2 - x^2)' = 2y \cdot y' - 2x = 0, \qquad yy' = x, \qquad y' = \frac{x}{y}.$$

(Оно отличается от предыдущего только знаком правой части, но семейства интегральных кривых совсем разные.)

Рассмотрение этих и подобных примеров полезно и в качестве *не бессмысленных* упражнений на дифференцирование, и как некоторая пропедевтика материала глав 6–7.

Первые три пункта в § 5.1 в каких-то особых комментариях не нуждаются. Конечно, справка об открытии явления радиоактивности предназначена непосредственно учащимся, как и прочие подобные справки, дающиеся для ознакомления. Материал культурно-исторического характера, который полезно было бы привлечь к изложению рассматриваемого спецкурса, можно найти в учебном и методическом пособиях по элективному курсу истории школьной математики (алгебры и начал анализа).

К пункту 3.1.4 можно привязать рассмотрение приведенных выше примеров (2)–(3).

Разбирая следующий пункт, в принципе полезно сопоставить конечные суммы ньютонова ряда для экспоненты, т. е. многочлены

$$e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,,$$

с теми многочленами, которые дает метод Эйлера (из предыдущего пункта) в случае дифференциального уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$. Предложите школьникам записать приближенную формулу для значения решения в точке x для этого случая ($k = 1$, $y_0 = y(0) = 1$) и раскрыть получающееся выражение по формуле Ньютона для степени бинома. В результате получится многочлен

$$y_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^k}{n^k} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + ... + \frac{x^n}{n^n} =$$
$$= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n^n}.$$

Первые два слагаемых у него такие же $(1 + x)$, как у ньютонова ряда. Следующее слагаемое отличается множителем $1 - \frac{1}{n}$, стремящемся к 1 при $n \to \infty$. То же можно сказать и о коэффициентах при кубах x, и *при любом фиксированном* k коэффициент при x^k в многочлене $y_n(x)$ получается из соответствующего коэффициента в многочлене $e_n(x)$ домножением на число

$$\frac{C_n^k}{n^k} : \frac{1}{k!} = \frac{(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{n^{k-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

которое стремится к единице при $n \to \infty$.

На нашем уровне рассмотрения вопроса такое сопоставление подходов Эйлера и Ньютона показывает всего лишь их *согласованность* между собой, но не помогает продвижению "вперед", к экспоненте. Повторим: оба подхода можно довести до уровня доказательства существования соответствующих пределов и даже вывода свойств предельной функции, но это требует кропотливой, хлопотливой и не слишком интересной возни с пределами (с различными оценками). Мы ограничиваемся только этой констатацией.

К материалу пункта 3.1.6 примыкает целый ряд вопросов о разностных уравнениях из упражнений к главе 2. По существу, это все, что относится к линейным разностным уравнениям. Очертим кратко круг вопросов, которые было бы полезно донести до учащихся.

1) Однородное линейное разностное уравнение первого порядка, $\Delta x_n = kx_n,\ k \neq 0$, переписанное как $x_{n+1} = qx_n$, есть уравнение геометрической прогрессии — его решения записываются в виде $x_n = Aq^n$.

2) Неоднородное линейное разностное уравнение первого порядка, $\Delta x_n = kx_n + b$ или $x_{n+1} = qx_n + b$, $q = 1 + k \neq 1$, задает "смешанную прогрессию", формулу для общего члена которой можно найти непосредственным суммированием. Проще, однако, заметить, что одно из решений уравнения является константой:

$$x_n = C = \mathrm{const} \implies \Delta x_n = 0 = kC + b \iff C = -\frac{b}{k}.$$

Вычитая из уравнения $\Delta x_n = kx_n + b$ уравнение $\Delta C = kC + b$, приходим к однородному уравнению $\Delta(x_n - C) = k(x_n - C)$, откуда $x_n - C = Aq^n$, $x_n = C + Aq^n$ — получается, что смешанная прогрессия есть просто сдвинутая геометрическая прогрессия.

К этому можно прийти и иначе, переписывая неоднородное уравнение:

$$\Delta x_n = kx_n + b = k\left(x_n + \frac{b}{k}\right) = \Delta\left(x_n + \frac{b}{k}\right) \iff x_n + \frac{b}{k} = Aq^n \iff x_n = -\frac{b}{k} + Aq^n.$$

Оба способа решения неоднородного линейного *разностного* уравнения очевидным образом обобщаются на неоднородные линейные *дифференциальные* уравнения, что и делается ниже, в § 3.4 (пп. 3.4.3–4). Там и следует напомнить только что рассмотренные вычисления. Мы приводим их сейчас с тем, чтобы "возврат" к разностным уравнениям сконцентрировать в одном месте — и в возможном пропедевтическом качестве.

3) Наконец, идея, которую нельзя не упомянуть, — это подстановка геометрических прогрессий в качестве возможных решений однородных линейных разностных уравнений произвольного порядка. Рассмотрим, к чему она приводит в случае *уравнения Фибоначчи* $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$. Подставляя в него геометрическую прогрессию $x_n = Aq^n$, приходим к уравнению для знаменателя прогрессии q:

$$Aq^{n+1} = Aq^n + Aq^{n-1} \iff q^2 = q + 1 \iff q^2 - q - 1 = 0 \iff q = q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Общее решение уравнения Фибоначчи записывается в виде суммы двух геометрических прогрессий: $x_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n$, — откуда нетрудно вывести и *формулу Бине* для чисел Фибоначчи: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ (см. задачи 56–57 к главе 2).

§ 3.2. Натуральный логарифм и экспонента

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.2.1	"Симметричное" дифференциальное уравнение	!	
3.2.2	Натуральный логарифм	!!	
3.2.3	Натуральная экспонента	!!	
3.2.4	Экспонента и показательная функция	!!	
3.2.5	Решения дифференциального уравнения $y' = ky$	$\downarrow$+	

Узловые вопросы занятия.

1. Определение натурального логарифма как решения дифференциального уравнения $y'(x) = \frac{1}{x}$.
2. Доказательство основного свойства натурального логарифма.
3. Определение натуральной экспоненты как функции, обратной к натуральному логарифму (с обоснованием).
4. Производная натуральной экспоненты.
5. Доказательство основного свойства натуральной экспоненты.
6. Определение числа e. Совпадение натуральной экспоненты и показательной функции e^x.
7. Формулы перехода к "натуральному основанию" e для произвольных показательных и логарифмических функций.
8. Теорема существования и единственности решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$.

Тематика этого занятия по "номенклатуре" близка к соответствующим темам основного (базисного) курса. Предполагается, что это занятие, как и вся тема 3, спланированы на изучение, *не опережающее* основной курс, поэтому материал занятия излагается столь суггестивно, концентрированно. Важно довести до понимания учащихся основную идею: *строгое* обоснование уже известных им фактов, касающихся производных показательных и логарифмических функций. Причем обоснование, опирающееся на дифференциальные уравнения.

Параграф начинается с повторения наблюдения из предыдущего параграфа (п. 3.1.4): постоянства поля направлений уравнения $y' = ky$ вдоль горизонталей $y = \mathrm{const}$. Отсюда возможность осуществить излюбленный прием математиков: сведéние задачи к предыдущей — в данном случае, к полям направлений, постоянным вдоль вертикалей и, соответственно, к дифференциальному уравнению для первообразных, подробно рассмотренному в предыдущей главе.

Наглядно-интуитивные представления, изложенные в п. 3.2.1, доводятся до написания (заметим: без строгого обоснования, которое дается уже в общем случае в главе 4) дифференциального уравнения для функции, которая (гипотетически) должна быть обратной к решению исследуемого уравнения $y' = ky$. А потом, после этих полуэвристических соображений, в п. 3.2.2 и далее следуют совсем строгие рассмотрения, последовательно приводящие к искомым результатам — в конечном счете, к теореме существования и единственности решений линейного дифференциального уравнения $y' = ky$.

Предостережем от кажущейся легкой замены содержательно интерпретирующегося перехода от уравнения $y' = ky$ к уравнению вида $x'(y) = g(y)$ формальным переходом, который можно встретить во многих вузовских учебниках: де,

$$y' = ky, \quad \frac{dy}{dx} = ky, \quad dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{dy}{y}, \quad x = \frac{1}{k} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{k} \ln y + C \quad (y > 0).$$

Без ясного представления о *формализме Лейбница*, здесь примененном, не следует (*не пристало* — математикам и в математике, по меньшей мере) его использовать. Формальное лейбницево "исчисление дифференциалов" рассматривается и ему придается обосновывающая этот формализм содержательная трактовка в следующей главе 4.

Уместно обратить внимание на замечание *Бурбаки* по данному поводу: "*...Надо признать, что понятие дифференциала, данное Лейбницем, по правде говоря, не имеет никакого смысла*". Лишь в XX в. математики придали смысл пресловутым дифференциалам, однако он весьма далек от того, чтобы быть доступным для изучения в школе.

Николя́ Бурбаки́ (**Nicolas Bourbaki**, 1935–1985) — коллективный псевдоним группы преимущественно французских крупных математиков. Бурбаки принадлежит фундаментальная концепция "*архитектуры*" современной математики, в соответствии с которой с 1939 г. стал издаваться многотомный трактат "*Начала математики*" (с 1958 г. он издается и в Москве — под названием "*Элементы математики*"). В 1985 г. было объявлено о "кончине" Бурбаки. Подробнее см. в статье: *А. Б. Сосинский*, "Умер ли Никола Бурбаки?" — сборник "*Математическое просвещение*", сер. 3, вып. 2, М., 1999 (издание МССМЕ/МЦНМО — "*Московского центра непрерывного математического образования*").

Цитируется книга: БУРБАКИ Н. Очерки по истории математики: Пер. с франц. — М.: ИЛ, 1963.

В п. 3.2.2 натуральный логарифм определяется как первообразная, или как решение соответствующего дифференциального уравнения, удовлетворяющее выбранному начальному условию. Иначе можно записать логарифм как интеграл с переменным верхним пределом, связать его с площадью криволинейной трапеции под гиперболой, но это мы опускаем, ибо, еще раз: основная опора — на дифференциальное уравнение. Связь с площадями не прибавляет какой-то "полезной" для исследования функции наглядности (и эта связь в общем случае была рассмотрена в предыдущей главе: при доказательстве *основной теоремы анализа*, или существования первообразных, где она действительно существенна).

Подобный подход: логарифм как первообразная или площадь, а потом уже экспоненты (показательные функции), — был принят в учебнике *Б. Е. Вейца* и *И. Т. Демидова* "Алгебра и начала анализа" для старших классов средней школы, использовавшемся в 1960–70 гг. Однако в большинстве учебников (для школьников) все-таки сначала вводится показательная функция, как правило, с теми или иными "допущениями" (принимаемыми без доказательств), а уже потом — логарифмическая функция. Такова традиция, восходящая, видимо, еще к знаменитым учебникам *А. П. Киселева*, и сохранившаяся в ныне действующих учебниках и учебных пособиях (в частности, в популярном курсе: *Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.* "Алгебра и математический анализ, 10/11")

Андрей Петрович Киселев (1852–1940) — русский и советский математик-педагог и методист-писатель. Родился в Мценске, учился в Орле и на физико-математическом факультете Санкт-Петербургского университета, с 1875 г. преподавал математику, физику, черчение в гимназиях, училищах и даже в кадетском корпусе. С 1884 г. параллельно писал замечательные (во всяком случае, на уровне своего времени) учебники по элементарной математике: по арифметике (1-е изд. 1884), алгебре (1886), геометрии (1892); с 1930-х до 1970-х гг. эти учебники были основными в советской школе.

Приведем подзаголовок титула одного из учебников Киселева — "**Элементарной геометрии**" 26-го издания, 1918 г.: "**Допущена**[1] Уч. Ком. Мин. Нар. Пр. в качестве **руководства** для средних учебных заведений, мужских и женских (. . . [2]); **рекомендована** Учебн. Ком. при Св. Синоде для употребления в духовных семинариях в качестве учебного пособия (1893); **одобрена** Деп. Торг. и Мануф. для коммерческих училищ в качестве пособия (1898). **Рекомендована**, как **руководство** для кадетских корпусов.".

Учебники А. П. Киселева выдержали в общей сложности около 300 изданий. В 1933 г. А. П. Киселев был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Скончался он почти в 88 лет в Ленинграде, где и был похоронен, как писатель — на "Литераторских мостках" Волкова кладбища, почти рядом с великим русским поэтом начала XX века А. А. Блоком.

При переходе от натурального логарифма к натуральной экспоненте (п. 3.2.3) стоит объяснить учащимся практическую важность основных свойств логарифма и экспоненты: их применение в вычислениях, требующих большой точности (например, при астрономических расчетах). Полезно чуть остановиться и на "дологарифмических" приемах вычислений: на так называемом *простаферетическом* методе, который использовался как греческими астрономами, так и знаменитым Тихо Браге.

Название метода происходит от греч. слов "простезис" и "афайрезис", означающих "прибавление" и "отнятие"; оно указывает на основную идею: сведение умножения к сложениям и вычитаниям — с помощью формул преобразования произведения косинусов или синусов в суммы/разности.

Пафос" п. 3.2.4 в том, что устанавливается связь показательной функции, определяемой как "естественное[3] продолжение" показательной функции рационального аргумента на всю числовую ось, и натуральной экспонентой, определяемой как функция, обратная к натуральному логарифму. Натуральная экспонента заведомо дифференцируема (просто в силу своего определения, в соответствии с теоремой о дифференцируемости обратной функции), поэтому дифференцируемы и показательные функции с произвольным основанием (при доказательстве используется формула перехода к основанию e и теорема о дифференцируемости композиции). Таким образом, вопрос о дифференцируемости показательной функции оказывается исчерпанным, а заодно получены известные формулы дифференцирования произвольных экспонент и логарифмов.

Вслед за этим в п. 3.2.5 мы возвращаемся к исходному дифференциальному уравнению и доказываем теорему существования и единственности его решений. Теорема закрепляется в нескольких простых упражнениях на отыскание решений

---

[1] Элементарная математика: арифметика, алгебра, геометрия, — *женского рода*, поэтому "*допущен***а**"!

[2] Пропущена ссылка на официальные документы.

[3] Чаще всего, просто *монотонное*.

конкретных уравнений с заданными конкретными начальными условиями.

Примечательно, что логарифмы были придуманы Непером при решении задачи, которая по сути своей, выражаясь на современном математическом языке, относится к дифференциальным уравнениям. Поскольку "неперово уравнение" имеет непосредственное отношение к рассмотренным вопросам, расскажем про него несколько подробнее.

Непер рассматривает одновременное движение двух точек, X и Y, по двум прямым из положений O и A, соответственно (рис. М-01). При этом первая точка (X) движется с постоянной скоростью v, а вторая точка (Y), проходя положение A с той же скоростью v, движется по направлению к B *замедленно* — так, что ее скорость пропорциональна расстоянию до точки B. Длина отрезка AB полагается равной $r = 10^7$.

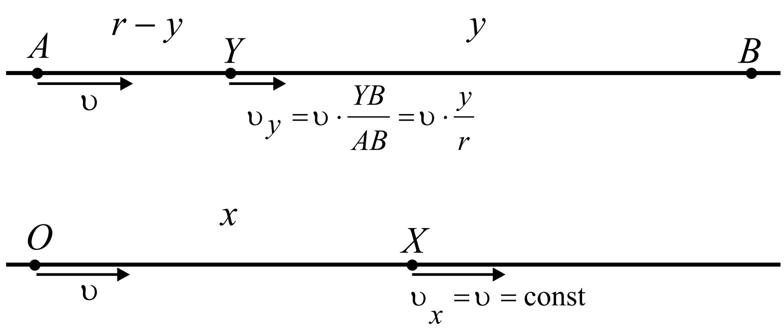


Рис.М-01

Каким-то образом Джон Непер догадался, что при рассмотрении величин $OX = x$ и $YB = y$, изменяющихся в соответствии с указанными "правилами движения", в том случае, когда значения x образуют арифметическую прогрессию $\{0, d, 2d, 3d, ...\}$, значения y составляют прогрессию геометрическую $\{r, rq, rq^2, rq^3, ...\}$ (попробуйте это доказать!).

Не будем углубляться в детали вычислений Непера (хотя они довольно интересны). Покажем только, как привлеченная им кинематическая модель описывается на принятом со времен Ньютона и Лейбница языке. Законы движения неперовых точек X и Y описываются, в современных обозначениях, дифференциальными уравнениями

$$x'(t) = v, \quad y'(t) = -\frac{vy}{r}, \tag{1}$$

причем $x(0) = 0$, $y(0) = r = 10^7$. Отсюда получаем, что зависимость y от x, или наоборот, подчиняется дифференциальному уравнению

$$y'_x(x) = -\frac{y}{r}, \quad \text{или} \quad x'_y(y) = -\frac{r}{y} \tag{2}$$

(действительно, подставляя в формулу $y = y(x)$ зависимости $x = x(t)$ и $y = y(t)$, после дифференцирования получающегося тождества $y(t) \equiv y\big(x(t)\big)$ с использованием формулы для производной композиции находим:

$$y'_t(t) = \Big(y\big(x(t)\big)\Big)'_t = y'_x\big(x(t)\big) \cdot x'_t(t) \implies y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

остается в последнюю формулу подставить выражения для производных x'_t, y'_t из уравнений (1)).

Первое из уравнений (2) — однородное линейное, а так как оно должно удовлетворять вытекающим из формул (1) начальным условиям: при $x = 0$ $y = 10^7$, — то единственное его решение задается формулой

$$y = r\mathrm{e}^{-x/r} = 10^7 \cdot \mathrm{e}^{-x/10^7},$$

или же

$$x = -r \ln\frac{y}{r} = r\ln\frac{r}{y} = r\log_{1/e}\left(\frac{y}{r}\right) = 10^7 \log_{1/e}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

Получается функция, *пропорциональная* (с положительным коэффициентом пропорциональности) логарифму по основанию $\frac{1}{\mathrm{e}}$, которую и табулировал Непер.

Упражнения, связанные с вычислением производных, наличествуют в основном курсе, поэтому мы ограничиваемся небольшим числом задач на отыскание пределов, фактически сводящихся к отысканию производных.

§ 3.3. Экспоненциальный рост и теоремы о сравнении

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.3.1	Ньютоновы "экспоненциальные" многочлены	!	
3.3.2	Как отличить экспоненциальный рост от степенного?	!	
3.3.3	Что такое экспоненциальный рост на бесконечности?	!!	**У**
3.3.4	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \to +\infty$	!!	**У**
3.3.5	Сравнение степенной и логарифмической функций при $x \to 0+$	!!	**У**

Материал этого параграфа имеет не только практический, но и как бы "философский" характер: показывается, что *возрастать* (или *убывать*) *функции могут* ***по-разному***. Так, различают экспоненциальный, степенной, логарифмический рост. Конечно, существует бесконечная градация "степеней роста" — можно предложить учащимся указать функцию, растущую на $+\infty$ быстрее, чем любая экспонента — $f(x)$ такую, что

$$\forall\, a > 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{f(x)} = 0.$$

Доказанные теоремы о сравнении нужны, например, при исследовании функций типа x^x или $x\ln x$ и построении их графиков. Предложите школьникам построить графики обеих указанных функций. Другие задачи на отыскание пределов и построения графиков см. в упражнениях.

Содержание параграфа изложено достаточно подробно и в специальных комментариях не нуждается. Укажем только, что ньютоновы многочлены рассмотрены выше, в комментариях к § 3.1. Стоит еще обратить внимание на замечание в конце п. 3.3.4 и предложить учащимся выполнить формулируемое там задание.

§ 3.4. Экспоненциальные модели

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.4.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.4.1	Пример: радиоактивный распад	!!	**У**
3.4.2	Пример: ядерное деление (цепная реакция)	!	
3.4.3	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + f(x)$	!!	**У**
3.4.4	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение $y' = ky + b(\mathrm{const})$	!!	
3.4.5	Пример: уравнение "атомного реактора"	!	

Это ключевой параграф главы: финал осуществленной программы исследований линейных математических моделей. Вместе с тем класс этих моделей расширяется — за счет *неоднородных* линейных дифференциальных уравнений первого порядка. И сразу же следует довольно эффектный пример их приложения: модель работы атомного реактора.

Из теоретических вопросов следует обратить внимание школьников на прием, которым доказывается *теорема Д'Аламбера* из п. 3.4.3. Это один из довольно общих методов решения *неоднородных линейных* задач, исходя из решения соответствующих задач *однородных линейных* — неоднородность убирается с помощью вычитания. Такой прием будет еще применяться дальше для анализа неоднородных линейных дифференциальных уравнений *второго* порядка. Школьникам же можно показать следующий пример использования той же идеи.

Допустим, нам нужно решить линейное уравнение $ax + by = c$ с целыми коэффициентами a, b, c в целых числах x, y. Если мы нашли (угадали или еще как) какое-то *частное* решение $(x_0; y_0)$ данного уравнения, то вычтем из этого уравнение соотношение $ax_0 + by_0 = c$. "Неоднородность", спрятавшаяся в коэффициенте c, пропадает, и мы получаем *однородное* линейное целочисленное уравнение, $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Используя соображения делимости, легко найти *общее* решение однородного уравнения. Так, если коэффициенты a и b взаимно простые (а этого всегда можно добиться: либо исходное уравнение не имеет решений вообще, либо обе его части можно сократить на наибольший общий делитель коэффициентов при x и y и считать далее коэффициенты взаимно простыми), то общее решение имеет вид $(x - x_0; y - y_0) = (bt; -at)$, где t — произвольный целочисленный параметр. И опять, как в теореме Д'Аламбера, получается, что *общее решение* исходного уравнения представляется как *сумма частного решения* этого уравнения и *общего решения соответствующего однородного уравнения.* Можно предложить школьникам решить какое-нибудь конкретное уравнение — например, $5x + 12y = 17$.

Вообще, когда *один и тот же метод*[9] успешно работает совсем в разных областях математики, это впечатляет и просто доставляет эстетическое удовлетворение — аналогично тому, как красиво выглядит, наоборот, применение многих разных методов к решению одной задачи (кстати, пример этого — в следующем пункте 3.4.4). При возможности такие ситуации стоит показывать школьникам — может быть, у них проснется или сформируется "вкус" к математике!

§ 3.5*. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.5.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
3.5.1	Метод Лагранжа: вариация произвольной постоянной	!	**У**
3.5.2	Пример: свободное движение с трением	!	
3.5.3	Пример: свободное падение с трением	!	
3.5.4	Однородные линейные ДУ с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y$	!	**У**
3.5.5	Общие линейные ДУ с переменными коэффициентами: $y' = k(x)y + f(x)$	!	**У**

При дефиците времени этот параграф можно пропустить. Однако его материал во-первых, интересен, во вторых, содержит некоторый итог и обобщение ранее пройденного, устанавливает связь между главами 2 и 3. Речь в нем идет о решении однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в *квадратурах*, т. е. сведение их к вычислению интегралов. Применяется и изученный в предыдущем параграфе "метод Д'Аламбера, и изящный и более мощный метод *вариации произвольной постоянной Лагранжа.* С него параграф и начинается — в частности приводится *третий* метод (метод Лагранжа) решения дифференциального уравнения "атомного реактора" $y' = ky + b$ (вспомните наше рассуждение о красоте в математике!).

По-простому разбирается свободное движение с (вязким) трением — можно сказать, применяется метод "расцепления" дифференциального уравнения (*второго закона*) Ньютона, когда сначала отыскивается зависимость $v = v(t)$, а уже потом интегрированием решается уравнение $x' = v(t)$. Этот же метод применяется и к уравнению $z'' = -g - kz'$ свободного падения с трением ("уравнению прыжка с парашютом"). И на том же примере показан весьма красивый прием сведения задачи к *повторному дифференцированию*: запись уравнения в виде $(z' + kz)' = -g$. Это соображение пригодится во второй части пособия.

Кроме этих двух методов, к этой задаче применяется и метод Д'Аламбера, когда отыскивается частное решение сразу для уравнения второго порядка. (Опять — сплошь красота...)

[9] Напомним, что по *Пойа* "*метод — это прием, примененный дважды*"!

Комментарии и указания к упражнениям и задачам

К упражнениям и задачам к этой главе в случае необходимости даны указания и/или комментарии в самом учебном пособии. Мы же разберем **задание A**, относящееся, по сути, к п. 3.1.6.

Мотив к формулировке этого задания может быть следующим. Прогрессии $x_n = q^n$ обладают следующим свойством: при любых[10] $m, n \in \mathbb{Z}$

$$x_{m+n} = x_m \cdot x_n \tag{0}$$

или, в функциональной записи, $x(m+n) = x(m)x(n)$. Отсюда, т. е. из выписанного *функционального уравнения геометрических прогрессий*, следует, что при любом натуральном $n = 1 + 1 + \dots + 1$ (n единиц) можно записать, что $x(n) = x(1)x(1)\dots x(1)$ (n сомножителей), так что для числа $q = x(1)$ $x(n) = x_n = q^n$. Принимая во внимание начальное условие $x_0 = x(0) = 1$, с помощью соотношения $x(n)x(-n) = x(0) = 1$ распространяем формулу $x_m = q^m$ на произвольные целые m.

Идея исследования решений дифференциального уравнения $y' = ky$ (непрерывного аналога разностного уравнения прогрессий $\Delta x_n = kx_n$; здесь и там $k \neq 0$) в том, чтобы *вывести* ***только*** *из дифференциального уравнения $y' = ky$ и начального условия $y(0) = 1$ функциональное уравнение того же вида, что и* (0): при любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$y(a+b) = y(a)y(b),$$

— а потом установить связь между таким решением и известной нам *показательной функцией рационального аргумента*

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mapsto c^x = \sqrt[n]{c^m} \quad (c > 0).$$

Таким образом, выполнение задание A разбивается на два разных этапа: на первом этапе нужно из дифференциального уравнения вывести функциональное уравнение, и здесь необходимо умение применять дифференциальное исчисление для нестандартных исследований; на втором этапе необходимо из функционального уравнения вывести сначала свойства, а затем и формулу его решения. На этом этапе собственно математический анализ не нужен, а учащимся понадобится некоторая изобретательность, "комбинаторные способности" и, возможно, просто *интуиция* (хотя рассмотрения подобного рода являются довольно типичными в алгебре и функциональном анализе). Отметим, что все осуществляемые на втором этапе рассуждения содержатся в доказательстве теоремы 3 из параграфа § 3.2 (см. п. 3.2.4). Тем не менее, ради цельности изложения, мы приведем аналогичные рассуждения и непосредственно в рассматриваемой ситуации.

Добавим, что указанные выше этапы не зависят один от другого, и их можно выделить в отдельные "подзадания". Мы их объединили с тем, чтобы в итоге результат имел, в отличие от функционального уравнения экспоненты, значимый и понятный для школьников вид.

[10] Удобно рассматривать прогрессии, пронумерованные всеми целыми числами — бесконечные "в обе стороны".

Перейдем непосредственно к реализации плана выполнения задания А, предложенного в учебном пособии.

Прежде всего, здесь и далее мы допустим (без доказательства), что дифференциальное уравнение

$$y'(x) = ky(x) \tag{1}$$

имеет *определенное на всей числовой оси* решение, удовлетворяющее в нуле *ненулевому* начальному условию: $y(0) = y_0 \neq 0$.

Шаг 1. *Докажем, что всюду определенное решение уравнения* (1) *с ненулевым начальным условием не обращается в нуль ни в какой точке числовой оси.* Иными словами, если функция $f(x),\ x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), т. е.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = kf(x), \tag{2}$$

причем

$$f(0) = A_0 \neq 0, \tag{3}$$

то

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0.$$

Доказательство этого основано на довольно изящном "трюке". Именно, рассмотрим функцию

$$p(x) = f(x) \cdot f(-x).$$

Ее производная, в соответствии с правилами дифференцирования произведения и сложной функции, а также с формулой (2), равна

$$\begin{aligned} p'(x) &= f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot f'(-x) \cdot (-1) = \\ &= kf(x) \cdot f(-x) - f(x) \cdot kf(-x) \equiv 0, \end{aligned}$$

т. е. тождественно равна нулю. Следовательно, согласно *признаку постоянства функции*, рассматриваемая функция $p(x)$ постоянна — равна некоторой константе C на всей числовой оси, — а так как, согласно условию (3),

$$p(0) = f(0) \cdot f(-0) = A_0^2 \neq 0,$$

эта константа отлична от 0. Поэтому решение $f(x)$ не может обращаться в нуль ни в какой точке, что и требовалось установить.

Если по каким-то причинам школьники не знакомы с *признаком постоянства функции*, то его нужно сначала сформулировать,

если некоторая функция φ дифференцируема на (ограниченном или неограниченном) *интервале I, причем в каждой точке этого интервала производная этой функции равна нулю*: $\forall\, x \in I\ \ \varphi'(x) = 0$, — *то на этом интервале функция φ постоянна*: $\forall\, a, b \in I$ $\varphi(a) = \varphi(b)$,

а затем и доказать[11]. Напомним, что для доказательства достаточно рассмотреть разность $\varphi(b) - \varphi(a)$ и применить к ней *теорему Лагранжа*: для некоторой точки c, заключенной между a и b, выполнено равенство

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a).$$

[11] Заметим, что мы уже повторяли эту теорему в предыдущей теме: см. § 2.1.

Поскольку в данном случае производная равна нулю, $\varphi(a) = \varphi(b)$, что и требовалось доказать.

Контрольный вопрос для учащихся: существенно ли в сформулированной (и доказанной) теореме, что функция с нулевой производной рассматривается *на одном интервале*? (Нельзя ли, например, говорить о функции на ее области определения?)

Ответ: *существенно.* Если, например, функция имеет нулевую производную на объединении двух непересекающихся интервалов, то на каждом из них функция будет константой, но на их объединении может и не быть таковой — если константы на разных интервалах *разные.*

Шаг 2. *Докажем, что любое определенное на всей числовой оси решение* $f(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее ненулевому начальному условию* $f(0) = A_0 \neq 0$, *принимает на всей числовой оси значения одного знака.*

Это следует из доказанного на шаге 1 и из теоремы о промежуточном значении (непрерывность функции f вытекает из того, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и, следовательно, дифференцируема).

Шаг 3. *Докажем, что любое определенное на всей числовой оси решение* $f(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее ненулевому начальному условию, либо строго возрастает, либо строго убывает на всей числовой оси.*

Действительно, согласно дифференциальному уравнению (1), производная функции f равна $kf(x)$ и, по предыдущему следствию (шаг 2), является либо положительной, либо отрицательной на всей числовой оси, откуда (с учетом признака строгой монотонности) и вытекает сформулированное утверждение.

Шаг 4. *Докажем, что* ***общее*** (произвольное) *решение дифференциального уравнения* (1) *пропорционально любому* ***частному*** *его решению.* Иными словами, если $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — решение дифференциального уравнения (1) с ненулевым начальным условием $f(0) = A_0 \neq 0$, то функция $y(x)$ является решением уравнения (1) *тогда и только тогда*, когда она представляется в виде

$$y(x) = Af(x) \text{ для некоторой константы } A. \tag{4}$$

Доказательство. То, что в случае выполнения уравнения (2) любая функция вида (4) удовлетворяет уравнению (1), очевидно:

$$f' = kf \implies (Af)' = Af' = A \cdot kf = k(Af), \text{ т. е. } y' = ky.$$

Докажем обратное, т. е. справедливость соотношения вида (4) для произвольного решения $y(x)$. Для этого рассмотрим частное от деления решения $y(x)$ на не обращающееся в нуль (на всей оси, согласно шагу 1) решение $f(x)$, т. е. функцию

$$q(x) = \frac{y(x)}{f(x)}.$$

Найдем ее производную. В соответствии с правилом дифференцирования частного и дифференциальным уравнением (1)

$$q'(x) = \left(\frac{y(x)}{f(x)}\right)' = \frac{y'f - yf'}{f^2} = \frac{ky \cdot f - y \cdot kf}{f^2} = \frac{k(yf - yf)}{f^2} \equiv 0,$$

откуда следует, что функция $q(x)$ постоянна (на всей числовой оси):

$$q(x) = \frac{y(x)}{f(x)} = \text{const} = A \implies y(x) = Af(x),$$

что и оставалось доказать.

Шаг 5. *Докажем, что если существует определенное на всей числовой оси и удовлетворяющее ненулевому начальному условию* $f(0) = A_0 \neq 0$ *решение* f *уравнения* (1)*, то* ***существует единственное*** *его решение, удовлетворяющее* ***единичному*** *начальному условию* $y(0) = 1$.

Существование. Рассмотрим решение $y(x) = Af(x)$ и выберем константу A так, чтобы выполнялось единичное начальное условие:

$$y(0) = Af(0) = A \cdot A_0 = 1 \implies A = \frac{1}{A_0}.$$

Единственность следует из того, что, согласно доказанному на предыдущем шаге, любое решение уравнения (1) представляется в виде $y = Af$, а как мы только что видели, коэффициент A определяется однозначно.

Далее решение дифференциального уравнения (1)*, удовлетворяющее единичному начальному условию, будем называть* ***базисным*** *и обозначать* $\boldsymbol{e}(x)$.

Из доказанного ранее вытекает, что *базисное решение*:

1) *однозначно определяется* соотношениями

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{e}'(x) = k\boldsymbol{e}(x) \ \text{ и } \ \boldsymbol{e}(0) = 1; \tag{5}$$

2) *положительно* на всей числовой оси ($\boldsymbol{e}(0) = 1 > 0$);

3) *возрастает или убывает* в зависимости от знака коэффициента k.

Шаг 6. *Докажем* **теорему об априорной единственности решений дифференциального уравнения** $y' = ky$: *любое решение* $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *дифференциального уравнения* (1) *представляется в виде*

$$y(x) = A\boldsymbol{e}(x), \tag{6}$$

где мультипликативная константа A *однозначно определяется начальным условием:* $A = y(0)$.

Доказательство. Представимость произвольного решения в виде (6) следует из доказанного на шаге 4, если вместо решения $f(x)$ взять базисное решение $\boldsymbol{e}(x)$. Подставляя в формулу (6) значение $x = 0$, получаем однозначную определенность константы A — учитывая условие (5), имеем:

$$y(0) = A\boldsymbol{e}(0) = A \cdot 1 = A \implies A = y(0).$$

Шаг 7. *Наконец, докажем* **основное свойство базисного решения дифференциального уравнения** $y' = ky$: *для любых значений* $a, b \in \mathbb{R}$ *выполняется соотношение*

$$\boldsymbol{e}(a + b) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(b). \tag{7}$$

Рассмотрим функцию $y(x) = \boldsymbol{e}(x + a)$. В п. 5.1.4 с помощью геометрической интерпретации уравнения $y' = ky$ было показано, что для любого его решения $f(x)$

"сдвинутая" функция $y(x) = f(x+a)$ также является решением того же уравнения. Сейчас мы проверим это аналитически. По теореме о производной сложной функции, учитывая первое уравнение из условия (5) и то, что $(x+a)' = 1$, для функции $y(x)$ получаем:

$$y'(x) = \boldsymbol{e}'(x+a) \cdot 1 = k\boldsymbol{e}(x+a) = ky(x).$$

Следовательно, функция $y(x)$ — решение дифференциального уравнения (1) и, согласно *теореме единственности* (шаг 6), представляется в виде $y(x) = A\boldsymbol{e}(x)$, где $A = y(0)$. Но, в соответствии со второй частью определения (5),

$$A = y(0) = \boldsymbol{e}(0+a) = \boldsymbol{e}(a) \implies$$
$$\implies \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad y(x) = \boldsymbol{e}(x+a) = A\boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(x),$$

а это и требовалось установить (замените x на b!).

Теперь мы переходим к выводу из функционального уравнения (7) функциональных свойств базисного решения $\boldsymbol{e}(x)$. Ради удобства следующие шаги будем нумеровать римскими цифрами.

Шаг I. *Докажем, что*

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \boldsymbol{e}(na) = \boldsymbol{e}(a)^n. \tag{8}$$

Обозначим $\boldsymbol{e}(a)$ через A. Из функционального уравнения (7) следуют равенства

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(2a) &= \boldsymbol{e}(a+a) = \boldsymbol{e}(a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^2, \\ \boldsymbol{e}(3a) &= \boldsymbol{e}(2a+a) = \boldsymbol{e}(2a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^2 \cdot A = A^3, \\ \boldsymbol{e}(4a) &= \boldsymbol{e}(3a+a) = \boldsymbol{e}(3a) \cdot \boldsymbol{e}(a) = A^3 \cdot A = A^4, \end{aligned}$$

и т. д. Чтобы обойтись без слов "*и так далее*", нужно провести доказательство *методом математической индукции.*

Шаг II. *Докажем, что то же равенство справедливо для любых* ***целых*** *кратных a:*

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \qquad \boldsymbol{e}(ma) = \boldsymbol{e}(a)^m. \tag{9}$$

Так как по определению базисного решения $\boldsymbol{e}(0) = 1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{e}(x) \cdot \boldsymbol{e}(-x) = \boldsymbol{e}(x + (-x)) = \boldsymbol{e}(0) = 1,$$

откуда следует, что

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{e}(-x) = \frac{1}{\boldsymbol{e}(x)} = \boldsymbol{e}(x)^{-1}.$$

Это соотношение и свойство (8) дают, что для отрицательного целого $m = -n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{e}(ma) = \boldsymbol{e}(-na) = \boldsymbol{e}(na)^{-1} = (A^n)^{-1} = A^{-n} = \boldsymbol{e}(a)^m,$$

что и требовалось установить.

Шаг III. *Докажем аналогичное свойство для дробных множителей вида* $\alpha = \frac{1}{n}$:

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,(n \geqslant 2) \qquad \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{n}c\right) = \boldsymbol{e}(c)^{\frac{1}{n}}. \tag{10}$$

Полагая в равенстве (8) $a = \frac{c}{n}$, заключаем, что

$$\boldsymbol{e}(c) = \boldsymbol{e}(na) = \boldsymbol{e}(a)^n = \boldsymbol{e}\left(\frac{c}{n}\right)^n,$$

откуда, с учетом положительности функции $\boldsymbol{e}(x)$, имеем:

$$\boldsymbol{e}\left(\frac{c}{n}\right) = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(c)} = \boldsymbol{e}(c)^{\frac{1}{n}},$$

что и требовалось доказать.

Шаг IV. *Наконец, докажем аналогичное свойство для произвольных дробных* (т. е. *рациональных*) *множителей вида* $\alpha = \frac{m}{n}$:

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,(n \geqslant 2) \qquad \boldsymbol{e}\left(\frac{m}{n}a\right) = \boldsymbol{e}(a)^{\frac{m}{n}}.$$

Действительно, для произвольного рационального числа $\alpha = \frac{m}{n}$ из соотношений (9) и (10) получаем:

$$\boldsymbol{e}(\alpha a) = \boldsymbol{e}\left(\frac{m}{n}a\right) = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(ma)} = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(ma)} = \sqrt[n]{\boldsymbol{e}(a)^m} = \boldsymbol{e}(a)^{\frac{m}{n}} = a^{\alpha},$$

что мы и хотели установить.

Шаг V. *В заключение докажем* **теорему о значениях базисного решения в рациональных точках**: *для базисного решения* $\mathbf{e}(x)$ *дифференциального уравнения* $y' = ky$

$$\forall\, x \in \mathbb{Q} \qquad \boldsymbol{e}(x) = c^x, \text{ где } c = \boldsymbol{e}(1).$$

Доказательство. Для произвольного рационального числа $x = \dfrac{m}{n}$ из соотношения, доказанного на предыдущем шаге, получаем:

$$\boldsymbol{e}(x) = \boldsymbol{e}(1)^{\frac{m}{n}} = c^x,$$

что и требовалось установить.

Итак, исходя только из линейного дифференциального уравнения $y' = ky$, выведено, что его решение $\boldsymbol{e}(x)$, удовлетворяющее единичному начальному условию $\boldsymbol{e}(0) = 1$, при всех рациональных значениях x совпадает с показательной функцией $x \mapsto c^x$ рационального аргумента, где число c (основание) равно $\boldsymbol{e}(1)$. Отсюда следует, что и произвольное решение $y(x)$ того же уравнения при рациональных значениях x совпадает с функцией Ac^x, где $A = y(0)$ (см. шаг 6).

Далее можно идти по такому пути: определить *показательную функцию произвольного действительного аргумента* $x \mapsto c^x$ как определенную на всей числовой оси строго монотонную (возрастающую при $c > 1$ и убывающую при $0 < c < 1$)

функцию, при всех рациональных значениях x совпадающую с показательной функцией рационального аргумента. Так и вводится эта функция, скажем, в общеобразовательном курсе "Алгебры и начал анализа", изложенной в учебнике под ред. А. Н. Колмогорова. Можно доказать, что указанными требованиями функция $x \in \mathbb{R} \mapsto c^x$ однозначно определяется, т. е. удовлетворяющая этим требованиям функция *существует*, причем *только одна* (это так называемая *теорема существования и единственности*, в данном случае, показательной функции; в общеобразовательном курсе эта теорема принимается без доказательства).

Если вернуться потом к дифференциальному уравнению, то для строгого описания его решений через показательные функции потребуется доказать *дифференцируемость* функции c^x, а это не так просто. В упомянутом курсе *без доказательства* принимается некоторое предположение[12], из которого выводятся все "нужные" свойства показательных функций.

Мы пойдем иным путем, доказывая все утверждения, необходимые для полного исследования линейного дифференциального уравнения. Этот путь последовательно изложен в § 5.2.

Дополнительные задания по тематике задания А относятся к функциональным уравнениям. Мы приведем их вместе с пошаговыми планами выполнения, которые, при необходимости, можно перевести в форму циклов "наводящих вопросов" (начинающихся с приведенных "предварительных вопросов").

Задание А1. Найдите все *всюду определенные и непрерывные* решения функционального уравнения $(*)$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Предварительные вопросы: нельзя ли найти значение $f(0)$? Как можно записать значения $f(2)$? $f(-1)$? $f(17)$?

А1-01 Докажите, что всегда $f(0) = 0$.

А1-02 Докажите, что при любом значении x $f(-x) = -f(x)$.

А1-03 Докажите, что для любого натурального n при любом значении x $f(nx) = nf(x)$.

А1-04 Докажите, что для любого *целого* m при любом значении x $f(mx) = mf(x)$.

А1-05 Докажите, что для любого *рационального числа* $\alpha = \frac{m}{n}$ при любом значении x $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

А1-06 Докажите, что для некоторого числа $k \in \mathbb{R}$ при любом *рациональном значении* x $f(x) = kx$.

А1-07 Докажите, что если решение f *непрерывно в точке* $x = 0$, то оно *непрерывно на всей числовой оси* $\mathbb{R}$.

А1-08 Докажите, что если решение f *дифференцируемо в точке* $x = 0$, то оно *дифференцируемо на всей числовой оси* $\mathbb{R}$, причем при любом x $f'(x) = k$, где k — производная f в нуле.

У к а з а н и е к пп. 07–08. Рассмотрите разность $f(x+h) - f(x)$.

[12]Именно, допускается существование такого основания $c = e$, что функция $\varepsilon(x) = e^x$ дифференцируема при $x = 0$, причем $\varepsilon'(0) = 1$.

A1-09 Докажите, что *любое монотонное решение f функционального уравнения* $(*)$ *представляется в виде $f(x) = kx$, где $k = f(1)$* (подразумевается *нестрогая* монотонность).

A1-10 Докажите, что если решение f *ограничено в некоторой окрестности* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *точки* $x = 0$, то оно *непрерывно в нуле* (а значит, согласно п. 07, и *на всей числовой оси*).

A1-11 Докажите, что если решение f *непрерывно*, то оно *дифференцируемо* (*в нуле* или *на всей числовой оси* — из пп. 07–08 следует, что *это всё равно*).

A1-12 Докажите, что *любое непрерывное решение f функционального уравнения* $(*)$ *представляется в виде $f(x) = kx$, где $k = f(1)$* (или $k = f'(0)$).

Тем самым задание A1 выполнено: всюду определенными и непрерывными решениями рассматриваемого функционального уравнения будут функции $f(x) = kx$ и только они.

Задание A2 относится к *нетривиальным*, т. е. отличным от тождественного нуля, решениям функционального уравнения

$$f(ab) = f(a)f(b), \tag{$**$}$$

рассматриваемого *только на положительной полуоси.* Как будет ясно из главы 4 учебного пособия (из результатов и методов § 4.2), *дифференцируемые* решения этого функционального уравнения суть степенные функции $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ — любое, и только они. Этот же факт можно вывести из того, что, если рассмотреть функцию $\varphi(x) = \ln f(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, то она будет удовлетворять функциональному уравнению из задания A1. Провести эту редукцию можно после изучения материала следующего параграфа. Пока же задание состоит в установлении ряда свойств решений функционального уравнения $(**)$.

Предварительный вопрос: нельзя ли найти значение $f(1)$?

A2-01 Докажите, что функции 1, x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ являются решениями функционального уравнения $(**)$ (при $x > 0$).

A2-02 Докажите, что если решение f уравнения $(**)$ в какой-то точке $x_0 > 0$ обращается в нуль, то оно *тождественно равно нулю* (*на положительной полуоси*).

Комментарий. Поскольку мы рассматриваем только *нетривиальные*, т. е. *отличные от тождественного нуля*, решения, то впредь можно считать, что все упоминаемые далее решения функционального уравнения $(**)$ вообще не обращаются в нуль (на положительной полуоси).

A2-03 Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ — решения функционального уравнения $(**)$, то функции

$$p(x) = f(x)g(x), \quad q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

также являются решениями этого уравнения.

A2-04 Докажите, что любое решение f принимает только положительные значения: $\forall\, x > 0 \;\; f(x) > 0$.

А2-05 Докажите, что если функции f и g являются решениями функционального уравнения $(**)$, то их композиция $h = g \circ f$ также есть решение этого уравнения $\big(h(x) = g(f(x))\big)$.

А2-06 Докажите, что всегда (*для любого решения*) $f(1) = 1$.

В нижеследующих пунктах задания функция f есть любое (нетривиальное) решение функционального уравнения $(**)$.

А2-07 Докажите, что при любом значении $x > 0$ $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f(x)}$.

А2-08 Докажите, что для любого натурального n при любом значении $x > 0$ $f(x^n) = \big(f(x)\big)^n$.

А2-09 Докажите, что для любого *целого* m при любом значении $x > 0$ $f(x^m) = \big(f(x)\big)^m$.

А2-10 Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ при любом значении $x > 0$ $f(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{f(x)}$.

А2-11 Докажите, что для любого *рационального числа* $\alpha = \frac{m}{n}$ при любом значении $x > 0$ $f(x^\alpha) = \big(f(x)\big)^\alpha$.

А2-12 Докажите, что если решение f *непрерывно в точке* $x = 1$, то оно *непрерывно на всей полуоси* $(0, +\infty)$.

А2-13 Докажите, что если решение f *дифференцируемо в точке* $x = 1$, то оно *дифференцируемо на всей положительной полуоси*, причем $f'(x) = k\dfrac{f(x)}{x}$ при любом $x > 0$, где $k = f'(1)$.

Указание к пп. 12–13. Рассмотрите разность $f(x+h) - f(x)$ и замените $x + h$ на произведение $x \cdot \left(1 + \dfrac{h}{x}\right)$.

А2-14 Докажите, что функции: $\operatorname{sgn} x$, x, $|x|$, x^2, $x|x|$, $\sqrt{|x|}$, $h(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $h = 0$ при $x = 0$, — являются решениями функционального уравнения $(**)$ *на всей числовой оси* $\mathbb{R}$.

Тема 4. МОДЕЛИ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (глава 4; 8 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 4

Эта тема — единственная в основном модуле (в части I), в которой существенно расширяется материал основного/профильного курсов. И это первый выход на неочевидные приложения методов математического анализа.

Для темы существенна опора на наглядные образы, частично затронутые ранее. Речь идет не о тривиальной наглядности, а об образах довольно значительной степени абстрактности. Это, во-первых, *поля направлений* и появляющиеся в § 4.3 *векторные поля*; во-вторых, *интегральные кривые* этих полей и *фазовые портреты* в целом (картинки, показывающие поведение всего семейства интегральных кривых). Из новых наглядно-образных понятий укажем на *особые точки* фазовых портретов, получающиеся как из решений неавтономных уравнений с разделяющимися переменными, так и при анализе автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости.

Напомним, что *автономность* для дифференциальных уравнений с независимой переменной t, обычно трактуемой как время, означает независимость — или отсутствие *явной* зависимости — правых частей уравнений от этой переменной (вспомните слова В. И. Арнольда — *от времени законы природы не зависят*!).

Наглядная интерпретация выходит на первый план уже при рассмотрении эволюционных уравнений вида $y' = g(y)$: соображения инвариантности соответствующих полей направлений вдоль горизонталей приводит к, в принципе, уже знакомой по главе 3 идее симметричного отражения таких полей относительно биссектрисы $y = x$ первого и третьего координатных углов. Получаются поля, инвариантные вдоль вертикалей, и мы возвращаемся в "лоно" интегрального исчисления, в рамки основной программы.

Этот наглядный и плодотворный переход сразу оформляется в духе Лейбница, а в параграфе 4.2 подробно анализируется вопрос о возможностях лейбницева формализма, появляется целый новый класс уравнений, разрешимых в *квадратурах*, т. е. сводящихся к интегралам (*неопределенным* или *определенным*, в духе записываемых в формулах *Барроу*).

Далее следуют автономные векторные дифференциальные уравнения на плоскости (§ 4.3), их сведение к обычным, но неавтономным дифференциальным уравнениям с помощью формализма Лейбница (обратим *особое* внимание на то, что *формальное* манипулирование с уравнениями у нас во всех случаях поддерживается *строгим* математическим обоснованием) и, наконец, "венец" главы и всего основного модуля: анализ биологической модели *Вольтерры–Лотки*.

После этой темы учитель и должен подумать и, возможно, посоветоваться со школьниками (и с опытными коллегами) относительно того, в каком направлении двигаться дальше: то ли изучать (интереснейший, но местами довольно изощренный и требующий большого внимания и интеллектуальных усилий[13]) дополнительный модуль (часть II), то ли углубиться в решение и разбор задач к главам пройденной части (среди них тоже много чего интересного есть), то ли ... завершить данный элективный курс. Выбор за вами.

[13]Это, конечно *не* недостаток — "*Это даже хорошо...*", как пели герои "Айболита–66"!

§ 4.1. Анализ эволюционного уравнения $y' = g(y)$. Примеры

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
3.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
4.1.1	Поля направлений уравнения $y' = g(y)$ и симметричные им	!!	**У**
4.1.2	Примеры: линейные уравнения $y' = ky\,[+b]$	!+	
4.1.3	Теоремы о решениях уравнения $y' = g(y)$. Стационарные решения	!!	
4.1.4	Автономные уравнения как модели эволюции (напоминание)	!	
4.1.5	Пример: уравнение взрыва $y' = \alpha y^2$	!!	
4.1.6	Пример: логистическое уравнение $y' = y(a-y)$	!+	
4.1.7*	Пример неединственности решений уравнения $y' = g(y)$	!+	*

После короткого введения в п. 4.1.1 напоминается существенная конструкция перехода от поля направлений автономного дифференциального уравнения $y' = g(y)$ к симметричному полю направлений, та самая, которая помогла при анализе линейного уравнения $y' = ky$ в § 3.2. И сразу записывается фактически *схема разделения переменных*. Примеры из следующего пункта можно дать конспективно или оставить для самостоятельного разбора.

Пункт 4.1.3 очень важен с математической точки зрения — в нем обосновывается выписанная схема интегрирования переходом к "симметричному" дифференциальному уравнению и выводятся две теоремы существования и единственности для автономных уравнений. Также вводится важное понятие *стационарного* решения, устойчивого или неустойчивого (или, в принципе, "никакого"). В следующем пункте приводится важная трактовка автономного уравнения с помощью "поля скоростей" на прямой, а стационарные решения связываются с положениями равновесия моделируемой системы. Приводится интуитивно ясный (из соображений линейного приближения в окрестности — вот опять понадобилось это важнейшее понятие, обсужденное в § 1.1) *критерий устойчивости/неустойчивости* положения равновесия.

Пример (уравнение взрыва) из п. 4.1.5 стоит подробно разобрать, а логистическое уравнение (п. 4.1.6) качественно прокомментировать, оставив для самостоятельного разбора. Отметим, что *разностный аналог* логистического уравнения (модели Ферхюльста) есть "*уравнение Фейгенбаума*" $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$, обнаруживающее очень своеобразное поведение: *стохастизацию*, или постепенный, через удвоение периода решений, переход к хаотическому поведению решений при изменении параметра системы λ. Это тот самый переход "от порядка к хаосу" и обратно, который изучает *синергетика* — наука, за разработку коей бельгийский физик-теоретик (с российскими корнями) *Илья Пригожин* получил Нобелевскую премию. Эффект удвоения периода и стохастизации можно вполне ясно объяснить и школьникам, но, к сожалению, это не вмещается в рамки курса **МА**.

Пример *неединственности* решения автономного уравнения при данном начальном условии из последнего пункта имеет отчасти мировоззренческое значение: он опровергает "веру физиков", что, например, в классической механике *будущее однозначно определяется настоящим.* Этот пункт можно оставить для самостоятельного разбора.

§ 4.2. Формализм Лейбница и уравнения с разделяющимися переменными

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.2.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
4.2.1	Формальное интегрирование уравнения $y' = g(y)$	!!+	
4.2.2	Разделение переменных и формализм Лейбница	!!	**У**
4.2.3	Теоремы об уравнениях с разделяющимися переменными	!!	
4.2.4	Особые точки дифференциальных уравнений	!+	
4.2.5	Разделение переменных в линейных уравнениях $y' = k(x)y\,[+f(x)]$	!	

Это очень важный параграф — "технологически", т. е. с точки зрения "техники формальных математических преобразований", манипуляций с дифференциальными уравнениями некоторых видов, приводящих к искомому и *верному* результату. Придумавший эту технику *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (мы ее и называем "формализмом Лейбница") полагал ее составной частью "универсального символического языка", который он хотел распространить на обширные области, включая философию и этику. Наша задача в этом параграфе — не только описать формализм Лейбница, но дать строгое математическое обоснование его применения в рассматриваемых случаях.

В п. 4.2.1 подробно разобъясняется, в чем, собственно, состоит формализм Лагранжа и почему он называется формализмом. Объясняется, что такое *неопределенный интеграл* и на примере автономного уравнения $y' = g(y)$ показывается, как придавать содержательный смысл формальным преобразованиям. Это существенный пункт, но его достаточно, на наш взгляд, только прокомментировать.

В п. 4.2.2 излагается техника решений уравнений с разделяющимися переменными, в следующем пункте она обосновывается. Это два центральных пункта параграфа. Специальное внимание нужно обратить на разбор примеров — построение *фазовых портретов* дифференциальных уравнений вида $y' = F(x, y)$ на *расширенной фазовой плоскости* Oxy, в двух из которых в первый раз появляются *особые точки* из числа основных *типов* — гиперболическое "седло" и эллиптический "центр". А после обоснования метода Лейбница решения уравнений с разделяющимися переменными (который, в других обозначениях, был известен еще *Барроу*) еще раз подробно объясняется, почему мы его называем *формализмом.*

В проходном п. 4.2.4, который вполне можно оставить для самостоятельного разбора, приводится пример особой точки еще одного типа: ”узел”. То же относится и к последнему пункту, в котором снимается некий ”флер таинственности” с методов, применявшихся в (факультативном) параграфе 3.5.

§ 4.3. Дифференциальные уравнения на плоскости

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.3.0	”Введение в параграф” (предварительные замечания)	!	
4.3.1	Уравнения на плоскости, векторные поля, фазовые портреты	!!	
4.3.2	Фазовые портреты и особые точки: ”узлы” и ”седла”	!!	
4.3.3*	Дальнейшие примеры: еще ”седла” и ”центры”	!+	*

Здесь мы возвращаемся к исследованию дифференциальных математических моделей эволюционирующих систем, описываемых *двумя* параметрами, затронутому во вводном параграфе 1.1. По традиции эти модели называются *дифференциальными уравнениями на плоскости*, в координатной записи выглядящие как *системы* дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями. Полезно напомнить (см. § 1.2), что и дифференциальное уравнение Ньютона (второй закон, $x'' = F(x, x')$) сводится к такой же системе или уравнению на *фазовой* плоскости Oxv — это обстоятельство будет играть решающую роль в следующей главе. Конечно, внимание сосредоточено на *автономных* дифференциальных уравнениях на плоскости.

Содержание параграфа почти чисто математическое (с многочисленными культурно-историческими примечаниями). В п. 4.3.1 вводятся основные понятия: *векторное* поле, интегральная кривая (”линия тока”), фазовый портрет. Приводится удобная *векторная* запись уравнений.

В п. 4.3.2 вводится понятие особой точки для рассматриваемых уравнений на плоскости и анализируется несколько простых примеров, в факультативном последнем пункте примеры более изысканные. На этих примерах мы волей-неволей убеждаемся в связи рассмотренных уравнений на плоскости с неавтономными уравнения вида $y'(x) = F(x, y)$ с разделяющимися переменными — тем самым проводится пропедевтическая подготовка идеи применить к векторным уравнениям тот же *формализм Лейбница.*

§ 4.4. Интегрируемые системы. Модель биоценоза ”хищник–жертва”

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
4.4.1	Формализм Лейбница для систем на плоскости	!!	
4.4.2	Теорема о решениях: обоснование формализма Лейбница	!!	
4.4.3	Схема Лейбница отыскания решений систем на плоскости	!!	
4.4.4	Разделение переменных в системах на плоскости	!!	
4.4.5	Качественный анализ модели Вольтерры–Лотки	!!	
4.4.6	Интегрирование системы Вольтерры–Лотки	!!	

Основная цель этого параграфа — показать простейшую, но не тривиальную модель сожития и взаимовлияния *двух* популяций. Это упоминавшаяся во вводном § 1.1 *модель Вольтерры–Лотки* биоценоза типа "хищник–жертва" (щуки и караси, или волки и зайцы...). Успешность качественного исследования этой модели обусловлена возможностью применить к ней метод разделения переменных — так уж получается.

В первых трех пунктах подробно рассматривается и обосновывается применение формализма Лейбница в общем случае систем уравнений на плоскости: сведение автономной такой системы к неавтономному уравнению вида $y' = F(x, y)$. В п. 4.4.4 указывается на простое наблюдение, с помощью которого система на плоскости сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пункт 4.4.5, непосредственно примыкая к вводному параграфу 1.1 (п. 1.1.8), содержит весьма грубое качественное исследование системы Вольтерры-Лотки — оно не позволяет заключить, будет ли положение равновесия (особая точка системы) устойчивым или нет. Однако непосредственное интегрирование системы методом разделения переменных позволяет найти *первый интеграл* (закон сохранения) для рассматриваемой системы, из явного вида которого мы делаем вывод о *замкнутости*, периодичности траекторий. Так что особая точка будет типа "центр" и устойчива *по Ляпунову*. Явный вид зависимости численностей двух популяций от времени найти в элементарных функциях не удается, но вывод о периодичности процесса указывает на *цикличность* поведения биоценоза типа "хищник–жертва". Эта картинка (фазовый портрет: овалы вокруг особой точки) показывает, что нарушение биоценоза может привести как к стабилизации (стремлению решений к стационарному), так и десталибизации системы ("раскручиванию" решений *от* стационарного).

Можно всю "теоретическую" часть (пп. 4.4.1–4) изложить на конкретном примере модели Вольтерры-Лотки. Но тогда возникает опасность того, что школьники не поймут суть идеи разделения переменных для дифференциальных уравнений на плоскости. Можно, напротив, предельно четко и ясно изложить "теорию", а пример дать конспективно, оставив его для самостоятельного разбора. Так или иначе, этот параграф завершает изучение основного модуля элективного курса, так что завершение должно быть достойным[14]!

[14] В знак этого все пункты параграфа помечены *двумя* восклицательными знаками!!

Часть II. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Тема 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЬЮТОНА $x'' = F$ (глава 5; 16 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 5

Эта самая обширная во всем элективном курсе **МА** тема относится по своему содержанию к тому разделу математики и математического анализа, который называется *классической механикой.* Поэтому в ней, кроме связей с курсом анализа и предыдущей частью электива **МА**, можно проследить прочные связи и с школьным или углубленным курсом физики, конкретно, механики. Точка зрения на теоретическую классическую механику как на раздел математики общепринята. А причина этого в весьма высокой степени абстракции в этой науке — начиная со столь неуловимого понятия, как *материальная точка* (меньше атома!). Кстати сказать, *масса* ее (тоже абстракция!) у нас большей частью будет приниматься равной 1.

Основной объект исследования в теме — дифференциальное уравнение (второй закон) Ньютона при движении по прямой в заданном силовом поле, $x'' = F = F(x, x', t)$, или соответствующей системы дифференциальных уравнений Ньютона, $x' = v$, $v' = F$.

Если система, как говорят, *консервативная*, т. е. $F = F(x)$ (сила определяется только положением точки и не зависит ни от скорости, ни от времени), то в системе уравнений Ньютона переменные разделяются и мы находим ее *первый интеграл*, т. е. закон сохранения некоторой величины, $\frac{1}{2}v^2 + U(x) = E(x, v, U' = -F(x)$, которую принято называть *энергией.* Почему, какова связь этого понятия с понятием *работы* (*против* переменной силы) — все это обсуждается в § 5.1.

Отметим, что в этом параграфе в целом пункте 5.1.5 рассматривается "*культурно-исторический дискурс*" предмета, обсуждается история дифференциальных уравнений (нельзя сказать, что такого нет в других параграфах учебного пособия, но в них такой дискурс находится как бы на заднем плане, в рамках комментариев и примечаний к математическому тексту).

В § 5.2 показано, как, используя закон сохранения полной механической энергии использовать для интегрирования дифференциального уравнения Ньютона, его решения $t = t(x; C, h)$ в квадратурах с последующим "алгебраическим" разрешением уравнения относительно x, т. е., в принципе, отысканием возможных *законов движения* $x = x(t) = x(t; C, h)$. Реально такая программа осуществима лишь в некоторых частных случаях. Они продемонстрированы далее на примерах *гармонического осциллятора* (§ 5.3) и движения под действием *линейной отталкивающей силы* (§ 5.6).

На самом деле закон сохранения энергии, точнее, его интерпретация, помогает понять характер фазовых траекторий на основе сопоставления исследуемой системы с моделью "шарик в желобе" из вводного параграфа § 1.2. Достаточно представить себе катание шарика в желобе, "рельеф" или "профиль" которого имеет форму графика *потенциальной энергии* $u = U(x)$. Здесь у вас появятся и *потенциальные ямы*, и, наоборот, "*потенциальные горки*", и устойчивые и неустойчивые положения равновесия (на дне ямки или на вершине горки, или на месте "маленького горизонтального плато" на склоне ямки или горки!).

Посвященный гармоническим колебаниям § 5.3 содержит, кроме всего прочего, начатое еще в § 1.2 — кинематическим выводом формул для производной косинуса и синуса, — приложение дифференциального уравнения к прочим свойствам тригонометрических функций.

Простой и интересный § 5.4 содержит все или почти все, относящееся к сложению когерентных гармонических колебаний — от трехфазной системы токов до интерференции волн. Не менее интересный, но чуть более сложный § 5.5 посвящен точному анализу вынужденных колебаний (под воздействием гармонической "накачки", т. е. внешней вынуждающей силы). Предсказываются и анализируются явления резонанса и биений.

Как в § 5.3 движение под воздействующей притягивающей линейной (упругой или псевдоупругой) силы связано с *круговыми*, т. е. тригонометрическими функциями, так в следующем § 5.6 движение в отталкивающем линейном поле связывается с функциями *гиперболическими.* Кроме того, что эти функции связаны с движением и во многом сходны с круговыми, мы полагаем, что гиперболические функции должен знать всякий математически грамотный и культурный школьник.

В § 5.7 разбираются решения обобщения эллиптического $x'' = -\omega^2 x$ и гиперболического $x'' = \lambda^2 x$ уравнений второго порядка: однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, $x'' + px' + qx = 0$. Отыскиваются его экспоненциальные решения, коли они существуют; доказывается теорема единственности решений в случае положительности дискриминанта характеристического уравнения. Приводимое элементарное доказательство "методом сведения к повторному дифференцированию" с использованием теоремы Виета предложил около 1980 г. известный методист и автор одного из действующих учебников по алгебре и началам анализа (под ред. А. Н. Колмогорова) *Борис Михайлович Ивлев* (1946–1990). В случае отрицательного дискриминанта, разбираемом уже в следующем параграфе, мы как бы угадываем решение (или "подгоняем под ответ"); единственность в этом случае следует из результатов упражнений к главе (105(3) и 106)

И в финальном параграфе 5.8 рассматриваются довольно тонкие вопросы, связанные с колебаниями гармонического осциллятора, помещенного в вязкую среду, в том числе (факультативно) с вынужденными колебаниями в такой среде, когда возникает не идеальный, как в § 5.5, а реальный резонанс.

§ 5.1. Закон сохранения энергии

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.1.0	”Введение в параграф” (предварительные замечания)	!	
5.1.1	Энергия как первый интеграл одномерной системы Ньютона	!!	
5.1.2	Работа переменной силы	!!	**У**
5.1.3	Потенциальная энергия одномерного силового поля	!!	
5.1.4	Закон сохранения полной механической энергии	!!	
5.1.5	История дифференциальных уравнений	!+	

Начальный параграф главы нужно начать ”за здравие”, тем более, что содержание параграфа позволяет это сделать — оно не просто интересное, оно ”захватывающее”, — конечно, если его и подать адекватным образом.

В пункте 5.1.1 с помощью формализма Лейбница получается *закон сохранения энергии* (иногда в книжках по механике этот закон просто выписывается и затем проверяется — при этом непонятно, откуда и как берется формула для энергии; у нас формула получается *автоматически* и неизбежно).

В следующих двух пунктах объясняется, что такое *работа против силы*, и показывается, что она равна приращению потенциальной энергии. Разбираются простейшие примеры. В п. 5.1.4 как раз проверяется закон сохранения энергии (как то было упомянуто выше; обратим внимание, что это, вообще-то, излишне, если мы верим в формализм Лейбница из п. 5.1.1 — а мы верим, ибо в главе 4 его обосновали — как раз в таких случаях).

Что касается культурно-исторического дискурса — исторического очерка из п. 5.1.5, — то его лучше всего кратко прокомментировать и оставить школьникам для самостоятельного прочтения.

§ 5.2. Фазовые портреты и интегрирование уравнения Ньютона

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.2.0	”Введение в параграф” (предварительные замечания)	!	
5.2.1	Фазовые траектории и линии уровня энергии на фазовой плоскости	!!	
5.2.2	Скорость убегания и вторая космическая скорость	!+	**У**
5.2.3	Схема интегрирования уравнения Ньютона	!	*
5.2.4	Обоснование схемы интегрирования уравнения Ньютона	!	*
5.2.5	О разрешимости и свойствах решений уравнения Ньютона	!	
5.2.6	Наглядная интерпретация одномерных консервативных систем	!!	

О фазовых портретах уже была речь во вводном параграфе 1.2, и в пункте 5.2.1 это понятие повторяется и связывается с картинкой *линий уровня* полной механической энергии. Как пример, в п. 5.2.2 приводится портрет движения по лучу притягиваемой по закону всемирного тяготения материальной точки. В связи с этим примером выводится формула для скорости убегания.

Материал следующих двух пунктах довольно громоздкий, соответственно чему помечен звездочкой. Школьникам заведомо нужно показать основной шаг в решении, в смысле сведения к паре интегрируемых в квадратурах уравнений, дифференциального уравнения Ньютона:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = h \iff (x')^2 = \frac{2}{m}\big(h - U(x)\big) \iff x' = \pm\alpha\sqrt{h - U(x)}.$$

Пункт 5.2.5, скорее всего, факультативен — пропустив его, стоит вернуться к наглядной интерпретации решений уравнений Ньютона с помощью модели "шарик в желобе" из п. 5.2.6 (однако, не вдаваясь в тонкости насчет обобщенной координаты!). С этой интерпретацией как раз можно и связать материал пп. 5.2.3–5.

§ 5.3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний $x'' = -\omega^2 x$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.3.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.3.1	Математический маятник: малые колебания	!	
5.3.2	Фазовый портрет гармонического осциллятора	!!	
5.3.3	Решения уравнения гармонических колебаний. Теорема единственности	!!	**У**
5.3.4	Следствия из теоремы единственности: свойства косинуса и синуса	!+	
5.3.5	Дальнейшие следствия: формула вспомогательного аргумента	!!	
5.3.6	Канонический вид и параметры гармонических колебаний	!!	**У**
5.3.7*	Интегрирование дифференциального уравнения гармонических колебаний	$\sim$	**Ф**

Это первый из трех интереснейших параграфов (§§ 5.3–5), посвященных гармоническим и вынужденным колебаниям в идеальной среде — при отсутствии трения.

Первые два пункта достаточно прозрачны и в особых комментариях не нуждаются. В весьма содержательном п. 5.3.3 изящно, с использованием как раз закона сохранения энергии доказывается теорема единственности решений дифференциального уравнения $x'' = -\omega^2 x$ в смысле представимости любого его решения в *стандартном виде* $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

Большой интерес обычно вызывают у школьников следующие два пункта, в которых теорема единственности используется для вывода тригонометрический формул (тождеств). В частности, в п. 5.3.5 обсуждается весьма полезная *формула* *вспомогательного аргумента*, в следующем пункте трактуемая как *канонический вид* гармонических колебаний $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. В связи с ним вводится, по-видимому, уже известная школьникам (из курса физики) терминология: частота (циклическая!), амплитуда, фаза (аргумент $\omega t + \varphi$) и начальная фаза φ.

В заключение, в факультативном пункте 5.3.7, показано, как придти к закону гармонических колебаний *непосредственным* интегрированием дифференциального уравнения Ньютона.

§ 5.4. Сложение гармонических колебаний

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.4.1	Теорема о сложении гармонических колебаний	!!	
5.4.2	Векторные диаграммы гармонических колебаний	!!	
5.4.3	Пример: трехфазная система токов	!+	
5.4.4	Амплитуда суммы гармонических колебаний	!!	

В первых двух пунктах даны *три* доказательства того факта, что сумма когерентных гармонических колебаний является также гармоническим колебанием той же частоты, причем все три рассуждения весьма красивы (это уже красота вдвойне; см. выше комментарии к § 3.4). Третье доказательство опирается на весьма наглядное представление гармонических колебаний с помощью *векторных диаграмм*.

Эти же диаграммы ведут к замечательному примеру из п. 5.4.3: к изобретенной русским инженером *Михаилом Иосифовичем Доливо-Добровольским* трехфазной системе токов.

С помощью векторных диаграмм становится очевидным, что синфазные колебания максимально усиливают друг друга, а колебания в противофазе — максимально ослабляют друг друга (п. 5.4.4). Эти соображения будут существенно использоваться в следующей главе.

§ 5.5. Вынужденные колебания, резонанс и биения

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.5.1	Уравнение вынужденных колебаний и его решения	!!	
5.5.2	Анализ решений: резонанс и дрожание	!!	
5.5.3	Анализ решений: резонансное раскачивание и биения	!!	
5.5.4	Точный резонанс	!	

В этом параграфе рассматривается, что получится, когда на собственные колебания под действием упругой силы с т. н. *собственной* циклической частотой ω воздействует внешняя вынуждающая сила (физики подобный внешний воздействующий фактор называют "накачкой"; мы уже встречались с такой накачкой из внешнего источника нейтронов при разборе модели атомного реактора в § 3.4), причем тоже меняющейся гармонически с какой-то "внешней" частотой ν, вообще говоря, отличной от ω. Уравнение вынужденных колебаний — это неоднородное линейное уравнение второго порядка, и к его решению применим известный нам из § 3.4 *метод Д'Аламбера*, что и делается в п. 5.5.1.

В результате при $\nu \neq \omega$ общее решение записывается как сумма двух гармонических колебаний разных частот ω и ν. В следующих двух пунктах это решение математически анализируется и интерпретируется физически. Здесь хорошо бы показать и резонанс, и дрожание на какой-нибудь реальной модели — на худой конец, можно привязать к легкому шарику резинку с небольшим коэффициентом жесткости (т. е. *не* тугую).

В последнем пункте 5.5.4 рассматривается идеальная ситуация *точного* резонанса, когда $\nu = \omega$. Тогда амплитуда колебаний возрастает по линейному закону, стремясь к бесконечности. Реально такое, разумеется, не происходит: либо резинка лопнет, либо трение помешает!

§ 5.6. Анализ уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Гиперболические функции

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.6.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.6.1	Решения уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Теорема единственности	!!	
5.6.2	Второе доказательство теоремы единственности	!+	
5.6.3	Уравнение гиперболических косинуса и синуса	!!	**У**
5.6.4	Неустойчивые положения равновесия	!!	
5.6.5	Фазовый портрет уравнения $x'' = \lambda^2 x$. Качественное описание	!	
5.6.6	Движение по фазовым траекториям	!+	
5.6.7*	Непосредственное интегрирование уравнения $x'' = \lambda^2 x$	!	**Ф**
5.6.8*	Интегрирование ДУ уравнения математического маятника	!+	

В окрестности положения равновесия системы, в котором сила $F = F(x)$ обращается в нуль, функцию $F(x)$ можно *линеаризовать*, т. е. заменить ее линейным приближением. Если положение равновесия считать началом отсчета, так что $F(0) = 0$, то при $F'(0) = k \neq 0$ линейное приближение приводит к линейной силе $F(x) = kx$, псевдоупругой при $k < 0$ и отталкивающей от положения равновесия при $k > 0$. Последний случай и является предметом рассмотрения в этом простом, но довольно неожиданном по математическому содержанию параграфе.

Неожиданности связаны со свойствами гиперболических функций, которые столь же естественно возникают при исследовании этой системы, как тригонометрические — при исследовании гармонических колебаний.

Сначала, впрочем, решения гиперболического уравнения $x'' = \lambda^2 x$ выписываются через экспоненты $\mathrm{e}^{\pm\lambda t}$, и двумя способами доказывается теорема единственности (т. е. что решений, отличных от $a\mathrm{e}^{\lambda t} + b\mathrm{e}\lambda t$, уравнение не имеет). Эти два красивых способа навеяны уже применявшимися ранее соображениями и изложены в пп. 5.6.1–2.

Затем (в п. 5.6.3) как раз вводятся гиперболические косинус и синус, которые чуть-чуть исследуются (другие их свойства даны среди упражнений) и связываются с решениями дифференциального уравнения $x'' = x$.

В пункте 5.6.4 показаны реальные ситуации, когда возникает примерно линейная отталкивающая сила: шарик на горке и математический маятник в "верхнем положении равновесия" (мы "закавычили" последние слова, ибо ох как трудно удержать маятник в таком положении!).

В пп. 5.6.5–6 анализируется фазовый портрет системы — получается *седло*, — и, *самое главное*, устанавливается, что время движения фазовой точки по *сепаратрисам* седла (линиям, разделяющим фазовые траектории различного поведения) *бесконечно* (п. 5.6.6).

В факультативном пункте 5.6.7 приводится аналитическое интегрирование гиперболического уравнения, которое вполне можно оставить для самостоятельной проработки. А вот последний, также помеченный как факультативный, пункт 5.6.8, в котором рассматривается полный фазовый портрет математического маятника (он *периодический* по циклической координате $x \mod 2\pi$, и лучше его изображать на *цилиндре*!), при возможности, хорошо бы разобрать вместе со школьниками.

§ 5.7. Анализ уравнения $x'' + px' + qx = 0$

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.7.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.7.1	Общее уравнение второго порядка. Достижения Эйлера	!+	**Ф**
5.7.2	Характеристическое уравнение	!!	**У**
5.7.3	Случай положительного дискриминанта	!!	**У**
5.7.4	Случай нулевого дискриминанта	!+	
5.7.5	Случай отрицательного дискриминанта	!	

Если рассматривать, например, гармонические колебания при наличии (вязкого) трения, то сразу возникает "полное" (однородное) *линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*, $x'' = -\omega^2 x - \lambda x'$ или $x'' + \lambda x' + \omega^2 x = 0$. Поэтому представляет интерес исследование *общего* такого уравнения $x'' + px' + qx = 0$, что и делается в этом параграфе.

Первый пункт параграфа дан ради повышения общей эрудированности школьников — в нем речь о том, как *Леонард Эйлер* связал обычные тригонометрические функции, подобно гиперболическим, с экспонентой, но только от *мнимого* аргумента. Здесь же в комментариях указывается, почему мнимые числа неизбежно возникают в задачах алгебры (первым их и манипуляции с ними записал знаменитый *Джероламо Кардано* (1501–1576)). Этот пункт можно оставить и для самодеятельного прочтения учащимися.

В п. 5.7.2 делается решающий шаг: при отыскании решения в виде экспоненты $e^{\lambda t}$ получается квадратное уравнение относительно λ, называемое *характеристическим*, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

В случае положительного дискриминанта оно имеет два корня $\lambda_{1,2}$, и в п. 5.7.3 доказывается, что *все* решения дифференциального уравнения исчерпываются линейными комбинациями соответствующих экспонент, $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$. Эта теорема единственности доказывается элементарно, с помощью предложенного Б. М. Ивлевым трюка, основанного на теореме Виета. Именно, левая часть уравнения переписывается через повторное дифференцирование,

$$x'' - (\lambda_1 + \lambda_2)x' + \lambda_1\lambda_2 = (x' - \lambda_1 x)' - \lambda_2(x' - \lambda_1 x),$$

и остается записать решение "внешнего" уравнения $z' - \lambda_2 z = 0$, где $z = x' - \lambda_1 x$, а затем воспользоваться первой теоремой Д'Аламбера.

Этот же прием, вместе с методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной) позволяет справиться и со случаем нулевого дискриминанта (п. 5.7.4). Но вот при отрицательном дискриминанте характеристического уравнения обычные экспоненты решениями быть не могут — приходится подбирать решения, исходя из интуитивных соображений (здесь-то и могут помочь достижения Эйлера из п. 5.7.1). Этот подбор-подгонка в п. 5.7.5 только обозначаются и оставляются до последнего параграфа главы.

§ 5.8. Колебания в упруго-вязкой среде

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.8.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
5.8.1	Уравнение колебаний в упруго-вязкой среде	!!	
5.8.2	Случай сильного трения: апериодическое затухание	!!	
5.8.3	Промежуточный случай: тоже апериодическое затухание	!+	
5.8.4	Случай малого трения: затухающие колебания	!!	
5.8.5*	Случай малого трения: формальный подход	!	**Ф**
5.8.6*	ДУ вынужденных колебаний с трением: общий вид и поведение решений	!+	
5.8.7*	Частное решение ДУ вынужденных колебаний с трением	!+	
5.8.8*	Анализ частного решения	!+	

В этом параграфе мы возвращаемся к уравнению колебаний в вязкой среде, с которого мы начали предыдущий параграф. Уравнение теперь записывается в виде $x'' + 2\alpha x' + \omega^2 x = 0$ (п. 5.8.1), и легко анализируется в случае относительно сильного трения, когда $\alpha^2 - \omega^2 > 0$ — получается апериодическое затухание (за бесконечно долгое время! См. п. 5.8.2). Аналогично ведет себя осциллятор и в пограничном случае $\alpha = \omega$ (п. 5.8.3). А вот при малом трении ($\alpha < \omega$) уже и приходится исхитряться.

Это мы успешно проделываем в п. 5.8.4, получая, что в этом случае (когда дискриминант характеристического уравнения отрицателен) осуществляются затухающие колебания с экспоненциально убывающей амплитудой и неизменной частотой $\omega_1 < \omega$.

Пункт 5.8.5, где мы, подобно Эйлеру, смело оперируем с *комплексными числами*, сугубо факультативный. А вот три последних пункта параграфа, также помеченные как дополнительные, стоило бы хоть кратко разобрать с учащимися — в них речь о вынужденных колебаниях в реальной ситуации, т. е. при наличии трения.

Тема 6. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ (глава 6; 4 ч)

Общие замечания и рекомендации по теме 6

Эта краткая, довольно простая и отчасти "завлекательная" тема, на наш взгляд, достойно завершает дополнительный модуль (часть II) "Динамические системы". Если предыдущая глава относилась к одномерной классической механике и обыкновенным[15] дифференциальным уравнениям, то настоящая глава апеллирует уже к одномерной *механике сплошных сред* и *дифференциальным уравнениям в частных производных.*

Это ни в коей мере не должно смущать или пугать учителя — школьников данная тема отнюдь не пугает: как показывает опыт, они вполне понимают и усваивают содержание этой главы.

§ 6.1. Бегущие волны и волновое уравнение

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
5.1.0	"Введение в параграф" (предварительные замечания)	!	
6.1.1	Одномерные волны и гармонические колебания	!!	
6.1.2	Интерференция одномерных волн	!!	
6.1.3	Интерференция двумерных волн	!	
6.1.4	Волновое уравнение	!!	

В этом параграфе вводится понятие одномерной бегущей волны фиксированного профиля, рассматриваются синусоидальные волны и связанные с ними гармонические колебания. С помощью стандартных тригонометрических формул анализируется явление интерференции одномерных волн, приводящее к явлению стоячих волн ("мертвой зыби"). С помощью векторных диаграмм гармонических колебаний рассматривается интерференционная картина для двух плоских круговых волн.

[15] В данном случае эпитет "обыкновенные" — математический термин: в противоположность дифференциальным уравнениям *в частных производных.*

В заключение из записи бегущих со скоростью v волн, $u(x,t) = f(x \mp vt)$, получается *волновое уравнение* $u''_{tt} = v^2 u''_{xx}$.

§ 6.2. Колебания струны. Музыкальная акустика

П.П.	Название пункта	Спец.	Прим.
6.2.1	Уравнение упругой струны	!!	
6.2.2	Струна с закрепленным концом: отражение и интерференция волн	!!	
6.2.3	Струна с закрепленными концами: спектр собственных частот	!!	
6.2.4	Несколько слов о музыкальной акустике	!	

А в заключительном параграфе с помощью все того же *второго закона Ньютона* для маленького кусочка натянутой струны, для ее поперечных колебаний, получается именно волновое уравнение — со всеми вытекающими отсюда последствиями. Рассматривается отражение волны в струне с одним закрепленным концом и интерференция падающей и отраженных волн. На основе этого выясняется, какие волны могут возбуждаться в струне с двумя закрепленными концами — получается дискретный спектр собственных частот такой струны. А в самое заключение примерно объясняется, что такое "музыкальная акустика".

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

Математический Клуб Негева

М. Амит, И. Хейфец, П. Самовол

В заметке рассказано о математическом клубе Негева (Израиль), ведущего работу со школьниками среднего и старшего возраста.

При Университете им. Бен-Гуриона в Негеве (Израиль) создан Математический Клуб, в настоящее время объединяющий около 350 школьников из города Беер-Шевы и его окрестностей в возрасте от 10 до 17 лет.

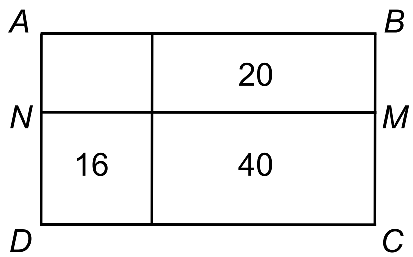
В 1998 году педагогическая общественность осознала факт того, что Юг Израиля — население пустыни Негев, — практически отсутствовал на "математической карте государства". Его представители чрезвычайно редко появлялись среди призеров израильских математических олимпиад. По проводимым социалогическим опросам школьники Негева в большинстве своем воспринимали математику, как нужный, но чрезвычайно нудный и неинтересный предмет...

В Израиле ежегодно проводится 7—8 общеизраильских олимпиад разных видов, включая инициированный из Москвы "Турнир городов". В настоящее время примерно треть призовых мест на этих олимпиадах достается членам Математического Клуба Негева, который фактически ворвался в математическую жизнь Израиля, установил и продолжает устанавливать новые стандарты в работе с одаренными школьниками.

Ежегодный набор новых членов Клуба носит многоступенчатый характер. На двух-трех этапах отбора школьникам предлагается от трех до пяти тестов различных типов: американские с выбором одного правильного ответа, открытые, в которых требуется найти и обосновать ответ, и творческие, в которых предлагаются задачи для анализа и исследования. Окончательное решение приемная комиссия принимает на основании совокупности результатов учащегося. При этом обнаружение яркой идеи даже в решении одной задачи иногда бывает достаточным основанием для зачисления в Клуб. Иногда приглашение учиться в Клубе получает школьник, не прошедший отбор, но проявляющий огромное желание стать членом Клуба. Ведь главная цель отбора — найти не только способных к математике, но и способных на длительное интеллектуальное усилие, амбициозных и, главное, активно желающих заниматься школьников. Опыт показал, что такая система отбора действительно позволяет не потерять наиболее перспективных ребят.

Ниже приводится по одному примеру каждого типа тестов.

1. Прямоугольник ABCD разбили на 4 прямоугольника двумя прямыми, параллельными сторонам. Известны площади 3-х из 4-х образовавшихся прямоугольников (см. чертеж). Найти площадь прямоугольника ABMN.



Варианты ответов:

а) 8 *в)* 24

в) 84 *г)* 28

д) 30

2. Найти два числа, для которых одновременно выполняются 4 следующих условия:
а) сумма не является целым числом.
б) разность — целое число.
в) произведение не является целым числом.
г) частное — целое число.

3. а) Можно ли выбрать из целых чисел от 1 до 7 три числа так, чтобы разность между любыми двумя из них делилась на 3?
б) Всегда ли из 7-и целых чисел можно выбрать три числа так, чтобы разность между любыми двумя из них делилась на 3?
в) Можно ли из чисел 19 , 44 , 11 , 93 , 28 , 73 выбрать три числа так, чтобы разность между любыми двумя из них делилась на 3?
г) Всегда ли из 6-и целых чисел можно выбрать три числа так, чтобы разность между любыми двумя из них делилась на 3?

В первый год занятий группы формируются, как правило, по параллелям, но к третьему году восьмиклассник может оказаться, например, в одной группе с одиннадцатиклассником.

Примеры тем I-ого года: задачи с целыми числами, логические задачи, математические игры, геометрические головоломки (комбинаторные, разрезание и др.), интересные свойства дробей, алгоритмы, ТРИЗ (теория решения изобретательских задач) и др.

Примеры тем II-ого года: в большинстве продолжение тем I года, а также последовательности, вероятность, как решать задачу (психологические аспекты и подходы), непрерывные дроби, фигурные числа, задачи на построение и др.

Примеры тем III-ого и следующих годов: введение в теорию чисел, введение в теорию множеств и логику, фракталы, введение в дискретную математику, основы линейной алгебры и др.

Формы занятий по каждой теме различны: от фронтальной до индивидуально-групповой, но всегда представляют собой активный диалог, а задания используются не для отработки навыков, а носят исследовательский характер.

Пример (навеян книгой Р.Смаллиана “Принцесса или тигр”): король помещает в каждой из двух комнат или принцессу или тигра (в каждой комнате обязательно есть кто-то один, но могут быть в обеих комнатах принцессы или в обеих тигры), и помещает на обеих дверях по объявлению, которые могут быть или оба истинны или оба ложны. Пленнику предлагается путем логических рассуждений выбрать комнату, в которой сидит принцесса. Задание состоит в том, чтобы придумать 2 объявления так, чтобы в конце концов оказалось, что в обеих комнатах сидят тигры.

Вся система занятий в Клубе разбита на пятинедельные циклы. Первые четыре недели в каждом цикле — тематические занятия.

Пятая неделя каждого цикла — особая. Она называется "днем специальных мероприятий". В этот день проводятся индивидуальные или командные олимпиады, игры: математический хоккей, матбой, брейн-ринг, математический морской бой, аукцион, эстафета математических станций, математический КВН, индивидуальные чемпионаты по математическим играм типа "крестики-нолики", "гекс" и др., а так же лекции приглашенных лекторов и выпуск стенгазеты. Этот день пользуется особой популярностью, и его всегда ждут с нетерпением. Кроме того, в этот день происходит награждение и раздача небольших призов отличившимся.

Ниже приводится описание одного командного соревнования (эстафета математических станций) и одной игры ("призма").

Эстафета математических станций.

Соревнование рассчитано на 60-75 мин. Для каждой эстафеты выбираются определенные станции (их количество от 3 до 5, как правило, 4). Названия станций: танграм, спички, найди ошибку, календарь, головоломки и др. указывают на тип заданий, предлагающихся на каждой станции.

В эстафете участвуют, как правило, 8-10 команд. На каждую станцию (т.е. в каждый кабинет) заходят одновременно 2-3 команды (4-5 человек в каждой), которые за 10-12 минут должны выполнить определенное число заданий.

За каждую станцию отвечает преподаватель и ассистент. На некоторых станциях, например, "найди ошибку", задания носят индивидуальный характер и тогда команде записывается средний результат участников. Каждые 15 минут команды одновременно переходят на следующую станцию, и таким образом итоги подводятся по совокупному результату команды на всех станциях.

Чемпионат по игре "Призма".

Это индивидуальное соревнование, которое проходит, в зависимости от количества участников, или по круговой системе (каждый с каждым — 2 партии, чтобы нивелировать преимущество первого (или второго) хода), или разбившись на 2 подгруппы со стыковыми играми (1-ый с1-ым, 2-ой со 2-ым и т.д.). Иногда соревнования проходили по швейцарской системе.

Описание игры. Поле для игры — лист бумаги с нарисованной проекцией прямой призмы (вариативность максимальна — можно использовать от треугольной до десяти -и более-угольной призмы).

Возьмем, к примеру, пятиугольную призму. В этом случае каждый участник своим ходом приписывает у свободной вершины натуральное число от 1 до 10 (повторяться запрещено), соблюдая следующее правило: сумма чисел, принадлежащих одному ребру, должна быть простым числом. Проигрышем считается невозможность сделать ход. Если расставлены все числа, результат считается ничейным.

Нам неизвестна выигрышная стратегия в общем случае, однако наиболее популярным считается принцип "создания помех" путем, например, выставления чисел разной четности у противоположных вершин одной боковой грани.

Для оценки деятельности каждого члена Клуба используется специальная система под названием "индивидуальный рейтинг" Рейтинг пересчитывается каждый раз, когда школьник как-то проявил себя: результативное участие в занятии, сдача творческих домашних заданий, успехи в соревнованиях и т.д. Особо высокая добавка к рейтингу начисляется за призовое место на всеизраильских олимпиадах. В условиях абсолютной необязательности выполнения каких бы то ни было заданий индивидуальный рейтинг является мощным стимулом для большинства школьников. В конце года школьники, лучшие по индивидуальному рейтингу, награждаются специальными призами.

Наиболее продвинутые объединяются в так называемую сборную. Основными темами занятий для этой группы являются темы, связанные с пропедевтикой университетских курсов, таких, как: теория чисел, введение в теорию множеств и логику, дискретная математика, алгебра.

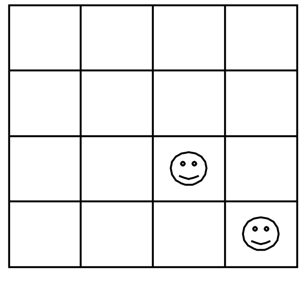
Те, кто признаются достаточно подготовленными, направляются на соответствующий университетский курс. За последние два года около десяти школьников 14—17 лет уже пошли по этому пути и их результаты оказались на уровне, а зачастую и превосходили результаты лучших студентов (средний балл по всем взятым курсам — 93 по 100-балльной системе).

Один из последних в учебном году **дней специальных мероприятий** традиционно посвящается годовой олимпиаде.Она организована следующим образом:

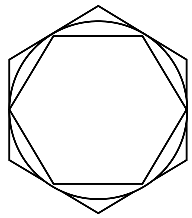
Каждый преподаватель готовит для каждой из групп, в которой он работал, 3 вопроса : элементарный в рамках пройденной темы, углубленный и нестандартный. Листы с вопросами **именные** (от каждого преподавателя).

Пример (из курса Сергея Вольского "Геометрические головоломки — задачи на разрезание, комбинаторные и т.п."):

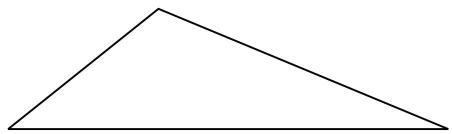
1. Разрежьте квадрат на 2 конгруэнтные фигуры так, чтобы каждая из них содержала по одной физиономии.



2. Найдите без применения вычислений отношение площадей вписанного и описанного правильных шестиугольников.



3. Разрежьте тупоугольный треугольник на 7 остроугольных *треугольников.*



Завершается учебный год Математическим фестивалем, на котором проводится: блиц-олимпиада (американский тест), короткий матбой на сцене, фрагмент математического КВНа, выставка лучших работ и результатов победителей различных соревнований, раздача призов и клубных маек, **исполнение клубного гимна.** На фестиваль обязательно приглашаются родители и учителя различных школ.

Финансовая поддержка Математического Клуба Негева осуществляется французским Фондом Сакта Раши и американским фондом Фохс (через Университет им. Бен-Гуриона).

Dr. Miriam Amit, Director of Center
for Science and Technology Education
Ben Gurion University of Negev,
Director of the mathematics club "Youth Kidumatica".
E-mail: amit@bgumail.bgu.ac.il

Josef Hefets, Project Manager
of the mathematics club "Youth Kidumatica".
E-mail: fainacfz@edu-negev.gov.il

Dr. Peter Samovol, lecturer of mathematics
mathematics club "Youth Kidumatica".
E-mail: Pet12@012.net.il

Задачи 16-й летней Конференции Турнира Городов

Предлагаем вниманию читателей задачи 16-й летней Конференции Турнира Городов, проходившей в августе 2004 г. в Беларуси. Публикация осуществлена на основе материалов сайта www.mccme.ru

«12»

Задачи предложены В. Прасоловым, М. Скопенковым и С. Дориченко

Вводные задачи

Пусть на клетчатой плоскости нарисован выпуклый многоугольник $M = A_1A_2 \ldots A_n$ с вершинами в узлах сетки (рис. 1 слева). Предположим, что внутри M расположен ровно один узел O. Отложим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{A_nA_1}$ от узла O и на каждом из полученных отрезков выберем ближайший к точке O узел. Соединяя последовательно выбранные n точек, получим некоторый многоугольник M^*, который называется *двойственным* к исходному многоугольнику (рис. 1 справа).

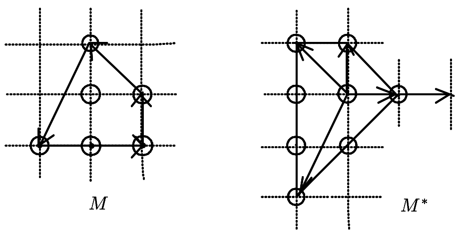


Рис. 1.

Данный цикл задач посвящен элементарному доказательству следующей теоремы, открытой всего несколько лет назад:

Теорема о 12. *Пусть внутри выпуклого многоугольника M расположен ровно один узел O, на его границе — b узлов, а на границе многоугольника M^* — b^* узлов. Тогда*

$$b + b^* = 12.$$

0. Нарисуйте многоугольники, двойственные к изображенным на рис. 2. Сколько узлов расположено внутри M^* в каждом случае? Чему равны M^{**}? Как связаны площади M и M^*? Возможно ли равенство $M = M^*$? Сформулируйте Ваши наблюдения и предположения, попытайтесь их доказать.

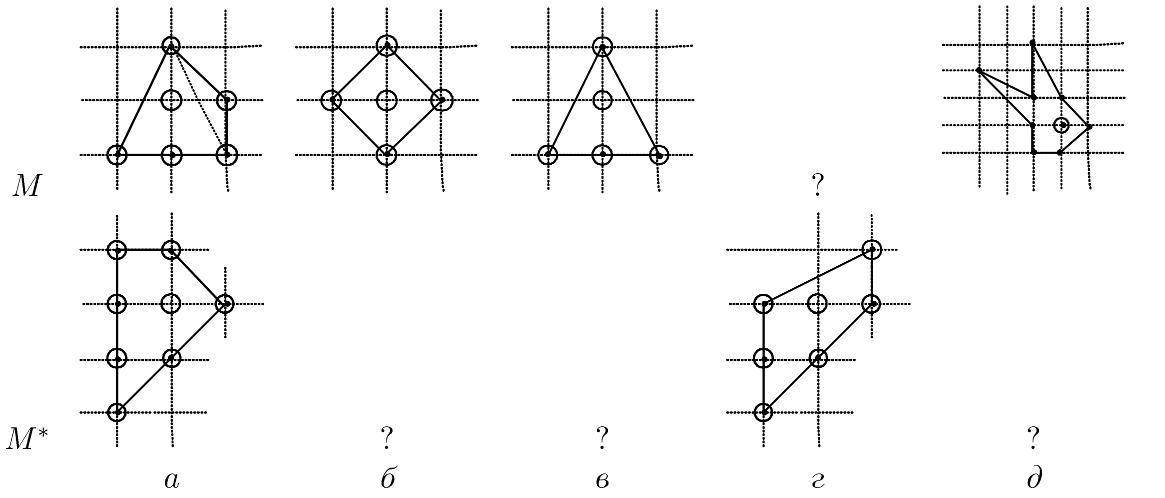


Рис. 2.

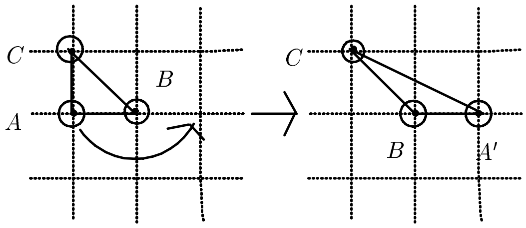


Рис. 3.

1. Внутри треугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число узлов может быть на границе?

2. Докажите теорему о 12 для параллелограмма с $b = 4$.

Простым треугольником назовем треугольник, не содержащий других узлов, кроме вершин (как внутри, так и на сторонах). *Прыжок* (рис. 3) — это преобразование, при котором вершина A треугольника ABC заменяется на точку, симметричную ей относительно B.

3. а) Площадь треугольника при прыжке не меняется;

б) Из простого треугольника при прыжке получается простой;

в) У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$, который мы назовем *минимальным*);

г) Из любого простого не минимального треугольника одним прыжком можно получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

д) Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный;

е) Площадь простого треугольника равна 1/2.

4. а) Выпуклый четырехугольник, не содержащий узлов (кроме вершин), — параллелограмм.

б) Существует ли выпуклый пятиугольник, не содержащий внутри себя узлов?

в) Внутри выпуклого многоугольника ровно 1 узел. Какое наибольшее число вершин он может иметь?

5. а) Если на сторонах треугольника нет узлов (кроме вершин), а внутри него — ровно 1 узел, то это — точка пересечения медиан треугольника.

б) Докажите теорему о 12 для треугольника с $b = 3$.

Пусть S — площадь многоугольника, внутри которого — i узлов, а на границе — b узлов.

6. а) Рассмотрим триангуляцию многоугольника с вершинами в данных $b+i$ узлах. Сколько в ней может быть треугольников?

б) Докажите *формулу Пика:*

$$S = i + \frac{b}{2} - 1.$$

7. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так будет, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

8. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно 1 раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

б) Какую наибольшую длину она может иметь?

Удалением треугольника назовем операцию отрезания от многоугольника M простого треугольника, имеющего с ним две общие стороны. Например, из многоугольника на рис. 2а удалением треугольника получается многоугольник на рис. 2в. Обратную операцию назовем *добавлением треугольника.*

9. Верно ли, что любые два многоугольника

а) на рис. 2; б) без узлов внутри; в) выпуклые с ровно 1 узлом внутри; получаются друг из друга серией удалений и добавлений треугольников?

Основные задачи

Пусть O — начало декартовой системы координат. Сопоставим каждой точке $A(a, b) \neq O$ прямую A^*, задаваемую уравнением $ax+by = 1$. Эта прямая называется *двойственной* к данной точке. Наоборот, каждой прямой $ax + by = 1$ сопоставим *двойственную* точку (a, b).

10. Нарисуйте фигуры, двойственные к фигурам на рис. 4. Проверьте, что на рис. 4а $l^* \in A^*$ и что на рис. 4б прямые A^*, B^*, C^* проходят через одну точку. Докажите, что для любой точки $C \neq O$ прямая C^* перпендикулярна OC и проходит через точку $C' \in OC$, такую что $OC \cdot OC' = 1$.

Для многоугольника $M = A_1 \dots A_n$ положим $M^* = (A_1A_2)^* \dots (A_nA_1)^*$.

11. Проверьте, что это определение двойственного многоугольника согласуется с предыдущим (с точностью до поворота на $90°$). Докажите равенство $M^{**} = M$.

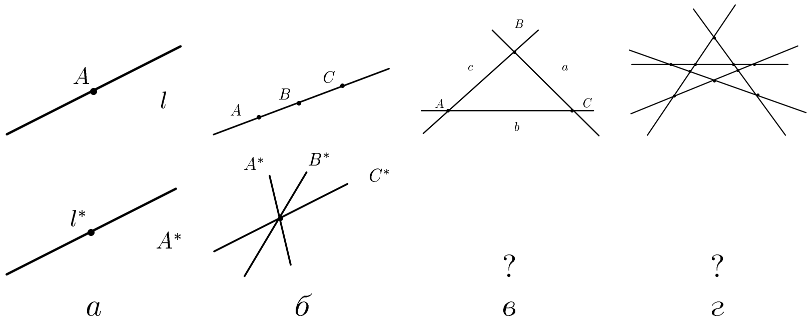


Рис. 4.

12. Если внутри M расположен ровно 1 узел, то внутри M^* также расположен ровно 1 узел.

13. а) При удалении треугольника из M происходит добавление треугольника к M^*.

б) Из любого выпуклого многоугольника с ровно одним узлом внутри последовательностью удалений/добавлений треугольников можно получить параллелограмм с $b = 4$.

в) Докажите теорему о 12.

14. Какая фигура будет двойственной к невыпуклому многоугольнику (рис. 2д)? При каком условии на M два определения M^* равносильны? Как обобщить теорему о 12 на невыпуклые многоугольники?

Двойственная кривая γ^* — это ГМТ двойственных ко всем касательным к кривой γ.

15. Какая кривая двойственна единичной окружности? Завершите рис. 5. Верно ли, что $\gamma^{**} = \gamma$?

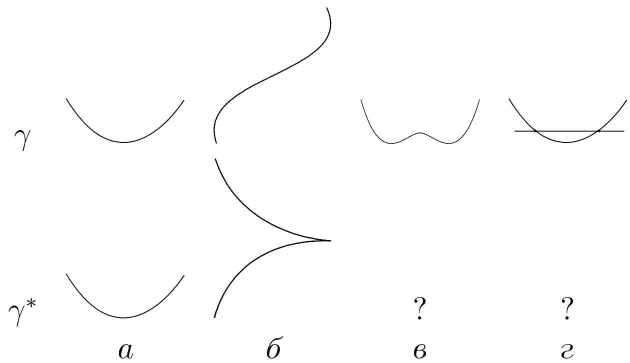


Рис. 5.

16*. Как обобщить теорему о 12 на многоугольники с более чем одним узлом внутри?

Дополнительные задачи

17. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать?

18. а) Обозначим через kM многоугольник, который получается из M гомотетией с коэффициентом k с центром в начале координат. Докажите формулу $2S(M) = n(2M) - 2n(M) + 1$, где $n(M)$ — число узлов внутри и на границе M.

б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для объема многогранника в пространстве.

19. Придумайте оценку для максимального числа вершин выпуклого многоугольника через число узлов внутри него.

Аффинным преобразованием назовем преобразование плоскости, заданное формулой

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

сохраняющее целочисленную решетку (это означает, что числа a, b, c, d — целые и $ad - bc = \pm 1$).

20. Классифицируйте выпуклые многоугольники

а) без узлов внутри; б) с ровно одним узлом внутри;

с точностью до аффинных преобразований.

21. а) Найдите образ прямой $y = ax + b$ при преобразовании $(x, y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y})$.

б) Число решений уравнения $x^2 + ax + b = 0$ ($x^3 + ax + b = 0$) равно числу касательных, которые можно провести к кривой $x^2 = 4y$ ($4x^3 = -27y^2$) из точки (a, b).

в) Сколько решений имеет уравнение $x^3 + ax + b = 0$ в зависимости от a и b?

г) Попытайтесь исследовать таким образом другие уравнения.

Литература

[1] Н. Б. Васильев. Вокруг формулы Пика. Квант, 12. 1974.

[2] Б. Поонен и Ф. Родригес-Виллегас. Решеточные многоугольники и число 12 (на англ. яз.) Amer. Math. Mon. 107:3. 2000. 238–250

[3] Д. Реповш, М. Скопенков и М. Ценцель. Элементарное доказательство теоремы о 12 целых точках (представлено в Мат. Заметки)

[4] С. Л. Табачников. Геометрия уравнений. Квант, 10, 1988.

Автоматы и конечно-определенные полугруппы

И. А. Иванов – Погодаев, А. Я. Белов – Канель

Введение

В настоящем проекте ставится задача построения систем, задаваемых конечным образом, но обладающих достаточно сложной структурой и экзотическими свойствами. Это интересно в связи с традиционными вопросами высшей алгебры о структуре конечно-определенных алгебраических систем: групп, полугрупп, колец. Например, важным вопросом является описание условий на ниль-кольцо, при которых оно будет нильпотентным. Интересен также аналогичный вопрос о полугруппах. Для того, чтобы подобраться к полугруппам, нужно будет изучить несколько определений и примеров.

Проект состоит из 3 циклов. Младшие задачи в каждом цикле достаточно просты, но являются необходимыми для развития идей старших задач. Последние задачи циклов считаются основными. Главным результатом является построение конечно-определенной ненильпотентной ниль-полугруппы (Цикл C). Для перехода к полугруппам полезна тренировка на автоматах с конечной памятью (цикл A). Цикл B служит для использования техники в конечно-определенных полугруппах, основной результат этого цикла (построение конечно-определенной полугруппы с нецелой размерностью Гельфанда – Кириллова) имеет самостоятельный интерес.

Цикл A. Автоматы и совместные стратегии

В первых (вводных) задачах цикла изучается стандартный конечный автомат: робот, перемещающийся по клеточной плоскости. Робот это механизм, производящий заранее определенный набор действий по определенной программе. Робот может делать следующее:

1. Перемещаться вперед (в соседнюю клетку);
2. Поворачиваться на месте на 90 градусов;
3. Ставить флажок в клетку, где находится (если флажок у него есть);
4. Проверять наличие флажка в своей клетке.
5. Брать флажок из своей клетки.

Наличие у робота флажков (и их количество) оговаривается заранее. Программа состоит из пронумерованного упорядоченного набора инструкций для робота, причем некоторые инструкции могут заключаться в переходе к другой инструкции. Мы будем ставить для робота задачи обхода, состоящие в том чтобы обойти, то есть побывать в каждой клетке некоторой области.

Сначала выясним некоторые возможности робота.

Пример. Докажем, что робот с двумя флажками может обойти ленту — бесконечную полосу с шириной в 1 клетку. Пусть в начале робот находится в клетке с номером 0 с двумя флажками. Построим программу робота.

1. Поставить флажок.
2. Перейти в клетку 1.
3. Поставить флажок.

Теперь нужно организовать «челночное» движение робота между флажками, с попутным увеличением расстояния между ними. То есть, середина отрезка между флажками остается на месте, а флажки робот «расталкивает» в разные стороны. Этого добиваемся с помощью следующей программы:

4. Повернуться на месте 2 раза. (разворачиваемся на 180 градусов)
5. Пройти вперед.
6. Проверить наличие флажка.
7. Если флажка нет — перейти к 5.
8. Взять флажок и перейти на одну клетку вперед.
9. Положить флажок и перейти к 4.

Легко видеть, что робот побывает в каждой клетке ленты.

Интересен вопрос, может ли робот без флажков обойти ленту? Оказывется, нет. Чтобы доказать это, необходимо формализовать конструкцию робота. Ясно, что действие, которое робот выполнит в следующий момент, полностью зависит от номера инструкции, которую должен выполнить в данный момент робот и от наличия — отсутствия в клетке флажка. Назовем эти факторы *внутренним состоянием робота.* Ясно, что у робота конечное число возможных внутренних состояний. Выполнив какое-либо действие, робот, вообще говоря, его меняет. По принципу Дирихле, через какое-то время внутреннее состояние робота повторится. Пусть, прошло t секунд и, по сравнению с первым моментом, когда у него было такое состояние, робот сдвинулся вправо на расстояние a. Отметим, что прошло конечное время, и поэтому существует клетка K, левее начальной, где робот еще не был. Поскольку состояние робота такое же, как t секунд назад, еще через t секунд робот сдвинется еще на a вправо, опять не посетив эту клетку. Легко видеть, что далее робот будет действовать, периодически сдвигаясь вправо, и клетку K он не посетит никогда.

А0. *Докажите, что робот с одним флажком ленту обойти не сможет.*

Указание. Рассмотрите отдельно случаи: 1) когда робот не удаляется от флажка на расстояние большее некоторого N; и 2) когда робот отходит от флажка сколь угодно далеко.

А1. *Докажите, что робот с 4 флажками может обойти плоскость.*

А2. *Докажите, что робот с 3 флажками может обойти плоскость. Может ли робот с 3 флажками обойти трехмерное пространство?*

А3. Пусть некоторые границы клеток непроходимы для робота. Робот может видеть барьеры между клетками (проверять на их наличие любую из сторон клетки, где он находится).

Пусть непроходимая для робота линия делит плоскость на полуплоскости. Докажите, что робот с 1 флажком может обойти полуплоскость.

А4. *Докажите, что робот с 1 флажком не может обойти плоскость с четырьмя разрезами (рис. 1), а с двумя флажками — может.*

A5. Пусть робот ходит по вершинам графа (возможно, бесконечного).

a) *Докажите, что робот с* 1 *флажком не может обойти бесконечное дерево (граф без циклов), каждая вершина которого имеет степень* 3.

b) *Докажите, что робот с* 2 *флажками не может обойти дерево (граф без циклов), каждая вершина которого имеет степень* 3.

A6. *Докажите, что робот с* 2 *флажками не может обойти плоскость.*

Указание. Используйте идеи, применяющиеся при доказательстве в A0, A4.

Пусть робот без флажков движется в первой четверти плоскости. Границы (оси координат) — непроходимые стенки, и робот может их обнаруживать.

A7. *Пусть в начале робот находится в клетке с координатами* $(2^n, 0)$*. Составьте универсальную по* n *(не зависящую от* n*) программу, переводящую робота в клетку* $(3^n, 0)$ *с последующей остановкой в ней.*

Указанный в этой задаче переход будем называть *переходом от* 2^n *к* 3^n.

Пусть $n = 2^{k_1} * 3^{k_2} * \cdots * {p_s}^{k_s}$. Тогда число n кодирует последовательность $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Обсуждаемые в следующей задаче переходы позволяют роботу работать с массивами и облегчают решение пунктов об обходе дерева.

A8. *По аналогии с предыдущей задачей, осуществите следующие переходы:*

a) от 2^n *к* 6^n;

b) от 2^n *к* 2^{2^n};

c) от $2^n * 3^m$ *к* $2^n * 3^m * 5^{mn}$;

d) от $2^n * 3^m$ *к* $2^n * 3^m * 5^{m+n}$;

e) от 2^n *к* $2^{[\sqrt{n}]}$;

f) от 2^n *к* 2^{n^2};

g) от 2^n *к* 2^{k_n}, где k_n есть n-ая цифра десятичного разложения $\sqrt{2}$;

h) от 2^n *к* 2^{k_n}, где k_n есть n-ая цифра десятичного разложения π;

i) $2^n * 3^m \longrightarrow 2^n * 3^m * 5^{k_m}$, где k_m — степень m-ого простого числа в разложении n;

j) $2^n \longrightarrow 2^n * 3^s$, где s — количество различных простых чисел в разложении n;

k) Докажите, что переход от* n *к* n^2 *невозможен.*

Указание. Рассмотрите случаи: 1) когда робот подходит к углу достаточно близко; 2) когда робот постоянно далеко от угла.

A9. *Докажите, что робот с* 3 *флажками может обойти* n*-мерное клеточное пространство.*

A10. *Докажите, что робот с* 3 *флажками может обойти бесконечное дерево, каждая вершина которого имеет степень* 3.

Подведение итогов. *Составьте таблицу, отражающую возможность обхода различных областей (лента, плоскость, полуплоскость, четверть, пространство, дерево) с помощью* $0, 1, 2, 3$ *флажков.*

Теперь мы переходим к изучению цепи конечных автоматов, перед которыми стоит некоторая общая задача.

Общая постановка. Имеется цепь стрелков, каждый из которых может общаться только с двумя своими непосредственными соседями. Цепь состоит из конечного числа стрелков N (мы установим его потом), два крайних стрелка имеют только по одному соседу. Один из крайних стрелков получает команду, после чего стрелки должны договориться и одновременно произвести выстрел.

A11. *Пусть количество стрелков* $N = 4$. *Существуют ли правила поведения стрелков, обеспечивающие решение этой задачи, если каждый стрелок может только толкать локтями одного или двух своих соседей?*

A12. *Пусть количество стрелков* $N = 5$ *и стрелки не толкаются локтями, а могут передавать друг другу сообщения* 2 *видов (*a *или* b*). Кроме того, каждый стрелок может хранить конечный объем информации — каждый помнит одно число от* 1 *до* 16. *То есть, каждый стрелок знает инструкции, которые мы даем ему и кроме того, в текущий момент он может запоминать число от* 1 *до* 16. *При этом инструкции имеют вид:*

«если у тебя число 6 *— передай “a” вправо и запомни* 8*»*

или

«получил “b” слева + у тебя 7 *— передай “a” влево и запомни* 5*».*

Можно ли задать инструкции так, чтобы стрелки выполнили задачу?

Мы обсудили частные случаи цепей стрелков в условиях ограничения количеством памяти и типов сигналов. Пусть теперь количество стрелков конечно, но заранее неизвестно, а память и количество типов сигналов для обмена ограничены.

A13. *(Задача Майхилла о стрелкáх). В ряд выстроены* N *стрелков. Каждый стрелок может запоминать конечный объем информации и знает конечный набор слов. Стрелки могут общаться между собой: за* 1 *секунду времени каждый может сказать своим соседям слева и справа несколько слов из того набора, который он знает (передать сигнал). У каждого стрелка в ружье заряжена пуля. Перед взводом поставлена задача: выстрелить одновременно. Можно ли дать каждому стрелку конечный набор инструкций (какой сигнал и куда передавать в зависимости от полученых сигналов до этого), чтобы взвод справился с поставленной задачей, если начальная команда дается крайнему слева стрелку, а* N *заранее не известно?*

Для формализации данной задачи полезно предствлять себе стрелков в виде конечных автоматов: устройств содежащих k ячеек памяти, в каждой из которых записано число 0 или 1. Каждый автомат может принимать и отправлять p разных сигналов, причем, если нужно, может работать налево и направо в один и тот же момент (в том числе передавать и принимать сигналы одновременно). Иструкции автомату — это набор правил, по которым автомат меняет состояние своих ячеек памяти в зависимости от их текущего состояния и принятых сигналов, а также набор правил, по которым автомат отправляет сигналы в зависимости от текущего состояния своих ячеек памяти. Будем называть это текущее состояние *внутренним состоянием автомата.*

Указание. Можно организовать два сигнала: один передается далее, как только получен (в следующую секунду), а другой — с задержкой на 2 секунды. Тогда первый сигнал будет распространяться в три раза быстрее второго. В момент, когда сигнал доходит до крайнего справа стрелка, тот посылает его обратно. Определите «место встречи» сигналов и введите дополнительные инструкции для стрелков, для этого случая (получения сигналов одновременно с разных сторон).

A14. *Пусть $\epsilon > 0$. Докажите, что можно дать стрелкам (задача A13) такие инструкции, что они выстрелят через время, меньшее $(2+\epsilon)N$.*

A15. *В условиях предыдущей задачи, организуйте стрелков так, чтобы они одновременно выстрелили не позже, чем через $2N-2$ секунды.*

Вернемся к роботу на клетчатой поверхности. Пусть в некоторых клетках написаны символы латинского алфавита. Робот может их читать, но не может их менять.

A16. *a) Можно ли так разметить клетчатую плоскость, чтобы робот мог ее обойти без использования флажков?*

Можно ли так разметить ленту, чтобы робот мог ее обойти:

b) без использования флажков?

c) с использованием одного флажка?

Пусть робот может закрашивать клетки в черный цвет, а также распознавать цвета. (Робот не может перекрашивать клетки в белый цвет.) Робот ходит по квадратному листу со стороной $2n+1$, границы — распознаваемые стенки. В начале робот находится в углу.

A17. *а) Может ли робот закрасить все клетки, кроме центральной?*

б) Может ли робот закрасить только центральную клетку?

Группой называется полугруппа S, в которой выполнены следующие свойства:

1) существует *единица* — элемент e, такой, что для любого $a \in S$ выполнено $ae = ea = a$;

2) для любого элемента a существует *обратный* — такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Легко видеть, что единица в группе ровно одна. Группа называется *коммутативной*, если для любых двух элементов a, b выполнено $ab = ba$. Коммутативные группы также называются *абелевыми*.

A18. *Приведите пример некоммутативной группы.*

Группа называется *циклической*, если все ее элементы — степени некоторого элемента a. Циклические группы — простейшие среди групп.

Пример. Рассмотрим остатки по модулю n. Они образуют группу по сложению. Единицей является нулевой остаток.

Порядком группы называется число ее элементов. Порядок обозначается как $|G|$.

A19. *Докажите, что если порядок группы прост, то группа циклическая.*

Элемент группы a называется *периодическим*, если существует некоторое натуральное n — *порядок элемента*, такое что $a^n = e$. Группа называется *периодической*, если все ее элементы периодические.

Проблема Бернсайда. *Существуют ли конечно-порожденные периодические группы бесконечного порядка?*

В настоящее время построены примеры таких групп. Они достаточно сложны, чтобы разбирать их в рамках этого проекта, поэтому само построение таких групп мы разбирать не будем. Однако, мы используем этот результат в дальнейшем.

Пусть есть конечный алфавит $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1} ... g_s, g_s^{-1}\}$.

Легко видеть, слова в этом алфавите образуют группу относительно приписывания слов (если нужно, можно сократить обратные элементы, стоящие рядом.) Такая группа называется *свободной группой с s образующими.*

Построим *граф группы.* Вершинами графа будут элементы группы. Ребра соединяют элементы группы a, b, связанные соотношением $a = b * g_i$.

A20. *Нарисуйте граф свободной абелевой группы с двумя образующими.*

A21. *Нарисуйте граф свободной неабелевой группы с двумя образующими.*

Пусть робот ходит по графу бесконечной периодической группы.

A22. *Докажите, что робот не сможет выйти из некоторой конечной области графа с использованием:*

a) 0 флажков;

b) 1 флажка;

c) 2 флажков;

d) n флажков.

A23. *Докажите, что если в группе есть непериодический элемент, то робот сможет обойти граф этой группы с использованием* 3 *флажков.*

Цикл B. Конечно-определенные полугруппы

Правила передачи сигналов автоматами допускают формализацию в терминах алгебры. Сначала введем необходимые определения.

Язык полугрупп. Пусть есть некоторый конечный алфавит A: множество букв $a, b, c, \ldots$. Из букв алфавита можно составлять слова: конечные последовательности букв, например $abbc$, a, $cabcabcbbb$ и т. п. Будем называть произведением слов A и B слово, получающееся приписыванием слова B справа к слову A. Таким образом, алфавит задает множество слов, с определенной на нем операцией произведения.

Полугруппой будем называть множество элементов с заданной на нем операцией произведения $*$ (результатом применения операции для двух элементов является элемент из этого же множества) и выполненным для любых элементов a, b, c свойством $a*(b*c) = (a*b)*c$. Это свойство называется *свойством ассоциативности.*

Примеры. Множество натуральных чисел образует полугруппу, относительно сложения. Множество рациональных чисел образует полугруппу относительно умножения, а относительно деления — нет, так как делить на нуль нельзя.

Задаваемое алфавитом множество слов является полугруппой относительно операции приписывания одного слова к другому. (Ассоциативность, очевидно, соблюдается). Более точно, такое множество слов называется *свободной* полугруппой. Если алфавит букв, из которых составляются слова, конечный, то полугруппа называется *конечно-порожденной.* (То есть полугруппа конечно порождена, если можно выбрать конечное множество элементов, а остальные элементы представить в виде произведений выбранных.) Мы будем рассматривать только конечные алфавиты и конечно-порожденные полугруппы.

N-ой степенью слова X называется слово, получающееся выписыванием слова X N раз подряд.

Задача. Докажите, что если произведение слов U и V равно произведению слов V и U, то U и V представляются в виде степеней какого-то слова A.

Определяющие соотношения. Пусть теперь в произвольном слове разрешено заменять одно подслово на другое. Например, ab разрешено заменять на bca. Тогда слова ab и bca считаются эквивалентными или «одинаковыми». Кроме того, считаются одинаковыми все слова, приводимые одно к другому последовательными заменами подслов на эквивалентные им. То есть, если $ab = bca$, то $aaab = aabca = abcaca = bcacaca$, и значит, $aaab$ и $bcacaca$ эквивалентные слова.

Таким образом, получаются *классы эквивалентности*: совокупности попарно эквивалентных слов. Элементами полугруппы будут являться сами классы эквивалентности. Чтобы найти произведение двух элементов — классов, берут из каждого класса по одному представителю — слову, находят слово — произведение. Это слово входит в какой-то класс эквивалентности. Он и объявляется произведением элементов — классов. Легко проверить, что результат не зависит от выбора представителей (слов из классов).

На практике, в качестве элементов полугруппы рассматривают слова. Просто некоторые из них считают равными.

Что же нужно сделать, чтобы задать полугруппу? Для этого задаются *определяющие соотношения*, это пары равных (эквивалентных), по определению, слов. Все слова, которые можно получить друг из друга последовательными заменами подслов на им эквивалентные, сами считаются равными.

Пример. Выясним устройство полугруппы с определяющими соотношениями: $ba = abb$; $aa = a$.

Возьмем произвольное слово. В случае если в где-нибудь в слове стоят подряд более одной буквы a, можно применить второе соотношение. Следовательно, слово приводится к виду:

$$b^{k_1}ab^{k_2}a\ldots ab^{k_n}, \qquad \text{где} \quad k_1 \geqslant 0,\ k_n \geqslant 0,\ k_2, k_3, \ldots, k_{n-1} > 0.$$

Далее, все буквы a, пользуясь первым соотношением, можно «перегнать» влево, приведя слово к виду $a^n b^k$. Теперь опять применяем второе соотношение и приводим слово к виду ab^n. Таким образом, любое слово, в которое входит хоть одна буква a приводится к виду ab^n. Значит, все элементы полугруппы имеют вид $a^k b^n$, $k = 0$ или 1, $n \geqslant 0$. Следовательно, данная полугруппа описывается парами чисел (n, k), причем $n = 0$ или 1, $k \geqslant 0$. Легко видеть, что произведение пар подчиняется правилам $(n, k_1) * (0, k_2) = (n, k_1 + k_2)$, $(n, k_1) * (1, k_2) = (1, 2k_1 + k_2)$.

Полугруппа с конечным множеством определяющих соотношений называется *конечно-определенной*. Далее мы будем обсуждать только конечно-определенные полугруппы. *Нулевым* элементом (*нулем*) полугруппы называется такой элемент 0, для которого при любом элементе x выполнено $0 * x = x * 0 = 0$. Легко видеть, что если нуль есть, то он один. Полугруппа, содержащая нуль, называется *полугруппой с нулем.* Полугруппа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной.*

Определяющие отношения в полугруппах служат для задания законов, по которым можно преобразовывать слова. Полугруппы и автоматы, в какой-то степени, родственные объекты. Автоматы могут анализировать данные и производить какие-либо действия в зависимости от полученной информации. Полугруппы могут анализировать и «обрабатывать» слова некоторых типов посредством определяющих отношений. Например, можно обнулять некоторые слова. Применяя «обнуляющие» соотношения, можно запрещать ненужные нам комбинации, и оставлять в рассмотрении только слова удобного вида.

Пример. Построим конечно-определенную полугруппу, все ненулевые слова в которой имеют вид $a^n b^k c^l$, где $n, k, l \geqslant 0$. В данном случае алфавит состоит из трех букв, a, b, c. Введем определяющие отношения $ba = 0$, $ca = 0$, $cb = 0$. Сразу видно, что если в слове присутствует c, то только в конце слова, это следует из соотношений $ca = 0$, $cb = 0$. Отметим, что в конце слова может быть несколько c, то есть c^l. Аналогично, из соотношения $ba = 0$ следует, что после b может быть только c. Получаем требуемый стандартный вид.

В задаче Майхилла стрелки обменивались информацией, посылая друг другу сигналы. В полугруппе можно воспользоваться похожей конструкцией приема и передачи сигнала. Сигналом в данном случае служит специальная буква, перемещающаяся внутри массива других букв благодаря заданным законам.

Пример. Пусть есть конечный алфавит L и A, B — буквы из L. Построим конечно-определенную полугруппу, без ненулевых слов, содержащих A и B одновременно. Пусть, например, алфавит состоит из букв A, B, c, d, e, t. Введем соотношения $A = At$, $A = tA$, $tc = ct$, $td = dt$, $te = et$, $tB = 0$, $Bt = 0$.

Возьмем произвольное слово, содержащее одновременно и A и B. Докажем, что оно равно нулю. Пусть, для определенности, слово содержит A слева от B (другой случай разбирается аналогично). Выделим в нашем слове подслово вида AXB, где X состоит из букв c, d, e, t. Согласно введенным соотношениям, $AXB = AtXB = = AXtB = 0$.

B0. *Образуют ли полугруппы:*

a) Отрицательные числа по умножению;

b) Натуральные числа относительно операции взятия суммы квадратов;

c) Квадраты на плоскости относительно пересечения;

d) Слова в алфавите a, b с первой буквой a;

e) числа, представимые в виде суммы двух кубов натуральных чисел относительно умножения;

f) множество движений пространства, переводящие в себя единичный куб, относительно последовательного применения?

B1. *Опишите полугруппу, задаваемую соотношениями $bab = 0$; $baa = baca$; $ca = ac$; $cbb = 0$; $bbb = 0$. Конечна ли она?*

B2. *Докажите, что если полугруппа конечна, то в ней найдется элемент a, такой, что $a * a = a$.*

Элемент полугруппы a, удовлетворяющий соотношению $a^2 = a$ называется *идемпотентным элементом* или *идемпотентом.*

B3. *В алфавите индейцев N букв. Из них индейцы составляют слова. Известно, что любое слово, повторенное дважды, означает то же самое, что и само слово, а замена подслова на его квадрат не меняет смысла всего слова. Например,* **коророва** *означает то же, что и* **корова**. *Докажите, что в языке индейцев конечное число понятий, если:*

a) $N = 2$;

b) $N = 3$;

c) N — произвольное натуральное число.

Примечание. Переформулировка утверждения этой задачи на языке полугрупп звучит так: *Идемпотентная конечно-порожденная полугруппа конечна.*

B4. *Пусть есть конечный алфавит L и A, B, C — буквы из L. Постройте конечно-определенную полугруппу, без ненулевых слов, содержащих A, B C одновременно.*

B5. *Пусть $R_1, R_2, R_3, a, b, c, d \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу, все ненулевые слова в которой представляются в виде подслова слова вида $a^{n_1}R_1b^{n_2}R_2c^{n_3}R_3d^{n_4}$, где $n_i \geqslant 0$.*

B6. *Пусть $a, b, C, D \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу, такую, что количество вхождений a в ненулевое слово вида $C \dots D$ не меньше квадрата вхождений b в то же слово, и существовали слова вида $C \dots D$, содержащие сколь угодно много a и b.*

B7. *Пусть $R, C, D, P, Q, a, b, t_1, t_2 \in L$. Постройте конечно-определенную полугруппу S, со следующими свойствами:*

1) любое слово, не равное нулю, и содержащее хотя бы по одной букве C, R, D представляется в виде $a^{n_1}Ca^{n_2}Pa^{n_3}t_iRb^{n_4}Qb^{n_5}Db^{n_6}$, где $n_i \geqslant 0$.

2) любое слово, не равное нулю, и содержащее хотя бы по одной букве P, Q, D преобразованиями приводится к виду W_1PRQW_2

3) если слово, вида CW_1RW_2D не равно нулю, то W_1 не содержит букв b, W_2 не содержит букв a, W_1 и W_2 содержат одинаковое количество a и b соответственно.

Функцией роста $G_S(n)$ полугруппы S называется функция аргумента n выражающая количество ненулевых различных слов длины не более n (При подсчете в качестве длины берется длина самого короткого из класса эквивалентных слов.) Может случиться так, что $G_S(n)$ — функция, эквивалентная многочлену или рациональной функции от n. В этом случае определена *размерность Гельфанда – Кириллова* полугруппы, равная показателю степени при старшем коэффициенте $G_S(n)$.

B8. *Постройте конечно-определенную полугруппу с нецелой размерностью Гельфанда – Кириллова.*

B9. *Постройте конечно-определенную полугруппу с размерностью Гельфанда – Кириллова, равной* 2,5.

B10. *Пусть дано число* $\alpha > 2{,}5$ *такое, что существует алгоритм определения его десятичных знаков. (Конструктивное число. Например,* π *является таким числом). Докажите, что существует конечно-определенная полугруппа с размерностью Гельфанда – Кириллова, равной* α.

Цикл C. Свойства нильпотентности

Сначала введем необходимые определения. Полугруппа с нулем называется *ниль-полугруппой* если для любого ее элемента x существует натуральное n, такое, что $a^n = 0$. Полугруппа с нулем называется *нильпотентной* если существует натуральное n, такое, что для любых n элементов $x_1, x_2, \dots x_n$, среди которых могут быть равные, $x_1 * x_2 * \dots * x_n = 0$.

Важным вопросом алгебры является установление взаимосвязей между свойствами нильпотентности. В настоящем цикле этот вопрос изучается для конечно-определенных полугрупп. Первые четыре задачи цикла независимы. C1 — известная олимпиадная задача. C2 — та же самая задача на языке полугрупп. C3 и C4 — вопросы связанные с конструированием так называемых «бесквадратных» и «бескубных» слов. Дальнейшие задачи определяют подход к основному вопросу проекта — задаче C9.

C1. *В стране Роботландии некоторые комбинации букв объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных комбинаций — конечное число. Если в некотором слове есть запрещенное подслово, то все слово тоже считается запрещенным. Известно, что существуют незапрещенные слова сколь угодно большой длины. Доказать, что существует бесконечное периодическое незапрещенное слово.*

C2. *Пусть в ниль-полугруппа конечно определена и все определяющие соотношения имеют вид* $W_i = 0$, *где* W_i *— какие-то слова. Доказать, что тогда ниль-полугруппа нильпотентна.*

C3. *Докажите, что из двух букв* a, b *можно составить слово сколь угодно большой длины, не содержащее трех одинаковых подслов, идущих подряд (бескубное слово).*

C4. *Докажите, что из трех букв* a, b, c *можно составить слово сколь угодно большой длины, не содержащее двух одинаковых подслов, идущих подряд (бесквадратное слово).*

Примечание. Сравните C3 и C4 с задачей B3.

Из этих результатов следует существование ненильпотентной ниль-полугруппы — достаточно приравнять все квадраты (слова, состоящие из двух одинаковых подслов, стоящих рядом) к нулю. Эта полугруппа, естественно, не будет конечно-определенной.

Пусть алфавит L состоит из букв a, b, c, d. Будем обозначать $x = a, [x] = b$, $[x = c, x = d]$. То есть, x, $[x]$, $[x$, $x]$ — это различные буквы алфавита, обозначение сделано для удобства.

Построим семейство слов L_i в алфавите L следующим образом:

$L_1 = [x]$, $L_2 = [xx]$, $L_3 = [xx[x]x]$,

$$L_n = [xxL_1xL_2L_1xL_3L_2L_1x \dots L_{n-2}L_{n-3} \dots L_2L_1x].$$

C5. *Докажите, что все слова L_i — бесквадратные.*

C6. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ и алфавит K состоит из букв $o, [o], [o, o]$. Постройте бесконечные семейства слов $A_1, A_2, \dots$ над L и $B_1, B_2, \dots$ над K и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iB_j = B_jA_i$, если $|i - j| > 1$, но $A_iB_j \neq B_jA_i$, если $|i - j| \leqslant 1$.*

C7. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ и алфавит K состоит из букв $o, [o], [o, o]$. Постройте бесконечные семейства слов $A_1, A_2, \dots$ над L и $B_1, B_2, \dots$ над K и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iB_j = B_jA_{i+j}$, если $|i - j| > 1$.*

C8. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ Постройте бесконечное семейство слов $A_1, A_2, \dots$ над L и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iA_j = A_jA_i$, если $|i - j| > 1$, но $A_iA_j \neq$ $\neq A_jA_i$, если $|i - j| \leqslant 1$*

C9. *Пусть алфавит L состоит из букв $x, [x], [x, x]$ Постройте ,бесконечное семейство слов $A_1, A_2, \dots$ над L и конечную систему определяющих отношений, такую, что будут выполнены равенства: $A_iA_j = A_jA_i$, если $|i - j| > 1$ и $A_iA_{i-1}A_i = 0$.*

C10. *Постройте конечно-определенную ниль-полугруппу не являющуюся ниль-потентной.*

Домино

С. Берлов, К. Кохась

Команда жюри: С. Берлов, И. Богданов, К. Кохась, К. Куюмжиян

Условия задач

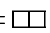
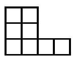
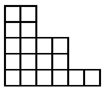
1. Четность

1.1. Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки четным числом способов.

1.2. Докажите, что квадрат $n \times n$ разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 2$.

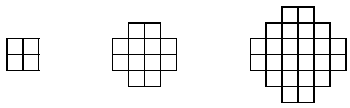
1.3. Докажите, что прямоугольники $3 \times 2n$ и $7 \times 2n$ разбиваются на доминошки нечетным числом способов.

1.4. Рассмотрим последовательность клетчатых фигур

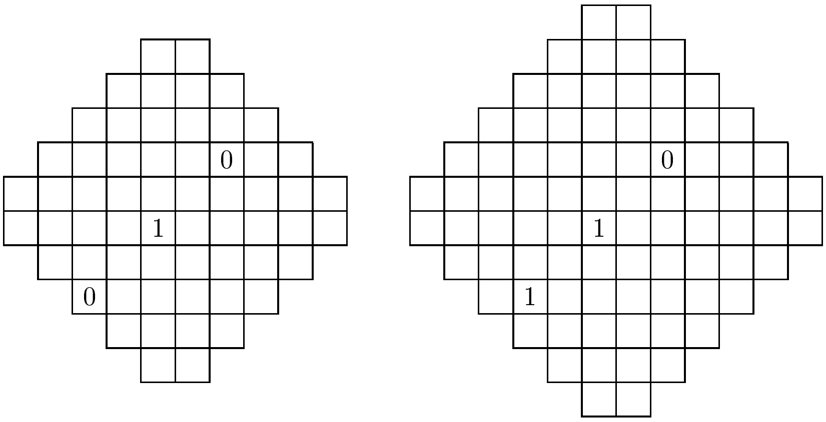
$H_1 =$  , $H_2 =$  , $H_3 =$  , ...

Фигура H_n получается из H_{n-1} добавлением слева вертикального прямоугольника $2 \times (2n-1)$. Докажите, что все фигуры H_n разбиваются на домино нечетным числом способов.

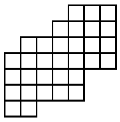
Ацтекский диамант ранга n — это «клетчатый ромбик» со стороной n. На рисунке изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3.



1.5. Рассмотрим «среднюю линию» ацтекского диаманта, т. е. диагональный ряд клеток, идущий от середины его «стороны» к середине противоположной «стороны». Отметим на этой линии клетки через одну и поместим в отмеченные клетки произвольным образом числа 0 и 1 (на рисунке показан пример для диамантов четного и нечетного рангов). Рассмотрим разбиения диаманта на доминошки, согласованные со сделанной разметкой следующим образом: в них для каждой доминошки, накрывающей клетку с цифрой, вторая клетка доминошки расположена левее или выше, если эта цифра — 0 и правее или ниже — если 1. Докажите, что для всех расстановок нулей и единиц количество согласованных разбиений на доминошки одно и то же. В частности, количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на доминошки делится на $2^{\lceil n/2 \rceil}$.



1.6. а) Докажите, что изображенная ниже фигура четным числом способов разбивается на доминошки.



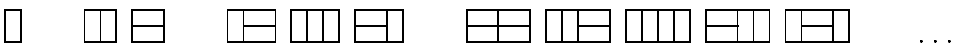
б) Докажите, что количество разбиений на доминошки ацтекского диаманта ранга n делится на 2^n.

1.7. Докажите, что прямоугольник $n \times (n+1)$ разбивается на доминошки нечетным числом способов.

2. Рекуррентные соотношения

Обозначим через $N(n,m)$ количество разбиений на домино прямоугольника $n \times m$, а через f_n — последовательность чисел Фибоначчи: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

2.1. Докажите, что последовательность $N(n,2)$ — это последовательность чисел Фибоначчи.



1 2 3 5

2.2. Докажите при помощи комбинаторного рассуждения, что $f_{n+m} = f_{n-1}f_{m-1} + f_n f_m$.

2.3. Докажите, что последовательность $N(n,3)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N(n,3) = 4N(n-2,3) - N(n-4,3)\,.$$

2.4. На краю доски 1993×1993 отмечено два поля A и B, разделенные нечетным числом полей. Докажите, что количество способов покрыть доминошками 1×2 всю доску без поля A равно количеству способов покрытия доминошками доски без поля B.

2.5. Пусть d — количество способов разбить прямоугольник 100×200 на доминошки, d_2 — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник, но без двух угловых клеток, прилегающих к одной стороне, $\widetilde{d}_2$ — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник, но без двух угловых клеток, прилегающих к другой стороне, d_4 — количество способов разбить на доминошки тот же прямоугольник без четырех угловых клеток. Докажите, что

$$d \cdot d_4 = d_2^2 + \widetilde{d}_2^2\,.$$

2.6. Рассмотрим числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & c & & e & & g & & \ldots \\ & b & & d & & f & & \ldots & \\ & & h & & k & & \ldots & & \\ & & & \ell & & \ldots & & & \\ & & & & \ldots & & & & \end{array} \tag{1}$$

образованный по правилу: для любых четырех чисел, образующих «ромбик», выполнено соотношение

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ x & & y \\ & z & \end{array} \qquad wz = xy + 1\,. \tag{2}$$

Пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая — из двоек. Найдите, что за числа стоят в этом треугольнике.

Белая магия. Рассмотрим треугольник из предыдущей задачи. Будем считать, что элементы первых двух строчек — это независимые переменные, а элементы всех остальных строк — это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (2). Нетрудно подсчитать, что элемент ℓ в треугольнике (1) имеет вид

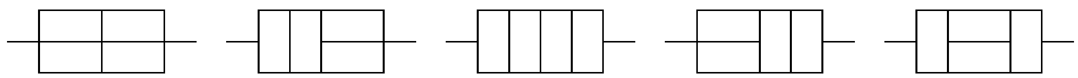
$$\ell = \frac{hk+1}{d} = \frac{\frac{bd+1}{c} \cdot \frac{df+1}{e} + 1}{d} = bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}\,. \tag{3}$$

Теперь выпишем все разбиения прямоугольника 2×4 на доминошки и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напишем его редуцированную валентность: количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных b, c, d, e, f в произведении $b^*c^*d^*e^*f^*$.



$1\ {-1}\ 1\ {-1}\ 1$	$0\ {-1}\ 0\ {-1}\ 1$	$0\ {-1}\ {-1}\ {-1}\ 0$	$1\ {-1}\ 0\ {-1}\ 0$	$0\ 0\ {-1}\ 0\ 0$	$\ldots$
$bc^{-1}de^{-1}f$	$c^{-1}e^{-1}f$	$c^{-1}d^{-1}e^{-1}$	$bc^{-1}e^{-1}$	d^{-1}	

Сравните то, что получилось, с правой частью (3).

2.7. Докажите, что «Белая магия» — это общий факт, а именно:

1) рациональные функции из треугольника (1) суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени ± 1 или 0. Все коэффициенты в сумме равны 1.

2) Одночлены, составляющие функцию из $(n+2)$-й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника $2\times 2n$ на доминошки по описанному выше правилу.

3. Разное

3.1. Верно ли, что для любого натурального n существует клетчатая фигура, которую можно разбить на доминошки ровно n способами?

3.2. Докажите, что если клетчатый многоугольник без дыр можно разбить на доминошки, то у него есть хотя бы одна четная сторона.

3.3. Докажите, что существуют такие константы C_1, $C_2 > 0$, что при всех четных m и n выполнено неравенство $C_1(5/4)^{mn} < N(m,n) < C_2(10/7)^{mn}$.

3.4. Докажите, что количество разбиений прямоугольника $3\times 2n$ на доминошки — это число вида $a^2 + 2b^2$.

3.5. Прямоугольник $2n\times 2m$ разбит на доминошки. Вне доски возле крайней левой вертикали прямоугольника находится фишка, которая начинает двигаться по доске вправо по следующему правилу. Заходя в очередную доминошку (слева), фишка перемещается на вторую клетку этой доминошки и движется с этой клетки вправо на следующую доминошку (или за край доски). Докажите, что фишка закончит движение справа от доски на той же горизонтали, на которой она находилась в начале.

4. После промежуточного финиша

2.6. Докажите комбинаторно тождество с числами Фибоначчи:

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1\,.$$

Будем называть *n-деталью* квадрат $n\times n$, у которого, возможно, вырезаны некоторые клетки верхнего или правого края. Пронумеруем строки n-детали числами 1, 2, ..., n снизу вверх, а столбцы — слева направо. Клетку будем обозначать парой номеров ее строки и столбца. Будем называть n-деталь *правильной*, если из пары клеток (n,i) и (i,n) при $i < n$ вырезана ровно одна, а также вырезана клетка (n,n).

4.1. Докажите, что n-деталь нечетным числом способов разрезается на доминошки тогда и только тогда, когда она правильная.

4.2. Докажите, что прямоугольник $n\times(2n+1)$ разрезается на доминошки кратным 4 числом способов.

4.3. Докажите, что квадрат со стороной $2n+1$ и вырезанной центральной клеткой разбивается на доминошки кратным 4 числом способов при $n > 1$.

4.4. Докажите, что прямоугольник $m\times n$ нечетным числом способов разбивается на доминошки тогда и только тогда, когда числа $m+1$ и $n+1$ взаимно просты.

4.5. Докажите, что прямоугольник $n \times 2n$ разбивается на доминошки количеством способов, сравнимым с 1 по модулю 4.

4.6. Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 8 числом способов при $n > 2$.

4.7. Докажите, что квадрат $2n \times 2n$ разбивается на доминошки кратным 16 числом способов при $n > 3$.

4.8. Дана клетчатая фигура, симметричная относительно некоторой диагональной прямой (т. е. прямой с угловым коэффициентом 1, проходящей через центры клеток). Докажите, что если на оси симметрии лежат n клеток фигуры, то число разбиений на доминошки такой фигуры делится на $2^{n/2}$.

4.9. Докажите, что клетчатая фигура может быть разбита на доминошки четным числом способов тогда и только тогда, когда в ней можно отметить некоторое непустое множество клеток так, что у каждой клетки фигуры будет четное число соседних по стороне отмеченных клеток.

4.10. Докажите, что количество разбиений квадрата $2n \times 2n$ на доминошки — число вида $2^n(2k+1)^2$.

4.11. Пусть $2k+1$ — наибольший общий делитель чисел $2m+1$ и $2n+1$. Докажите, что количество разбиений прямоугольника $2m \times 2n$ на доминошки делится на 2^k, но не делится на 2^{k+1}.

4.12. Обозначим через T_n количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на доминошки. Докажите, что

$$T_{n+1}T_{n-1} = 2T_n^2\,.$$

Отсюда следует, что $T_n = 2^{n(n+1)/2}$.

4.13. Из шахматной доски $(n+1) \times (n+1)$ вырезана клетка $a1$. На всех остальных клетках вертикали a стоят «хромые» шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Сколько существует непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым, все n королей перейдут на клетки нижней горизонтали?

5. Убранное из основного текста

Белая магия – 2. Рассмотрим пирамиду из объектов, у которой в каждом слое объекты расположены по квадратной сетке, а каждый следующий слой смещен так, что его объекты расположены над центрами квадратов предыдущего слоя. Слои нумеруются возрастающими целыми числами, начиная с минус единицы. Обектами, размещенными в такой пирамиде, будут функции, определяемые следующим образом. Пусть элементы, расположенные в минус первом и нулевом слоях — это попарно различные независимые переменные. Далее, если мы имеем такой трехмерный фрагмент (октаэдр): четыре функции B, C, D, E расположенные в вершинах единичного квадрата, функция A, расположенная в соседним слое с меньшим номером под центром этого квадрата и функция F, расположенная в соседним слое с бóльшим номером над центром этого квадрата, то для этих функций выполнено соотношение

$$F = \frac{BE + CD}{A}\,.$$

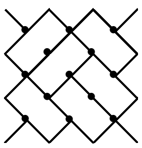
Пользуясь этим соотношением, мы, зная функции в двух начальных слоях, сможем построить функции во всей пирамиде.

Рассмотрим, например, пирамиду, у которой в минус первом слое расположено 16 переменных, а в нулевом — 9:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{array} \tag{4}$$

Эта пирамида определяет единственную рациональную функцию на втором слое, которая, как оказывается, равна сумме одночленов от переменных (4) (каждая переменная входит в одночлен в степени ± 1 или 0). Одночлены находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями на доминошки ацтекского диаманта ранга 2. Соответствие определяется следующим образом.

Нарисуем произвольное разбиение диаманта на доминошки. Добавим к диаманту два вертикальных и два горизонтальных отрезка и повернем картинку на 45°. Вычислим редуцированные валентности всех внутренних узлов. Возьмем полученный набор чисел в качестве степеней исходных переменных и перемножим полученные выражения. Мы получим одночлен, соответствующий разбиению.



$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 0 \\ & -1 & & 0 & \\ 1 & & 0 & & 0 \\ & 0 & & -1 & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc} r^0 & & s^1 & & t^0 \\ & f^{-1} & & g^0 & \\ u^1 & & v^0 & & w^0 \\ & j^0 & & k^{-1} & \\ x^0 & & y^0 & & z^1 \end{array} \longrightarrow f^{-1}k^{-1}suz$$

5.1. 1) Докажите, что «Белая магия – 2» — это общий факт, а именно: рациональные функции из из описанной пирамиды суть суммы одночленов, каждый из которых — это произведение исходных переменных в степени ± 1 или 0. Все коэффициенты в сумме равны 1. Одночлены, составляющие функцию из n-го слоя, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями ацтекского диаманта ранга n на доминошки по описанному выше правилу.

Новые способы плетения корзинок

Задачи предложены
И. Богдановым, А. Каибхановым, Ю. Кудряшовым,
А. Скопенковым, А. Сосинским и Г. Челноковым

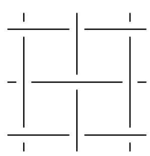
So also werde ich alles in Erinnerung behalten:
Nur ein kleines Album von Miniaturen.
H. Böll, Im Tal der donnernden Hufe.

Определения

Назовем *плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|» и «$-$» (или из плюс и минус единиц), дополненную набором из $m + n - 2$ положительных чисел $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Матрица M называется *матрицей плетёнки*, а числа $a_1, \ldots, a_{m-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}$ называются *расстояниями между строками и столбцами*. Нарисуем на плоскости m параллельных прямых $k_1, \ldots, k_m$ на расстояниях $a_1, \ldots, a_{m-1}$ друг от друга и n перпендикулярных им прямых $l_1, \ldots, l_n$ (параллельных между собой) на расстояниях $b_1, \ldots, b_{n-1}$ друг от друга. Около точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$.

Например, матрице

$$A := \begin{pmatrix} - & | & - \\ | & - & | \\ - & | & - \end{pmatrix} \quad \text{отвечает рисунок}$$



В этом тексте рассматриваются только матрицы из символов «|» и «$-$», если не оговорено противное.

Плетёнка называется *реализуемой*, если существует семейство прямых $\widetilde{k}_1, \ldots, \widetilde{k}_m$, $\widetilde{l}_1, \ldots, \widetilde{l}_m$ в трёхмерном пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают рисунок, построенный по данной плетёнке описанным выше способом. Плетёнка называется *нереализуемой*, если она не является реализуемой.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

Вводные задачи

Задача 1. (a) Любая плетёнка $2 \times n$ реализуема (если не получается, см. задачу 3 (a)).

(b) Любая плетёнка с матрицей A нереализуема (если не получается, см. задачу 4 (a)).

Задача 2. (a) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех её элементов на противоположные ($|$ на $-$ и обратно) и оставлении расстояний без изменений. Такое преобразование называется *зеркальной симметрией* плетёнки и обозначается через $S\colon W \mapsto SW$, где W — плетёнка.

(b) Реализуемость плетёнки не меняется при осевой симметрии относительно ее диагонали (при котором столбцы становятся строками и обратно) и замене набора $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ на набор $b_1, \dots, b_{n-1}, a_1, \dots, a_{m-1}$. Такое преобразование называется *транспонированием* плетёнки и обозначается через $T\colon W \mapsto TW$, где W — плетёнка.

(c) Дайте определение *симметрий плетёнки относительно горизонтальных и вертикальных осей* и докажите, что при них не изменяется реализуемость.

(d) Реализуемость плетёнки не меняется при одновременном изменении всех чисел $a_1, \dots, a_{m-1}$ в некоторое число раз.

Задача 3. Строка (или столбец) в матрице плетёнки называется *монотонной*, если в ней (в нем) сначала идут только $|$, а потом только $-$, или наоборот. В частности, если в строке только $|$ (или только $-$), то эта строка монотонна.

(a) Реализуемость плетёнки не меняется при отбрасывании монотонной прямой и соответствующем изменении расстояний.

(b) Немонотонная строка длины 3 — это либо $(| - |)$, либо $(-|-)$.

(c) Среди матриц 3×3 монотонных строк и столбцов не содержат только A и SA.

(d) Реализуемость *наследственна* (то есть подплетёнка реализуемой плетёнки реализуема).

(e) Плетёнка $3 \times n$ реализуема тогда и только тогда, когда её матрица не содержит миноров A или SA.

Задача 4.[Лемма о вращении прямых.] Назовем *сингулярной плетёнкой* $m \times n$ матрицу M размера $m \times n$ из символов «|», «$-$» и «+» (или из плюс и минус единиц и нулей), дополненную набором $m+n-2$ положительных чисел $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$. Нарисуем на плоскости прямые k_i и l_j аналогично предыдущему. Около точки пересечения прямых k_i и l_j сотрем часть прямой k_i, если $M_{ij} = |$, и часть прямой l_j, если $M_{ij} = -$ (и оставим точку пересечения, если $M_{ij} = +$). Реализуемость сингулярных плетёнок определяется аналогично предыдущему.

(a) Реализуемость сингулярной плетёнки $3 \times n$ не меняется при замене строки $(| - |)$ на $(+ - +)$ и строки $(-|-)$ на $(+|+)$.

(b) Реализуемость плетёнки $4 \times n$ не меняется при замене строк

$$\begin{array}{ll} & a = (- - | -),\ b = (- | - -),\ c = (- | | -),\ d = (- | - |) \\ \text{на} & (- - + +),\ (+ + - -),\ (+ | | +),\ (- + + |). \end{array}$$

(c) Сформулируйте и докажите общее свойство инвариантности реализуемости относительно «вращения прямых».

(d) Если плетёнка реализуема, то для любых двух параллельных прямых соответствующего ей рисунка реализацию можно выбрать такой, чтобы прообразы этих прямых в пространстве были также параллельны (т. е. лежали в одной плоскости). (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

Задача 5. В этой «физической» задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать её для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

(a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) модель, изображающую данную плетёнку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетёнка не реализуема.

(b) Плетёнка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в предыдущем пункте конструкция не содержит жестких подконструкций.

Задача 6. (a) Все немонотонные строки длины 4 — это $a, b, c, d, Sa, Sb, Sc, Sd$ (см. задачу 4 (b)). Таким образом, матрицу $n \times 4$ без монотонных строк можно задавать словом длины n из этих восьми букв.

(b) Какие слова длины 3 из этих букв «запрещает» условие отсутствия миноров A и SA?

(c) Какие слова длины n из этих букв «запрещает» условие отсутствия монотонных столбцов?

Задача 7. Существуют две разные плетёнки с одинаковой матрицей, одна из которых реализуема, а другая нет?

Задача 8. (a) Матрица

$$B = \begin{pmatrix} | & - & - & | \\ - & - & | & - \\ - & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

не содержит ни монотонных прямых, ни миноров A, SA.

(b) Любая плетёнка с матрицей B не реализуема.

Задача 9. Найдите алгоритм распознавания реализуемости плетёнок.

Замечание. Этот алгоритм можно использовать для компьютерных экспериментов по распознаванию реализуемости плетёнок (например, построенных при помощи задачи 6). При этом можно использовать имеющиеся на компьютерах готовые программы (например, распознавания разрешимости системы линейных неравенств).

Задачи, предложенные после промежуточного финиша

Задача 10.[Седлообразное преобразование] (a) Преобразование $(x, y, z) \mapsto$ $\mapsto (x, y, z + xy)$ переводит прямые, перпендикулярные оси Ox или оси Oy, в прямые. (Эту задачу можно использовать для решения задачи 4 (d).)

(b) Во что переводит седлообразное преобразование плоскости $z = \text{const}$?

Назовём матрицу *реализуемой*, если её можно так дополнить набором расстояний, что получится реализуемая плетёнка.

Задача 11. Предположим, что в плетёнке отмечены две параллельные прямые k и k', а также выбраны ориентации на всех остальных прямых. Разрешается двигаться по прямым k и k' в произвольном направлении, по остальным прямым в направлении их ориентации, а также переходить с одной прямой на другую, если первая прямая проходит в этой точке «выше» второй или «пересекает» её. Назовем плетёнку *ацикличной*, если для любой пары параллельных прямых k и k' существует выбор ориентаций на оставшихся прямых, для которого нельзя пройти по замкнутому маршруту и вернуться в исходную точку.

(a) Плетёнки с одинаковой матрицей ацикличны или нет одновременно.

(b) Любая реализуемая матрица ациклична. (Это можно использовать для доказательства нереализуемости матриц A и B.)

(c)* Верно ли, что любая ациклична матрица реализуема?

(d) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *перпендикулярные прямые k и l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

(e) В определении ацикличности вместо пары параллельных прямых k и k' отметим *параллельные прямые k и k' и перпендикулярную им прямую l*. Решите аналогичные задачи для такого определения ацикличности.

Задача 12.[Нереализуемость матрицы B'] (a) Реализуемость плетёнки с матрицей

$$B' = \begin{pmatrix} | & - & | & | \\ - & - & | & - \\ | & | & - & | \\ | & - & | & | \end{pmatrix}$$

равносильна реализуемости плетёнки с такими же расстояниями и матрицей

$$\begin{pmatrix} + & - & | & + \\ + & - & | & + \\ | & + & + & | \\ | & + & + & | \end{pmatrix}$$

(b) Если число a_1 мало́ по сравнению с другими a_i, b_j, то данная плетёнка реализуема.

(c) Если $a_2 = b_2 \ll a_1 = a_3 = b_1 = b_3$, то данная плетёнка не реализуема.

Задача 13.[Проективные преобразования матриц] (a) Реализуемость матрицы не меняется при перенесении первого столбца на последнее место с одновременном изменении всех его элементов на противоположные. Реализуемость матрицы не меняется при аналогичном преобразовании строк. Такие преобразования X и Y называются *проективными преобразованиями матриц*. (Результатом этой задачи разрешается пользоваться в дальнейшем без доказательства.)

(b) $XA = YA = SA$.

(c) Монотонность ряда матрицы не меняется при проективных преобразованиях.

(d) $S = X^m = Y^n$.

(e) $XY = YX$.

Задача 14. (a) Все буквы $a, \dots, Sd$ из задачи **??** получаются из одной проективными преобразованиями. Таким образом, матрицу $4 \times n$ без монотонных столбцов можно задавать словом длины n из цифр $1, 2, \dots, 8$.

(b) Любая матрица 4×4 без монотонных прямых и миноров A, SA получается из B или из B' композицией зеркальных симметрий, транспонирований, осевых симметрий и проективных преобразований.

(c) Какие слова «запрещает» условие отсутствия миноров A, SA, B, X^pY^qB?

(d) Какие слова остаются?

(e) Какие из них реализуемы?

Задача 15. (a) Существует ли бесконечно много нереализуемых матриц, все подматрицы которых реализуемы?

(b) Существует ли бескнонечно много реализуемых матриц, не содержащих монотонных строк и столбцов?

(c)* Существует ли бесконечное множество реализуемых матриц, ни одна из которых не содержит ни монотонного ряда, ни других подматриц из нашего семейства?

Задача 16. (a) Найти число нереализуемых матриц 4×4.

(b) Найти все матрицы 4×5 без монотонных строк и столбцов и без нереализуемых подматриц с точностью до симметрий, транспонирования и проективных преобразований (можно использовать компьютер).

Задача 17. (a) Матрица называется *сильно реализуемой*, если при любом дополнении её набором расстояний оплучается реализуемая плетёнка. Решите аналоги предыдущих задач для сильной реализуемости матриц.

Задача 18. Обозначим через $\mathtt{W}$ множество всех матриц размера $m \times n$ с точностью до всех симметрий, транспонирования и проективных преобразований.

(a)* Найдите (или оцените) число элементов в $\mathtt{W}$.

(b)* Найдите (или оцените) отношение числа реализуемых элементов $\mathtt{W}$ к числу нереализуемых.

(c)* Найдите (или оцените) отношение числа сильно реализуемых элементов в $\mathtt{W}$ к числу остальных элементов.

Авторы считают, что все предложенные задачи не стоит пытаться решить за время конференции. Постарайтесь решить во время конференции наиболее интересные для вас, а к остальным вернуться после.

Перспективно-ортологичные треугольники и тетраэдры.

А.Заславский (при участии Л. и Т. Емельяновых)

1. Определения и вводные задачи

Определение 1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, и C_1C_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы.*

Определение 2. Тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы.*

1. Теорема Дезарга.

a) Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2) лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы.*

b) Докажите, что тетраэдры $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ перспективны тогда и только тогда, когда их соответствующие ребра пересекаются и точки пересечения лежат в одной плоскости (*плоскость перспективы*).

Определение 3. Треугольник $A_2B_2C_2$ называется ортологичным треугольнику $A_1B_1C_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на B_2C_2, из B_1 на A_2C_2 и из C_1 на A_2B_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности.*

Определение 4. Тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$ называется *ортологичным* тетраэдру $A_1B_1C_1D_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на плоскость $B_2C_2D_2$, из B_1 на $D_2A_2C_2$, из C_1 на $D_2A_2B_2$ и из D_1 на $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности.*

2. Взаимность ортологичности.

c) Докажите, что, если треугольник $A_2B_2C_2$ ортологичен треугольнику $A_1B_1C_1$, то и $A_1B_1C_1$ ортологичен $A_2B_2C_2$. (Центры ортологичности могут при этом не совпадать).

d) Докажите, что тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ортологичен тетраэдру $A_2B_2C_2D_2$ тогда и только тогда, когда их "антисоответственные" ребра, (например, A_1B_1 и C_2D_2) перпендикулярны.

e) Докажите, что, если тетраэдр $A_1B_1C_1D_1$ ортологичен тетраэдру $A_2B_2C_2D_2$ то тетраэдр $A_2B_2C_2D_2$ ортологичен тетраэдру $A_1B_1C_1D_1$ (центры ортологичности могут не совпадать).

В последующих задачах изучаются свойства пар треугольников (тетраэдров), являющихся одновременно и перспективными и ортоцентричными.

3. Теорема 1.

f) Пусть P — центр перспективы двух треугольников (не гомотетичных), Q — один из центров ортологичности. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна оси перспективы.

g) Пусть P — центр перспективы двух тетраэдров (не гомотетичных), Q — один из центров ортологичности. Тогда прямая PQ перпендикулярна плоскости перспективы.

4. Теорема 2.

h) Пусть P — центр перспективы двух треугольников, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Докажите, что точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой.

i) Пусть P — центр перспективы двух тетраэдров, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Докажите, что точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой.

2. Основные задачи

В этой части собраны задачи, которые можно решить с помощью теорем 1 и 2. При этом используются следующие обозначения. O — центр описанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр, G — точка Жергонна (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вписанной окружностью), N — точка Нагеля (точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника и точки касания противоположных сторон с вневписанными окружностями), P — точка, симметричная I относительно O, Q — точка, изогонально сопряженная P (т.е. прямые AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC), L — точка Лемуана (изогонально сопряженная центру тяжести).

Определение 5. Пусть X — произвольная точка в плоскости ABC, A', B', C' — точки пересечения прямых AX, BX, CX с противоположными сторонами треугольника ABC. Тогда ось перспективы треугольников ABC и $A'B'C'$ называется *трилинейной полярой* точки X относительно треугольника ABC.

5. Докажите, что трилинейная поляра точки G перпендикулярна прямой IG.

6. Докажите, что трилинейная поляра точки H перпендикулярна прямой Эйлера.

7. Докажите, что точки P, Q, N лежат на одной прямой.

8. Докажите, что трилинейная поляра точки N перпендикулярна прямой IH.

9. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, CA, AB описанной окружности ABC, не содержащих внутри себя его вершин, E, F — точки пересечения, соответственно, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. Докажите, что прямые EF и OI перпендикулярны.

10. Докажите, что точки пересечения внешних биссектрис треугольника с противоположными сторонами лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой OI.

11. Доказать, что точки пересечения прямых, касающихся описанной окружности треугольника в его вершинах, с противоположными сторонами лежат на одной прямой, перпендикулярной OL.

3. Дополнительные задачи

12. Докажите, что если два треугольника ортологичны, и центры ортологиности совпадают, то треугольники перспективны.

13. Верно ли утверждение предыдущей задачи для тетраэдров?

14. Рассмотрим все тетраэдры, перспективно-ортологичные данному тетраэдру $ABCD$. Найти геометрическое место

j) центров перспективы;

k) центров ортологичности.

15. Попробуйте найти новые следствия теорем 1 и 2.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д. 3а.

Контактные телефоны: (095) 362-91-70, (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефоны для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2004 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2004 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

С сентября 2000 выходит "Обозрение Z" — научно-популярное приложение к журналу "Математическое образование". Условия подписки (адрес, реквизиты, стоимость одного номера) — те же, что и для журнала.

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Mathematical Education **№3 (30), 2004**

Contents