Математическое Образование

Журнал фонда математического образования и просвещения

Год восьмой

№ 4 (31)

Октябрь - декабрь 2004 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 4 (31), 2004 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (31), октябрь – декабрь 2004 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2004 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.12.2004 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Три заметки о решении математических задач

В. Б. Дроздов

Автор рассматривает разные способы решения достаточно сложных задач, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах по математике. Статья может быть полезна для учителей и учащихся старших классов, занимающихся подготовкой к вступительным экзаменам.

1. Возможны варианты...

В далеком уже 1965 году в одном из вариантов вступительных экзаменов по математике на мехмате МГУ предлагалась такая задача:

Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Ответ в задаче таков:

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \quad y = 2k\pi + \frac{\pi}{3};$$

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}, \quad y = 2k\pi - \frac{\pi}{3},$$

где k и n — любые целые числа.

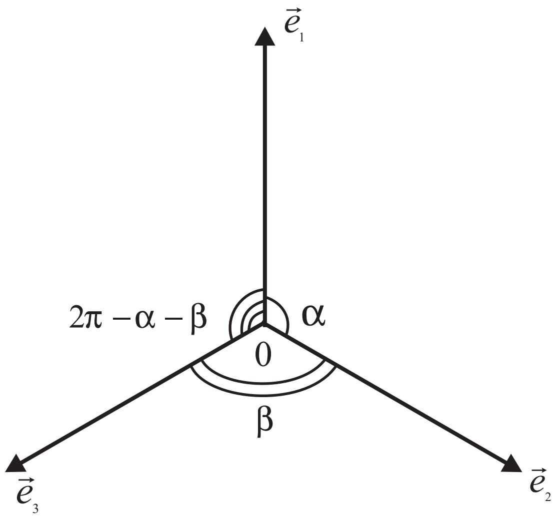


Рис. 1

Задача замыкала вариант: была четвертой и последней, а, значит, наиболее трудной. Ну, а где трудность — там, как правило, и оригинальность, и математический интерес. Такого рода задачи обычно допускают довольно много решений, что мы и увидим ниже. Эти решения, исходящие из различных математических идей, полезны и для современного абитуриента, и его учителя.

Прежде всего, зададим себе вопрос: а как была придумана данная задача? Ответив на него, мы и получим первое решение. Вероятнее всего, задача имеет "векторное происхождение". Действительно, рассмотрим три различных единичных вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, лежащие в одной плоскости и исходящие из одной точки, см. рис. 1. Очевидно неравенство $(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2 \geq 0$, откуда имеем $\vec{e}_1{}^2+\vec{e}_2{}^2+\vec{e}_3{}^2+2\vec{e}_1\vec{e}_2+2\vec{e}_1\vec{e}_3+2\vec{e}_2\vec{e}_3 \geqslant 0$, что легко приводится к виду $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta) \leqslant \frac{3}{2}$.

Положив здесь $\alpha=\pi-x$, $\beta=\pi-y$, получим

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y) \leqslant \frac{3}{2},$$

причем равенство будет в том, и только в том случае, когда

$$\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Легко видеть, что последнее равенство возможно, если только каждый вектор лежит на биссектрисе угла, образованного двумя другими векторами.

То есть при условиях: $\begin{cases} \alpha+\frac{\beta}{2}=2\pi-\alpha-\beta+\frac{\beta}{2}, \\ \frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\alpha}{2}+2\pi-\alpha-\beta, \end{cases}$
из которых следует, что $\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$.

Но тогда $x=y=\frac{\pi}{3}$. А с учетом периодичности косинуса и его четности, приходим к приведенному выше ответу.

Теперь посмотрим, а не решается ли уравнение (1) "в лоб"? Если мы захотим перенести наши проблемы с тригонометрии на алгебру, то воспользуемся формулами: $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$,

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

И после несложных преобразований получим довольно компактное равенство:

$$9\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+1=0.$$

Достаточно очевиден и решающий ход:

$$(9\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}-6\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}+1)+(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2})=0,$$

или

$$(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}-1)^2+(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\text{ - }\operatorname{tg}\frac{y}{2})^2=0.$$

Теперь имеем легко решаемую систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2}. \end{cases}$$

распадающуюся на две системы:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Отсюда уже немедленно получается ответ.

Легко проверить, что значения $x = \pi + 2\pi m$, $y = \pi + 2\pi l$, где $m, l \in \mathbb{Z}$, корнями первоначального уравнения не являются. Это надо сделать, так как при этих x и y не существуют $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

А не поможет ли нам производная, изучаемая сейчас в школе, в отличие от шестидесятых годов прошлого века? Рассмотрим функцию $f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$. Не беда, что переменных две, ибо любую из них можно рассматривать как параметр, произвольно ее фиксируя.

Конечно, фактически это завуалированное применение частной производной, но формально мы обходимся без введения этого понятия.

Сначала считаем y параметром и имеем периодическую функцию от x $f(x) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$, определенную на всей числовой прямой. Эта функция может в силу своей периодичности и области определения иметь наибольшее и наименьшее значения только в нулях собственной производной. Итак, $f'(x) = 0$.

Аналогично рассуждая, приходим к функции $f(y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$ и уравнению $f'(y) = 0$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sin x + \sin(x + y) = 0, \\ -\sin y + \sin(x + y) = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $\sin y - \sin x = 0$. То есть $2\sin\dfrac{y-x}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0$, откуда или $y = x + 2\pi m$ или $y = -x + \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

В первом случае $f(x) = 2\cos x - \cos 2x = -2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \frac{3}{2} - 2(\cos x - \frac{1}{2})^2$. Следовательно, $f(x) \leqslant \frac{3}{2}$, причем равенство будет только при $\cos x = \frac{1}{2}$, то есть при $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$.

А значит, и $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Здесь знаки берем одновременно или оба верхние, или оба нижние из-за симметрии x и y в данном уравнении.

Во втором случае $f(x) = 1 = const$, то есть решений нет.

Естественно поискать решение тригонометрического уравнения, “центр тяжести” которого лежал бы именно в тригонометрии. Вот одно такое решение. Последовательно имеем:

$$\cos x + \cos y - \cos x\cos y + \sin x\sin y = \frac{3}{2},$$

$$\sin y \sin x + (1 - \cos y)\cos x = \frac{3}{2} - \cos y.$$

Далее вводим вспомогательный угол:

$$\sqrt{2(1-\cos y)} \cdot \sin\left(x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos y}{\sin y}\right)\right) = \frac{3}{2} - \cos y.$$

Так как $\cos y \neq 1$ (иначе $\sin x = 0$ и мы получим неверное равенство $1 = \frac{3}{2}$), то

$$\sin\left(x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos y}{\sin y}\right)\right) = \frac{\frac{3}{2} - \cos y}{\sqrt{2(1-\cos y)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\left|\frac{3}{2} - \cos y\right|}{\sqrt{2(1-\cos y)}} \leqslant 1, \tag{2}$$

что легко приводится к неравенству $|1/2+Z|/\sqrt{Z} \leqslant \sqrt{2}$, где $Z = 1-\cos y$. Последнее неравенство быстро преобразуется к $(Z-\frac{1}{2})^2 \leqslant 0$. То есть $Z = \frac{1}{2}$ и $\cos y = \frac{1}{2}$. В силу симметрии переменных x и y в исходном уравнении, мы вправе сразу написать: $\cos x = \frac{1}{2}$. Осталось лишь убедиться, что в решении двух простейших тригонометрических уравнений $y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ и $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad (k, n \in \mathbb{Z})$ нужно брать одновременно или оба верхних знака, или оба нижних. Только тогда пары x и y будут удовлетворять уравнению (1).

Следующие два тригонометрических решения приводятся в книге Г. Дорофеева, М. Потапова, Н. Розова “Математика для поступающих в вузы”, М., “Дрофа”, 2000 на с. 485-487. Дадим их тоже, чтобы не заставлять читателя искать это классическое пособие для поступающих в вузы, если его у кого-либо нет под рукой. Естественно, будем идти до принципиально важного рубежа в решении, после которого читателю уже все ясно.

Уравнение (1) представим в виде $\cos x + 2\sin(\frac{x}{2} + y)\sin\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$.

Очевидно, что $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ (в противном случае $\cos x = \frac{3}{2}$).

Поэтому $\sin(\frac{x}{2} + y) = (\frac{3}{2} - \cos x)/2\sin\frac{x}{2}$, а, следовательно,

$$\left|\frac{\frac{3}{2} - \cos x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant 1. \tag{3}$$

Неравенство (3) совершенно идентично неравенству (2), отличаясь от него фактически только обозначением независимой переменной.

Преобразуем уравнение так:

$$-2(\cos x + \cos y) + 2(\cos(x+y) + 1) = 0,$$

$$(4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x-y}{2}) + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0,$$

$$(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2})^2+\sin^2\frac{x-y}{2}=0.$$

Ясно, что уравнение (1) сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} 2\cos\frac{x+y}{2}=\cos\frac{x-y}{2}, \\ \sin\frac{x-y}{2}=0, \end{cases}$$

решение которой не составляет проблем

Среди вышеприведенных решений есть более или менее короткие, более или менее изящные, более или менее искусственные. Конечно, абитуриент в условиях экзаменационного лимита времени даст одно, ну, может, два решения. Рассматривая задачу не спеша, можно найти решений гораздо больше.

2. Поиск решения математической задачи

Решение достаточно трудной математической задачи — творческий процесс, регламентировать который заранее известным алгоритмом нельзя. Однако, такое решение и не является математическим трюком или фокусом — оно имеет свою логику. Сделав первый шаг, мы видим второй, после которого третий... И так до конца, то есть до верного ответа. Вот эту логику, своего рода "математическую кухню" решения задачи методически целесообразно продемонстрировать учащимся. Сделаем это на примерах трех задач: алгебраической, геометрической и тригонометрической.

В 1977 году поступающим на мехмат МГУ было предложено решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0 \\ z^3-9y^2+27y-27=0 \\ x^3-9z^2+27z-27=0 \end{cases} \tag{1}$$

Два решения системы (1) дано в книге Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехника, М.К. Потапова "Задачи вступительных экзаменов по математике", М., "Наука", 1986, с. 138-139. Мы ниже дадим два иных решения. Вначале отметим, что решение (3, 3, 3) просто бросается в глаза. Вот только как доказать, что оно единственное? А это самое трудное.

Первое решение. Введем вспомогательную функцию $f(x)=\sqrt[3]{9x^2-27x+27}$. Тогда $y=f(x)$, следовательно, $z=f(y)$, а тогда $x=f(z)$. Таким образом получим систему уравнений

$$\begin{cases} y=f(x), \\ z=f(y), \\ x=f(z), \end{cases}$$

из которой сразу вытекает, что $f(f(f(x)))=x$.

Воспользуемся результатом, приведенным в книге Л.М. Лихтарникова "Элементарное введение в функциональные уравнения", СПБ, "Лань", 1997, стр. 114-115, задача 1.26* а): *Если непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет тождеству $f(f(f(x))) = x$, $x \in \mathbb{R}$, то при любом значении $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f(x) = x$.*

Итак, приходим к уравнению $x = \sqrt[3]{9x^2 - 27x + 27}$, легко преобразуемому к виду $(x-3)^3 = 0$, откуда $x = 3$. Дальнейшее ясно. Решение короткое, но придумать его не так-то легко.

Второе решение. Сразу отметим, что идти "в лоб", выражая из одного уравнения любую переменную и подставляя ее в два других уравнения, бесполезно. Столь сложные системы уравнений так не решаются, в чем при желании можно убедиться.

Логично опереться на тождества сокращенного умножения, для чего перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\begin{cases} y^3 - 3^3 = 9x(x-3) \\ z^3 - 3^3 = 9y(y-3) \\ x^3 - 3^3 = 9z(z-3) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (y-3)(y^2+3y+9) = 9x(x-3) \\ (z-3)(z^2+3z+9) = 9y(y-3) \\ (x-3)(x^2+3x+9) = 9z(z-3) \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку уравнения системы (2) структурно похожи, проделаем с ними одну и ту же операцию. А именно, перемножим их левые и правые части, и, перенеся все в левую часть получившегося уравнения, вынесем за скобки общий множитель:

$$(x-3)(y-3)(z-3)((x^2+3x+9)(y^2+3y+9)(z^2+3z+9) - 729xyz) = 0.$$

Видим, что система уравнений (1) распадается на четыре системы. Первые три — легкие: с любыми двумя уравнениями системы (1) соседствуют однотипные уравнения:

$$x - 3 = 0, \quad y - 3 = 0, \quad z - 3 = 0.$$

В четвертой системе к двум любым уравнениям системы (1) добавляется весьма громоздкое уравнение:

$$(x^2+3x+9)(y^2+3y+9)(z^2+3z+9) - 729xyz = 0 \qquad (3)$$

Сначала отметим, что $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Действительно, $x^3 = 9(z^2 - 3z + 3) = 9(z - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, откуда $x > 0$. Более сильное неравенство нам и не нужно.

Аналогично $y > 0$ и $z > 0$. Но тогда возможны такие преобразования уравнения (3) (попытку перемножить скобки отвергаем как заведомо бесперспективную):

$$(x + \frac{9}{x} + 3)(y + \frac{9}{y} + 3)(z + \frac{9}{z} + 3) = 729$$

(мы разделили обе части уравнения (3) на $xyz \neq 0$).

Теперь модифицируем первую скобку (две другие аналогично):

$$x + \frac{9}{x} + 3 = (\sqrt{x})^2 - 6 + (\frac{3}{\sqrt{x}})^2 + 9 = (\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}})^2 + 9.$$

Следовательно,

$$((\sqrt{x} - (\frac{3}{\sqrt{x}})^2 + 9)((\sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{y}})^2 + 9)((\sqrt{z} - \frac{3}{\sqrt{z}})^2 + 9) = 9^3. \qquad (4)$$

Легко видеть, что из уравнения (4) вытекает система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0, \\ \sqrt{y} - \frac{3}{\sqrt{y}} = 0, \\ \sqrt{z} - \frac{3}{\sqrt{z}} = 0, \end{cases}$$

с решением (3, 3, 3), удовлетворяющим системе уравнений (1).

Итак, найденное решение (3, 3, 3) — единственное.

Оба решения задачи имеют сильные и слабые стороны. Первое — краткое, математически элегантное. Это решение олимпиадного типа. Однако его трудно придумать. Второе решение весьма элементарное, но достаточно громоздкое. К нему в принципе самостоятельно мог бы прийти обычный учащийся, твердо знающий школьный курс алгебры.

В 1960 году абитуриенты мехмата МГУ столкнулись с такой геометрической задачей:

“Площадь треугольника ABC удовлетворяет соотношению $S = a^2 - (b-c)^2$, где a, b, c — стороны треугольника, противолежащие углам A, B и C. Найти угол A.

Перед решением геометрической задачи надо выбрать метод решения: алгебраический, векторный, координатный. Интуиция подсказывает, что метод координат здесь эффективен не будет, ибо произвольный треугольник плохо вписывается в прямоугольную декартову систему координат.

Первое решение: (алгебраическое). Так как стороны a, b, c треугольника входят и в условие задачи, и в формулу Герона, то разумно рассмотреть систему уравнений:

$$\begin{cases} S = a^2 - (b-c)^2, \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{cases} \qquad (5)$$

Но в формулу (6) входит еще полупериметр треугольника $p = \frac{a+b+c}{2}$. Он туда введен не зря, а для упрощения формулы Герона. Поэтому введем величину p и в формулу (5):

$$S = (a-b+c)(a+b-c) = (2p-2b)(2p-2c) = 4(p-b)(p-c). \qquad (6)$$

Вариант удаления величины p из формулы (6) отбрасываем, как неперспективный. Из формул (5) и (6) легко выводится следствие:

$$16(p-b)(p-c) = p(p-a). \tag{7}$$

К формуле (7) надо добавить соотношение между сторонами треугольника и искомым углом A. Какое? Теорема $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ приводит к громоздким вычислениям, ибо не содержит p, который придется исключать из формулы (7).

Пройдите для интереса самостоятельно этим путем. В итоге получится $A = \arccos\frac{15}{17}$. А мы не хотим этот полупериметр p терять. Тогда, очевидно, целесообразно использовать формулу $tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$, где $r = \frac{S}{p}$ — радиус вписанной в треугольник окружности. Имеем:

$$tg\frac{A}{2} = \frac{S}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Теперь формула (7) приводит нас к результату:

$$tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{16(p-b)(p-c)}} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } \quad A = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}.$$

Отсюда, кстати, следует, что $\arccos\frac{15}{17} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}$, что легко проверить и непосредственно.

Второе решение (векторное), см. рис.2. Раскрываем скобки в формуле (5): $S = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$. Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то $S = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 - \vec{c}^2 + 2bc = (\vec{b} + \vec{c})^2 - \vec{b}^2 - \vec{c}^2 + 2bc = 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2bc = 2bc(\cos(\pi - A) + 1) = 2bc(1 - \cos A)$

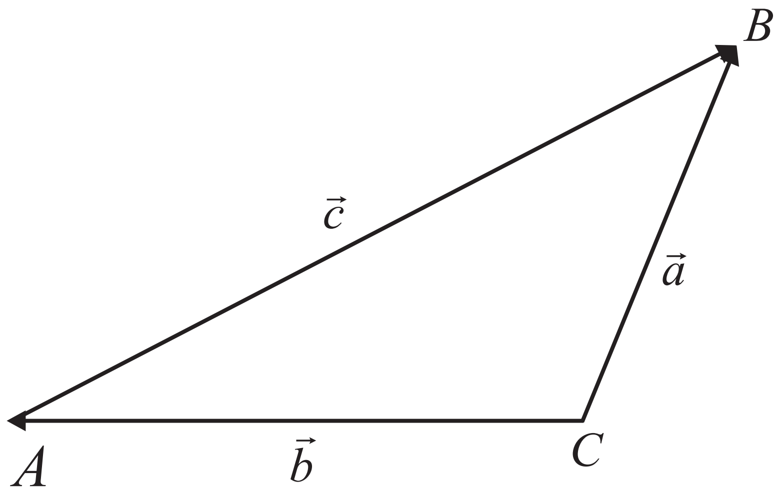


Рис.2

С другой стороны, $S = \frac{1}{2}bc\sin A$. Сразу приходим к тригонометрическому уравнению $4(1 - \cos A) = \sin A$, которое проще всего решать, учитывая, что $0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$:

$$8\sin^2\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}, \;\; 4\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2},$$

$$tg\frac{A}{2}=\frac{1}{4},\ \ A=2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}.$$

Видим, что векторное решение оказалось несколько компактнее алгебраического. Зато в первом случае нам даже не понадобился чертеж.

В 1979 году поступающие в МФТИ решали довольно интересное тригонометрическое уравнение:

$$\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0. \tag{8}$$

Займемся им и мы.

Первое решение: Поскольку левая часть уравнения (8) имеет третью степень относительно косинуса, то ее логично разложить на множители. Но для этого нам придется из трех слагаемых сделать четыре, чтобы сгруппировать их по два.

Последовательно имеем:

$$\sin x+\sin^2 x+\cos x(1-\sin^2 x)=0,$$

$$\sin x(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)=0,$$

$$(1+\sin x)(\sin x+\cos x-\sin x\cos x)=0.$$

Уравнение (8) распадается на два. Из уравнения $\sin x=-1$ сразу находим: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Осталось решить уравнение $\sin x+\cos x-\sin x\cos x=0$. Если в тригонометрическое уравнение входят только алгебраическая сумма синуса и косинуса и их произведение, то применяется такая замена переменной: $\sin x+\cos x=t$. Отсюда выводим: $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$, тогда $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$. Из квадратного уравнения $t-\dfrac{t^2-1}{2}=0$ имеем $t_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ и решаемое уравнение распадается на два: $\sin x+\cos x=1\pm\sqrt{2}$.

Применяя известную формулу $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, легко получаем: $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Уравнение $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$решений не имеет. Корни уравнения $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ таковы:

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)+\pi k, \tag{9}$$

где $k\in\mathbb{Z}$.

Второе решение: Если мы хотим перенести тяжесть решения с тригонометрии на чистую алгебру, то идея, как это сделать, лежит на поверхности, ибо она известна из теории.

Формулы:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \tag{10}$$

после очевидных технических выкладок приводят уравнение (8) к уравнению шестой степени относительности $t = tg\frac{x}{2}$:

$$t^6 - 2t^5 - 7t^4 - 4t^3 - t^2 - 2t - 1 = 0.$$

Последнее уравнение, несмотря на его "внушительный" вид, достаточно просто преобразуется, если заметить выражение $-(t^2+2t+1) = -(t+1)^2$, стоящее в конце левой части:

$$t^3(t^3 - 2t^2 - 7t - 4) - (t + 1)^2 = 0,$$
$$t^3(t^3 + 2t^2 + t - 4t^2 - 8t - 4) - (t + 1)^2 = 0,$$
$$t^3(t(t + 1)^2 - 4(t + 1)^2) - (t + 1)^2 = 0,$$
$$(t + 1)^2 \cdot (t^4 - 4t^3 - 1) = 0.$$

Из уравнения $tg\frac{x}{2} = -1$ следует, что $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

А довольно компактное уравнение четвертой степени

$$t^4 - 4t^3 - 1 = 0$$

не имеет рациональных корней. Поэтому следующий шаг будет нестандартным.

Так как нам удобнее иметь рядом со старшим членом вместо кубического слагаемого линейное, то сделаем это подстановкой $t = \frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y^4} - \frac{4}{y^3} - 1 = 0, \text{ откуда } \quad y^4 + 4y - 1 = 0 \tag{11}$$

Для решения уравнения (11) разложим его левую часть на множители:

$$y^4 + 4y - 1 = (y^4 + 2y^2 + 1) - (2y^2 - 4y + 2) = (y^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}y - \sqrt{2})^2 =$$

$$= (y^2 - \sqrt{2}y + (1 + \sqrt{2}))(y^2 + \sqrt{2}y + (1 - \sqrt{2})).$$

Дальнейшее очевидно: $y_{1,2} = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$ и $t_{1,2} = \dfrac{2}{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}$.

Теперь находим корни уравнения (8):

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}} + 2\pi m, \tag{12}$$

где $m \in \mathbb{Z}$. Проверка показывает, что величины $x = \pi + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, при которых не существует $tg\frac{x}{2}$, не удовлетворяют уравнению (8).

Задача решена. Но часто бывает полезно и интересно извлечь из ее решения какое-либо следствие. Сопоставим формулы (9) и (12), для чего разобьем формулу (9) на две формулы:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + 2\pi m, \text{ (при } k = 2m).$$

$$x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) + 2\pi m, \;\; (\text{при } k = 2m+1).$$

Но тогда находим два числовых равенства:

$$2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}} - \arcsin(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}. \tag{13}$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}} - \arcsin(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}. \tag{14}$$

Формулы (13) и (16) далеко не столь тривиальны, как полученная выше формула $\arccos\frac{15}{17} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}$.

Попробуйте их вывести непосредственно.

3. Призрак прямоугольного треугольника

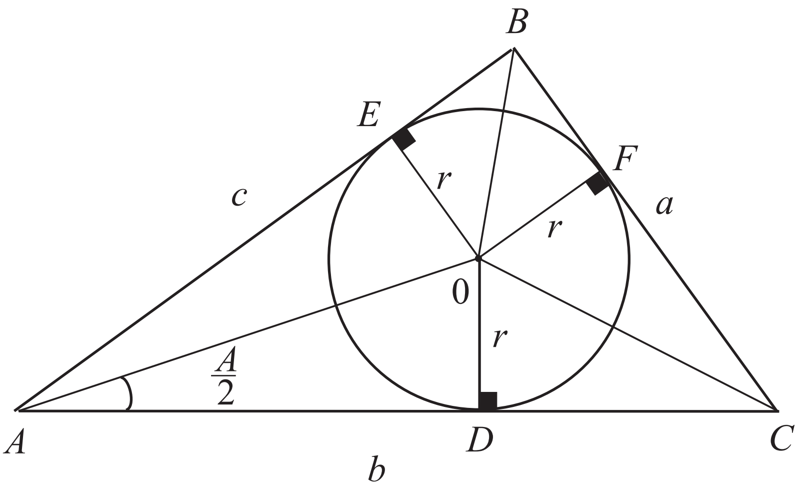
Листая старую книгу...

В книге “Геометрия в задачах” пособии для учащихся школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики (автор Фетисов А.И., “Просвещение”, 1977) на с.16 приведена весьма интересная геометрическая задача, отмеченная знаком особой трудности двумя звездочками: “Доказать, что необходимым и достаточным условием, чтобы данный треугольник был прямоугольным, является равенство

$$2R + r = p, \tag{1}$$

где R радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности, p полупериметр треугольника”.

По сути задачи содержит такой признак прямоугольного треугольника: “Если полупериметр треугольника равен сумме диаметра описанной окружности и радиуса вписанной окружности, то этот треугольник прямоугольный”.



Необходимость доказывается тривиально (сделайте это сами!). Ниже воспроизведем со страниц 86-87 доказательство достаточности, поскольку найти книгу, изданную более четверти века назад, проблематично.

“Поскольку $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4rp}$ (здесь S площадь треугольника), из соотношения $2R + r = p$ получаем:

$$\frac{abc}{2rp} + r = p, \quad abc + 2r^2p = 2rp^2.$$

Так как $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$,

$$r^2p = (p-a)(p-b)(p-c). \tag{2}$$

Поэтому $2rp^2 = 2(p-a)(p-b)(p-c) + abc$,

$$4r^2p^4 = 4(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 + 4(p-a)(p-b)(p-c) + a^2b^2c^2.$$

Заменяя опять r^2p выражением из формулы (2), получим:

$$4(p-a)(p-b)(p-c)(p^3 - (p-a)(p-b)(p-c) - abc) = a^2b^2c^2. \tag{3}$$

Но $p^3 - (p-a)(p-b)(p-c) - abc = p^3 - p^3 + (a+b+c)p^2 - (bc+ca+ab)p + abc - abc =$ $= (a+b+c)p^2 - (bc+ca+ab)p$.

Поэтому из соотношения (1) находим:

$$4p(p-a)(p-b)(p-c)((a+b+c)p - (bc+ca+ab)) = a^2b^2c^2.$$

Согласно формуле площади треугольника

$$4p(p-a)(p-b)(p-c) = 4S^2 = \frac{1}{4}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2).$$

Заменяя p на $\frac{1}{2}(a+b+c)$, получаем:

$$\frac{1}{4}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2)(\frac{1}{2}(a+b+c)^2 - (bc+ca+ab)) = a^2b^2c^2,$$

$$(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 8a^2b^2c^2,$$

$$-a^6 - b^6 - c^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^2c^4 + b^4c^2 + c^2a^4 + c^4a^2 - 2a^2b^2c^2 = 0,$$

$$a^2(-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + c^4) - b^6 - c^6 + 2a^2b^4 - a^4b^2 + b^2c^4 + b^4c^2 + c^2a^4 - 2a^2b^2c^2 = 0,$$

$$a^2(-a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + c^4) + b^2(-b^4 - a^4 + 2a^2b^2 + c^4) - c^2(c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2) = 0.$$

Но $c^4 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2 = c^4 - (a^2 - b^2)^2 = (c^2 + a^2 - b^2)(c^2 - a^2 + b^2)$.

Окончательно получим:

$$(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0.$$

Равенство нулю любого из этих сомножителей означает, что в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других. Из теоремы, обратной теореме Пифагора (или из теоремы косинусов), выводим, что треугольник прямоугольный".

Столь громоздкое решение заставляет поискать другие решения. Тем более, что математически интересно решить одну задачу разными способами.

Три формулы

Для дальнейшего потребуются три формулы:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}, \tag{4}$$

$$p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \tag{5}$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{6}$$

Докажем их.

а) См. рис. Обозначим $AD=x$, тогда $AE=x$ (т.к. $\Delta AOE=\Delta AOD$) и $BE=c-x$. Далее: $FC=DC=a-(c-x)=a-c+a$. Поскольку $AD+DC=b$, то $x+a-c+x=b$, откуда $2x=b+c-a=2p-2a$. Значит, $x=p-a$ и формула (4) очевидна.

б) $$p=\frac{a+b+c}{2}=R(\sin A+\sin B+\sin C)=R\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=2R\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)=$$

$$=2R\cos\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

в) $$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{p}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot\sin C}{p}=$$

$$=\frac{2R^2\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Алгебраическое решение

Из формул (5) и (6) следует: $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \frac{r}{p}$,

или, учитывая равенство $A + B + C = \pi$,

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(\frac{1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}\right) = \frac{r}{p}. \tag{7}$$

Преобразуем формулу (6):

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) =$$

$$= 4Rtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} = \frac{4Rtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)}{\left(1 + tg^2\frac{A}{2}\right)\left(1 + tg^2\frac{B}{2}\right)} =$$

$$= \frac{4Rtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)}{1 + tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{B}{2}} = \frac{4Rtg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\left(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)}{\left(1 - tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\right)^2 + \left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}\right)^2}. \tag{8}$$

Обозначим $tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} = x$, $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} = y$.

Тогда уравнения (7) и (8) образуют такую систему:

$$\begin{cases} y = \frac{p}{r}x(1 - x), \\ r = \dfrac{4Rx(1 - x)}{(1 - x)^2 + y^2}. \end{cases}$$

Очевидно, что $0 < x < 1$ (иначе $y < 0$, а это невозможно).

Подставляя y из первого уравнения системы во второе, приходим с учетом формулы (1) к кубическому уравнению:

$$(2R + r)^2x^3 - (2R + r)^2x^2 + (4R + r)rx - r^2 = 0.$$

С целью разложения левой части последнего уравнения на множители, представим квадратичное и линейное слагаемые в виде суммы двух величин:

$$\left((2R + r)^2x^3 - 2R(2R + r)x^2 + (2R + r)rx\right) + \left(-(2R + r)rx^2 + 2Rrx - r^2\right) =$$

$$= (2R + r)x\left((2R + r)\,x^2 - 2Rx + r\right) - r\left((2R + r)x^2 - 2Rx + r\right) =$$

$$= \left((2R + r)\,x - r\right)\left((2R + r)x^2 - 2Rx + r\right).$$

Выписываем корни: $x_1 = \dfrac{r}{2R + r}$; $x_{2,3} = \dfrac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2}}{2R + r}$.

Заметим, что по теореме Виета $x_2x_3 = \dfrac{r}{2R + r}$, то есть $x_2x_3 = x_1$.

Пусть $x_1 = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} tg \dfrac{B}{2}$, $x_2 = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} tg \dfrac{C}{2}$, $x_3 = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$.

Из получившегося уравнения $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$ сразу следует $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = 1$ и $C = 90^\circ$.

Из этого решения вытекают два интересных следствия. Так как корни x_2 и x_3 заведомо существуют, то дискриминант $R^2 - 2Rr - r^2 \geqslant 0$. Значит в прямоугольном треугольнике верно неравенство $R \geqslant (1+\sqrt{2})r$. Это неравенство более сильное, чем справедливое для любого треугольника $R \geqslant 2r$.

Очевидно, что равенство в доказанном неравенство будет тогда и только тогда, когда $x_2 = x_3$, то есть в случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Начертите его и убедитесь, что $\operatorname{tg} 22,5^\circ = \dfrac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$.

Проведенное решение будем считать алгебраическим, ибо алгебра в нем заметно превалирует над тригонометрией. Оно достаточно громоздко, поэтому поищем другое решение.

Тригонометрическое решение

Из формул (1), (5), (6) сразу имеем тригонометрическое уравнение

$$1 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

где $A + B + C = \pi$. Следовательно,

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Преобразуем произведения $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ и $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$ в суммы:

$$1 = \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) -$$
$$- \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{A+B}{2}\right).$$

Переносим все слагаемые в левую часть и продолжаем ликвидировать тригонометрические произведения:

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left(\sin\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) - (\sin A - \cos A) - (\sin B - \cos B) = 0.$$

Заменим $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$ и применим формулу дополнительного угла:

$$2\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sin\left(A - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(B - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0.$$

Теперь сумму синусов преобразуем в произведение, ибо появится коэффициент 2, на который поделим обе части уравнения:

$$\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{A+B-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=0.$$

При замене $A+B=\pi-C$ появляется общий множитель $\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)=0;$$

$$\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{-A+B+C}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B+C}{4}\right)=0;$$

$$\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Легко видеть, что

$$\sin\left(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}.$$

А второй и третий сомножители аналогичны первому.
Очевидно, что чисто тригонометрическое решение также весьма сложно.

Комбинированное решение

Каждое из приведенных выше решений математически интересно само по себе. Однако вряд ли можно назвать любое из них математически эстетичным.

А ведь данный признак прямоугольного треугольника математически красив: изящное соотношение трех линейных элементов. Поэтому продолжим поиск математически красивого доказательства. Оказалось, что такое доказательство содержит и геометрический, и тригонометрический, и алгебраический компоненты. То есть является комбинированным.

Вначале отметим, что формула (4) выведена из чисто геометрических соображений.

Из формул (1), (4) и теоремы синусов следует: $\frac{a}{\sin A}+(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=p$.

Так как $\sin A=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$, то сразу приходим к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$:

$$\left(\frac{2p}{a}-1\right)tg^2\frac{A}{2}-\frac{2p}{a}tg\frac{A}{2}+1=0.$$

Его дискриминант $D=4\left(\frac{p}{a}-1\right)^2$, а корни: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)_1=1$; $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)_2=\frac{a}{b+c}$.

В первом случае очевидно, что $A = 90^\circ$.

Во втором случае последовательно имеем:

$$\frac{S}{p(p-a)} = \frac{a}{b+c};$$

$$a^2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(b+c)^2(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c);$$

$$a^2(a+b+c)(b+c-a) = (b+c)^2 \cdot (a+b-c)(a-b+c);$$

$$a^2((b+c)^2 - a^2) = (b+c)^2 \cdot (a^2 - (b-c)^2);$$

$$(a^2)^2 - (b^2-c^2)^2 = 0;$$

$$(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, или $B = 90^\circ$, или $C = 90^\circ$. Задача решена.

P.S. Разобранная задача встречается в математической литературе крайне редко. Автор просмотрел немало книг по геометрии, но нигде ее больше не нашел.

Дроздов Виктор Борисович
390026, г.Рязань, ул. Высоковольтная, д.31, кв.22.
тел. 75-70-92

Элективный курс «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАЛЬНОСТИ (дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов)» Учебное пособие для учащихся 11 класса Глава 1

А. Н. Земляков

Продолжаем публикацию глав учебного пособия, предназначенного для учащихся 11 классов с углубленным изучением математики. В предыдущих номерах журнала был опубликован методический и методологический комментарий к пособию. В настоящем номере печатается глава 1. В следующем номере будет опубликована глава 2. В полном объеме пособие готовится к изданию в издательстве МЦНМО.

Задача этой книги — на конкретных примерах использования школьной математики (курса алгебры и начал анализа) показать, как математика может быть приложена к анализу окружающей нас действительности, проявляющей себя в разнообразных природных процессах, от «простого» механического движения до биологической эволюции. Математика со времени своего зарождения была во многом направлена на решение практических задач. Но поразительная эффективность математики в исследованиях естественных наук проявила себя в полной мере только в XVII в. В значительной степени это связано с зарождением и становлением математического анализа как мощного орудия не только объяснения реальности, но и научного предсказания.

Для Ньютона неотъемлемой частью изобретенного им и Лейбницем метода математических исследований были дифференциальные уравнения — уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, решавшихся еще за пять тысячелетий до н. э. в Вавилоне и Египте, а функции, описывающие те или иные процессы — движения (от брошенного камня до обращения планет), эволюционные изменения (от размножения бактерий до биоценоза) и проч.

Дифференциальные уравнения, говоря на современном языке, являются важнейшими математическими моделями реальных процессов, помогающими рассчитывать и космические траектории, и ядерные реакции, прогнозировать ход процессов.

В данной книге и приводятся многочисленные примеры математического моделирования реальной действительности, доступные для понимания и осознания на школьном уровне изучения математики. Книга предназначена старшеклассникам, выбирающим направление своего профессионального образования и склонным разобраться в том, какова действительная роль математики в науке и практике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

Очень многие процессы в живой и неживой природе, а также в социальных, общественных системах могут быть описаны как изменения каких-то *параметров* изучаемой системы во времени. Таким образом, меняющаяся, «динамичная» система *эволюционирует* во времени, и одна из задач математики, занимающая доминирующую роль начиная с XVII в. (со времени открытия методов *математического анализа*) — это разработка математических моделей эволюции (изменения во времени) — так называемых *эволюционных моделей*.

Эволюция, от лат. evolutio — «развертывание», в широком смысле — синоним термина «развитие», в узком смысле, который подразумевается в нашем случае — это просто любое изменение, а совсем конкретно — непрерывное, постепенное (во времени!) количественное изменение той или иной *системы*, каких-то ее числовых характеристик, параметров[1]. В некоторых случаях удается узнать (например, экспериментально) явную *функциональную* зависимость рассматриваемых параметров от времени — тогда мы знаем *закон изменения*, т. е. совокупность каких-то *функций* $x_i = x_i(t)$ от переменной–времени $t \in \mathbb{R}$. Тогда эта совокупность и представляет собой *математическую модель эволюции*. Гораздо чаще заранее, до математического исследования, указать зависимость параметров от времени не удается, однако можно как-то (опять-таки, например, экспериментально) узнать ***скорость*** *изменения*, и математическая модель строится на основе этой информации. Такие модели мы и будем называть *эволюционными*.

В этом параграфе мы опишем, как именно строятся эволюционные модели, здесь и в следующем параграфе рассмотрим общие и частные примеры эволюционных моделей.

1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины

Напомним (см. учебники алгебры и начал анализа) что *производная числовой функции* $f : x \mapsto y = f(x)$ в точке x такой, что f определена в некоторой ее *окрестности* $\text{Окр}_x = (x - r, x + r)$, называется *предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \tag{1}$$

при условии, что *этот предел существует.* Предельное равенство (1) означает, что разность

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \alpha_x(h) \tag{2}$$

стремится к нулю при h, стремящемся к нулю — или, иначе говоря, разность $\alpha_x(h)$ есть *бесконечно малая* в нуле. А это, в свою очередь означает, что величина $\alpha_x(h)$ становится *сколь угодно близкой к нулю при достаточно малом значении* h: каково бы ни было положительное число ε, найдется такое значение $\delta > 0$, что при любом значении $h \in (-\delta, \delta)$ величина $\alpha_x(h)$ будет отличаться от нуля меньше, чем на ε, что можно записать с помощью *кванторов* —

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \qquad \forall\, h \in (-\delta, \delta) \quad |\alpha_x(h)| < \varepsilon$$

(«$\forall$»— *квантор всеобщности*, «для любого...», «для всех...»; «$\exists$»— *квантор существования*, «существует...», «найдется...»).

Понятие производной — одно из двух основных понятий *математического анализа* — ввели в конце XVII в. независимо друг от друга англичанин *Исаак Ньютон* (1643–1727) и германец *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (1646–1716). Спустя

[1] В отличие от *революции* — от лат. revolutio, что значит «поворот», «переворот».

сотню лет французские математики *Жан ле Рон Д'Аламбер* (1717–1783) и *Жозеф Луи Лагранж* (1736–1813) дали определение производной, опираясь на интуитивное понятие предела (и сам термин «*производная*», и ее обозначение предложил Лагранж; Ньютон называл ее «флюксией», а Лейбниц связывал с понятием «дифференциала»— о чем см. в главе 4). Наконец, еще через век немецкий математик *Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс* (1815–1897) подвел под понятие производной строгий фундамент, дав точные определения и производной, и предела, придумав для этого использованный выше «язык ε–δ».

Нас не столько интересуют строгие определения производной, предела, бесконечно малой, сколько *смысл* понятия производной. Первичный ее смысл наиболее отчетливо выделялся у самого Ньютона: *производная функции $y = f(x)$ в точке x есть* ***скорость изменения*** *переменной величины y в зависимости от переменной x в конкретной точке x*. Что это означает?

Проще всего объяснить указанный *наглядный смысл* производной так. Если *аргумент x* функции f изменяется на величину h (*приращение аргумента* $\Delta x = h$ может быть и отрицательным), то *значение* функции изменяется как раз на величину $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, и за *среднюю скорость изменения y* на промежутке от x до $x+h$ естественно принять отношение приращения функции к приращению аргумента. Предел же средней скорости при $h \to 0$[1] — это и есть *скорость изменения функции в точке*, равная производной $y'(x) = f'(x)$.

Это объяснение становится совсем естественным, если, как Ньютон, считать, что переменная x есть *универсальная переменная* ***время***. Однако все-таки в механике (кинематике) скорость есть *вектор*, а введенная скорость изменения функции есть *число, скаляр*. Скалярная величина, в отличие от векторной, не имеет *направления*. Но зато она имеет *знак*, который и показывает, «в какую сторону»— возрастания или убывания — изменяется величина y. Так что, исходя из наглядного смысла производной, понятно, что если на каком-то промежутке I производная $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на нем, а если $f'(x) < 0$ на I, то функция убывает[2].

Хотя с векторными и скалярными величинами физики и математики имели дело и хорошо управлялись уже давно (можно упомянуть Кеплера с его 2-м законом, равно как и Ньютона), сами термины и точно определяемые понятия вектора и скаляра ввел только в 1845 г. ирландский математик и астроном *Уильям Роуан Гамильтон* (1805–1865), знаменитый изобретением так называемых *кватернионов* — аналога чисел в четырехмерном пространстве. Термин *вектор* — от лат. vector — «несущий», в математике — *направленный отрезок* (или элемент так называемого *векторного пространства*). *Скаляр* — от лат. scalaris — «ступенчатый»; так называются численные величины, со знаком или без такового (длины, площади, объемы; температура и т. д.).

1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной

К кинематическому понятию скорости–вектора и его связи с производной мы вернемся далее, а пока напомним *геометрический смысл производной*. На графике функции $y = f(x)$ рассматриваются две точки, $M_x(x; f(x))$ и $M_{x+h}(x+h; f(x+h)$, и связанный с ними «характеристический треугольник» $M_x M_{x+h} N$ (рис. 1). Из него видно, что отношение Δy к $\Delta x = h$ («бывшая» средняя скорость) есть *угловой*

[1] При h, стремящемся к нулю.

[2] Напомним, что *строгое* доказательство этих *признаков монотонности* требует применения *теоремы Лагранжа* — одной из *основных* теорем дифференциального исчисления, да и всего математического анализа.

коэффициент $k = k_x(h)$ *секущей* $M_h M_{x+h}$. Интуитивно ясно, что для «хороших» функций эта секущая при $h \to 0$ стремится к *касательной* к графику. Замечая, что угловой коэффициент $k = k_x(h)$ при этом стремится к производной $f'(x)$ (конечно, если она существует), обычно *по определению* и полагают, что *касательная к графику* $y = f(x)$ *в точке с абсциссой* $x = x_0$ *есть проходящая через эту точку прямая, угловой коэффициент которой равен производной* $k_0 = f'(x_0)$. Проводя через точку $M_0(x_0; f(x_0)$ графика *вспомогательные оси координат*, координатами точки $(x; y)$ в которой будут $(x - x_0; y - f(x_0))$ (рис. 2), можем сразу написать уравнение касательной[3]:

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0) \iff y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Просто *по определению касательной* производная функции в точке x_0 есть *угловой коэффициент касательной* к графику функции в точке графика с рассматриваемой абсциссой. В этом и состоит (при нашем определении касательной довольно тавтологический!) *геометрический смысл производной*.

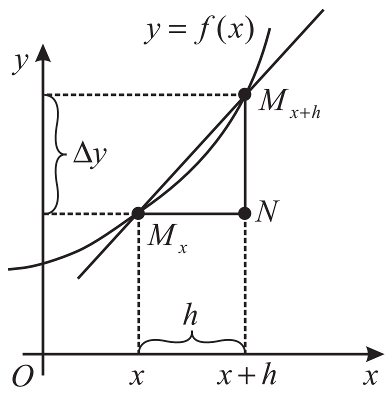


Рис. 1

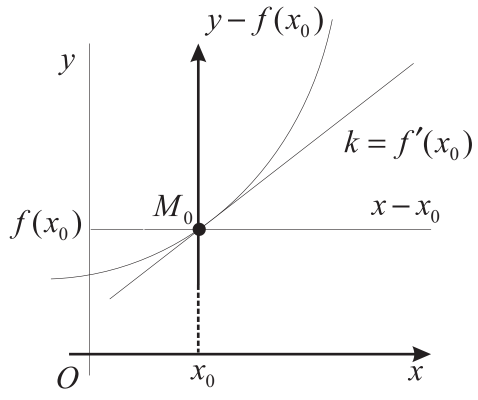


Рис. 2

1.1.3. Понятие линейного приближения

Теперь нечто новое и существенное. Линейная функция (3), задающая касательную к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, называется ***линейным приближением*** *функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Это понятие относится к числу самых основных в анализе числовых функций и различных его обобщений (типа анализа функций *нескольких* переменных или *функционального анализа*). Чтобы прояснить *смысл линейного приближения*, рассмотрим разность самой функции $f(x)$ и ее линейного приближения (3), т. е. величину

$$R = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right). \tag{4}$$

Не замечаете ли вы в выражении в скобках нечто знакомое, уже встречавшееся?

[3] Во вспомогательных координатах $\overline{x}; \overline{y}$ это будет уравнение *прямой пропорциональности* $\overline{y} = k_0\overline{x}$.

— Конечно, это фигурирующая в формуле (2) *бесконечно малая* (при $x - x_0 \to 0$, т. е. при $x \to x_0$) разность между средней скоростью на промежутке от x_0 до x и производной $f'(x_0)$, т. е. скоростью изменения функции f в точке x_0. Заменив обозначения: x вместо x_0, $x+h$ вместо x, так что $x - x_0$ теперь будет просто h, мы можем переписать формулу (4) в виде

$$R = f(x+h) - f(x) - f'(x)h = h\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right) = h\alpha_x(h),$$

откуда следует представление

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\alpha_x(h). \tag{5}$$

В обозначениях же формулы (4) последняя формула будет выглядеть как

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x). \tag{6}$$

Обе последние формулы называются *формулами линейного приближения функции f в точке* x_0 (формула (5)) или *в точке* x (формула (6)). Отбросив в этих формулах последние слагаемые, мы получим *приближенные формулы* (линейные приближения),

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \tag{7}$$

и

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{8}$$

абсолютная погрешность вычисления по которым равна $|R|$, а погрешность по отношению к приращению аргумента (h или $x - x_0$) стремится к нулю (при $h \to 0$ или $x \to x_0$).

Иначе формулы (5)–(6) называются *формулами Тейлора* первого порядка с *остаточным членом* $R = h\alpha_x(h)$ или $(x - x_0)\alpha(x)$. Если функция f в окрестности точки, в которой рассматривается линейное приближение, «достаточно хорошая», то остаточный член имеет *порядок* h^2. Например, если f имеет вторую производную $f''(x) \overset{def}{=} (f'(x))'$, то он может быть записан в виде $R = \frac{1}{2}f''(c)h^2$, где c — какая-то точка между x и $x+h$ (говорят, это *остаточный член в форме Лагранжа*). Естественно, при малых значениях h членом порядка h^2 можно пренебречь по сравнению с линейным членом $f'(x)h$ (конечно, в случае, когда он *отличен от нуля*, т. е. $f'(x) \neq 0$), и приближенные формулы (7)–(8) имеют большую точность.

Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик и философ, приверженец Ньютона в его «споре» с Лейбницем о приоритете в открытии математического анализа, член и секретарь Лондонского королевского общества (Royal Society — аналога Академии наук), обессмертивший свое имя открытием (в 1712 г.) указанной формулы (произвольного порядка) и соответствующего бесконечного *степенно́го ряда* (о них см. далее §§ 3.1, 3.3).

Пример 1. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ формула (5) имеет вид

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h.$$

Воспользуемся этой формулой для вычисления приближенного значения числа $\sqrt{17}$, для чего запишем число 17 в виде $16+1=x+h$. Тогда $\sqrt{x}=\sqrt{16}=4$, и линейное приближение дает:

$$\sqrt{17}=\sqrt{16+1}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot h=4+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot 1=4+\frac{1}{8}=4,125.$$

Точные вычисления значения $\sqrt{17}$ дают десятичные знаки 4, 123105..., так что абсолютная погрешность формулы линейного приближения в данном случае меньше двух тысячных! $\square$

Заметим, что если для какого-то числа k можно записать, что

$$f(x+h)=f(x)+kh+h\alpha(h), \tag{9}$$

где $\alpha(h)$ — бесконечно малая в нуле, то из формулы (9) получаем:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-k=\alpha(h)\to 0 \quad\text{при}\quad h\to 0,$$

поэтому существует предел выписанного отношения при $h\to 0$, причем он равен k. Иными словами, *существует производная* $f'(x)=k$ (см. п. 1.1.1).

Следовательно, существование представления (*линейного приближения*) вида (9) эквивалентно условию дифференцируемости (существования производной) функции, а коэффициент k линейного приближения и есть производная $f'(x)$.

Именно существование линейного приближения вида (9) выбрал в качестве *определения дифференцируемости* Карл Вейерштрасс в своих лекциях 1861 г. Он утверждал, что как раз это определение отражает «*истинный смысл производной*». Заметим, что из наших рассуждений следует, что *из всех прямых, проходящих через точку* $M_0(x_0;f(x_0))$, *именно* ***касательная****, угловой коэффициент которой равен производной* (по определению касательной!) ***наиболее близко прилежит к графику*** $y=f(x)$ *в окрестности этой точки* — в том смысле, что для разности $R=f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R}{x-x_0}=0 \iff k=f'(x_0)$$

(обдумайте). Это утверждение, называемое *теоремой о линейном приближении*, и является, по Вейерштрассу, сутью определения производной. Собственно вейерштрассов подход к «истинному смыслу» производной нам далее не нужен — достаточно будет наглядного, геометрического и излагаемого ниже *кинематического* ее «смыслов», интерпретаций. Однако теорема о линейном приближении и серия формул (5)–(8) пригодятся при анализе простейших эволюционных и *динамических* моделей (о последних речь в следующем параграфе).

Уже упоминавшийся немецкий математик *Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс* (1815–1897; между прочим, учитель *Софьи Ковалевской*) уделял особое внимание строгому обоснованию математического анализа. Так, в 1861 г. он впервые строго сформулировал определение предела на современном языке, ввел понятие окрестности точки, и вообще «навел полный порядок» в изложении анализа. Именно Вейерштрасс ввел понятие абсолютного значения (модуля) действительного числа и само обозначение $|x|$. Строгое введение рациональных и иррациональных действительных чисел у него базировалось на понятии предела последовательности сумм дробей, в частности, десятичных (так что, как поныне принято и в школьных учебниках, действительное число трактовалось как бесконечная десятичная дробь). К этому кругу вопросов относится и входящая в школьный курс алгебры и начал анализа *теорема Вейерштрасса о достижении наибольшего/наименьшего значений* (одна из многих, носящих его имя). Один из основоположников математики XX века *Давид Гильберт* (1862–1943) очень высоко ценил вклад Вейерштрасса в математическое образование и в саму математическую науку, заметив в 1900 г. по этому поводу: «*Заблуждение думать, что строгость в проведении доказательств — враг простоты. Напротив, многочисленные примеры показывают, что более строгий метод является также наиболее простым и доступным*». Мы не будем оспаривать эту точку зрения.

1.1.4. Движение по прямой

Для описания движения материальной точки *по прямой* достаточно ввести на этой прямой координаты или, иначе, считать прямую *координатной осью* — скажем, Ox, — и рассмотреть числовую функцию $x = x(t)$, задающую координату точки в момент времени t. Тогда и *скорость движения*, которая, в соответствии с определением скорости, принятом в физике (механике), равна производной от координаты по времени, есть числовая функция $v = v(t) = x'(t)$. Такова же и скорость изменения скорости, т. е. *ускорение*: скалярная функция $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$, т. е. *вторая производная* координатной функции $x(t)$, которую называют также *законом движения*. Тем самым мы приготовились к описанию простейших кинематических моделей движения по прямой.

Движение по прямой или вдоль прямой — как бы самое простое из движений, но однако и его описание в *динамических* моделях, относящихся к движениям под действием известной силы, далеко не просто (см. § 1.2 и главу 5). Пока мы ограничимся простейшей *кинематической* моделью.

Кинематика — от греч. $\varkappa\iota\nu\varepsilon\omega$, kineo — «двигать», $\varkappa\iota\nu\eta\mu\alpha(\tau o\zeta)$, kinema(tos) — «движение» («движущийся»): раздел *механики*, в котором движение рассматривается только с геометрической точки зрения, безотносительно к его вызвавшим «причинам», т. е. *силам*.

Динамика — от греч. $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\zeta$, dynamis — «сила», $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varkappa o\zeta$, dynamikos — «имеющий силу», «сильный»: раздел *механики*, изучающий движение в зависимости от действующих сил. Динамикой также называют состояние, ход движения или какого-либо изменения (например, *динамика численности популяции* — см. далее).

Наконец, наименование «*механика*» происходит от греч. $\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$, mechane — «орудие», «машина» (а также «выдумка», «хитрость», «средство», «приспособление»), $\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\varkappa o\zeta$, mechanikos — «механический» в смысле «относящийся к машинам» (а также «изобретательный», «хитрый»!). *Классическая механика* (в отличие от *квантовой*) изучает перемещения *в пространстве*[1] с различных точек зрения; *теоретическая механика* занимается общими законами движения и в каком-то смысле может считаться особым разделом математики (один из объектов изучения механики — как раз *дифференциальные уравнения*).

Пример 2. Движение без ускорения, т. е. *с ускорением, равным нулю*, задается соотношением

$$a(t) = v'(t) \equiv 0 \quad \text{или} \quad x''(t) \equiv 0.$$

С точки зрения математики записанные соотношения суть ***дифференциальные уравнения***, т. е. уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, а *функции*, причем известна (записана как уравнения) информация о производных искомых функций.

[1]Мы пока рассматриваем движение *по прямой*, являющееся *частным случаем* движения в пространстве; см. далее п. 1.1.6.

Дифференциальное уравнение *первого порядка* (с *первой* производной) $v' = 0$ означает, что скорость изменения функции $v(t)$ нулевая, т. е. функция «не меняется», является постоянной, *константой*[2], $v(t) \equiv v_0 = \text{const}$. Строгое доказательство этого факта (*признака постоянства функции*: если на промежутке I $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv \text{const}$ на I) использует *теорему Лагранжа о конечном приращении* — оно приведено в § 2.1.

Дифференциальное уравнение *второго порядка* (со *второй* производной) $x'' = 0$ записываем как «цепочку» (или *систему*) дифференциальных уравнений первого порядка

$$x' = v, \quad v' = 0.$$

Второе из этих уравнений мы уже решили: $v(t) = v_0 = \text{const}$, — так что остается разрешить первое уравнение, принимающее вид $x' \equiv v_0$. Изменение с *постоянной скоростью* описывается, например, *прямой пропорциональной зависимостью* $x = v_0 t$ (тогда $x' = (v_0 t)' = v_0$), но, как и выше, к этой функции $v_0 t$ можно добавить *произвольную константу*. Получается, что координата меняется по линейному закону $x(t) = v_0 t + \text{const}$, причем $x(0) = 0 + \text{const} = \text{const}$, так что кинематический смысл константы в том, что она равна координате в нулевой момент времени, $x(0) = x_0$.

Таким образом, закон движения без ускорения задается *линейной* функцией $x(t) = At + B$, где константы A и B однозначно определяются *начальными условиями*: $A = x'(0) = v(0) = v_0$, $B = x(0) = x_0$. Такое движение называется *равномерным*.
□

1.1.5. Одномерные эволюционные модели

Во многих случаях состояние той или иной системы характеризуется одним параметром, $x = x(t)$. С точки зрения математики изучение такой системы — все равно, что анализ *движения воображаемой точки* $X_t = X_t(x(t))$ *по прямой* — оси Ox. В этом случае ось Ox играет роль совокупности всех возможных *конфигураций, состояний* системы, в общем случае называемое ее *конфигурационным пространством*. Здесь конфигурационное пространство *одномерно*, ибо состояние описывается всего одним числом, и говорят об *одномерных системах* (или системах «с одной *степенью свободы*») и об отвечающих им *одномерных моделях*.

Как уже говорилось в начале параграфа, часто бывает известна (то ли из эксперимента, то ли из теоретических рассмотрений) информация о скорости изменения величины $x(t)$, т. е. о *производной* $x'(t)$. Как правило, скорость изменения зависит только от значения самой величины, и можно записать соответствующее *дифференциальное уравнение*

$$x'(t) = F(x(t)) \ \text{ или просто } \ x' = F(x), \tag{10}$$

которое и является *математической моделью* эволюционирующей одномерной системы.

[2] От лат. constans, constantis — «постоянный»; отсюда же и имя *Константин*!

Такая ситуация типична, например, для моделей эволюции биологических систем, относящихся к *одной популяции*[1]. Они формулируются как *законы изменения численности популяции* $x = x(t)$, записанные через *скорость* $x'(t)$ изменения этой численности (измеряемой в тех или иных единицах; популяция считается *достаточно большой* для того, чтобы изменение численности $x(t)$ можно было считать *непрерывным* и говорить о *скорости изменения*). Приведем несколько простейших примеров.

Пример 3. ***Линейная модель***, дающая, как мы увидим в главе 3, быстрый (*экспоненциальный*) рост численности популяции при *линейной зависимости скорости роста от численности* (при достаточных «жизненных» условиях — при наличии жизненного пространства и питательной среды), описывается *линейным* дифференциальным уравнением

$$x'(t) = \alpha x(t).$$

Конкретный пример: «*не очень много карасей в очень большом пруду*».

Иногда выписанный закон изменения называется *уравнением Мальтуса*, так как (вроде бы) первым его получил в 1798 г. английский экономист и священник *Т. Р. Мальтус* (1766–1734). Мальтус применил указанный закон к описанию демографической[1] ситуации в масштабах всей планеты, предсказывая перенаселенность при относительной ограниченности средств существования людей (эта концепция получила название *мальтузианство*). □

Пример 4. ***Логистическая модель*** (или *уравнение Ферхюльста*) учитывает, что при большой численности популяции наряду с пропорциональным численности $n = n(t)$ *приростом* имеет место и пропорциональная квадрату численности *убыль* популяции:

$$n'(t) = \alpha n(t) - \gamma n^2(t)$$

или, после замены $x = \alpha n$,

$$x'(t) = x(t)(a - x(t)).$$

Эту примечательную модель мы подробно проанализируем в главе 4. Конкретный пример: «*караси в не очень большом пруду*». □

Пример 5. ***Квадратичная модель***, когда скорость роста численности популяции пропорциональная квадрату численности:

$$n'(t) = \alpha n^2(t)$$

[1] *Популяция* (от лат. populus — «народ»; франц., англ. population — «население») — совокупность особей одного вида с общим местом обитания, способная длительно существовать во времени и пространстве, а также самовоспроизводиться как элементарная единица эволюционного процесса. (Право, в этом определении не хватает единственно — дифференциального уравнения, не так ли?!)

[1] *Демография*, от греч. $\delta\eta\mu o\zeta$, demos — «народ» и $\gamma\rho\alpha\varphi\omega$, grapho — «писать», «записывать»: наука о народонаселении.

или, после той же замены $x = \alpha n$,

$$x'(t) = x^2(t).$$

Эта модель приводит, как будет показано в § 4.1, к популяционному «взрыву». Аналогичным уравнением описываются и некоторые химические реакции, предсказывая настоящий взрыв. $\square$

Во всех этих примерах популяции развивались сами по себе — без внешних воздействий, вмешательства извне. Поэтому все три дифференциальных уравнения имели вид (10) $x' = F(x)$, где функция в правой части зависит только от значения меняющегося параметра x и не зависит от времени. Подобные уравнения и модели называются *автономными*[1]. Для настоящих природных систем это типично — говоря словами известного российского математика *Владимира Игоревича Арнольда*[2], «*от времени законы природы не зависят*».

Однако в некоторых случаях приходится учитывать и зависящие от времени внешние воздействия — например, отлов карасей в пруду или, наоборот, их добавление, выпуск в пруд (время от времени!). Моделями таких систем будут уже *неавтономные* дифференциальные уравнения, имеющие вид

$$x' = F(x, t) \qquad (x'(t) = F(x(t), t). \tag{11}$$

Конкретные примеры систем такого рода приводятся в главах 3 и 5.

В чем состоит задача исследователя, если модель эволюционного процесса уже построена: записано соответствующее дифференциальное уравнение? — Сначала в том, чтобы *найти все решения* дифференциального уравнения. Отыскание всех решений того или иного дифференциального уравнения по традиции называют еще и *интегрированием* этого дифференциального уравнения, а до 1770-х гг. (до работ Лагранжа) и сами *решения* дифференциальных уравнений называли «интегралами». Причина этого будет прояснена в следующей главе.

Как будет показано в главе 4, всякое автономное уравнение вида (10) может быть в определенном смысле «проинтегрировано». После этого нужно исследовать свойства решений уравнения в зависимости от тех или иных *начальных условий*, проинтерпретировать их в терминах исходной прикладной задачи и, при возможности, предсказать возможное «поведение» рассматриваемой (в данном случае, одномерной) системы. Ну, а потом, конечно, следовало бы проверить сделанные выводы, однако, как мы увидим в § 3.4, эксперимент по проверке теоретических выводов может оказаться небезопасным.

Как будет ясно из главы 4, возможность проинтегрировать дифференциальное уравнение вида (10) вовсе не означает выражение его решений в *элементарных функциях* (к которым относятся рациональные и иррациональные алгебраические функции, тригонометрические, логарифмические и показательные функции, а также все функции, получаемые из указанных с помощью

[1] *Автономный* (греч. $\alpha\upsilon\tau o\nu o\mu o\zeta$, autonomos, от $\alpha\upsilon\tau o$, auto — «сам» и $\nu o\mu o\zeta$, nomos — «закон») означает самоуправляющийся, самостоятельный.

[2] Одного из крупнейших в мире специалиста по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.

арифметических действий и операции взятия *композиции*, т. е. «функции от функции»). А неавтономные уравнения вида (11) могут оказаться вообще не интегрируемыми (в смысле, разъясняемом в главе 4). В том и другом случае возникает необходимость *качественного исследования* поведения решений дифференциального уравнения. Простейшие приемы такого исследования мы рассмотрим в следующей главе (в § 2.2), а вообще-то существует особая *качественная теория дифференциальных уравнений*, о которой мы упомянем в главе 5.

1.1.6. Производные и скорости в механике (кинематике)

Вернемся к связи понятий производной и скорости. Реальные движения реальных тел происходят в пространстве. Моделируемое движение материальных точек также нужно рассматривать в пространстве или иногда (скажем при движении камня, брошенного под углом к горизонту) в какой-то плоскости. Для кинематического описания таких движений уже не достаточно одной числовой функции. Выходов из положения имеется два.

Первая возможность: рассматривать вместо числовой *векторнозначную* функцию времени $t \mapsto \overline{r}(t) = \overline{OM_t}$, где O — выбранное *начало отсчета*, M_t — положение движущейся точки в момент времени t. Вектор $\overline{r} = \overline{OM}$ часто называют *радиус-вектором* точки M, а векторнозначную функцию $\overline{r} = \overline{r}(t)$ — просто *вектор-функцией*.

Название *радиус-вектор*, по сути фигурировавшее уже во 2-*м законе Кеплера* (1618 г.), в 1853 году предложил один из основателей строгого математического анализа, знаменитый французский математик *Огюстен Луи Коши* (1789–1857). Лат. radius — «спица» (в колесе), «луч»; примечательно, что термин «радиус» был введен сравнительно недавно — только в 1569 году французским математиком и философом Рамусом (настоящее имя — Пьер де ла Рам, 1515 — 24.8.1572, погиб в Варфоломеевскую ночь).

Второй подход: выбрать в пространстве (прямоугольную) систему координат $Oxyz$ и рассматривать *три* числовые функции

$$(x; y; z) = (x(t); y(t); z(t)),$$

которые суть соответствующие координаты движущейся точки M_t.

Конечно, эти подходы связаны между собой: координаты вектора $\overline{r}(t)$ суть как раз $(x(t); y(t); z(t))$. Однако если при втором подходе «напрашивается» покоординатное определение скорости движения,

$$(v_x; v_y; v_z) = (x'(t); y'(t); z'(t)),$$

то при описании движения с помощью векторнозначных функций потребуется отдельно ввести понятие их производных. Оно вполне естественно и в точности следует определению *мгновенной скорости* в физике (механике).

Именно, для определения мгновенной скорости в момент времени t рассматривается *приращение пути* за время от t до $t + h$, т. е. вектор

$$\overline{\Delta r} = \overline{r}(t + h) - \overline{r}(t) = \overline{OM_{t+h}} - \overline{OM_t} = \overline{M_t M_{t+h}},$$

потом делением на h (в математике[1] — умножением на h^{-1}) вычисляется средняя скорость на этом промежутке времени, и затем вычисляется *предел вектора средней скорости* при $h \to 0$ — *вектор*, который (в случае существования предела) и называется мгновенной скоростью движения или производной векторнозначной функции $\overline{r}(t)$ в точке (в момент времени) t:

$$\overline{v}(t) = \overline{r}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{\Delta r}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\overline{r}\,(t+h) - \overline{r}\,(t)\right).$$

Здесь нуждается в пояснении определения понятия *предела векторнозначной функции*. Оно дословно повторяет определение предела обычной числовой функции и проще всего может быть записано на «вейерштрассовом языке» ε–δ (ср. с определением *бесконечно малой* из п. 1.1.1): для векторнозначной функции $\overline{a} = \overline{a}(h)$ и вектора $\overline{c}$

$$\lim_{h\to 0} \overline{a}(h) = \overline{c} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \qquad \forall\, h \in (-\delta, \delta) \quad |\overline{a}(h) - \overline{c}| < \varepsilon$$

(как обычно, модуль или абсолютная величина вектора есть попросту его длина).

Возникает вопрос: как векторное определение скорости связано с координатным? — Ответ лучше сформулировать в терминах пределов.

Теорема 1 (о пределе векторнозначной функции в координатах). *Пусть в системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\overline{a}(h)$ записывается координатными функциями $(x(h); y(h); z(h))$, вектор $\overline{c}$ имеет координаты $(x_c; y_c; z_c)$. Тогда предел $\overline{a}(h)$ при $h \to 0$ существует и равен $\overline{c}$ тогда и только тогда, когда существуют пределы всех трех координатных функций $x(h)$; $y(h)$; $z(h)$ и равны, соответственно, x_c; y_c; z_c.*

Доказательство. Запишем фигурирующий в определении предела модуль разности векторов $|\overline{a}(h) - \overline{c}|$ через координатные функции:

$$|\overline{a}(h) - \overline{c}| = \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2}.$$

Из этого равенства следует, что если все три возводимые в квадрат разности координат стремятся к нулю, то и рассматриваемый модуль разности векторов стремится к нулю — из существования пределов координатных функций вытекает существование предела векторнозначной функции, причем этот предел (вектор) имеет координатами пределы координатных функций.

Чтобы доказать обратное, заметим, что всегда

$$\max\{|x(h) - x_c|,\ |y(h) - y_c|,\ |z(h) - z_c|\} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(x(h) - x_c)^2 + (y(h) - y_c)^2 + (z(h) - z_c)^2} = |\overline{a}(h) - \overline{c}|.$$

Значит, если модуль разности векторов стремится к нулю, таковы же и выписанные модули разностей координат. Поэтому из существования предела векторнозначной функции вытекает существование соответствующих пределов координатных функций, что и оставалось установить. ■

[1] В математике *не делят*, а только *умножают* векторы на числа.

Следствие 1 (о производной векторнозначной функции в координатах). *Пусть в системе координат $Oxyz$ векторнозначная функция $\overline{r}(t)$ записывается координатными функциями $(x(t); y(t); z(t))$. Тогда производная $\overline{r}'(t)$ существует тогда и только тогда, когда существуют производные $x'(t)$; $y'(t)$; $z'(t)$ координатных функций, причем координаты вектора $\overline{r}'(t)$ суть $(x'(t); y'(t); z'(t))$.*

Таким образом, все равно, вычислять ли скорость как вектор или вычислять ее покоординатно.

1.1.7. Геометрический (кинематический) смысл вектора скорости

Совокупность всех положений M_t, $t \in \mathbb{R}$ (или t принадлежит какому-то промежутку изменения времени) называется *траекторией* движения точки. Если это движение описывается векторнозначной функцией $\overline{r} = \overline{r}(t)$, то траектория называется еще и *годографом* этой векторнозначной функции.

Траектория — от лат. trajectorius — относящийся к перемещению, передвижению. Слово *годограф* происходит от греческих слов $o\delta o\zeta$, hodos — «дорога» и $\gamma\rho\alpha\varphi\omega$, grapho — «пишу», «рисую», так что его смысл — «дорога, описанная чем-либо». Данные понятие и термин были введены упоминавшимся выше *Уильямом Гамильтоном* при изучении криволинейного движения материальной точки.

Заметим, что в случае ненулевого перемещения вектор перемещения $\overline{\Delta r} = \overline{M_t M_{t+h}}$ направлен вдоль *секущей* $M_t M_{t+h}$ к траектории (рис. 3). Так же направлен и вектор средней скорости $t^{-1}\overline{\Delta r}$, и вектор мгновенной скорости $\overline{v}(t) = \overline{r}'(t)$ при условии, что он отличен от нуля. В этом случае *существует предельное положение секущей* $M_t M_{t+h}$ при $h \to 0$, т. е. при $M_{t+h} \to M_t$. Как и для графиков функций (см. п. 1.1.2), предельное положение секущей называется касательной к графику, так что из проведенного рассуждения получается, что *вектор скорости при движении материальной точки направлен по касательной* (рис. 4).

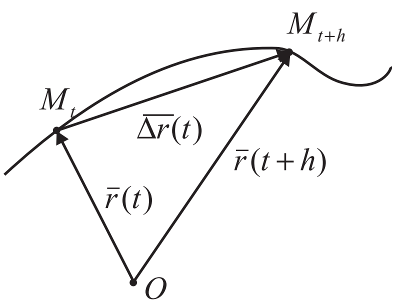


Рис. 3

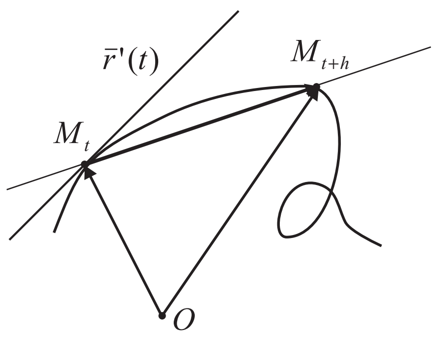


Рис. 4

С другой стороны, модуль вектора производной, то есть $|\overline{v}(t)| = |\overline{r}'(t)|$, абсолютная величина скорости, оказывается равной *скорости изменения длины пройденного пути*, то есть скорости движения точки по годографу. Мы не будем доказывать это интуитивно ясное утверждение.

Пример 6. Один из основных типов движений — *вращательное движение в плоскости*, т. е. вращение около центра O (его как раз удобно выбрать в качестве начала радиус-векторов) с постоянной угловой скоростью $\omega\ \frac{rad}{c}$ или просто $\omega\ c^{-1}$, удобно записывать с помощью поворотов векторов:

$$M_t = R^{\omega t} M_0 \quad \text{или} \quad \overline{r}(t) = R^{\omega t}\left(\overline{OM_0}\right) = r_0 \cdot R^{\omega t}\overline{e},$$

где $r_0 = OM_0$ — расстояние точки от центра вращения, $\overline{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль прямой OM_0. Если выбрать в плоскости вращения (прямоугольную) систему координат Oxy, направив ось Ox вдоль вектора $\overline{e}$, то, *согласно определению косинуса и синуса*, координатами вектора $R^{\omega t}\overline{e}$ будут $(\cos\omega t; \sin\omega t)$, так что координатная запись указанной векторнозначной функции имеет вид

$$\overline{r}(t) = (r_0\cos\omega t; r_0\sin\omega t).$$

Отсюда, согласно следствию 1, вытекает, что

$$\overline{r}'(t) = (r_0(\cos\omega t)'; r_0(\sin\omega t)').$$

С другой стороны, вектор скорости $\overline{r}'(t)$ при вращении с угловой скоростью ω легко найти, основываясь на геометрическом (кинематическом) его смысле: он направлен по касательной к траектории, т. е. к окружности, в сторону вращения, а его абсолютная величина равна линейной скорости движения по окружности, т. е. $v_0 = \omega r_0$ (рис. 5).

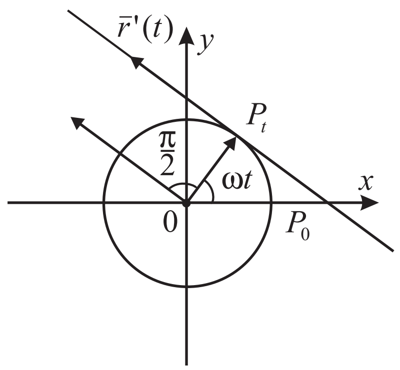


Рис. 5

Так как касательная к окружности в точке M_t перпендикулярна радиусу OM_t, вектор $\overline{r}'(t)$ получается из вектора $\overline{r}(t)$ поворотом на 90 или $\frac{\pi}{2}$ радиан с последующим умножением на ω, так что можно записать:

$$\overline{r}'(t) = \omega r_0 R^{\omega t + \frac{\pi}{2}}\overline{e} = \left(\omega r_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \omega r_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Сопоставляя эту формулу с предыдущей, мы получаем *красивые формулы дифференцирования косинуса и синуса*,

$$(\cos\omega t)' = \omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin\omega t)' = \omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Конечно, из них с помощью *формул приведения* получаются и стандартные формулы: $(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t$, $(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$. Вот какие примечательные результаты можно получить из простых геометрически-кинематических соображений. $\square$

1.1.8. Двумерная эволюционная модель Вольтерры–Лотки

При исследовании эволюционирующих систем часто приходится рассматривать сразу несколько характеризующих их состояние параметров, скажем два. Тогда нужно рассмотреть *две* функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, описывающие изменения обоих параметров во времени. С парой функций можно связать *воображаемую* точку M_t с координатами $(x(t); y(t))$ и рассматривать ее *воображаемое* движение по *конфигурационному пространству*, которое в рассматриваемом случае будет *двумерным*, т. е. *конфигурационной плоскостью* Oxy или какой-то ее частью.

Пример 7. Рассмотрим простейшую двумерную эволюционную модель «*биоценоза*[1]», состоящего из д в у х взаимодействующих популяций, когда «*в пруду* (или в озере) *сосуществуют караси и щуки*». Конечно, это не мирное сосуществование: «*хищники*» (щуки) живут только за счет поедания «*жертв*» (карасей). Сами же жертвы — «*травоядные*», т. е. поедают только растительный корм, которого достаточно.

Обозначим численность популяции жертв через $x = x(t)$, а популяции хищников — через $y = y(t)$. При отсутствии хищников «*x-популяция*» росла бы по закону Мальтуса: $x' = ax$. При наличии же «*y-популяции*» хищников наряду с приростом x-популяции со скоростью ax нужно учесть и «убыль» жертв. Простейшая гипотеза относительно убыли основана на «*теории встреч*»— на предположении, что скорость уменьшения численности жертв пропорциональна числу возможных встреч между хищником и жертвой, т. е. произведению численностей x-популяции и y-популяции (считается, что *каждый* хищник может встретиться с *каждой* жертвой и с некоторой вероятностью съесть ее!). Эта гипотеза приводит к дифференциальному уравнению для численности x-популяции:

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

(константы a и b, как и появляющиеся далее константы c и d, положительны).

Теперь разберемся с хищниками. Их прирост происходит только за счет поедания жертв и, по той же «теории встреч», скорость прироста пропорциональна произведению численностей x-популяции и y-популяции. Это дает слагаемое вида $c \cdot x \cdot y$ в скорости $y'(t)$ изменения численности y-популяции. Однако нужно учесть и естественную убыль хищников, пропорциональную их численности и играющую существенную (как потом далее видно, *стабилизирующую*) роль, когда y-популяция велика (многочисленна) или x-популяция мала (малочисленна), т. е. пищи (жертв) становится недостаточно. Таким образом, скорость $y'(t)$ изменения численности y-популяции записывается в виде

$$y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t).$$

Итак, мы приходим к системе двух уравнений,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x'(t) & = & ax & - & bxy, \\ y'(t) & = & cxy & - & dy \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(a - by), \\ y'(t) & = & y(cx - d), \end{array} \right.$$

[1] *Биоценоз* (от греч. $\beta\iota o\zeta$, bios — «жизнь», «образ жизни», «средства к жизни» и $\varkappa o\iota\nu o\zeta$, koinos — «общий») — участок общей среды обитания животных, растений и микроорганизмов.

рассматриваемых только на I четверти $x > 0$, $y > 0$ плоскости Oxy (плоскости «жертва»–«хищник»). Эта система дифференциальных уравнений — простейшая модель «*борьбы за существование*» или, как еще говорят *модель системы «хищник–жертва»*. Эта модель (соответствующая система уравнений) называется **моделью Вольтерры–Лотки**.

Вито Вольтéрра (1860–1940) — итальянский математик, занимавшийся как «чистой», так и прикладной математикой: математической физикой, приложениями математики в биологии и в социальных исследованиях. Именно им была разработана математическая теория борьбы за существование и демографической динамики. В 1920-е гг. и позже Вольтерра предложил не только указанную модель развития биоценозов, но и ряд других (им опубликовано около 30 работ на эти темы).

Альфред Джеймс Лóтка (1880–1949) — американский математик, независимо от Вольтерры предложивший ту же модель биоценоза и продолживший его разработки.

Мы проанализируем модель Вольтерры–Лотки в специальном параграфе в конце этой части (в § 6.4). $\square$

Выписанная система уравнений — это частный случай *автономной системы двух дифференциальных уравнений*, записываемой как

$$\begin{cases} x'(t) & = & A(x,y), \\ y'(t) & = & B(x,y), \end{cases}$$

и трактуемой как *дифференциальное уравнение на плоскости*. Решениями такой системы на каком-то промежутке изменения времени, $t \in I$, являются *пары* дифференцируемых функций $x(t)$, $y(t)$ таких, что при любом значении $t \in I$

$$\begin{cases} x'(t) & = & A\big(x(t), y(t)\big), \\ y'(t) & = & B\big(x(t), y(t)\big). \end{cases}$$

Если наряду с воображаемой точкой M_t с координатами $(x(t); y(t))$ на конфигурационной плоскости Oxy (или на ее части, как в модели Вольтерры–Лотки) рассмотреть векторнозначную функцию $\overline{r}(t) = \overline{OM_t}$, а также от каждой точки $M(x;y)$ плоскости отложить *вектор* $\overline{V}(x,y)$ с координатами $(A(x,y); B(x;y))$, то в соответствии со следствием 1 рассматриваемую систему дифференциальных уравнений можно записать как *одно векторное дифференциальное уравнение*

$$\overline{r}' = \overline{V}(x,y) = \overline{V}(\overline{r}) \tag{12}$$

(мы точку $M(x;y)$ заменили на ее радиус-вектор $\overline{r} = \overline{OM}$). А из геометрического смысла производной вектор-функции следует, что (воображаемая) траектория $t \mapsto M_t$, отвечающая решению $\overline{r}(t)$ последнего уравнения *в каждой своей точке касается приложенного к этой точке вектора* $\overline{V}(x,y) = \overline{V}(\overline{r})$. Вот вам и *геометрический смысл векторного дифференциального уравнения* (12) или исходной системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что если состояние системы описывается тремя параметрами, то оно аналогичным указанному выше образом отождествляется с точкой в пространстве. Если же параметров четыре, то конфигурационное пространство уже *четырехмерно*, и т. д.

Общее понятие *конфигурационного пространства произвольного числа измерений*, оказавшееся очень удобным и плодотворным для математических исследований, ввел в конце XIX в. крупнейший американский физик, механик и математик *Джозайя Уиллард Гиббс* (1839–1903) — выпускник и профессор Йельского университета, один из основоположников термодинамики и строгой статистической механики.

§ 1.2. Представление о динамических системах

В современной математике динамическими системами называются *любые* (сколь угодно мерные) системы, эволюция которых подчиняется соответствующей системе дифференциальных уравнений. Мы же в данном параграфе рассмотрим простейшие динамические системы классической механики: движение материальной точки по прямой, которая отождествляется с координатной осью Ox, под воздействием направленной вдоль этой прямой силы. В этом случае изначально нет необходимости рассматривать векторнозначные функции — как объяснялось в п. 1.1.4, можно ограничиться скалярными функциями: координатной функцией $x(t)$ и ее производными — скалярными скоростью $v(t) = x'(t)$ и ускорением $a(t) = v'(t) = x''(t)$.

В данном случае и силу можно считать не вектором, а некоторой скалярной функцией, вообще говоря, координаты, скорости и времени, $F = F(x, v, t)$. *Основной закон динамики*, т. е. *второй закон Ньютона*, записывается как *дифференциальное уравнение второго порядка* $ma = mx'' = F(x, v, t)$. Полагая входящую в уравнение массу m равной 1[1], запишем основное в данном параграфе и в главе 5 ***дифференциальное уравнение Ньютона*** в виде

$$x'' = F(x, v, t). \tag{0}$$

Это дифференциальное уравнение и является математической моделью соответствующей динамической системы. Такая система называется динамической системой *с одной степенью свободы*, но с точки зрения, изложенной в предыдущем параграфе, это будет *двумерная эволюционная модель*. С объяснений по этому поводу мы и начнем.

1.2.1. Система уравнений Ньютона. Фазовая плоскость

Числовая функция $x(t)$ называется решением дифференциального уравнения (0) на промежутке $I \in \mathbb{R}$, если она дважды дифференцируема (т. е. имеет вторую производную), причем

$$\forall\, t \in I \qquad x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Как показывает наипростейший пример 2 из предыдущего задания (случай $F \equiv 0$, уравнение $x'' = 0$), для *однозначного* определения решения уравнения Ньютона нужно задать *два начальных условия* — начальные координату и скорость. Их необязательно задавать именно при $t = 0$ — за начальный можно выбрать любой момент времени $t = t_0$. Как полагают физики, начальные условия, т. е. значения

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = v(t_0) = v_0, \tag{1}$$

[1]Или, если угодно, поделив обе части уравнения на m и вводя то же обозначение F для $\frac{1}{m}F$.

вместе с дифференциальным уравнением (0) однозначно определить *закон движения $x = x(t)$ во все моменты времени* $t \in \mathbb{R}$. В хороших случаях (а только такие мы и будем рассматривать) это действительно так.

Иначе необходимость двух начальных условий можно (и нужно) интерпретировать как необходимость *двух* величин, координаты и скорости, для точного, однозначного описания состояния нашей одномерной динамической системы. И для каждой из этих величин x, v, как в п. 1.1.8, записывается *свое* дифференциальное уравнение *первого порядка.* Для этого, как в примере 2 из п. 1.1.4, «расцепляем», записываем в «цепочку» или как *систему* дифференциальное уравнение второго порядка (0):

$$\begin{cases} x' &= v, \\ v' &= F(x, v, t). \end{cases} \tag{2}$$

Эта система называется ***системой дифференциальных уравнений Ньютона***, и понятно, что все равно, решать ли уравнение (0) или систему уравнений (2).

Так как состояние одномерной динамической системы описывается парой параметров $(x; v)$, эту пару естественно интерпретировать как (воображаемую) точку $M(x; v)$ на *фазовой плоскости Oxv.* Решению $x(t)$ уравнения (0), удовлетворяющему начальным условиям (1), отвечает решение $(x(t); v(t)) = (x(t); x'(t))$ системы Ньютона (2) и воображаемая (и изображаемая!) траектория $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ на фазовой плоскости, которая в данном случае называется *фазовой траекторией.* Исследование одномерной динамической системы предполагает отыскание или, в крайнем случае, качественное описание *всех* фазовых траекторий, которые образуют *фазовый портрет* системы на фазовой плоскости. В общем случае это неразрешимая задача. Однако она может быть решена, если наложить на силу $F = F(x, v, t)$ некоторые разумные условия. Прежде чем их сформулировать, разберем конкретный пример.

Понятие *фазовой*[1] *плоскости*, равно как и более общее понятие *фазового пространства*, ввел тот же *Уиллард Гиббс* при разработке статистической механики и векторного (или *многомерного*) *анализа.* Заметим, что состояние простейшей пространственной динамической системы: *одна материальная точка в пространстве*, — описывается *шестью* параметрами: тремя координатами точки и тремя координатами вектора скорости, — так что в этом случае фазовое пространство *шестимерно.* При рассмотрении же *двух* точек в пространстве фазовое пространство будет уже двенадцатимерным, и т. д.

Эта «многомерность» рассматривавшихся Гиббсом задач и подвигнула его на разработку векторного анализа — относительно нового в то время раздела математического анализа, в котором изучаются различные обобщения операций дифференцирования и интегрирования на «многомерные объекты» (вектор-функции, функции от векторов, векторные поля, ...). Этот раздел в середине XIX в. разрабатывали, главным образом, ирландский математик и астроном *Уильям Роуан Га́мильтон* (1805–1865; см. о нем выше) и немецкий математик, физик и филолог *Герман Гюнтер Гра́ссман* (1809–1877) — он ввел *многомерные пространства* (и многомерные векторы), открыл законы сложения цветов (цветовые ощущения им интерпретировались как трехмерные векторы), перевел с санскрита памятник древнеиндийской литературы «*Ригведу*»; Гамильтон и Грассман первыми разработали строгую теорию так называемых *комплексных чисел* (см. § 5.7). Оконча-

---

[1]Это название связано с тем, что раньше *состояния* системы нередко называли *фазами. Фаза* — от греч. $\varphi\alpha\sigma\iota\zeta$, phasis — «появление», «подтверждение», «донос». В § 5.3 это слово встретится еще в одном значении.

тельно оформил *векторный анализ* в строгую математическую науку (и дал ей это название) в 1881–1901 гг. как раз Гиббс.

1.2.2. Равноускоренное движение и свободное падение

Самый простой случай после уже разобранного примера $F \equiv 0$, — это ситуация, когда действующая сила *постоянна*, а значит, таково и ускорение: $x'' = F \equiv a = \text{const} \neq 0$. Записывая это уравнение в цепочку уравнений первого порядка (ту же систему (2)),

$$x' = v, \qquad v' = a,$$

по цепочке же их и решаем, начиная с последнего уравнения. Как мы уже видели в п. 1.1.4,

$$v'(t) \equiv a \iff v(t) = at + B,$$

где $B \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная. Чтобы решить получающееся первое уравнение $x' = at + B$, решаем по отдельности уравнения $x_1' = at$ и $x_2' = B$. Из последнего уравнения, как и выше, $x_2(t) = Bt + B_1$. Первому уравнению удовлетворяет квадратичная функция $x_2 = \frac{1}{2}at^2$, а с ней и любая функция вида $x_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + B_2$ (B_2, как и B_1, — произвольные постоянные). Складывая, записываем общее решение «суммарного» уравнения:

$$x' = at + B \iff x(t) = \frac{1}{2}at^2 + Bt + C.$$

Таким образом, мы получили *общий закон равноускоренного движения* — он оказывается квадратичным и включает две произвольные постоянные B и C, которые определяются из начальных условий (1). Считая, что в них $t_0 = 0$, получаем:

$$x(0) = C = x_0, \qquad v(0) = B = v_0 \implies x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0.$$

Впервые этот закон (как закон зависимости пути от времени) экспериментально открыл *Галилео Галилей* (1564–1642), производя опыты по бросанию камушков со знаменитой Пизанской башни, а потом изучая скатывание шарика по наклонной плоскости. В том и другом случае основная сила — это сила тяжести $F = -mg$ (чему равна сила при скатывании по плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α?). После открытия математического анализа решение соответствующей задачи стало банальной теоретической выкладкой.

Пример 1. Нарисуем *фазовый портрет* системы, описывающей движение *по вертикальной оси* Oz, направленной *вверх*, притягиваемой силой тяжести $F = -mg$ материальной точки массы m. Это движение подчиняется дифференциальному уравнению только что рассмотренного вида:

$$z'' = -g \iff z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Bt + C, \quad v(t) = z'(t) = -gt + B.$$

Чтобы нарисовать фазовые траектории на плоскости Ozv, выразим из последнего уравнения t через v и подставим это выражение в закон движения $z = z(t)$:

$$t = -\frac{1}{g}(v - B) \implies z = -\frac{1}{2}g\frac{1}{g^2}(v - B)^2 - B\frac{1}{g}(v - B) + C =$$

$$= -\frac{1}{2g}v^2 + \frac{1}{g}Bv + \mathrm{const} - \frac{1}{g}Bv + \mathrm{const} + C = -\frac{1}{2g}v^2 + \mathrm{const}$$

(одним знаком const в этих вычислениях обозначены различные и, вообще говоря, *разные* постоянные, сумма которых в последнем выражении заменена на одну константу). Таким образом, фазовые траектории на плоскости Ozv геометрически представляют собой горизонтально расположенные параболы, получающиеся из параболы $z = -\frac{1}{2g}v^2$ всевозможными параллельными переносами вдоль оси Oz (рис. 6). Движение фазовой точки по ним происходит согласно выписанным формулам для $(x(t); y(t))$ — *вправо* в верхней полуплоскости ($v > 0$, так что координата $x(t)$ возрастает) и *влево* в нижней полуплоскости (соответственно тому, что $v < 0$).

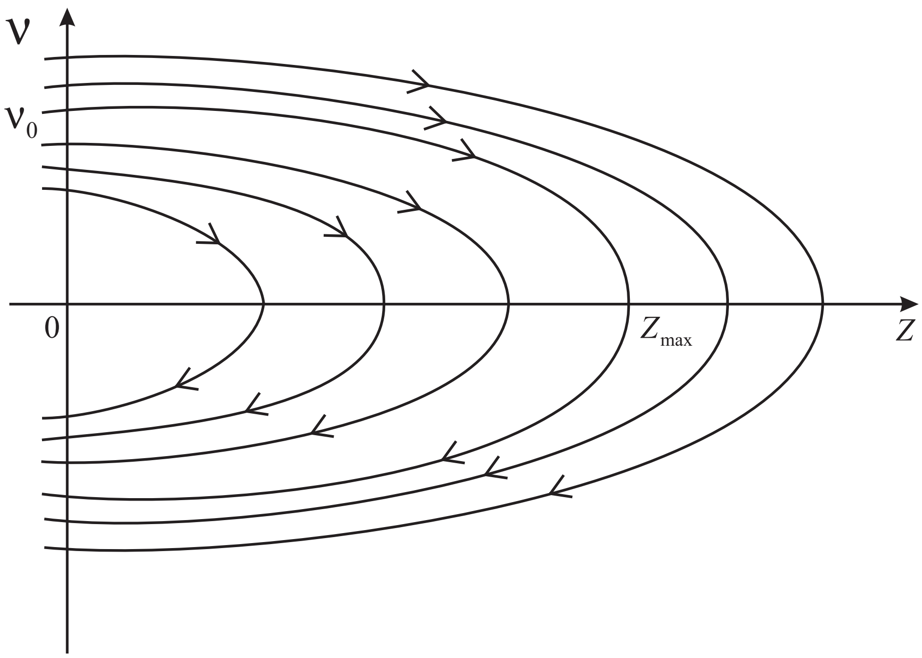


Рис. 6

Вершина каждой параболы отвечает наибольшему возможному значению z — наибольшей высоте подброшенного с уровня Земли $z = 0$ камня. Для траектории $z = -\frac{1}{2g}v^2 + \mathrm{const}$ $z_{max} = \mathrm{const}$, и если мы хотим найти наибольшую высоту по данной начальной скорости v_0 на уровне Земли $z = 0$, мы должны подставить значения $(z; v) = (0; v_0)$ в формулу для константы:

$$z_{max} = \mathrm{const} = z + \frac{1}{2g}v^2 = 0 + \frac{1}{2g}v_0^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Обратим внимание на примечательное равенство, выполняющееся на *любой фазовой траектории*:

$$z + \frac{1}{2g}v^2 = \text{const} \iff gz + \frac{1}{2}v^2 = \text{const} \iff mgz + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const},$$

или, иначе, $U(z) + T(v) = \text{const}$, где $U(z) = mgz$ — *потенциальная энергия* рассматриваемой материальной точки на высоте z над уровнем Земли (который принят за уровень отсчета потенциальной энергии), а $T(v) = \frac{1}{2}mv^2$ — *кинетическая энергия* точки массой m, движущейся со скоростью v. Таким образом, *уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости Ozv совпадают с* ***законом сохранения энергии*** для рассматриваемой системы!

Это весьма существенное обстоятельство позволяет строить фазовые портреты гораздо более общих одномерных динамических систем и находить (в некотором смысле) законы движения в них. К закону сохранения энергии мы вернемся в начале главы 5.

В данном случае закон сохранения энергии объясняет, почему наибольшая высота брошенного камня такая, как было выписано выше: из равенства $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const}$ вытекает, что высота максимальна при $v = 0$, т. е. когда *вся переданная камню при бросании с уровня $z = 0$ кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ «перетекает» в потенциальную энергию $U = mgz_{max}$*:

$$mgz_{max} = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

откуда и получается найденная ранее формула для z_{max}. □

1.2.3. Двумерная динамическая система (пример)

Сейчас в самый раз разобрать поведение хорошо знакомой из школьного курса физики динамической системы с *двумя* степенями свободы: движение камня (или снаряда, но на самом деле просто материальной точки), брошенного под углом к горизонту. Это движение будет происходить в вертикальной плоскости, с которой мы свяжем систему координат Oxz, выбрав начало в точке «запуска» и направив ось Ox по горизонтали в направлении движения, а ось Oz — по вертикали вверх. Движение подчиняется *векторному* дифференциальному уравнению Ньютона, которое удобно записать, используя координаты:

$$m(x; z)'' = \overline{F} = (0; -mg) \iff x'' = 0 \quad \& \quad z'' = -g \tag{3}$$

(здесь учтено, что вектор силы тяжести направлен вертикально вниз).

Фазовое пространство рассматриваемой системы *четырехмерно*: ее состояние определяется двумя координатами x; z и двумя компонентами (координатами по выбранным осям) скорости $v_x = x'$, $v_z = z'$, поэтому рассмотрение *фазовой траектории* в данном случае затруднительно (но: см. *задание* в конце пункта). Мы рассмотрим не воображаемую фазовую траекторию, а истинную *конфигурационную траекторию* на конфигурационной плоскости Oxz, описываемую движущейся точкой $P_t(x(t); z(t))$. Для этого нужно решить систему дифференциальных уравнений

Ньютона второго порядка (3). Раньше мы расщепляли каждое из таких уравнений на системы двух уравнений первого порядка,

$$x'' = 0 \quad \& \quad z'' = -g \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & v_x, \\ v'_x & = & 0 \end{array} \right. \& \left\{ \begin{array}{lcl} z' & = & v_z, \\ v'_z & = & -g, \end{array} \right.$$

которые затем решали «по цепочке». В данном случае в этом нет необходимости, ибо уравнения системы (3) *независимы*, т. е. каждое из них может быть рассмотрено и решено отдельно от другого.

Итак, используя результаты п. 1.1.4 и только что рассмотренного примера 1, а также начальные условия: $x(0) = z(0) = 0,\ v_x(0) = x'(0) = v_1,\ v_z(0) = z'(0) = v_2$ (v_1; v_2 — компоненты начальной скорости по горизонтали и вертикали, соответственно), — записываем:

$$x'' = 0 \qquad \& \qquad z'' = -g \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(t) = At + B = v_1 t \quad \& \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t.$$

Получается, что координата x зависит от времени линейно, а координата z — квадратично. Раз (при $v_1 \neq 0$) координата x и время попросту *пропорциональны*, траектория описывается *квадратичной зависимостью* z от x, так что *брошенный камень летит по параболе*[1]. Конечно, можно выписать эту зависимость, исследовать ее и построить конфигурационную траекторию $z = z(x)$ (рис. 7), однако все существенные характеристики этой параболы можно найти и из уже выписанных законов изменения $x = x(t)$ и $z = z(t)$, причем так будет проще (можете сравнить самостоятельно).

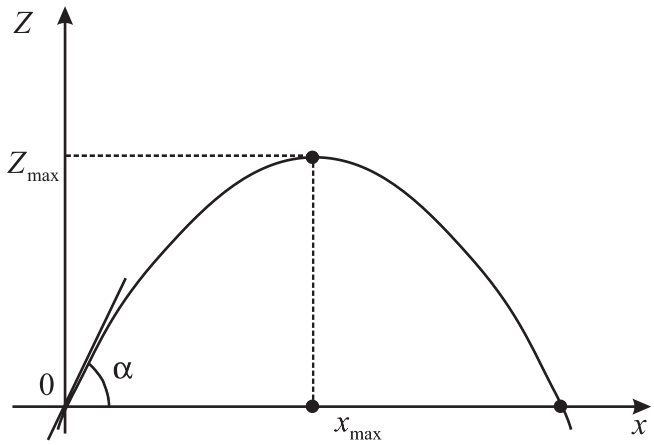


Рис. 7

Найдем сначала наибольшую дальность полета x_{max}, предположив, что абсолютная величина v начальной скорости фиксирована, так что $v_1 = v\cos\alpha$, $v_2 = v\sin\alpha$,

[1] Впервые это обнаружил также *Галилео Галилей* (и тоже *экспериментально*).

где α — угол между направлением «броска» и горизонталью. Значение x_{max} отвечает случаю, когда высота z камня становится опять равной нулю. Отсюда отыскивается соответствующий момент времени t_{max} (время всего полета) и затем значение x_{max}:

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t = 0 \implies t_{max} = \frac{2v_2}{g},$$

$$x_{max} = x(t_{max}) = v_1 t_{max} = \frac{2v_1 v_2}{g} = \frac{v^2}{g} \cdot 2\cos\alpha \sin\alpha = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Заметим, что если угол α меняется от 0 до 90, то 2α изменяется от 0 до 180, так что найденное значение x_{max} будет наибольшим, когда аргумент синуса в последнем выражении равен 90: $2\alpha = 90$, $\alpha = 45$. Таким образом, приходим к хорошо известному результату: *наибольшая дальность полета* будет, когда камень бросается под углом 45 к горизонту.

Найдем также наибольшую высоту брошенного камня при заданном значении угла α. Это будет координата $z_{max} = z_0$ вершины параболы $z = z(x)$, а чтобы ее найти, достаточно найти момент времени t_0 ее достижения. В принципе, для этого можно приравнять нулю вертикальную компоненту скорости, $v_z = z' = -gt + v_2$, однако и без этого из соображений симметричности параболы и равномерности движения по ней в горизонтальном направлении ($v_x \equiv v_1$) нетрудно сообразить, что максимум высоты достигается на полпути до падения, т. е. t_0 *вдвое меньше*, чем t_{max}:

$$t_{max} = \frac{2v_2}{g} \implies t_0 = \frac{v_2}{g} \implies$$

$$\implies z_{max} = z_0 = z(t_0) = -\frac{1}{2}gt_0^2 + v_2 t_0 = -\frac{1}{2g}v_2^2 + \frac{1}{g}v_2^2 = \frac{1}{2g}v_2^2 = \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Из формулы видно, что наибольшая высота тем больше, чем ближе угол бросания α к 90; это вполне естественно: чем «вертикальнее» мы бросим камень, тем большей высоты он достигнет.

То же самое можно получить из закона сохранения энергии в данной системе: квадрат скорости в данном случае равен $|\overline{v}|^2 = v_x^2 + v_z^2$, потенциальная энергия равна $U = U(z) = mgz$, закон сохранения энергии записывается в виде

$$U + T = mgz + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_z^2) = \text{const}.$$

При этом горизонтальная скорость $v_x \equiv v_1$ тоже постоянна, поэтому

$$U + T_z = mgz + \frac{1}{2}mv_z^2 = \text{const},$$

т. е. от общего закона сохранения «отщепляется» закон сохранения для движения по вертикали. Значит, это движение точно такое же, как было описано в примере 1, при начальной скорости «бросания вверх» $v_z(0) = v_2$. Наибольшая высота будет достигнута, когда вся начальная кинетическая энергия вертикального движения превратится в потенциальную энергию, т. е. когда

$$T_z(0) = \frac{1}{2}mv_2^2 = U(z_{max}) = mgz_{max},$$

откуда получается прежнее выражение для $z_{max} = z_0$.

Попробуем-таки представить себе, как выглядит *фазовая траектория* рассматриваемого движения в четырехмерном фазовом пространстве с координатами $(x; y; v_x; v_y)$. Можно написать законы изменения всех координат:

$$x(t) = v_1 t, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t, \quad v_x(t) = v_1, \quad v_z(t) = -gt + v_2.$$

Из третьего уравнения получается, что координата v_x остается неизменной, так что верное представление о фазовой траектории мы получим, рассматривая движение точки $\widetilde{M_t}(x(t); z(t); v_z(t))$ в обычном трехмерном пространстве с координатами $(x; z; v_z)$. (Можно сказать иначе: так же, как уравнение, например, $y = \text{const}$ выделяет в трехмерном пространстве *плоскость* [параллельную координатной плоскости Oxz], так и уравнение $v_x \equiv v_1 = \text{const}$ выделяет в четырехмерном фазовом пространстве *трехмерное подпространство* [параллельное указанному *трехмерному координатному подпространству* $Oxzv_z$!].)

Задание. Дайте описание фазовой траектории

$$x(t) = v_1 t, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t, \quad v_z(t) = -gt + v_2$$

в трехмерном пространстве $Oxzv_z$.

Подсказка. Это будет *плоская кривая.* Какая именно?

Вернемся к рассмотрению одномерных динамических систем.

1.2.4. Консервативные одномерные системы. Модель «шарик в желобе»

В случае, когда механическая система не подвержена внешним воздействиям, сила F, входящая в уравнение Ньютона (0) явно не зависит от времени[1], т. е. $F = F(x, v)$ — функция только *состояния системы*, т. е. координаты и скорости (или фазовой точки $(x; v)$).

В качестве примера силы, зависящей от скорости, можно привести *силу вязкого трения*, $F_{\text{тр}} = -\lambda v$, направленная противоположно скорости движения и пропорциональная ей (см. п.5.1.3). Наличие подобной силы приводит к так называемой *диссипации*[2] *энергии* — грубо говоря, превращению энергии движения в теплоту. В идеальном случае трение считается отсутствующим, а сила F — зависящей *только от координаты*, $F = F(x)$. Такие силы называются и соответствующие динамические системы называются ***консервативными***. Такое название связано с тем, что для таких систем *справедлив закон сохранения энергии* (*консервативный* — от лат. conservare — «охранять», «сохранять»; conservativus — «охранительный», «сохраняющий»), что мы подробно объясним и докажем в начале главы 5 (в § 5.1).

Дифференциальное уравнение Ньютона для консервативных систем,

$$x'' = F(x), \tag{4}$$

можно заменить системой уравнений Ньютона,

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = F(x), \end{cases} \tag{5}$$

[1] Вспомните: *от времени законы природы не зависят*!

[2] От лат. dissipatio — «рассеивание».

которая хотя и проще общей системы (2), но, однако, простому решению не поддается: система «перепутывает» переменные x и v между собой.

Исследованию таких и несколько более сложных уравнений и систем посвящена специальная глава 5. Здесь же мы рассмотрим весьма общую наглядную модель, которая впоследствии позволит отыскивать и анализировать фазовые портреты произвольных консервативных систем.

Именно, пусть (точечный) шарик катается без трения в плоском желобе, имеющем форму графика какой-то *дифференцируемой* функции $h = u(x)$ (рис. 8). Положение шарика определяется его координатой по оси Ox, и действующая на шарик сила тоже зависит только от x: она будет зависеть от производной функции $u(x)$ и направлена в сторону *убывания* этой функции.

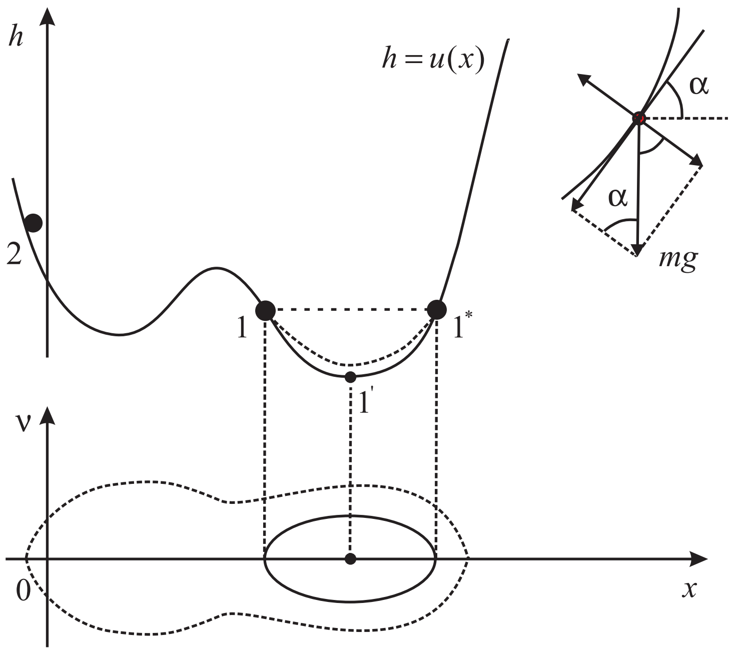


Рис. 8

Действительно, на шарик действуют две силы: направленная вниз сила тяжести, по величине равная mg, и направленная по нормали (перпендикуляру[1]) к графику $h = u(x)$ *сила реакции опоры*. Эта сила уравновешивается нормальной составляющей силы тяжести, равной $mg \cos \alpha$, где α — угол между касательной и осью Ox (см. рис. 8, справа), так что *равнодействующая* есть *тангенциальная*[1] составляющая силы тяжести, т. е. $-mg \sin \alpha$, $\alpha = \alpha(x) = \operatorname{arctg} u'(x)$. Знак «минус» перед тангенциальной составляющей показывает *направление* действия силы: если $u' > 0$, то сила направлена *влево*, а если $u' < 0$ — то вправо. Отметим, что при $u' = 0$, т. е. когда касательная к «профилю желоба» $h = u(x)$ горизонтальна, то равнодействую-

[1] *Нормаль* (от лат. normalis — «прямой») к кривой — перпендикуляр к касательной к этой кривой, проведенный в точке касания.

[1] От лат. tangens, tangentis — «касающийся».

щая равна нулю, так что *критические точки*[2] функции $u(x)$ отвечают *положениям равновесия* системы «шарик в желобе».

Мы не будем выписывать уравнение Ньютона для этой системы, ибо это требует рассмотрения так называемой «*обобщенной координаты*», а ограничимся качественным анализом поведения шарика при различных начальных условиях.

Ясно, что если шарик просто отпустить (с нулевой скоростью) в какой-то точке 1 «на правом склоне горки желоба» (см. рис. 8), то он покатится вправо, скорость будет возрастать до достижения им «ямки желоба» (положения равновесия 1' на рис. 8), а затем уменьшаться в течение того времени, пока шарик взбирается на «правый склон ямки». Так будет до тех пор, пока шарик не достигнет на правом склоне той высоты 1*, с которой он был отпущен — в точке 1* мгновенная скорость будет равна нулю, а шарик начнет немедленно скатываться обратно, вернется в точку 1, потом опять покатится вправо, и т. д. Можно изобразить условную фазовую кривую $t \mapsto M_t(x(t); v(t))$ — это будет замкнутая линия, простирающаяся от точки 1 до точки 1* и обратно, по которой по часовой стрелке осуществляется периодическое движение фазовой точки M_t (рис. 8, внизу).

Такое движение шарика и соответствующее воображаемое движение фазовой точки по фазовой кривой можно объяснить, исходя из *закона сохранения энергии* для системы «шарик в желобе». Кинетическая энергия движения равна $T = \frac{1}{2}mv^2$ (скорость v направлена по касательной к графику $h = u(x)$), потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте h, отсчитываемая от нулевого уровня энергии, за который мы примем ось Ox, равна $U = mgh = mgu(x)$, *полная механическая энергия*

$$E = U + T = mgu(x) + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}\,.$$

При уменьшении высоты $h = u(x)$ потенциальная энергия шарика убывает, переходя в кинетическую энергию — скорость возрастает. Точкам минимума функции $u(x)$ отвечают минимумы потенциальной энергии и, соответственно, наибольшие значения скорости v, и т. д.

Задание. Опишите характер движения шарика после того, как его отпустили в точке 2 на «самом левом склоне желоба». Перекатится ли при этом шарик через среднюю горку?

Указание. Воспользуйтесь показанной штриховой линией фазовой кривой на плоскости Oxv (рис. 8, внизу).

1.2.5. Пример консервативной системы: шарик на пружинке

Рассмотрим совсем конкретную и легко моделируемую как экспериментально, так и теоретически одномерную динамическую систему — колебания шарика, прикрепленного к пружине с данным коэффициентом жесткости (или упругости).

Пример 2. Пусть шарик (материальная точка) массы m прикреплен к середине горизонтально положенной пружины с закрепленными концами. Примем середину

[2] Напомним, что для дифференцируемой функции критические точки суть нули ее производной.

пружины за начало O оси координат Ox, направленной вдоль пружины (рис. 9). Согласно *закону Гука*, при отклонении шарика из положения равновесия O в точку с координатой x на него будет действовать *сила упругости*, пропорциональная отклонению x и направленная в противоположную сторону: $F = F(x) = -kx$, где $k > 0$ — коэффициент упругости пружины (этот закон и формула справедливы на относительно небольших, но сравнимых с длиной пружины отклонениях x, что, собственно, и установил экспериментально *Роберт Гук* в 1660 г.).

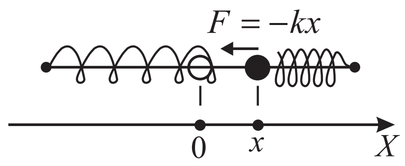


Рис. 9

Таким образом, мы имеем консервативную динамическую систему, моделируемую уравнением Ньютона вида

$$mx'' = -kx, \text{ или } x'' = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{6}$$

Как найти его решения?

В данном случае неожиданная помощь приходит со стороны кинематики — из примера 6 п. 1.1.7 мы знаем, что при дифференцировании функций $a\cos\omega t$ и $b\sin\omega t$ аргумент (говорят, *фаза*) функции увеличивается на $\frac{\pi}{2}$ и перед функцией появляется множитель ω. После второго дифференцирования мы получаем, что

$$(a\cos\omega t)'' = \omega^2 \cdot a\cos(\omega t + \pi), \qquad (b\sin\omega t)'' = \omega^2 \cdot a\sin(\omega t + \pi).$$

Но, по определению, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ суть координаты вектора $R^\alpha\overline{e}$, получающегося из единичного вектора $\overline{e}(1;0)$ поворотом на угол α, а дополнительный поворот на угол π есть *симметрия относительно начала координат* и меняет знаки обеих координат, так что предыдущие формулы для вторых производных можно переписать как

$$(a\cos\omega t)'' = -\omega^2 \cdot a\cos\omega t, \qquad (b\sin\omega t)'' = -\omega^2 \cdot a\sin\omega t.$$

Значит, обе функции, $x_1(t) = a\cos\omega t$ и $x_2(t) = b\sin\omega t$, *а с ними и их сумма*[1] $x(t) = x_1 + x_2 = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, являются решениями дифференциального уравнения (3). Можно доказать, и мы это сделаем в § 5.3, что *это все решения* уравнения (3).

Вопрос. Легко проверить, что и любая функция вида $\widetilde{x}(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3). Не противоречит ли это только что сформулированному утверждению («*Можно доказать...*»)? □

[1]Обратите внимание на это обстоятельство — *сумма решений дифференциального уравнения* (3) $x'' = -\omega^2 x$ *тоже является решением этого уравнения* — так бывает далеко не всегда.

Величины, меняющиеся по выписанным выше законам (формулам), называют *испытывающими гармонические колебания* или просто *гармоническими колебаниями*. Гармонические колебания возникают всякий раз, когда одномерная система описывается дифференциальным уравнением вида $x'' = -\omega^2 x$ или $x'' = -\lambda x$, $\lambda > 0$. Это ситуация довольно типичная при рассмотрении движений системы *вблизи ее положения равновесия*. Скажем, если шарик в желобе из предыдущего пункта движется в окрестности *устойчивого положения равновесия* — в «ямке», отвечающей минимуму профиля желоба $h = u(x)$, то при отклонении x от точки минимума, которую можно принять за начало координатной оси Ox, сила $F = F(x)$ направлена к положению равновесия, т. е. $F(x) < 0$ при $x > 0$ и $F(x) > 0$ при $x < 0$, а $F(0) = 0$ (рис. 10).

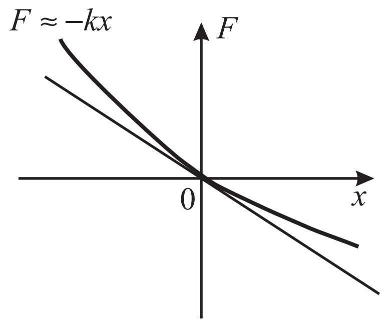


Рис. 10

Допустим, что функция $F = F(x)$, обладающая указанным свойством, *дифференцируема* в точке $x = 0$ — существует *отрицательная* производная $F'(0) = -\lambda$, $\lambda > 0$. Тогда в какой-то окрестности нуля *функцию можно заменить на ее линейное приближение*:

$$F(x) \approx F(0) + F'(0)(x - 0) = -\lambda x$$

(см. п. 1.1.3). Значит, и уравнение Ньютона можно заменить его приближением,

$$mx'' = F(x) \approx -\lambda x.$$

Вот вам и закон Гука!

Роберт Гук (1635–1703) — английский ученый-энциклопедист, секретарь и куратор экспериментов Royal Society (Лондонского королевского общества), первооткрыватель закона всемирного тяготения. Относительно последнего отметим, что примерно в одно время этот закон открыли и обсуждали не только Гук и *Исаак Ньютон*, но и *Кристофер Врен* (Wren, и в русской литературе эта фамилия часто транскрибируется как *Рен*) (1632–1723) — английский математик и астроном, член-основатель Royal Society и в 1681–1683 гг. его президент (с 1703 г. бессменным, до своей смерти, президентом Royal Society был Исаак Ньютон, с 1705 г. — уже *сэр* Исаак Ньютон), главный архитектор Лондона на протяжении 30 лет (именно Врен руководил в 1675–1710 гг. постройкой знаменитого собора святого Павла в Лондоне). Врен сотрудничал с Гуком в разрешении вопросов, касающихся законов Кеплера и закона притяжения, а также и в делах застройки Лондона — Роберт Гук также был еще и архитектором!

Еще Гук знаменит усовершенствованием микроскопа, открытием клеточного строения организмов (именно он и ввел термин «клетка»), изобретением барометра и пр. Смысл же открытого им *закона упругости для твердых тел* в том, как уже говорилось, что этот закон ($F = -kx$) справедлив *на сравнительно широком промежутке значений отклонения x*.

УПРАЖНЕНИЯ, ЗАДАЧИ И ЗАДАНИЯ к главе 1

Касательные и линейные приближения

1. Запишите линейные приближения:
1) для функции x^2 в точке $x_0 = 1$;
2) для функции $\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$;
3) для функции $3x - 2$ в точке $x_0 = 1$.

2. Может ли:
1) график функции совпадать с касательной к нему? Для каких функций?
2) касательная к графику пересекать его более чем в одной точке? Приведите примеры.

3. Нарисуйте графики непрерывных функций такие, что:
1) $D(f) = [-4; 4]$, $f(-3) = f'(0) = 0$, $f'(-3) = f(0) = 1$, $f(3) = -3$, $f'(3) = -2$;
2) $D(g) = [-1; 5]$, $g(0) = g'(1) = 0$, $g'(2) = g(2) = 1$, $g(3) = -1$, $g'(4) = -\frac{1}{2}$;

4. Напишите уравнения касательных к данным функциям в данных точках, нарисуйте эскизы графиков с касательными:
1) $y = x^3$, $x_0 = 1$;
2) $y = \dfrac{3}{x}$, $x_0 = -1$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$.

По определению, углом между графиком функции и какой-то прямой в точке их пересечения называется угол между касательной к графику в этой точке и данной прямой.

Аналогично, углом между двумя пересекающимися графиками называется угол между касательными к этим графикам в точке пересечения.

5. Найдите углы, под которыми пересекают ось абсцисс графики:

1) $y = x^3 - 3x$; 2) $y = x^3 - 3x + 2$.

6. Найдите углы, под которыми пересекают ось ординат графики:

1) $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$; 2) $y = \dfrac{1}{x-1}$.

7. В каких точках касательные к графику $y = x^3 - x$ параллельны прямым:
1) $y = x$; 2) $y = 2x$; 3) $y = -x$; 4) $y = -2x$?

8. При каких значениях параметра a график $y = \frac{1}{4}(ax - x^3)$ пересекает ось абсцисс под углом 45 (хотя бы в одной точке)?

9. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков:
1) $y = -2x + 1$ и $y = x^2 - 8x + 16$;
2) $y = 2x - 1$ и $y = x^4 + 3x^2 + 2x$.

10. Запишите приближенные формулы для вычисления значений:
1) $(x_0 + \Delta x)^n$, $(1 + h)^n$ $(n \in \mathbb{N})$;
2) $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x}$, $\sqrt[n]{1 + h}$, $\sqrt[n]{a^n + h}$ $(n \in \mathbb{N})$;
3) $\dfrac{1}{x_0 + \Delta x}$, $\dfrac{1}{1 + h}$, $\dfrac{1}{1 - h}$, $\dfrac{1 + h}{1 - h}$;

4) $\dfrac{1}{(x_0+\Delta x)^n}$, $\dfrac{1}{(1+h)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

11. Найдите приближенно, с точностью до двух знаков после запятой:
1) $\sqrt[3]{9}$, 2) $\sqrt[4]{80}$, 3) $\sqrt[7]{100}$, 4) $\sqrt[5]{33}$, 5) $10\sqrt[3]{3}$, 6) $\sqrt[3]{24}$, 7) $\sqrt[4]{9}$.

12. Сторона квадрата равна $4 \pm 0,1$ м. С какой предельной относительной погрешностью можно вычислить его площадь?

13. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара R для того, чтобы его объем можно было определить с точностью до 1% ?

14. Считая f и f' известными, запишите линейные приближения и получите из них формулы для производных следующих функций:
1) $f^2(x)$, $f(2x)$, $f(x^2)$;
2) $f^3(x)$, $f(x^3)$, $f(3x-1)$;
3) $f(x^2+2x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$;
4) $\sqrt{f(x)}$, $f(\sqrt{x})$.

15. Докажите, что невертикальная прямая $y = kx + m$ и парабола $y = ax^2 + bx + c$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и парабола имеют единственную общую точку.

16. Докажите, что не вертикальная и не горизонтальная прямая $y = kx + m$, $k \neq 0$, и гипербола $y = \dfrac{a}{x}$ касаются тогда и только тогда, когда эти прямая и гипербола имеют единственную общую точку.

17. Напишите уравнения касательных к графику $y = x^2 - 4x + 1$, проходящих через точки: 1) $(0; 0)$; 2) $(-1; -3)$.

18. Найдите точку пересечения касательной к параболе $y = ax^2$ в точке $x = z$ с осью абсцисс. Как отсюда получить способ точного геометрического построения касательной к параболе?

19. На параболе $y = ax^2$ даны две точки $M_1(x_1;\, ax_1^2)$, $M_1(x_2;\, ax_2^2)$. Касательная в какой точке будет параллельна секущей M_1M_2?

20. Докажите, что середины всевозможных хорд, параллельных данной хорде M_1M_2 параболы $y = ax^2$, лежат на одной прямой.

21. Докажите, что абсцисса точек пересечения касательных к параболе $y = ax^2$, проходящих через две данные точки $M_1(x_1;\, ax_1^2)$ и $M_1(x_2;\, ax_2^2)$, делит отрезок $[x_1, x_2]$ пополам.

22. Докажите, что касательная к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ образует с осями координат треугольник постоянной площади (какой?), причем точка касания является серединой гипотенузы этого треугольника. Как отсюда получить способ точного геометрического построения касательной к гиперболе?

23. 1) Найдите угол между прямыми, заданными своими уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

2) Докажите, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности этих прямых является выполнение равенства $k_1k_2 = -1$

24. Докажите, что касательная к полуокружности — графику $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ — перпендикулярна (как и полагается в геометрии!) радиусу, проведенному в точку касания.

25. Напишите уравнение *нормали* (перпендикуляра к касательной) к графику данной дифференцируемой функции f, проведенной через точку графика с абсциссой $x = z$.

26. Найдите кратчайшее расстояние от точек: 1) $(0; 0)$; 2) $(-1; -3)$, — до графика $y = x^2 - 4x + 1$.

27. При каких значениях параметра a касательные к графику $y = x^3 - a^2x$ в точках с абсциссами 0 и a взаимно перпендикулярны?

28. Найдите множество точек, из которых парабола $y = ax^2$ видна под прямым углом (то есть угол между касательными, проведенными к графику из этих точек, прямой).

29. Напишите уравнение общей касательной к графикам

$$y = x^2 + 4x + 8 \quad \text{и} \quad y = x^2 + 8x + 4.$$

30. В какой точке графика $y = ax^2 + bx + c$ касательная к нему проходит через начало координат?

* * *

31. Найдите производные f', f'', f''', ..., $f^{(k)}$ (k-я производная) для функции $f(x) = (a + x)^n$ *при всевозможных значениях* $k \in \mathbb{N}$.

32. Найдите производные $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, ..., $f^{(k)}(0)$ для полиномиальной функции $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ *при всевозможных значениях* $k \in \mathbb{N}$.

33. Допустим, $(a + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Найдите коэффициенты a_k, $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Коэффициенты из последней задачи принято записывать в виде $a_k = \mathbf{C}_n^k \cdot a^{n-k}$; числа $\mathbf{C}_n^k$ называются *биномиальными коэффициентами*.

34. 1) Используя факториалы[1], напишите короткую формулу для биномиальных коэффициентов (сама формула для $(a + x)^n$ записанная через биномиальные коэффициенты, называется *формулой Ньютона для степени бинома*, то есть двучлена $a + x$).

2) Найдите связь между числами $\mathbf{C}_{n+1}^k$ и $\mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{i}}$.

Указание: используйте равенство $(a + x)^{n+1} = (a + x)^n \cdot (a + x)$.

Исаак Ньютон (1643–1727) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей дифференциального и интегрального исчислений (*Лейбниц* на 28 лет раньше опубликовал свое открытие «исчисления бесконечно малых», но Ньютон на 10 лет раньше установил наличие двух взаимно связанных исчислений; его соответствующий труд «*Метод флюксий*» был опубликован лишь в 1736 г.). Заслуга Ньютона в формуле «бинома Ньютона» состоит в ее обобщении на случай произвольных (дробных или действительных) показателей степени бинома.

---

[1] На всякий случай напомним: через $n!$, «*эн факториал*», обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n; кроме того, полагают $0! = 1! = 1$.

Векторнозначные и тригонометрические функции и их производные

35. Запишите с помощью поворотов с переменным центром векторнозначную функцию, соответствующую вращению точки с угловой скоростью ω около прямолинейно и равномерно движущегося центра. Расклассифицировать годографы таких функций (в зависимости от соотношения между ... чем?).

36. Запишите с помощью поворотов векторнозначные функции, соответствующие движению точки на окружности радиуса ρ, катящейся без скольжения: 1) по прямой; 2) по другой окружности радиуса ρ_0, находясь снаружи или внутри нее. Какой вид имеют годографы этих функций?

Эти годографы называются, соответственно, *циклоидами, эпициклоидами* и *гипоциклоидами*. Название циклоиде дал в 1598 году знаменитый *Галилео Галилей* (1564–1642) — итальянский физик, математик, один из основателей точного естествознания, поэт, филолог и критик. Это слово происходит от греческих слов $\kappa\upsilon\kappa\lambda o\zeta$ — «круг», «окружность» и $\varepsilon\iota\delta o\zeta$, означающего в сложных словах происхождение, так что буквальный смысл названия — «порожденная кругом». С XVII века циклоидой занимались многие математики, открыв множество ее примечательных свойств.

Построение некоторых эпициклоид и гипоциклоид впервые встречается в книге немецкого художника, автора известной гравюры «Меланхолия» *Альбрехта Дюрера* (1471–1528) «*Наставление к измерению циркулем и линейкой*» (1525). В названиях присутствуют греческие предлоги $\varepsilon\pi\iota$ — «к», «на», употреблявшегося в названиях фигур, построенных на линии как на базе, на основе, и $\upsilon\pi o$ — «под». Эти линии привлекали внимание многих крупных математиков, в том числе *Ньютона, Иоганна Бернулли, Эйлера.*

Рассмотрите специально эпициклоиды, для которых $\rho = \frac{1}{n}\rho_0$ $(n \in \mathbb{N})$[1], и аналогичные гипоциклоиды (при $n \geqslant 2$)[2].

37. В каком случае траектории точек из предыдущей задачи (пункт 2) будут замкнутыми (а движение по ним, — соответственно, периодическим)? Найдите необходимое и достаточное условие на радиусы ρ, ρ_0.

38. Пусть, как и выше, окружность радиуса ρ катится без скольжения: 1) по прямой; 2) по другой окружности радиуса ρ_0, находясь снаружи или внутри нее. К первой окружности жестко прикреплена точка, находящаяся на расстоянии h от ее центра. Запишите с помощью поворотов векторнозначную функцию, описывающую движение этой точки. Как выглядят годографы[3] этих функций? Рассмотрите отдельно случаи $\rho_0 = \rho$([4]) и $\rho_0 = 2\rho$.

39. В каком случае траектории точек из последней задачи (пункт 2) будут замкнутыми (а движение по ним — периодическим)?

* * *

40. Постройте годографы векторнозначной функции $\overline{r}(t)$ и ее производной $\overline{v}(t) = \overline{r}'(t)$, если функция $\overline{r}(t)$ задана своими координатами $(x(t); y(t))$, $\quad t \in \mathbb{R}$:

---

[1]При $n = 1$, то есть $\rho = \rho_0$, получается так называемая *кардиоида* — «сердцеобразная» замкнутая кривая.

[2]Гипоциклоида при $\rho = \frac{1}{4}\rho_0$ носит название *астроида* — «звездообразная».

[3]Эти годографы называются, соответственно, *трохоидами, эпитрохоидами* и *гипотрохоидами*.

[4]Эти кривые (при любом значении h) называются «улитками Паскаля».

1) $(t;\, t)$; 2) $(t^2;\, t^2)$; 3) $(t^3;\, t^3)$; 4) $(t;\, t^2)$;
5) $(-t;\, t^2)$; 6) $(-2t;\, 4t^2)$; 7) $(t^2;\, t)$; 8) $(t^2;\, -t)$;
9) $(t;\, t^3)$; 10) $(-t;\, -t^3)$; 11) $(t^3;\, t)$; 12) $(t^2;\, t^3)$;
13) $(t^3;\, t^2)$; 14) $(t^2;\, -t^4)$; 15) $(-t^2;\, t^4)$; 16) $(t^4;\, t^2)$.
(На годографах нужно отметить начальную точку, отвечающую значению $t = 0$, и направление движения точки P_t, а для скорости — точки V_t такой, что $\overline{OV_t} = \overline{v}(t)$.)

41. Постройте годографы векторнозначных функций $\overline{r}(t)$, заданных своими координатами:
1) $\left(\frac{1}{t};\, t^2 - 2\right),\ t \in (0;\, +\infty)$; 2) $\left(t^2 - \frac{1}{2};\, t^4 - \frac{1}{4}\right),\ t \in \mathbb{R}$;
3) $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2};\, \frac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}$; 4) $\left(\sqrt{t};\, \sqrt{1-t}\right),\ t \in [0;\, 1]$;
5) $\left(\sqrt{1+t};\, \sqrt{t}\right),\ t \in [0;\, +\infty)$; 6) $\left(t^2;\, \sqrt{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}$;
7) $\left(\sqrt{1-t^2};\, \sqrt{1+t^2}\right),\ t \in [-1;\, 1]$; 8) $\left(\sqrt[3]{t^2};\, (t+1)^3\right),\ t \in \mathbb{R}$.
(На годографах нужно отметить начальную точку, отвечающую значению $t = 0$, и направление движения точки P_t.)

* * *

42. Выберите удобную систему координат и запишите координатные функции для вектор-функций из упражнений 36, 37, 38. Найдите производные этих функций (в координатах). Какой вид имеют годографы производных?

43. Для каждой точки Q, принадлежащей верхней полуокружности единичной окружности (с центром в начале), проводится прямая, соединяющая эту точку с началом координат и пересекающая прямую $y = 2$ в точке R. Пусть P — середина отрезка QR. Задайте координатными функциями траекторию точки P (точка Q *как-то* перемещается по верхней полуокружности).

44. Пусть $M = M(-1;\, 0)$; через каждую точку Q верхней полуокружности единичной окружности (с центром в начале), проводится прямая MQ, на которой выбирается точка P так, что $PQ = 1$. Задайте координатными функциями траекторию точки P, если точка Q пробегает верхнюю полуокружность.

45. Предположим, что нитка длины $2\pi r$ разматывается с диска (круга) радиуса r (представлять себе можно, например, катушку), центр которого неподвижен. Задайте в координатах движение свободного конца нити[1].

* * *

46. Пусть $\lambda(t)$ и $\overline{r}(t)$ — дифференцируемые в точке t_0 скалярная (то есть числовая) и векторнозначная функции. Докажите, что тогда вектор-функция $\overline{R}(t) = \lambda(t) \cdot \overline{r}(t)$ тоже дифференцируема в точке t_0; напишите и докажите формулу для производной этого произведения $\overline{R}(t)$.

[1]Описываемая свободным концом нити траектория называется *эвольвентой* окружности, а сама окружность служит для этой кривой *эволютой*. Термины происходят от лат. *evolvo* — развертываю, разворачиваю. Касательные к эволюте являются нормалями (перпендикулярами) к эвольвенте — докажите. Эти кривые были впервые рассмотрены и исследованы в 1654 году голландским физиком и математиком, изобретателем маятниковых часов *Христианом Гюйгенсом* (1629-1695; он был первым президентом Парижской академии наук).

47. Пусть $\overline{r}_1(t)$ и $\overline{r}_2(t)$ — дифференцируемые в точке t_0 векторнозначные функции. Докажите, что тогда скалярная функция $s(t) = \overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2(t)$ (скалярное произведение вектор-функций $\overline{r}_1$ и $\overline{r}_2$) тоже дифференцируема в точке t_0; напишите и докажите формулу для производной скалярного произведения $s(t)$.

48. Пусть годограф дифференцируемой в точке t вектор-функции $\overline{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ в окрестности этой точки совпадает с графиком дифференцируемой в точке $x = x(t)$ функции $y = f(x)$. Докажите, что в случае, когда производная $x'(t) \neq 0$, имеет место формула

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad \text{или} \qquad f'_x(x) = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$$

(второй вариант написания формулы приведен затем, чтобы «оттенить» тот факт, что производные в левой и правой частях равенства берутся совсем по разным переменным). Дайте геометрическую интерпретацию этой формулы.

* * *

49. Так как при любом $k \in \mathbb{Z}$ поворот на $2\pi k$ радиан есть тождественное преобразование ($R^{2\pi k} = E$ — все точки переходят сами в себя), значения функций $\cos t$ и $\sin t$ периодически повторяются через $2\pi k$; какому свойству графиков этих функций отвечает их периодичность? Постройте графики $y = \cos x$ и $y = \sin x$ — не вычисляя производных, исходя из наглядных соображений и периодичности. Докажите, что эти графики, как геометрические фигуры, *равны* (то есть совмещаются друг с другом движением — каким?). Исходя из вида графиков, постройте под ними примерные графики производных $y = \cos' x$ и $y = \sin' x$.

(*Указание.* При построении графиков $\cos x$ и $\sin x$ нужно следовать стандартной схеме: определить нули функций, точки максимума, точки минимума — скажем, для $\sin x$ это будут, соответственно, точки

$$\begin{gathered}\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\\ \sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\\ \sin x = -1 \Longleftrightarrow x = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{gathered}$$

Далее из определения и из элементарных геометрических соображений отыскиваются промежутки знакопостоянства и монотонности.)

50. По данным координатам точки $M(x;\ y)$ найдите координаты точки $R^{\frac{\pi}{2}}M$. Используя полученный результат, выразите производные $\cos' t$ и $\sin' t$ через сами функции $\cos t$ и $\sin t$ (от аргумента t !).

(*Указание.* Поворот на угол $t + \frac{\pi}{2}$ представляется в виде композиции поворотов на t и $\frac{\pi}{2}$:

$$R^{t+\frac{\pi}{2}} = R^{\frac{\pi}{2}} \circ R^t.$$

Теперь это равенство нужно применить к точке $(1;\ 0)$, учесть определения функций cos и sin, а также «кинематические» формулы для их производных.)

* * *

Определение 1. Тригонометрическими функциями тангенс, котангенс, секанс, косеканс числового аргумента $x \in \mathbb{R}$ называются функции, задаваемые, соответственно, формулами:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Тригонометрическая функция *синус* встречается в индийских *сидхантах* — анонимных трудах по астрономии IV или V века, а также в сочинении «Ариабхатиам» (499 г.) индийского астронома и математика *Ариабхаты* (476–ок.550). Интересно происхождение наименования этой функции. Линия синуса (от точки P_α до ее проекции на ось абсцисс) называлась *ардхаджива* — *ардха* означает «половина», а *джива* — «тетива лука», хорда. Потом синус стали сокращенно называть *джива*. В арабской литературе термин переделали в *джиба*, а в IX веке это лишенное обиходного смысла слово заменили настоящим арабским словом *джайб*, что означает «пазуха», «вырез платья», «выпуклость». Это слово в XII веке и было дословно переведено на латынь термином *sinus*! Обозначение *sin* (как и *cos*, и *tg*) стало общепринятым благодаря авторитету знаменитого швейцарского математика *Леонарда Эйлера* (1707–1783; долгое время работал и похоронен в Санкт-Петербурге).

Термин *косинус* (как и *котангенс*) был введен в 1620 году английским математиком и астрономом, изобретателем логарифмической линейки *Эдмондом Гюнтером* (1581–1626) — как сокращение от лат. *complementi sinus*: «дополнительный синус», то есть синус дополнительной дуги ($\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$).

Тригонометрическую функцию *тангенс*, как тень вертикального шеста, ввел в X веке багдадский математик и астроном *Мохаммад бен Мохаммад Абу-л-Вефа* (940–988; родом из Хорасана). Он же ввел котангенс, секанс и косеканс. Потом тангенсы неоднократно переоткрывались — англичанином *Брадвардином* (ок. 1300–1349; архиепископ Кентерберийский), немецким математиком *Региомонтаном* (1436–1476); но и через 100 лет после Региомонтана *Коперник* еще не знал этого открытия. Сначала для котангенса и тангенса употреблялись названия «прямая тень» и «обращенная тень» (*umbra recta* и *umbra versa*). В 1583 году в своей книге «Геометрия круглого» датский врач, астроном и математик *Томас Финке* (1561–1656) ввел термин *tangens* — на латыни «касающийся», «отрезок касательной» (что это за отрезок? Мы напомним об этом в § 6.4). Там же был введен термин *секанс* — *secans*: лат. «секущий», «отрезок секущей», от *seco* — «режу», «секу» (о какой секущей идет речь? Подумайте!). После Абу-л-Вефы секанс также переоткрывался, в частности, впервые его протабулировавшим учеником и другом Коперника швейцарцем *Георгом Ретиком* (1514–1574).

---

51. Исходя из формул для производных $\cos x$ и $\sin x$ (из предыдущей задачи), вычислите производные введенных выше функций:
1) $\operatorname{tg} x$, 2) $\operatorname{ctg} x$, 3) $\sec x$, 4) $\operatorname{cosec} x$.
Постройте их графики. Выяснить, есть ли среди этих графиков равные.

52. Вычислите производные функций:
1) $\cos 2x$, 2) $\sin 3x$, 3) $\sin \frac{x}{3}$, 4) $\sin(2x + \frac{3\pi}{4})$,
5) $\operatorname{tg} 3x$, 6) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 7) $\sec \frac{x}{2}$, 8) $\operatorname{ctg}(3x - \frac{\pi}{4})$.

53. Постройте графики функций:
1) $y = \sin 2x$, 2) $\cos 3x$, 3) $\sin \frac{x}{3}$, 4) $\sin(2x + \frac{3\pi}{4})$.

(*Указание.* Воспользуйтесь теми же соображениями, что и при построении графиков $\cos x$ и $\sin x$ (нули функций, точки максимума, точки минимума и так далее).)

(*Вопросы к решению.* С помощью каких геометрических преобразований из графика $y = f(x)$ получается график $y = f(ax)$? (Рассмотреть отдельно случаи $a > 1$, $0 < a < 1$, $a < 0$.) Ответьте на тот же вопрос для графика $y = f(x + b)$.

Общий случай: какими преобразованиями из графика $y = f(x)$ получается график $y = f(ax + b)$? (Обратите внимание на неперестановочность переносов и растяжений/сжатий к оси Oy в этом случае!))

* * *

54. Постройте годографы векторнозначных функций $\overline{r}(t)$, заданных своими координатами:

1) $(\cos t;\ \cos t)$; 2) $(\cos t;\ \sin t)$; 3) $(\cos t;\ \cos 2t)$;
4) $(\cos t;\ \sin 2t)$; 5) $(\sin t;\ \cos t)$; 6) $(\cos t;\ -\sin t)$;
7) $(\sin t;\ \cos 2t)$; 8) $(\cos t;\ 2\sin t)$; 9) $(2\cos t;\ \sin t)$;
10) $(a\cos t;\ b\sin t)$; 11) $(\cos t;\ \cos 3t)$; 12) $(\cos t;\ \sin 3t)$.

Александр Николаевич Земляков,
кандидат педагогических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории дифференциации образования
Института общего среднего образования
Российской академии образования (ИОСО РАО).

Тезис Аристотеля, или философско-математическое осмысление реальности

В. А. Еровенко

В статье обсуждается понятие бесконечности с философско-методологических позиций в контексте современных математических подходов к проблеме натурального ряда.

Начиная с древних времен, идея о "привилегированном статусе" математического знания ассоциировалась с неявным предположением о том, что абстрактные математические категории более реальны, с точки зрения приложений, чем сам физический мир. Например, у всякого человека, владеющего естественным языком, имеется некоторое представление о потенциальной бесконечности, чего нельзя сказать об актуальной бесконечности. По мнению Аристотеля, в вопросе о бесконечном доверять мышлению нельзя, поскольку при анализе понятия бесконечности приходится ходить по очень зыбкой почве, ибо "много невозможного следует и за отрицанием его существования и за признанием" [1, с.243]. Аристотель не соглашался признать бесконечное ни сущностью, возражая против платоновско-пифагорейской трактовки бесконечного, как сущности, ни предикатом (свойством) сущности, в отличие от натурфилософов, считавших бесконечное предикатом природных элементов, принимаемых за первоначало.

Начиная со времен Пифагора, в математике нет прямых доказательств утверждений о бесконечности любых множеств как актуальной, так и потенциальной. Более того, в математике от канторовского понимания бесконечности, например, множеств мощности больше, чем мощность континуума, почти ничего не используется, хотя диагональная процедура и позволяет, на первый взгляд, "увеличивать" множества. Проблема бесконечности впервые была поставлена эллинскими мыслителями и является общефилософской, поэтому один лишь ее математический анализ не может привести к постижению сущности бесконечности. Напомним, что утверждение Аристотеля "Infinitum Actu Non Datur", что в переводе с латинского означает: "*Понятие актуальной бесконечности - внутренне противоречиво*", активно поддерживали представители интуиционизма и конструктивизма.

Алгоритмическую суть своего тезиса Аристотель формулирует так: "Бесконечное существует через полагание одной вещи после другой; то, что полагается, всегда остается конечным, но всегда другим и другим" [2, с.157]. Иначе говоря, бесконечное не есть что-то действительное, а только возможное. В переводе на язык современной математики утверждение Аристотеля означает, что все бесконечные множества являются потенциально-бесконечными. Оно не доказано и основано на интуиции, но вместе с определением понятия потенциальной бесконечности из него следует, что бесконечное множество не содержит всех своих элементов. Не взирая на профессиональные возражения против актуализации бесконечности, Георг Кантор сформулировал дополнительный тезис: "*Существует актуальная бесконечность*", то есть все бесконечные множества современной математики, включая любую аксиоматическую теорию множеств, являются актуально-бесконечными множествами.

С "реалистических" позиций актуальная бесконечность абсолютизирует не столько математический опыт обращения с конечными множествами, сколько мир физики здравого смысла, состоящий из отдельных сущностей, которые не поддаются счету и упорядочению, хотя, с другой стороны, квантовая физика — это мир абстракций, вообще говоря, другого типа. Полагая, что потенциальная бесконечность в действительности зависит от логически предшествующей ей актуальной бесконечности, Георг Кантор не только стал изучать бесконечные множества как "готовые", но и занялся задачей классификации бесконечных множеств. Концепция Кантора понятия бесконечности основывалась на двух дополнительных потоках идей, один из которых был чисто математического содержания, а другой — философского. Полемизируя с философами, он использовал свои новые математические конструкции, пытаясь обосновать ограниченность прежних представлений, а говоря с математиками, был вынужден использовать философскую терминологию в оправдание своих нетрадиционных подходов.

Основная идея проекта Кантора сводилась к установлению взаимнооднозначного соответствия между множествами. В соответствии с этим, он определил бесконечное множество как такое множество, которое можно поставить во взаимнооднозначное соответствие со своим собственным подмножеством, отличным от всего множества. Критика концепции Кантора способствовала созданию новых направлений в обосновании математики, связанных с отрицанием фундаментальной идеи теоретико-множественной математики — идеи актуальной бесконечности, например, интуиционизма и конструктивизма. Положительный вклад интуиционистов выразился в том, что они, проведя тщательный анализ многих трудностей, с которыми столкнулась математика в своем развитии, указали на различие между конструктивным и неконструктивным направлениями в математике.

Уместно отметить, что отрицание Аристотелем актуальной бесконечности в физике не вступает в противоречие с математикой: "Наше рассуждение, отрицающее актуальность бесконечного в отношении увеличения, как не проходимого до конца, не отнимает у математиков их теории: ведь они не нуждаются в таком бесконечном и не пользуются им: математикам надо только, чтобы ограниченная линия была такой величины, как им желательно, а в той же пропорции, в какой делится величайшая величина, можно разделить какую угодно другую" [1, с.248]. Для Аристотеля бесконечное применительно к числам существует только в восходящем порядке, через прибавление.

Одно из самых уязвимых мест канторовской концепции — это понимание экзистенциальных математических высказываний, то есть высказываний о существовании математических объектов. Такой объект в современной математике представляет собой некоторое множество, но в теории Кантора нет определения понятия множества, которое обычно разъясняется лишь "на примерах". Давид Гильберт предложил довольно искусный выход из такого положения, который легче всего понять на примере "чистой" теории чисел, или арифметики Пеано. В докладе "О бесконечности" он сказал, что арифметика — это "чистейшее и наивнейшее дитя человеческого духа". Даже в начальной школе учащиеся понимают, что такое натуральные числа, и принимают как естественный факт, что последовательность натуральных чисел может быть продолжена бесконечно. Натуральный ряд, по Кантору, определяется как множество, описываемое аксиомами Пеано, поэтому Давид Гильберт предложил существование натурального ряда понимать как непротиворечивость описывающих его аксиом.

Условие непротиворечивости поддается не только философской, но и арифметической трактовке. Напомним, что одно из первых доказательств непротиворечивости "чистой" арифметики было дано Герхардом Генценом и то лишь средствами, не укладывающимися в финитную установку Гильберта. В рассматриваемом примере формальная система арифметики представляется как соединение на специальном "логико-арифметическом" языке некоторой версии неформальной теоретико-множественной аксиоматики натурального ряда с аристотелевской логикой в виде классического исчисления предикатов. Существенной чертой этой логики является принятие закона исключенного третьего, влекущего допустимость доказательств методом "от противного", что обуславливает как неконструктивность некоторых понятий самой арифметики, так и базирующихся на ней математических теорий.

Согласно фундаменталистской точки зрения в философии математики, результат в математике ценен, если он получен в соответствии с критериями строгости, включающими *полноту* и *непротиворечивость* формальных систем. Однако такой методологический подход обедняет ценностное содержание математики. Устойчивость современной математики по отношению к парадоксам в основаниях, сохраняет в сознании многих математиков приоритет полезности перед полнотой и непротиворечивостью. Современная математика достигла строгости путем принятия таких идеализаций, которым действительное, вообще говоря, строго не соответствует. Поэтому проблема соотношения формализуемой теории с ее формализацией оказалась не столь простой, как это представлялось в период становления теории доказательств.

Возможно, что именно расхождение в языках формализма Гильберта и аксиоматики Пеано о натуральных числах обусловило, в соответствии с результатом Курта Гёделя, неполноту формальной арифметики. После опубликования теоремы Гёделя о неполноте логики искали такой математический пример неполноты в арифметике Пеано, который был бы математически прост и интересен, не требуя при этом числового кодирования понятий из логики. Первые примеры верных, но недоказуемых в арифметике Пеано строго математических утверждений о натуральных числах были получены Джефом Парисом. В этот “драматический” финал — для математиков исключительно формалистского направления — внес свой вклад и Лео Харрингтон, показавший, что доказательство Париса проходит для простого обобщения конечной теоремы Рамсея, порожденной старой задачей о светском приеме. Соответствующие формулировки приведены в главе “Теорема Рамсея” книги “Вычислимость и логика” американских математиков и логиков Джорджа Булоса и Ричарда Джеффри.

Теория доказательств с самого начала возникла “на стыке” двух дополнительных “конфронтирующих” концепций, каждая их которых пользовалась своей особой логикой. С точки зрения интуиционизма, натуральные числа — объекты чистого мышления, порожденные изначальной интуицией, тогда как в духе формализма принято говорить не о “натуральных числах”, а о множестве или системе натуральных чисел. Определяя бесконечное множество, Георг Кантор опирался в качестве исходного представления о бесконечности на последовательность натуральных чисел, однако понятие “натурального ряда” столь же неопределимо, как и понятие натурального числа. Даже аксиомы итальянского математика Джузеппе Пеано, разработанные в конце XIX века, не дают возможности отличить натуральный ряд, как единственную совокупность некоторых однозначно понимаемых сущностей, называемых натуральными числами, от совокупности всех простых чисел.

Хотя аксиомы Пеано на это и не претендуют. Они претендуют на то, чтобы определить натуральный ряд с точностью до изоморфизма. Следует отметить, что никакая система математических аксиом не определяет какую-либо структуру однозначным образом, в лучшем случае — с точностью до изоморфизма. Понятие натурального ряда выступает в современной математике в разных качествах и применениях, поэтому одна из актуальных философских проблем математики состоит в выявлении свойств, явно или неявно приписываемых натуральному ряду. Пока логика была бессильна классифицировать рассуждения со многими натуральными рядами, математика была вынуждена рассматривать во всех случаях один и тот же натуральный ряд. То, что конечное число аксиом Пеано содержит в себе много неожиданного, объясняется возможностями повторных применений этих правил по существу в неограниченном числе комбинаций.

Проблему статуса математических объектов можно сформулировать в виде следующей дилеммы: либо математика не говорит о числах, либо математики обладают неестественными способностями познания. Обе они не слишком привлекательны с точки зрения традиционной математики. Может быть, наряду с существованием множеств надо признать существование чисел? Последовательность объектов, сводящаяся к последовательности натуральных чисел, обладает дополнительными свойствами, которые не связаны со свойствами чисел, поэтому трудно решить, что выражает сущность натуральных чисел. Современная ситуация с понятием натурального ряда похожа на ситуацию с евклидовым пространством. С одной стороны, его нельзя однозначно определить никакими аксиомами, а с другой стороны, известная система аксиом Гильберта определяет это пространство с точностью до изоморфизма, то есть реальное евклидово пространство одно из целого класса изоморфных между собой пространств.

Проблема натурального ряда имеет, вообще говоря, универсальный философско-методологический характер. Физический аналог натурального ряда, скорее всего, отличается от своей математической модели — математического натурального ряда. Положение с понятием натурального ряда в настоящее время сравнимо с положением евклидовой геометрии в XVIII веке, когда она считалась абсолютной истиной, поскольку была обязательной и для математиков, и для физиков. Можно говорить, например, об интуиции натурального ряда, которая без использования аксиом проявляется в рассуждениях о натуральных числах, или о "евклидовой интуиции", которая делает вполне определенной и наглядной геометрию. Теория натурального ряда берет за основу в идеализированном виде процесс реального счета физических предметов, который в достаточно простых случаях можно довести до конца, распространяя эту ситуацию до бесконечности.

"Духу физики, — писал известный геометр П.К.Рашевский, — более соответствовала бы такая математическая теория целого числа, в которой числа, когда они становятся очень большими, приобрели бы в каком-то смысле "размытый вид", а не являлись строго определенными членами натурального ряда" [3, с.244]. Такого рода реформа числового ряда должна будет сопровождаться реформой числовой прямой, которая будет отличаться от обычной некоторой размытостью своих элементов, поскольку последняя будет передаваться и дробям с большими знаменателями. Когда сложное явление природы, рассматриваемое в изолированном феноменологическом существовании, бросает очередной вызов знанию о нем своей неисчерпаемостью и незавершенностью, то это уже никого не удивляет, хотя прилагательное "феноменологический" по отношению к какой-либо теории предполагает достаточно глубокий уровень физического описания.

В сущности, любая обоснованная теория феноменологична, так как абсолютное проникновение в природу вещей в принципе невозможно. Гораздо удивительнее то, что последовательность целых чисел, простейший математический объект, рожденный самим разумом, становится столь же расплывчатым и несовершенным, когда его рассматривают с аксиоматической точки зрения. Критики интуиционизма утверждали, что очень большие конечные множества столь же недоступны для проверки, как и бесконечные множества. Заметим также, что определение границы между проверяемым и непроверяемым утверждениями в математике — это сложнейшая проблема современной философии математики, для решения которой необходимо переосмысление онтологического основания всего математического знания.

Натуральный ряд как математическая идеализация количественных закономерностей для больших совокупностей искажает реальную ситуацию. Даже аксиома Архимеда, говорящая, что для любых двух чисел a, $b > 0$ найдется такое n, что $na > b$, предполагает существование бесконечно больших натуральных чисел. Но, как это часто бывает в науке и жизни, осознанные нежелательные следствия очень долго не замечаются, возможно, поэтому математики и не говорили о "числах" другой природы, отличной от чисел натурального ряда. Рубеж, отделяющий "истинные" числа, указать невозможно, хотя обычно указывается интервал от 10^{100} до 10^{200}, например, число всех элементарных частиц во Вселенной порядка 10^{108}, а число всех взаимодействий элементарных частиц за всю историю Вселенной порядка 10^{150}. Поэтому, применяя в прикладной математике предельные переходы и оценки, полученные в "чистой" математике, необходимо переосмысливать некоторые привычные представления, так с точки зрения математического анализа $\lim \lg\lg x = \infty$ при $x \to \infty$, однако, $\lg\lg 10^{100} = 2$.

В связи с развитием абстрактной теории дискретных автоматов типа машины Тьюринга указанная проблема сколь угодно больших натуральных чисел влияет и на отношение понятия "конструктивности" к оценке конечного числа шагов тех или иных преобразований, которые заведомо не реализуемы. Физики и инженеры получают иногда удовлетворяющие их результаты, обращаясь с расходящимся рядом или интегралом, как со сходящимся. Бесконечность такого ряда может означать невозможность окончания некоторого реального процесса, а его физическая или технически обусловленная "конечность" указывает на то, что хотя он и бесконечен, он все же "схватывается" конечным числом этого процесса. Кроме того, из естественнонаучных соображений следует, что реальные большие натуральные числа размываются и являются представителями семейства "близких" им чисел.

Финитная математика, в контексте программы Гильберта, осуществляет также интерпретацию современной классической математики в форме, близкой к ее конструктивному представлению. Еще до квантовой механики переворот в философско-математическом осмыслении реальности был связан с теорией относительности. Используя теорему сложения скоростей в специальной теории и отказываясь от аксиомы Архимеда о неограниченности числовой оси, украинский математик академик В.Л.Рвачев строит неклассическую модель натурального ряда. "До нас, — пишет Рвачев, — никому не приходило в голову, что к далеким галактикам и другим объектам дальнего космоса нельзя подходить с "архимедовой меркой", выработанной в условиях нашей галактики" [4, с.76]. Исходя из его модели натурального ряда, с помощью релятивистских арифметических операций по стандартной схеме вводятся рациональные и иррациональные числа.

Кроме того, рассматриваются элементарные функции и более сложные объекты, например, операторы дифференцирования и интегрирования, которые соответствуют предположению о существовании наибольшего числа c, то есть такого числа, больше которого чисел нет в процессе реализации любых алгоритмов. Выбор величины c осуществляется из конкретных физических или математических соображений, например, в теории относительности c — это скорость света. Сравнение результатов данной работы с высказанными П.К.Рашевским прогнозами, касающимися свойств "гипотетического" натурального ряда, показывает их хорошее согласование. В неархимедовы арифметические операции и другие конструктивные средства входит в виде параметра число $\alpha = c^{-1}$, причем в пределе при $\alpha \to 0$ получаются математические операции и операторы, соответствующие общепринятому представлению о натуральном ряде чисел.

Система "релятивистских" арифметических операций, включающая сложение, вычитание, умножение и деление, определяет на $(-c, c)$ поле с обычным нулем и единицей. Эту модель неархимедовой арифметики можно рассматривать как один из финитных формализмов структуры реальности. Подобного рода эффекты, хотя и совсем другой природы, существуют и в области очень малых протяженностей благодаря тому, что свойства пространства на столь малых расстояниях не описываются евклидовой геометрией. Физические величины, уменьшенные сверх некоторых границ, в силу их квантовых свойств, могут быть лишены смысла, поэтому физики вводят "физические" бесконечно малые величины, которые с математической точки зрения можно отнести к объектам актуальной бесконечно малой величины. В современной математике это понятие строго обосновано в рамках нестандартного анализа.

Знаменитые ограничительные результаты Гёделя исходят из неявного убеждения, что, сколько бы ни продолжать построение формул, для "хорошо" формализованной математической теории принципы пересчета и упорядочения формул подчиняются схеме обычного натурального ряда. По существу результаты Гёделя опираются на дополнительное условие об идеальной приспособленности натурального ряда для описания сколь угодно больших совокупностей. Поэтому в программе Гёделя речь идет об идеализированном развитии математического процесса, когда при пересчете формул, невзирая на их количество, считается вполне естественным применять схему натурального ряда, хотя финитные конструкции Гёделя становятся при этом чрезвычайно сложными и при полной расшифровке сокращений даже явно не выписываются.

"Реформированная" числовая прямая должна отличаться от обычной числовой прямой некоторой размытостью своих элементов, поскольку точные рациональные приближения вещественных чисел возможны благодаря тому, что элементы стандартного натурального ряда считаются точно определенными при любом удалении по нему. Одной из важнейших особенностей прикладной математики и математизируемых областей знания является использование понятий, которые с точки зрения "чистой" математики не являются однозначно определенными, то есть это размытые и нечеткие понятия. Проблема "снятия" неопределенностей важна и с точки зрения развития современных компьютерных технологий. Неопределенность можно трактовать в контексте дополнительных понятий, как недостаток информации о некотором явлении и как свойство самой информации. Предельное огрубление человеческой логики и излишняя ее конкретизация может оказаться тупиковым направлением в логике искусственного интеллекта. Кроме того, достаточно расплывчатые понятия поддаются полезным уточнениям и новым интерпретациям.

Хотя Аристотель и полемизировал с Платоном и пифагорейцами относительно онтологического статуса бесконечного, определяя его как нечто "неопределенное", он, как и древние греки, не смог избавиться от "*боязни бесконечного*", трудноуловимого для человеческого мышления. Философские дискуссии на тему "арифметики бесконечного" вновь возобновились в последнее время. Некоторые философы науки считают, что противоречивая трактовка базовых понятий и отношений в теоретико-множественной математике, связанных с бесконечностью вообще и с актуальной бесконечностью в особенности, связана с тем, что "канторовская актуальная бесконечность — это просто особый вид потенциальной бесконечности, а именно иерархизированная потенциальная бесконечность" [5, с.36]. Проблема бесконечного в теоретико-множественной математике настолько сложна, что расширением ее предметной области вполне может стать теория научного познания в целом.

Давид Гильберт однажды заметил, что “математическая литература переполнена бессмыслицами и нелепостями, проистекающими из бесконечности”. Наши знания о бесконечном множестве получены посредством экстраполяции конечного множества. Единственным законным основанием запретить подобные порывы математической интуиции является логическая несовместимость свойств бесконечных математических сущностей. Но математическое знание не может, как говорят философы, “до конца тематизировать предмет”, поскольку всегда остается некоторый фон восприятия, принципиально не устранимый в нашем сознании.

Литература

1. Гайденко П. История греческой философии и ее связи с наукой. — М.: Per Se; СПб.: Университетская книга, 2000. — 319 с.

2. Зенкин А.А. Infinitum Actu Non Datur // Вопросы философии. — 2001. — № 9. — С. 157-169.

3. Рашевский П.К. О догмате натурального ряда // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28, Вып. 4. — С. 243-246.

4. Рвачев В.Л. Исчисление для Вселенной (диалог академика с лицеистом) // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. — 1998. — № 3. — С. 66-77.

5. Петросян В.К. Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодоления. — М.: Янус-К, 1997. — 144 с.

Еровенко Валерий Александрович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой общей математики и
информатики,
Белорусского государственного университета.
E-mail:erovenko@bsu.by

Фрагменты деятельностного содержания образования на примере математики

В. М. Имайкин

Посвящается светлой памяти
Людмилы Владимировны Сунцовой

В статье приводятся примеры фрагментов деятельностного содержания образования, выявленных на материале учебного предмета “математика”. Высказывается гипотеза, что выявление может осуществляться на основе соответствующего категориального аппарата.

1. О разработке деятельностного содержания образования

В настоящей статье сделана попытка описать некоторые фрагменты *деятельностного содержания образования*, выявленные на материале учебного предмета “математика”. Статья является логическим продолжением работы [1]. Для полноты изложения повторим кратко основные положения этой работы.

Теория мышления и деятельности, применительно к образовательной деятельности (см. [2-5]), требует отличать *учебный материал* — набор сведений, информацию, учебные тексты и т.п. — от *деятельностного содержания.* Под *деятельностным содержанием* понимается *совокупность способов, образцов, техник мышления и деятельности*, выработанных в человеческой культуре в самых разнообразных областях деятельности. Ниже для краткости вместо термина “деятельностное содержание” будем часто использовать просто термин “содержание”.

Исследование действовавших ранее, действующих в настоящее время и проектируемых учебных программ и образовательных стандартов показывает, что они вновь и вновь наполняются учебным материалом, а содержание, в указанном смысле, остается завуалированным. Это, разумеется, не значит, что оно отсутствует; скорее, оно охватывается подобными программами опосредованно, т.е. подразумевается, что педагоги, осуществляющие преподавание по программам, являются носителями соответствующего содержания и могут передать его детям. Опыт, однако, показывает, что учителя часто не осознают, каким именно содержанием они владеют, соответственно, какие способы, образцы, техники мышления и деятельности, как и на каком материале должны быть переданы учащимся. В итоге по результатам освоения одного и того же материала может быть обнаружена передача совершенно разных видов содержания, часто совсем не тех, которые планировались (если планировались).

Идея группы разработчиков содержания заключается в том, что упомянутые способы, образцы, техники в различных областях мышления и деятельности могут быть выявлены (это требует специальной работы, в идеале — с привлечением высококвалифицированных специалистов в своих областях), явно описаны (что требует создания специального терминологического аппарата) и внесены в качестве содержания в учебные предметы, что требует развития адекватных методических средств, учебно-организационных форм, а также системы специальной подготовки и переподготовки педагогических кадров.

Далее в статье [1] была сделана попытка показать на анализе фактического материала, что фрагменты деятельностного содержания завуалированно присутствуют в программах, а также в многочисленных работах по поводу содержания математического образования.

Работа по выявлению и описанию фрагментов деятельностного содержания проводилась автором в Проектном Колледже, ныне школа-лаборатория №1314 г. Москвы, в рамках разработки деятельностного содержания образования, которое можно положить в основу новых Государственных стандартов общего среднего образования, см. [6]. С этой целью автором проводились специально спланированные занятия с учащимися Колледжа, а также с учащимися нескольких школ Советского района Ханты-Мансийского АО Тюменской области. В занятиях всегда принимали участие разработчики, обеспечивающие организационно-методологическую сторону работ (в разные годы это были Губанова Т.М., Дмитриев Д.Б., Половкова М.В., Семин И.И., Сунцова Л.В.), а также, что очень важно, учителя других предметов.

Опишем кратко форму организации занятий, которая оказалась наиболее удобной для выявления фрагментов деятельностного содержания.

2. Задачная форма организации

Коллективом разработчиков теоретически разрабатывалась и практически внедрялясь специальная форма организации занятий, наиболее подходящая для выявления фрагментов деятельностного содержания и для освоения этих фрагментов учащимися. В настоящее время в среде разработчиков для этой формы принято название "задачная форма организации" (ЗФО). Теоретические основы ЗФО изложены в [7]. Заметим, что понятие ЗФО оказалось очень емким, в частности, можно говорить о ЗФО учебного процесса, ЗФО исследовательской и разработческой деятельности и т.п. В настоящей работе это понятие используется в узком смысле — специальная форма организации занятия с учащимися, на котором планируется передача им некоторого фрагмента деятельностного содержания, а также могут быть выявлены новые такие фрагменты. Для описания этой формы прежде всего отметим, что термин "задачная" используется не в общеупотребительном школьном смысле. Речь не идет о предметных задачах — "задача по математике", "задача по физике", "задача по химии" и т.п. Речь идет о задаче в слое мышления и деятельности, которую могут себе поставить и реализовать учащийся и учитель на подобном занятии. Для учащегося это задача по освоению некоторого нового для себя способа деятельности, соответственно, он должен осознать, что имеет дело с новым способом. Для учителя это задача по по передаче способа деятельности учащемуся, соответственно, он должен овладеть средствами для передачи этого способа.

Как показала практика, главным моментом такого занятия является заранее спланированная или возникшая спонтанно ситуация, когда учащиеся не могли справиться с поставленным заданием, хотя все необходимые сведения были в их распоряжении (“тупиковое” или “ключевое” задание, “ловушка”, ситуация “несостоятельности” учащихся). Это благоприятный момент для изучения вопросов: каким способом деятельности учитель как специалист в данной области владеет в отличие от детей? как объективировать этот способ в качестве содержания образования? как учащиеся могут присвоить это содержание? носит ли оно специфически-предметный или надпредметный характер?

Такие вопросы изучались в ходе анализа проведенных занятий. Некоторые зафиксированные и описанные таким образом способы деятельности носят специфически предметный характер. Интересным, на наш взгляд, результатом является то, что многие выявленные в конкретном предмете способы деятельности имеют на самом деле общий, надпредметный характер. Это фиксировалось и описывалось при участии учителей разных предметов, которые совместно вырабатывали надпредметный, инвариантный стиль описания.

Таким образом, выявление и описание способа деятельности становится основой построения межпредметных связей нового типа. Они, грубо говоря, заключаются в том, что данный способ деятельности отрабатывается на материале разных предметов. Интересной задачей для учителей-предметников становится определение специфики и особенностей способа деятельности применительно к материалу своего предмета.

Приведем некоторые конкретные примеры, которые помогут также различить фрагменты деятельностного содержания и предметные понятия.

Практическая работа показала, что у учителей часто происходит смешение содержания и предметного материала, в качестве фрагментов содержания предлагаются предметные понятия. Например, “понятие реформы” на истории, “понятие конфликта” на литературе. Учителя математики в качестве фрагмента содержания предложили, кроме предметных понятий, также “способы решения задач”. Например, такие фрагменты, как “способ решения квадратных уравнений”, “способ перехода от простых уравнений к сложным” и т.п. В этом случае была проведена работа, которую стоит описать.

При постановке вопросов, что именно учителя понимают под “способом решения квадратных уравнений” и что они сами делают при решении этих уравнений, произошло расслоение и удалось выявить различные фрагменты содержания. Часть учителей понимала под этим знание формул для решения квадратных уравнений и умение применять эти формулы к любому квадратному уравнению и получать ответ. Тем самым фактически выделяется такая единица содержания, как “работа по алгоритму”, с определенным набором средств, которые должен освоить ребенок, а именно:

- знать класс уравнений, к которому относится данный алгоритм;

- любое данное уравнение отнести к этому классу или исключить из него;

- применить алгоритм к конкретному уравнению данного класса и записать ответ по установленной форме.

При этом если иметь в виду конкретный класс математических задач и конкретный алгоритм, то фрагмент предметный, но вообще умение работать по алгоритму (выполнять инструкцию) — фрагмент надпредметный.

Другая часть учителей понимала под способом решения квадратных уравнений способ вывода формул в общем виде для решения таких уравнений. Здесь мы сталкиваемся с гораздо более сложной организацией работы, которая включает в себя:

- понимание, с каким объектом идет работа (в данном случае объектом можно считать квадратный трехчлен);

- понимание, в каком виде должен быть представлен объект для решения поставленной задачи (в нашей ситуации — разложен на линейные множители);

- поиск преобразований, ведущих к нужному представлению объекта (выделение полного квадрата).

Вообще говоря, речь идет о таком гораздо более сложном фрагменте содержания, как создание алгоритма решения определенного класса задач на основе анализа объекта. В школе учащиеся специально не обучаются созданию алгоритмов, хотя объяснения, как получается тот или иной алгоритм, часто встречаются (метод интервалов решения неравенств, способы решения систем линейных уравнений, формулы общего члена и суммирования прогрессий и т.п.); кроме того от детей требуется уметь воспроизводить эти объяснения. В разделах учебников "задачи повышенной трудности" обычно приводится ряд задач, связанных с изобретением алгоритмов. Видимо, можно поставить задачу освоения такого фрагмента, хотя бы на достаточно простом материале[1].

Далее предлагаем вниманию читателя несколько явно описанных фрагментов деятельностного содержания, выделенных на материале математики.

3. Примеры фрагментов содержания

1. Действия с неименованными и именованными числами

Опыт показывает, что учащиеся младших классов часто затрудняются в различении действий с неименованными и именованными числами (величинами) и, как следствие, в выполнении действий с именованными числами.

С неименованными числами выполняются обычные арифметические действия.

С именованными числами действия производятся по более сложной схеме:

- выяснить, какие единицы измерения имеются в виду, привести их к одному масштабу, что может привести к изменению самих чисел, с которыми надо выполнить действие;

[1] Подчеркнем, что речь идет о математических предметах в обычной, не специализированной средней школе. В настоящее время в школах введен предмет "информатика", но вопрос, обучают ли на нем на самом деле созданию алгоритмов, требует отдельного изучения.

- в зависимости от смысла действия определить, какая единица измерения получится в итоге. Это операция логическая, а не арифметическая[2].

- выполнить действие с числами и записать новое именованное число с установленной единицей измерения.

Таким образом, предъявленный фрагмент содержания включает себя:

1) различение действий с неименованными и именованными числами;

2) освоение схемы действий с именованными числами.

Очевидно, что представленный таким образом фрагмент содержания не является специфическим для предмета "математика", а практически без изменения присутствует в начальном курсе физики.

Замечание. Упомянутая здесь мыслительная операция *различения* сама по себе является очень важным фрагментом содержания. Ее бессмысленно относить к отдельным учебным предметам или всей их совокупности, она существенна в мышлении как таковом, на что бы оно не было направлено. Все же приведем несколько примеров различений, важных в соответствующих учебных предметах:

математика, различение "число — запись числа";

физика, различение "путь — перемещение";

география, различение "естественные процессы — искуственные процессы";

история, различение "факт — интерпретация";

литература, различение "автор — лирический герой".

В основе изучения языков, как родного, так и иностранных, лежит масса различений, думаем, что каждый читатель сам сможет привести много примеров[3].

2. Преобразование определения, правила в инструкцию

Речь идет о фрагменте содержания, относящемся к *учебной деятельности* детей. Он связан с преодолением трудностей применения правил, определений, законов и т.п. на практике.

Например, для отработки понятия арифметического квадратного корня из числа идет ряд заданий типа "доказать, что $\sqrt{a} = b$", где a, b — конкретные числа, либо числовые или буквенные выражения. Обычная реакция детей на эти задания — недоумение и непонимание, что, собственно надо делать. В случае конкретных чисел: "это же и так ясно, что тут доказывать", в случае более сложных числовых или буквенных выражений — просто ступор (речь идет об обычных учениках массовой средней школы).

[2]Дети часто понимают ее наивно-арифметически, говоря, например, что при измерении площади надо "метр умножить на метр". На наш взгляд, в этом жаргоне нет большого вреда, поскольку он соответствует формализму теории размерностей — для физика подобная фраза не является крамольной. Но, вероятно, стоит добиваться полного понимания смысла того, что стоит за подобными фразами. Например, для проверки понимания можно спросить, надо ли при определении общего веса нескольких ящиков по стольку-то килограммов в каждом "умножать килограмм на ящик".

[3]Интересно отметить что в ряде предметов (химия, биология, языки) усвоение массы "низовых" различений происходит в рамках выработанной в культуре классификации или систематизации. Интересно обсудить классификацию и систематизацию как фрагменты содержания, но эта тематика выходит за рамки статьи.

После фиксации затруднений вопрос переформулировался в виде “Что надо сделать для того, чтобы доказать (проверить), что $\sqrt{a} = b$?” Совместно с детьми преобразовывали определение в инструкцию:

“Чтобы доказать, что $\sqrt{a} = b$, надо:

1) проверить, что $b \geq 0$;

2) проверить, что $b^2 = a$.”

После этого подобные задания не вызывают трудностей у большинства учащихся, в частности, многие легко доказывали важное для дальнейшего соотношение $\sqrt{a^2} = |a|$.

Очень эффективно этот прием сработал на занятии (индивидуальном) по физике при применении закона Джоуля-Ленца: “Возникающий в замкнутом контуре ток имеет такое направление, чтобы созданное им магнитное поле компенсировало то изменение магнитного поля, которое вызывает данный ток”. Опять, после фиксации затруднений и совместного обсуждения с учащимся, мы составили следующую инструкцию:

1) Определи (нарисуй) вектор внешнего магнитного поля в начальный момент ($\overrightarrow{a}$).

2) Определи (нарисуй) вектор внешнего магнитного поля в конечный момент ($\overrightarrow{b}$).

3) Определи изменение вектора магнитного поля ($\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$).

4) Нарисуй вектор $\overrightarrow{d}$, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{c}$.

5) Нарисуй направление тока в контуре, чтобы созданное им магнитное поле было направлено, как $\overrightarrow{d}$ — примени правило буравчика.

Применение затем этой инструкции к конкретным заданиям не вызывало трудностей у обучаемого.

3. Определение характеристики целого по характеристикам частей

В школьном курсе геометрии изучаются некоторые величины (длина, площадь, объем), обладающие свойством аддитивности. Например, площадь многоугольника равна сумме площадей частей, на которые разрезан многоугольник. С нашей точки зрения можно выделить следующий способ деятельности. Некоторое целое представлено как совокупность частей. Зная характеристики частей, определить соответствующую характеристику целого. В такой формулировке виден надпредметный характер этого фрагмента содержания. На материале математики можно изучить примеры и других величин, не только аддитивных. Рассмотрим, например, *диаметр* фигуры — наибольшее расстояние между ее точками. В случае круга или окружности это понятие совпадает с обычным понятием диаметра. Диаметр квадрата со стороной 1 равен $\sqrt{2}$. Если совместить стороны двух таких квадратов, образуется прямоугольник со сторонами 1 и 2. Его диаметр равен $\sqrt{5}$, что не равно $\sqrt{2} + \sqrt{2}$. Видим, что диаметр не является аддитивной величиной. Здесь можно поставить ряд новых вопросов, которые обычно не возникают при изучении в школе аддитивных величин. Например, можно ли так соединить два квадрата, чтобы диаметр новой фигуры равнялся сумме диаметров квадратов? Можно ли **оценить** диаметр фигуры, зная диаметры ее частей? (Фактически мы встретились еще с одним фрагментом содержания — переходом от точного равенства к оценке). Еще интересный пример — *центр масс* системы материальных точек (это материал факультативного курса по математике). Центр масс системы определяется по центрам масс ее частей при помощи теоремы о группировке.

4. Увидеть структуру как часть объемлющей структуры

Этот способ деятельности применяется, например, при решении геометрических задач, требующих дополнительного построения. Рассмотрим известную задачу "доказать, что высоты произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке". Один из способов решения основан на построении дополнительного треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого проходят через вершины исходного треугольника и параллельны его сторонам, противолежащим этим вершинам, рис. 1.

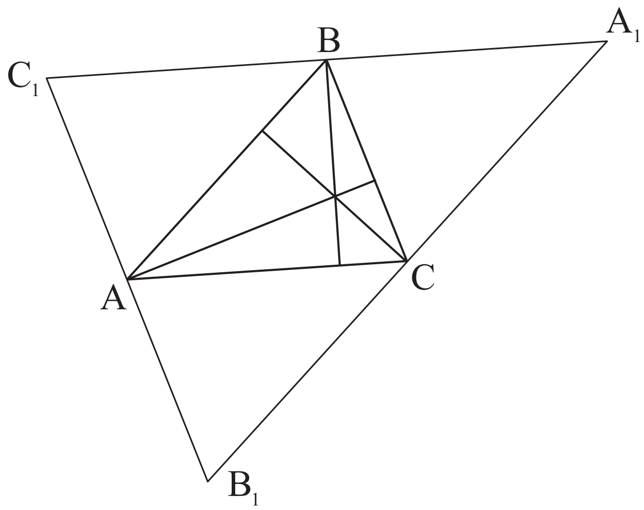


Рис. 1

Высоты исходного треугольника являются в новом треугольнике $A_1B_1C_1$ серединными перпендикулярами. Известно, что они пересекаются в одной точке (считаем решение этой более простой задачи известным). Для нас важно отметить, что исходная структура — треугольник ABC с высотами стала частью новой структуры, включающей в себя также треугольник $A_1B_1C_1$. При этом функции элементов исходной структуры (высоты) в новой структуре изменились (серединные перпеникуляры). Легко понять, что описанный фрагмент содержания является надпредметным.

5. От структуры к процессу

Рассмотрим следующую геометрическую задачу: в прямоугольный треугольник вписана окружность. Даны расстояния от ее центра до концов гипотенузы. Найти радиус окружности и стороны треугольника.

Для анализа задачи сделаем чертеж, рис. 2, в котором к описанной в условии конфигурации добавлены дополнительные элементы, т.е. применяется способ, описанный в предыдущем разделе.

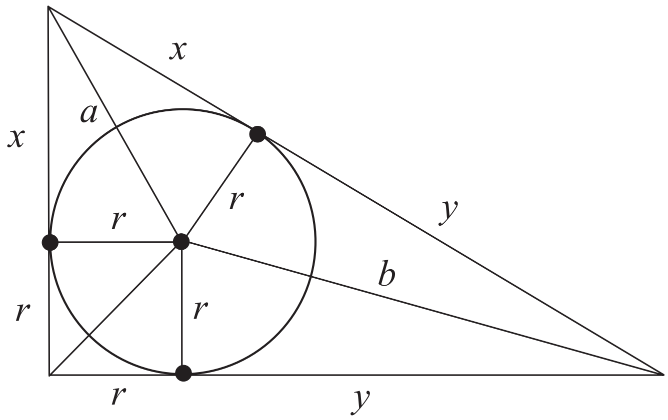


Рис. 2

Для решения задачи достаточно найти неизвестные x, y, r. Применяя трижды теорему Пифагора, получим для них систему уравнений

$$x^2 + r^2 = a^2,\ y^2 + r^2 = b^2,\ (x + y)^2 = (r + x)^2 + (y + r)^2,$$

из которой можно найти все неизвестные.

Этот способ действий можно охарактеризовать как выделение элементов описанной структуры и выявление соотношений между ними. Однако можно действовать и по-другому.

Поставим вопрос так: какой *процесс* может привести к образованию описанной в условии конфигурации? Один из возможных вариантов следующий.

Рассмотрим прямой угол с вершиной C и точку O внутри него, находящуюся на расстоянии r от каждой из сторон. Отметим точки A и B на сторонах угла, находящиеся на расстояниях соответственно a, b от точки O, рис.3.

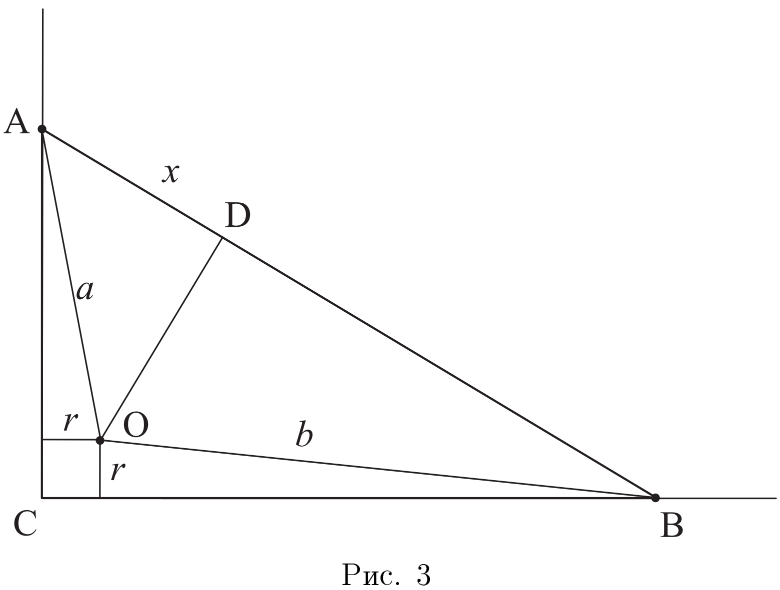


Рис. 3

Тогда $AC = r + \sqrt{r^2 + a^2}$, $BC = r + \sqrt{r^2 + b^2}$, значит, мы можем найти и сторону AB. Если r мало, расстояние от точки O до стороны AB будет больше r, рис. 3. Это расстояние OD — высота треугольника OAB из вершины O. Мы можем выразить ее через r (стандартная задача определения высоты треугольника с известными сторонами). Будем теперь увеличивать r. В какой-то момент OD станет равно r. Это и есть случай, когда в прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, расстояния от центра которой до концов гипотенузы равны a и b. Чтобы найти ее радиус, надо приравнять OD к r и решить полученное уравнение с одним неизвестным.

Подчеркнем, что здесь нам важен не способ рационального решения указанной задачи (решить полученное уравнение с одним неизвестным едва ли проще, чем систему из предыдущего рассуждения), а достаточно общий способ деятельности — *восстановление процесса, приводящего к образованию данной структуры.* Этот способ можно с успехом применять для решения разнообразных задач из разных предметов.

Для учителей математики предлагаем опробовать описанный способ на следующей геометрической задаче (биологический факультет МГУ, 1997 г.):

В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность, проведенная через точки M, N, C, касается стороны AB, а ее радиус равен $\sqrt{2}$. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла ACB.

6. Схематизация рассуждений

Схемы широко используются в учебной деятельности учащихся (физика, химия, география, история, языки и т.п.). В большинстве своем это схемы устройства объекта, например, схема электрической цепи в физике. Авторы считают, что в процессе обучения не менее важны *схемы осуществления деятельности.* Примером могут служить карты военных действий по истории. Схематизация деятельности является полезным средством, которое можно применять к различным предметным задачам из разных предметов.

Например, при освоении математических рассуждений могут помочь схемы типичных способов рассуждения. Обычно подробно обсуждается способ рассуждения от противного, фактически учащимся предъявляется схема такого рассуждения независимо от материала, хотя обычно эта схема не фиксируется графическими средствами.

Полезно предъявить детям еще ряд схем, зафиксировав их тем или иным способом. Имея их перед глазами, они получат возможность пытаться построить рассуждение для конкретной задачи.

В качестве примера рассмотрим фрагмент доказательства теоремы о средней линии треугольника. Требуется доказать, что средняя линия параллельна основанию. Для этого через середину боковой стороны проводим линию, **параллельную основанию**. По теореме Фалеса, она пройдет и через середину другой стороны. Поскольку она имеет тогда две различные точки, общие с средней линией, то она совпадает с средней линией по соответствующей аксиоме. Значит, средняя линия параллельна основанию.

Здесь реализована следующая схема рассуждения:

Хотим доказать, что объект A имеет свойство B.

1) Строим объект C, который, по построению, имеет свойство B.

2) Доказываем, что объект C совпадает с объектом A.

Тогда A имеет свойство B.

Это полезная универсальная схема рассуждения, которая не зависит от материала и может быть применена к многим конкретным задачам.

Приведем еще пример более частного, но также очень полезного рассуждения. Допустим, надо доказать, что три прямые проходят через одну точку. Рассуждение обычно проводится по следующей схеме:

Фиксируем точку пересечения прямых 1 и 2, скажем, на прямой 2. Доказываем, что через эту точку на прямой 2 проходит прямая 3. Значит, все три прямые 1, 2, 3 проходят через одну точку.

Это простая схема полезна, в частности и потому, что тесно связана с такими важными фрагментами содержания, как переформулировка, изменение представления, перевод, описание которых выходит за рамки этой статьи.

В заключение пункта отметим что учащимся полезно не только иметь в активе несколько готовых схем рассуждений, но уметь схематизировать предъявленные и собственные рассуждения. Например, трудность усвоения доказательств часто связана с тем, что в тексте учебника доказательство изложено последовательно, линейно, а ссылки на опорные утверждения часто оказываются перекрестными. Если расположить доказательство в виде схемы на листе, обозначив стрелками логическую зависимость утверждений, то часто устройство доказательство сильно проясняется, и доказательство легче усваивается. Схематизируя же собственное рассуждение, учащийся может определить затруднения и тупики.

5. Категории теории мышления и деятельности как возможная основа выявления фрагментов содержания

Анализируя описанные в предыдущих разделах фрагменты содержания, можно придти к тому выводу, что в основе многих из них лежат категории или категориальные пары. В рамках настоящей статьи мы не пытаемся дать определение категории, отметим только, что мы пользуемся категориальным аппаратом теории мышления и деятельности [3-4]. Так, в основе фрагмента 3.3 лежит категориальная пара "часть – целое", фрагмента 3.4 — категория "структура", фрагмента 3.5 — категории "структура", "процесс" и категориальная пара "процесс – результат".

В связи с этим позволим себе сформулировать гипотезу о том, что категориальный аппарат может служить основанием выделения и описания фрагментов содержания. Рассмотрим, например, важнейшую категорию "процесс". Рассматривая через "рамку" этой категории материал учебных предметов, можно увидеть множество фрагментов содержания, которые, с одной стороны, организуют материал учебных предметов, а с другой стороны, приводят к постепенному освоению учащимися категории "процесс" как средства организации собственных мышления и деятельности. Наметим кратко некоторые этапы на этом пути:

- Могут ли учащиеся **увидеть и назвать** процесс на материале физики, химии, географии, биологии, истории, литературы и т.д.?

- Какой понятийный аппарат выработан в данном учебном предмете для фиксации процессов? (В частности: какие средства для фиксации процессов предоставляет математика?)

- Что значит "изучить процесс"? Какие задачи ставятся и решаются в том или ином предмете по отношению к процессу (моделирование, прогнозирование, управление и т.п.)?

- Какие средства выработаны в данном предмете (более широко: науке, области культуры) для решения этих задач?

- Какие задачи до сих пор не могут быть решены, какие средства не выработаны культурой (выход на проблемный уровень)?

Подобным образом можно работать и с другими категориями, выстраивая иерархию фрагментов содержания и выявляя взаимосвязи между фрагментами содержания, "выстроенными" вокруг разных категорий.

Литература:

1. Имайкин В.М. Описание способов деятельности как основа выявления содержания общего образования // "Математическое образование", № 1(20), 2002 г.

2. Щедровицкий Г.П. Педагогика и логика // — М., "Касталь", 1993.

3. Щедровицкий Г.П. Избранные труды // — М., 1995.

4. Щедровицкий Г.П. Философия. Наука. Методология, М., 1997.

5. Дмитриев Д.Б. Теоретико-методологические основы разработки стандартов образования // — М., Проектный Колледж, 1996 (рукопись).

6. Разработка и внедрение деятельностного содержания образования на экспериментальных площадках, М., Проектный Колледж, 2000.

7. Половкова М.В. Психолого-педагогические условия освоения задачной формы организации образовательного процесса в средней школе // Диссертация на соискание ученой степени кандидата психологических наук, Институт педагогических инноваций РАО, М., 2000 г.

Имайкин Валерий Марсович,
главный редактор журнала
"Математическое образование",
кандидат физико-математических наук.

email: ivm@infoline.su

Содержание журнала “Математическое образование” за 2003-2004 гг.

№ 1 (24), январь – март 2003 г.

№ 2 (25), апрель – июнь 2003 г.

№ 3 (26), июль – сентябрь 2003 г.

К 95-летию Л. С. Понтрягина

Учебное пособие в журнале

Учащимся и учителям средней школы

Студентам и преподавателям математических специальностей

№ 4 (27), октябрь – декабрь 2003 г.

Из истории математики и математического образования

Учебное пособие в журнале

Учащимся и учителям средней школы

Студентам и преподавателям математических специальностей

№ 1 (28), январь – март 2004 г.

Учебное пособие в журнале

Учащимся и учителям средней школы

Студентам и преподавателям математических специальностей

Образовательные инициативы

Содержание образования. Перевод в номере

№ 2 (29), апрель – июнь 2004 г.

Памяти М. М. Постникова

Учебное пособие в журнале

Учащимся и учителям средней школы

Философские вопросы математики

Содержание образования

Информация

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д. 3а.

Телефон/факс:(095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефон для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2004 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2004 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents