Математическое Образование

Журнал фонда математического образования и просвещения

Год девятый

№ 1 (32)

Январь-март 2005 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дориченко С.А. (заместитель главного редактора)
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Саблин А.И.

№ 1 (32), 2005 г.

©“Математическое образование”, составление, 2005 г.

Москва

Математическое образование

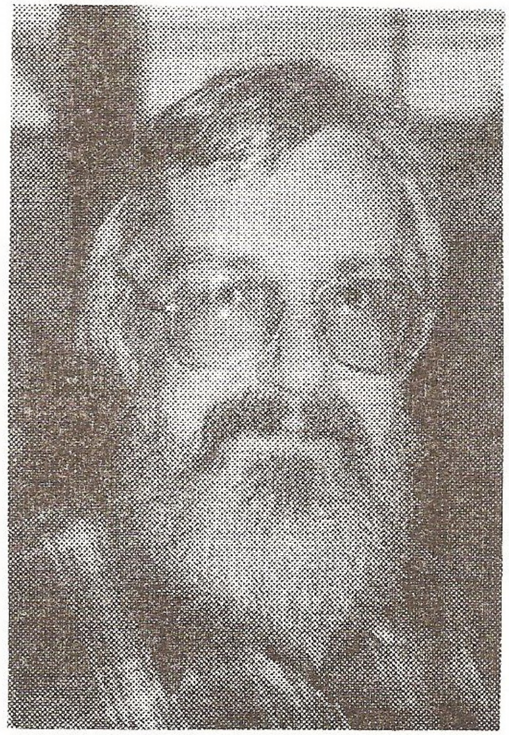
Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (32), январь – март 2005 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2005 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2005 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 7,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Памяти Александра Николаевича Землякова



1 января 2005 года безвременно скончался замечательный учитель математики, талантливый, яркий, интересный человек Александр Николаевич Земляков. Некролог опубликован в газете «Математика», издательский дом «Первое сентября», №5, 2005 г., а также на WEB-странице www.pms.ru/main.html

Для обработки научного и учебно-методического наследия Александра Николаевича создан специальный Фонд, информацию о котором можно найти по адресу www.internat18club.ru

В последние годы жизни А. Н. Земляков активно сотрудничал с нашим журналом. В настоящем номере мы публикуем воспоминания Владимира Николаевича Копылова, друга А. Н. Землякова, воспоминания главного редактора журнала В. М. Имайкина, а также продолжаем публикацию учебного пособия «Математический анализ реальности».

О Саше Землякове

В. Н. Копылов

Саша был умным, добрым, исключительно талантливым и разносторонне развитым. Он был блестящим ученым-математиком и педагогом. В 18-м интернате[1] и в Черноголовской школе в общей сложности он выпустил более 25 классов[2].

[1]ФМШ при МГУ, ныне школа им. А. Н. Колмогорова СУНЦ МГУ.

[2]В личной беседе он однажды сообщил, что выпустил в общей сложности не менее 37 классов — *прим. ред.*

Он учил математике, информатике, литературе, играть в футбол, походной жизни, вывозил ребят на слеты Клуба Самодеятельной Песни. Без преувеличения можно сказать, что он учил своих учеников Жизни, и ко всему, чему он учил, прививал любовь. Но, пожалуй, самое главное, чему он их научил – это учиться. Широкое образование, далеко выходящее за рамки школьной математики, которое он давал, и привитое им умение, а главное, постоянное желание учиться дали его выпускникам возможность достичь больших высот в их последующей жизни. Среди его учеников есть не только победители математических и физических всесоюзных и международных олимпиад, множество докторов наук, но и режиссер, и даже священнослужитель в Париже. Саша становился Соросовским учителем столько раз, сколько проводился этот конкурс, а победителями становились учителя, которых называли ученики (а не чиновники от образования).

Сам он учился всю жизнь, и это позволяло ему всегда оставаться на самом современном уровне в самых разных областях. Многое из того, чему он учил детей, Саша узнавал сам незадолго до этого, часто от детей, которые приходили в гости накануне. Узнав что-то новое и интересное, он сразу делился этим. Он любил литературу и великолепно разбирался в ней. Всю свою жизнь он собирал книги. Он "доставал" хорошие, только что вышедшие впервые в СССР книги (тогда это стоило немалых трудов), читал Булгакова, Маркеса и других великих писателей и поэтов на своих уроках математики. Ни у учителей литературы, ни в библиотеках, да и у самих учеников тогда этих книг просто не было, и у его воспитанников не было другой возможности познакомиться с великими творениями.

Он хорошо разбирался в музыке и был членом клуба меломанов, который периодически собирался на прослушивания, как классики, так и джаза. Со времен МГУ у него была великолепная фонотека. Появлялись новые авторы и исполнители, а он всегда, как и во всем, был в духе времени. Когда появились "Аквариум" и "Наутилус", он ставил всем гостям пластинки и кассеты этих групп. Ученики приносили ему новые диски и кассеты, и с тем, во что влюблялся сам, на следующий день он знакомил других гостей. Точнее сказать, друзей, потому что его ученики быстро становились друзьями и потом оставались ими навсегда. В его день рождения, в студенческие каникулы, перед Новым Годом в его доме было тесно от друзей. Учитывая скромные размеры квартиры, заполненной огромным количеством книг самой разнообразной тематики (учебники и монографии, художественная литература и альбомы, литературоведение и искусствоведение), занимавшим почти все пространство, приходилось принимать гостей по сменам. Он угощал всех вкуснейшим кофе, свежепомолотым в ручной кофемолке и собственноручно сваренным в джезве по одному из своих многочисленных рецептов.

Саша был центром притяжения очень многих самых разных людей. В гостях у него бывали многие "великие": бард, поэт и драматург Юлий Ким (он учил Сашу литературе в интернате и на Сашином выпускном вечере в песне выпускников он спел: "Земляков – наш образец"), академик В. Е. Захаров (с которым Саша познакомился, еще будучи аспирантом, на "нелинейной конференции" в Горьком, когда Захаров еще не был ни академиком, ни директором Института теоретической физики РАН и жил в Новосибирске – позже судьба свела их в Черноголовке), выдающийся математик академик Я. Г. Синай (он был научным руководителем у Саши в аспирантуре МГУ) и многие другие известные люди – всех просто не перечислить. Но большинство гостей были его ученики, в том числе бывшие, с десятками из которых он сохранял связи долгие годы. К нему приходили просто так, без всякого повода, или поделиться радостями или горестями. Его бывшие ученики, ставшие друзьями, приводили к нему своих невест на "смотрины" и посоветоваться в других самых серьезных вопросах.

Саша был очень контактен. После поездки в Грузию в 70-х в составе делегации министерства просвещения у него появилось множество новых друзей, и Грузия стала его большой любовью на всю жизнь. Новые друзья многократно приглашали приехать в гости в любой момент, когда ему удобно, но из-за его фантастического трудолюбия он не мог себе это позволить.

Он практически не знал отпусков. За все время, которое я его знал, он всего несколько раз на несколько дней съездил навестить близких на родину в деревню Желниха Тверской области, два раза на несколько дней в Ленинград и два раза в Грузию, куда мне довелось его сопровождать в 80-х. Некоторые его грузинские друзья к тому времени достигли высокого положения в Грузии и нас принимали с истинно грузинским гостеприимством. Во время обеих поездок одну неделю мы проводили в Тбилиси и его окрестностях и одну в Батуми, в современном тогда отеле, расположенном в ста метрах от Черного моря, в котором мы ежедневно купались. Это был весь его отдых более чем за 20 лет. Он попросту не мог отдыхать, когда есть работа, а работа была всегда.

Саша был талантлив во всем. Из деревенской школы его взяли в престижнейшую, легендарную ФМШ 18 при МГУ, которую он закончил с золотой медалью. Затем был мехмат МГУ, который Саша закончил с красным дипломом. Он действительно был образцом, и слова Кима – это не гипербола. Саша все схватывал буквально "на лету", ему не только было не нужно, но и нельзя было долго объяснять – достаточно было нескольких первых слов. При попытке расшифровать мысль он, всегда очень спокойный и уравновешенный, слегка раздражался и перебивал: "Ты что, меня за идиота считаешь?" Он прекрасно знал, что не считаю, и говорил это очень мягко, только для того чтобы дать понять, что он уже все понял и дальше "разжевывать" не нужно. Те, кто его хорошо знали, понимали, что он не обижается, да и сами тоже не обижались. А тем, кто плохо, он таких слов просто не говорил. С каждым он умел говорить на его языке. Во многих случаях он сразу видел суть и глубину проблемы лучше, чем собеседник, рассказывающий ему о ней. Он находил нетривиальный смысл в самых простых для "нормального" человека вещах. В последнем полученном мною письме, отправленном за несколько дней до кончины, он задал попавшийся ему вопрос из одного школьного учебника, над которым в эти дни думал: "Почему колбасу режут наискось?". Для обычного человека это просто быт, но не для математиков уровня Саши.

Если бы Саша не стал Великим Учителем, он был бы Великим Математиком. Саша получил квартиру в Черноголовке под его обещание учить детей в Черноголовской школе. Казалось бы, ничто не мешало ему совмещать эту работу с серьезной математикой – ведь для занятий математикой требуется голова, образование (научная школа) и возможность общения с другими математиками. Да и почти все математики успешно совмещают науку с педагогической деятельностью в ВУЗах. Скорее всего, Саша на это и надеялся. Но этим намерениям не суждено было сбыться. Делать какое-то дело наполовину было не в его характере. С его цельной натурой он не умел разбрасываться. Увлекшись одним, не смог делить себя на две половины. Он не мог формально относиться к преподаванию, хотя с его уровнем ему ничего не стоило без всякой подготовки проводить на высочайшем уровне положенные 18 уроков в неделю. Но Саша увлекся детьми. В этом смысле он сам был как ребенок. Как-то я рассказал ему про появившуюся теорию бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, имеющую очень близкое отношение к тому, чем он занимался в аспирантуре у Я. Г. Синая, написавшего для "Успехов математических наук" обзор, посвященный этой новой теории. Саша был восхищен математической простотой и элегантностью теории, и мне даже казалось, что он станет этим серьезно заниматься, благо теория была "свежей", серьезные вопросы оставались, обсудить их было с кем (Синай работал в ИТФ РАН и бывал в Черноголовке еженедельно).

Да не тут-то было. Саша стал учить этой теории своих школьников, как всегда, объясняя очень сложную область современной науки простым, доступным им языком, в чем он был великий мастер. В это время в школе появились первые персональные компьютеры – "Ямахи", и он учил подопечных Бейсику (учась при этом сам) одновременно с теорией Фейгенбаума.

Эра компьютеризации не оставила Сашу позади себя (хотя многие его ровесники безнадежно отстали). Его способность оценить прогрессивное и быстро обучаться позволяли ему всегда идти в ногу со временем. С появлением первых "Ямах" он первый в школе стал печатать на них методические материалы, бланки тестов, билеты для экзаменов и зачетов и бланки собственных ведомостей, в которых учитывал знания по собственной системе (у него во всем была собственная система). После появления первых айбиэмовских компьютеров и интернета очень скоро все это появилось и у него дома.

Его друг Гена Величко безвозмездно установил Саше его первый компьютер, а потом постоянно его "апгрейдил". Ученик, а впоследствии друг, Миша Дьячков прислал с оказией из Канады первый Сашин модем, а автор этих строк установил его вместе с одним из первых "Нетскейпов" и "подпольно" подключил его к бесплатному интернету через сеть института, в котором работал. Для этого пришлось предварительно установить коммерческий телефон. Сашина скромность не позволяла ему в течение более чем 20 лет обратиться с просьбой о телефоне к "сильным мира сего" (детей многих из них он учил, и ему бы не отказали, но он не любил просить). Телефон у Саши появился только с появлением коммерческих компаний.

Все, кто знал Сашу, его очень любили и "наперегонки" старались ему помочь во всем, в чем только было можно. Он не хотел быть обузой для других и часто отказывался от помощи. Но когда он соглашался, те, кому он это позволял, почитали это за честь. Ученики время от времени устраивали "субботники", помогая ему в наведении порядка (из-за постоянной занятости и увлеченности работой руки до порядка доходили не всегда,). Когда он болел, ученики, коллеги-учителя и друзья навещали и снабжали его лекарствами, продуктами, горячей пищей и вообще всем необходимым.

Нас связывала четвертьвековая дружба. Очень тяжело писать о Саше в прошедшем времени. Со случившимся трудно смириться всем, кто его знал.

В нашей памяти и в наших сердцах Саша Земляков навсегда останется “нашим образцом”...

Владимир Копылов, друг Саши Землякова,
доктор физико-математических наук, ведущий научный
сотрудник Института Физики Твердого Тела РАН.

Несколько слов об Учителе

В. М. Имайкин

Александр Николаевич Земляков был моим учителем сначала в августе 1977 года, в летней школе, организованной ФМШ №18 при МГУ для окончательного набора учащихся в ФМШ, а затем в 1977/78 учебном году в классе 10"Ж" одногодичного потока. На меня сильное впечатление произвел его стиль ведения уроков. Кроме того, что они были прекрасно организованы методически, уроки представляли собой яркое театральное зрелище. Гораздо позже в личном разговоре А.Н. прямо говорил, что "спектакль должен быть тщательно подготовлен и хорошо поставлен". Кроме того, он охарактеризовал свой педагогический стиль как "наступательно-агрессивный". Я бы воздержался от такой радикальной оценки и назвал его скорее "напористо-веселым". То, что А.Н. хотел внедрить в сознание учащихся, внедрялось действительно активно и напористо, но пожалуй без явного нажима, а при помощи собственной увлеченности, обаяния, юмора. Хорошо запомнились его стимулирующие поговорки: "не надо думать, надо решать задачу", "на решение первой задачи одна минута, второй задачи — две минуты и т.д." (когда на доске была выписана серия задач). Учебный материал выдавался в виде специальных текстов — "тезисов", которые были маленькими литературными шедеврами. Тогда я впервые (думаю, как и многие одноклассники) ощутил эстетическое воздействие математических текстов. Вообще эстетическая составляющая была постоянной компонентой уроков А.Н., а если взглянуть более широко, то обучая, казалось бы, математике, он приобщал нас к самым разнообразным пластам культуры, не только и не столько естественно-научной, сколько гуманитарной (культуры мышления, ведения дискуссий, создания текстов и т.п.). Кроме обычных уроков, я посещал спецкурс А.Н. под названием «Алгебра*»[1]. На нем меня охватывало новое, необычное для школьника чувство прикосновения к настоящей науке.

Второй этап моего общения с А.Н. начался (после долгого перерыва) несколько лет назад, когда мы с ним договорились осуществлять проект публикации материалов ФМШ в журнале "Математическое образование". К настоящему времени опубликованы многие материалы, созданные А.Н., и я надеюсь, что эта работа будет продолжена. У А.Н. это время совпало с некоторым новым этапом жизни и, на мой взгляд, с началом нового творческого подъема. Он выиграл несколько престижных грантов на написание учебных пособий и увлеченно отдался этой деятельности. Наши беседы вращались вокруг того, какие учебники математики необходимы современным школьникам, какие возможны критерии оценки качества учебников и т.п. А.Н. всегда при этом подчеркивал, что учебник должен быть, может, даже — прежде всего, интересным литературным произведением. Настаивал также на изложении исторического контекста возникновения тех или иных математических идей. И всегда был готов обсуждать любые интересные

[1] Спецкурс по дополнительным главам алгебры, материалы которого опубликованы в №№4(27), 2003 г. и 1(28), 2004 г. настоящего журнала.

вопросы, из любой области культуры. Интересовался судьбами своих учеников, с гордостью рассказывал об их достижениях. В интернате существует традиция, что сильные ученики начинают приобщаться к преподаванию, постепенно некоторые сами становятся преподавателями. Сам А.Н. пожертвовал своей научной карьерой ради возможности обучать одаренных детей, выводить их в большую науку и жизнь. Однажды он мне сообщил, что наиболее талантливым ученикам, у которых он предвидел в будущем научные успехи, он просто своим авторитетом запрещал преподавать в интернате, зная, как затягивает это дело. Как и в школьные годы, после общения с А.Н. я чувствовал себя окрыленным, полным новых идей и проектов.

Верю, что друзья и ученики сохранят память об Александре Николаевиче.

Имайкин Валерий Марсович,
кандидат физ.-мат. наук,
главный редактор журнала
“Математическое образование”.

Элективный курс Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов

А. Н. Земляков

Завершаем публикацию глав учебного пособия, предназначенного для учащихся 11 классов с углубленным изучением математики. В предыдущих номерах журнала был опубликован методический и методологический комментарий к пособию, а также глава 1. В настоящем номере печатается глава 2. В полном объеме пособие готовится к изданию в издательстве МЦНМО.

Глава 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 2.1. Анализ дифференциального уравнения $y' = f(x)$

Среди непрерывных математических моделей, записываемых как дифференциальные уравнения вида

$$x' = F(x,t), \tag{0}$$

особо выделяются уравнения, в которых правая часть есть заданная (известная) функция непрерывной переменной (времени) t, $F(x,t) \equiv f(t)$, а также *автономные уравнения*, в которых производная задается как известная функция от значения непрерывно меняющейся величины $x(t)$, $x' = F(x)$, т. е. $x'(t) \equiv F(x(t))$.

Уравнениями последнего типа (автономными) мы займемся в главах 3–4, а в этой главе сосредоточим внимание на уравнениях типа $x'(t) = f(t)$ или, в обозначениях y вместо x и x вместо t, на анализе дифференциального уравнения

$$y' = f(x): \qquad \forall\, x \in D \quad y'(x) = f(x). \tag{1}$$

Здесь f — *данная функция*, D — область рассмотрения дифференциального уравнения: числовое множество, чаще всего конечный или бесконечный интервал или объединение интервалов (если это множество не указывается, то подразумевается, что $D = D_f$ — область определения функции f).

2.1.1. Интегрирование как решение дифференциального уравнения

Задача решения (отыскания всех решений) дифференциального уравнения (1) есть в точности *задача восстановления функции по заданной ее производной*, т. е. *основная задача интегрального исчисления* (задача, *обратная* задаче отыскания производной). Соотнесем терминологию, относящуюся к дифференциальным уравнениям, с принятой в интегральном исчислении: дадим определения, примеры, формулировки утверждений, знакомые по курсу алгебры и начал анализа, в терминах дифференциальных уравнений.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется **первообра́зной** функции $f(x)$ (или «для функции» $f(x)$) на множестве D — промежутке или объединении промежутков, — если она является решением дифференциального уравнения (1), $y' = f(x)$, на этом множестве, т. е.

$$\forall\, x \in D \quad \exists\, F'(x) \text{ и } F'(x) = f(x).$$

Пример 1. Дифференциальному уравнению $y' = x$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяет функция $y = \frac{x^2}{2}$, а вместе с нею и любая функция вида $y = \frac{x^2}{2} + C$, так как *если к функции прибавить константу, то ее производная не изменится.* □

Пример 2. Дифференциальное уравнение $y' = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, имеет решения

$$y = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — *произвольная аддитивная*[1] *постоянная.* □

Пример 3. Дифференциальному уравнению $y' = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, удовлетворяют любые функции вида $y' = -\frac{1}{x} + C$. □

Возникает вопрос: *все ли* решения дифференциального уравнения (1) для рассмотренных функций f мы указали (угадали, «нашли»)? Ответ известен.

Предложение 1 (основное свойство решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — произвольный (возможно, бесконечный) промежуток, то $\forall\, x \in I\;\; y_2(x) = y_1(x) + C$, где C — некоторая постоянная.*

Для доказательства нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 1 (признак постоянства функции). *Если функция $h(x)$ дифференцируема на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, причем производная равна нулю на всем этом промежутке, то функция h постоянна на промежутке I:*

$$h'(x) \equiv 0 \text{ на } I \Longrightarrow h(x) \equiv \text{const} \text{ на } I.$$

Это утверждение сразу следует из *теоремы Лагранжа* из курса алгебры и начал анализа:

$$\forall\, a, b \in I\; \exists\, c \in I \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = 0,$$

Доказательство. Продифференцируем разность решений — функцию $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$. Получим:

$$\forall\, x \in I \quad r'(x) = y_2'(x) - y_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, согласно *признаку постоянства функции* (лемме 1), эта разность $r(x)$ постоянна — равна некоторой константе C — *на промежутке I*. Значит, *на этом промежутке* $y_2(x) - y_1(x) = C$, поэтому $y_2(x) = y_1(x) + C$. ■

Мы специально подчеркнули, что речь идет о решениях *на одном промежутке*, так как *признак постоянства функции* справедлив только для функций, рассматриваемых *на одном промежутке*, поскольку при его доказательстве используется

[1] Напомним: это означает, что в запись решения константа входит как слагаемое, от лат. additivus: «прибавляемый».

теорема Лагранжа: если $r'(x) \equiv 0$ на I, то $\forall\ a,\ b \in \mathbb{I}$ существует значение c между a и b такое, что

$$r(b) - r(a) = r'(c)(b - a) = 0 \implies r(b) = r(b).$$

На объединении же (непересекающихся) промежутков говорить о теореме Лагранжа нет смысла: функция с нулевой производной является константой только на отдельном промежутке, но не будет таковой в целом — ведь константа на каждом из промежутков своя!

Таким образом, в первых двух примерах мы действительно указали все решения соответствующих дифференциальных уравнений, а в примере 3 — отнюдь нет, так как это уравнение рассматривается на области определения функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$, т. е. на объединении промежутков $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$. Следовательно, общий вид решений этого дифференциального уравнения задается «составной» формулой

$$y(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1, & x < 0; \\ -\dfrac{1}{x} + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

В дальнейшем мы подобные составные формулы будем записывать короче, в виде

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \widehat{C},$$

где «домик» над произвольной постоянной C означает, что на каждом из промежутков, на которых рассматривается дифференциальное уравнение $y' = f(x)$ (как указывалось, если не оговорено противное, это *вся естественная область определения функции* f: $D = D(f)$), может быть взята своя постоянная.

Приведем вытекающее из доказанного предложения утверждение, которое также относится к дифференциальному уравнению (1), рассматриваемому на единственном промежутке.

Следствие 1 (общий вид решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Любое решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — данный (возможно, бесконечный) промежуток, — записывается в виде $y(x) = y_1(x) + C$, где $y_1(x)$ — произвольное* частное *его решение, C — произвольная постоянная.*

В соответствии с определением 1, оба сформулированных утверждения можно перевести на язык первообразных. Предложение 1 гласит, что *любые две первообразные одной функции, рассматриваемые на единственном промежутке, отличаются на нем на константу.* Следствие 1 обычно называют *основным свойством первообразных*: *если функция f имеет какую-то первообразную F на промежутке I, то она имеет* ***бесконечно много*** *первообразных на этом промежутке, причем* ***каждая*** *первообразная f на этом промежутке записывается в виде $F(x) + C$, $C = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$.*

Ньютон не использовал понятие *первообразной*, а задачу их отыскания понимал как *решение дифференциального уравнения*: в его терминологии *решить дифференциальное уравнение* — значит, отыскать «*флюенту*» (функцию, «текущую»; лат. fluenta — «воды», «волны», «течение»), зная ее «*флюксию*» (т. е. производную, «скорость»; лат. fluxio или fluctio — «истечение»). Кроме того, Ньютон не прибавлял *произвольную постоянную* (однако, упоминал, что в решения «входят» произвольные постоянные). Первым ее написание ввел Лейбниц (в 1694 г.).

Сам термин «первообразная» в обиход ввел Лагранж в 1797 г. в своей «*Теории аналитических функций*», одновременно с термином «производная». Французские и английские термины происходят от лат. primitivus: нечто «начальное», «исходное», по-русски «первообраз», — и derivativus: «производный» (произведённый), «образованный» (из чего-либо). Обозначения $y' = f'(x)$ (или $x'(t)$), $y'' = f''$ и т. д. также ввел Лагранж (1770). Ньютон вместо «штрихов» использовал точки над флюентами: $\dot{x}$, $\ddot{x}$; в механике для производных по времени ньютоновы обозначения применяются по настоящее время (хотя в Англии они отменены с 1915 г. по «типографским соображениям»!). Обозначения и терминология Лейбница рассмотрены в главе 4.

2.1.2. Теорема единственности решений уравнения $y' = f(x)$ и свойства первообразных

Мы видели, что если функция $f(x)$ на промежутке I имеет *хотя бы одну* первообразную $F(x)$, то $f(x)$ имеет *бесконечно много* первообразных, причем все они отличаются от $F(x)$ на аддитивную константу C. Если же на первообразную, т. е. на решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, наложить еще и *начальное условие*, т. е. задать значение $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \in I$, то первообразная (решение дифференциального уравнения) определена *однозначно* — постоянная C отыскивается из начального условия:

$$y(x_0) = y_0 \implies y_0 = F(x_0) + C \implies C = y_0 - F(x_0).$$

В терминах дифференциальных уравнений это утверждение формулируется как *теорема единственности.*

Теорема 1 (единственности решений дифференциального уравнения $y' = f(x)$). *Если решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, где I — данный (возможно, бесконечный) промежуток,* ***существует****, то оно* ***однозначно*** *определяется* ***начальным условием*** $y(x_0) = y_0$.

Иначе можно сказать так: *если существует функция $y(x)$, $x \in I$, удовлетворяющая следующей «системе условий»*:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x) \quad (\forall\, x \in I); \\ y(x_0) &= y_0 \quad (x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}), \end{cases}$$

то только одна.

Доказательство, по существу, было дано выше. ■

Обратим внимание на формулу, связывающую *искомое* (удовлетворяющее данному начальному условию) решение $y(x)$ с произвольной (по предположению, существующей) первообразной $F(x)$:

$$y(x) = F(x) + C = F(x) + (y_0 - F(x_0)) = y_0 + (F(x) - F(x_0)) \iff$$
$$\iff y(x) - y(x_0) = F(x) - F(x_0).$$

Сформулируем соответствующее утверждение (о *равенстве приращений* любых двух первообразных на отрезке от точки x_0 до точки x) как отдельную теорему (несколько поменяв обозначения).

Теорема 2 (о равенстве приращений любых первообразных данной функции). *Если функция $f(x)$ на промежутке I имеет две первообразные $F(x)$ и $\overline{F}(x)$, то для любых двух точек a, $b \in I$ приращения этих первообразных на отрезке от a до b равны:*

$$F(b) - F(a) \overset{des}{=} F(x)\Big|_a^b = \overline{F}(x)\Big|_a^b \overset{des}{=} \overline{F}(b) - \overline{F}(a)^{1}.$$

Доказательство. Согласно основному свойству первообразных, если функция $f(x)$ на промежутке I имеет первообразную $F(x)$, то *любая* ее первообразная $\overline{F}(x)$ отличается от $F(x)$ на аддитивную константу C: $\overline{F}(x) = F(x) + C$. Но в этом случае

$$\overline{F}(x)\Big|_a^b = \overline{F}(b) - \overline{F}(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) =$$
$$= F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \qquad \blacksquare$$

2.1.3. Вопросы существования решений уравнения $y' = f(x)$ или первообразных

Все предыдущие утверждения были доказаны *в предположении*, что решения или первообразные, о которых шла речь, *существуют*. Однако, отнюдь не любая функция имеет первообразную. Напомним соответствующий пример.

Пример 4. Докажем, что *функция* $\operatorname{sgn} x$ *не имеет первообразной на* $\mathbb{R}$. Напомним, что эта функция определяется «составной формулой»:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ \ \ 1, & x > 0; \\ \ \ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Допустим, что эта функция имеет некоторую первообразную $F(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, F'(x) = \operatorname{sgn} x$. В частности, на интервале $(-\infty, 0)$ $F'(x) = -1$, а так как на этом же интервале $(-x)' = -1$, то, согласно основному свойству первообразных, на интервале $(-\infty, 0)$ $F(x) = -x + C$ для некоторой константы C. Аналогично, на интервале $(0, +\infty)$ $F(x) = x + C_1$ для некоторой константы C_1.

Далее, так как первообразная $F(x)$ дифференцируема всюду, в том числе и в точке $x = 0$, то она *непрерывна* в нуле, поэтому $\lim F(x) = F(0)$ при $x \to 0$. Следовательно, $C_1 = F(0) = C$, и функцию $F(x)$ можно записать следующей составной формулой:

$$F(x) = \begin{cases} -x + C, & x < 0; \\ \ \ x + C, & x > 0; \\ \ \ C, & x = 0 \end{cases} \iff F(x) = |x| + C.$$

[1]Значок «des» над знаком равенства расшифровывается как «обозначение»— англ. designation. В данном случае имеется в виду удобное обозначение для *приращения функции F на отрезке от точки a до точки b*: $F(x)\big|_a^b$. Его ввел в 1848 г. французский математик *П. Ф. Саррюс.*

Но эта функция не может быть *всюду дифференцируемой*: в противном случае таковой была бы и функция $F(x) - C = |x|$, а мы знаем, что функция $|x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Полученное противоречие и доказывает, что функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной на $\mathbb{R}$. $\square$

В примере 4 функция, не имеющая первообразной, была *разрывной*. Оказывается, что:

1) Функция, непрерывная на промежутке, **всегда** имеет на нем первообразную — это будет доказано в § 2.3.

2) С другой стороны, из разрывности функции вовсе не следует, что она не имеет первообразной — вполне может иметь, как показывает следующий пример.

Пример 5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$ (легко видеть, что предел $\lim f(x)$ в нуле не существует), но в то же время эта функция является производной для функции

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, является первообразной для (разрывной) функции f на всей числовой оси. $\square$

§ 2.2. Геометрическая интерпретация уравнения $y' = F(x, y)$

Прежде, чем заняться вопросом существования первообразных или решений дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$, рассмотрим один из важнейших подходов к анализу и приближенному решению дифференциальных уравнений — так называемый *метод Эйлера* (1768) в общем случае — для произвольного эволюционного дифференциального уравнения

$$x' = F(x, t), \tag{0}$$

которое запишем в других обозначениях, в виде

$$y' = F(x, y), \quad \text{т. е.} \quad y'(x) = F(x, y(x)), \tag{1}$$

где $F = F(x, y)$ — заданная функция двух переменных, т. е. функция на координатной плоскости Oxy.

2.2.1. Поля направлений и интегральные кривые дифференциальных уравнений

Уравнение (1) имеет простую геометрическую интерпретацию: так как производная $y'(x)$ есть угловой коэффициент касательной к графику решения $y = y(x)$ в точке $(x;\, y) = (x;\, y(x))$, причем, согласно (1), он нам *известен* — равен значению данной функции $F(x, y)$, — то решить уравнение (1), значит, восстановить функцию $y(x)$ (или ее график) по направлениям касательной в каждой точке. Все возможные касательные к графикам решений дифференциального уравнения (1) образуют так называемое ***поле направлений*** на координатной плоскости Oxy (рис. 11). Строго говоря, поле направлений — это соответствие

$$\boldsymbol{L} : M(x;\, y) \mapsto \boldsymbol{L}_{F(x,y)}(M),$$

где через $\boldsymbol{L}_k(M)$ обозначена прямая, проходящая через точку M и имеющая угловой коэффициент k. Графики решений уравнения (1) в каждой своей точке *касаются* рассматриваемого поля направлений (см. рис. 11).

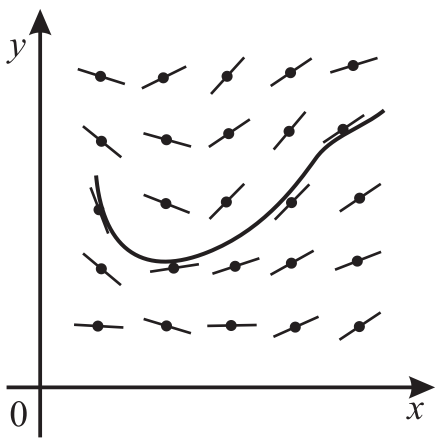


Рис. 11

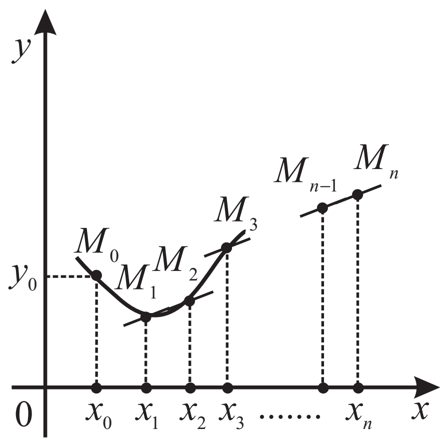


Рис. 12

Кривые, в каждой точке касающиеся данного поля направлений, называются ***интегральными кривыми*** этого поля направлений (или соответствующего дифференциального уравнения). Таким образом, задача решения дифференциального уравнения (1) эквивалентна задаче отыскания всех интегральных кривых отвечающего этому уравнению поля направлений.

Очевидно, для *однозначного* определения решения дифференциального уравнения (1) необходимо задать *начальное условие*, т. е. точку $M_0(x_0;\, y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Обычно начальное условие записывают в виде

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

2.2.2. Метод Эйлера построения интегральных кривых

Идея Эйлера состоит в том, чтобы отыскивать интегральные кривые *приближенно*, заменяя их *ломаными*, определенным образом строящиеся по данному полю направлений. Именно, пусть мы хотим найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) $y(x_0) = y_0$. Попытаемся *приближенно* провести через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ интегральную кривую — график решения —

до точки с абсциссой x. Для этого разобьем отрезок $[x_0,\, x]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = x$ (очевидно, $x_m = x_0 + m\frac{x-x_0}{n}$) и проведем ***ломаную Эйлера*** $M_0M_1M_2...M_n$, где $M_m = (x_m;\, y_m)$ и точки $M_1, M_2, ...$ строятся так, что каждый отрезок M_mM_{m+1} идет вдоль поля направлений $\boldsymbol{L}$ в точке M_m (рис. 12). Тогда угловой коэффициент прямой M_mM_{m+1} равен $F(x_m, y_m)$, ее уравнение записывается в виде

$$y = y_m + F(x_m, y_m)(x - x_m),$$

поэтому

$$y_{m+1} = y_m + F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m). \tag{3}$$

Последовательно подставляя рекуррентные формулы (3) одну в другую при $m = 1, 2, ..., n$, мы получим формулу для ординаты последней точки ломаной Эйлера

$$y_n = y_0 + \sum_{m=0}^{n-1} F(x_m, y_m)(x_{m+1} - x_m),$$

которая в пределе при $n \to \infty$ **должна бы** дать значение решения уравнения (1) с начальным условием (2) в точке x: *гипотетически*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y(x).$$

Оказывается, что при определенных условиях, накладываемых на функцию $F = F(x, y)$, это действительно так, но доказательство соответствующей теоремы (и даже точная ее формулировка) далеко выходит за возможности данного курса. В следующей главе (в § 5.1) мы посмотрим, что дает подход Эйлера в случае *однородного линейного дифференциального уравнения* $y' = ky$, а в следующем параграфе применим метод Эйлера к уравнению первообразных $y' = f(x)$.

Сейчас же рассмотрим иногда применимый геометрический (графический) метод отыскания решений дифференциальных уравнений вида (1).

2.2.3. Изоклины полей направлений и графическое интегрирование дифференциальных уравнений

Если для данного дифференциального уравнения (1) удается относительно подробно изобразить его поле направлений (при этом вместо прямой $\boldsymbol{L}_{F(x,y)}(M)$ через точку M проводится маленький отрезочек), то по такой картинке иногда можно получить представление о *качественном поведении* интегральных кривых, т. е. графиков решений уравнения. Еще задолго до Эйлера (в 1694 г.) швейцарский математик, сподвижник Лейбница *Иоганн Бернулли* предложил для построения полей направлений использовать *изоклины.*

Определение 1. Изокли́нами дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ или соответствующего ему поля направлений называются *множества точек одинакового наклона* поля направлений

$$\mathit{\Gamma}_k = \big\{(x;\, y) \,\big|\, F(x, y) = k\,\big\}\,;$$

иначе говоря, *изоклины*[1] суть **линии уровня** функции F, задаваемые уравнениями $F(x,y)=k$, вдоль которых поле направлений имеет *постоянный наклон*: тангенс угла наклона равен k (например, при $k=0$ изоклина Γ_0 дает все точки, в которых касательная к интегральным кривым *горизонтальна*, т. е. все критические точки решений $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=F(x,y)$).

Метод изоклин построения полей направлений состоит в том, что мы изображаем семейство некоторых изоклин Γ_k и вдоль каждой из них строим поле направлений — прямых (отрезочков) с угловыми коэффициентами k.

Пример 1. Для дифференциального уравнения $y'=\dfrac{ax+by}{cx+dy}$, $(c;d)\neq(0;0)$, $ad-bc\neq 0$[2], уравнение изоклины записывается как

$$\frac{ax+by}{cx+dy}=k \iff ax+by=k(cx+dy)\ \&\ cx+dy\neq 0 \iff Ax+By=0$$

$(cx+dy\neq 0;\ \ A=a-kb,\ \ B=b-kd)$. Последнее уравнение задает прямую, проходящую через начало координат, только с *выброшенным* началом координат, т. е., фактически, пару получающихся лучей (которые могут быть и вертикальными, т. е. совпадать с положительным и отрицательным лучами оси ординат). Построить поле направлений вдоль изоклин проще как бы в обратную сторону: для наклонной прямой $y=\lambda x$ найти угловой коэффициент по формуле

$$k=F(x,y)=F(x,\lambda x)=\frac{ax+b\lambda x}{cx+d\lambda x}=\frac{a+b\lambda}{c+d\lambda},$$

а затем вдоль двух лучей прямой построить «направления» с этим угловым коэффициентом $k=k(\lambda)$.

В начале координат поле направлений *не определено* — эта точка называется *особой точкой* рассматриваемого дифференциального уравнения. Но в точках прямой $cx+dy=0$, отличных от начала координат, имеет смысл считать направление векторного поля *вертикальным*: при стремлении точки $(x;y)$ вне этой прямой к точке на прямой угловой коэффициент $k=F(x,y)$ стремится к бесконечности. $\square$

Что можно делать после построения части изоклин и поля направлений вдоль них — покажем на конкретных примерах.

Пример 2. Для дифференциального уравнения $(*)$ $y'=\dfrac{y}{x}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y=\lambda x$ равен

$$k=k(\lambda)=\frac{y}{x}=\frac{\lambda x}{x}=\lambda.$$

Значит, поле направлений рассматриваемого дифференциального уравнения *сонаправлено* с изоклинами (рис. 13) и вертикально вдоль оси Oy (на ней $x=0$).

[1]От греч. $\iota\sigma o\zeta$, isos — «равный», «одинаковый» и $\varkappa\lambda\iota\nu\omega$, klino — «наклоняю».

[2]Подумайте, что означает это условие. Что получится в случае $ad-bc=0$?

Следовательно, *сами* проходящие через начало координат лучи суть интегральные кривые. Они задаются теми же уравнениям $y = \lambda x$, и выполнение дифференциального уравнения $(*)$ проверяется непосредственно:

$$y' = (\lambda x)' = \lambda, \quad \frac{y}{x} = \frac{\lambda x}{x} = \lambda = y',$$

что мы и собирались установить. $\square$

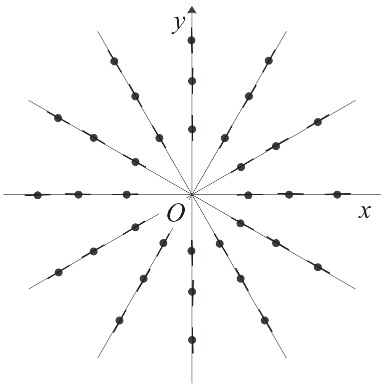


Рис. 13

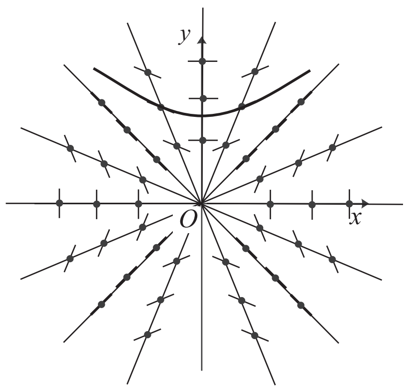


Рис. 14

Пример 3. Для дифференциального уравнения $(*)$ $y' = \dfrac{x}{y}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = \frac{x}{y} = \frac{x}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}.$$

В данном случае поле направлений сонаправлено с изоклинами только в случае

$$k(\lambda) = \lambda \iff \frac{1}{\lambda} = \lambda \iff \lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1.$$

Значит, лучи пары прямых $y = \pm x$ (из которых выкинуто начало координат) суть интегральные кривые уравнения $(*)$ (рис. 14), а их уравнения задают решения.

Чтобы прикинуть, как ведут себя прочие интегральные кривые, заметим, что вдоль оси Oy поле направлений горизонтально, вдоль оси Ox — вертикально, а вдоль прочих лучей $y = \lambda x$ — сонаправлено с *симметричными* относительно прямой $y = x$ прямыми $y = \lambda^{-1}x$ (вспомните: симметричный график задает *обратную функцию*, а она имеет угловой коэффициент как раз λ^{-1}) (см. рис. 14). При приближении лучей к прямым $y = \pm x$ направления приближаются к направлениям этих лучей, и естественно предположить, что и интегральные кривые приближаются к ним — как к *асимптотам*. Попробуйте угадать формулу для решений. $\square$

Пример 4. Для дифференциального уравнения $(*)$ $y' = -\dfrac{y}{x}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = -\frac{y}{x} = -\frac{\lambda x}{x} = -\lambda.$$

Значит, поле направлений этого дифференциального уравнения вдоль луча $y = \lambda z$ сонаправлено с *симметричными* им относительно оси абсцисс лучами $y = -\lambda x$ (рис. 15). Вдоль полуосей осей Ox и Oy поле направлений *сонаправлено* с ними, так что полуоси суть интегральные кривые уравнения $(*)$. При приближении лучей $y = \lambda x$ к полуосям направления вдоль них приближаются к направлениям полуосей, и опять естественно предположить, что и интегральные кривые приближаются к ним — как к *асимптотам* (см. рис. 15). Нам известны подобные кривые: нужными свойствами обладают *гиперболы* $xy = a = \text{const}$. Легко проверить, соответствующие функции действительно удовлетворяют дифференциальному уравнению $(*)$:

$$y = \frac{a}{x} \implies y' = -\frac{a}{x^2}; \qquad -\frac{y}{x} = -\frac{a}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{a}{x^2} = y'.$$

Выполнение уравнения $(*)$ легко проверить и дифференцированием равенства $xy = a$:

$$xy(x) \equiv a = \text{const} \implies (xy(x))' = y(x) + xy'(x) \equiv 0 \implies y'(x) = -\frac{y(x)}{x},$$

что и требовалось установить. □

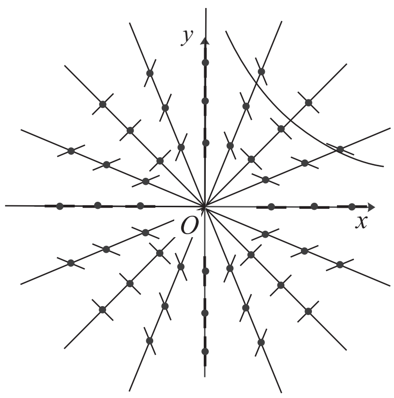


Рис. 15

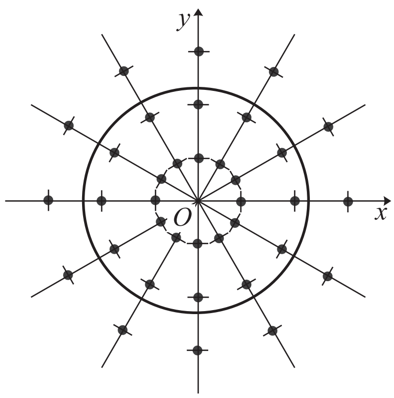


Рис. 16

Пример 5. Для дифференциального уравнения $(*)$ $y' = -\dfrac{x}{y}$ угловой коэффициент вдоль изоклины $y = \lambda x$ равен

$$k = k(\lambda) = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\lambda x} = -\frac{1}{\lambda}.$$

В данном случае поле направлений никогда не сонаправлено с изоклинами:

$$k(\lambda) = \lambda \iff -\frac{1}{\lambda} = \lambda \iff \lambda^2 = -1.$$

На лучах $y = \pm x$ поле направлений направлено перпендикулярно им, равно как и на полуосях (рис. 16). Направление поля на произвольном луче $y = \lambda x$ получается из направления этого луча двумя симметриями: относительно прямой $y = x$ (тогда λ превращается, как в примере 3, в λ^{-1}) и относительно оси Ox (при котором получается окончательно угловой коэффициент $k(\lambda) = -\lambda^{-1}$). Нетрудно видеть, *композиция указанных симметрий есть поворот на* -90, так что *поле направлений вдоль любого луча перпендикулярно этому лучу* (см. рис. 16).

Отсюда понятно, что интегральными кривыми поля направлений уравнения $(*)$ будут всевозможные окружности $x^2 + y^2 = R^2 = \mathrm{const}$ с центром в начале координат, а решениями уравнения — функции вида $y(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Последнее легко проверить дифференцированием этих функций,

$$y'(x) = (\pm\sqrt{R^2 - x^2})' = \frac{-2x}{\pm 2\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)},$$

или же, как в предыдущем примере, дифференцированием «*неявной функции*», заданной уравнением $x^2 + y^2(x) \equiv \mathrm{const}$:

$$(x^2 + y^2(x))' = 2x + 2y(x) \cdot y'(x) \equiv 0 \implies y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

что и требовалось. $\square$

В дальнейшем, в главе 4, мы покажем восходящий к Лейбницу прием решения дифференциальных уравнений из примеров 2–5, снимающий «покров таинственности» с наших «угадываний».

§ 2.3. Ломаные Эйлера, решения уравнения $y' = f(x)$ и интеграл

Теперь мы покажем, как геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений и метод Эйлера, изложенные в предыдущем параграфе, могут быть приложены к анализу дифференциального уравнения вида

$$y' = f(x): \qquad \forall\, x \in I \quad y'(x) = f(x), \tag{1}$$

где $I \subset D_f$ — промежуток рассмотрения функции $f(x)$. В частности, на этом пути получим и *теорему существования* решений дифференциального уравнения (1) вместе с многочисленными приложениями.

2.3.1. Ломаные Эйлера и интегральные суммы

Рассмотрим поле направлений $M \mapsto \boldsymbol{L}_k(M)$ дифференциального уравнения вида (1). В этом случае угловой коэффициент направления в точке $M(x; y)$ равен $k(M) = f(x)$ и зависит только от абсциссы x точки M. Геометрически это означает, что поле направлений *постоянно вдоль вертикальных прямых* $x = \mathrm{const}$ (иначе, изоклины таких уравнений будут составлены из вертикальных прямых). Отсюда получаем, что при параллельных переносах вдоль таких прямых поле направлений будет *инвариантно* (т. е. переходит само в себя), а каждая интегральная кривая переходит в интегральную кривую — это соответствует тому факту, что любые два решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$ (если решения существуют!) отличаются на константу (рис. 17). Отсюда же ясна и *теорема единственности решений* дифференциального уравнения вида (1): если хотя бы одно решение уравнения $y' = f(x)$ $(x \in I)$ существует, то с помощью параллельных переносов в направлении оси Oy мы добиваемся того, чтобы перенесенный график прошел через «начальную точку» $M_0(x_0; y_0)$ — очевидно, существует единственный такой перенос.

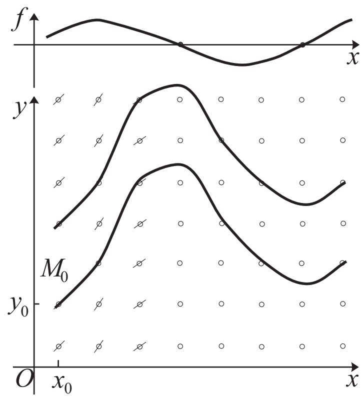


Рис. 17

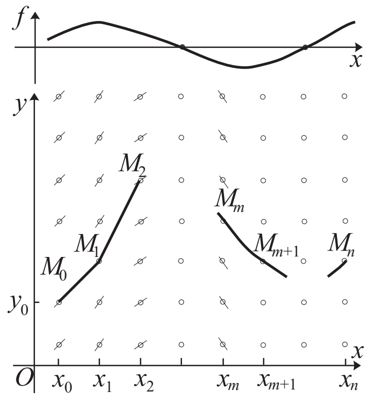


Рис. 18

Теперь попытаемся, используя геометрические соображения, *приближенно* провести через начальную точку $M_0(x_0; y_0)$ интегральную кривую, т. е. график решения дифференциального уравнения $y' = f(x)$, $x \in I$, до точки с абсциссой x. Напомним (см. п. 2.2.2) предложенный Леонардом Эйлером метод построения таких *приближений* n-звенными ломаными $M_0M_1M_2...M_n$. Эти *ломаные Эйлера* при каждом натуральном n получаются следующим образом.

Отрезок от точки x_0 до точки x (мы не исключаем случая $x < x_0$, поэтому не пишем: «отрезок $[x_0,\, x]$») разбивается на n равных частей точками $x_1, ..., x_{n-1}, x_n = x$ $\left(x_m = x_0 + m\frac{x-x_0}{n}\right)$ и, начиная с точки $M_0(x_0; y_0)$, последовательно находим точки $M_m = (x_m; y_m)$, $m = 1, 2, ..., n$, так, чтобы каждый отрезок M_mM_{m+1} шел вдоль поля направлений $\boldsymbol{L}$ в точке M_m (рис. 18). Угловой коэффициент прямой M_mM_{m+1} должен быть равен $f(x_m)$, ее уравнение записывается в виде $y = y_m + f(x_m)(x - x_m)$, поэтому $y_{m+1} = y_m + f(x_m)(x_{m+1} - x_m)$, и в результате подстановки этих рекуррентных формул одной в другую (при $m = 1, 2, ..., n$) получим формулу для ординаты последней точки ломаной Эйлера:

$$y_n = y_0 + \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)(x_{m+1} - x_m) = y_0 + S_n\big(f\big)_{x_0}^{x}. \tag{2}$$

Сумма, обозначенная выше через $S_n\big(f\big)_{x_0}^{x}$, называется *n-й «левой»*[1] **интегральной суммой** *для функции f на отрезке ∇ между точками x_0 и x.*

Мы *предполагаем*, что ломаные Эйлера в пределе при $n \to \infty$ дадут нужную интегральную кривую $y = y(t)$, где t принадлежит отрезку ∇, а в частности, что значение решения дифференциального уравнения (1) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ в точке x равно

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (y_0 + S_n(x)), \\ S_n(x) &= S_n\big(f\big)_{x_0}^{x} = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)(x_{m+1} - x_m). \end{aligned} \tag{3}$$

[1] В знак того, что, во-первых, отрезок разбивается на n равных частей, а во-вторых, m-е слагаемое суммы (2) (отсчет начинается с $m = 0$) есть произведение длины m-го отрезка разбиения на значение функции f в его *левом конце* x_m.

(Наша уверенность основана на том, что при построении ломаных Эйлера мы «просто» заменяли график решения касательной к нему на все более малых отрезках.)

Другой подход к отысканию решений дифференциального уравнения (1) на промежутке I состоит в том, чтобы *для каждого значения* $x \in I$ *рассмотреть* функцию $y(x)$, заданную предельной формулой (3) (если $x = x_0$, то следует считать, что все интегральные суммы равны нулю, так что $y(x_0) = y_0$), и *доказать*, что эта функция является решением уравнения (1). Мы пойдем вторым путем, но *не будем доказывать существование предела* (3), а *выясним, чему он должен равняться.*

2.3.2. Интегральные суммы и квадратуры (площади)

Рассмотрим интегральные суммы $S_n(x) = S_n\big(f\big)_{x_0}^{x}$ повнимательнее. Каждое слагаемое $\Delta S_m = f(x_m)(x_{m+1} - x_m)$ суммы $S_n(x)$ имеет простую геометрическую интерпретацию на графике $z = f(x)$: если функция f положительна и при этом $x > x_0$, то слагаемое ΔS_m равно **площади** прямоугольника с отрезком $[x_m,\, x_{m+1}]$ оси Ox в основании и с левой верхней вершиной $L_m(x_m;\, f(x_m))$ на графике $z = f(x)$ (рис. 19(А)). Вся же интегральная сумма равна площади изображенной на рисунке 19(А) *ступенчатой фигуры*, составленной из указанных прямоугольников. Заметим, что если значение $f(x_m)$ отрицательно, или же если $x < x_0$, то соответствующее слагаемое по-прежнему равно площади такого же прямоугольника, но *взятой со знаком «минус»*.

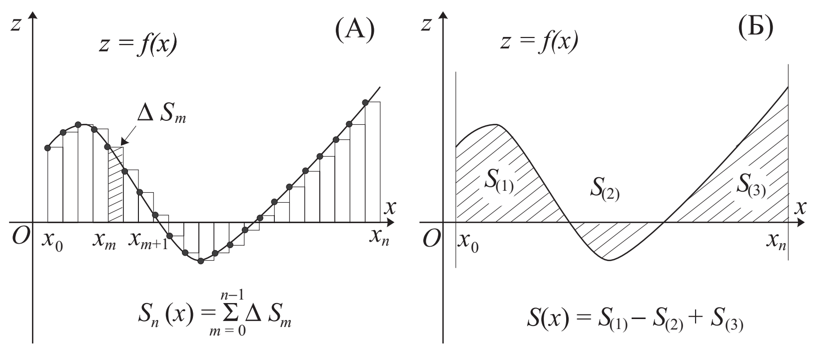


Рис. 19

Естественно считать, по крайней мере для *непрерывных* функций f, что при $n \to \infty$ площадь $S_n(x)$ ступенчатой фигуры стремится к *площади «криволинейной трапеции»*, ограниченной осью Ox, графиком $z = f(x)$ и вертикальными прямыми, проведенными через точки $(x_0;\, 0)$ и $(x;\, 0)$ оси Ox (рис. 19(Б)), причем на участках отрицательности (или в случае $x < x_0$) площадь берется со знаком «минус»: для $S_n(x) = S_n\big(f\big)_{x_0}^{x}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = S\big(f\big)_{x_0}^{x}. \tag{4}$$

Сопоставляя *гипотетические* формулы (3) и (4), получим *предположительную* формулу для решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1) на промежутке I, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$:

$$y(x) = y_0 + S(x) = y_0 + S\big(f\big)_{x_0}^{x}.$$

А теперь **докажем** эту формулу!

2.3.3. Основная теорема анализа: производная переменной площади

Теорема 1 (основная теорема анализа[1]**).** *Если функция f определена и непрерывна на интервале $I = (a,\, b)$, то функция $y(x) = y_0 + S(x) = y_0 + S\big(f\big)_{x_0}^{x}$ является на этом интервале I решением дифференциального уравнения* (1) *с начальным условием $y(x_0) = y_0$.*

Именно в этом виде, как *теорема о производной переменной площади* (но без употребления терминологии дифференциальных уравнений), *основная теорема анализа* была опубликована уже в «Лекциях» Исаака Барроу (1667–1670). Однако точная *аналитическая* формулировка этой теоремы принадлежит Коши (1820–е годы). Дело в том, что до XIX в. математики «*не владели*» точным (в смысле строгости) **понятием непрерывности** (они как бы «не нуждались» в нем). Определение непрерывности функции в точке сформулировал Коши (1821 г.), а еще раньше его — Больцано (1817 г.), о котором следует сказать особо.

Бернард Больцано (1781–1848) — чешский монах и католический священник, теолог и религиозный философ, логик и очень глубокий математик, предвосхитивший не только разработки Коши (именно он первым доказал «*теорему Коши*» о промежуточном значении, где *впервые* применил метод деления отрезка пополам, иногда называемый «*методом Больцано*»), но и исследования Карла Вейерштрасса (1840–50-е годы), и теорию множеств Георга Кантора (1870–80-е годы). Больцано за 30 лет до Вейерштрасса привел пример *непрерывной нигде не дифференцируемой функции*, потрясший математиков до такой степени, что еще в 1905 г. крупнейший французский математик Анри Пуанкаре вопрошал: «*Как интуиция может обмануть нас до такой степени?*», — а его соотечественник Шарль Эрмит тогда же писал, что он «*с ужасом отворачивается от внушающей сожаление язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производных*» (конечно, его изречение было достаточно ироничным).

Больцано внес значительный вклад в *логические основы математики* — в теорию действительных чисел, в математическую логику, в обоснование математического анализа (он ранее Коши и Абеля достаточно строго подошел к понятию предела; по его стопам шел Вейерштрасс при введении своей концепции числового континуума).

Доказательство. Так как $S(x_0) = 0$, начальное условие, конечно, выполнено. Докажем, что для любого значения $x \in I$ существует производная $S'(x)$, причем $S'(x) = f(x)$. Будем считать, что $x > x_0$ и $f(x) > 0$. Тогда при любом положительном приращении аргумента Δx

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = S\big(f\big)_{x}^{x+\Delta x} \approx f(x)\Delta x$$

(рис. 20), откуда $\frac{\Delta S}{\Delta x} \approx f(x)$, причем в силу непрерывности функции f это равенство тем точнее, чем меньше Δx. В этом состоит грубая идея доказательства равенства $S'(x) = f(x)$. Проведем точные рассуждения.

Допустим, $x > x_0$ и $f(x) > 0$. Из непрерывности функции f в точке x следует, что для любого значения $\varepsilon > 0$ существует окрестность Окр_x такая, что если значение $x + h \in \text{Окр}_x$, то $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ или, иначе, $f(x) - \varepsilon < f(x+h) < f(x) + \varepsilon$.

В случае, когда $\Delta x > 0$ и $x + \Delta x \in \text{Окр}_x$, отсюда вытекает, что приращение ΔS переменной площади $S(x)$ заключено в пределах $(f(x) - \varepsilon)\Delta x < \Delta S < (f(x) + \varepsilon)\Delta x$

---

[1] «*Основной теоремой анализа*» иногда называют основное свойство первообразных (§ 2.1, следствие 1): *если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I, то любая ее первообразная $\overline{F}(x)$ отличается от $F(x)$ на аддитивную константу C: $\overline{F}(x) = F(x) + C$.* Как мы вскоре увидим, это утверждение действительно очень важное — особенно «в паре» с приведенной выше «*основной теоремой*».

(если рассматривать значения ε такие, что $f(x)-\varepsilon>0$, то криволинейная трапеция между вертикалями x и $x+\Delta x$ содержит прямоугольник с основанием $[x,\,x+\Delta x]$ и высотой $f(x)-\varepsilon$ и содержится в прямоугольнике с тем же основанием и высотой $f(x)+\varepsilon$ — см. рис. 20). Следовательно, поскольку $\Delta x>0$, после деления всех частей последнего неравенства на Δx получаем оценку

$$f(x)-\varepsilon<\frac{\Delta S}{\Delta x}<f(x)+\varepsilon \implies \left|\frac{\Delta S}{\Delta x}-f(x)\right|<\varepsilon.$$

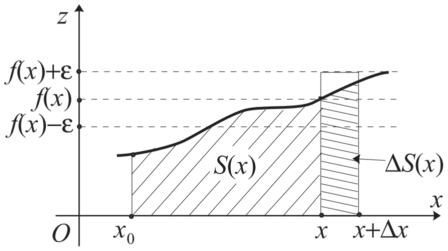


Рис. 20

Эти же неравенства справедливы и в случае, когда $\Delta x<0$: тогда приращение $\Delta S<0$, и если значение $x+\Delta x\in \text{Окр}_x$, то

$$(f(x)-\varepsilon)|\Delta x|<|\Delta S|<(f(x)+\varepsilon)|\Delta x|$$

(объясните), откуда

$$f(x)-\varepsilon<\frac{|\Delta S|}{|\Delta x|}=\frac{-\Delta S}{-\Delta x}=\frac{\Delta S}{\Delta x}<f(x)+\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\text{Окр}_x\quad \forall\,x+\Delta x\in\text{Окр}_x\qquad \left|\frac{\Delta S}{\Delta x}-f(x)\right|<\varepsilon,$$

а это как раз и означает, что $\lim\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x)$ при $\Delta x\to 0$, т. е. функция (переменная площадь) S дифференцируема в точке x, причем $S'(x)=f(x)$.

Аналогично, но с учетом «*знаков площадей*», рассматриваются и случаи, когда $f(x)<0$ или $x<x_0$ — разберите их самостоятельно. ■

2.3.4. Теоремы существования решений уравнения $y'=f(x)$ и первообразных

Только что доказанная *основная теорема анализа* позволяет сформулировать *достаточные* (но отнюдь не необходимые! — см. пример 5 из § 2.1) *условия существования первообразных* или, что то же самое, *решений дифференциального уравнения* $y'=f(x)$.

Следствие 1 (теорема существования решений дифференциального уравнения $y'=f(x)$). *Если функция f непрерывна на интервале или на объединении интервалов D, то дифференциальное уравнение $y'=f(x)$, $x\in D$, имеет решения.*

Следствие 2 (теорема существования первообразных). *Любая функция f, непрерывная на интервале или на объединении интервалов D, имеет бесконечно много первообразных на D.*

2.3.5. Площади криволинейных трапеций как приращения первообразных

Выше было показано, что *для отыскания первообразной* $y(x)$ *функции, непрерывной на интервале* I, *достаточно найти* **площадь** $S(x) = S\big(f\big)_{x_0}^{x}$ *криволинейной трапеции, заключенной между осью* Ox, *графиком* $z = f(x)$ *и вертикалями в точках* x_0 *и* x: если потребовать вдобавок, чтобы $y(x_0) = y_0$, то нужная первообразная задается формулой

$$y(x) = y_0 + S(x) = y_0 + S\big(f\big)_{x_0}^{x}. \tag{5}$$

Однако, как часто бывает, на практике поступают *наоборот*: не первообразные находят, отыскивая площади (*переменные* площади), а, напротив, *площади отыскивают с помощью первообразных*. Чтобы научиться это делать, перепишем формулу (5) в виде

$$S(x) = S\big(f\big)_{x_0}^{x} = y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0).$$

Получилось, что площадь рассматриваемой криволинейной трапеции между вертикалями в точках x_0 и x *равна приращению первообразной* $y(x)$ на отрезке от точки x_0 до точки x:

$$S\big(f\big)_{x_0}^{x} = y(x) - y(x_0) = y(t)\Big|_{x_0}^{x}.$$

Однако из *теоремы о равенстве приращений первообразных* (§ 2.1, теорема 2) следует, что вместо первообразной $y(x)$, самим своим *определением* связанной с площадями, можно взять *любую* первообразную F функции f на интервале I: все равно

$$S\big(f\big)_{x_0}^{x} = y(t)\Big|_{x_0}^{x} = F(t)\Big|_{x_0}^{x} = F(x) - F(x_0),$$

а первообразную F мы можно «угадать» (подобрать, найти) безотносительно к площадям. Положим $x_0 = a$, $x = b$ и сформулируем доказанное утверждение.

Теорема 2 (теорема Барроу *(1669–1670)*). *Если функция* f *определена и непрерывна на интервале* I, *то для любых двух точек* a, $b \in I$ *площадь* $S\big(f\big)_{a}^{b}$ (*с учетом знаков функции* f *и разности* $b - a$) *криволинейной трапеции, ограниченной линиями*

$$y = 0, \quad y = f(x), \quad x = a, \quad x = b,$$

равна приращению (любой) *первообразной* F *функции* f *на отрезке от* a *до* b*:*

$$S\big(f\big)_{a}^{b} = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a). \tag{6}$$

Исаак Барроу первым увидел связь *площадей* с *первообразными*. Ньютон трактовал эту связь с помощью понятия скорости: путь (флюента) есть площадь под графиком скорости (флюксии). Лейбниц от квадратур (площадей) к 1695 г. пришел к первообразным.

Пример 1. (Задача Архимеда: *квадратура параболы.*) Найдем площадь «криволинейного треугольника», ограниченного параболой $y = \alpha x^2$, осью Ox и вертикальной прямой $x = c > 0$ (рис. 21). Ясно, что этот «треугольник» можно считать криволинейной трапецией: для нее $a = 0$, $b = c$, $f(x) = \alpha x^2$. Так как первообразной для f является (например!) функция $F(x)=\frac{1}{3}\alpha x^3$ ($x\in\mathbb{R}$; поскольку нам годится *любая* первообразная, аддитивную константу мы не пишем — или полагаем равной нулю), из формулы Барроу (6)

$$S\Big(\alpha x^2\Big)_0^c=\frac{1}{3}\alpha x^3\Big|_0^c=\frac{1}{3}\alpha c^3-0=\frac{1}{3}\alpha c^3.$$

Результат можно записать также в виде $S=\frac{1}{3}\cdot c\cdot\alpha c^2$ — площадь «параболического треугольника» равна одной трети от площади описанного около него прямоугольника (ограниченного осями координат и прямыми $x=c$, $y=f(c)=\alpha c^2$; см. рис. 21). $\square$

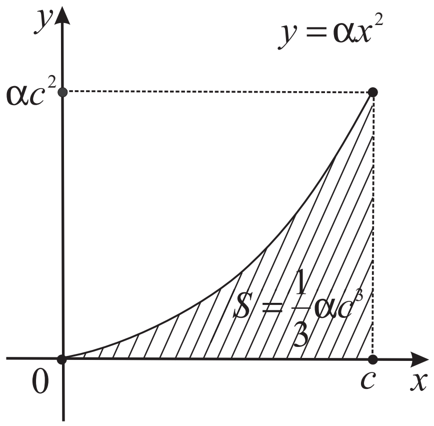


Рис. 21

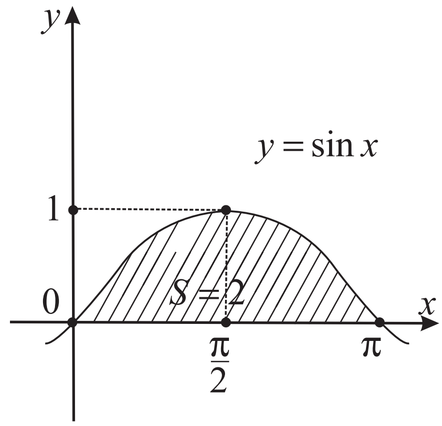


Рис. 22

Архимед в III в. до н. э. действительно решил множество задач, сводящихся к рассмотренной квадратуре, однако не увидел общности своих методов. Среди разрешенных Архимедом задач — отыскание площади *произвольного параболического сегмента*, ограниченного параболой и какой-то ее хордой. К этой задаче мы обратимся в «Упражнениях» и в § 12.2.

Пример 2. (Задача Паскаля: *квадратура синусоиды.*) Вычислим площадь «криволинейного двуугольника», ограниченного осью Ox и графиком $y=\sin x$ от точки 0 до точки π (рис. 22). Эта «долька синусоиды» может считаться криволинейной трапецией: для нее $a=0$, $b=\pi$, $f(x)=\sin x$. В качестве первообразной для функции $\sin x$ возьмем $F(x)=-\cos x$ ($x\in\mathbb{R}$), и из формулы Барроу (6) получаем:

$$S\big(\sin x\big)_0^\pi=\big[-\cos x\big]_0^\pi=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=-(-1)-(-1)=2.$$

Любопытный результат. $\square$

Эта задача методом суммирования была решена Паскалем в 1659 г. в более общем случае: для любой части дольки синусоиды, отсекаемой от нее вертикальной прямой. Это был — в терминологии, к которой мы сейчас перейдем, — первый в математике *интеграл от тригонометрической функции*. Само решение, приведенное Паскалем в «*Трактате о синусе четверти круга*», сыграло выдающуюся роль в истории математического анализа: в 1672 г. благодаря счастливому случаю Лейбниц (в перерывах между своими дипломатическими делами!), захотевший приобщиться к современной ему математике, встретил Гюйгенса, который тотчас дал ему сочинения Паскаля.

Впоследствии Лейбниц писал Иоганну I Бернулли: «*Я случайно напал на одно доказательство Детонвилля* [псевдоним Паскаля], *очень легкое в своем роде. Но каково же было мое изумление, когда я увидел, что у Паскаля точно нарочно были закрыты глаза: я тотчас же заметил, что его теорема* [на самом деле лемма, приводящая к указанной квадратуре] *может прилагаться вообще ко всем кривым*» [у Паскаля фигурировала только окружность]. Таким образом, подобно Архимеду, Паскаль в частной задаче не увидел общего метода. К деятельности Паскаля мы вернемся ниже.

2.3.6. Интегральные суммы и интеграл

Вернемся к рассмотрению интегральных сумм для функции f на отрезке от a до b:

$$S_n = S_n\big(f\big)_a^b = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)\Delta x_m = \sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)(x_{m+1}-x_m). \tag{7}$$

Здесь $\Delta x_m = x_{m+1}-x_m$, $x_0=a$, $x_n=b$, а промежуточные точки x_1, x_2, ... x_{n-1} делят отрезок между точками a и b (допускается, что $a>b$) на n равных частей: $x_m = a+\frac{b-a}{n}$. Мы придали интегральным суммам (7) геометрический смысл с помощью графика $z=f(x)$, рассматривая отдельные слагаемые $\Delta S_m = f(x_m)\Delta x_m = f(x_m)(x_{m+1}-x_m)$ суммы S_n как площади (со знаком) соответствующих вписанных в криволинейную трапецию прямоугольников. Однако еще у древнегреческих математиков (Евдокса, Архимеда), а потом у Кавальери, Кеплера и других ученых «доньютоновой» эпохи появлялись интегральные суммы, слагаемые которых были не площадями, а объемами, массами и т. д. И хотя все равно суммы S_n можно интерпретировать как площади ступенчатых фигур, имеет смысл ввести предел интегральных сумм безотносительно к площадям.

Определение 1. Для функции f, непрерывной на отрезке от a до b, предел ее интегральных сумм (7) на этом отрезке при $n\to\infty$ называется **интегралом** от функции f от a до b (или на отрезке от a до b) и обозначается[1]

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n\big(f\big)_a^b = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)\Delta x_m.$$

Числа a и b называются, соответственно, **нижним** и **верхним пределами интегрирования** (при $a=b$ интеграл полагают равным нулю), фигурирующая в записи **подынтегрального выражения** $f(x)dx$ буква x называется **переменной интегрирования**; вместо x можно выбрать любую букву — интеграл (получающееся в пределе число) при этом не изменится:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$$

(однако не следует употреблять те же буквы, которые «участвуют» в записи пределов интегрирования![2]).

---

[1] Значок «def» означает «равенство по определению».

[2] Впрочем, физики довольно часто используют одну и ту же букву в одном и том же выражении, обозначая ею *разные* величины, — их это ничуть не смущает.

Термины *интеграл*, *интегрирование* применил в 1690 г. Яков Бернулли, произведя его, скорее всего, от лат. integer: «целый», «весь» (по другому предположению, Я. Бернулли исходил из глагола integro: «приводить в прежнее состояние», «восстанавливать»). До того времени использовали терминологию Кавальери: «*совокупность всех неделимых*» (см. следующий параграф) или просто «*все линии*», «*сумма линий*»— лат. «omnes lineae», «summa lineae».

В соответствии с этим для самого интеграла использовали (например, Валлис, а вслед за ним и Лейбниц) сокращение «omn». С 1675 г. Лейбниц ради еще большей краткости стал писать начальную букву слова Summa, принятое в то время стилизованное написание которой было сходно с современным знаком интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y$, но уже через месяц ввел в запись и независимую переменную (переменную интегрирования): $\int y\,dx$. Почему именно d — часто объясняют, что это замена значка Δ для приращения переменной x, однако обозначения Δx, Δy для приращений были введены только в 1755 г. Леонардом Эйлером. Суть обозначений Лейбница будет разъяснена в главе 6 (§ 6.2).

Современная запись пределов интегрирования появилась в «*Аналитической теории тепла*» Фурье (1822 г.), заменив эйлерову запись $\int y\,dx\left[\begin{smallmatrix}\text{ab }x=a\\ \text{ad }x=b\end{smallmatrix}\right]$ (на латыни записано: «от $x = a$ до $x = b$»). До Эйлера пределы записывались словами.

Независимо от понятия площади может быть доказано следующее утверждение, которое мы примем **без доказательства**.

Теорема 3 (теорема Коши–Римана). *Для любой функции f, непрерывной на отрезке от a до b, существует предел последовательности ее интегральных сумм:*

$$\lim_{n\to\infty} S_n\big(f\big)_a^b = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1} f(x_m)\Delta x_m.$$

Коши, который владел точным понятием непрерывности, первым заменил геометрическую трактовку интеграла *аналитической* и считал, что доказал приведенную теорему (1823 г.). Однако он не заметил просчета — необходимости довольно тонкого свойства функций, непрерывных на отрезке. Этот пробел отметил только Риман, который рассматривал более общие критерии интегрируемости, чем непрерывность (1853 г.). Нужное же Коши свойство *равномерной непрерывности* доказал только в 1870 г. немецкий математик *Генрих Эдуард Гейне* (1821–1881), который дал и определение соответствующего понятия.

Именами Коши и Римана называется некоторое *условие интегрируемости* дифференциальных уравнений, которое в действительности гораздо раньше вывели Эйлер и Д'Аламбер.

Эта теорема позволяет обращаться с интегралами от непрерывных функций безотносительно к геометрическому понятию площади. Однако если понятие площади введено так, что можно оперировать и с площадями криволинейных трапеций, то указанный предел равен соответствующей площади, так что *площадь записывается через интеграл*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = S\big(f\big)_a^b. \tag{8}$$

Сопоставляя формулы (8) и (6), получаем **формулу Барроу**, которую обычно называют *формулой Ньютона–Лейбница* (несмотря на то, что ни тот, ни другой не имеют к ее открытию и опубликованию — правда, в более «геометрических» обозначениях — никакого отношения, да и никогда не претендовавшие «на нее»!):

если F ***— любая первообразная для непрерывной функции*** f ***на отрезке от*** a ***до*** b***, то***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{9}$$

Формулу Барроу можно вывести непосредственно из аналитического определения интеграла, если независимо от площадей сформулировать и доказать *основную теорему анализа*.

Теорема 4 (теорема Коши–Муаньо *(1823–1844)* о производной интеграла с переменным верхним пределом *[«основная теорема анализа»]*). *Если функция* f *непрерывна на интервале* I*, то при любом значении* $a \in I$ *производная интеграла от функции* f *с нижним пределом* a *и переменным верхним пределом* $x \in I$ *равна подынтегральной функции* $f(x)$:

$$\left(\int_a^x f(u)\,du\right)'_x = f(x). \tag{10}$$

И наоборот, эта теорема сразу следует из формулы Барроу (9), если положить в ней $b = x$ и взять затем производную (от левой и правой частей). Формулу Барроу можно интерпретировать и так: ***если функция*** F ***имеет производную, непрерывную на отрезке от*** a ***до*** b***, то***

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{11}$$

Огюстен Луи Коши (1789–1837) — крупнейший французский математик первой половины XIX в., основатель многих разделов современной математики. Окончил наполеоновскую Политехническую школу, а после возвращения Бурбонов до революции 1830 г. был ее профессором. Будучи ультрароялистом и клерикалом (в отличие от оппозиционеров Д'Аламбера и Якоби, революционеров Фурье, Монжа, Галуа и «всеядного» Лапласа), Коши после революции 1830 г. отправился вместе с Бурбонами в изгнание — в Турин и Прагу. Но и там он не переставал заниматься математикой. Необычайно разносторонний и работоспособный, он опубликовал более 800 работ; бывали периоды, когда Коши каждую неделю представлял в Парижскую академию новый мемуар.

Кроме основополагающей деятельности Коши по «наведению строгости и порядка» в математическом анализе, к главнейшим его заслугам относится разработка *теории функций комплексного переменного*. Работы Коши в этой области продолжил Риман, который «приложил руку» и к математическому анализу, предложив свой подход к интегрируемости функций.

Муаньо — французский математик, аббат, ученик Коши, впервые опубликовавший предыдущую теорему в изданных им в 1840–1844 гг. «Лекциях по дифференциальному и интегральному исчислению (по Коши)».

Операцию вычисления интегралов называют *интегрированием*, и главный смысл одного из величайших в истории математики открытий — изобретения математического анализа Ньютоном и Лейбницем, а также их предшественниками, современниками и последователями, — состоит в том, что они выявили **взаимную**

обратность операций дифференцирования и интегрирования: именно этот факт отражают формулы (10) и (11).

§ 2.4. Геометрические приложения интеграла

2.4.1. Основная идея: применение формулы Барроу

В этом параграфе записываются и применяются разнообразные формулы, по которым *меры* (площади, объемы, а в упражнениях также и длины) различных геометрических фигур могут быть вычислены *как интегралы* от некоторых вспомогательных функций. При этом введение (определение) самих мер (площадей, объемов) *считается известным* из соответствующих разделов геометрии, а все рассматриваемые фигуры предполагаются «достаточно хорошими», т. е. такими, что вопрос об их «измеримости» (в смысле существования их площадей, объемов, т. д.) вовсе не обсуждается (в конкретных примерах измеримость будет очевидна).

Рассматриваемые *интегральные формулы* могут выводиться по-разному, в соответствии с тем, как интерпретируется само понятие интеграла. Ранее были даны четыре «трактовки» интеграла:

— интеграл как предел интегральных сумм (по определению),

— интеграл как (знакопеременная) площадь криволинейной трапеции,

— интеграл как приращение первообразной (формула Барроу),

— интеграл от производной как приращение функции, или «вторая» формула Барроу: *если функция F имеет производную, непрерывную на отрезке от a до b, то*

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx. \tag{1}$$

Эта интегральная формула позволяет восстановить функцию по ее производной; ее мы и положим в основу интегральных формул для вычисления площадей и объемов плоских и пространственных фигур. Для этого сначала указанные меры мы проинтерпретируем как *функции $y = y(x)$ одной переменной*, затем найдем (делая обычные интуитивно ясные допущения) *производные* этих вспомогательных функций, т. е., фактически, запишем дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)$, и, наконец, получим искомые *интегральные формулы* из интегральной формулы Барроу (1). Эти совсем общие соображения станут вполне ясными при рассмотрении первого же примера.

Заметим, что в данном случае дифференциальные уравнения будут описывать *не процесс* изменения меры (площади, объема) во времени, а зависимость переменной меры от параметра — некоей вспомогательной координаты, привязанной к рассматриваемой геометрической фигуре. И хотя такую координату и можно считать как бы *временем*, для результативности применения информации о производной искомой функции, т. е. интегрирования получающегося дифференциального уравнения, это роли не играет.

2.4.2. Площади плоских фигур

Итак, покажем, как работает данный подход при выводе *интегральной формулы для площади плоской фигуры.* Пусть Φ — «хорошая» [1] ограниченная фигура на плоскости. Выберем на этой плоскости произвольным образом координатную ось Ox и обозначим через $S(x)$ площадь той части фигуры Φ, которая лежит **левее** (относительно положительного направления оси Ox) прямой L_x, проведенной через точку x перпендикулярно оси (рис. 23).

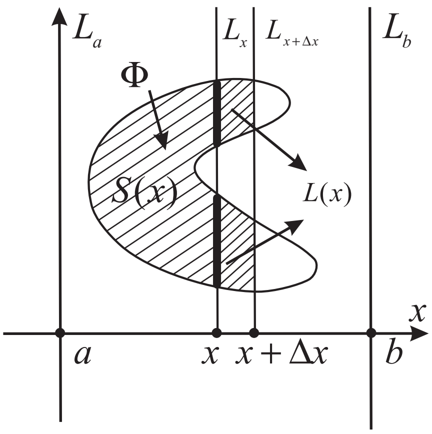


Рис. 23

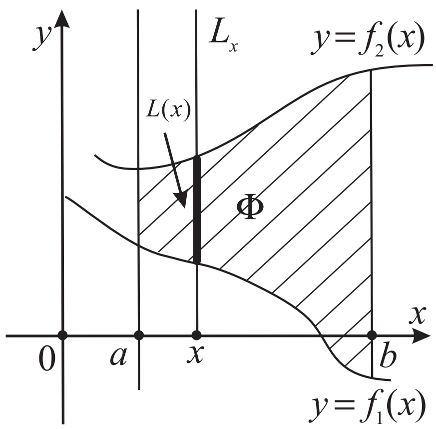


Рис. 24

Считая, что пересечение прямой L_x с данной фигурой Φ может состоять, самое большее, из конечного числа отрезков (или отдельных точек), обозначим их суммарную длину через $L(x)$. Тогда *естественно предположить*, что *приращение переменной площади* $S(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$, т. е. площадь

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$$

части фигуры Φ, заключенной между прямыми L_x и $L_{x+\Delta x}$, примерно равна

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) \approx L(x) \cdot \Delta x,$$

причем *в случае, если функция* $L(x)$ *непрерывна*, это равенство будет тем точнее, чем меньше Δx, так что после деления на Δx при $\Delta x \to 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \overset{def}{=} S'(x) = L(x). \qquad (2)$$

Обратите внимание на это рассуждение; в следующей главе (в § 5.1) практически то же самое рассуждение будет проведено при выводе линейных дифференциальных уравнений для роста/убывания. Отметим, что во многих приложениях математики к практическим задачам на каком-то этапе подобные правдоподобные рассуждения неизбежны.

Поскольку рассматриваемая фигура Φ ограничена (что можно трактовать, например, так, что она целиком лежит внутри некоторого круга), то она заключена

[1] Например, ограниченная конечным числом дуг графиков дифференцируемых функций.

между некоторыми перпендикулярными оси Ox прямыми L_a и L_b, где $a < b$. Но тогда для этих значений a и b $S(a) = 0$, $S(b) = S[\Phi]$ — площадь всей фигуры Φ, поэтому $S[\Phi] = S(b) - S(a)$, что в силу формулы Барроу (1) и в соответствии с формулой (2) $S'(x) = L(x)$ *в предположении непрерывности «длины переменного сечения»*— функции $L(x)$ — и дает **интегральную формулу для площади произвольной плоской фигуры** Φ:

$$S[\Phi] = S(b) - S(a) = \int\limits_a^b L(x)\,dx \tag{3}$$

(«площадь равна интегралу от длин «перпендикулярных» сечений фигуры»).

Конечно, именно в таком виде «на практике» данная формула фактически не используется. Нам она нужна для дальнейших, шаг за шагом, продвижений в геометрических интегральных формулах. С другой стороны, если при нашем выборе оси Ox получилось бы, что фигура Φ есть просто криволинейная трапеция $\{a \leqslant x \leqslant b;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ для неотрицательной функции $f(x) = L(x)$, то формула (3) ничем не отличалась бы от обычной формулы Барроу. Реальным применением формулы (3) является вычисление площадей фигур, заключенных между двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$ и двумя непересекающимися графиками непрерывных функций $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, типа изображенной на рисунке 24: тогда $L(x) = f_2(x) - f_1(x)$ и площадь такой фигуры равна

$$S[\Phi] = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx, \tag{4}$$

независимо от знаков функций $f_{1,2}$. (Впрочем, формулу (4) нетрудно вывести и непосредственно, исходя из геометрического смысла интегралов от неотрицательных функций: достаточно перенести фигуру вдоль оси Oy так, чтобы она лежала выше оси Ox.)

Однако, приступим к интегральным формулам для объемов.

2.4.3. Объем общего прямого цилиндра

Определение 2. Пусть Φ — плоская («хорошая» ограниченная) фигура в пространстве. **Общим прямым цилиндром** C_Φ с *основанием* Φ и *высотой* h называется объединение отрезков MM' длины h, проведенных через всевозможные точки $M \in \Phi$ перпендикулярно плоскости фигуры Φ по одну сторону от нее[1].

Выведем формулу для объема такого цилиндра. Для этого в плоскости основания Φ выберем произвольную координатную ось Ox и и обозначим через $V(x)$ объем той части цилиндра C_Φ, которая лежит **левее** (относительно положительного направления оси Ox) плоскости α_x, проведенной через точку x оси Ox перпендикулярно ей (рис. 25). Найдем производную функции $V(x)$.

[1] Получится, так сказать, «подошва» с основанием Φ высоты h, как показано на рисунке 25.

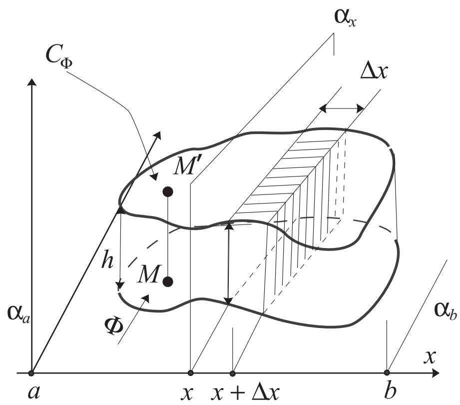


Рис. 25

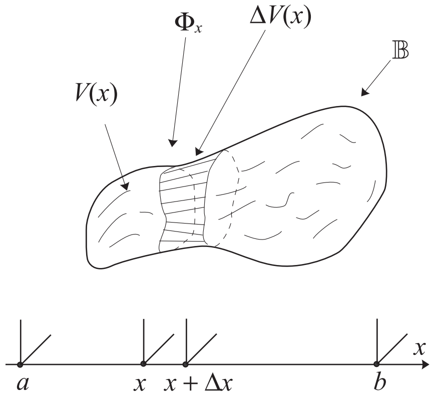


Рис. 26

Как и выше, допустим, что пересечение плоскости α_x с основанием Φ состоит не более, чем из конечного числа отрезков, суммарная длина которых равна $L(x)$. Для простоты будем считать, как показано на рисунке 25, что получается в точности один такой отрезок (длины $L(x)$). Тогда приращение переменного объема $V(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$ есть объем $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$ части цилиндра C_Φ, заключенной между плоскостями α_x и $\alpha_{x+\Delta x}$, которую можно аппроксимировать (приблизить, заменить) прямоугольным параллелепипедом, в основании которого лежит прямоугольник с измерениями $L(x)$ и h, по которому рассматриваемый цилиндр пересекается с плоскостью α_x, а высотой является Δx (если $\Delta x < 0$, то приращение объема ΔV будет отрицательным, и этот случай приведет к совершенно тем же выводам, что и ниже). Следовательно, мы можем приближенно записать:

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x) \approx L(x)h \cdot \Delta x,$$

причем (в предположении непрерывности функции $L(x)$) это равенство тем точнее, чем меньше $|\Delta x|$, так что после деления на Δx при $\Delta x \to 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \stackrel{def}{=} V'(x) = hL(x).$$

Выбрав значения $a < b$ так, чтобы общий цилиндр C_Φ был заключен между плоскостями α_a и α_b, примéним к последнему соотношению формулу Барроу (1), вкупе с уже доказанной интегральной формулой (3) для площади плоской фигуры Φ — в результате получим *формулу для объема общего прямого цилиндра* C_Φ,

$$V[C_\Phi] = V(b) - V(a) = \int_a^b [hL(x)]\,dx = h\int_a^b L(x)\,dx = h \cdot S[\Phi] = S_\Phi \cdot h, \qquad (5)$$

т. е. **объем общего прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту**.

Хотя для нас эта формула также является «промежуточной» (подготовительной к следующей), отметим два ее частных случая.

1. *Объем* **произвольной прямой призмы** *равен произведению площади ее основания на высоту:* $V = SH$.

2. *Объем* **прямого кругового цилиндра** *равен произведению площади его основания на высоту:* $V = \pi R^2 H$.

2.4.4. Интегральная формула для объемов (интеграл площадей сечений)

Пусть $\mathbb{B}$ — произвольная «хорошая» ограниченная пространственная фигура[1]. Выведем *интегральную формулу* для ее объема.

Как и раньше, выберем в пространстве произвольную координатную ось Ox и обозначим через $V(x)$ объем той части фигуры $\mathbb{B}$, которая лежит **левее** (относительно положительного направления оси Ox) плоскости α_x, проведенной через точку x оси Ox перпендикулярно ей (рис. 26). Далее вычислим производную функции $V(x)$.

Обозначим плоскую фигуру, получающуюся при пересечение плоскости α_x с данной пространственной фигурой $\mathbb{B}$, через Φ_x. Будем считать, что каждая из этих плоских фигур Φ_x является хорошей и имеет площадь $S[\Phi_x] = S(x)$. Приращение переменного объема $V(x)$ на промежутке от x до $x + \Delta x$ есть объем $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$ «отрезка» (части) $\Delta\mathbb{B}$ фигуры $\mathbb{B}$, заключенного между плоскостями α_x и $\alpha_{x+\Delta x}$, т. е. между сечениями Φ_x и $\Phi_{x+\Delta x}$. *Предполагая, что пространственная фигура* $\mathbb{B}$ «настолько хорошая», что *при близких значениях x сечения Φ_x также близки* (в интуитивно ясном смысле), заменим рассматриваемый отрезок $\Delta\mathbb{B}$ на близкий к нему общий прямой цилиндр C_x с основанием Φ_x и высотой Δx. Тогда для приращения $\Delta V(x)$ переменного объема можно записать приближенную формулу

$$\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x) \approx V[C_x] = S(x) \cdot \Delta x$$

(здесь мы применили уже доказанную формулу (5) для объема общего прямого цилиндра; очевидно, та же приближенная формула будет справедлива и в случае $\Delta x < 0$, ибо тогда и $\Delta V(x) < 0$). И опять-таки, в предположении непрерывности функции $S(x)$, это равенство будет *тем точнее*, чем меньше $|\Delta x|$, так что после деления на Δx при $\Delta x \to 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V(x)}{\Delta x} \stackrel{def}{=} V'(x) = S(x).$$

Наконец, выбирая значения $a < b$ так, чтобы пространственная фигура $\mathbb{B}$ целиком была заключена между плоскостями α_a и α_b, из формулы Барроу (1) мы и получаем **интегральную формулу для объема произвольной («достаточно хорошей»!) пространственной фигуры**,

$$V[\mathbb{B}] = V(b) - V(a) = \int_a^b S(x)\,dx, \tag{6}$$

т. е. *объем пространственной фигуры равен интегралу от площадей «перпендикулярных» сечений фигуры.*

[1] Или *геометрическое тело* — см. учебники по геометрии.

Выведенную формулу иногда кратко называют **формулой интеграла площадей** или просто **интегралом площадей**. Рассмотрим два важных ее частных случая.

2.4.5. Объем общего конуса

Определение 3. Пусть Φ — плоская («хорошая» ограниченная) фигура в пространстве и P — не лежащая в плоскости фигуры Φ точка. **Общим конусом** K_Φ с *основанием* Φ и *вершиной* P называется объединение отрезков PM, соединяющих вершину P со всевозможными точками M основания Φ. При этом длина h перпендикуляра PH, опущенного из вершины конуса на плоскость его основания, называется **высотой** общего конуса[1] (рис. 27).

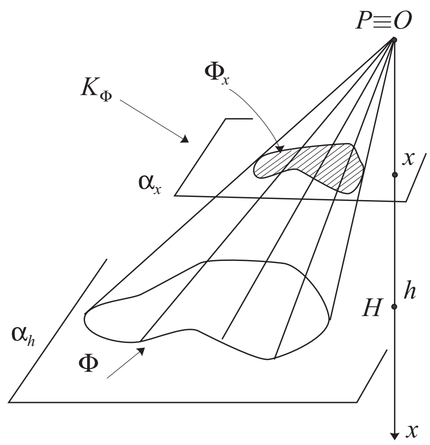


Рис. 27

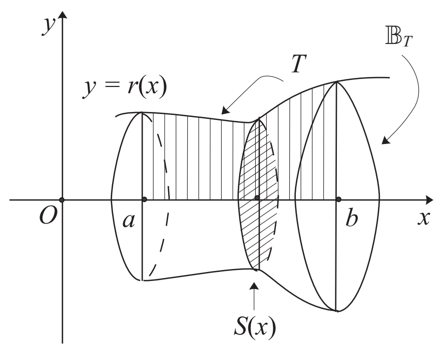


Рис. 28

Заметим сразу, что *частными случаями* общего конуса являются как произвольные **пирамиды**, так и **круговые** (например, *прямые круговые*) **конусы**.

Используя интеграл площадей, найдем формулу для объема общего конуса. В качестве координатной оси Ox выберем содержащую высоту конуса K_Φ прямую PH, начало возьмем в вершине конуса — в точке P, — а ось направим к плоскости основания (к точке H). Тогда каждое из нужных сечений конуса $\Phi_x = K_\Phi \cap \alpha_x$ получается из основания конуса Φ *гомотетией* с коэффициентом $k = \dfrac{x}{h}$ (объясните!), поэтому площадь сечения равна

$$S(x) = S[\Phi_x] = S[\Phi] \cdot \left(\frac{x}{h}\right)^2 = \frac{S_\Phi}{h^2} x^2.$$

Очевидно, пределы интегрирования в интеграле площадей (6) в данном случае равны $a = 0$, $b = h$, поэтому находим *объем конуса* как интеграл

$$V[K_\Phi] = \frac{S_\Phi}{h^2} \int\limits_0^h x^2\,dx = \frac{S_\Phi}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{S_\Phi}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} S_\Phi h : \qquad (7)$$

[1]Заметим, что и *сам отрезок* PH, как это принято в геометрии, также называется *высотой конуса*.

объем общего конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.

Для вышеупомянутых частных случаев общего конуса получаем следующие утверждения.

1. [**Формула Демокрита–Евдокса**] *Объем* **произвольной пирамиды** *равен трети произведения площади ее основания на высоту:* $V = \dfrac{1}{3}SH$.

2. *Объем* **прямого кругового конуса** *равен трети произведению площади его основания на высоту:* $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

Демокрит из города Абдеры (ок. 460–370 гг. до н. э.) — выдающийся философ, материалист, приверженец атомистики. Его материализм вызывал яростную ненависть у великого Платона, который сжигал его сочинения. По словам же Маркса и Энгельса, Демокрит был «первым энциклопедическим умом среди греков». Опираясь на свои атомистические воззрения, Демокрит считал пространственные тела составленными из «параллельных пластинок толщиной в один атом», тем самым отчасти предвосхитив весьма плодотворные воззрения Кавальери (XVII в.; см. далее). Так или иначе, не приводя никаких доказательств, Демокрит сформулировал оба указанных выше утверждения.

Лишь полвека спустя вполне строгое их доказательство дал *Евдокс Книдский* (ок. 408–355 гг. до н. э.), математик и астроном, противник мистики и астрологии. Архимед (о нем также далее) указывал, что для Евдокса было важно, что он заранее знал указанный Демокритом ответ!

2.4.6. Объем тела вращения

Пусть $r = r(x)$ — непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ неотрицательная функция, T — соответствующая криволинейная трапеция:

$$T = \left\{(x;\, y)\,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant r(x)\right\}.$$

Рассмотрим *тело вращения* $\mathbb{B}_T$, т. е. пространственную фигуру, которая получается при вращении криволинейной трапеции T около оси Ox. Если кому-то не нравится, что мы в этом «определении» используем кинематическое понятие «вращения», то данное определение фигуры (тела) вращения $\mathbb{B}_T$ можно заменить на «чисто статическое» определение, потребовав, чтобы пересечение фигуры $\mathbb{B}_T$ с каждой проведенной через точку x перпендикулярно оси Ox плоскостью α_x являлось *кругом радиуса* $r = r(x)$ *с центром на оси* Ox (рис. 28). Запишем *общую интегральную формулу* для объема указанного тела вращения.

В данном случае каждое сечение Φ_x фигуры $\mathbb{B}_T$ есть круг радиуса $r = r(x)$, площади сечений, соответственно, равны $S(x) = \pi r^2 = \pi r^2(x)$, поэтому из интеграла площадей (6) сразу же получается искомая формула

$$V[\mathbb{B}_T] = V(b) - V(a) = \int\limits_a^b S(x)\,dx = \int\limits_a^b \pi r^2(x)\,dx = \pi\int\limits_a^b r^2(x)\,dx. \qquad (8)$$

Вот и вся задача! Теперь мы приме́ним эту формулу к единственному, но архиважному частному случаю.

2.4.7. Объем шара

Шар B_R радиуса R с центром O можно рассматривать как тело вращения около оси Ox полукруга

$$\Big\{(x;\, y) \;\Big|\; -R \leqslant x \leqslant R,\; 0 \leqslant y \leqslant r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\Big\}$$

(см. рис. 29). Применяя к этому случаю формулу (8), находим[1]:

$$\begin{aligned} V(B_R) &= \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \\ &= \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3, \end{aligned} \tag{9}$$

— **первая формула Архимеда!**

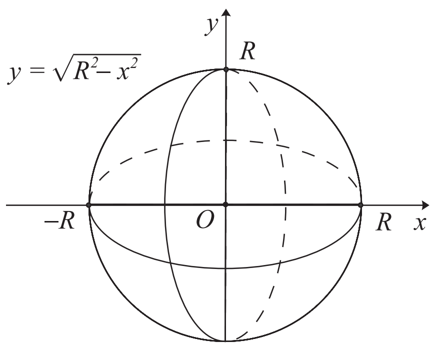


Рис. 29

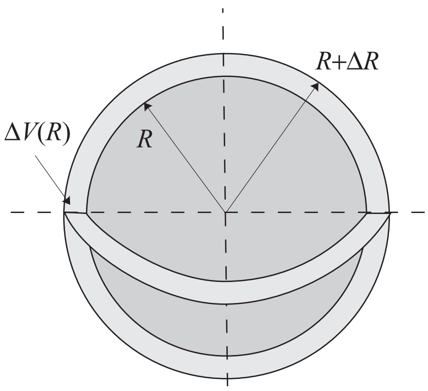


Рис. 30

2.4.8. Замечание о площади сферы

А теперь рассмотрим объем шара радиуса R как функцию от R:

$$V(R) = V(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Очевидно, приращение этой функции $\Delta V(R) = V(R + \Delta R) - V(R)$ равно объему (со знаком «минус», если $\Delta R < 0$) *шарового слоя* «толщины» $|\Delta R|$, т. е. части пространства, заключенной между двумя концентрическими сферами радиусов R и $R + \Delta R$ (рис. 30). Заметим, что при малом приращении радиуса ΔR объем этого слоя *примерно равен площади поверхности шара* B_R, т. е. площади $S(R)$ сферы S_R радиуса R, *умноженной на толщину слоя* ΔR,

$$\Delta V(R) = V(R + \Delta R) - V(R) \approx S(R) \cdot \Delta R,$$

причем (*в силу непрерывности функции* $S(R)$!), это равенство будет тем точнее, чем меньше ΔR, так что после деления на ΔR при $\Delta R \to 0$ должно получиться точное равенство:

$$\lim_{\Delta R \to 0} \frac{\Delta V(R)}{\Delta R} \overset{def}{=} V'(R) = S(R).$$

[1] Вообще-то это вычисление из тех, которые *раз в жизни каждый должен проделать сам*!

Однако $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$S(R) = V'(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2 \tag{10}$$

— вот и **вторая формула Архимеда!**

Архимед из Сиракуз (ок. 287–212 гг. до н. э.) — величайший математик, физик и механик эпохи эллинизма. Несмотря на важнейшие открытия и практические изобретения в механике и физике, Архимед выше всего ставил свои результаты из сочинения «О шаре и цилиндре (Письмо к Досифею)» (*Досифей* был одним из учеников *Евклида*), которые формулировались так: *если около шара описать цилиндр, то объем шара будет равен $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, а площадь его поверхности — $\frac{2}{3}$ полной поверхности цилиндра.* Архимед выразил желание, чтобы чертеж к этой теореме был изображен на его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом.

Хотя Архимед далеко превзошел Евдокса в применяемых им методах отыскания площадей и объемов, они не отличались универсальностью (однако, совсем недавно именно они излагались в школьных учебниках по стереометрии!).

2.4.9. Геометрические меры и интегральные суммы. Принцип Кавальери

Заметим, что все найденные выше формулы, как общие формулы (3) и (6), (7) и (8), так и «частные» формулы (9)–(10), можно получить и с помощью интегральных сумм. Например, чтобы найти объем произвольной (но «хорошей») пространственной фигуры (тела) $\mathbb{B}$, можно разбить его на n кусочков (слоев) плоскостями α_{x_i}, где точки x_i делят отрезок $[a, b]$ на n равных частей (рис. 31). Объем i-го слоя приближенно равен $\Delta V_i = S(x_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, а через $S(x)$, как и раньше, обозначена площадь сечения $\mathbb{B} \cap \alpha_x$. Тогда для объема V фигуры $\mathbb{B}$ можно записать приближенную формулу

$$V \approx \sum_i S(x_i)\Delta x_i,$$

которая *в пределе при $n \to \infty$ должна дать точную формулу*, а поскольку в правой части формулы стоит в точности *интегральная сумма* для функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, то и получится *интеграл площадей* (6).

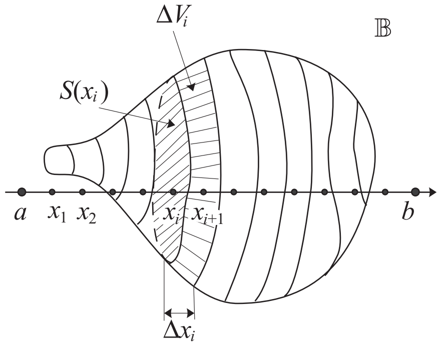


Рис. 31

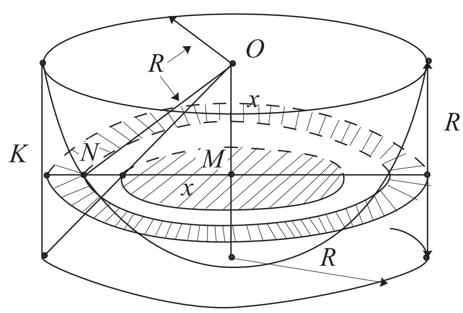


Рис. 32

Интегральные суммы составлял и оценивал еще Архимед, однако выписывая для каждой частной решаемой им задачи свои суммы. Следующее продвижение в методах отыскания площадей и объемов было сделано только спустя 18 веков Кеплером при формулировке своего второго закона (напомним, что в нем идет речь о площадях эллиптических секторов, описываемых радиусами-векторами планет) и выводе формул для объемов разнообразных тел вращения. Однако его рассуждения были также весьма частными и довольно далекими от введения общего понятия интеграла.

Иоганн Кеплер (1571–1630) — немецкий астроном и математик. С 1601 г. — помощник знаменитого датского астронома *Тихо Браге* (1546–1601), а затем его преемник в качестве «императорского астронома и математика» в Праге. Обрабатывая результаты наблюдений Браге за движениями планет, открыл знаменитые законы: первый — о движении планет по эллипсам (1609, книга «Новая астрономия»), второй — о постоянстве секториальных скоростей при движении планет (1618, «Краткая Коперникова астрономия»), третий — о пропорциональности квадратов времен обращения планет кубам их средних расстояний от Солнца (1619, «Мировая гармония»; в этом грандиозном трактате содержится также масса фантастических идей Кеплера — о музыке небесных движений, о божественном происхождении геометрии и т. д.). Однако крупнейший вклад в математику был сделан Кеплером в австрийском городе Линце, когда в 1612 г. выдался урожайный для винограда сезон. По этому поводу Кеплер придумал более общий, чем у Архимеда, метод вычисления объемов и в 1615 г. опубликовал его вместе с практическими приложениями в замечательном труде «Новая стереометрия винных бочек, в первую очередь австрийских, имеющих наивыгоднейшую форму». В нем он вычислил объемы 87 новых (по сравнению с известными еще греческим математикам) тел, а заодно доказал, что «австрийская бочка» при данной затрате материала обладает наибольшей вместимостью! Тем самым Кеплер «пробудил» геометрию от многовековой спячки, хотя и вызвал гнев у «защитников Архимеда».

Гораздо ближе подошел к интегральному исчислению Кавальери. Он рассматривал достаточно общие плоские и пространственные фигуры, полагая их площади (объемы) некими «*совокупностями неделимых сечений*»— параллельных отрезков в случае плоских фигур, параллельных плоских сечений для пространственных фигур. Сам он весьма неясно излагал, что такое «неделимые», однако пришел к вполне верным выводам, которые в современных обозначениях могут быть записаны как интегральные формулы (3) и (6). Кавальери эти результаты формулировал в виде неких «принципов»; в упрощенном виде самый знаменитый **принцип Кавальери** гласит:

если две пространственные фигуры таковы, что их сечения плоскостями, параллельными «неподвижной плоскости», имеют равные площади, то сами фигуры имеют равные объемы.

Разумеется, в интегральном исчислении принцип Кавальери является тривиальным следствием интеграла площадей (7). Однако суть как раз в том, что Кавальери был еще далек не только от интегрального исчисления, но даже *фактически не рассматривал* и интегральные суммы!

Бонавентура Кавальери (1598–1647) — итальянский математик. Его учитель *Бенедетто Кастелли* (1577–1644) отметил выдающиеся способности ученика и познакомил его со своим учителем — *Галилео Галилеем*. Кавальери и Галилей стали поддерживать активную переписку на почве общих интересов к геометрии, причем оба они намеревались издать работу об упомянутых «неделимых величинах». В 1629 г. Галилей поддержал кандидатуру Кавальери, к тому времени уже закончившего свой труд по геометрии неделимых, на занятие кафедры в университете г. Болонья, характеризовав его как «соперника Архимеда». К тому же Кавальери пользовался покровительством римских пап того времени Урбана VIII и Иннокентия X — чтобы обеспечить ученого материально, его назначили еще и настоятелем монастыря. Как и Кеплер, Кавальери заодно был и астрологом.

Несмотря на громадный шаг вперед к интегральному исчислению, сделанный Кавальери (разработка «геометрии неделимых»), до самого исчисления было еще довольно далеко. Среди математиков, наиболее способствовавших прогрессу в этой области, следует назвать, в первую очередь, знаменитых французских математиков *Пьера Ферма* (1601–1665) и *Блеза Паскаля* (1623–1662), а также *Исаака Барроу* (1630–1677) — непосредственного предшественника Ньютона и Лейбница (обо всех этих ученых мы уже упоминали).

Пример 3. Покажем, как с помощью *принципа Кавальери* выводится архимедова формула для объема шара или, что в данном случае удобнее, *полушара* радиуса R. Рассмотрим цилиндр с высотой R и радиусом основания тоже R. Во-первых, впишем в него конус с вершиной в центре O верхнего основания цилиндра и с основанием, совпадающим с нижним основанием цилиндра (рис. 32). Согласно формуле «Демокрита–Евдокса», объем конуса будет равен трети объема цилиндра: $V_{\text{К}} = \frac{1}{3}V_{\text{Ц}}$.

Во-вторых, рассмотрим «чашу», получающуюся, если из цилиндра вырезать полушар с основанием, совпадающим с верхним основанием цилиндра, а также ее сечения плоскостями α_x, параллельными основаниям цилиндра и отстоящими от верхнего основания на расстояние x (см. рис. 32). Каждое такое сечение будет кольцом, заключенным между двумя концентрическими окружностями радиусов $MK = R$ и $MN = \sqrt{ON^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$, так что его площадь равна

$$S_{\text{Ч}}(x) = \pi R^2 - \pi(R^2 - x^2) = \pi x^2,$$

т. е. такая же, как площадь $S_{\text{К}}(x)$ соответствующего сечения конуса (оно-то является просто кругом радиуса x).

Согласно принципу Кавальери, объемы конуса и чаши равны, а учитывая, что объем чаши равен разности объемов цилиндра и полушара, получаем:

$$V_{\text{Ч}} = V_{\text{Ц}} - V_{\text{ПШ}} = V_{\text{К}} = \frac{1}{3}V_{\text{Ц}} \implies V_{\text{ПШ}} = \frac{2}{3}V_{\text{Ц}},$$

— это и есть формула Архимеда. □

Упражнения, задачи и задания к главе 2

Общее замечание. Для отыскания первообразных, как и для отыскания производных, используют *формулы* и *правила* интегрирования, которые получаются из формул и правил дифференцирования. Мы *постепенно* будем знакомиться с этими формулами (интегрирования функций того или иного «стандартного» типа) и правилами (по которым отыскиваются первообразные более сложных функций, как-то получающихся из стандартных). На первоначальном этапе для интегрирования (отыскания первообразных, или решения дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$) нужно «*смелее догадываться*», какой *вид* должны иметь искомые первообразные, а затем *проверять догадки дифференцированием.* Слово «*найти*» в условиях упражнений пока означает «*указать*», не подразумевая использования каких-то правил. Начнем с «наглядного интегрирования».

1. По графикам производных функций $y = F'(x) = f(x)$, приведенным на рисунках 33 (А–Е), восстановите примерный вид графиков самих функций $y = F(x)$ (при этом покажите соответствие между «характерными» точками графиков $y = f(x)$ и $y = F(x)$, взяв оси координат для второго графика точно под осями для первого).

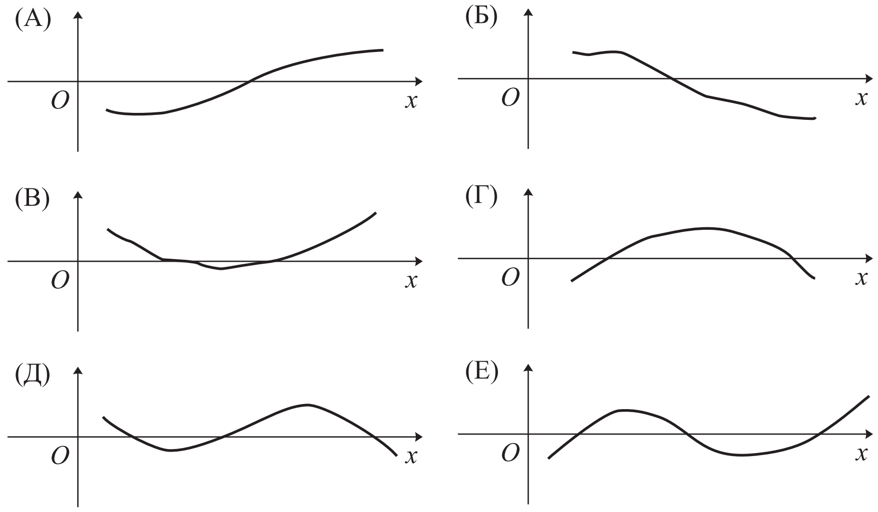


Рис. 33

2. Найдите все решения данных дифференциальных уравнений:

1) $y' = 2x$;

2) $y' = 2x + 1$;

3) $y' = x^2 + 1$;

4) $y' = 6x^2 - 2x$;

5) $y' = x^3$;

6) $y' = 8x^3 + 6x^2$.

3. Найдите все первообразные следующих функций[1]:

1) $f(x) = 10x^4$;

2) $f(x) = 5x^4 - 6x^2$;

3) $f(x) = 5x^4 + 6x^2 - 1$;

4) $f(x) = 8x^3 + 6x$;

5) $f(x) = x^5$;

6) $f(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x$.

4. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений справедливы[2]?

1) Если f имеет четную первообразную F, то сама она нечетна.
2) Если f нечетна, то любая ее первообразная F четна.
3) Если f имеет нечетную первообразную F, то сама она четна.
4) Если f четна, то любая ее первообразная F нечетна.
5) Если f четна, то *какая-нибудь* ее первообразная F нечетна.

[1] Во избежание «пестроты» формулировок, начиная с этой задачи чаще будем использовать «*язык первообразных*». Разумеется, формулировать и решать все такие задачи можно и в терминах соответствующих дифференциальных уравнений.

[2] Если утверждение верно, то докажите его; в противном случае приведите соответствующий *опровергающий* пример.

Указание. Условия четности и нечетности функции h можно записать в виде тождеств $h(x)-h(-x)\equiv 0$ и $h(x)+h(-x)\equiv 0$.

5. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ (на множестве $\mathbb{D}$).

1) Укажите какую-нибудь первообразную функции $f_1(x)=\alpha f(x)$ ($\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ — данное число).
2) Найдите все первообразные функции $h_1(x)=2f(x)+1$.
3) Найдите все первообразные функции $h_2(x)=f(x)-2$.
4) Укажите какую-нибудь первообразную функции $s(x)=f(x)+g(x)$.
5) Укажите какую-нибудь первообразную функции $d(x)=f(x)-g(x)$.
6) Верно ли, что «*первообразная суммы функций равна сумме первообразных слагаемых*»? Как следует исправить это утверждение для того, чтобы оно было заведомо (т. е. всегда) верным?

Комментарий. Справедливы утверждения: «*сумма первообразных двух функций является первообразной суммы этих функций*» или «*первообразная суммы функций отличается от суммы первообразных слагаемых на константу*».

6. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x)=2x(x+1)$;
2) $f(x)=x(2x-1)$;
3) $f(x)=4x(x^2+1)$;
4) $f(x)=x^2(x-3)$;
5) $f(x)=(x+1)(x-1)$;
6) $f(x)=(2x+1)(3x+2)$.

Комментарий. Конечно, *произведение первообразных* двух функций в общем случае никоим образом *не является первообразной произведения* этих функций. Как и при вычислении производных, при отыскании первообразных произведения *часто* бывает проще всего сначала «*раскрыть скобки*».

Следующий цикл упражнений показывает, как быть, когда интегрируются натуральные степени биномов и похожие выражения (в том случае, когда следовать совету «*раскрыть скобки*» не очень-то хочется!).

7. Найдите все первообразные данных функций:

1) $f(x)=(x+2)^5$;
2) $f(x)=(1-x)^6$;
3) $f(x)=(1-x)^7$;
4) $f(x)=(2x+1)^9$;
5) $f(x)=2x(x^2+1)^5$;
6) $f(x)=x^2(x^3-5)^5$.

Указание. Найдите[1] производные функций вида $F(x)=(ax+b)^n$ и $G(x)= = (ax^m+b)^n$ ($m,n\in\mathbb{N}$).

8. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $y=(2x+1)(x^2+x+1)^5$;
2) $y=2x(x^2+x+1)^5$;
3) $y=(3x^2-1)(x^3-x+5)^5$;
4) $y=x^2(x^3-x+5)^5$;
5) $y=x(ax^2+bx+c)^n$;
6) $y=x^2(ax^3+bx^2+cx+d)^n$.

(Здесь $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.)

Указание. Воспользуйтесь «*методом сведéния задачи к предыдущей*» (или *предыдущим*)!

[1] Следуя Лейбницу(!) — он догадался (правда, после Ньютона), что *интегрируемые* функции получаются с помощью дифференцирования. Это был первый шаг к созданию *лейбницева исчисления* (1675 г.).

Для решения следующих циклов задач потребуется вспомнить формулы для производных тригонометрических функций и *основные тригонометрические формулы* (т. е. формулы для тригонометрических преобразований).

9. Найдите все первообразные данных функций:

1) $f(x) = -\cos x$;
2) $f(x) = 5\cos x$;
3) $f(x) = \cos 5x$;
4) $f(x) = 5\cos\frac{x}{2}$;
5) $f(x) = \sin x$;
6) $f(x) = \sin\frac{x}{3}$;
7) $f(x) = \sin 3x$;
8) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Замечание. В этой и следующей задачах не нужно делать никаких преобразований!

10. Найдите все первообразные данных функций:

1) $f(x) = \cos x + \sin 5x$;
2) $f(x) = 5\cos x - \sin x + 2$;
3) $f(x) = \cos 5x - 5x$;
4) $f(x) = \cos 5x + x^5$;
5) $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$;
6) $f(x) = 5\sin x - \sin 5x + 5$.

11. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений справедливы?

1) Если функция f имеет периодическую первообразную F, то она сама периодическая.
2) Если функция f периодическая, то ее первообразная F тоже периодическая.
3) Если функция F имеет период T, то ее производная f тоже имеет период T.
4) Если функция F имеет примитивный[1] период T, то ее производная f тоже имеет примитивный период T.
5) Если функция f имеет периодическую первообразную F, то любая первообразная функции f периодическая.
6) Если периодическая функция f с примитивным периодом T имеет периодическую первообразную F, то F также имеет примитивный период T.

(Если утверждение верно, то докажите его, в противном случае приведите опровергающий пример.)

Указание. Условие периодичности функции h с периодом T можно записать в виде тождества $h(x+T) - h(x) \equiv 0$.

12. Найдите все первообразные данных функций:

1) $f(x) = \cos^2 x$;
2) $f(x) = \sin^2 x$;
3) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;
4) $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$;
7) $f(x) = \cos^3 x$;
8) $f(x) = \cos^4 x$;
9) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$;
10) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$;

[1]Напомним, что *примитивным* называется *наименьший положительный период* (см. ч. 3, «*Упражнения*» к § 7.2).

5) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$;

6) $f(x) = \sin^3 x$;

11) $f(x) = (\sin x + \cos x)^3$;

12) $f(x) = (\sin x + \cos x)^4$.

Указание. В этой и следующей задачах, напротив, нужно преобразовать интегрируемые функции так, чтобы свести задачи к интегрированию функций вида $a \cos \omega x$ и $a \sin \omega x$ (и, возможно, констант).

13. Найдите все первообразные данных функций:

1) $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$;

2) $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x$;

3) $f(x) = \sin x \cdot \sin 3x$;

4) $f(x) = \cos 2x \cdot \sin 8x$;

5) $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$;

6) $f(x) = \cos mx \cdot \cos nx$;

7) $f(x) = \sin mx \cdot \cos nx$;

8) $f(x) = \sin mx \cdot \sin nx$.

(Здесь $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

14. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;

4) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$;

6) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x$;

7) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$;

8) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$.

Замечание. Не забудьте, что первообразные на *объединении* интервалов отличаются *не на константу*, а на «*псевдоконстанту*»— *многозначную* константу $\widehat{C}$ («свою» для каждого из интервалов).

15. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = x \cos(x^2)$;

2) $f(x) = x \sin(x^2)$;

3) $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2(x^2)}$;

4) $f(x) = \dfrac{2x}{\sin^2(x^2)}$;

5) $f(x) = x \operatorname{tg}^2(x^2)$;

6) $f(x) = x^2 \cos(x^3)$.

Указание. *Угадайте* первообразную. (*Наводящий вопрос*: как вычисляется производная функции вида $\varphi(x^m)$, где φ — известная функция, а $m \in \mathbb{N}$?)

* * *

Рассмотрим следующие совокупности функций:

(1) $\mathbb{R}[x]$ — множество всех полиномиальных функций, т. е. функций, задаваемых с помощью *алгебраических многочленов*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

(произвольной степени $n \geqslant 0$);

(2) $\mathbb{R}_T[x]$ — множество всех функций, задаваемых с помощью *тригонометрических многочленов*

$$T(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{n}(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

($n \geqslant 0$ — любое).

(В обоих случаях коэффициенты a_k, b_k — произвольные действительные числа.)

16. Пусть $\mathbb{M}$ — одна из перечисленных выше совокупностей функций. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $\mathbb{M}$, то:
1) их сумма $f(x) + g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$;
2) любая их *линейная комбинация* $\alpha f(x) + \beta g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$;
3) их произведение $f(x)g(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$.

17. Пусть $\mathbb{M}$ — одна из перечисленных выше совокупностей функций. Верно ли, что если функция $f(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$, то:
1) ее производная $f'(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$?
2) любая ее первообразная $F(x)$ принадлежит $\mathbb{M}$?

(Для каждого случая дайте ответ и обоснуйте его.)

18. Для произвольной функции $f(x) \in \mathbb{M}$ в каждом из указанных случаев по известной записи $f(x)$ (в соответствии с приведенными выше формулами) найдите запись (общий вид):
1) производной $f'(x)$;
2) первообразной $F(x)$ для $f(x)$.

Какое дополнительное условие нужно наложить на функцию $f(x) \in \mathbb{M}$ для того, чтобы первообразная этой функции тоже принадлежала $\mathbb{M}$?

* * *

19. Запишите в явном виде следующие интегральные суммы:

1) $S_n(x) = S_n\big(t\big)_0^x$;
2) $S_n(x) = S_n\big(t^2\big)_0^x$;
3) $S_n(x) = S_n\big(t^3\big)_0^x$;
4) $S_n(x) = S_n\big(t^m\big)_0^x$ $(m \in \mathbb{N})$;
5) $S_n(x) = S_n\big(\sin t\big)_0^x$;
6) $S_n = S_n\big(\sin t\big)_0^\pi$;
7) $S_n(x) = S_n\big(\cos t\big)_0^x$;
8) $S_n = S_n\big(\cos t\big)_0^\pi$;
9) $S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{t}\right)_1^x$;
10) $S_n(x) = S_n\left(\frac{1}{t^2}\right)_1^x$.

Суммирование последовательностей и разностный анализ

Параллельно с созданием математического анализа в математике постепенно был разработан его аналог для последовательностей, получивший название *исчисление конечных разностей*. Роль производной для последовательности $f(n) = f_n$, которую ради удобства будем считать «двусторонней», т. е. определенной не только для натуральных, но и *для всех целых* значений n, играет **разность последовательности** f_n — *новая последовательность* $g_n = g(n)$, обозначаемая

$$\Delta f(n) = \Delta f_n$$

и вычисляемая как *разность*:

$$g(n) = \Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (\text{или } g_n = \Delta f_n = f_{n+1} - f_n).$$

Например,

$$\Delta(\mathrm{const}) \equiv 0, \quad \Delta(kn+b) \equiv k, \quad \Delta(n^2) = 2n+1, \quad \Delta(q^n) = (q-1)q^n$$

(объясните, т. е. проверьте!).

20. Найдите разности следующих последовательностей:

1) $f_n = an^2 + bn + c$;
2) $f_n = n^3$;
3) $f_n = n^4$;
4) $f_n = 3^n - 17 \cdot 2^n$;
5) $f_n = 2^{-n}$;
6) $f_n = 2^{kn}$;
7) $f_n = n2^n$;
8) $f_n = \sin \alpha n$;
9) $f_n = \cos \alpha n$;
10) $f_n = \frac{1}{n}$.

Аналогично первообразной для данной функции определяется **первообразная последовательность** для данной последовательности f_n: это такая последовательность F_n, что

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \quad \Delta F_n = f_n.$$

21. Докажите следующие утверждения:

1) Если F_n и G_n суть первообразные для одной и той же последовательности f_n, то они отличаются на константу: $G_n = F_n + C$.
2) Любая первообразная арифметической прогрессии $f_n = f_0 + dn$ является квадратичной последовательностью $F_n = an^2 + bn + c$.
3) Любая первообразная геометрической прогрессии $f_n = f_0 \cdot q^n$ имеет вид $F_n = Aq^n + C$ (говорят, является *сдвинутой* геометрической прогрессией).
4) Если F_n — первообразная для последовательности f_n, то при любом значении $n \in \mathbb{N}$ сумма $S_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_{n-1}$ равна разности $F_n - F_0$.

На последнем утверждении основан популярный метод *суммирования* (т. е. вычисления сумм) последовательностей. Например, чтобы найти сумму первых n членов геометрической прогрессии $f_n = aq^n$, т. е. $S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$, найдем последовательность вида $F_n = Aq^n$ такую, что $\Delta F_n = f_n$. Так как $\Delta F_n = A(q-1)q^n$, то мы должны взять значение коэффициента A равным $\frac{a}{q-1}$. Таким образом,

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} = F_n - F_0 = Aq^n - Aq^0 = \frac{a}{q-1}(q^n - 1),$$

и в данном случае мы пришли к известной формуле.

22. Используя описанный метод, найдите суммы $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k$ для следующих последовательностей:

1) $f_n = n$;
2) $f_n = n^2$;
3) $f_n = n^3$;
4) $f_n = \cos n\alpha$;
5) $f_n = \sin n\alpha$;
6) $f_n = nq^n$.

23. Используя формулы из предыдущей задачи, найдите пределы интегральных сумм из упражнения 22 (кроме пп. 4, 9, 10).

Переменные площади

В следующих упражнениях через $s(x)$ обозначается площадь $S\big(f\big)_{x_0}^{x}$ криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, графиком $z = f(x)$ и вертикалями в точках $(x_0;\, 0)$ и $(x;\, 0)$ оси Ox (напомним, что на участках отрицательности или в случае $x < x_0$ площадь берется со знаком «минус»).

24. Постройте графики функций $y = s(x)$ для перечисленных функций f и точек x_0:

1) $f(x) = 1, \quad x_0 = 1$;
2) $f(x) = -1, \quad x_0 = 1$;
3) $f(x) = x, \quad x_0 = 0$;
4) $f(x) = x, \quad x_0 = 1$;
5) $f(x) = x, \quad x_0 = -1$;
6) $f(x) = 1 - x, \quad x_0 = 0$;
7) $f(x) = 1 - x, \quad x_0 = 1$;
8) $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$;
9) $f(x) = |x|, \quad x_0 = -1$;
10) $f(x) = 1 - |x|, \quad x_0 = 0$.

25. Найдите функцию $f(x)$ и точку x_0, если известно, что:

1) $s(x) = x + 1$;
2) $s(x) = x^2$;
3) $s(x) = x^2 - 1$;
4) $s(x) = (x - 1)^2$;
5) $s(x) = (x + 1)^2$;
6) $s(x) = x^2 + 1$.

Для любой ли (дифференцируемой) функции $s(x) = F(x)$ сформулированная задача разрешима? Однозначно ли определяются функция f и «точка отсчета» x_0?

26. Постройте графики функций $y = s(x)$ для данных функций f и точек x_0:

1) $f(x) = \theta(x)$[1], $\quad x_0 = -1$;
2) $f(x) = \theta(x), \quad x_0 = 0$;
3) $f(x) = \theta(x), \quad x_0 = 1$;
4) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 0$;
5) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = -1$;
6) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 1$.

(В данном случае под криволинейной трапецией понимается фигура, составленная из всех вертикальных отрезков, ограниченных осью абсцисс и графиком функции, лежащих между вертикалями x_0 и x.)

27. Найдите все первообразные для функций:

1) $f(x) = |x|$;
4) $f(x) = 1 - |x|$;

[1] Напомним, что так обозначается *тэта-функция Хэвисайда*: она равна нулю при $x < 0$ и единице при $x \geqslant 0$.

2) $f(x) = |x| - 1$;

3) $f(x) = |x - 1|$;

5) $f(x) = \sin|x|$;

6) $f(x) = |\sin x|,\ x \in [-2\pi,\, 2\pi]$.

28. Найдите первообразные $F(x)$ для функций f такие, что $F(0) = 0$:

1) $f(x) = \big|1 - |x|\big|$;

2) $f(x) = x + |x|$;

3) $f(x) = x - 3|x|$;

4) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 1 - |x|, & |x| > 1; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leqslant 1, \\ |x| - 1, & |x| > 1; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 + x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$

Постройте графики $y = f(x)$ и $y = F(x)$.

Обобщенной первообразной на промежутке $\mathbb{I}$ для функции f, имеющей на этом промежутке *конечное* или *дискретное*[2] множество точек разрыва (в них функция f может быть и *не определена*), называется функция $F(x)$, *определенная* и *непрерывная* на $\mathbb{I}$ такая, что $\exists\ F'(x) = f(x)$ *на всех промежутках непрерывности функции* f.

29. Найдите все обобщенные первообразные данных функций (на всей числовой оси):

1) $f(x) = \theta(x)$;

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

3) $f(x) = x + \theta(x)$;

4) $f(x) = x + \operatorname{sgn} x$;

5) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$;

6) $f(x) = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$.

30. Пусть M — множество точек разрыва определенной на всей числовой оси функции f. Допустим, что M *конечное* или *дискретное*, причем функция f *имеет обобщенную производную* F (на всей оси). Дайте ответы (с обоснованием) на следующие вопросы (не торопитесь!).

1) Может ли f иметь единственную точку разрыва — скажем, $x = 0$? Или $M = \{-1\}$? $x = 17$?

2) Может ли f иметь *две* точки разрыва — скажем, $x = 0,\ 1$? Или $M = \pm 1$? $M = \{0,\ 200\}$?

3) Может ли f иметь *три* точки разрыва — скажем, $0,\ 1,\ 2$? Или $M = \{0,\ 2, 1000\}$?

4) Может ли f иметь бесконечно много точек разрыва? Приведите примеры.

5) Может ли F иметь единственную точку разрыва — скажем, $x = 0$? А $x = 2$? А две точки разрыва?

---

[2] Числовое множество называется **дискретным**, если на каждом *ограниченном* интервале числовой оси содержится не более конечного количества точек этого множество (*дискретный* — от лат. discretus: «прерывистый», «разделенный», состоящий из отдельных частей; антоним слова «*непрерывный*»).

31. Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ являются, соответственно, обобщенными первообразными функций $f(x) = [x]$ (*целая часть* x) и $g(x) = \{x\}$ (*дробная часть* x) такими, что $F(0) = G(0) = 0$.
1) Однозначно ли этими условиями заданы функции F и G?
2) Найдите значения $F(1)$, $F(2)$, $F(10)$, $F(-2)$.
3) Найдите значения $G(1)$, $G(2)$, $G(4)$, $G(-8)$.
4) Вычислите $F(100)$, $G(100)$, $F(100) \pm G(100)$, $F(200) \pm G(200)$.

Поля направлений и решения неавтономных дифференциальных уравнений

32. Обозначим функцию $u(z) = \dfrac{|z|}{z}$ через $\mathbf{Sgn}\, z$ (эта функция отличается от *знака* $\operatorname{sgn} z$ только тем, что она *не определена* при $z = 0$). Постройте поля направлений и интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = \mathbf{Sgn}\, x$;
2) $y' = \mathbf{Sgn}\, x + 1$;
3) $y' = \mathbf{Sgn}(x - 1)$;
4) $y' = -\mathbf{Sgn}\, x$;
5) $y' = 2 - \mathbf{Sgn}\, x$;
6) $y' = \mathbf{Sgn}\, y$;
7) $y' = \mathbf{Sgn}\, y - 1$;
8) $y' = \mathbf{Sgn}(y + 1)$;
9) $y' = -\mathbf{Sgn}\, y$;
10) $y' = \mathbf{Sgn}(x - y)$;
11) $y' = \mathbf{Sgn}(x + y)$;
12) $y' = \mathbf{Sgn}(y - 2x)$;
13) $y' = \mathbf{Sgn}(xy)$;
14) $y' = \mathbf{Sgn}(-xy)$;
15) $y' = \mathbf{Sgn}(xy - 1)$;
16) $y' = \mathbf{Sgn}(1 - xy)$;
17) $y' = \mathbf{Sgn}(x^2 - y)$;
18) $y' = \mathbf{Sgn}(x^2 - y^2)$;
19) $y' = \mathbf{Sgn}(x^2 + y^2 - 4)$;
20) $y' = \mathbf{Sgn}(4 - x^2 - y^2)$;
21) $y' = \mathbf{Sgn}(\sin x)$;
22) $y' = \mathbf{Sgn}(\sin x \cdot \sin y)$.

Замечание. Поля направлений и интегральные кривые уравнения $y' = F(x, y)$ рассматриваются только в тех областях плоскости Oxy, где правая часть уравнения *определена.*

33. Изобразите приближенно поля направлений данных дифференциальных уравнений и их интегральные кривые:

1) $y' = x$;
2) $y' = -x$;
3) $y' = x - 2$;
4) $y' = -x + 1$;
5) $y' = y$;
6) $y' = -y$;
7) $y' = y - 1$;
8) $y' = -y + 2$;
9) $y' = x + y$;
10) $y' = x - y$;
11) $y' = y - x$;
12) $y' = -y - x$.

34. Докажите аналитически (явно вычисляя производные), что:
1) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = f(x)$, то *любая* функция $y_C = \varphi(x) + C$ также удовлетворяет этому уравнению;
2) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = g(y)$, то *любая* функция $y_c = \varphi(y + c)$ также удовлетворяет этому уравнению;
3) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = k(x)y$, то *любая* функция $y_A = A\varphi(x)$ также удовлетворяет этому уравнению;
4) если функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = h\left(\dfrac{y}{x}\right)$, то *любая* функция $y_A = A\varphi\left(\dfrac{x}{A}\right)$ также удовлетворяет этому уравнению.

Изоклины и поля направлений

35. Постройте изоклины для дифференциальных уравнений из задачи 33. Изобразите поля направлений этих уравнений, используя построенные изоклины.

36. Может ли интегральная кривая дифференциального уравнения вида $y' = F(x, y))$:
1) *совпадать* с какой-то из его изоклин;
2) *являться частью* какой-то из его изоклин?

37. Может ли *все семейство* интегральных кривых дифференциального уравнения вида $y' = F(x, y))$ *совпадать* с семейством его изоклин или их частей?

38. Определите вид *семейства изоклин* для дифференциальных уравнений следующего вида (всюду $u(z)$ — заданная функция одной переменной):

1) $y' = u(x)$;
2) $y' = u(y)$;
3) $y' = u(x - y)$;
4) $y' = u(x + y)$;
5) $y' = u(y - 2x)$;
6) $y' = u(y - x^2)$;
7) $y' = u\left(\dfrac{y}{x}\right)$;
8) $y' = u\left(\dfrac{x}{y}\right)$;
9) $y' = u(xy)$;
10) $y' = u(x^2 + y^2)$.

39. Докажите, что если *семейства изоклин* дифференциального уравнений вида $y' = F(x, y)$ **инвариантно** относительно некоторого преобразования

$$L : (x;\, y) \mapsto (x_1;\, y_1)$$

координатной плоскости Oxy (т. е. переходит *само в себя* при этом *преобразовании*[1] — например, при параллельном переносе, повороте, симметрии, гомотетии, ...), то *семейство интегральных кривых* также переходит само в себя при этом преобразовании, в том смысле, что каждая интегральная кривая переходит в интегральную кривую (вообще говоря, в *другую*) или в несколько «кусочков» интегральных кривых (так бывает, если при преобразовании L *график* $y = y(x)$ решения переходит в кривую, *не являющуюся графиком*).

40. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

[1] *Инвариантность* означает «неизменность» (какого-то выражения, величины, совокупности или свойства относительно некоторых преобразований); фр. invariant — «неизменяющийся», от лат. in... — отрицание «не...», varians, variantis — «изменяющийся».

1) $y' = x^2$;
2) $y' = x^2 + 1$;
3) $y' = x^2 - 1$;
4) $y' = x^3$;
5) $y' = -x^2$;
6) $y' = -x^2 + 1$;
7) $y' = -x^2 - 1$;
8) $y' = -x^3$;
9) $y' = |x|$;
10) $y' = -|x|$;
11) $y' = 1 - |x|$;
12) $y' = \sqrt{|x|}$;
13) $y' = \sqrt[3]{x}$;
14) $y' = \frac{1}{x}$;
15) $y' = \frac{1}{x^2}$;
16) $y' = -\frac{1}{x}$;
17) $y' = -\frac{1}{x^2}$;
18) $y' = \frac{1}{x-2}$;
19) $y' = \frac{1}{2-x}$;
20) $y' = \sin x$;
21) $y' = -\sin x$;
22) $y' = \operatorname{tg} x$.

41. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

1) $y' = y^2$;
2) $y' = -y^2$;
3) $y' = y^2 + 1$;
4) $y' = y^2 - 1$;
5) $y' = y^2 - y$;
6) $y' = 1 - y^2$;
7) $y' = y^3$;
8) $y' = -y^3$;
9) $y' = \frac{1}{y}$;
10) $y' = -\frac{1}{y}$;
11) $y' = \frac{1}{y^2}$;
12) $y' = \sqrt{|y|}$;
13) $y' = \sqrt[3]{y}$;
14) $y' = \cos y$;
15) $y' = \cos^2 y$;
16) $y' = \operatorname{tg} y$.

42. Изобразите приближенно поля направлений и интегральные кривые данных дифференциальных уравнений:

1) $y' = \frac{y}{x}$;
2) $y' = \frac{2y}{x}$;
3) $y' = \frac{y}{2x}$;
4) $y' = -\frac{y}{x}$;
9) $y' = \frac{x}{2y}$;
10) $y' = -\frac{x}{y}$;
11) $y' = -\frac{2x}{y}$;
12) $y' = -\frac{x}{2y}$;

5) $y' = -\dfrac{2y}{x}$;

6) $y' = -\dfrac{y}{2x}$;

7) $y' = \dfrac{x}{y}$;

8) $y' = \dfrac{2x}{y}$;

13) $y' = \dfrac{y+1}{x-2}$;

14) $y' = \dfrac{x+1}{y-2}$;

15) $y' = \dfrac{y^2}{x}$;

16) $y' = 2xy$.

*Первые интегралы неавтономных дифференциальных уравнений

Определение 4. Функция $Y(x,y)$, *постоянная* на каждой интегральной кривой $y = y(x)$, $x \in \mathbb{I}$, дифференциального уравнения $y' = F(x,y)$, т. е. такая, что

$$\forall\, x \in \mathbb{I} \qquad Y(x, y(x)) \equiv C \tag{$*$}$$

(значение константы C, вообще говоря, свое для каждого решения $y(x)$), называется **первым интегралом** этого дифференциального уравнения.

43. Докажите, что указанные ниже функции являются *первыми интегралами* для заданных дифференциальных уравнений:

1) $Y(x,y) = x^2 - y, \quad y' = 2x$;

2) $Y(x,y) = x + \dfrac{1}{y}, \quad y' = y^2$;

3) $Y(x,y) = xy, \quad y' = -\dfrac{y}{x}$;

4) $Y(x,y) = \dfrac{y}{x}, \quad y' = \dfrac{y}{x}$;

5) $Y(x,y) = x^2 + y^2, \quad y' = -\dfrac{x}{y}$;

6) $Y(x,y) = x^2 - y^2, \quad y' = \dfrac{x}{y}$.

Указание. Проверьте, что производная левой части формулы $(*)$ *тождественно равна нулю* для любого решения соответствующего дифференциального уравнения.

44. Пусть функция $Y(x,y)$ является первым интегралом для дифференциального уравнения $y' = F(x,y)$. Докажите, что любая интегральная кривая этого уравнения целиком лежит на какой-то из *линии уровня* функции Y, т. е. содержится в множестве

$$\Upsilon_C = \big\{(x;\, y) \,\big|\, Y(x,y) = C\,\big\}\,.$$

Исходя из этого, найдите формулы для решений $y = y(x)$ дифференциальных уравнений из задачи 12 и изобразите *семейства* их графиков.

Предварительное замечание. Одна и та же функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет *многим* (*бесконечно многим*!) дифференциальным уравнениям. Например, функция $y = x^2$ на положительной полуоси $x > 0$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$y' = 2x, \quad y' = x + \frac{y}{x}, \quad y' = 17x - \frac{15y}{x}, \quad y' = \frac{2y}{x}, \quad y' = 2\sqrt{y}$$

и т. д. (проверьте!).

45. Для данной функции $y = \varphi(x)$, рассматриваемой **(А)** только на положительной полуоси, **(Б)** на всей своей области определения, составьте (найдите, придумайте, «угадайте») дифференциальное уравнение вида $y' = g(y)$, которому эта функция удовлетворяла бы:

1) $y = x^3$;
2) $y = \sqrt{x}$;
3) $y = \dfrac{1}{x}$;
4) $y = -\dfrac{1}{x}$;
5) $y = \dfrac{1}{x^3}$;
6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
7) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$;
8) $y = \operatorname{tg} x$.

Какие еще решения полученных уравнений можно указать?

46. Для данной функции $y = \varphi(x)$, рассматриваемой **(А)** только на положительной полуоси, **(Б)** на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, укажите дифференциальное уравнение вида $y' = k(x)y$, которому эта функция удовлетворяла бы:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^4$;
3) $y = x^5$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = \dfrac{1}{x}$;
6) $y = -\dfrac{1}{x}$;
7) $y = \dfrac{1}{x^2}$;
8) $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Какие еще решения полученных уравнений можно указать?

47. Нарисуйте *семейство линий уровня* данных функций $Z(x, y)$ (они задаются уравнениями $Z(x, y) = C$); запишите (найдите) дифференциальное уравнение вида $y' = F(x, y)$ (или $\mathcal{F}(x, y, y') = 0$)[1], которому удовлетворяют кривые этого семейства (точнее, те их «участки», которые являются графиками $y = y(x)$ дифференцируемых функций).

1) $x - y = C$;
2) $x^2 + y = C$;
3) $x^n - y = C,\ n \in \mathbb{N}$;
4) $x - y^2 = C$;
5) $x - y^n = C,\ n \in \mathbb{N}$;
6) $x + y^n = C,\ n \in \mathbb{N}$;
7) $xy = C$;
8) $x^2 y = C$;
9) $x^n y = C,\ n \in \mathbb{N}$;
10) $xy^2 = C$;
11) $xy^n = C,\ n \in \mathbb{N}$;
12) $x^2 y^3 = C$;
13) $x^2 - y^3 = C$;
14) $x^2 + y^2 = C$;
15) $4x^2 + y^2 = C$;
16) $x^2 + 4y^2 = C$;
17) $x^2 - y^2 = C$;
18) $2x^2 - y^2 = C$.

---

[1] Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями первого порядка*, **не разрешенными** *относительно производной y'*.

Указание. Заметьте, что левые части $Z(x, y)$ уравнений этих семейств являются *первыми интегралами* искомых дифференциальных уравнений.

Разностный анализ: линейные разностные уравнения

Вернемся еще раз к разностям. Для данной последовательности f_n, кроме «первой» разности Δf_n, может быть определена *вторая разность* $\Delta^2 f_n$, как *разность от первой разности*,

$$(\Delta^2 f)_n = \Delta(\Delta f)_n,$$

и далее третья, четвертая и т. д. разности.

48. Запишите вторую и третью разности последовательности f_n непосредственно через члены последовательности.

49. Найдите вторые и третьи разности для данных последовательностей:

1) $f_n = n^2$;
2) $f_n = n^3$;
3) $f_n = n^4$;
4) $f_n = 2^n$;
5) $f_n = 3^n$;
6) $f_n = \sin n\alpha$.

Аналогом дифференциальных уравнений для последовательностей являются **разностные уравнения**, в которые входят не производные неизвестных функций, а *разности неизвестных последовательностей*.

Если неизвестная последовательность y_n и все ее разности Δy_n, $\Delta^2 y_n$, ... входят в разностное уравнение *линейно*, то говорят о *линейном разностном уравнении*.

50. Найдите все решения данных разностных уравнений:

1) $\Delta y_n = k y_n$;
2) $\Delta y_n = k y_n + b$;
3) $\Delta^2 y_n = 0$;
4) $\Delta^3 y_n = 0$.

51. Докажите, что любое *однородное линейное разностное уравнение второго порядка* с постоянными коэффициентами,

$$\Delta^2 y_n + p\Delta y_n + q y_n = 0,$$

может быть записано как рекуррентное соотношение вида

$$y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n, \qquad (*)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — константы. Верно ли обратное утверждение?

Теория линейных разностных уравнений по сути своей вполне аналогична (и проще!) теории линейных дифференциальных уравнений, рассматривающейся в следующей главе. Мы пока не будем раскрывать эту красивую аналогию, ограничившись одним примером, развернутым в маленькую серию задач.

52. Докажите, что если последовательности u_n и v_n являются решениями разностного уравнения $(*)$, то и любая их *линейная комбинация* $y_n = \alpha u_n + \beta v_n$ (где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные константы) также является решением уравнения $(*)$.

53. Докажите, что для любых «начальных условий»— заданных начальных членов $y_0 = A$, $y_1 = B$ — существует последовательность y_n, $n \geqslant 0$, являющаяся решением разностного уравнения $(*)$, и притом только одна. Верно ли это утверждение, если рассматривать решения y_n при *всех* целых значениях индекса n?

54. Докажите, что если линейное разностное уравнение $(*)$ имеет решение, записывающееся как геометрическая прогрессия $q_n = \lambda^n$, то ее знаменатель λ является корнем *характеристического уравнения*

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \qquad (**)$$

(a, b — коэффициенты уравнения $(*)$).

55. Докажите, что если дискриминант характеристического уравнения $(**)$ *положителен* и числа λ_1, λ_2 — его корни, то любое решение разностного уравнения $(*)$ представимо в виде

$$y_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n,$$

где константы α, β *однозначно* определяются начальными условиями $y_0 = A$, $y_1 = B$.

56. Запишите общий вид решений *разностного уравнения Фибоначчи*:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n.$$

57. Найдите аналитическую формулу для n-го *числа Фибоначчи* f_n: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, ...; $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Комментарий. Характеристическое уравнение для уравнения Фибоначчи имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} =\Big|_{\tau_1}^{\tau},$$

где константа $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется «*золотым сечением*», а второй корень равен $\tau_1 = 1 - \tau$ (например, по теореме Виета). Общее решение уравнения Фибоначчи определяется формулой

$$y_n = \alpha\tau^n + \beta(1-\tau)^n.$$

Для чисел Фибоначчи следует потребовать выполнение начальных условий:

$$y_0 = f_0 = \alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \beta = -\alpha;$$

следовательно,

$$y_1 = f_1 = \alpha\tau - \alpha(1-\tau) = \alpha(2\tau - 1) = \alpha \cdot \sqrt{5} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, оказывается, что число f_n пар кроликов в «модели Фибоначчи» через n месяцев (мы опустим описание этой модели роста популяций) вычисляется с помощью двух геометрических прогрессий — по *формуле Бине*:

$$f_n = \alpha\big(\tau^n - (1-\tau)^n\big) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

(Поразительная формула!)

58. Докажите, что предел отношения соседних чисел Фибоначчи равен «золотому сечению» τ.

Здесь открывается отдельная область как бы *математической эстетики* — от пропорций Парфенона и Ботичелли до строения плодов ананаса или корзинок подсолнечника. Конечно, рассмотрение «божественной пропорции», как назвали отношение $\tau : 1$ *Леонардо да Винчи* и *Фра Лука Пачоли* (в книге «De Divina Proportione», 1509 г.), также выходит за рамки данного курса[1].

Леонардо Пизанский, он же *Фибоначчи* (ит. filius Bonacci — «сын доброй природы») — замечательный итальянский математик, купец, путешественник и писатель (1180–1240). Родился в г. Пиза, учился у арабов в Алжире, написал несколько фундаментальнейших по тому времени трактатов по математике, в одном из которых — в «*Книге об абаке*» (собственно, не о самом *абаке*, а о всевозможных вычислениях) — он и рассмотрел задачу о размножении кроликов (1202 г.).

На связь чисел Фибоначчи с золотым сечением указал *Иоганн Кеплер* в своем блестящем эссе «*О шестиугольных снежинках*» (1611 г.). Наконец, французский математик, профессор Политехнической школы, алгебраист, астроном и аналитик *Жак Филипп Мари Бинé* (1786–1856) получил указанную формулу при исследовании общих линейных разностных уравнений (1843 г.). Числами Фибоначчи занимался и Лагранж, и многие другие, и по настоящее время они находят удивительно разнообразные и весьма глубокие приложения… .

---

59. Изобразите «криволинейные трапеции», соответствующие записанным интегралам, и найдите значения этих интегралов, *не используя* формулу Барроу (только из геометрических соображений):

1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{3}^{1} (x-2)\,dx$;

2) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\,dx$; 5) $\displaystyle\int_{1}^{3} (2-x)\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{1}^{3} (x-2)\,dx$; 5) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} (2-x)\,dx$.

Указание. Каждая трапеция будет состоять из одного или нескольких «кусочков», а интеграл является суммой их площадей, *но взятых с соответствующими знаками*.

60. Для каждого из интегралов предыдущей задачи проверьте полученный «геометрически» ответ с помощью формулы Барроу.

61. Вычислите данные интегралы и изобразите соответствующие «криволинейные трапеции» (с указанием знаков площадей составляющих трапеции частей):

1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,dx$; 4) $\displaystyle\int_{0}^{3} (x^2-2x)\,dx$;

2) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x^2-1)\,dx$; 5) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^3\,dx$;

---

[1] См., например, статью А. И. Щетникова «Проблема филлотаксиса», Математическое образование, №1(24), 2003 г. — *прим. ред.*

3) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2\,dx$; 6) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^3\,dx$.

62. Изобразите фигуру, отсекаемую от I квадранта ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) координатной плоскости Oxy графиком данной функции $y = f(x)$, и вычислите ее площадь (записав ее как интеграл):

1) $y = 1 - x^\alpha \quad (\alpha > 0)$;
2) $y = (1 - x)^\alpha \quad (\alpha > 0)$;
3) $y = a^m - x^m \quad (a, m > 0)$;
4) $y = (a - x)^m \quad (a, m > 0)$;
5) $y = \cos \alpha x \quad (\alpha > 0)$;
6) $y = \cos^2 \alpha x \quad (\alpha > 0)$.

63. Изобразите фигуру, ограниченную данными графиками (при $x \geqslant 0$), и вычислите ее площадь (записав ее с помощью интегралов):

1) $y = x^\alpha,\ y = x\ (\alpha > 0)$;
2) $y = x^\alpha,\ y = x^\beta\ (\alpha > \beta > 0)$;
3) $y = 1-x^\alpha,\ y = 1-x\ (\alpha>0)$;
4) $y = (1 - x)^\alpha,\ y = 1 - x\ (\alpha > 0)$;
5) $y = \pi \sin \alpha x,\ y = 2\alpha x\ (\alpha > 0)$;
6) $y = \pi \cos \alpha x,\ y = \pi - 2\alpha x\ (\alpha > 0)$.

Общее замечание. При вычислении площадей фигур, ограниченных какими-то линиями на координатной плоскости, эти фигуры представляют как *объединения* или *разности* тех или иных *криволинейных трапеций* и выражают искомую площадь как суммы и разности соответствующих интегралов.

64. Изобразите фигуру, ограниченную данными линиями, и вычислите ее площадь:

1) $y = x^2,\ y = c^2 \quad (c > 0)$;
2) $y = ax^2,\ y = ac^2 \quad (c > 0)$;
3) $y = ax^2,\ y = kx \quad (a, k > 0)$;
4) $y = h - x^2,\ y = 0 \quad (h > 0)$;
5) $y = x^2 - ax,\ y = 0 \quad (a > 0)$;
6) $y = (x - \alpha)(x - \beta),\ y = 0 \quad (\alpha < \beta)$.

Определение 5. Параболическим сегментом называется фигура, ограниченная параболой $y = p_2(x) = ax^2 + bx + c$ и ее *хордой* — отрезком AB, соединяющим две точки $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$ этой параболы.

Расстояние между точками A и B *по горизонтали*, т. е. величина $d = |x_B - x_A|$, называется **шириной** сегмента, а длина отрезка MP вертикальной прямой $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ между серединой M хорды AB и соответствующей точкой P параболы — **стрелкой** сегмента.

Параллелограмм, ограниченный прямыми AB, $x = x_A$, $x = x_B$ и касательной к параболе, параллельной хорде AB, называется *описанным* около сегмента ABP.

65. Докажите, что площадь параболического сегмента ABP равна:

1) $\frac{2}{3}$ произведения ширины сегмента на ее стрелку;
2) $\frac{2}{3}$ площади описанного около сегмента параллелограмма.

Отыскание первообразных элементарных функций (продолжение)

Ранее практически не рассматривались первообразные *иррациональных алгебраических функций*, т. е. функций, которые могут быть получены из функции x и всевозможных констант не только с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления), но и с помощью «алгебраического действия» *извлечения* (арифметического) *корня произвольной натуральной степени* $n \geqslant 2$, а также путем образования произвольных *композиций* уже имеющихся функций (и повторного применения всех перечисленных действий к полученным функциям сколь угодное количество раз). В простейших случаях для отыскания первообразных иррациональных алгебраических функций достаточно уже показанных выше приемов.

66. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = x(\sqrt{x}+1)$;
2) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)$;
3) $f(x) = \sqrt{x}(x+3)$;
4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+4}{4}x$;
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+5}{10\sqrt{x}}$;
6) $f(x) = \dfrac{x+6}{12\sqrt{x}}$.

67. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = \sqrt{x+2}$;
2) $f(x) = \sqrt{2x-1}$;
3) $f(x) = (2x+1)\sqrt{4x+2}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$;
5) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}$;
6) $f(x) = \dfrac{4x-6}{\sqrt{2x-3}}$.

68. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = x(\sqrt[3]{x}+1)$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)$;
3) $f(x) = \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}$;
4) $f(x) = (\sqrt[3]{x}-3)(\sqrt{x}-2)$;
5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2}$;
6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}}$.

69. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = x\sqrt{x-2}$;
2) $f(x) = (2x+3)\sqrt{1-x}$;
3) $f(x) = 3x\sqrt[3]{3x-2}$;
4) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$;
5) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{2-x}}$;
6) $f(x) = \dfrac{3x-2}{\sqrt[3]{x-1}}$.

70. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = 4x\sqrt{x^2-1}$;
2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
3) $f(x) = x^2\sqrt{x^3+1}$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}$;
5) $f(x) = 4x\sqrt[3]{1-x^2}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+17}}$.

Указание. Запишите формулу для производной функции вида $F(x) = \big(p(x)\big)^{\alpha}$.

Кроме функции $f(x) = x^{-1}$, первообразная которой есть *трансцендентная* функция $F(x) = \ln|x| + \widehat{C}$ (здесь $\ln z$ — *натуральный логарифм*, о котором будет речь в следующей главе), существует много других рациональных и иррациональных алгебраических функций, первообразные которых записываются через *трансцендентные* элементарные функции. Вспомните: какие из рассмотренных нами элементарных трансцендентных функций имеют *алгебраические производные*?

71. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{2+2x+x^2}$;

5) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^4}$;

6) $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{c^2+d^2x^2}$ $\quad (c, d > 0)$.

72. Найдите все первообразные следующих функций:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$;

5) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

6) $f(x) = \dfrac{ax+b}{c^2-d^2x^2}$ $\quad (c, d > 0)$.

Как вы, наверное, догадались, первообразные из двух последних задач связаны с *обратными тригонометрическими функциями*: $\operatorname{arctg} x$ и $\arcsin x$ (или с $\operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ и $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$).

Интегралы с переменными пределами интегрирования

73. Выясните, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ функции $J(x)$, определенные в задаче 34, дифференцируемы, и вычислите значения производных $J'(x)$ в этих точках.

74. Для заданных как интегралы функций $F(x)$ найдите производные $F'(x_0)$ в указанных точках x_0:

1) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{du}{\ln u},\ x_0 = \mathrm{e}$;

2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin u}{u}\, du,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

3) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^u}{u}\, du,\ x_0 = \ln 2$;

4) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\, du,\ x_0 = \sqrt{\ln 2}$;

5) $F(x) = \displaystyle\int_1^x u^u\, du,\ x_0 = 4$;

6) $F(x) = \displaystyle\int_{17}^x u^u\, du,\ x_0 = 4$.

75. Дана некоторая функция $f(x)$, непрерывная на всей числовой оси. Найдите производные заданных как интегралы функций $F(x)$ (на всей оси):

1) $F(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(u)\, du$;

4) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(u)\, du$;

2) $F(x) = \int_x^0 f(u)\,du$;

3) $F(x) = \int_0^{2x} f(u)\,du$;

5) $F(x) = \int_0^{x^2} f(u)\,du$;

6) $F(x) = \int_{-x}^{x} f(u)\,du$.

76. Пусть F — первообразная какой-то строго монотонной функции $f : (a, b) \to \to (\alpha, \beta)$ на интервале (a, b), функция $g : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ — обратная к функции f. Докажите, что функция $G(x)=xg(x)-F(g(x))$ является первообразной для функции g на интервале (α, β). Примените эту формулу к функциям:

1) $f(x) = x^n,\ x \in (0, +\infty)$;

2) $f(x) = \sin x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

3) $f(x) = \arcsin x,\ x \in (-1,\ 1)$;

4) $f(x) = \cos x,\ x \in (0,\ \pi)$.

Дайте геометрическую интерпретацию формулы для $G(x)$ (отдельно в случаях возрастающих и убывающих функций f; сначала можно рассмотреть случай $a = \alpha = 0$).

* * *

77. На координатной плоскости Oxy изобразите фигуры, ограниченные указанными линиями, и найдите их площади:

1) $y = 2x - x^2,\ y = 0$;

2) $y = x^2 - 3x,\ y = 0$;

3) $y = x^2 - 2,\ y = x$;

4) $y = x^2,\ y = 2x$;

5) $y = x^2,\ y = x + 2$;

6) $y = x^2,\ y = x^3$;

7) $y = -x^2,\ y = x^4 - 20$;

8) $y = -x^2,\ y = x^3 - 12x$;

9) $y = x^{1/3},\ x = 0,\ y = 1$;

10) $y = x^{1/3},\ y = x^{1/5}$;

11) $y = \frac{4}{x^2},\ y = 7 - 3x$;

12) $y = x^2,\ y = 2x - 1,\ y = -2x - 1$;

13) $y = x^2,\ y = (x-1)^2,\ y = \frac{1}{9}$;

14) $y = \sin^2 x,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$;

15) $y = x^\alpha,\ y = x^\beta\ (0 < \alpha < \beta)$;

16) $y = \sqrt{x},\ y = x - 2,\ x = 0$.

17) $y = \sqrt{a + x},\ y = \sqrt{a - x},\ y = 0$;

18) $y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{4 - 3x},\ y = 0$.

78. Найдите площади фигур, ограниченных данными линиями:

1) $y^2 = x,\ y = 2 - x$;

2) $y = x,\ y = x^2 + 1,\ x = 0,\ y = 2$;

3) $y^2 = x,\ y = \sqrt{x}(x^2 - 1)$;

4) $y = x^3,\ y = 0$, касательная к графику $y = x^3$ в точке $x = 1$;

5) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{4}x$, нормаль к графику $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 1$;

6) $y = x^3 - x$, касательная к графику $y = x^3 - x$ в точке $x = -1$.

79. Не прибегая к первообразным, вычислите интегралы:

1) $\int_{-2}^{2} \big||x| - 1\big|\,dx$;

2) $\int_0^5 |\{x\} - \frac{1}{2}|\,dx$;

3) $\int_{-2}^{0} \sqrt{4 - x^2}\,dx$;

4) $\int_{-\pi}^{11\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$;

5) $\int_{-10}^{10} x^5 \cos^{13} x\,dx$;

6) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$.

* * *

80. Основание тела — треугольник $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ плоскости Oxy; каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox — квадрат. Вычислите объем тела.

81. Основание тела — треугольник $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$ плоскости Oxy; каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox, есть полукруг. Вычислите объем этого тела.

82. Основание тела — круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, каждое его сечение, перпендикулярное оси Ox — квадрат. Найдите объем этого тела.

83. Найдите объемы тел вращения области под графиком $y = 1 - x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = 1$: 1) относительно оси Ox; 2) относительно оси Oy.

84. Найдите объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ и $y = 1$: 1) относительно оси Ox; 2) относительно оси Oy.

85. Найдите объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ и $y = 0$: 1) относительно оси Ox; 2) относительно оси Oy.

86. Найдите объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 3$, относительно прямой $y = -1$.

87. Найдите объем тела вращения фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$, относительно прямой $x = -2$.

* * *

88. 1) Найдите отношение объемов тел вращения относительно осей Ox и Oy криволинейных трапеций, ограниченных дугой графика $y = x^2$ от точки $x = 0$ до точки $x = a$, соответствующими осями и перпендикулярами к ним.

2) Найдите такое же отношение в случае графика произвольной степенной функции $y = x^\alpha$, $\alpha > 0$.

3) Решите те же задачи для графиков $y = Ax^2$ и $y = Ax^\alpha$ $(A,\ \alpha > 0)$.

89. 1) Найдите площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b — кривой, задаваемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) Найдите объем *эллипсоида вращения* — тела вращения указанной фигуры относительно оси Ox.

3) Найдите отношение объемов эллипсоидов — тел вращения указанной фигуры относительно осей Ox и Oy.

90. Найдите объем произвольного эллипсоида, задаваемого в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$ неравенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

91. Найдите объемы тел вращения относительно оси Ox:
1) дольки синусоиды $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sin x$;
2) круга $x^2 + (y - 2)^2 \leqslant 1$[1];

[1] Получающееся тело называется *тором*.

3) бесконечной гиперболической трапеции $x \geqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}$.

92. Используя метод, примененный для вычисления площади сферы, выведите формулу для вычисления площади боковой поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты H.

93. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения около оси Oy криволинейной трапеции

$$0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

($f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a,\, b]$ функция).

(*Ответ*: $V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$.)

94. Найдите объемы тел вращения около оси Oy:
1) криволинейного треугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x^\alpha$ $(\alpha > 0)$;
2) синусоидальной дольки $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant |y| \leqslant \sin x$;
3) круга $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 1$[1];
4) круга $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$[2];
5) круга $(x-0,5)^2 + y^2 \leqslant 1$[3].

95. Выведите формулу для вычисления объема усеченного общего конуса с основаниями площадей S_1, S_2 и высотой h. (Напомним, что *усеченным конусом* называется часть [общего] конуса, заключенная между плоскостью основания и параллельной ей плоскостью сечения. Решите задачу двумя способами: из «соображений подобия» и с помощью *формулы Симпсона*.)

(*Ответ*: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$.)

96. Найдите объем «чердака», в основании которого лежит прямоугольник размера $a \times b$, верхнее ребро равно c, а высота — h.

97. Найдите объем «обелиска», параллельные основания которого суть прямоугольники размеров $A \times B$ и $a \times b$ (с соответственно параллельными сторонами), а высота равна h.

* * *

98. Выведите формулу для вычисления объема шарового сегмента радиуса R и высоты H. (Напомним, что *шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него любой пересекающей его плоскостью; *радиусом сегмента* называется радиус исходного шара R, а *высотой* — расстояние H от плоскости сечения до параллельной ей плоскости, касающейся сегмента [шара]. *Вопрос*: в каких пределах может изменяться высота сегмента радиуса R?)

99. Выведите формулу для вычисления объема шарового сектора, соответствующего шаровому сегменту радиуса R и высоты H. (Этот *шаровой сектор* определяется как тело, состоящее из всех радиусов шара, соединяющих центр с точками сферы, принадлежащими упомянутому шаровому сегменту [эти точки образуют *сферический сегмент*]. Заметим, что шаровой сектор может быть и *невыпуклым*!)

[1]Тело вращения — опять *тор*.
[2]А это уже не тор.
[3]Совсем не тор!

100. Используя прием, примененный для вычисления площади сферы, выведите формулу для вычисления площади сферического сегмента радиуса R и высоты H.

Напомним, что *сферической зоной* называется часть сферы, заключенная между двумя пересекающими ее параллельными плоскостями. Сферическая зона определяется радиусом сферы R и еще двумя параметрами: расстояниями от центра сферы до плоскостей, *с учетом знаков*. Если считать, что сфера в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а параллельные сечения перпендикулярны оси Ox, то они задаются уравнениями $x = a$ и $x = b$; $a,\, b \in (-R,\, R)$ и являются упомянутыми параметрами.

101. Вычислите площадь сферической зоны радиуса R с параметрами $a < b$.

Комментарий. Получающийся в этой задаче результат весьма примечателен: *площадь сферической зоны определяется только радиусом R и ее* **высотой** *H, т. е. расстоянием между плоскостями сечений*!

* * *

102. Выведите формулу для вычисления длины дуги графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ от точки $x = a$ до точки $x = b > a$.

Указание. Рассмотрите «переменную длину»— функцию $L(x)$, задаваемую как длина дуги графика от точки a до точки x; найдите производную $L'(x)$.

(*Ответ*: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.)

103. Найдите длины дуг графиков указанных функций между заданными точками:

1) $y = x\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 1$;
2) $y = (x+1)^{3/2}$; $x = 3$, $x = 8$;
3) $y = x^{2/3} - 1$; $x = 8$, $x = 27$;
4) $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$; $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{7}$;
5) $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$; $x = 1$, $x = 4$;
6) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$; $x = 1$, $x = 2$;
7) $y = \sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 1$;
8) $y = \ln x$; $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$.

* * *

104. Докажите, что длина дуги годографа дифференцируемой векторнозначной функции $\overline{r}(t) = (x(t);\, y(t))$ от значения $t = \alpha$ до значения $t = \beta > \alpha$ равна

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

105. Пусть замкнутая дуга годографа дифференцируемой векторнозначной функции $\overline{r}(t) = \overline{OP_t} = (x(t);\, y(t))$ от значения $t = \alpha$ до значения $t = \beta > \alpha$ ограничивает *слева от себя* (по ходу движения точки P_t при возрастании t) некоторую фигуру Φ. Докажите, что площадь этой фигуры может быть вычислена по любой из следующих трех формул:

$$S = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\,dt, \quad S = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt,$$
$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)dt.$$

Замечание. Замкнутость дуги означает, что $\overline{r}(\alpha) = \overline{r}(\beta)$.

106. Проверьте формулы из двух предыдущих задач для параметризованной окружности радиуса R: $\overline{r}(t) = (R\cos t;\ R\sin t)$, $t \in [0,\ 2\pi]$.

Комментарий. Задание плоской кривой как годографа векторнозначной функции $\overline{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ называется *заданием кривой* **в параметрическом виде** (или **параметрически**). Иначе, представление кривой годографом называется ее **параметризацией**. Заметим, что одна и та же кривая может быть параметризована *бесконечно многими способами* — например, подставляя в параметризацию $\overline{r(t)}$ вместо аргумента t любую монотонную на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функцию $\varphi(\tau)$, множество значений которой совпадает с $\mathbb{R}$ (скажем, линейную функцию $t = \varphi(\tau) = k\tau + b$), мы получаем уже другую параметризацию той же кривой — с помощью вектор-функции $\overline{\rho}(\tau) = \overline{r}(\varphi(\tau))$.

107. *Циклоидой* называется траектория фиксированной точки на окружности, катящейся без скольжения по прямой.

1) Докажите, что циклоида может быть параметризована формулами

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

2) Используя указанную параметризацию, найдите длину витка циклоиды $\overline{r}(t) = (x(t);\ y(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3) Найдите площадь фигуры между этим витком циклоиды и осью Ox.

108. *Астроидой*[1] называется кривая, задаваемая в декартовых координатах уравнением

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0).$$

1) Укажите какую-нибудь параметризацию астроиды.

2) Используя подходящую параметризацию астроиды, найдите ее длину.

3) Используя подходящую параметризацию астроиды, найдите площадь ограниченной ею фигуры.

109. Кривая, задаваемая в декартовых координатах уравнением

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0)$$

называется *декартовым листом*[2].

1) Изобразите декартов лист (учтите, что эта кривая имеет ось симметрии и наклонную асимптоту [найдите их]).

[1] Буквально — «*звездообразная*», от греч. $\alpha\sigma\tau\rho o\nu$ (astron) — «звезда» (отсюда *астрономия*), $\varepsilon\iota\delta o\zeta$ (eidos) — «вид» (а $\nu o\mu o\zeta$ [nomos] — «закон»).

[2] Эта кривая впервые была упомянута Декартом в письме к Ферма (1638).

2) Докажите, что формулы

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

дают параметризацию декартова листа.
3) Докажите, что при этой параметризации три точки декартова листа, соответствующие значениям параметра t_1, t_2 и t_3, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $t_1 t_2 t_3 = -1$.

110. *Эвольвентой* (или *разверткой*) *окружности* называется траектория, описываемая свободным концом нити длины $2\pi a$, разматываемой с окружности радиуса a.
1) Докажите, что эвольвента окружности может быть задана параметрически формулами

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

2) Используя указанную параметризацию, найдите длину витка эвольвенты.
3) Найдите площадь фигуры, ограниченной эвольвентой окружности (в приведенной параметризации) и прямой $x = a$, считая, что $y \leqslant 0$.

Публикация подготовлена редакцией
журнала «Математическое образование».

Несколько задач на движение, простых, но...

С. В. Дворянинов

Какую траекторию описывает фиксированная точка геометрической фигуры (например, середина отрезка), когда другие ее точки (концы отрезка) движутся по заданным траекториям (сторонам прямого угла)? Эта задача в различных вариациях изучается в статье. Материал может быть интересен для факультативных занятий, а также для изучения в профильных математических классах.

Предисловие, или как математические задачи появляются на ... огороде

Минувшим летом на нашем огородно-дачном участке случилась такая история. Для строительства водопровода привезли трубы, и мы принялись разносить их по участку. Естественно, что двигались мы по дорожкам, стараясь не повредить растения. Работа довольно однообразная. Так вот, осторожно ступая по дорожкам, я заинтересовался тем, по какой траектории движется середина трубы, которую мы несли с другом, взявшись за концы этой самой трубы. Дорожки пересекались под прямым углом, так что на математическом языке задача звучала так:

Прямолинейный отрезок AB движется так, что его концы перемещаются по двум сторонам прямого угла с вершиной C. Какую линию описывает при этом середина отрезка AB — точка M?

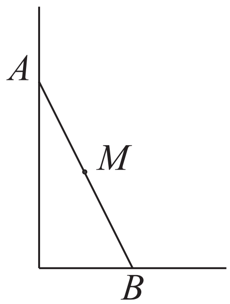


Рис. 1

Во время перерыва в работе я привязал к середине трубы пластмассовую бутылку, проделал в бутылке небольшое отверстие и наполнил бутылку водой. Теперь при нашем движении по дорожкам на земле оставался след – траектория точки M. Вы сейчас тоже можете провести этот эксперимент, только, разумеется, для этого совсем не обязательно таскать трубы. Достаточно на бумаге нарисовать несколько равных отрезков с концами на сторонах прямого угла и отметить середины этих отрезков (рис. 1). И у нас тогда на земле, и у вас на бумаге точки M располагаются на некоторой кривой линии. Если сделать большой чертеж и взять много промежуточных положений отрезка, то появится гипотеза о том, что точка M движется по окружности. Так оно и есть на самом деле. Доказательство простое. В прямоугольном треугольнике ABC отрезок CM является медианой, проведенной к гипотенузе. Длина этой медианы равна половине длины гипотенузы. Это означает, что при движении отрезка AB расстояние MC остается постоянным. Это в свою очередь и доказывает, что точка M движется по окружности.

В действительности — это очень старая и очень популярная задача. Так, в одной книге была нарисована лестница, прислоненная к вертикальной стене. На середине этой лестницы сидел котенок. Спрашивалось, по какой траектории будет двигаться котенок, если основание лестницы начнет удаляться от стены.

В жизни, конечно, этот котенок спрыгнет с этой лестницы по совершенно непредсказуемой траектории, но авторы задачи предполагали, что он будет мужественно сидеть на этой лестнице. В ответе сообщалось, что котенок будет двигаться по дуге окружности. Мы с вами это уже доказали.

Отступление для старших школьников

Пусть в нашей задаче точка A движется по сторонам прямого угла с постоянной скоростью 1 м/сек и "тянет" за собой точку B. Пусть длина AB равна 10 м. С какой скоростью движется точка B?

На первый взгляд ответ кажется очевидным: скорость точки B тоже равна 1 м/сек. Разумеется, это верно тогда, когда концы отрезка — точки A и B — находятся на одной стороне угла. При этом каждая из точек (и отрезок AB целиком) движется со скоростью 1 м/сек. Подробнее рассмотрим переход отрезка с одной стороны угла на другую. Для определенности будем считать, что при $t = 0$ точка A находится в вершине угла и в этот момент переезжает с одной его стороны на другую. Тогда при $0 \leqslant t \leqslant 10$ (то есть в течение десяти секунд) точки A и B будут находиться на разных сторонах угла (напомним, что длина отрезка 10 м, скорость точки A — 1 м/сек). За время t точка A пройдет от вершины угла путь, равный t м. В этот момент времени точка B будет удалена от вершины угла на расстояние, которое легко найти по теореме Пифагора:

$$S(t) = \sqrt{100 - t^2}.$$

Какова же скорость точки B, с какой скоростью точка B будет приближаться к вершине прямого угла? Вспомним, что при движении точки с переменной скоростью её мгновенная скорость численно равна производной от пути по времени. Следовательно, скорость точки B выражается формулой

$$v(t) = -\frac{t}{\sqrt{100 - t^2}}.$$

(Скорость отрицательна, и это согласуется с убыванием величины $S(t)$с течением времени).

Давайте посмотрим на последнюю формулу внимательнее. Мы предполагали рассмотреть процесс при $0 \leqslant t \leqslant 10$. Однако, функция, выражающая скорость, при $t = 10$ оказывается неопределенной! По мере приближения точки B к вершине угла, то есть при t, стремящемся к 10, скорость точки B неограниченно растет, или, как говорят, стремится к бесконечности! Вот и подумайте, возможно ли такое движение в какой-либо реальной ситуации...

Автор припоминает то, что он испытывал, оказавшись в положении точки B. По мере приближения к вершине прямого угла (то есть по мере приближения к точке поворота) скорость движения увеличивалась весьма ощутимым образом, и в последний момент автору пришлось отказаться от продолжение движения по прямой дорожке и совершить перескок.

Заметим, что в этой ситуации скорость точки A постоянной не является! Действительно, скорость — величина векторная, она характеризуется направлением, т.е. вектором скорости, и числом, равным длине этого вектора. Так вот, здесь это число постоянно (1 м/сек), но при переходе с одной стороны угла на другую скорость точки мгновенно меняет направление, поэтому скорость (как величина векторная) не является непрерывной функцией, она описывается разрывной функцией. Заметим также, что при $t = 0$ скорость точки B равна нулю.

По какой траектории движется произвольная точка отрезка?

После того, как мы разобрались с траекторией середины M движущегося в прямом угле отрезка AB, давайте изучим траекторию произвольной точки S этого отрезка. Будем считать, длина отрезка равна L, точка S такова, что

$$AS : SB = q : (1 - q).$$

Будем считать, что стороны прямого угла совпадают с осями координат (рис. 2). Пусть φ – угол ABO. Тогда точка S имеет такие координаты (x, y):

$$x = qL\cos\varphi; \quad y = (1 - q)L\sin\varphi.$$

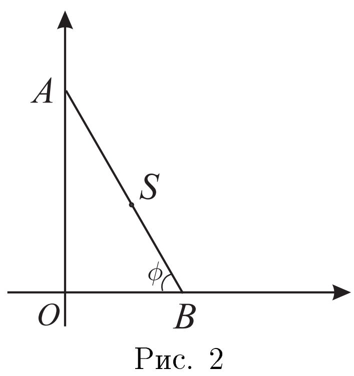


Рис. 2

Легко проверить, что при любом значении φ эти координаты удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{(qL)^2} + \frac{y^2}{((1-q)L)^2} = 1.$$

Следовательно, точка S движется по эллипсу, длины полуосей которого равны qL и $(1-q)L$.

Замечание. Кратко напомним то, с чем знакомился каждый при изучении преобразований графиков функций. Пусть есть два уравнения – старое $F(x, y) = 0$ и новое — $F(kx, ly) = 0$. Пусть $k > 0$, $l > 0$. Тогда новый график получается из старого растяжением или сжатием вдоль каждой из осей. Например, парабола $2y = (\frac{x}{3})^2$ получается из параболы $y = x^2$ сжатием в два раза вдоль оси OY к оси OX и растяжением в 3 раза вдоль оси OX от OY. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получается из уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = 1,$$

подобной заменой переменных. Следовательно, оно задает кривую, которая получается из окружности сжатием или растяжением вдоль осей координат. Такую линию называют *эллипсом* (рис. 3).

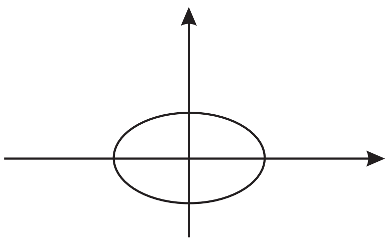


Рис. 3

Возвращаясь к нашим трубам, заметим, что если в точке S укрепить бутылку, из которой вытекает вода, то на поверхности земли будет изображена дуга эллипса.

Замечание для старшеклассников

Во время очередного перерыва в работе, лежа на зеленой траве и глядя в жаркое голубое небо, я подумал: а если в *каждой* точке нашей трубы (то есть в каждой точке отрезка) укрепить такую бутылку с водой, то какая часть поверхности земли будет смочена водой? Математики эту задачу формулируют так:

Концы отрезка AB движутся по сторонам прямого угла. Отрезок окрашивает совпадающие с ним точки плоскости. Какая часть плоскости будет окрашена?

Решение. Эта часть плоскости ограничена осями координат и некоторой линией, которую называют *астроидой*. Выведем уравнение астроиды. Обозначим координаты концов отрезка так:

$$A(0, \sqrt{L^2 - a^2}), \quad B(a, 0).$$

Напомним, что наш отрезок движется в первой координатной четверти, так что здесь a - меняющаяся при движении отрезка величина, то есть параметр, определяющий положение отрезка внутри угла. Уравнение отрезка AB таково:

$$y = \frac{a-x}{a}\sqrt{L^2 - a^2}.$$

Считая здесь x фиксированным, найдем наибольшее значение величины y, как функции от a. Вычислив производную $y'(a)$ и приравняв ее к нулю, найдем единственную критическую точку $a = x^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$. Ясно, что при этом значении a величина y оказывается наибольшей при данном значении x. Другими словами, вертикальный отрезок длины y окажется окрашенным.

Подставляя значение a в уравнение отрезка, получим после преобразований

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}.$$

Это и есть уравнение астроиды (рис. 4). Величину L можно назвать параметром астроиды подобно тому, как радиус является параметром окружности. Вычисление площади части плоскости, ограниченной астроидой, отложим до другого раза.

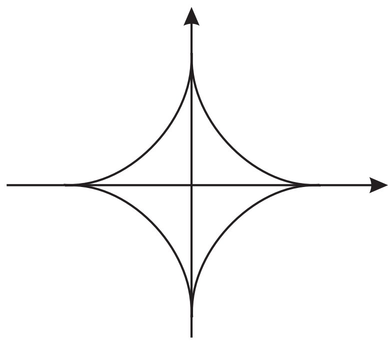


Рис. 4

После небольшого отдыха на солнышке, мы продолжили носить трубы, и стали брать трубы все длиннее и длиннее. Внутри прямого угла, по сторонам которого мы двигались, росла яблоня. Чем длиннее была труба, тем ближе она приближалась к этой яблоне при наших поворотах. Вопрос возник сразу: какую самую длинную трубу удастся нам пронести?

И эта задача не является новой. В учебном пособии [1] есть такая задача:

К реке шириной a проведен под прямым углом канал шириной b. Какую максимальную длину могут иметь суда, чтобы пройти в этот канал?

Эта задача имеется и в статье [2]. Здесь вместо судна говорится о тонком бревне. (У нас сейчас речь идет о трубе, которая намного *тоньше* любого судна и *тоньше* бревна.)

Опишем кратко одно из возможных решений этой красивой задачи (рис. 5).

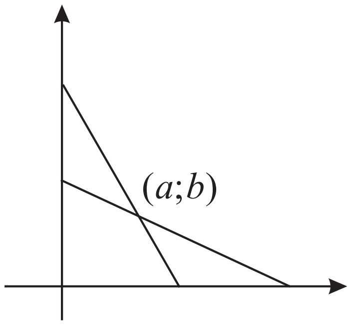


Рис. 5

Пусть наибольшая длина трубы, которую можно пронести по дорожкам, не задев яблони (точнее, коснувшись яблони!), (то есть длина судна иди бревна, которые могут зайти из реки в канал) равна L. Рассмотрим декартову систему координат, и пусть точка в первой четверти (a, b) соответствует положению яблони. Проведем через эту точку прямую $y = k(x-a)+b$, где k произвольно. Пусть эта прямая пересекает положительные полуоси координат в точках с координатами $A(0, -ka+b)$ и $B(-\frac{b}{k}+a, 0)$. Следовательно, квадрат длины отрезка AB равен

$$f(k) = (-\frac{b}{k} + a)^2 + (-ka + b)^2.$$

Исходная задача про самый длинный корабль, про самое длинное бревно и самую длинную трубу теперь звучит так: при каком значении k наименьшее значение f равно L^2?

Мы советуем обдумать эту переформулировку задачи и понять, как задача о *наибольшей* длине сводится к задаче о *наименьшем* значении функции f.

После этого решение задачи технически несложно. Вычислив производную $f'(k)$ и приравняв ее к нулю, получим уравнение

$$(ak - b^2)(b + ak^3) = 0$$

относительно критических значенийk. Вы заметили, что в нашей задаче $k \in (-\infty, 0)$? Именно поэтому находим *единственную* критическую точку

$$k = -\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

Вычислив значение функции f в этой точке, получим $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^3$.

Кроме того, $f(x) \to +\infty$ при $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to 0$, $x < 0$. Следовательно, единственная найденная критическая точка функции является точкой минимума, в которой функция f принимает наименьшее значение, и потому

$$L_{\text{наибольшее}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Это результат означает следующее. Через точку (a, b) проходит некоторая астроида. Так вот, параметр, определяющий эту астроиду, и задает наибольшую длину судна (бревна, трубы).

Отрезок движется по треугольнику

Рассмотрим правильный треугольник, все стороны которого равны 2 м, и отрезок AB длины 1 м. Отрезок движется так, что его концы все время остаются на контуре треугольника. Отрезок совершил полный обход треугольника. Какова минимально возможная длина пути, пройденного при этом точкой A?

И здесь на пути точки A есть угловая точка, которая заставляет нас быть осторожными. Можно предположить, что очевидный на первый взгляд ответ (а именно 6 метров, — это периметр треугольника) не является верным. Так оно и есть. Прежде чем читать дальше, сделайте чертёж и попробуйте самостоятельно разобраться, в чем тут дело.

А дело опять-таки в наличии угловой точки на траектории точки A. В тот момент, когда точки A и B лежат на разных сторонах треугольника и отрезок AB оказывается перпендикулярным стороне треугольника, на которой лежит B, дальнейшее сохранение направления движения точки A от вершины треугольника становится невозможным (рис. 6)! Длина перпендикуляра есть кратчайшее расстояние от точки до прямой, и потому точка A вынуждена совершать попятное, возвратное движение! Точка B, продолжая движение к вершине треугольника, тянет при этом точку A назад, к вершине треугольника. Длина пути точки A "назад" легко находится по теореме Пифагора и равна $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$. Такое "лишнее" расстояние точке A проходится проходить шесть раз – по два раза на каждой стороне треугольника. Стало быть, минимально возможный общий путь точки A за время кругосветного путешествия по контуру треугольника имеет длину $6 + 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = 4\sqrt{3}$(м).

Две вершины треугольника движутся по треугольнику

Задача 1. Пусть ABC — правильный треугольник со стороной 3, KMP — правильный треугольник со стороной 1. Точки K и M лежат на отрезке AC, точка P – вне треугольника ABC. Пусть треугольник KMP движется по плоскости так, что его вершины K и М остаются на сторонах треугольника ABC.

Какую линию при этом описывает центр треугольника KMP — точка O? Найдите её длину.

Какую линию описывает при этом точка P? Найдите её длину.

Решение. Конечно, интересен случай, когда K лежит на AB, M — на AC (рис. 7).

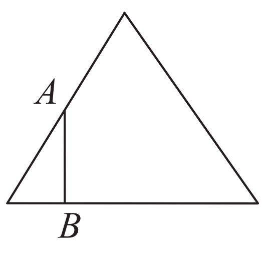


Рис. 6

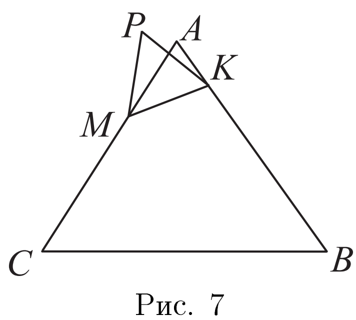


Рис. 7

В этом случае отрезок KM виден под углом 60° из двух точек — A и P. Следовательно, эти четыре точки A, K, M, P лежат на одной окружности. Ясно, что её центр совпадает с центром движущегося треугольника. Радиус этой окружности равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Итак, расстояние AO остается постоянным при движении двух сторон меньшего треугольника по двум сторонам большого треугольника. Это означает, что точка O движется по окружности с центром в точке A указанного радиуса. При переходе треугольника с одной стороны на другую точка O описывает треть этой окружности.

Получаем ответ на первый вопрос: точка O описывает *криволинейный* шестиугольник. Три его стороны – это отрезки длины 2. Три другие "стороны" – это дуги окружности. Длина пути равна $6 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Чтобы найти траекторию вершины P, вновь рассмотрим вписанный четырехугольник $AKMP$. Легко видеть, что углы PAM и PKM равны между собой. Но последний угол равен 60°. Стало быть, при движении меньшего треугольника угол MPC остается неизменным. Это означает, что точка Pдвижется по прямой. Получаем ответ на второй вопрос задачи: точка P описывает правильный шестиугольник со стороной 2.

Вы можете неподвижный треугольник нарисовать на листе бумаги, вырезать движущийся треугольник и, рассматривая промежуточные положения движущегося треугольника, отметить на бумаге положение точек O и P.

Упражнение.

1. Какой будет траектория точки P, если треугольники ABC и KMP равны между собой?

2. Вместо двух треугольников из предыдущего упражнения рассмотрим два равных квадрата. Какова траектория центра движущегося квадрата?

Треугольник движется по шестиугольнику

Пусть правильный треугольник KMP со стороной 1 расположен внутри правильного шестиугольника со стороной 3. Треугольник движется так, что две его вершины K и M всё время лежат на сторонах шестиугольника. Какую линию описывает при этом третья вершина треугольника точка P? Найдите её длину.

Ответ: третья вершина движется по сторонам правильного шестиугольника со стороной 2 и по биссектрисам углов данного шестиугольника (рис.8). Длины соответствующих отрезков биссектрис равны $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

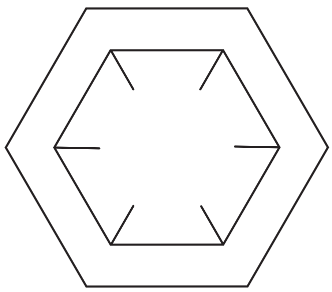


Рис. 8

Здесь также интересно изготовить модель из бумаги. Доказательство сформулированного утверждения таково (рис. 9). Когда точки M и K лежат на двух смежных сторонах шестиугольника с общей вершиной A, четырехугольник $AMPK$ является вписанным. Углы MAP и KAP опираются на равные дуги, следовательно, эти углы равны между собой. Это и означает, что вершина P лежит на биссектрисе угла A шестиугольника.

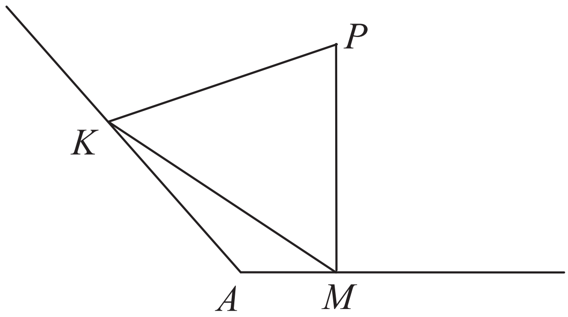


Рис. 9

Задачи для самостоятельного решения.

1. Правильный n-угольник со стороной 1 расположен внутри другого правильного n-угольника со стороной 10. Первый многоугольник движется так, что две его вершины K и M всё время лежат на сторонах второго. Какую линию описывает при этом центр движущегося n-угольника?

Рассмотрите частные случаи $n = 4$, $n = 6$.

2. Правильный треугольник со стороной 1 расположен вне правильного шестиугольника со стороной 3. Две вершины треугольника лежат на стороне шестиугольника. Треугольник начинает двигаться так, что две его вершины всё время остаются на контуре шестиугольника. Докажите, что центр треугольника описывает при этом некоторый 12-угольник.

Задача для размышления. Какова при этом траектория третьей вершины треугольника?

Движущиеся дуги окружностей

Снова рассмотрим фигуры, движущиеся на плоскости. Но теперь двигаться будут дуги окружностей.

1. Дан квадрат со стороной 4 м. Полуокружность радиуса 1 м находится вне квадрата и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре квадрата (рис. 10). Найдите площадь фигуры, заметаемой этой полуокружностью .

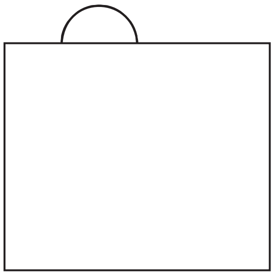


Рис. 10

Здесь интересно то, что когда концы полуокружности находятся на двух смежных сторонах квадрата, полуокружность проходит через вершину квадрата. Можно сказать, что полуокружность перетекает с одной стороны квадрата на другую сторону через одну точку – через его вершину. При движении по каждой стороне квадрата полуокружность заметает криволинейную "трапецию", в которой меньшее основание равно 2, большее основание совпадает со стороной квадрата, боковые стороны – это четверти окружности, высота трапеции равна 1. В итоге полуокружность заметает фигуру, площадь которой равна $8 + 2\pi$.

Рассмотрите такие вариации предыдущей задачи:

2. Дан правильный треугольник со стороной 4 м. Дуга окружности в 240° радиуса 1 находится вне треугольника и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре треугольника. Найдите площадь фигуры, заметаемой этой дугой.

3. Дан правильный шестиугольник со стороной 4 м. Дуга окружности в 120° радиуса 1 находится вне шестиугольника и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре шестиугольника. Найдите площадь фигуры, заметаемой этой дугой.

4. Дан правильный n-угольник со стороной 4 м. Дуга окружности в $(720/n)^\circ$ радиуса 1 находится вне n-угольника и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре n-угольника. Найдите площадь фигуры, заметаемой этой дугой.

5. Даны выпуклый четырехугольник с очень длинными сторонами и диагоналями и полуокружность, радиус которой много меньше длин сторон и диагоналей четырехугольника, так что концы полуокружности не могут находиться на противоположных сторонах четырехугольника. Полуокружность находится вне четырехугольника и перемещается по плоскости так, что ее концы все время остаются на контуре четырехугольника. При этом полуокружность и внутренность четырехугольника не пересекаются. Докажите, что данный четырехугольник является прямоугольником.

Сформулируйте соответствующие утверждения для треугольника, шестиугольника, n-угольника и докажите их.

Задачи про колесо и шар

Чтоб не было следов, повсюду подмели.
Ругайте же меня последними словами,
Мой финиш – горизонт, а лента – край Земли,
Кто за меня? – Мы выиграем с вами!
В. Высоцкий

1. Рассмотрим в плоскости круг, который катится по прямой. На пути ему встречается “кочка” в форме правильного треугольника со стороной a. При каком радиусе длина следа от круга на этой кочке равна нулю?

Ответ: $R \geqslant a\sqrt{3}$. Рассмотрим окружность наибольшего радиуса, которая касается стороны этого треугольника в его верхней точке и касается, разумеется, данной прямой (Рис.11). Нетрудно найти радиус этой окружности $R = a\sqrt{3}$. Уже при этом радиусе длина следа от круга на кочке равна нулю. Круг будет поворачиваться вокруг вершины треугольника, оставляя на нем след нулевой длины. Круг с меньшим радиусом будет катиться по треугольнику, и длина следа будет ненулевой.

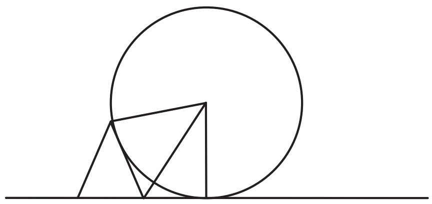


Рис. 11

2. К горизонтальной плоскости под углом α проведена наклонная прямая. Шар радиуса R катается по плоскости, постоянно касаясь этой наклонной. Найдите длину следа от этого шара на этой наклонной.

Предлагаем вам самостоятельно получить такой ответ: $2R \cdot ctg\alpha$.

Указание. Когда шар находится *под* наклонной, точка касания удалена от основания наклонной на наибольшее возможное расстояние. Оно равно $R \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$.

Когда же шар находится над наклонной, это расстояние оказывается наименьшим из возможных и равно $R \cdot tg\frac{\alpha}{2}$. Разность расстояний дает ответ. При решении этой задачи полезно рассмотреть бесконечный цилиндр радиуса R, осью которого является данная наклонная. Тогда центр шара движется по поверхности этого цилиндра в плоскости, параллельной данной.

Естественно перейти к обобщению первой задачи на случай пространства.

3. Рассмотрим на горизонтальной плоскости правильную треугольную пирамиду, все ребра которой имеют длину a. Пусть некоторый шар катится по плоскости и сталкивается с пирамидой. На пирамиде остается след – одна единственная точка. Затем по плоскости катится другой шар и от него остается новый след – другая точка и т.д.

При каком условии след от всех этих шаров будет один и тот же – вершина этой пирамиды?

Ответ: $R \geqslant \frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$. В случае равенства получается шар с наименьшим радиусом, который касается бокового ребра пирамиды в ее вершине.

P.S. Возвращаясь к началу статьи, признаюсь теперь, что никаких труб летом на огороде я не носил. Но, согласитесь, это вполне могло случиться. Мне на простом примере хотелось показать, как могут возникать математические задачи.

Литература

1. Ивлев Б. М., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Шварцбурд С. И. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа. М., Просвещение, 1990.

2. К. Осипенко, А. Спивак, В. Тихомиров. Бревно в шалаше. Квант, №2, 2002, с.2-6.

Дворянинов Сергей Владимирович,
к.ф.-м.н., доцент Самарского
государственного университета.

dvoryan@ssu.samar.ru

Два подхода в обучении школьников и студентов решению исследовательских задач по математике

П. Самовол, М. Аппельбаум

Авторы вводят понятие "школьной исследовательскаой задачи" и анализируют некоторые возможные подходы к решению задач этого типа. В качестве примеров рассматриваются задачи по интересной и мало отраженной в школьных и студенческих курсах теме "функциональные уравнения и неравенства".

Великое научное открытие отличается от серьезной
школьной исследовательской задачи только тем,
что на решение своей задачи ребенок может потратить
от нескольких часов до нескольких дней, а на научное
открытие иногда требуется вся жизнь.
А. Н. Колмогоров

Большинство задач, которые встречаются в школьном учебнике начинаются словами: упростить... , вычислить... , доказать... , найти то-то и то-то... .

Однако, в реальной жизни математик-исследователь чаще всего имеет дело с задачами иного типа. В научной работе в первую очередь требуется не упростить или вычислить что-либо, а выяснить: существует ли вообще объект с данными свойствами? Верно ли в принципе данное утверждение?

Задания такого типа по обыкновению называются исследовательскими.

I. Школьные исследовательские задачи

Под "школьными исследовательскими задачами" мы будем понимать субъективно трудные теоремы или математические факты, доказательство которых или о существовании которых данному школьнику изначально неизвестно.

Это такие задачи, при решении которых ученик сталкивается с необходимостью исследовать новые для себя математические модели, конфигурации, нестандартные связи между ними, свойства фигур, а также отыскивать, устанавливать и анализировать логические схемы рассуждений. Результатом решения школьной исследовательской задачи может считаться установленный и обоснованный учащимся общий алгоритм решения целого класса подобных задач. Или эвристический прием, научная идея, которая после анализа и обобщения может быть рекомендована для использования в решении других нестандартных задач.

II. Педагогическая востребованность исследовательских задач

1. Процесс поиска решения любой исследовательской задачи практически всегда наиболее реалистично воссоздает атмосферу работы ученого вообще и ученого-математика, в частности. Следовательно, уже в школьном возрасте ребенок может получить общие представления о работе исследователя, что, очевидно, весьма существенно с профориентационной точки зрения.

2. Статистические данные свидетельствуют о том, что самые важные открытия ученые-математики совершают в возрасте 22-26 лет. Поэтому обучение ребенка в среднем школьном возрасте методам научного анализа, на наш взгляд, достаточно перспективно.

3. Обучаясь решать исследовательские задачи, школьники, кроме овладения специальными схемами правдоподобных и доказательных рассуждений, дополнительно также приобретают знания высокого уровня, умения и навыки из многих разделов математики, что само по себе очень важно.

4. Процесс поиска решения проблемной задачи чаще всего востребует соответствующее интеллектуальное напряжение школьника. При этом интеллектуальные способности учащегося получают мощный импульс развития.

"Ведь то, что вы вынуждены открыть сами, оставляет в вашем уме тропинку, которой вы сможете всегда воспользоваться, если в этом возникнет необходимость". (Г. Литенберг, "Hphorismen" [Berlin, 1902-1906]).

5.Школьные исследовательские задачи позволяют более эффективно индивидуализировать и интенсифицировать процесс интеллектуального воспитания данного школьника или студента. На материале задач данного типа можно также обучать учащегося навыкам самообразования, научного творчества и элементам работы экспериментатора-исследователя.

6. Решения исследовательских задач открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, весьма ценных для математического развития личности. Впоследствии эти навыки мыслительной деятельности могут быть легко перенесены на любой математический материал, на любую сферу научных интересов будущего специалиста.

Все вышесказанное указывает на актуальность и практические перспективы исследования заявленной проблемы.

III. Две методики обучения школьников решению исследовательских задач

1. Подход № 1

Педагог формулирует необходимые определения объекта и предлагает школьнику "поиграть" в некоторую интеллектуальную игру: посчитать то-то, проверить то-то, а нет ли какой -то закономерности у того-то и т.д. При этом учитель не сковывает его творческой инициативы, что очень существенно. Но в случае отсутствия таковой, учитель использует свой опыт и предлагает школьнику идеи для исследования. При этом новые задачи возникают как элемент или продукт произвольной интеллектуальной игры.

Понятно, что в данном подходе школьник не связан с необходимостью дать ответ на кем-то заранее поставленный вопрос. В этом плане учитель с учеником — "свободные художники": сами определяют зону поисков и удовлетворяются или нет полученными результатами. То есть, дают самооценку проделанной работе. При этом школьник, (а иногда и учитель) не знают конечный результат заранее. Конечный результат исследовательской работы школьника оценивается здесь, прежде всего, с точки зрения его научного любопытства, фантазии, и всего того, что относится к сфере интеллектуального искусства.

2. Подход № 2

Учитель ставит перед школьником конкретную задачу. Например, найти то-то и то-то, построить то-то, выяснить или установить возможность существования того-то и т.д.. Предполагается, что ученик должен провести исследование по существу поставленной проблемы и дать ответ на данный вопрос. Поскольку ребенок может и не суметь выполнить работу исследовательского рода самостоятельно, то педагог, ориентируясь на "зоны ближайшего развития" данного учащегося (Выготский), помогает школьнику. При таком подходе у педагога есть возможность практически любой школьной задаче придать исследовательский вид и характер. Для школьника понятно в этой деятельности почти все: вот есть конкретная задача. Возможно, очень трудная, на несколько логических переходов, возможно, на применение неизвестной ранее школьнику идеи и т.д. Задачу надо решить. Для этого проблема так же, как и впервом случае, разбивается на цепочку вспомогательных задач. Само разбиение носит индивидуальный характер.

При решении задачи у школьника естественным образом появляются промежуточныке результаты, которые тщательно фиксируются. Как правило, в дальнейшем эти результаты могут стать источником научного творчества школьника. Например, новая задача, новый ракурс проблемы, необычное применение известной или неизвестной ранее идеи и т.д. В данном подходе конечный результат исследовательской работы школьника оценивается, прежде всего, по полученному ответу, а так же по установленным обобщениям.

Важно подчеркнуть, что оба подхода не противоречат ни друг другу, ни самому смыслу школьной исследовательской задачи. Более того, они дополняют и обогащают опыт, как школьника, так и педагога. Причем, на разных этапах решения задачи те или иные элементы научного творчеста совпадают в обеих подходах.

К примеру, решенная Архимедом задача, приведшая к открытию выталкивающей силы или открытие Галуа может рассматриваться как классический научный пример второго подхода. "От задачи к решению". А вот эксперименты Эйлера с числами, существенно обагатившие всю математическую науку, исследования в топологии, приведщие к ряду замечательных открытий — примеры другого рода. Список примеров из истории математики, естественно, можно подолжить.

IV. Опыт

Приведем примеры двух задач на материале темы "Функциональные уравнения и неравенства". Выбор данной темы обусловлен следующими соображениями:

- Как известно, общих методов решений для различных функциональных уравнений не существует. Поэтому у педагога и школьника есть множество идей для творчества.

- Для понимания решения базисных задач достаточно владеть только общим понятием функции.

- Уровень сложности заданий легко варьировать в зависимости от возможностей учащихся.

Новые задачи, придуманные школьниками отмечены звездочкой.

V. Заключение

1. Особенности исследовательского метода в преподавании математики

Построение процесса обучения математики наподобие процесса научного исследования. Основные этапы исследовательского процесса осуществляются, разумеется, в упрощенной, доступной учащимся форме: выявление неизвестных (неясных) фактов, подлежащих исследованию (ядро проблемы); уточнение и формулировка проблемы; выдвижение гипотез; составление плана исследования; осуществление исследовательского плана, исследование неизвестных фактов и их связей с другими, проверка выдвинутых гипотез; формулировка результата; оценка значимости полученного нового знания, возможностей его применения.

2. В процессе решения одних проблем постоянно возникают новые.

В этом случае педагогу необходимо вовремя переключить внимание школьника на другие проблемы и задачи.

3. Педагогическое и научное руководство исследовательским процессом со стороны учителя

Д. Пойа различает внутренние и внешние подсказки. Первые таковы, что они как будто извлекают у учащихся их собственные мысли, вторые (более грубые) подсказки оставляют учащимся лишь выполнение технической работы, снимая потребность поиска. Естественно, что руководство поиском учащихся требует хорошей методической подготовки, разработки для каждого планируемого учебного исследования соответствующей системы вопросов и указаний (подсказок), "подталкивающих" учащихся по направлению поиска.

4. Для того чтобы учитель мог организовать процесс обучения школьников, подобно процессу исследования, создавать педагогические ситуации, стимулирующие их открытия, управлять творческим поиском учащихся, он должен иметь некоторый собственный опыт исследовательской работы, хотя бы на уровне учебных исследований, иметь на своем собственном счету немало "открытий" (пусть и маленьких открытий для себя).

5. Выражаясь словами Д. Пойа, учитель должен сам почувствовать "напряженность поиска и радость открытия", чтобы он мог вызвать их у своих учеников.

Нельзя пренебречь в обучении этими эмоциональными факторами. Учащийся, испытавший радость открытия, смело идет на поиск решения новых задач. Он уже знает, что его ожидает, что напряженность поиска сменяется радостью открытия.

Безусловно, не существует универсальных методов обучения. Однако, нетрудно заметить и оценить большое воспитательное и развивающее значение исследовательского метода.

VI. Примеры

Задача № 1 (подход №1).

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$ так, что выполняется: $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)$.

Исследование 1.1

Может ли искомая функция принимать положительные и отрицательные значения?

Исследование:

Если $x=y\in[0,1]$, то сразу получаем: $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)\Rightarrow f\left(\frac{x+x}{2}\right)\leqslant f(x)+f(x)\Leftrightarrow f(x)\leqslant f(x)+f(x)\Leftrightarrow 0\leqslant f(x)$, т.е. функция может принимать только неотрицательные значения.

Исследование 1.2

Исследовать возможное число решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $x\in[0,1]$

Обоснование:

Имеем: $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)+f(y)$. Известно, что $f(0)=f(1)=0$. Поэтому, $f\left(\frac{0+1}{2}\right)\leqslant f(0)+f(1)\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant 0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Докажем, что уравнение $f(x)=0$ имеет бесконечное число решений на отрезке $[0,1]$

Легко проверить, что если x_1 и x_2 — два корня уравнения $f(x)=0$, то $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0$. В самом деле,

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant f(x_1)+f(x_2)=0\\ f(x)\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=0.$$

Вывод: Полагая $x_1=0=const$ и $x_2\in\left\{1,\frac{1}{2},...,\frac{1}{2^k}\right\}$, при $k\to\infty$ получим бесконечное число решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[0,1]$.

Задача 1.3*

Доказать, что если искомая функция существует, $x_0=x$ — корень уравнения $f(x)=0$, принадлежащий отрезку $[0,1/2]$ и x_n — корни уравнения $f(x)=0$, определяемые по рекуррентной формуле $x_n=(1+x_{n-1})/2$, то при $n\in N$ для членов последовательности x_n выполняются условия:

$$a)1-\frac{1}{2^n}\leqslant x_n\leqslant 1-\frac{1}{2^{n+1}};\qquad b)x_{n+1}>x_n\qquad c)x_n=\frac{(2^n-1)+x}{2^n}$$

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции: При $n = 1$ получаем:

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \leqslant \frac{1+x}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} a)x_1 = \frac{1+x}{2} \in \left[1 - \frac{1}{2^1}, 1 - \frac{1}{2^2}\right] \\ b)x_1 > x_0 \\ c)x_1 = \frac{1+x}{2} = \frac{\left(2^1-1\right)+x}{2^1}. \end{cases}$$

Предположим, что для $n = k \in N$ выполняется:

$$a)1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}}; \qquad b)x_k > x_{k-1}, \qquad c)x_k = \frac{\left(2^k - 1\right) + x}{2^k}.$$

Докажем, что для $n = (k+1) \in N$ выполняется:

$$a)1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x_{k+1} \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+2}}; \qquad b)x_{k+1} > x_k, \qquad c)x_k + 1 = \frac{\left(2^{k+1} - 1\right) + x}{2^{k+1}}.$$

Доказательство:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \\ x_{k+1} = \frac{1+x_k}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant x_k + 1 \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \frac{1}{2^k}}{2} \leqslant \frac{x_k + 1}{2} \leqslant \frac{2 - \frac{1}{2^{k+1}}}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant x_{k+1} \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a)x_{k+1} \in \left[1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{k+2}}\right] \Rightarrow x_k \leqslant 1 \Rightarrow$$

$b)\; x_{k+1} = \dfrac{1 + x_k}{2} > x_k \Leftrightarrow x_k < 1$, что верно;

$$c)\; x_k = \frac{\left(2^k - 1\right) + x}{2^k} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{1 + x_k}{2} = \frac{1 + \frac{\left(2^k-1\right)+x}{2^k}}{2} = \frac{\left(2^{k+1} - 1\right) + x}{2^{k+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} = \frac{\left(2^{k+1} - 1\right) + x}{2^{k+1}}.$$

Исследование 1.4

Исследовать значения функции на ограниченность.

Доказательство:

Из доказанных утверждений в **1.3** следует, что последовательность

$$x_0 = x, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{2} = \frac{(2^n - 1) + x}{2^n} = 1 - \frac{1 - x}{2^n}$$

возрастает и ограничена сверху числом $b = 1$ и снизу числом $a = 0,5$. Таким образом, при $0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant \frac{1}{2}$ члены последовательности x_n, $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, могут принимать каждое значение из отрезка

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right) = \left[1 - \frac{1}{2^1}, 1 - \frac{1}{2^2}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2^2}, 1 - \frac{1}{2^3}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{2^3}, 1 - \frac{1}{2^4}\right] \cup ...$$

$$\cup \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \cup ...$$

Кроме этого, выполняется условие:

$$\begin{cases} ...f(x_{n+1}) = f\left(\frac{1+x_n}{2}\right) \leqslant f(1) + f(x_{n-1}) = f(x_{n-1}) = f\left(\frac{1+x_{n-2}}{2}\right) \leqslant f(x_{n-2}) \leqslant ... \\ ... \leqslant f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant A \\ a)\frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant x_n \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}}; \quad b)x_{n+1} > x_n, \quad c)x_n = 1 - \frac{1-x}{2^n}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Это значит, что если для некоторого A выполняется неравенство $f(x) \leqslant A$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, то $f(x) \leqslant A$ на отрезке [0,1].

Вывод: если искомая функция существует и для определенного значения A, $f(x) \leqslant A$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, то $f(x) \leqslant A$ на отрезке $[0, 1]$.

Исследование 1.5*

Исследовать значения данной функции при условии, что $f(x) \leqslant 2005 \cdot (1-x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство:
Пусть теперь $f(x) \leqslant 2005 \cdot (1-x)$. Докажем, что $f(x)$ тождественно равна нулю на отрезке $[0, 1]$.

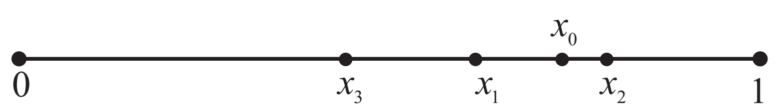
- Понятно, что $L = \lim\limits_{x\to 1} 2005 \cdot (1-x) = 0$. Это означает, что для всех $0 < \varepsilon << a_0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in (1-\delta, 1]$ выполняется: $f(x) \leqslant 2005 \cdot (1-x) < \varepsilon$. То есть, $f(x) < \varepsilon$ для всех $x \in (1-\delta, 1]$.

- Теперь используем **метод от противного.**

Предположим, что при выполнении условия $f(x) \leqslant 2005 \cdot (1-x)$ можно указать значение $x_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x_0) = a_0 > 0. \qquad (*)$$

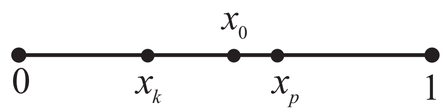
Также предположим, что x_3 and x_2 некоторые два корня уравнения $f(x) = 0$,



для которых $x_0 \in [x_3, x_2]$. Если $|x_2 - x_3| > \delta$ и также $|x_2 - x_0| < |x_3 - x_0|$, то рассмотрим $x_1 = \frac{x_2+x_3}{2}$. Из результатов доказанного пункта 2 — получаем:

$$f\left(\frac{x_3+x_2}{2}\right) = f(x_1) = 0$$

Очевидно, $|x_1 - x_0| < |x_3 - x_0|$ и $|x_2 - x_1| < |x_2 - x_3|$. То есть, с помощью конечного числа шагов мы можем указать два числа x_k and x_p таких, что $f(x) = 0$, $x_0 \in [x_k, x_p]$ и $|x_k - x_p| < \delta$.



Введем обозначения:

$$l_1 = |x_0 - x_k| < \delta, \quad l_2 = |x_p - x_0| < \delta, \quad \text{а} \quad \text{также} \quad \frac{\delta}{2} \leqslant \max[l_1, l_2] = l_0 < \delta.$$

Рассмотрим

$$a_0 = f(x_0) = f\left(\frac{(x_0 - l_0) + (x_0 + l_0)}{2}\right) \leqslant f(x_0 - l_0) + f(x_0 + l_0) =$$

$$f(x_k) + f(x_0 + l_0) = f(x_0 + l_0) = f(x_1). \qquad (**)$$

То есть, если обозначить, $(x_0 + l_0) = x_1$, то из предыдущего выражения $(**)$ получим:

$$f(x_1) > a \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{2} \leqslant l_0 = x_1 - x_0 < \delta.$$

Аналогично, через конечное число шагов (на основании аксиомы Архимеда) получаем точку x_S, такую, что

$$\begin{cases} x_S \in (1 - \delta, 1] \\ f(x_S) > a >> \varepsilon \\ f(x) < \varepsilon, \quad x \in (1 - \delta, 1] \end{cases}$$

То есть, как видим, последняя система утверждений противоречива. (Противоречие предполагаемому существованию значения $x_0 \in (0, 1)$ такого, что $f(x_0) = a_0 > 0\,(*)$).

Вывод: при данных условиях эта функция постоянна и $f(x) = 0$.

Задание 1.6

Построить пример данной функции и проверить найденные свойства.

Обоснование:

Пусть

$$\begin{cases} f(x) = 0, \ \text{x} \in \text{Q}, \text{x} \in [0,1] \\ f(x) = const = a > 0, \ \text{x} \in \text{I}, \text{x} \in [0,1] \end{cases}$$

Обозначим, $r \in Q \;\&\; i \in I$. В самом деле, наша функция определена на отрезке $[0, 1]$. Также, $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x) + f(y)$. И при этом

1) $f\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right) = f(r) = 0 \leqslant 0 = f(r_1) + f(r_2)$;

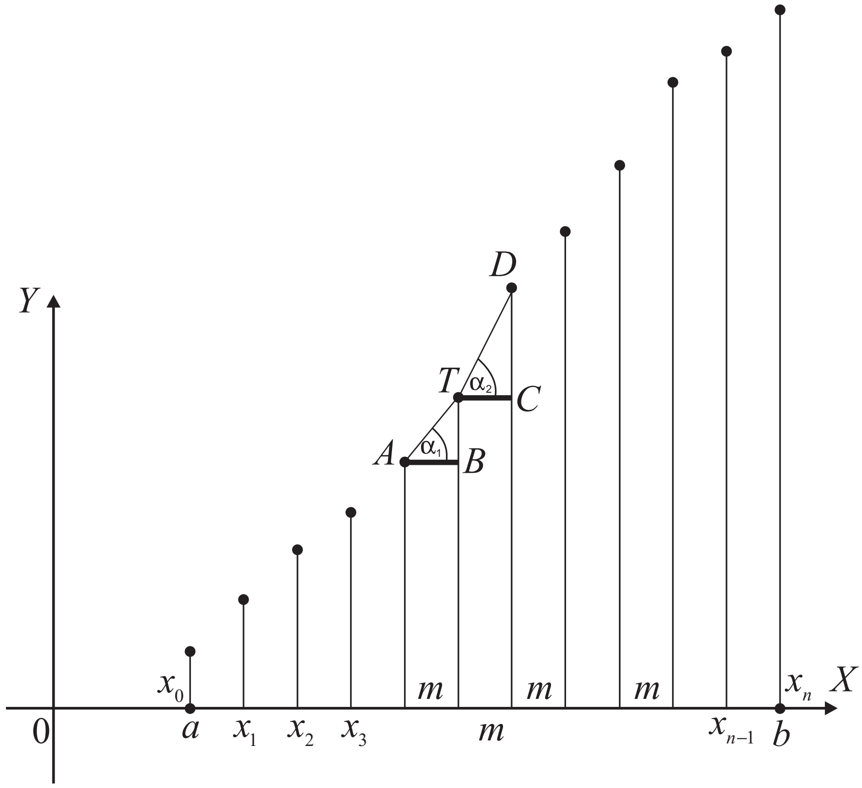
2) $f\left(\frac{i_1+r_2}{2}\right) = f(i) = a \leqslant a + 0 = f(i_1) + f(r_2)$;

3)$_1$ $f\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right) = f(i) = a \leqslant a + a = f(i_1) + f(i_2)$;

3)$_2$ $f\left(\frac{i_1+i_2}{2}\right) = f(r) = 0 \leqslant a + a = f(i_1) + f(i_2)$;

Задача решена полностью.

Задача № 2 (Олимпиада им. проф. Гросмана М. Израиль, 2004 год). (Подход № 2).



Существует ли функция f действительного переменного такая, что для любых действительных (x, y) выполняется неравенство

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y|? \qquad (*)$$

Решение.

Задание № 2.1.

Проверить, может ли данная функция быть постоянной.

Обоснование:

Если $f(x) = const = c_0$, то для $(x - y) \neq 0$

$$\frac{c_0 + c_0}{2} \geqslant c_0 + |x - y| \quad 0 \geqslant |x - y|\,. \text{ Значит,} \quad f(x) \neq const.$$

Задание № 2.2

Рассмотреть произвольный отрезок $[a, b]$, разбить его на n равных частей и проверить данную функцию на возрастание или убывание.

Обоснование:

Рассмотрим $(x, y) \in [a, b]$. Если разделить отрезок $[a, b]$ на n равных частей, то длина каждой части $m = \frac{b-a}{n}$. Тогда, для $1 \leqslant k \leqslant n \quad a = x_0, \;\; x_k = a + k \cdot m.$

Не ограничивая общности, предположим, что $f(x_0) \leqslant f(x_1)$. Докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$. В самом деле, если $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то из $(*)$ получим:

$$\frac{f(x_0)+f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_0+x_2}{2}\right)+2m, \quad \frac{f(x_0)+f(x_2)}{2} \geqslant f(x_1)+2m,$$

$$0 \geqslant \frac{f(x_0)-f(x_1)}{2}+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2} \geqslant 2m > 0. \tag{1}$$

Получили противоречие. Итак, $f(x_2) > f(x_1)$. Аналогично, для значений $\{x_1; x_2; x_3\}$ получим, что если $f(x_2) > f(x_1)$, то из $(*)$ следует: $f(x_3) > f(x_2)$. Продолжая эти рассуждения, получим: $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_n)$.

Задание № 2.3 .

Используя рис №1, оценить для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ и $\{x_k; x_{k+1}; x_{k+2}\}$ разность приращений функции.

Обоснование:

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{2}-\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{2} \geqslant 2m,\ k \geqslant 1;$$

$$\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{m}-\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{m} \geqslant 4 \Leftrightarrow\ tg\,\alpha_k - tg\,\alpha_{k-1} \geqslant 4$$

То есть,

$$+\begin{cases} tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha_0 \geqslant 4 \\ tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1 \geqslant 4 \\ tg\,\alpha_3 - tg\,\alpha_2 \geqslant 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ tg\,\alpha_{n-1} - tg\,\alpha_{n-2} \geqslant 4 \end{cases}$$

$$tg\,\alpha_{n-1} - tg\,\alpha_0 \geqslant 4\cdot(n-1) \Rightarrow$$
$$tg\,\alpha_{n-1} \geqslant tg\,\alpha_0 + 4\cdot(n-1) > 4\cdot(n-1)\,.$$

Задание № 2.4.

Используя полученный результат, оценить разность $f(b)-f(a)$.

Обоснование:

Из условия построения значений функции получаем:

$$+\begin{cases} f(x_1) = f(x_0) + m\cdot tg\,\alpha_0 \\ f(x_2) = f(x_1) + m\cdot tg\,\alpha_1 \\ f(x_3) = f(x_2) + m\cdot tg\,\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) = f(x_{n-1}) + m\cdot tg\,\alpha_{n-1} \end{cases}$$

$$f(b) = f(x_n) = f(x_0) + m\cdot(tg\,\alpha_0 + tg\,\alpha_1 + tg\,\alpha_2 + \ldots + tg\,\alpha_{n-1}) \geqslant$$

$$\geqslant f(a) + m\cdot(4 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3 + \ldots + 4\cdot(n-1)) \geqslant$$

$$\geqslant f(a) + 4 \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty.$$

Задание № 2.5.

Используя полученное условие $f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty$, сформулировать ответ.

Ответ: Из $f(b) \geqslant f(a) + 2 \cdot (b-a) \cdot (n-1) \to \infty$ следует, что $f(x_n) = f(b)$ не определено. Что противоречит условию. Значит, искомая функция f не существует.

Замечание.

Если при увеличении числа n мы получим, что $f(x_0) \geqslant f(x_1)$, то для этого случая рассмотрим симметричный отрезок $[2a-b, a]$. Аналогично предыдущему, разделим его на n равных частей и докажем, что при этом $f(t_1) > f(x_0)$:

$$t_k - t_{k-1} = \frac{b-a}{n} = m;$$

$$f(x_0) < f(t_1) < f(t_2) < ... < f(t_n);$$

$$0 < 90^\circ - \beta_{n-1} < \varepsilon \to 0.$$

То есть, функция не определена для $f(t_n) = f(2a-b)$. Получили противоречие с условием.

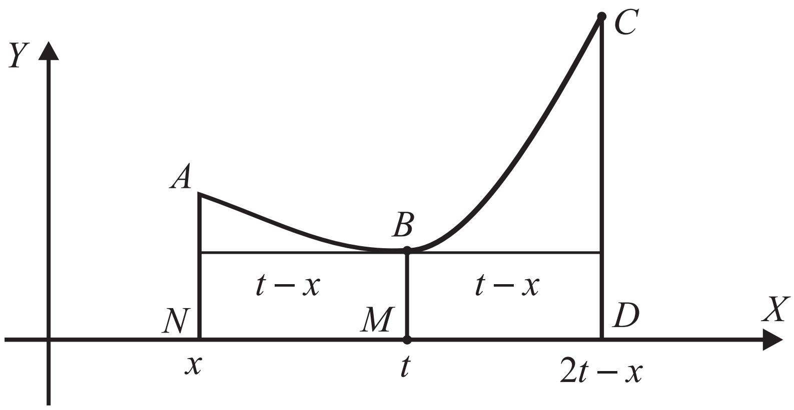
Новая версия условия задачи,

Задача 2.b*.

Существует ли дифференцирируемая функция f действительного переменного, если известно, что функция определена для всех действительных чисел, и для любых двух действительных x, y выполняется неравенство:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|? \tag{1}$$

Решение.



1. Если $f(x) = const = c_0$, то для $(x - y) \neq 0$ получаем $\frac{c_0+c_0}{2} \geqslant c_0 + |x - y|$. То есть, $0 \geqslant |x - y|$. Противоречие для $x \neq y$. Значит, $f(x) \neq const$.

2. Определим $t = \frac{x+y}{2}$, $2t - x = y > x$. Очевидно, для точек $N(x, 0)$ и $D(y, 0)$ имеем: $MN = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} = t - x$, $MD = y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2} = t - x$.

3. Согласно неравенству (1) для $y > x$ получим $\frac{f(x)+f(2t-x)}{2} \geqslant f(t) + 2 \cdot (t - x)$. Значит,

$$\frac{f(2t - x) - f(t)}{t - x} - \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geqslant 4. \quad (2)$$

Если устремить теперь $0 < t-x = \Delta x \to 0$, то $2t-x = t+\Delta x$; $x = t-(t-x) = t-\Delta x$, и получим: $L = \frac{f(t+\Delta x)-f(t)}{\Delta x} - \frac{f(t)-f(t-\Delta x)}{\Delta x} \geqslant 4$, или, согласно условию существованию производной, например, в точке t:

$$4 \leqslant \lim_{\Delta x \to 0} L = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t + \Delta x) - f(t)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t) - f(t - \Delta x)}{\Delta x} = f'(t) - f'(t) = 0.$$

Таким образом, получили противоречие. Вывод: данной функции не существует.

Задача № 2.с*

Существует ли функция f действительного переменного такая, что для любых действительных (x, y) выполняется неравенство

$$f(y) \geqslant f\left(\frac{x + y}{2}\right) + |x - y|? \quad (1)$$

Решение.

Рассмотрим $y > 0$, x = 3y. Получим из условия $\forall y > 0$: $f(y) \geqslant f(2y) + 2y$. А тогда, $\forall y > 0$ выполняется:

$$f\left(\frac{y}{2}\right) \geqslant f(y) + y. \quad (2)$$

Из (1) при условии $y > 0, x = 0$ находим:

$$f(y) \geqslant f\left(\frac{y}{2}\right) + y. \quad (3)$$

Сложим (2) и 3 почленно для $y > 0$ и получим: $0 \geqslant 2y$. Пртиворечие, которое доказывает требуемое утвержение.

В заключение приведем пример интересной задачи с решением. Мы надеемся, что педагог сможет сравнить приведенный способ решения со своим и использовать оба решения в работе с учащимися.

Задача № 3 (Олимпиада Гросмана 2002 год).

а) Существуют ли функции $g : \Re \to \Re \; \& \; f : \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x : \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^3? \end{cases}$$

б) Существуют ли функции $g : \Re \to \Re \; \& \; f : \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^4? \end{cases}$$

Решение.

а) Предположим, что существуют функции $g: \Re \to \Re$ & $f: \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; & (1) \\ g(f(x)) = x^3. & (2) \end{cases}$$

Из (1), (2) получаем:

$$g(f(x)) = x^3 \Rightarrow f\left(x^3\right) = f(g(f(x))) \Rightarrow f\left(x^3\right) = [f(x)]^2. \tag{3}$$

То есть,

$$[f(x)]^2 = f(g(f(x))) = f(x^3) \Rightarrow [f(x)]^2 = f(x^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ \ [f(0)]^2 = f(0) \Rightarrow f(0) \in \{0,1\}; \\ 2)\ \ [f(1)]^2 = f(1) \Rightarrow f(1) \in \{0,1\}; \\ 3)\ \ [f(-1)]^2 = f(-1) \Rightarrow f(-1) \in \{0,1\}. \end{array} \right.$$

Тогда три значения $a_1 = f(0)$; $a_2 = f(-1)$; $a_3 = f(1)$ принадлежат духэлементному множеству $\{0;1\}$. Поэтому на основании принципа Дирихле, из трёх чисел $\{f(0);\ f(-1);\ f(1)\}$, какие-то два совпадают. С другой стороны, из условия следует, что

$$\left[\begin{array}{l} 4)\ g(f(0)) = 0; \\ 5)\ g(f(-1)) = -1; \\ 6)\ g(f(1)) = 1. \end{array} \right.$$

Это значит, что числа $f(0); f(-1); f(1)$ должны быть все разные. Получили противоречие.

Ответ: Не существуют функции $g: \Re \to \Re$ & $f: \Re \to \Re$, такие, что

$$\forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; \\ g(f(x)) = x^3. \end{cases}$$

$$b)\ \text{Пусть} \quad \forall x: \quad \begin{cases} f(g(x)) = x^2; & (7) \\ g(f(x)) = x^4. & (8) \end{cases}$$

Тогда требуемые функции существуют. Например,

$$\begin{cases} g(x) = 0, x = 0; \\ g(x) = e^{\ln^2|x|}, \ \ |x| \geqslant 1; \\ g(x) = e^{-\ln^2|x|}, \ \ |x| < 1, \& x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 0, x = 0; \\ f(x) = e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}, \ |x| \geqslant 1; \\ f(x) = e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}, \ |x| < 1, \& x \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство:

$$\begin{cases} f(g(0)) = f(0) = 0^2 = 0; \\ f(g(x)) = e^{2\cdot\sqrt{\ln\left|e^{\ln^2|x|}\right|}} = e^{2\cdot\sqrt{\ln e^{\ln^2|x|}}} = e^{2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}} = e^{2\cdot|\ln|x||} = e^{2\cdot\ln x} = x^2, \ |x| \geqslant 1; \\ f(g(x)) = e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln\left|e^{\ln^2|x|}\right|\right|}} = e^{-2\cdot\sqrt{\left|\ln e^{\ln^2|x|}\right|}} = e^{-2\cdot\sqrt{\ln^2|x|}} = e^{-2\cdot|\ln|x||} = e^{2\cdot\ln|x|} = x^2, \\ \ |x| < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) = 0, x = 0; \\ g(f(x)) = e^{\ln^2\left|e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}\right|} = e^{\ln^2 e^{2\cdot\sqrt{\ln|x|}}} = e^{\left[2\cdot\sqrt{\ln|x|}\right]^2} = e^{4\cdot\ln|x|} = x^4, \ |x| \geqslant 1; \\ g(f(x)) = e^{-\ln^2\left|e^{-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}}\right|} = e^{-\left[-2\cdot\sqrt{|\ln|x||}\right]^2} = e^{-4\cdot|\ln|x||} = e^{4\cdot\ln|x|} = x^4, \ |x| < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

Авторы выражают благодарность профессору Г. Белитскому, (Ben-Gurion University of Negev, Beer- Sheva, Israel) за участие в обсуждении примеров данной статьи.

Литература

1. Л. С. Выготский, “Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте”, М., издательство АПН РСФСР, 1956 г.

2. Л. С. Выготский, “Избранные психологические исследования”, М., Издательство АПН РСФСР, 1956 год.

3. В. П. Эфроимсон, “Божий дар или естественный феномен”, издательство “Знание”, 1992. Журнал “Народное образование”, №№1-2, 1992.

4. В. П. Эфроимсон, “Предпосылки гениальности (биосоциальные факторы повышенной умственной активности)”, М., Русский мир, 1998, 542 с.

5. “Функциональные уравнения”, журнал “Квант”, №7, 1985; №9, 1984; №6, 1977; №1, 1975.

6. Skemp, R., “The Psychology of Learning Mathematics”, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, (1987).

7. THEODORE EISENBERG “On Building Self-Confidence in Mathematics”, “TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS”, vol. 10, No. 4, 1991, p.154, Ben-Gurion University, Beer Sheva, Israel.

8. Krutetskii, V. A., “The Psychology of the Mathematical Abilities of the School Children”, Chicago, University of Chicago Press, (1976).

9. Cholodnja, M. A., “Psychology of intelligence: paradoxes of research”, M., 1997 (In Russian).

10. Applebaum, M. V., Samovol, P. I., “Teaching Mathematics Using the Idea of “Research problems”, 2^{nd} International Conference on the Teaching Mathematics (at the undergraduate level), University of Crete, Hersonissos, Crete, Greece (2002).

Dr. Peter Samovol,
Ben-Gurion University of Negev,
Beer-Sheva, Israel;
Kaye Academic College of Education,
Beer-Sheva, Israel.

Pet12@012.net.il

Dr. Mark Applebaum
Kaye Academic College of Education,
Beer-Sheva, Israel.

Amark@012.net.il

К проблеме экстремумов функций многих переменных

В. В. Ивлев

При исследовании экстремумов функций многих переменных достаточные условия существования экстремума определяются критерием Сильвестра. В работе предлагается так называемый "метод сверток", не требующий прямого вычисления определителей высших порядков, кроме второго. Метод пригоден и для непосредственного вычисления определителей высших порядков, при этом нет необходимости разложения определителей по элементам строк или столбцов и применения стандартных приемов упрощения и понижения порядка определителей.

1. Общая теория

1.1. Понятие экстремума функции. Необходимые условия

Пусть функция $f(x) = f(x_1,...,x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Определение 1. Функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ **локальный максимум (минимум)**, если существует окрестность точки $x^{(0)}$ такая, что для всех точек этой окрестности имеет место

$$f(x^{(0)}) \geq f(x) \quad (f(x^{(0)}) \leq f(x)). \tag{1.1}$$

Точки локального максимума (минимума) называются точками **экстремума** функции $f(x)$. Часто, в случае строгих неравенств (1.1), говорят о **строгом экстремуме**. Обычно термины **локальный** и **строгий** опускаются, если понятно о чем идет речь.

Исследование функции $f(x)$ на экстремум обычно проводится в два этапа. На первом этапе с помощью **необходимых условий** определяются **стационарные точки**, т.е. точки возможного экстремума. Далее, каждую такую точку $x^{(0)}$ исследуют на наличие в ней экстремума функции $f(x)$, при этом используются достаточные условия. В случае выполнения **достаточных условий** определяется вид экстремума — локальный максимум или локальный минимум.

Установим необходимые условия существования локального экстремума функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$.

Теорема 1. (необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, дифференцируема в этой точке и имеет в этой точке локальный экстремум. Тогда все частные производные первого порядка функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ обращаются в нуль, т.е. имеет место

$$f'_{x_1}(x^{(0)}) = f'_{x_2}(x^{(0)}) = ... = f'_{x_n}(x^{(0)}) = 0. \tag{1.2}$$

□ [1] Докажем первое равенство $f'_{x_1}(x^{(0)}) = 0$. Зафиксируем переменные $x_2,\ldots,x_n$, положив их равными:

$$x_2 = x_2^{(0)},...,x_n = x_n^{(0)}.$$

Получим функцию одной переменной $f(x_1,x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$.

Так как функция $f(x)$ имеет в точке экстремум, то функция $f(x_1,x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ одной переменной x_1 также имеет экстремум в точке $x_1^{(0)}$ и, следовательно, обычная производная этой функции в точке $x^{(0)}$ равна нулю. Эта производная, по определению, равна частной производной по x_1 функции $f(x)$. Итак:

$$\left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1=x_1^{(0)}} = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = 0.$$

Остальные равенства (1.2) доказываются аналогично. ■

Условия (1.2) могут быть предоставлены в двух аналогичных формах:

$$df(x^{(0)}) = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0 \tag{1.3}$$

Подчеркнем, что условия (1.2), (1.3) являются лишь необходимыми для существования экстремума.

Например, для функции $f(x,y) = x^3y$ обе ее частные производные в точке (0,0) обращаются в нуль, но экстремума в этой точке нет, так как в любой окрестности этой точки существуют значения функции разных знаков, т.е. и большие и меньшие, чем $f(0,0)$=0.

Наконец, из того, что grad $f(x^{(0)}) = 0$ следует, что производная функции по любому направлению $\vec{\ell}$ в точке $x^{(0)}$ также равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial \ell} = (\operatorname{grad} f(x^{(0)}),\ \vec{\ell_0}) = 0,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — символ скалярного произведения, $\vec{\ell_0}$ — единичный вектор направления $\vec{\ell}$.

Координаты стационарных точек $x^{(0)}$ определяются из условий (1.2) как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

[1]Начало доказательства теоремы или решения примера будем обозначать символом □, соответственно конец доказательства или примера — ■.

1.2. Достаточные условия экстремума

1.2.1. Случай функций двух переменных. Существование экстремума функции $f(x)$ в стационарной точке $x^{(0)}$ обеспечивается выполнением достаточных условий. При этом важную роль будет играть второй дифференциал функции в стационарной точке. В случае функций двух переменных достаточные условия формулируются довольно просто.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и дважды дифференцируема в этой точке. Рассмотрим приращение функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0):

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Знакопостоянство приращения $\Delta f(x_0,y_0)$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) обеспечивает существование экстремума функции в этой точке. Так как точка (x_0,y_0) — стационарная и $f'_x = f'_y = 0$ в этой точке, то формула Тейлора для приращения $\Delta f(x,y)$ принимает вид:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}d^2 f(x^0, y^0) + o(\rho^2), \tag{1.5}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho^2)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем ρ^2 при $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Из (1.5) следует, что знак $\Delta f(x_0,y_0)$ в некоторой окрестности определяется знаком $d^2 f(x_0,y_0)$. Раскроем второй дифференциал, предварительно обозначив

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) = a_{11},\ f''_{y^2}(x_0, y_0) = a_{22},\ f''_{xy}(x_0, y_0) = a_{12} = a_{21}.$$

С учетом этих обозначений имеем:

$$d^2 f(x_0, y_0) = a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2.$$

Пусть $a_{11} \neq 0$. Выделив полный квадрат в этом выражении и вынеся за скобки сомножитель a_{11}^{-1}, получим:

$$d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{a_{11}}[(a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y)^2 + \mathrm{D}\Delta y^2], \tag{1.6}$$

где $\mathrm{D}=a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Из структуры выражения (1.6) и дискриминанта D следует, что если $\mathrm{D} > 0$, то знак $d^2 f(x_0,y_0)$ постоянен в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и экстремум функции в точке существует. В частности:

1) при $a_{11} > 0$ и $\mathrm{D} > 0$ в точке $(x_0,y_0))$ имеет место локальный минимум;

2) при $a_{11} < 0$ и $\mathrm{D} > 0$ в точке $(x_0, y_0))$ имеет место локальный максимум.

Пусть теперь $\mathrm{D} < 0$ и $a_{11} > 0$. В силу произвольности Δx и Δy возможны случаи:

1) при $a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y = 0$, $d^2 f(x_0, y_0) < 0$;

2) при $\Delta y = 0$, $d^2 f(x_0, y_0) > 0$.

Отсюда следует, что знак второго дифференциала зависит от направления и может меняться на противоположный. Экстремума в точке (x_0,y_0) нет. Случай D=0 требует отдельного исследования, и чтобы не утомлять читателя, опустим его.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 2(достаточные условия экстремума)[2]. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности стационарной точки (x_0,y_0) и дважды дифференцируема в этой точке.

Тогда при

1) $\mathrm{D} > 0$ в точке $(x_0,\ y_0)$ существует локальный экстремум, а именно: максимум, если $a_{11} < 0$, и минимум, если $a_{11} > 0$;

2) при $\mathrm{D} < 0$ в точке $(x_0,\ y_0)$ экстремума нет;

3) при $\mathrm{D} = 0$, необходимо дальнейшее исследование.

1.2.2. Общий случай. Предварительно приведем некоторые сведения о квадратичных формах.

Определение 2. Функция n переменных вида:

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, i, j = \overline{1, n} \tag{1.7}$$

называется **квадратичной формой** от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Числа a_{ij} — коэффициенты квадратичной формы (1.7).

Квадратичной форме (1.7) соответствует матрица:

$$A = \|a_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{array} \right\| \tag{1.8}$$

Если все коэффициенты (1.8) удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = \overline{1, n}$, то матрица (1.8) называется **симметрической**. Это свойство выделяется нами из всех и понадобится в дальнейшем.

Определители матрицы (1.8)

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Называются ее **главными** (иногда **угловыми**) минорами.

В зависимости от знаков значений, принимаемых квадратичной формой (1.7) на некотором множестве $\mathrm{X} \in \mathrm{R}^n$ принята следующая классификация.

[2]Нумерация определений и теорем — сквозная; формул — по разделам.

Квадратичная форма (1.7) называется: **положительно определенной**, если для любых значений x ∈X, не равных нулю (т.е. $x \neq 0 = (0, 0, \dots, 0)$), она принимает положительные значения; **отрицательно определенной**, если для любых значений x ∈X, не равных нулю , она принимает отрицательные значения; **знакопеременной** (**неопределенной**), если она принимает значения различных знаков; **полуопределенной** (**квазиопределенной**), если она принимает либо неотрицательные, либо неположительные значения, причем нулевые значения принимаются и в точках, отличных от $x = (x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются **знакоопределенными**, которые и нужны нам будут впредь.

С учетом изложенного рассмотрим достаточные условия существования экстремума функции $f(x)$ в стационарной точке $x^{(0)}$. Второй дифференциал функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ представляет собой симметрическую квадратичную форму относительно переменных dx_i:

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j \tag{1.9}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Оказывается, что существование экстремума функции в стационарной точке тесно связано с существованием положительно или отрицательно определенной квадратичной формы второго дифференциала (1.9). Приведем в виде теорем **критерий Сильвестра**, дающий ответ на данный вопрос. В связи с громоздкостью известных доказательств и тем, что это не является целью работы, приведем лишь формулировки упомянутых теорем.

Теорема 3. Для того, чтобы квадратичная форма (1.7) была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы (1.8) были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \tag{1.10}$$

Теорема 4. Для того, чтобы квадратичная форма (1.7) была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, причем $a_{11} < 0$, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке $x^{(0)}$. Тогда, если второй дифференциал (1.9) является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ локальный минимум (максимум).

В случае нестрогих неравенств в (1.10), (1.11) требуется привлечение дифференциалов высших порядков.

На этом мы ограничимся изложением общей теории и перейдем к методу, позволяющему эффективно использовать критерий Сильвестра.

Применение неравенств Сильвестра (1.10) и (1.11) требует вычисления определителей высших порядков, что само по себе является трудоемкой процедурой.

С другой стороны критерий Сильвестра использует не сами численные значения главных миноров, а лишь их знаки. Этот факт, а также симметричность квадратичной формы второго дифференциала позволяет применить изложенную ниже, достаточно компактную процедуру определения экстремума функций многих переменных. Предлагаемый метод применим и непосредственно для вычисления определителей высших порядков.

2. Метод свертки для определителей высших порядков

Предварительно дадим ряд определений.

Определение 3. Пусть дан определитель второго порядка

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

Число $\overline{a_{11}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, называется **сверткой определителя** (2.1). Ясно, что $\overline{a_{11}}$ есть само значение определителя (2.1).

Определение 4. Пусть даны две строки чисел, каждая длины n:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{matrix} \tag{2.2}$$

Сверткой двух строк (2.2) называется строка чисел $\overline{a_{11}} \quad \overline{a_{12}} \quad \dots \quad \overline{a_{1(n-1)}}$ длины $(n-1)$, определяемая по формулам:

$$\overline{a_{11}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \overline{a_{12}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \overline{a_{1(n-1)}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

Более наглядно процесс свертки двух строк, каждая длины n, в одну строку длины $(n-1)$ можно представить в виде прямоугольников,

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & . & . & . \; a_{1n} \\
& \overline{a_{11}} & & \overline{a_{12}} & & . & . & \overline{a_{1(n-1)}} \\
a_{12} & & a_{22} & & a_{23} & . & . & . \; \bar{a}_{2n}
\end{array}$$

причем в каждом прямоугольнике “работают” лишь крайние столбцы: первый — во всех прямоугольниках, и второй — переменный.

Определение 5. Пусть дан определитель порядка n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

Сверткой определителя (2.4) называется определитель $(n-1)$ порядка, первая строка которого есть свертка первых двух строк (2.4); вторая строка – свертка первой и третьей строк (2.4) и т.д; наконец, последняя строка — свертка первой и последней строк (2.4), т.е.

$$\overline{\Delta_{n-1}} = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \dots & \overline{a_{1(n-1)}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \dots & \overline{a_{2(n-1)}} \\ . & . & \dots & . \\ \overline{a_{(n-1)1}} & \overline{a_{(n-1)2}} & \dots & \overline{a_{(n-1)(n-1)}} \end{vmatrix} \tag{2.5}$$

Определение 6. Сверткой второго порядка от определителя (2.4) называется свертка от свертки Δ_{n-1} вида:

$$\Delta_{n-2} = \begin{vmatrix} \overline{\overline{a_{11}}} & \overline{\overline{a_{12}}} & \dots & \overline{\overline{a_{1(n-2)}}} \\ \overline{\overline{a_{21}}} & \overline{\overline{a_{22}}} & \dots & \overline{\overline{a_{2(n-2)}}} \\ . & . & \dots & . \\ \overline{\overline{a_{(n-2)1}}} & \overline{\overline{a_{(n-2)2}}} & \dots & \overline{\overline{a_{(n-2)(n-2)}}} \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

Очевидно, что свертка $(n-1)$ порядка, т.е. Δ_1 есть число.

Выясним теперь, какова связь сверток (2.5), (2.6) и т.д. с исходным определителем (2.4).

Будем считать, что элемент a_{11} в (2.4) отличен от нуля. Этого всегда можно добиться, прибавив к первой строке другую с отличным от нуля первым элементом.

Умножим элементы первой строки (2.4) на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем их из элементов второй строки; умножим первую строку на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычтем из третьей строки и т.д. Получим:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - a_{1n}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ . & . & \dots & . \\ 0 & a_{n1} - a_{12}\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \dots & a_{nn} - a_{1n}\frac{a_{n1}}{a_{11}} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Вынесем в (2.7) за знак определителя сомножитель a_{11}^{-1} во всех строках, начиная со второй. В итоге при $n \geqslant 2$ имеем:

$$\Delta_n = \frac{1}{a_{11}^{n-2}}\overline{\Delta_{n-1}} \tag{2.8}$$

Применим эти же операции к $\overline{\Delta_{n-1}}$. Тогда

$$\overline{\Delta_{n-1}} = \frac{1}{\overline{a_{11}^{n-3}}}\overline{\Delta_{n-2}}$$

Подставляя $\overline{\Delta_{n-1}}$ в (2.8), получим:

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-2}}{a_{11}^{n-2}\overline{a_{11}^{n-3}}} \tag{2.9}$$

Для упрощения записи введем обозначения

$a_{11} = a_1$ — левый верхний элемент Δ_n;

$\overline{a_{11}} = a_2$ — левый верхний элемент $\overline{\Delta_{n-1}}$;

$\overline{\overline{a_{11}}} = a_3$ — левый верхний элемент $\overline{\overline{\Delta_{n-2}}}$;

. . . . . .

$\overline{\overline{a_{11}}}^{\}n-1} = a_n = \Delta_1$.

Итак, $a_1,\dots,\ a_n$ — первые верхние элементы главных диагоналей сверток $\Delta_n = \overline{\Delta_n},\ \overline{\Delta_{n-1}},\dots,\overline{\Delta_1}$.

Условно принято, что $\overline{\Delta_n}$ — свертка нулевого порядка для Δ_n и равная Δ_n.

Теперь рекуррентно повторяя операции (2.8) — (2.9) (n−1) раз, получим:

$$\Delta_n = \frac{a_n}{a_1^{n-2}\cdot a_2^{n-3}\cdots a_{n-2}^1\cdot a_{n-1}^0} = \frac{a_n}{a_1^{(n-2)}\cdot a_2^{(n-3)}\cdots a_{n-2}}. \tag{2.10}$$

Формула (2.10) является основной для вычисления определителей высших порядков. Подчеркнем, что все элементы $a_1,\dots,a_n$ отличны от нуля. Если же на каком-то шаге a_k=0, то к первой строке прибавляется строка с ненулевым первым элементом.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

□ Строим последовательность сверток:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \to \overline{\Delta_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \to \overline{\Delta_2} = \begin{vmatrix} -9 & -6 \\ -7 & -22 \end{vmatrix} \to 198 - 42 = 156$$

Далее a_1=1, a_2=3, a_4=156. Используя формулу (2.10) окончательно получим:

$$\Delta_4 = \frac{156}{1^2 \cdot 3} = 52. \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

□ Упростим вычисления, используя непостредственно (2.8) и (2.9):

$$\overline{\Delta_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 1 & 21 & 10 \\ -1 & 21 & 20 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} 96 & -48 \\ 72 & -72 \end{vmatrix} = 864. \blacksquare$$

Отметим важное свойство симметрических определителей: свертка от симметрического определителя также является симметрическим определителем. Действительно, пусть $a_{ij} = a_{ji}$.Тогда произвольный элемент свертки $\overline{a_{ij}}$ равен:

$$\overline{a_{ij}} = a_{11}a_{ij} - a_{1j}a_{i1}.$$

Для элемента $\overline{a_{ji}}$ соответственно имеем:

$$\overline{a_{ji}} = a_{11}a_{ji} - a_{1i}a_{j1}.$$

Так как $a_{1i} = a_{i1}$, $a_{j1} = a_{1j}$, то отсюда и следует, что

$$\overline{a_{ij}} = \overline{a_{ji}}.$$

Это обстоятельство позволяет почти вдвое сократить объем вычислений, рассматривая лишь элементы сверток, стоящие на главной диагонали и выше ее. Нижняя же часть свертки заполняется автоматически.

3. Построение достаточных условий экстремума методом сверток

Теперь мы подготовлены к исследованию достаточных условий существования экстремума, в стационарной точке методом сверток. Прежде всего, отметим, что если в точке $x^{(0)}$ существует экстремум функции $f(x)$, x=(x_1,...,x_n), то это относится и к любому сужению функции на меньшее число переменных $n-k$, где k — число фиксированных переменных в точке $x^{(0)}$.

Итак, рассмотрим определитель, составленный из вторых частных производных функции $f(x)$ в стационарной точке $x^{(0)}$, так называемый определитель Гессе.

$$\Delta_n = \overline{\Delta_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Диагональные элементы Δ_n равны:

$$a_{ii} = \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обратимся к первому элементу a_{11}. Каков его смысл с точки зрения экстремума функции $f(x)$? Зафиксируем переменные $x_2 = x_2^{(0)}, ..., x_n = x_n^{(0)}$. Получим функцию одной переменной $f(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$. Но тогда знак коэффициента a_{11} определяет тип экстремума:

при $a_{11} > 0$ — $\min f(x)$ в точке $\left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$;

при $a_{11} < 0$ — $\max f(x)$ в точке $\left(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$.

Аналогично знак a_{22} определяет тип экстремума функции $f\left(x_1^{(0)}, x^2, ..., x_n^{(0)}\right)$ и т.д. Отсюда следует первый вывод: если в точке $x^{(0)}$ существует экстремум функции n переменных $f(x_1,\ldots,x_n)$, то этот же тип экстремума относится и к функциям

$$f(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}),\ f(x_1^{(0)}, x_2, ..., x_n^{(0)}), ...,\ f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n)$$

и, следовательно, знаки коэффициентов a_{ii} должны быть **одинаковыми**. Более того (ниже будет показано), ни один из них не может быть равен нулю. Заметим, что для функции одной переменной равенство нулю $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ возможно.

Рассмотрим далее свертку первого порядка от определителя (2.1), причем выпишем лишь элементы главной диагонали:

$$\overline{\Delta_{n-1}} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{11}a_{33} - a_{13}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{11}a_{nn} - a_{1n}^2 \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

Первый коэффициент $\overline{a_{11}} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ равен дискриминанту функции двух переменных x_1 и x_2 в стационарной точке $x^{(0)}$ и если он больше нуля, то экстремум существует и его тип определяется знаком a_{11}. Следующий элемент $\overline{a_{22}} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2$ относится к функции двух переменных x_1 и x_3 и т.д. При существовании экстремума все коэффициенты $\overline{a_{ii}}$, $i = \overline{1, n-1}$ также должны иметь один знак, а именно — положительный. Из (2.2) также видно, что ни один a_{ii} не может быть равен нулю, так это приведет к отрицательному значению одного из дискриминантов $\overline{a_{ii}}$. Можно показать, что элементы главной диагонали свертки второго порядка $\overline{\Delta_{n-2}}$ пропорциональны определителям третьего порядка Δ_3 и т.д. Мы этого делать не будем в связи с громоздкостью аналитических выражений $\overline{\overline{a_{ii}}}$ и покажем, что имеет место следующая

Теорема 6 (необходимые условия минимума). Если в стационарной точке $x^{(0)}$ дважды дифференцируемой функции $f(x)$ имеет место минимум, то все первые диагональные элементы сверток $\Delta_n = \overline{\Delta_n}$, $\overline{\Delta_{n-1}}$, $\ldots, \overline{\Delta_1}$ положительны.

□ Используем формулу (2.10), связывающую первые диагональные элементы сверток с минорами критерия Сильвестра, полагая последовательно n =1,2,3,...

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = a_{11} = a_1, \\
&\Delta_2 = a_2, \\
&\Delta_3 = \frac{a_3}{a_1}, \\
&\Delta_4 = \frac{a_4}{a_1^2 a_2^1}, \\
&. \quad . \quad . \\
&\Delta_n = \frac{a_n}{a_1^{n-2} a_2^{n-3} \cdots a_{n-2}^1}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Так как в (3.3) все $\Delta_1, ..., \Delta_n$ — положительны по условию, то отсюда следует, что все a_i также положительны. ■

Следствие 1. Из положительности первых диагональных элементов сверток, следует положительность всех диагональных элементов всех сверток.

Следствие 2. Если в точке $x^{(0)}$ — максимум функции $f(x)$, то все диагональные элементы сверток $\overline{\Delta_{n-1}}, ..., \overline{\Delta_1}$ — положительны, а диагональные элементы $\overline{\Delta_n}$, равные a_{ii}, $i = \overline{1, n}$ – отрицательны. Действительно, в нечетные миноры критерия Сильвестра в (3.3) a_1 входит в нечетной степени, в четные же миноры Δ_2, $\Delta_4, \ldots$ a_1 входит в четной степени. Этим и обеспечивается положительность a_2, a_4, $\ldots$.

С учетом изложенного приведем общую схему определения достаточных условий существования экстремума в стационарной точке $x^{(0)}$.

1. Строится определитель Гессе в стационарной точке $x^{(0)}$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Все коэффициенты a_{ii} главной диагонали должны быть **отличны от нуля** и **одного знака**. При нарушении этих условий, экстремума в точке $x^{(0)}$ нет. Если все $a_{ii} < 0$ – в точке $x^{(0)}$ возможен максимум, если же все $a_{ii} > 0$ – в точке $x^{(0)}$возможен минимум.

Строится свертка первого порядка Δ_{n-1}:

$$\overline{\Delta_{n-1}} = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{1(n-1)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{a_{(n-1)1}} & \dots & \overline{a_{(n-1)(n-1)}} \end{vmatrix}.$$

Все элементы $\overline{a_{ii}}$ главной диагонали должны быть положительны. При нарушении этих условий экстремума в точке нет.

Процесс построения сверток продолжается до получения последней свертки $\overline{\Delta_1}$, при этом все элементы главных диагоналей сверток и само число $\overline{\Delta_1}$ должны быть положительны. При соблюдении этих условий имеем в точке x$^{(0)}$ максимум, если $a_{ii} < 0$, и минимум, если $a_{ii} > 0$.

Вычисление коэффициентов $\overline{a_{ij}}$, $\overline{\overline{a_{ij}}}$ и т.д. при определенных навыках проводится устно или с помощью простейшего калькулятора. Можно показать, что знаки сверток совпадают со знаками главных миноров критерия Сильвестра. Однако, поскольку нет необходимости вычислять сами свертки-определители, доказательство этого факта опустим.

Пример. Найти экстремумы функции:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + zx + xy + x + 2z.$$

□ а) Вычислим первые частные производные функции $f(x,y,z)$ и определим стационарные точки.

$$\begin{cases} f'_x = 2x + z + y + 1 = 0, \\ f'_y = 4y + x = 0, \\ f'_z = 2z + x + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y, \\ -8y + z + y + 1 = 0, \\ 2z - 4y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{z}{2} + \frac{1}{2}, \\ z = -1. \end{cases}$$

$x = 0,\ y = 0.$

Итак, имеется одна стационарная точка $(0, 0, -1)$.

б) Строим определитель Гессе $\Delta_3 = \overline{\Delta_3}$ в данной точке:

$$a_{11} = 2,\ a_{22} = 4,\ a_{33} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{13} = 1,\ a_{23} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Все элементы главной диагонали (*) отличны от нуля и положительны. В точке $(0, 0, -1)$ возможен минимум.

в) Вычислим свертку первого порядка $\overline{\Delta_2}$:

$$\overline{a_{11}} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7, \;\; \overline{a_{22}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \;\; \overline{a_{12}} = \overline{a_{21}} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \;\; \overline{\Delta_2} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Элементы $\overline{a_{11}}$ и $\overline{a_{22}}$ больше нуля. Возможен минимум.

г) Вычислим последнюю свертку $\overline{\Delta_1}$:

$$\overline{\Delta_1} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Вывод: функция $f(x, y, z)$ имеет в точке $(0, 0, -1)$ минимум, равный $f(0, 0, -1) = -1$. ■

Кстати, если функция $f(x_1, ..., x_n)$ — квадратичная форма и коэффициенты при квадратах переменных имеют разные знаки (хотя бы один, отличный от других), то экстремума функции не существует. Это следует из следствия 1 теоремы 5.

В заключение отметим два обстоятельства, упрощающих процесс проверки достаточных условий. Во-первых, это симметричность сверток. Во-вторых, целесообразно начинать вычисление элементов сверток с главных диагоналей, т.к. появление коэффициентов a_{ii}, $\overline{a_{ii}}$ и т.д. различных знаков свидетельствует об отсутствии экстремума и необходимость дальнейших вычислений отпадает.

Литература

Ивлев В. В., Нижников А. И., Дифференциальное исчисление функций многих переменных, М.: Альфа, 2001.

Ильин В. А., Поздняк Э. Г., Основы математического анализа, Т.1, М.: Наука, 1985.

Кудрявцев Л. Д., Краткий курс математического анализа, Т.2, М.: Альфа, 1998.

Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.1, М.: Наука, 1969.

Ивлев Валерий Васильевич,
профессор МГОПУ им. М. А. Шолохова,
доктор технических наук.

К 100-летию Меранской программы преподавания математики в Германии

Р. З. Гушель

Задача воспитания "привычки к функциональному мышлению" впервые была объявлена в Меранской программе преподавания математики в средних школах Германии. В нынешнем году программе исполняется 100 лет. Публикуем фрагмент статьи Я. Кетковича, содержащий перевод программы на русский язык, с комментариями Р. З. Гушель.

Уже не одно десятилетие курс алгебры средней школы пронизан идеей функциональной зависимости. С функциями, их графиками и приложениями функций в других учебных предметах учащиеся знакомятся еще в основной школе. Но так было не всегда.

Еще во второй половине XIX столетия как в России, так и в других странах Европы и Северной Америки, в центре курса алгебры были тождественные преобразования и уравнения. В России в последней программе по математике для мужских гимназий, принятой в 1890 году и действовавшей до 1917 года, даже слово "функция" не встречается. И такое же положение было в то время в других странах.

Но к концу столетия ученые-математики и методисты пришли к убеждению, что школьный курс необходимо обновить введением в него функций и графиков. А некоторые предлагали ввести и начала анализа бесконечно малых и аналитической геометрии, включая конические сечения. В России одним из первых за введение в гимназиях профильной дифференциации и включение в программу старших математических классов элементов высшей математики высказался **В. П. Шереметевский** [1].

Более других в деле реализации таких реформаторских проектов продвинулись педагоги Германии. Во главе германских реформаторов встал выдающийся математик **Феликс Клейн** (1849-1925).

После нескольких лет предварительной работы в 1905 году на съезде Германских естествоиспытателей и врачей в г. Меране была принята новая программа по математике для гимназий, названная "Меранской программой" [2]. Основными задачами обучения математике эта программа называла **"развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению".** Программа предусматривала, в частности, изучение в гимназии основ дифференциального и интегрального исчисления и аналитической геометрии. Был введен также пропедевтический курс геометрии, усилено внимание к приложениям математики (см. ниже).

Меранская программа скоро стала известна в Европе и обрела там многочисленных сторонников. Именно тогда закрепилось выражение "функциональное мышление".

В 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме было принято решение о создании Международной Комиссии по преподаванию математики для координации и обмена опытом между странами в деле модернизации школьного образования [3]. Президентом Комиссии был избран Ф. Клейн. Его избрание — признание математическим сообществом необходимости школьных реформ именно в указанном Клейном направлении. Это событие ознаменовало начало победного шествия по всему миру "функциональной линии" в преподавании математики в средней школе.

Прошло несколько десятилетий, и изучение функций и их графиков стало неотъемлемой частью школьного курса алгебры. А во второй половине XX века в школе появились производная и первообразная функции.

Отечественные педагоги были знакомы с опытом германских реформаторов. В методических журналах помещались статьи, посвященные анализу их работы [5, 6, 7, 8]. Меранская программа была переведена на русский язык.

В этом году исполняется 100 лет со времени принятия Меранской программы. Она оказала несомненное влияние на содержание школьного математического образования в мире в XX веке.

Так, в России в 1907 году был введен дополнительный класс в реальных училищах, программа которого составлена не без влияния Меранской программы. Вопросы обновления отечественного гимназического образования, в том числе и математического, активно обсуждались, был даже составлен и опубликован проект реформы [4], но события 1917 года остановили эту работу.

В тех реформах, которые произошли в нашей школе в конце 60-х – начале 70-х годов прошлого столетия, и в тех, которые осуществляются сегодня, видна преемственная связь с реформами и реформаторскими планами начала XX века.

Ниже приводится фрагмент статьи **Я. Кетковича**[7], содержащий перевод текста Меранской программы.

Литература

1. Шереметевский В., Математика как наука и ее школьные суррогаты // Русская мысль, 1895, №5, 105-125; Математическое образование, 1999, №4.

2. Зейфарт Ф., Развитие реформы преподавания математики в Германии // Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, М.-Л., 1933, Т. 1, 401-418.

3. Гушель Р. З., О деятельности международной комиссии по преподаванию математики в начале XX столетия // Математическое образование, 2001, №3.

4. Материалы по реформе средней школы, Пг., 1915.

5. Фризендорф Т., О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях // Журнал Министерства народного просвещения, 1905, №2, 61-67.

6. Билимович А., Реформа преподавания математики в Германии // Киевские университетские известия, 1908, №8.

7. Кеткович Я., О преподавании математики в прусских гимназиях // Педагогический Вестник Московского учебного округа, 1911, №5-6, 24-57.

8. Беллюстин В., Очерк современных течений в методике математики // Там же, 1912, №5-6, 39-60.

Я. Кеткович

О преподавании математики в прусских гимназиях

... Еще в начале 1900 г. "Общество немецких математиков" на нескольких съездах обсуждало вопрос о реформе преподавания математики. Положения, принятые на съездах, были обработаны и сведены в одно целое комиссией, состоявшей из выдающихся математиков и педагогов Германии. На съезде в Меране план реформы, представленный комиссией, был единогласно принят. После опубликования он получил в печати название **"Меранской программы".** С разрешения прусского министерства народного просвещения эта программа уже введена в виде опыта в нескольких гимназиях: в Геттингене, Мюнделе, Дюрене, Киле и Ганновере.

Опыт дал прекрасные результаты. В виду общего сочувствия к основам реформы, можно уже в близком будущем ожидать введения "Меранской программы" преподавания во всей Германии.

Впрочем уже и теперь есть основания думать, что "Меранская программа" проводится в жизнь отдельными преподавателями — если не в полном объеме, то частично. В Германии ведь нет особенной централизации, и преподавателям предоставлена учебными планами довольно большая свобода в выборе материала и в способе изложения.

В виду такого значения "Меранской программы", мы приводим ее в переводе с небольшими сокращениями.

Меранская программа математики

Математика занимает в наших учебных заведениях совершенно другое положение, чем естествознание; она не только должна была завоевать себе соответствующее значение в школьном организме, но должна еще примениться к современным задачам школы, а это затрудняется не столько различными внешними обстоятельствами, сколько давлением вековых традиций.

Принцип этого применения не может быть предметом спора; этот принцип ясен уже из прусских учебных планов 1901 года. Он состоит в том, чтобы ход учения более, чем прежде, приспособлялся к естественному ходу духовного развития, везде имел связь с данным кругом представлений учащихся; чтобы новые сведения имели органическое соединение с прежде усвоенными, и, наконец, чтобы связь звеньев одной науки с другими становилась для учащихся все более и более ясной и сознательной. Далее, надо заботиться о том, чтобы, признавая вполне значение математики для формального развития, тем не менее отказаться от специальных знаний, лишенных практического значения и односторонних, напротив, стараться о возможном развитии способности математического исследования окружающего нас мира явлений. Отсюда вытекают 2 отдельных задачи: **развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению.**

Таков принцип, который нужно воплотить в определенную программу. Программа следует дальше; ей предпосылается несколько замечаний.

Программы освобождены от отдельных бесполезных отделов, существование которых объяснялось только господством рутины, как в области алгебраических преобразований, так и геометрических построений. С другой стороны, абстрактные идеи и доказательства, столь часто непонятные начинающим, передвинуты на высшие ступени обучения. Но не надо думать, что этим устраняется необходимость точности и уверенности в применении полученных знаний и последовательности математической мысли в начале обучения. Напротив, справедливые требования в этом отношении остаются в силе, но только они не должны переходить в тренировку учащихся; здесь, как и в других случаях, мы предоставляем простор искусству и свободной самодеятельности учителя, не стесняя его бесцельно особыми подробными предписаниями.

Мы настойчиво рекомендуем широкую свободу для учителя в подробностях преподавания — в изложении материала, распределении работ и проч. — конечно, в рамках общего учебного плана.

В нашем плане мы предоставляем свободному выбору преподавателя особенно важный вопрос — именно, в какой форме и каком объеме преподаватель должен излагать анализ бесконечно малых, — в виду того, что вопрос этот еще недостаточно выяснен в научной литературе. Многочисленные и разнообразные опыты в этом отношении, сделанные в разных учебных заведениях, дадут впоследствии возможность решить с большей уверенностью, как следует организовать это дело.

Целью преподавания математики в старшем классе является следующее: научный обзор и приведение в систему приобретенных знаний; способность математического понимания и применение ее для разработки различных вопросов; и, наконец, взгляд на значение математики для точного познания природы и для современной культуры. Все это даст учащимся не только ценное законченное знание математики, но также и почву для дальнейшей работы в области математики, если это потребуется их дальнейшим призванием. Резкий переход от средней школы к высшей, столь заметный сейчас, тогда совершенно исчезнет.

Мы настаиваем на том, чтобы нормой во всех классах гимназий было не менее 4 часов математики в неделю.

Учебный план математики для гимназий А. Первая ступень

I класс

Основные действия над целыми числами, именованными и отвлеченными, в пределах определенной области чисел.

Немецкие меры длины, веса и денег. Упражнения в изображении чисел по десятичной системе и в простейших десятичных вычислениях, как подготовка к действиям над дробями.

II класс

Арифметика. Продолжение упражнений в вычислениях с именованными числами, с расширением их области на другие меры (и иностранные); измерения длины всякого рода (и на местности); простейшие задачи на вычисление поверхностей и объемов с применением зависимости между вместимостью и весом.

(Всем таким вычислениям надо предпосылать вычисление порядка величины окончательного результата).

Делимость чисел. Обыкновенные дроби (прежде всего как именованные числа).

Пропедевтический курс геометрии. Введение в основные понятия пространства, таким образом, чтобы пространство представлялось носителем планиметрических соотношений. Протяжения пространства: поверхности, линии, точки — прежде всего среди окружающих предметов, а затем на различных телах.

Плоские фигуры, — сначала как части границы тел, затем как самостоятельные объекты, на которых следует выяснить понятия направления, угла, параллельности, симметрии.

Упражнения в употреблении линейки и циркуля; постоянное рисование, черчение и измерение.

III класс

Арифметика. Счисление десятичных дробей. Сокращенные (приближенные) вычисления (на простых примерах). Тройное правило с устранением всякой схематизации и заученных механических приемов. Задачи из практической жизни, особенно простые случаи вычисления процентов, прибыли, векселей. Подготовление к алгебре путем повторения некоторых решенных ранее задач с заменой определенных чисел буквами. Значение данных буквенных выражений и вычисление их при данных числовых значениях букв. Связь правил устных вычислений с правилами употребления скобок.

Геометрия. Учение о прямых, углах и треугольниках. Изменяемость фигур; зависимость частей треугольника друг от друга. Переходные случаи: прямоугольный, равнобедренный, равносторонний треугольники. Простейшие теоремы о параллелограммах (исходя из построения фигуры).

IV класс

Алгебра (“Arithmetik”). Систематическое обобщение основных арифметических действий с помощью алгебраических формул. Понятие об отношении, относительных числах, рассмотренное на примерах и поясненное примером бесконечной линии чисел, неопределенно продолжаемой в обе стороны. Правила действий над отношениями. Продолжение упражнений в вычислении с введением отрицательных чисел и постоянным указанием на функциональный характер изменения входящих числовых величин. Решение и составление уравнений I степени с 1 неизвестным.

Различие между тождествами и уравнениями.

Геометрия. Продолжение учения о параллелограмме. Трапеция. Основные теоремы о круге. Рассмотрение влияния, которое оказывает изменение величины и положения отдельных частей фигуры на общий характер фигуры.

Задачи на построение в тесной связи с курсом, с устранением всех тех задач, которые решаются искусственными приемами.

V класс

Алгебра. Дополнение и продолжение алгебраических действий, именно разложение полиномов. Простейшие теоремы о пропорциях. Решение и составление уравнений I степени с 1 и несколькими неизвестными. Зависимость алгебраического выражения от входящего в него неизвестного. Графическое представление линейной функции и приложение такого представления к решению уравнений.

Геометрия. Сравнение и вычисление площадей с простым и сложным прямолинейным контуром. Приближенное вычисление площадей, ограниченных криволинейным контуром. Повторение вычислений площадей и объемов, произведенных во втором классе. Задачи на построение, как в 4 классе.

VI класс

Алгебра. Степени и корни. Решение и составление уравнений 2-й степени с 1 неизвестным. Зависимость между коэффициентами и корнями. Зависимость трехчлена 2-й степени от входящего в него переменного, с графическим изображением ее. Решение задач 2-й степени с 1 неизвестным пересечением прямых с параболами. Изучение графических изображений, как средства для рассмотрения эмпирически найденных зависимостей.

Геометрия. Учение о подобии фигур с обращением внимания на подобие положения. Пропорциональные линии в круге. Приближенное вычисление окружности и площади круга с помощью вписанных или описанных многоугольников. Исследование зависимости отношения сторон и величины углов в треугольнике, особенно прямоугольном. Составление и испытание таблиц чисел для выражения такой зависимости (как подготовка к тригонометрии), а затем — практические задачи (съемка планов с помощью мензулы).

B. Высшая ступень

VII класс

Алгебра. Расширение понятия о степени; понятие о степени, как показательной функции; понятие и приложения логарифмов. Арифметические ряды первого порядка; геометрические ряды. Применение их к вычислению сложных процентов и ренты (на простейших задачах, взятых из действительной жизни). Графическое изображение зависимости числа и логарифма. Счетная линейка. Решение квадратных уравнений с двумя неизвестными как вычислением, так и графически.

Геометрия. Тригонометрия с приложением ее к геометрическим построениям. Приложение к практическому измерению треугольников. Характеристика взаимной зависимости изменения углов и изменения тригонометрических функций формулами гониометрии. Графическое изображение этой зависимости. Решение разнообразных задач, решаемых построением или вычислением. Введение в теорию гармонических соотношений и основы новой геометрии, как заключение планиметрии.

VIII класс

Алгебра. Систематическое рассмотрение изученных ранее функций в их изменении, а также их графических изображений (кривых линий) по их падению и поднятию (с введением понятия дифференциала, производной и интеграла), с приведением многочисленных примеров из геометрии, физики, а в особенности, из механики. Простейшие теоремы о соединениях с примерами для упражнения.

Геометрия. Стереометрия. Главные элементы проективного черчения. Упражнения в стереометрическом черчении. Простейшие теоремы сферической тригонометрии. Математическая география, включая теорию построения географических карт.

IX класс

Конические сечения в аналитическом или синтетическом изложении, с приложением к астрономии.

Повторение разных отделов пройденного курса математики, по возможности на решении обширных задач, которые должны решаться применением вычисления и черчения.

Обзор пройденного с исторической и философской точки зрения.

Объяснения к учебному плану математики

1. В младших классах, при обучении счету, надо ограничиваться определенной областью чисел. Числа более 100000 должны быть при решении задач устраняемы. В устном счете надо упражнять учеников как можно чаще. Задачи из практической жизни должны соответствовать условиям действительной жизни. Обучение счету есть в то же время ознакомление с вещами окружающего мира, и поэтому нельзя требовать от детей знания того, что доступно только взрослому образованному человеку. С другой стороны, обучение арифметике надо считать подготовкой к изучению алгебры. Поэтому надо заботиться с самого начала о правильных обозначениях и определениях, чтобы не было противоречия с дальнейшим курсом математики.

Преподавание геометрии должно примыкать к естественному наблюдению и исходить из практических измерений; следует старательно избегать педантического систематического доказательства таких вещей, которые, по непосредственному чувству, кажутся сами собой совершенно очевидными, и тем делать их даже менее понятными; напротив, надо стараться подыскивать логическое обоснование к сознательному доказательству соображений, возникших совершенно самостоятельно в уме учащегося, но и это надо делать постепенно. Так, например, конгруэнция[1] фигур может быть рассматриваема как очевидное следствие постро-

[1] равенство (прим. Р.Г.)

ения, если оно дает только одно решение. Косвенных доказательств надо избегать; справедливость теорем, противоположных прямым теоремам, считать очевидной, в особенности, если она и так бросается в глаза. При черчении следует поощрять штриховку, раскрашивание и т.п.; напротив, всяких осложнений чертежа, чрезмерно обстоятельных обозначений надо избегать. В планиметрии, где возможно, следует поддерживать живую связь с соотношениями трехмерного пространства, именно, приводя подходящие наглядные примеры из окружающей жизни. Желательно и употребление моделей.

2a) В средних классах преподавание арифметики сменяется преподаванием алгебры, подготовкой к которой является систематическое повторение арифметики в 3 классе и навык в алгебраическом языке. В систематике арифметики надо избегать всякого педантического проведения доказательств, при котором угрожает опасность логического "ложного круга". Напротив, теоремы алгебры следует излагать в научной системе.

Всех искусственных операций, например, деления сложных полиномов *etc.* следует избегать; напротив, разложение их на множители нужно проходить достаточно подробно; в пропорциях нужно ограничиться главнейшим, но понятие прямой и обратной пропорциональности должно быть усвоено очень твердо.

2b) На этой же ступени следует вырабатывать в учащихся привычку к функциональному мышлению, для чего можно пользоваться изменением свойств геометрических фигур с изменением их отдельных частей (изменением формы четырехугольников, относительного положения окружностей и т.п.), теорией рядов, пределов и т.п.

Задачи на построение должны быть тесно связаны с курсом; при так называемом "анализе" прежде всего надо обращать внимание на такой путь мысли, который действительно приводит к решению задачи; другими словами, этот анализ должен быть, так сказать, психологического характера.

На этой же ступени обучения следует произвести слияние алгебры с геометрией, отчасти введением графических построений функций, отчасти экспериментальными исследованиями взаимной зависимости между отношением сторон и величиной углов (в треугольнике).

3. Замечания относительно старших классов будут кратки. Расширение понятия о степени (введением отрицательных и дробных показателей) следует вести в духе теории функций, причем легко представится случай тесно связать арифметические и геометрические ряды. В тригонометрии следует оставлять в стороне все искусственные преобразования, чтобы выиграть время для практического приложения к действительным измерениям, и функционального изложения основ науки.

Что касается основ высшего анализа, то комиссия оставляет решение вопроса о способе изложения и объеме **на усмотрение преподавателей,** в виду невыясненности этого вопроса в педагогических кругах. Разумеется, здесь идет речь о простейших случаях дифференцирования и интегрирования. Решение задач физики и механики имеет целью связать эти науки с математикой, и в то же время улучшить их преподавание.

В стереометрии желательно решение простых задач на построение, причем особенную ценность надо придавать хорошему исполнению чертежа.

Изложение теории конических сечений следует вести как синтетически, так и аналитически, по возможности, в равной мере.

В синтетической геометрии рекомендуется больше времени посвящать черчению, чтобы лучше уяснить зависимость формы конического сечения от конуса и от положения секущей плоскости. Предельные случаи и здесь должны заслуживать особого внимания.

Математическая география и астрономия примыкают к соответствующим частям преподавания физики. При испытании зрелости математическое развитие ученика выяснится гораздо лучше, если отступят от современного требования — решения четырех специальных задач и вместо этого будут предлагать: 1) связное изложение какого-нибудь довольно обширного общего вопроса (по теории), и 2) полное, числовое и графическое, решение какой-нибудь одной задачи. При устном же испытании следует обращать внимание на понимание науки, а не на внешнее усвоение многих специальных формул.

Такова знаменитая “Меранская программа”.

Для русских преподавателей она ценна важными и глубокими методическими указаниями по разным частям курса элементарной математики. Многие из этих указаний могут быть применяемы при преподавании математики и в русских учебных заведениях.

Гушель Ревекка Залмановна,
старший преподаватель кафедры геометрии
Ярославского педагогического университета.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по адресу: 111250, Москва, пр-д завода "Серп и Молот", д. 3а.

Телефон/факс: (095) 362-91-02.

Этот же адрес и телефон для корреспонденции Фонда.

E-mail: fmop@dnttm.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2005 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2005 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents