Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятый

№2 (33)

Апрель - июнь 2005 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 2 (33), 2005 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (33), апрель – июнь 2005 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2005 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2005 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Элементарное введение в матроиды

А. Ю. Эвнин

В предлагаемом вниманию читателей учебном пособии рассматриваются простейшие факты теории матроидов, а также приводятся новые результаты по перечислению матроидов. Матроиды являются теоретической основой изучения "жадных алгоритмов", применяются в криптографии и при анализе надежности электрических схем. Пособие ориентировано на студентов специальностей "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика", "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем", изучающих дискретную оптимизацию. Отдельным изданием пособие выходит в издательстве Южно-Уральского Государственного Университета.

Предисловие

Матроиды были введены в 1935 г. Пионерская работа Х. Уитни называлась "On the abstract properties of linear dependence" ("К абстрактным свойствам линейной зависимости"). Х. Уитни обнаружил, что можно с единых позиций рассматривать понятия зависимости в линейной алгебре и теории графов. Синтез идей различных областей математики является основой плодотворного развития теории матроидов.

Матроидные стуктуры естественным образом возникают в теории комбинаторной оптимизации, являясь основой применения так называемых "жадных" алгоритмов (см. §5). Исследования в этой области начались в конце 50-х годов прошлого века. Позднее теория матроидов нашла своё применение и при анализе надёжности электрических схем.

Конец XX века ознаменовался бурным развитием криптографии. В книге [3] показана связь *идеальных схем разделения секрета* с матроидами.

В силу своей молодости теория матроидов отражена в имеющейся литературе весьма скромно. В нашем библиографическом списке приведён достаточно полный перечень изданных на русском языке учебников для вузов, в которых имеются главы, посвящённые матроидам. Отметим, в частности, [2], [4-8]. При создании данного учебного пособия были также использованы монографии [16] и [14]. Из последней позаимствованы изящное доказательство теоремы Эдмондса – Фалкерсона (§8) и ряд упражнений.

В предлагаемом читателю учебном пособии представлены начальные понятия теории матроидов, включая связь матроидов с жадными алгоритмами и теорией трансверсалей. От читателя требуется знание начальных сведений из линейной алгебры и простейших понятий теории графов (компонента связности, разделяющее множество, разрез, остовный лес). Используемая нами графовая терминология совпадает с той, которая принята в книге

Р. Уилсон. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977.

Ряд материалов пособия оригинальны. Так, в §11 приводятся авторские доказательства свойств матроидов Фано и Вамоса, имеющие элементарный характер и доступные уже при начальном ознакомлении с предметом. В §12 представлены некоторые новые результаты по перечислению матроидов, полученные в дипломных работах выпускников кафедры прикладной математики ЮУрГУ С. А. Новокшонова и А. С. Радионова. Факты, лёгшие в основу задач 20–23 из §13, были сначала обнаружены экспериментально по результатам работы компьютерной программы, перечисляющей трансверсальные матроиды, которая составлена А. С. Радионовым. Задача 17 предлагалась на Международном математическом турнире городов осенью 2003 г.

1. Определения и примеры

Матроид — это упорядоченная пара $M = \langle E, J \rangle$, где
E — непустое конечное множество;
J — совокупность подмножеств множества E, удовлетворяющая следующим условиям (*аксиомам независимости*):

(J0) $\phi \in J$;

(J1) если $A \in J$ и $B \subset A$, то $B \in J$;

(J2) если $A \in J$, $B \in J$ и $|A| = |B| + 1$, то существует такой элемент e, принадлежащий A и не принадлежащий B, что $B \cup \{e\} \in J$.

Элементы множества J называют **независимыми множествами**. Таким образом, аксиома J1 говорит о том, что подмножество независимого множества также является независимым, а аксиома J2 утверждает: если имеются два независимых множества, мощности которых отличаются на единицу, то в более мощном множестве есть элемент, который отсутствует в менее мощном, и при добавлении которого к последнему вновь получится независимое множество.

Базис — это максимальное по включению независимое множество (то есть если A — базис, $A \subset B$ и $A \neq B$, то множество B не является независимым).

В силу конечности множества E в матроиде существует хотя бы один базис.

Ранг матроида — количество элементов в любом его базисе.

Докажем корректность последнего определения: убедимся в том, что в любых двух базисах количество элементов одинаково. От противного: пусть имеются два различных базиса A и B, и в множестве A элементов больше, чем в B. Существует подмножество $A' \subset A$ такое, что $|A'| = |B| + 1$. По аксиоме J1 множество A' —

независимое, а по аксиоме J2 найдётся элемент $e \in A' \setminus B$ такой, что множество $B \cup \{e\}$ независимо, но тогда множество B не является максимальным по включению независимым множеством, то есть базисом — противоречие!

Очевидно, что максимальное по мощности независимое множество является и максимальным по включению, то есть базисом. Таким образом, любое независимое множество в матроиде M мощности, равной его рангу, есть базис.

Взяв произвольное независимое множество B и некоторый фиксированный базис A с помощью свойства J2 можно в множестве A выбрать $|A| - |B|$ элементов, при добавлении которых к множеству B получится независимое множество мощности $|A|$, то есть базис. Мы доказали, что *всякое независимое множество можно дополнить до базиса.*

Множество $A \subset E$, которое в матроиде $M = \langle E, J \rangle$ не является независимым, называется **зависимым**.

Цикл — это минимальное по включению зависимое множество (то есть если A — цикл, $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B — независимое).

Пусть дан матроид $M = \langle E, J \rangle$. Мощность множества E называют **порядком матроида** M.

Примеры матроидов

1) **Тривиальный матроид** — матроид $\langle E, \{\phi\} \rangle$; в нём единственным независимым множеством (значит, и единственным базисом) является пустое множество. Ранг тривиального матроида равен нулю, а любое одноэлементное подмножество множества E является циклом.

2) **Дискретный матроид** — матроид $\langle E, \beta(E) \rangle$, где $\beta(E)$ — множество всех подмножеств множества E. В дискретном матроиде все множества являются независимыми, имеется единственный базис — само множество E, а циклов вовсе нет. Ранг дискретного матроида равен $|E|$.

3) k**-однородный матроид** — матроид $\langle E, J \rangle$, в котором любое k-элементное подмножество множества E является базисом. Здесь любое множество, в котором не более k элементов, является независимым. Проверка выполнения аксиом матроида тривиальна. Заметим, что дискретный матроид $\langle E, \beta(E) \rangle$ является $|E|$-однородным, а тривиальный матроид — 0-однородным. В k-однородном матроиде (при $k < |E|$) циклом является любое $k+1$-элементное множество. Ранг k-однородного матроида равен k. Имеется специальное обозначение для k-однородного матроида, заданного на n-элементном множестве: $U_{k,n}$.

4) Пусть E — конечная система векторов некоторого линейного пространства над полем F, а J состоит из всех линейно независимых систем векторов из E, а также пустого множества. Тогда, как известно из линейной алгебры, свойства J1 и J2 будут выполнены. Свойство J0 выполнено по определению.

Поэтому $\langle E, J\rangle$ — матроид. Его называют **векторным**.[1]

5) Пусть A — числовая матрица с элементами из поля F размера $m \times n$. Будем смотреть на столбцы этой матрицы как на векторы пространства F^m. Тогда столбцы матрицы A образуют векторный матроид; будем называть его **матричным матроидом**, или (точнее) **матроидом столбцов матрицы** A. Обозначение: $M[A]$. Аналогично вводится **матроид строк матрицы**. Легко видеть, что ранг матрицы A равен рангу соответствующего матричного матроида.

6) Пусть G — граф, E — множество его рёбер. Объявим независимыми те подмножества E, которые состоят из рёбер некоторого леса. Как известно из теории графов, свойства J0, J1 и J2 будут при этом выполнены. Полученный матроид называют **матроидом циклов** графа G и обозначают $M(G)$. Цикл матроида будут составлять рёбра, образующие простую замкнутую цепь в графе G (то есть цикл, в котором каждая вершина встречается ровно один раз).

7) Пусть G — граф, E — множество его рёбер. Объявим зависимыми те подмножества E, которые являются разделяющими множествами. Опять же из результатов теории графов следует выполнение аксиом матроида. Полученный матроид называют **матроидом разрезов** графа G и обозначают $M^*(G)$. Циклу этого матроида будет соответствовать разрез графа G, а базису — дополнение к множеству рёбер любого остовного леса графа.

Изоморфизм матроидов

Матроиды $M_1 = \langle E_1, J_1\rangle$ и $M_2 = \langle E_2, J_2\rangle$ называются **изоморфными**, если существует биекция (взаимно однозначное отображение) $\varphi : E_1 \to E_2$, сохраняющая независимость; другими словами, множество $A \subset E_1$ является независимым в матроиде M_1 тогда и только тогда, когда образ этого множества при заданном отображении $\varphi(A)$ есть независимое множество в матроиде M_2.

Пример. Матроид циклов графа G, изображённого на рис. 1, изоморфен ма-

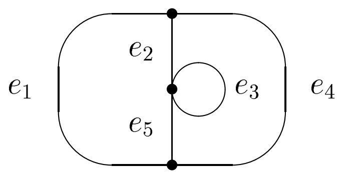

Рис. 1.

троиду столбцов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, рассматриваемой над произвольным числовым полем.

Введём ещё несколько определений.

[1] Иногда (например, в [4]) дают более узкое определение векторного матроида, предполагая, что векторы из системы E попарно различны.

Матроид — **графический**, если он изоморфен матроиду циклов некоторого графа.

Матроид — **кографический**, если он изоморфен матроиду разрезов некоторого графа.

Наконец, если матроид является одновременно графическим и кографическим, то его называют **планарным**. Это название объясняется тем, что планарный матроид изоморфен матроиду циклов планарного графа (доказательство см. в [1]).

Для того, чтобы лучше освоиться с новыми понятиями, советуем читателю решить соответствующие упражнения, помещённые в последнем разделе книги.

2. Двойственность

Пусть $M = \langle E, J \rangle$ — матроид. Обозначим через J^* множество всех подмножеств дополнений к базисам матроида M. Оказывается, что $M^* = \langle E, J^* \rangle$ — также матроид (доказательство этого утверждения можно найти в [4]); его называют **двойственным** к M матроидом. Легко видеть, что базисы двойственного матроида — это дополнения к базисам исходного матроида. Отсюда сразу вытекает, что $(M^*)^* = M$ — матроид, двойственный двойственному M, есть M.

Теорема 1. *Для любого графа G матроид его разрезов является двойственным матроиду циклов.*

Доказательство. Пусть E — множество рёбер графа G. Можно считать, что в G нет изолированных вершин.

Рассмотрим произвольный базис B в матроиде циклов $M(G)$. Нужно доказать, что $E \setminus B$ — базис в матроиде разрезов $M^*(G)$. Базис в $M(G)$ есть остовный лес графа G. Базис в $M^*(G)$ — максимальное по включению неразделяющее множество в графе G. При удалении из графа рёбер, составляющих $E \setminus B$, остаётся остовный лес, т.е. число компонент связности графа не изменяется — поэтому множество $E \setminus B$ не является разделяющим. Если оно не максимально по включению, то для некоторого ребра $e \notin E \setminus B$ неразделяющим будет множество $B' = E \setminus B \cup \{e\}$. Но тогда дополнение к B' содержит остовный лес W. Заметим теперь, что $|E \setminus B'| < |B|$, откуда $|W| < |B|$, в то время как любые два остовных леса (одного и того же графа) имеют одинаковую мощность.

Обратно. Пусть D — базис в $M^*(G)$. Нужно убедиться в том, что $E \setminus D$ — остовный лес. Поскольку D — неразделяющее множество, $E \setminus D$ покрывает все вершины графа G. Если в $E \setminus D$ есть цикл, возьмём ребро e, входящее в него. Тогда $D \cup \{e\}$ — также неразделяющее множество вопреки предположению. Значит, $E \setminus D$ — лес, и притом — остовный. □

3. Представимые матроиды

Матроид **представим над полем** F, если он изоморфен некоторому векторному матроиду над этим полем. Если матроид представим над любым полем, его называют **регулярным**. В случае представимости матроида над полем $GF(2)$[2] его называют **бинарным**, а над полем $GF(3)$ — **тернарным**.

[2] $GF(n)$ — конечное поле порядка n (“поле Галуа ”), в общем случае n является натуральной степенью некоторого простого числа — *прим. ред.*

Теорема 2. *Графический матроид является бинарным.*

Доказательство. Нужно убедиться в том, что матроид циклов произвольного графа G представим над полем $GF(2)$. Составим матрицу $A = (a_{ij})$ инцидентности графа G. Строки этой матрицы соответствуют вершинам графа, а столбцы — рёбрам. Если j-е ребро есть петля, инцидентная i-й вершине, то $a_{ij} = 2$, иначе

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я вершина инцидентна } j\text{-му ребру;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заменим в этой матрице двойки нулями, оставив для матрицы прежнее обозначение.

Итак, мы имеем составленную из нулей и единиц матрицу A. Петле графа соответствует нулевой столбец, а столбцы, отвечающие кратным рёбрам, — одинаковые. Докажем, что матроид столбцов этой матрицы над полем $GF(2)$ изоморфен $M(G)$, то есть что столбцы линейно зависимы над $GF(2)$ тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра графа G содержат цикл.

Нетривиальная линейная комбинация векторов над указанным полем есть просто сумма некоторых из данных векторов. Значит, если некоторые столбцы матрицы A линейно зависимы, то среди них можно выделить столбцы с нулевой суммой. Рассмотрим подграф G' графа G с рёбрами, соответствующими этим столбцам. Очевидно, степень каждой вершины в этом подграфе есть чётное число. Стало быть, в G' есть цикл (хотя бы потому, что G' есть объединение эйлеровых графов, а в эйлеровом графе есть эйлеров цикл; впрочем, и непосредственное доказательство указанного факта весьма несложно).

Обратно. Пусть некоторое множество рёбер содержит цикл. Если среди них есть петля, то отвечающий ей нулевой столбец обеспечивает линейную зависимость столбцов.

Рассмотрим теперь столбцы, отвечающие рёбрам простого цикла длины больше 1. Любая строка матрицы A содержит в этих столбцах ровно две единицы. Поэтому сумма указанных столбцов (по модулю 2) равна нулевому столбцу, что означает линейную зависимость исходного множества столбцов. □

Заметим, что имеется существенное усиление доказанной теоремы. Оказывается,
любой графический матроид является регулярным; то же верно и для любого кографического матроида.

Кроме того, достаточным условием регулярности матроида является его представимость над $GF(2)$ и $GF(3)$, то есть
матроид регулярен тогда и только тогда, когда он одновременно является бинарным и тернарным.

Доказательства этих утверждений имеются в монографии [14].

4. Ранговая функция

Пусть $M = \langle E, J \rangle$ — матроид. Для множества $A \subset E$ определим **сужение матроида** M **на множество** A как матроид $M|A = \langle A, J' \rangle$, где множество J'

образовано всеми подмножествами множества A, являющимися независимыми множествами матроида M:

$$J' = \{X \mid X \subset A, X \in J\}.$$

То, что $M|A$ — действительно матроид, очевидно.

Назовём ранг матроида $M|A$ **рангом** множества A (обозначение $\rho(A)$), а каждый базис этого матроида — **базой** множества A. Таким образом, $\rho(A)$ — это наибольшая мощность независимого подмножества множества A. Заметим, что $M|E = M$, и поэтому ранг матроида $M = \langle E, J\rangle$ равен рангу множества E, а базис матроида есть база множества, на котором он определён. Очевидно также, что $\rho(\phi) = 0$, и если $A \in J$, то $\rho(A) = |A|$ (ранг независимого множества равен его мощности).

Отметим следующие свойства ранговой функции ρ:

(ρ1) $\forall A \subset E \ \ 0 \le \rho(A) \le |A|$;

(ρ2) если $A \subset B$, то $\rho(A) \le \rho(B)$ (*монотонность*);

(ρ3) $\forall A, B \subset E \ \ \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \le \rho(A) + \rho(B)$ (*полумодулярность*).

Выполнение свойств $\rho1$ и $\rho2$ очевидно. Докажем $\rho3$.

Пусть X — база множества $A \cap B$. С помощью свойства J2 множество X можно дополнить до базы множества A; обозначим полученную базу через Y. Аналогично, Y дополняется до базы Z множества $A \cup B$. Итак, имеем

$$X \subset Y \subset Z \ \text{ и } \ \rho(A \cap B) = |X|, \ \rho(A) = |Y|, \ \rho(A \cup B) = |Z|.$$

Необходимо доказать, что

$$|Z| + |X| \le |Y| + \rho(B). \tag{$*$}$$

Заметим, что по построению $X \cup (Z \setminus Y) \subset B$. Отсюда $\rho(X \cup (Z \setminus Y)) \le \rho(B)$. Кроме того, множество $X \cup (Z \setminus Y)$ является подмножеством независимого множества Z, и, в силу J1, само независимо. Значит,

$$\rho(X \cup (Z \setminus Y)) = |X \cup (Z \setminus Y)| = |X| + |Z| - |Y|.$$

Таким образом, $|X| + |Z| - |Y| \le \rho(B)$, что равносильно неравенству $(*)$. $\square$

Покажем теперь, что матроид можно задать через ранговую функцию.

Теорема 3. *Пусть на подмножествах множества E определена целозначная функция ρ, удовлетворяющая условиям $\rho1$, $\rho2$, $\rho3$, а множество J состоит из всех тех подмножеств A множества E, для которых $\rho(A) = |A|$. Тогда $M = \langle E, J\rangle$ есть матроид.*

Доказательство. Свойство J0 следует непосредственно из $\rho1$.

Докажем J1. Пусть $\rho(A) = |A|$ и $B \subset A$. Благодаря полумодулярности функции ρ имеем

$$\rho(B \cup (A \setminus B)) + \rho(B \cap (A \setminus B)) \le \rho(B) + \rho(A \setminus B).$$

Но $B \cup (A \setminus B) = A$, и $\rho(A) = |A|$, а $B \cap (A \setminus B) = \phi$, и $\rho(\phi) = 0$. Поэтому, учитывая также свойство $\rho 1$ и то, что $B \subset A$, получаем

$$|A| = \rho(A) \le \rho(B) + \rho(A \setminus B) \le |B| + |A \setminus B| = |B| + |A| - |B| = |A|.$$

Поскольку на концах этой цепочки соотношений стоит одно и то же число, всюду в ней на самом деле выполняются равенства, в частности, $\rho(B) = |B|$. Таким образом, $B \in J$.

Свойство J2 будем доказывать от противного. Пусть $A,\ B \in J$, $|B| = k,\ |A| = k+1$. Если $B \subset A$, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $|A \setminus B| \ge 2$. Предположим, что для любого элемента $e \in A \setminus B$ неверно, что $B \cup \{e\} \in J$. Тогда $\rho(B \cup \{e\}) \ne k+1$ и, в силу соотношений $k = \rho(B) \le \rho(B \cup \{e\}) \le |B \cup \{e\}| = k+1$ и целочисленности функции ρ, имеем $\rho(B \cup \{e\}) = k$. Возьмём в качестве e два различных элемента c и d и пусть $C = B \cup \{c\},\ D = B \cup \{d\}$. Тогда $C \cup D = B \cup \{c, d\}$ и $C \cap D = B$. Поэтому

$$\rho(B \cup \{c, d\}) + \rho(B) = \rho(C \cup D) + \rho(C \cap D) \le \rho(C) + \rho(D) \le k + k,$$

откуда $\rho(B \cup \{c, d\}) \le k$. Так как $\rho(B \cup \{c, d\}) \ge \rho(B) = k$, получаем $\rho(B \cup \{c, d\}) = k$. Итак, при добавлении к множеству B двух элементов из $A \setminus B$ мы получили множество с прежним значением функции ρ.

Если, в множестве $A \setminus B$, кроме c и d, есть ещё, например, элемент f, положим $C = B \cup \{c, d\},\ D = B \cup \{f\}$ и, повторив предыдущие выкладки, получим, что $\rho(B \cup \{c, d, f\}) = k$.

Добавляя к множеству B последовательно элементы из $A \setminus B$, мы рано или поздно придём к множеству $B \cup A$, и при этом окажется, что $\rho(B \cup A) = k$, в то время как $\rho(B \cup A) \ge \rho(A) = k+1$. Противоречие получено. $\square$

5. Жадный алгоритм

Весьма общей является следующая задача оптимизации.

Пусть каждому элементу e непустого конечного множества E поставлено в соответствие неотрицательное число $w(e)$, называемое **весом** этого элемента. **Вес подмножества** $X \subset E$ определяется как сумма весов его элементов:

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

Рассматривается некоторая совокупность J подмножеств множества E. Требуется найти в J подмножество максимального веса.

Подобный вид имеют или сводятся к нему многие задачи: например, задача коммивояжёра, задача о рюкзаке, задача о минимальном стягивающем дереве и другие.

Жадный алгоритм решения описанной задачи состоит в последовательном, элемент за элементом, формировании искомого множества, причём на каждом шаге из всех элементов множества E, добавление которых к ранее выбранным возможно (то есть приводит к к некоторому множеству из J), выбирается элемент наибольшего веса.

Формально алгоритм можно описать так.

1) В качестве e_1 выбрать элемент, удовлетворяющий условию

$$w(e_1) = \max_{\{e\}\in J} w(e).$$

Следующий шаг выполнять до тех пор, пока он приводит к расширению формируемого множества S.

2) Если $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$, то в качестве очередного элемента множества S выбрать элемент e_k такой, что

$$w(e_k) = \max\{w(e) \mid \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e\} \in J,\ e \notin \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}\}.$$

Конкретная реализация жадного алгоритма зависит во многом от того, что представляет собой множество J.

Пример 0. Пусть $E = \{1, 2, 3\}$, $J = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $w(1) = 3$, $w(2) = 2$, $w(3) = 4$. Действуя по жадному алгоритму, мы последовательно получим: $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ и множество $\{1, 2\}$ веса 5, в то время как входящее в J множество $\{2, 3\}$ имеет вес 6. Жадность не помогла! Она не всегда дальновидна!

Пример 1. В задаче коммивояжёра требуется найти замкнутый маршрут наименьшей длины, проходящий через заданные города. Здесь E — множество дорог между городами, в роли веса дороги выступает её длина. Жадная стратегия для задачи коммивояжёра состоит в том, что, начав маршрут в произвольном городе, в качестве очередного города на каждом шаге выбираем такой ранее не посещённый город, к которому ведёт самая короткая дорога.

Пример 2. В задаче о минимальном стягивающем дереве требуется в заданном связном взвешенном графе $G = \langle V, E\rangle$ выделить стягивающее дерево минимального веса. Здесь E — множество рёбер графа, а J состоит из всех его стягивающих деревьев. Если $w'(e)$ — вес ребра e, а число M больше веса любого ребра, то положив $w(e) = M - w'(e)$, перейдём от задачи минимизации к задаче максимизации. Это стандартный приём, но ценность его скорее чисто теоретическая, поскольку ещё проще в описанном алгоритме заменить всюду нахождение максимума нахождением минимума. Различные способы реализации жадной стратегии для нахождения минимального стягивающего дерева (алгоритмы Краскала и Прима) обсуждаются в [11]. Очень интересным является также алгоритм Бёржа, описанный в монографии [7].

Известно, что жадный алгоритм для задачи из примера 2 всегда даёт оптимальное решение, а для задачи из примера 1 — не всегда.

В этом разделе мы выясним, каким требованиям должна удовлетворять совокупность множеств J, чтобы жадная стратегия приводила к оптимальному решению.

Теорема 4. *Пусть $M = \langle E, J\rangle$ — матроид, а на множестве E определена функция веса $w : E \to R^+$. Тогда жадный алгоритм выделяет независимое подмножество E наибольшего веса.*

Доказательство. Пусть в результате работы жадного алгоритма сформировано множество $I = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$. По смыслу алгоритма элементы этого множества проиндексированы в порядке убывания их веса:

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_s).$$

Возьмём в E произвольное независимое подмножество $L = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_t\}$ максимального веса, считая, что

$$w(e'_1) \geq w(e'_2) \geq \dots \geq w(e'_t).$$

Заметим, что множество L максимально по включению среди множеств, входящих в J (иначе его можно расширить, а вес при этом не уменьшится). Множество I максимально по включению по самому смыслу жадного алгоритма. Таким образом, и L, и I — базисы матроида. Значит, как нам уже известно, в них поровну элементов: $t = s$.

Докажем по индукции, что для любого i верно неравенство $w(e_i) \geq w(e'_i)$. *База индукции* обеспечена первым шагом жадного алгоритма.

Пусть теперь для любого $k < n$ уже установлено, что $w(e_k) \geq w(e'_k)$. Нужно доказать, что $w(e_n) \geq w(e'_n)$.

Предположим, что это не так: $w(e_n) < w(e'_n)$. Сформируем множество

$$A = \{e \in E \mid w(e) \geq w(e'_n)\}.$$

Рассмотрим ограничение матроида $M = \langle E, J \rangle$ на множество A — матроид $M' = M|A$. Поскольку

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_{n-1}) \geq w(e'_{n-1}) \geq w(e'_n),$$

множество $B = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ является подмножеством множества A. Это множество независимо (будучи подмножеством независимого множества I) и максимально по включению. Действительно, если в A имеется более широкое независимое подмножество $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e\}$, то $w(e) \geq w(e'_n) > w(e_n)$, и жадный алгоритм должен бы был на n-м шаге включать в формируемое множество вместо элемента e_n элемент e. Итак, B — базис в матроиде M'. Однако, в M' содержится и независимое множество $C = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ (оно является подмножеством независимого множества L). Получилось, что в некотором независимом множестве матроида M' элементов больше, чем в его базисе. Противоречие!

Итак, для всех i справедливо неравенство $w(e_i) \geq w(e'_i)$. Тогда

$$w(I) = \sum_{i=1}^{s} w(e_i) \geq \sum_{i=1}^{s} w(e'_i) = w(L).$$

Значит, I — независимое подмножество максимального веса. $\square$

Доказательство теоремы показывает, что для задачи с матроидной структурой в оптимальном решении I по сравнению с произвольным независимым множеством

L больше (если выразиться более аккуратно, не меньше) не только вес всего множества, но также вес i-го по весу элемента для каждого i. Интересной особенностью оптимального решения является также то, что оно целиком определяется упорядочением весов элементов множества E, но не их конкретными значениями.

Здесь же отметим, чем жадные алгоритмы привлекательны для программистов. Во-первых, эти алгоритмы обычно легки для программирования (вспомним, например алгоритм Прима). Во-вторых, они имеют, как правило, полиномиальные оценки трудоёмкости. Это объясняется тем, что искомое множество формируется элемент за элементом, в отличие от алгоритмов типа перебора с возвратом, для которых характерна экспоненциальная трудоёмкость.

Итак, в случае матроидной структуры подмножеств жадный алгоритм приводит к оптимальному решению. Оказывается, справедливо и обратное утверждение, возникающее при естественном предположении о замкнутости системы множеств относительно включения.

Теорема 5. *Пусть J — непустая система подмножеств множества E такая, что выполняется условие J1. Если для любой весовой функции $w : E \to R^+$ жадный алгоритм находит подмножество E наибольшего веса, то $\langle E, J\rangle$ — матроид.*

Доказательство. Достаточно привести пример весовой функции, для которой жадный алгоритм, применённый к задаче, в которой выполняются условия J0 и J1 и не выполняется условие J2, не даёт оптимального решения.

Пусть подмножества A и B множества E таковы, что $|A| = k+1$, $|B| = k$, и для любого элемента $e \in A \setminus B$ множество $B \cup \{e\}$ не входит в J. Определим весовую функцию следующим образом:

$$w(e) = \begin{cases} k+2, & \text{если} \quad e \in B; \\ k+1, & \text{если} \quad e \in A \setminus B; \\ 0, & \text{если} \quad e \notin A \cup B. \end{cases}$$

Жадный алгоритм сначала выберет все k элементов множества B, после чего не сможет добавить к нему ни одного элемента ненулевого веса. Таким образом, будет сформировано подмножество веса $(k+2)k = k^2+2k$. С другой стороны, множество A имеет заведомо бóльший вес, поскольку вес каждого из $k+1$ его элементов не меньше, чем $k+1$, и

$$w(A) \geq (k+1)^2 > k^2 + 2k.$$

Жадный алгоритм не привёл к оптимальному решению задачи. □

6. Одна задача планирования эксперимента

Следуя [5], рассмотрим задачу практического характера, в которой возникает структура матроида.

Пусть некоторый объект подвергается воздействию нескольких независимых факторов. В результате единичного эксперимента можно найти некоторую числовую характеристику объекта, которая является функцией значений указанных факторов. В случае линейной модели эта функция имеет вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

где f — числовая характеристика объекта, n — общее количество факторов, x_i — значения факторов, c_i — коэффициенты, которые надлежит определить в результате проведения серии экспериментов. По техническим причинам факторы могут встречаться только в определённых комбинациях. Будем считать, что таких комбинаций m, причём $m \geq n$.

Пример. Пусть изучается влияние содержания различных минералов в почве на повышение урожайности некоторой зерновой культуры. При этом в распоряжении экспериментаторов имеется m различных удобрений, каждое из которых представляет собой смесь указанных минералов в определённых пропорциях.

В принципе можно провести m различных экспериментов и получить m уравнений:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \dots & + & a_{1n}c_n & = & f_1; \\ a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \dots & + & a_{2n}c_n & = & f_2; \\ & & & & \dots & & & & \\ a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \dots & + & a_{mn}c_n & = & f_m. \end{array}$$

Предположим, что каждый эксперимент имеет свою цену, известную экспериментаторам, а те желают провести наиболее дешёвую серию опытов для определения искомых коэффициентов c_i. Для этого им нужно в матрице $A = (a_{ij})$ выбрать n линейно независимых строк с наименьшим суммарным весом, где вес i-й строки есть стоимость i-го эксперимента. Эта задача разрешима, если ранг этой матрицы равен n; будем предполагать, что это условие выполняется.

Рассмотрим матроид строк матрицы A. Каждый базис матроида состоит из n линейно независимых векторов-строк. Базис наименьшего веса как раз и есть то, что нам требуется: он содержит строки, определяющие наиболее дешёвую систему экспериментов.

В заключение заметим, что в [5] приводится вариант жадного алгоритма для матричного матроида, основанный на классическом методе Гаусса приведения матрицы к треугольному виду. Трудоёмкость этого алгоритма — порядка m^2n операций.

7. Трансверсали

Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ — некоторая последовательность его непустых подмножеств (они могут пересекаться и даже совпадать). **Трансверсалью** (или **системой различных представителей**) для совокупности множеств P называют множество $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ такое, что для каждого числа i элемент t_i принадлежит множеству S_i; при этом при различных i и j элементы t_i и t_j также различны.

Другими словами, трансверсаль состоит из m различных представителей m множеств. Заметим, что при этом представителю одного множества не возбраняется быть членом и других множеств.

Трансверсаль любой подпоследовательности последовательности $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ называют **частичной трансверсалью** для P. Пустое множество также будем считать частичной трансверсалью: тогда *любое подмножество частичной трансверсали есть частичная трансверсаль.*

Пример 1. Имеется несколько работников, каждый из которых может выполнять определённое (своё для каждого работника) множество работ. При этом для выполнения каждой работы требуется ровно один человек. Требуется так распределить имеющуюся рабочую силу, чтобы каждая работа выполнялась. Формализуя эту задачу, имеем: E — множество работников, множество S_i состоит из тех работников, которые могут выполнять i-ю работу. Назначения на каждый вид работ сводятся к отысканию трансверсали для последовательности множеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$, где m — общее количество работ.

Пример 2. В некотором учреждении имеется m комиссий. Требуется из состава каждой комиссии назначить их председателей так, чтобы ни один человек не председательствовал более чем в одной комиссии. Здесь трансверсаль комиссий составят их председатели.

Пример 3. Пусть $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$, $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Легко видеть, что не существует трансверсали для $P = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$, однако, например, элементы 1, 2, 3, 6 составляют трансверсаль для последовательности $P' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$, то есть частичную трансверсаль для P.

Необходимое и достаточное условие существования трансверсали даёт следующая

Теорема 6. *Пусть E — непустое конечное множество. Последовательность его непустых подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ имеет трансверсаль тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит не менее k элементов, где k — произвольное натуральное число, не превосходящее m.*

Доказательство. Сначала дадим краткую запись условия существования трансверсали из формулировки теоремы:

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq |A|. \tag{1}$$

Необходимость данного условия очевидна. Перейдём к достаточности.

Предварительно докажем

Утверждение. *Если в некотором множестве, например, в S_1, не менее двух элементов, то из этого множества можно удалить один элемент, не нарушив при этом условия* (1).

От противного: пусть $|S_1| \geq 2$ и, какой элемент ни удалить из S_1, условие (1) не будет выполнено. Возьмём два элемента x и y из множества S_1. Для них найдутся такие множества индексов $A' = \{1\} \cup A$ и $B' = \{1\} \cup B$, где $A, B \subset \{2, 3, \ldots, m\}$, что

$$|\bigcup_{i \in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\})| < |A'| = |A| + 1 \text{ и } |\bigcup_{i \in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\})| < |B'| = |B| + 1. \tag{2}$$

Положим:

$$X = \bigcup_{i\in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}),\ Y = \bigcup_{i\in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Соотношения (2) перепишем в виде:

$$|X| \le |A|;\quad |Y| \le |B|,$$

откуда

$$|X| + |Y| \le |A| + |B|. \tag{3}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующий вариант формулы включения-исключения:

$$|C| + |D| = |C \cup D| + |C \cap D|, \tag{4}$$

где C и D — произвольные множества.

С помощью условия (1) оценим снизу мощности объединения и пересечения множеств X и Y. Поскольку

$$X \cup Y = \bigcup_{i\in A\cup B} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}) \cup (S_1 \setminus \{y\}) = \bigcup_{i\in A\cup B} S_i \cup S_1,$$

выполняется неравенство

$$|X \cup Y| \ge |A \cup B| + 1. \tag{5}$$

В силу того, что

$$X \cap Y \supset \bigcup_{i\in A\cap B} S_i,$$

имеем

$$|X \cap Y| \ge |A \cap B|. \tag{6}$$

Сложим неравенства (5) и (6), дважды использовав тождество (4):

$$|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| \ge |A \cup B| + |A \cap B| + 1 = |A| + |B| + 1.$$

Полученное противоречие с неравенством (3) завершает доказательство утверждения.

Будем применять процедуру из утверждения до тех пор, пока у нас не останутся лишь одноэлементные множества. При этом в объединении любых k из них содержится k элементов. Значит, все эти множества попарно не пересекаются, а их объединение и есть искомая трансверсаль. □

Замечание. Искушённый читатель, наверное, сразу узнал в теореме о существовании трансверсали теорему Холла (см., например, [10]). Действительно, построим двудольный граф с долями $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ и $V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$, в котором для каждого i множество S_i есть множество вершин, смежных с вершиной v_i. Тогда трансверсаль задаёт совершенное паросочетание из V_1 в V_2. В матримониальной трактовке теоремы Холла множество S_i состоит из девушек, знакомых i-му юноше, а трансверсаль есть множество счастливых невест. Идея изложенного выше доказательства, принадлежащего Р. Радо, позволяет получить более общий результат. Об этом пойдёт речь в §9. А сейчас установим два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Пусть E — непустое конечное множество. Последовательность его непустых подмножеств $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ имеет частичную трансверсаль мощности t тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит не менее $k+t-m$ элементов, где k — произвольное натуральное число, не превосходящее m, т.е.*

$$\forall A \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq |A| + t - m.$$

Доказательство. Чтобы иметь возможность применить утверждение теоремы, возьмём множество D, имеющее мощность $m-t$ и не пересекающееся с E, и образуем новое семейство множеств $P' = (S'_1, S'_2, \dots, S'_m)$, где $S'_i = S_i \cup D$. С помощью $m-t$ элементов множества D любая частичная трансверсаль мощности t дополняется до (полной) трансверсали. Обратно: если имеется трансверсаль для P', то выбросив из неё элементы множества D, получим частичную трансверсаль мощности не меньше t, а, значит, есть и частичная трансверсаль, мощность которой равна t. Таким образом, существование частичной трансверсали мощности t для P равносильно существованию полной трансверсали для P', а последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S'_i| = |\bigcup_{i \in A} S_i \cup D| = |\bigcup_{i \in A} S_i| + m - t \geq |A|.$$

Доказательство следствия 1 завершено. □

Следствие 2. *Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ — последовательность его непустых подмножеств. Множество $X \subset E$ содержит частичную трансверсаль мощности t для P тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad |(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap X| \geq |A| + t - m.$$

Доказательство. Положим $S'_i = S_i \cap X$ (для каждого i) и применим к последовательности $P' = (S'_1, S'_2, \dots, S'_m)$ предыдущее следствие. Получим условие

$$\forall A \subset \{1, 2, \dots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S'_i| \geq |A| + t - m.$$

Но $\cup S'_i = \cup(S_i \cap X) = (\cup S_i) \cap X$. □

8. Трансверсальный матроид

Теорема 7 (Дж. Эдмондс, Д. Фалкерсон, 1965 г.). *Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ — некоторая последовательность его непустых подмножеств, а J — множество всех частичных трансверсалей для P. Тогда $\langle E, J \rangle$ — матроид.*

Доказательство. Свойства J0 и J1, очевидно, имеют место. Проверим выполнение аксиомы независимости J2.

Прибегнем к наглядному представлению семейства множеств $P = (S_1, \dots, S_m)$ с помощью двудольного графа G, который строится следующим образом. Вершины первой доли V_1 будут соответствовать множествам $S_1, \ldots, S_m$, вершины второй доли V_2 — элементам множества E, и (для каждого i) рёбра, инцидентные вершине S_i, соединяют её со всеми элементами множества S_i. Выделению системы различных представителей соответствует некоторое паросочетание (т.е. множество попарно несмежных рёбер) в этом графе: если элемент t_i представляет множество S_i, то в паросочетание войдёт ребро $S_i t_i$. Заметим, кстати, что в случае трансверсали имеем совершенное паросочетание из V_1 в V_2.

Пусть A и B — частичные трансверсали и $|A| = |B| + 1$. Нужно доказать, что найдётся элемент $e \in A \setminus B$ такой, что $B \cup \{e\}$ — частичная трансверсаль. Паросочетания, отвечающие указанным частичным трансверсалям, обозначим соответственно через W_A и W_B. Покрасим рёбра из $W_A \setminus W_B$ в красный цвет, из $W_B \setminus W_A$ — в синий, а из $W_A \cap W_B$ — в зелёный. Красных рёбер будет на одно больше, чем синих. Заметим также, что зелёное ребро не смежно ни с одним покрашенным ребром.

Рассмотрим подграф G' исходного графа, образованный красными и синими рёбрами. Так как два ребра одного цвета не могут быть смежны, степень каждой вершины в G' равна 1 или 2. Легко видеть, что компоненты связности G' представляют собой циклы и цепи. В каждом цикле и каждой цепи цвета рёбер чередуются. Поэтому в цикле, а также цепи чётной длины одинаковое количество красных и синих рёбер. Поскольку красных рёбер больше, чем синих, найдётся цепь C нечётной длины $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{2k}$, в которой первое и последнее ребро — красные. Ровно одна из концевых вершин цепи C лежит в V_2, пусть это вершина v_1. Эта вершина инцидентна только красному ребру и изображает элемент из $A \setminus B$. Каждая из вершин $v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}$ изображает элемент множества E и инцидентна как красному, так и синему ребру. Значит, $\{v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}\} \subset A \cap B$. Перекрасим теперь цепь C, заменив красный цвет синим, а синий красным.

Вернёмся к графу G. В результате произведённой перекраски множество вершин из V_2, покрытых синими и зелёными рёбрами, пополнилось вершиной v_1, то есть частичная трансверсаль B удлинилась за счёт элемента из $A \setminus B$. $\square$

Матроид, образованный частичными трансверсалями фиксированного семейства множеств P, будем называть **трансверсальным** и обозначать $M[P]$.

Приведём пример практической задачи, в которой возникает трансверсальный матроид.

Пример. Имеется m работников; i-й работник может выполнять работы из множества работ S_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть общее множество работ $E = \cup S_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, а прибыль от выполнения работы e_i равна $w(e_i)$. Требуется так распределить работы между работниками (при этом каждый выполняет не более одной работы, а для каждой работы нужен один работник; какие-то работы могут оказаться невыполненными, а какие-то работники могут остаться без работы), чтобы общая прибыль от выполнения работ была максимальной. Математически, задача сводится к отысканию частичной трансверсали наибольшего веса для последовательности множеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$. Другими словами, нужно найти независимое множество наибольшего веса в трансверсальном матроиде. Для этого, как нам уже известно, годится жадный алгоритм.

В книге [5] обсуждается программная реализация жадного алгоритма для трансверсального матроида, имеющая трудоёмкость порядка $n\sum|S_i|$ операций.

В заключение раздела, используем понятие трансверсального матроида для решения одной теоретической задачи.

Выясним, *каким требованиям должны удовлетворять множество $A \subset E$ и семейство множеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$, чтобы первое можно было дополнить до трансверсали второго*, т.е. чтобы семейство P имело трансверсаль, содержащую множество A. Очевидно, необходимыми являются следующие условия:

1. P имеет хотя бы одну трансверсаль.

2. A — частичная трансверсаль для P.

Удивительно, но эти условия являются и достаточными. **Доказательство** проводится очень просто, если опираться на теорию матроидов. Действительно, множество A, будучи частичной трансверсалью, является независимым множеством трансверсального матроида. Любое независимое множество можно расширить до базиса. Все базисы матроида имеют одну и ту же мощность. В силу условия 1 мощность базиса равна m. Значит, базис есть трансверсаль. $\square$

9. Независимые трансверсали

Ранее мы установили необходимое и достаточное условие существования трансверсали для семейства подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ множества E. Теперь пусть на множестве E задан некоторый матроид. **Независимой трансверсалью** для P назовём трансверсаль, которая является независимым множеством в смысле указанного матроида. В частности, если матроид — дискретный, то любая трансверсаль — независимая. Следующая теорема даёт критерий существования независимой трансверсали.

Теорема 8 (Р. Радо, 1942 г.). *Пусть $M = \langle E, J\rangle$ — матроид. Последовательность $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ непустых подмножеств множества E имеет независимую трансверсаль тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит независимое множество, в котором не менее k элементов, где k — произвольное натуральное число, не превосходящее m.*

Доказательство. Условие теоремы удобно сформулировать, используя понятие ранга множества (наибольшей мощности независимого подмножества):

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad \rho(\bigcup_{i\in A} S_i) \geq |A|. \tag{1}$$

Необходимость. Если имеется независимая трансверсаль, то её пересечение с множеством $\cup_{i\in A} S_i$ имеет $|A|$ элементов, откуда $\rho(\cup_{i\in A} S_i) \geq |A|$.

Достаточность. Предварительно докажем

Утверждение. *Если в некотором множестве (например, в S_1) не менее двух элементов, то из этого множества можно удалить один элемент, не нарушив при этом условия (1).*

От противного: пусть $|S_1| \geq 2$ и, какой элемент ни удалить из S_1, условие (1) не будет выполнено. Возьмём два элемента x и y из множества S_1. Для них найдутся такие множества индексов $A' = \{1\} \cup A$ и $B' = \{1\} \cup B$, где $A, B \subset \{2, 3, \ldots, m\}$, что

$$\rho(\bigcup_{i \in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\})) < |A'| = |A| + 1 \text{ и } \rho(\bigcup_{i \in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\})) < |B'| = |B| + 1. \quad (2)$$

Положим:

$$X = \bigcup_{i \in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}),\ Y = \bigcup_{i \in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Соотношения (2) перепишем в виде:

$$\rho(X) \leq |A|; \quad \rho(Y) \leq |B|,$$

откуда

$$\rho(X) + \rho(Y) \leq |A| + |B|. \quad (3)$$

С помощью условия (1) оценим снизу ранги объединения и пересечения множеств X и Y. Поскольку

$$X \cup Y = \bigcup_{i \in A \cup B} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}) \cup (S_1 \setminus \{y\}) = \bigcup_{i \in A \cup B} S_i \cup S_1,$$

выполняется неравенство

$$\rho(X \cup Y) \geq |A \cup B| + 1. \quad (4)$$

В силу того, что

$$X \cap Y \supset \bigcup_{i \in A \cap B} S_i,$$

имеем

$$\rho(X \cap Y) \geq |A \cap B|. \quad (5)$$

Используя свойство полумодулярности ранговой функции, после сложения (4) и (5) получим:

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \geq |A \cup B| + |A \cap B| + 1 = |A| + |B| + 1. \quad (6)$$

Неравенство (6) противоречит неравенству (3). Утверждение доказано.

Будем применять процедуру из утверждения до тех пор, пока у нас не останется m одноэлементных множеств $\{t_1\}, \{t_2\}, \ldots, \{t_m\}$. При этом ранг их объединения $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ равен m. Значит, T и есть искомая независимая трансверсаль. □

Следствие. *Пусть $M = \langle E, J \rangle$ — матроид. Последовательность $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ непустых подмножеств множества E имеет независимую частичную трансверсаль мощности t тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит независимое подмножество мощности не менее $k + t - m$, т.е.*

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad \rho(\bigcup_{i \in A} S_i) \geq |A| + t - m.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству следствия 1 из теоремы 6.

10. Общие трансверсали

Критерий существования независимой трансверсали позволяет получить необходимое и достаточное условие существования общей трансверсали у двух различных систем подмножеств одного и того же множества. Имеет место

Теорема 9. *Два семейства $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ и $Q = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ непустых подмножеств конечного множества E обладают общей трансверсалью тогда и только тогда, когда для любых подмножеств A и B множества $\{1, 2, \ldots, m\}$ выполняется неравенство*

$$|(\bigcup_{i\in A} S_i) \cap (\bigcup_{i\in B} R_i)| \geq |A| + |B| - m.$$

Доказательство. Рассмотрим матроид частичных трансверсалей для P. Общая трансверсаль P и Q есть независимая (в указанном матроиде) трансверсаль Q. По теореме Радо независимая трансверсаль Q существует в том и только том случае, когда объединение любых k множеств R_i содержит независимое множество из k элементов, которое в нашем случае суть частичная трансверсаль мощности k. Применяя следствие 2 из теоремы 6, имеем

$$\forall A, B \subset \{1, 2, \ldots, m\} \ \ |(\bigcup_{i\in A} S_i) \cap X| \geq |A| + k - m,$$

где $X = \bigcup_{i\in B} R_i,\ k = |B|$. □

Покажем, как свести нахождение общей трансверсали к нахождению максимального потока в сети.

Итак, имеем множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и два семейства его подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ и $Q = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$. Построим ориентированный граф, содержащий следующие вершины:

- a — источник, b — сток;
- вершины, изображающие подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_m, R_1, R_2, \ldots, R_m$;
- по две вершины на каждый элемент множества E: $v_1', v_1'', v_2', v_2'', \ldots, v_n', v_n''$

и следующие дуги:

- aS_i и R_ib для $i = 1, 2, \ldots, m$;
- S_iv_j', если $e_j \in S_i$;
- $v_j''R_i$, если $e_j \in R_i$;
- $v_i'v_i''$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Положим пропускные способности всех дуг равными единице. Если существует общая трансверсаль $t_1, t_2, \ldots, t_m$ для P и Q, то в построенном графе есть m непересекающихся путей из источника в сток вида

$$a \to S_i \to v_k' \to v_k'' \to R_j \to b,$$

где элемент e_k является представителем множеств S_i и R_j. Эти m путей формируют максимальный поток (его величина m) в построенной транспортной сети. После нахождения максимального потока легко указать общую трансверсаль.

Пример. Для множеств $S_1 = \{1,2\}$, $S_2 = \{1,2,3,4\}$, $S_3 = \{2,4\}, R_1 = \{2,3\}$, $R_2 = \{1,4\}$, $R_3 = \{1,2,3\}$ имеем сеть (с единичными пропускными способностями всех дуг), изображённую на рис. 2. После нахождения максимального потока можно уви-

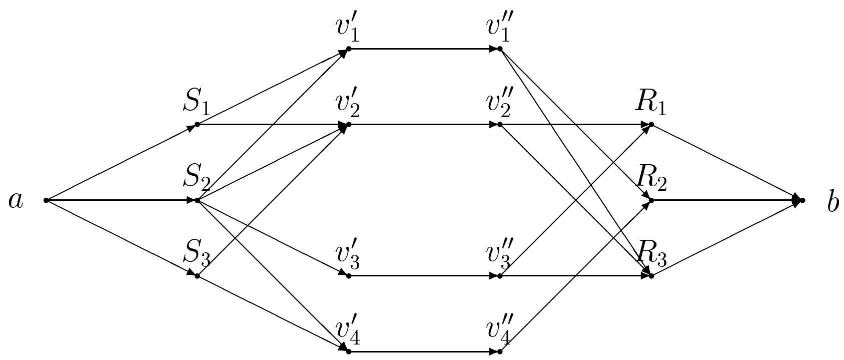

Рис. 2.

деть общую трансверсаль $\{1,2,3\}$, причём 1 является представителем множеств S_1 и R_2, 2 представляет S_3 и R_1, а 3 — множества S_2 и R_3.

11. Некоторые интересные матроиды

Геометрическое представление матроидов малого ранга

Пусть в матроиде нет циклов длины 1 и 2, а ранг матроида не больше 4. Будем изображать такой матроид в виде графа, вершины которого соответствуют элементам матроида, и при этом:

- если три элемента матроида образуют цикл, то изображающие их точки лежат на одной прямой или гладкой кривой (например, окружности);

- если четыре элемента матроида образуют цикл, то соответствующие им точки лежат на одной плоскости.

Если полученному графу можно сопоставить многогранник, то, как это принято при изображении пространственных фигур, некоторые рёбра (невидимые) будем рисовать прерывистыми линиями.

11.1. Матроид Фано

Матроид Фано F изображён на рис. 3. Он обладает многими замечательными свойствами. Установим некоторые из них.

1. *Матроид Фано является бинарным.*

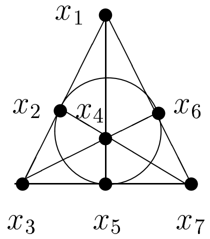

Рис. 3.

Действительно, рассмотрим линейное пространство с базисом $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ над полем $GF(2)$. Полученный векторный матроид изоморфен F. В этом легко убедиться, поставив в соответствие вершинам треугольника векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, середине каждой стороны — сумму векторов её концов, а центру — вектор $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. $\square$

2. *Матроид Фано не является регулярным.*

Предположим, что матроид F представим над некоторым полем. Элементы этого поля будем обозначать греческими буквами с индексами. Заметим, что никакие два элемента в F не образуют зависимого множества; поэтому в записанных ниже выражениях одних векторов через другие все коэффициенты отличны от нуля. Итак, для некоторых скаляров α_{ij} и β_k имеют место равенства:

$$x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3; \quad x_6 = \alpha_{61}x_1 + \alpha_{67}x_7; \quad x_5 = \alpha_{53}x_3 + \alpha_{57}x_7;$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \beta_3x_3 + \beta_6(\alpha_{61}x_1 + \alpha_{67}x_7) = \\ &= \beta_7x_7 + \beta_2(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3) = \\ &= \beta_1x_1 + \beta_5(\alpha_{53}x_3 + \alpha_{57}x_7). \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора x_4 по базису (x_1, x_3, x_7) получаем равенства

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \beta_2\alpha_{23} = \beta_5\alpha_{53}; \\ \beta_1 &= \beta_6\alpha_{61} = \beta_2\alpha_{21}; \\ \beta_7 &= \beta_5\alpha_{57} = \beta_6\alpha_{67}. \end{aligned}$$

Перемножив правые и средние части трёх записанных соотношений и сократив на $\beta_2\beta_5\beta_6$, получим, что

$$\alpha_{21}\alpha_{53}\alpha_{67} = \alpha_{23}\alpha_{57}\alpha_{61}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из линейной зависимости векторов x_2, x_5, x_6 следует равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов разложений этих векторов по базису (x_1, x_3, x_7):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{61} & 0 & \alpha_{67} \\ 0 & \alpha_{53} & \alpha_{57} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_{21}\alpha_{53}\alpha_{67} = -\alpha_{23}\alpha_{57}\alpha_{61}. \qquad (2)$$

Так как все скаляры α_{ij} в равенствах (1) и (2) отличны от нуля, получаем из этих равенств, что в нашем поле $1+1=0$.

Итак, если матроид Фано представим над некоторым полем, то это поле имеет характеристику 2. Это доказывает нерегулярность матроида. □

В дальнейшем матроид Фано будем рассматривать как векторный матроид с элементами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ над полем $GF(2)$.

3. *Матроид Фано не является трансверсальным.*

Доказательство от противного. Если матроид трансверсальный, то поскольку векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют независимое множество, без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{i} \in S_1$, $\mathbf{j} \in S_2$, $\mathbf{k} \in S_3$. Вектор $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \notin S_l$, где $l > 3$, так как в противном случае векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ были бы линейно независимы, что неверно. Пусть $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \in S_1$. Посмотрим, в каких множествах S_i может находиться элемент $\mathbf{i}+\mathbf{k}$. Он не входит в S_2 (иначе векторы $\mathbf{i}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{k}$ линейно независимы, что не имеет места) и в S_3 (иначе линейно независимыми окажутся векторы $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$). Но и при $l > 3$ вектор $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ не принадлежит S_l (в противном случае можно составить частичную трансверсаль из элементов $\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$). Остаётся единственная возможность: $\mathbf{i}+\mathbf{k} \in S_1$. Аналогичные рассуждения, применённые к вектору $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, показывают, что он также входит лишь в множество S_1. Отсюда следует, что в нашем матроиде множество $\{\mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}\}$ является зависимым, а это неверно. □

4. *Матроид Фано является* **эйлеровым** (*то есть представим в виде объединения непересекающихся циклов).*

Действительно, имеем циклы $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$ и $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}\}$. □

5. *Матроид Фано не является графическим.*

Пусть это не так. Отождествим элементы матроида с рёбрами графа G, матроид циклов которого изоморфен F. Рёбра $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}$ образуют цикл, поэтому рёбра $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ смежны. Аналогично, смежны рёбра $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. В то же время $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ не образуют цикла. Если три ребра попарно смежны и не образуют цикла, то у них есть общая вершина. Получаем подграф графа G, изображённый на рис. 4. Из рисунка

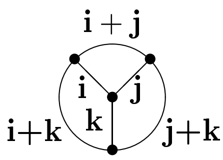

Рис. 4.

видно, что рёбра $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ не смежны, однако вместе с ребром $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ они должны составлять цикл. Противоречие! □

6. *Матроид Фано не является кографическим.*

Вновь рассуждая от противного, отождествим элементы матроида с рёбрами графа G, матроид разрезов которого изоморфен F. Поскольку в матроиде Фано циклы состоят из трёх или четырёх элементов, в графе G любой разрез содержит три или четыре ребра. Значит, степень каждой вершины графа не меньше 3. По лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин графа G равна удвоенному числу рёбер, то есть $2 \cdot 7 = 14$. Отсюда следует, что в нашем графе не более четырёх вершин. Каждое ребро графа должно входить в некоторый его разрез (так как каждый элемент матроида входит в некоторый цикл); поэтому в графе нет петель. Поскольку для любых двух элементов матроида a и b можно указать цикл, включающий элемент a и не содержащий b, для каждого ребра графа найдётся разрез с этим ребром, но без любого другого (наперёд заданного). Значит, в графе нет кратных рёбер. Итак, имеем простой граф, в котором не больше четырёх вершин. Но тогда рёбер будет не более шести, а их семь. Пришли к противоречию. $\square$

11.2. Матроид Вамоса

Пусть $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Матроид Вамоса V удобно задать, назвав все его зависимые множества: это все подмножества E, в которых не менее пяти элементов, а также $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{1, 2, 7, 8\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$. Графическое представление матроида — на рисунке.

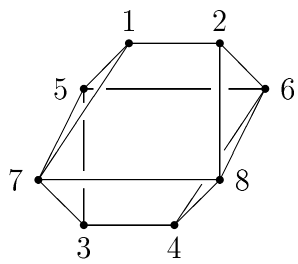

Рис. 5.

Сначала убедимся в том, что перед нами действительно матроид. Фактически нуждается в проверке лишь тот факт, что если A и B независимые множества и $|B| = 3$, $|A| = 4$, то в A найдётся такой элемент e, что $B \cup \{e\}$ — независимое множество. Когда $B \subset A$, это очевидно. В противном же случае множество $A \setminus B$ содержит по меньшей мере два различных элемента. Обозначим их через e_1 и e_2. Теперь осталось заметить, что из множеств $B \cup \{e_1\}$ и $B \cup \{e_2\}$ хотя бы одно независимое, так как по условию нет двух зависимых множеств из четырёх элементов, отличающихся одним элементом.

Докажем, что **матроид Вамоса — не векторный**, т.е. что **он не представим ни над каким полем**. Заметим, что среди всех таких матроидов он имеет наименьший порядок [14]. Этим он и замечателен.

Предположим, что существует изоморфный V векторный матроид $M = \langle E, J \rangle$, где $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$, и для каждого i вектор x_i соответствует элементу i матроида Вамоса.

Множество $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ является базисом M. Запишем координаты каждого вектора в этом базисе: $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Для дальнейшего нам понадобятся также векторы $y_i = (a_{i1}, a_{i2}, 0, 0)$ и $z_i = (0, 0, a_{i3}, a_{i4})$, где $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Ввиду линейной зависимости векторов x_1, x_2, x_5, x_6 получаем равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0,$$

то есть векторы z_5 и z_6 линейно зависимы. Заметим, что вектор z_5 ненулевой (иначе были бы линейно зависимыми векторы x_1, x_2, x_5, а у нас любые три вектора линейно независимы). Поэтому для некоторого скаляра (то есть элемента числового поля, над которым рассматривается линейное пространство) μ имеет место равенство $z_6 = \mu z_5$. Точно так же из линейной зависимости четвёрок векторов $\{x_1, x_2, x_7, x_8\}$, $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_4, x_7, x_8\}$ получаем соответственно равенства $z_8 = \beta z_7$, $y_6 = \lambda y_5$, $y_8 = \alpha y_7$, где греческими буквами обозначены некоторые скаляры.

Наконец, используем линейную зависимость векторов x_5, x_6, x_7, x_8. С помощью найденных соотношений будем преобразовывать определитель, составленный из координат этих векторов (при этом вместо строк определителя для наглядности записываем поначалу соответствующие векторы):

$$\begin{vmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ y_6 + z_6 \\ y_7 + z_7 \\ y_8 + z_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ \lambda y_5 + \mu z_5 \\ y_7 + z_7 \\ \alpha y_7 + \beta z_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} =$$

$$= \mu(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} - \lambda(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu - \lambda)(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь заметим, что $\mu \neq \lambda$ (в противном случае линейно зависимыми будут векторы $x_5 = y_5 + z_5$ и $x_6 = \lambda y_5 + \mu z_5$), а $\alpha \neq \beta$ (иначе линейно зависимы векторы x_7 и x_8). Поэтому равен нулю один из определителей $\begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix}$ — например, первый из них. Но тогда

$$\begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix} = 0,$$

то есть векторы x_3, x_4, x_5, x_7 линейно зависимы, что противоречит условию. $\square$

12. Перечисление матроидов

Известно очень мало аналитических результатов о числе матроидов того или иного вида. В [13] и [14] приводятся асимптотические оценки $f(n)$ — числа попарно неизоморфных матроидов на (фиксированном) n-элементном множестве:

$$n - \frac{3}{2}\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n) \le \log_2 \log_2 f(n) \le n - \log_2 n + O(\log_2 \log_2 n).$$

В 2004 г. была доказана (см. [12]) выдвинутая ещё в 1969 г. гипотеза Уэлша: *для любых натуральных чисел m и n выполняется неравенство*

$$f(m+n) \ge f(m)f(n).$$

К 1972 г. были перечислены лишь матроиды порядка не более 5 (см. [9]). В 2000 г. ирландский математик В. Дьюкс в своей диссертации [13] предложил алгоритм, позволивший найти все матроиды до 8-го порядка включительно.

Пусть $f_r(n)$ — число попарно неизоморфных матроидов на (фиксированном) n-элементном множестве, имеющих ранг r. Очевидно,

$$f(n) = \sum_{r=0}^{n} f_r(n).$$

Как указывает сам Дьюкс, для подсчёта $f_4(9)$ его программе понадобится около 44 лет на компьютере Athlon 1GHz.

Выпускник кафедры прикладной математики ЮУрГУ 2003 г. Сергей Новокшонов смог существенно улучшить алгоритм Дьюкса и в своей дипломной работе впервые нашёл все матроиды 9-го порядка. В частности, для обнаружения всех матроидов 9-го порядка, имеющих ранг 4, понадобилось около двух суток на компьютере Celeron 700MHz. Были перечислены бинарные, тернарные, регулярные, графические, кографические и планарные матроиды до 9-го порядка включительно.

Работу Новокшонова продолжил выпускник кафедры прикладной математики 2004 г. Александр Радионов. После модификации программы удалось вычислить $f_3(11)$ и $f_8(11)$. Осуществлено также перечисление **четвертичных** (т.е. представимых над $GF(4)$) матроидов и трансверсальных матроидов.

Комбинаторной геометрией называют матроид, каждый элемент основания которого входит в некоторое независимое множество (другими словами, в нём нет **петель** — циклов длины 1). Обозначим через $c_r(n)$ число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n и ранга r. Несложно видеть, что

$$f_r(n) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i c_r(i).$$

В следующих таблицах приводятся значения, вычисленные в дипломных работах С. Новокшонова и А. Радионова. Они дают более полные сведения о числе матроидов различного вида, чем те, которые содержатся в "Энциклопедии целых последовательностей" Слоана [15].

Число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n и ранга r

n / r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	4	6	10	14	21	29	41	55
3			1	3	9	25	70	217	950	8762	288454
4				1	4	18	85	832	189274	?	?
5					1	5	31	288	189889	?	?
6						1	6	51	1217	?	?
7							1	7	79	9950	?
8								1	8	119	298363
9									1	9	173
10										1	10
11											1

Число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n различных классов

Порядок матроида n / Класс матроидов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
бинарные	1	2	4	8	16	36	80	194	506
тернарные	1	2	4	9	19	49	131	424	1652
четвертичные	1	2	4	9	21	57	173	681	3849
регулярные	1	2	4	8	16	36	78	186	470
графические	1	2	4	8	16	36	78	186	469
кографические	1	2	4	8	16	36	78	186	469
планарные	1	2	4	8	16	36	78	186	468
трансверсальные	1	2	4	9	21	58	183	760	5007
общее количество	1	2	4	9	21	60	208	1418	381448

13. Упражнения

1. Доказать, что с точностью до изоморфизма число матроидов порядка n не превосходит 2^{2^n}.

2. Найти ранг, все базисы и циклы матроида столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

обозначая i-й столбец матрицы через e_i.

3. На рис. 6 изображён граф G. Для а) матроида циклов $M(G)$; б) матроида

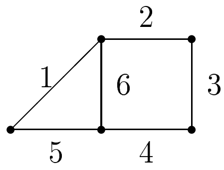

Рис. 6.

разрезов $M^*(G)$ найти все циклы и базисы.

4. Пусть в матроиде M, заданном на множестве $E = \{1, 2, 3\}$, есть ровно два базиса: $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$. Доказать, что этот матроид планарный, построив такие графы G_1 и G_2, что матроид M изоморфен матроиду циклов $M(G_1)$ и матроиду разрезов $M^*(G_2)$.

5. Покажите, что все матроиды порядка не выше 3 графические, построив соответствующие графы. Подсчитайте количество попарно неизоморфных матроидов порядка 0, 1, 2 и 3.

6. Доказать, что матроид $U_{n-1,n}$ — графический.

7. Доказать, что матроид $U_{1,n}$ — кографический.

8. Доказать, что матроид $U_{2,4}$ не является ни графическим, ни кографическим.

9. Укажите все попарно неизоморфные матроиды порядка 4. Сколько среди них не являются графическими?

10. Доказать, что матроиды $M(K_5)$ и $M(K_{3,3})$ — не кографические.

11. Через $M_q[A]$ обозначим матроид столбцов матрицы A над полем $GF(q)$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Найти три столбца матрицы A, образующие цикл в $M_2[A]$ и базис в $M_3[A]$.
2) Доказать, что $M_2[A]$ — графический матроид, а $M_3[A]$ — нет.
3) Доказать, что матроид $M_2[A]$ представим над полем $GF(3)$, а $M_3[A]$ не представим над $GF(2)$.

12. Доказать, что графический матроид представим над любым полем.

13. Для каждого из следующих семейств подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ выяснить, имеет ли оно трансверсаль:
$P_1 = (\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\})$;
$P_2 = (\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\})$;
$P_3 = (\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\})$;
$P_4 = (\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\})$.

14. Доказать, что любой матроид ранга 1 трансверсален.

15. Доказать, что k-однородный матроид трансверсален.

16. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

17. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая сможет выйти замуж за знакомого юношу!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

18. Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — некоторая последовательность его подмножеств. Частичные трансверсали P определяют трансверсальный матроид ранга r. Доказать, что этот матроид можно задать последовательностью из r множеств.

19. Доказать, что с точностью до изоморфизма число трансверсальных матроидов порядка n не превосходит 2^{n^2}.

20. Найти число попарно неизоморфных комбинаторных трансверсальных геометрий порядка n и ранга $n-1$.

21. Найти число попарно неизоморфных трансверсальных матроидов порядка n и ранга $n-1$.

22. Найти число попарно неизоморфных комбинаторных трансверсальных геометрий порядка n и ранга 2.

23. Найти число попарно неизоморфных трансверсальных матроидов порядка n и ранга 2.

24. Доказать, что матроид, изображённый на рис. 7, — не бинарный, но тернарный.

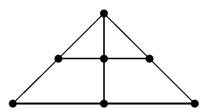

Рис. 7.

25. Доказать, что матроид из предыдущего упражнения не является трансверсальным.

26. Пусть C — цикл. Доказать, что $\rho(C) = |C| - 1$.

27. Пусть A и B — различные циклы матроида, имеющие общий элемент e. Доказать, что существует цикл $C \subset (A \cup B) \setminus \{e\}$.

28. Пусть A — независимое множество, e — произвольный элемент. Доказать, что в множестве $A \cup \{e\}$ не более одного цикла.

29. Найти $U^*_{k,n}$.

30. Доказать, что матроид $U_{2,3}$ — регулярный.

31. Над какими полями представим матроид $U_{2,4}$?

32. На рис. 8 изображены графы G_1 и G_2. Относительно матроидов циклов

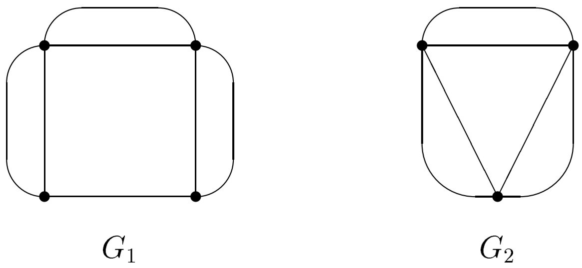

Рис. 8.

этих графов выяснить, являются ли они трансверсальными.

14. Ответы. Указания. Решения

5. 1, 2, 4, 8.

9. Всего 17 матроидов, из них 16 графических.

16. Прав. См. конец §.

17. Ответ: Прав.

Доказательство. Отметим на прямой точки, изображающие юношей, а на параллельной прямой — точки, изображающие девушек. Точки, соответствующие брюнетам и блондинкам, покрасим соответственно в синий и жёлтый цвет. Остальные точки будем называть белыми. Вариант образования супружеских пар, имеющийся у первой свахи, изобразим синими отрезками, а вариант второй свахи — жёлтыми. Некоторые отрезки при этом станут зелёными. Наша цель — найти попарно не смежные цветные отрезки (то есть без общих концов), покрывающие в совокупности все цветные точки.

Каждый зелёный отрезок не смежен ни с каким другим цветным отрезком. Ясно также, что отрезки одного цвета попарно не смежны. Поскольку каждая цветная точка является концом одного или двух цветных отрезков, синие и жёлтые отрезки образуют несколько ломаных (отрезок считаем частным случаем ломаной) без общих концов, причём цвета звеньев любой ломаной чередуются.

Если ломаная замкнутая, то её звенья синего цвета покрывают все её вершины, поэтому можно стереть жёлтые звенья этой ломаной. Пусть теперь ломаная незамкнутая. Так как каждая цветная точка порождает свой цветной отрезок, концы ломаной не могут быть оба белыми (иначе цветных точек будет меньше, чем цветных отрезков). Возьмём цветной конец ломаной и пойдём по ней. Другой её конец будет белым, так как в каждую цветную точку мы попадаем, идя по отрезку другого цвета, и, значит, ломаная продолжается отрезком цвета этой точки. Таким образом, звенья ломаной, имеющие цвет её цветного конца, покрывают все её цветные вершины. Звенья другого цвета стираем.

В результате у нас останутся цветные отрезки без общих концов, покрывающие все цветные точки. Задача решена.

18. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором вершины первой доли соответствуют множествам S_i, а второй — элементам множества E. Ребро $S_i e_j$ присутствует в графе тогда и только тогда, когда $e_j \in S_i$.

Любое независимое множество трансверсального матроида можно теперь рассматривать как множество вершин второй доли, покрытое некоторым паросочетанием.

Зафиксируем некоторую максимальную частичную трансверсаль. Ей отвечает некоторое паросочетание мощности r. Пусть оно покрывает множество A вершин из V_1.

Возьмём теперь произвольное независимое множество матроида — множество B вершин из V_2, покрываемое некоторым паросочетанием. Согласно задаче 17 существует паросочетание, покрывающее одновременно множества A и B. Его мощность не меньше r (поскольку покрывает A), но и не больше r (это ранг матроида) — значит, она равна r.

Таким образом, элементы множества B образуют частичную трансверсаль для системы множеств A. Стало быть, если мы сохраним в P лишь множества, вошедшие в A, то получим тот же самый матроид.

20. Ответ: $n-1$. **Решение.** Число различных базисов трансверсальной комбинаторной геометрии порядка n и ранга $n-1$ принимает значения $2, 3, \ldots, n$. Пусть имеется ровно k базисов. Тогда $n-k$ элементов входят во все базисы, а оставшиеся k элементов этим свойством не обладают. Отсюда следует изоморфизм любых двух таких матроидов.

Пример системы множеств, порождающей матроид указанного вида с k базисами: $P = (\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n-k\}, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1})$, где $A_1 = A_2 = \cdots = A_{k-1} = \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$.

21. Ответ: n. **Решение.** Если матроид порядка n и ранга $n-1$ не является комбинаторной геометрией, то в нём одна петля, а оставшиеся элементы образуют единственный базис.

22. Пусть M — трансверсальная комбинаторная геометрия ранга 2. Как следует из задачи 18, M можно задать системой из двух множеств $P = (S_1, S_2)$. Множества S_1 и S_2 упорядочим таким образом, что $|S_1| \le |S_2|$. Поскольку M — комбинаторная геометрия порядка n, $\quad |S_1 \cup S_2| = n$.

Положим $T_1 = S_1 \setminus S_2, n_1 = |T_1|$, $T_2 = S_2 \setminus S_1, n_2 = |T_2|$, $T_3 = S_1 \cap S_2$. Заметим, что $n_1 \le n_2$. Назовём **характеристикой** матроида упорядоченную пару чисел (n_1, n_2).

Легко описать все циклы матроида M. Любые два различных элемента из T_1 (как и из T_2) образуют цикл, и других циклов длины два в матроиде нет.

Если $T_1 = \phi$, то перенесём один элемент из T_3 в T_1. Очевидно, что получится матроид, изоморфный M. Аналогично поступим, если $T_2 = \phi$ (случай $|T_1| = |T_2| = 0, |T_3| = 1$ в матроиде ранга 2 невозможен).

Таким образом, будем считать, что характеристика матроида удовлетворяет неравенствам

$$1 \le n_1 \le n_2 \le n - n_1.$$

Докажем, что

Трансверсальные комбинаторные геометрии ранга 2 с мощностью основания n изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их характеристики.

Доказательство. Пусть матроиды M и M' задаются системами множеств $P = (S_1, S_2)$ и $P' = (S_1', S_2')$, и при этом
$T_1 = S_1 \setminus S_2 \neq \phi$; $T_2 = S_2 \setminus S_1 \neq \phi$; $T_3 = S_1 \cap S_2$;
$T_1' = S_1' \setminus S_2' \neq \phi$; $T_2' = S_2' \setminus S_1' \neq \phi$; $T_3' = S_1' \cap S_2'$.

Если характеристики матроидов совпадают, то $|T_1| = |T_1'|, |T_2| = |T_2'|$ и $|T_3| = |T_3'|$, что говорит о существовании биекции между T_i и T_i' для $i = 1, 2, 3$. В силу описанной выше структуры циклов трансверсального матроида ранга 2 отсюда следует изоморфизм матроидов.

Если же характеристики матроидов разные, то и их стуктуры циклов различаются — значит, матроиды неизоморфны. □

Из доказанного утверждения вытекает, что число попарно неизоморфных трансверсальных комбинаторных геометрий ранга 2 с мощностью основания n совпадает с количеством упорядоченных пар натуральных чисел (i, j) таких, что $1 \leq i \leq j \leq n - i$.

Рассмотрим следующие множества, составленные из упорядоченных пар натуральных чисел: $A = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n - i\}$, $B = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$.

Тогда $A \setminus B = \{(i, j) \mid 1 \leq i < n - j + 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$; $B \setminus A = \{(i, j) \mid 1 \leq j < i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Функция $\varphi : (i, j) \to (n - j + 1, i)$ осуществляет биективное отображение множества $A \setminus B$ на множество $B \setminus A$. Значит, множества A и B равномощны. В то же время, легко видеть, $|B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Таким образом, получаем

Ответ: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

23. Ответ: $\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$ при $n = 2k$; $\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$ при $n = 2k + 1$.

Литература

[1] Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир, 1982. – 558 с.

[2] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы.* — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 288 с.

[3] *Введение в криптографию*/ Под ред. В.В. Ященко. — М.: МЦНМО-ЧеРо, 1999. – 272 с.

[4] *Лекции по теории графов*/ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. – 384 с.

[5] Липский В. *Комбинаторика для программистов.* — М.: Мир, 1988. – 213 с.

[6] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов.* — СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

[7] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* — М.: Мир, 1985. – 512 с.

[8] Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.

[9] Уилсон Р. *Введение в теорию графов.* — М.: Мир, 1977. – 208 с.

[10] Эвнин А.Ю. *Вокруг теоремы Холла.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 71 с.

[11] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 176 с.

[12] Crapo H., Schmitt W. *The free product of matroids* // European Journal of Combinatorics, 2004, arXiv:math.CO/040980.

[13] Dukes W.M.B. *Counting and Probability in Matroid Theory.* — School of Mathematics, University of Dublin, 2000. – 123 p.

[14] Oxley J.G. *Matroid Theory.* — New York: Oxford Univ. Press, 1992. – 532 p.

[15] Sloane N.J.A. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences.* — http:// www.research.att.com/njas/sequences, 2004.

[16] Welsh D.J.A. *Matroid Theory.* — London: Academic Press, 1976. – 433 p.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.
evnin@prima.susu.ac.ru

Функция (в математике)

Н. Н. Лузин

Одно из важнейших математических понятий — понятие функции — прочно вошло в школьные программы по математике для старшеклассников. Предлагаемая статья великого русского математика Николая Николаевича Лузина содержит описание развития понятия функции от начала 18-го до тридцатых годов 20-го века. Первоначально статья была напечатана в Большой Советской Энциклопедии, том 59, 1935 г.

Функция (в математике) обозначает в самом общем понимании связь между переменными величинами. Если величина x может принимать произвольные значения и указано какое-либо правило, посредством которого приводятся в соответствие с этими значениями определенные значения другой величины y, то мы говорим, что y является функцией от x и записываем это символически $y = f(x)$ или $y = F(x)$ или $y = \varphi(x)$ и т. п. Величину x называют независимой переменной, или аргументом, y — зависимой переменной. Однако такое определение функции слишком расплывчато и нуждается в следующих уточнениях:

1) относительно изменения переменной x: как того интервала ab, внутри которого она может изменяться ($a < x < b$), так и того, принимает ли она все числовые значения от a до b (непрерывная независимая переменная) или лишь некоторые, например, лишь целочисленные;

2) относительно самого характера правила, указывающего, каким образом значению x соответствует значение y;

3) относительно природы аргумента x, являющегося действительным или комплексным переменным, и т. д.

Понятие *функции* — одно из самых основных понятий современной математики. Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, которые продолжаются до настоящего времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия, усвоить которое возможно, лишь проследив основные линии этого развития, теснейшим образом связанного с развитием естествознания, в частности, математической физики.

Главные колебания массивной системы. Представим себе какую-нибудь массивную систему (например, железный мост), находящуюся в положении равновесия. Если эта система будет слегка выведена из него, то, стремясь возвратиться к нему, она будет совершать колебания. Колебание системы называется *главным*, если все точки системы *одновременно* проходят через положение своего равновесия. Еще в XVII в. рассмотрение движения системы с одной степенью свободы было в существенном закончено, и в XVIII в. началось изучение движений систем со многими степенями свободы. Первые шаги в этом направлении были сделаны знаменитым Иваном Бернулли (1727). Желая изучить движение звучащей струны, он мысленно помещает на горизонтальную невесомую нить, натянутую при помощи гирьки, на равных расстояниях n равных грузиков. Он дает периоды главных колебаний для случаев, когда число грузиков меньше 8, и указывает важный принцип, по которому сила, действующая на материальную частицу при главном колебании, всегда пропорциональна расстоянию этой частицы от ее положения равновесия. Из этого принципа он тотчас же устанавливает, что отношение $\dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{y_k}$ должно быть независимым от k; здесь y_k обозначает расстояние k-го грузика от упомянутой невесомой нити, находящейся в положении равновесия; при этом следует тотчас же указать, что амплитуда колеблющихся частиц предполагается всегда бесконечно малой. Этот способ дал ему уравнение в конечных разностях для y_k. Входящие в эти разностные уравнения постоянные определяются из алгебраического уравнения n-й степени, и каждому из его корней отвечает определенное колебание всей системы. Но он не мог исследовать действительность этих корней и отсутствие у них кратности.

Несколько позже (1732–36) сын И. Бернулли Даниил Бернулли и его друг Эйлер занялись аналогичной задачей определения главных колебаний вертикальной невесомой нити, прикрепленной вверху, снабженной опять n грузиками и свободно раскачивающейся на ветру. Первый, замечательный экспериментатор, дал сперва опытное решение для $n = 2$ и 3, а затем доказал верность его и теоретически. Второй, не менее замечательный математик, трактовал общий случай и доказал, что при главном колебании стороны колеблющегося многоугольника пересекают вертикальное положение нити в постоянных точках.Оба они затем начали исследовать и другие системы, например пластинку, погруженную в жидкость и раскачивающуюся там, раскачивание тяжелой палки, подвешенной за один конец, и наконец маятник.

Во всех этих задачах Бернулли и Эйлер ограничивались только главными колебаниями. Когда сила зависела лишь от места материальной частицы, главные колебания были гармоническими, т. е. такими, в которых отклонение k-й частицы давалось формулой $y_k = f_k \cos \alpha t$, где f_k для каждой частицы было свое собственное; длительность же колебания для всех частиц оказывалось одной и той же: $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$. Совершенно явно Д. Бернулли формулировал в общем виде существование главных колебаний, но он не мог исследовать действительности и различия соответствующих корней вспомогательного уравнения. Крайне важным является то фундаментальное обстоятельство, что *начало сложения колебаний, т. е. получение произвольного движения системы из одних только главных колебаний*, тогда еще ускользало от них обоих. Одни лишь теоретики музыки (Рамо, 1726) уже давно указывали, что кроме основного тона музыкального инструмента имеются еще и обертоны. Важно подчеркнуть, что сосредоточение внимания на основном колебании было основано на следующей ошибке: еще с исследований знаменитого Тейлора (1713) среди математиков укоренилось заблуждение, от которого не был свободен сначала даже Д. Бернулли, будто бы всякое сложное колебание очень быстро устремляется к status uniformis, именно к основному колебанию. *Физически* это до известной степени верно, т. к. трение, сопротивление воздуха и т. п. заставляют энергию рассеиваться, выделяя основное слагающее. Но все дело было в том, что это заключение молчаливо переносили на *математический* аппарат, т. е. на решение дифференциальных уравнений, в которых *отнюдь не содержалось этого побочного явления.*

Предельный переход от дискретных систем к непрерывным. От случая *конечного* числа материальных частиц Д. Бернулли и Эйлер, не задумываясь, перешли к случаю *непрерывных* систем тем, что они что они просто представляли эти системы составленными из очень большого или бесконечно большого числа частиц. Смелость математиков XVIII в. общеизвестна: никто из них кроме Вариньона, Николая Бернулли и Д'Аламбера не понимал трудностей перехода к пределу. Для них было самоочевидно, что предложение, имеющее силу для всякого конечного числа n, должно иметь смысл и силу и для n бесконечно-возрастающего. Они плохо различали между «очень большим» и «бесконечно-большим», между результатами, имеющими ограниченную точность, и результатами, точность которых может быть увеличиваема по произволу. Они употребляли разность вместо дифференциала, сумму вместо интеграла, не делая между ними различия. Обычно перенос заключения от конечного на бесконечное делался двояко: *или* в уже готовых формулах *или* еще в самом начале. Очень важным примером первого является работа Д. Бернулли о качании тяжелой однородной гибкой нити, подвешенной вверху. Сначала он берет невесомую нить, отягощенную n грузиками, решает эту задачу и в ответе, полагая n бесконечно большим, получает решение о колебаниях тяжелой гибкой нити в виде $y = \cos\left(\frac{t}{T}\right) f(x)$, где x — абсцисса точки нити, y — ее отклонение от положения равновесия и где $f(x) = 1 - \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{2!a}\right)^2 - \left(\frac{x}{3!a}\right)^3 + \cdots$. Здесь a определяется так, чтобы $f(l) = 0$, где l — длина тяжелой нити.

Из ранее найденного результата для случая грузиков он заключает, что уравнение $f(l) = 0$ имеет *бесконечно много корней*: a_0, a_1, a_2, a_3, ... и что корень a_k соответствует такому главному колебанию, при котором тяжелая нить кроме точки подвеса имеет еще k неподвижных точек.

Прямое определение главных колебаний дифференциальным уравнением. Важнейшим примером перехода к пределу уже в самом начале исследования является замена системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 y_k}{d\,t^2} = f(y_{k+1}, y_k, y_{k-1}) \tag{1}$$

одним дифференциальным уравнением *с частными производными*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\, t^2} = F\left(y, \frac{\partial\, y}{\partial\, x}, \frac{\partial^2 y}{\partial\, x^2}\right). \tag{2}$$

Это делается, полагая $y_k = y_{k-1} + \Delta y_{k-1}$ и $y_{k+1} = y_{k-1} + 2\Delta y_{k-1} + \Delta_2 y_{k-1}$ и заменой разностей дифференциалами. При этом способе на место системы алгебраических уравнений, связывающих начальные значения y-ков при главном колебании, и соответственно с этим на место одного разностного уравнения, объединяющего все эти уравнения, приходит одно *обыкновенное* дифференциальное уравнение для начальной фигуры. При этом получают это уравнение, также принимая $y = Y\cos at$ в уравнении (2) для отыскания главного колебания и требуя, чтобы y зависело только от x (а не от t). Наконец нужно принять во внимание те исключительные условия, которые имеются для начальной и конечной точек системы, и выразить их при помощи особых уравнений (граничные условия). Первым провел исследования звучащей струны этим путем Тейлор (1713). Он доказал, что фигурой колебания струны будет кривая, радиусы кривизны которой относятся, как ординаты. Иначе говоря, он получил уравнение $y'' = -n^2 y$, давшее ему после двух интеграций количество, пропорциональное синусу аргумента, пропорционального абсциссе. Тейлор не написал самого решения explicite, потому что в ту эпоху не был введен значок sin для синуса. По этой причине он не мог поставить вопроса о том, единственным ли способом подбираются постоянные интегрирования, чтобы удовлетворить всем условиям. Он впадает здесь в свою знаменитую ошибку, думая, что главное колебание только одно и что всякое другое движение звучащей струны стремится перейти в найденное им основное колебание, *даже когда начальное движение было произвольным.* Вслед за ним Герман и Д. Бернулли повторяют его ошибку; получая своим способом решение Тейлора, Д. Бернулли говорит о том, что фигура звучащей струны есть socya trochoidis, потому что тогда названия синусоиды еще не было. Оба указанных автора (1716 и 1728) не подозревают о возможности иных движений звучащей струны. Первые предчувствия о существовании многих других главных колебаний зародились у Д. Бернулли, когда он начал трактовать проблему о колебаниях свободно висящей тяжелой гибкой нити (1732 и 1739), в которой он видит аналог звучащей струны. Он тут же пробует делать физические опыты со звучащей струной, наблюдая, что в узловых точках бумажки, надетые на струну, не сбрасываются ею. Эйлер же в эту эпоху (1734) все еще говорит лишь об основном тоне. Только в 1744 Эйлер, трактуя проблему главных колебаний упругой пластинки, закрепленной на одном конце, показывает что вспомогательное уравнение, корням которого соответствуют главные колебания, имеет бесконечно много корней, которые он тут же старается аппроксимировать.

Спор о звучащей струне. *Работа Д'Аламбера.* Хотя у Д. Бернулли и Эйлера были намеки на множественность главных колебаний звучащей струны, однако

Д'Аламбер первый, в своей знаменитой работе 1747, дал почти исчерпывающее решение этого вопроса. Он прямо заявляет, что целью его работы является доказательство того, что проблема формы звучащей струны имеет много других решений, кроме «подруги циклоиды». Метод Д'Аламбера состоит в следующем: отправляясь от дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ с помощью тождеств $d\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}dt$ и $d\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}dx + \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}dt$ он получает как следствия: $d\left(\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt + dx)$ и $d\left(\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt - dx)$, откуда он тотчас же заключает, что $\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t + x$, а $\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t - x$, иначе говоря $\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x} = \Phi(t + x)$ и $\dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial y}{\partial x} = \Delta(t - x)$; следовательно, $dy = \dfrac{\partial y}{\partial t}dt + \dfrac{\partial y}{\partial x}dx = \dfrac{1}{2}\Phi(t + x)d(t + x) + \dfrac{1}{2}\Delta(t - x)d(t - x)$.

Отсюда Д'Аламбер, интегрируя, получает окончательное решение $y = \varphi(t + x) + \delta(t - x)$, которое он не колеблясь называет «общем решением». В случае, когда струна, закрепленная в точках $x = 0$ и $x = l$ оси OX, проходит в момент времени $t = 0$ через положение равновесия (ось OX), решение это принимает вид $y = \varphi(x + t) - \varphi(x - t)$, где φ есть периодическая четная функция с периодом $2l$; в случае же, когда струна в начальный момент времени $t = 0$ имеет вид $y = \Sigma(x)$, а скорости ее частиц даются формулой $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \sigma(x)$, тогда решение принимает вид $y = \varphi(x + t) - \varphi(x - t)$, где периодическая с периодом $2l$ функция φ определяется из наложенных условий $\varphi(x) - \varphi(-x) = \Sigma(x)$ и $\varphi(x) + \varphi(-x) = \int \sigma(x)\,dx$. Это в сущности и заканчивало работу совершенно.

Решение Эйлера. Вслед за Д'Аламбером Эйлер (1748) берется за ту же самую проблему. Он замечает, что его решение несущественно отличается от решения Д'Аламбера, но он подчеркивает, что дает *действительно общее решение*. Эйлер предполагает, что начальная скорость (при $t = 0$) частиц струны равна нулю и его начальная фигура струны (при $t = 0$) есть $y = f(x)$. В этих условиях решение Эйлера следующее: $y = \dfrac{1}{2}f(x + t) + \dfrac{1}{2}f(x - t)$. И он первый отмечает, что продолжительность колебания струны не зависит от начальной фигуры, если только она неделима на тождественные аликвотные[1] части. Может на первый взгляд показаться, что решения Д'Аламбера и Эйлера тождественны, отличаясь лишь во второстепенных пунктах. Однако это было не совсем так: хотя оба и употребляют ту же терминологию, но под одинаковыми словами они разумеют глубоко различные вещи. В одном они сходятся: под уравнением они разумеют равенство между двумя аналитическими выражениями (не вдаваясь впрочем в обсуждение того, что такое аналитическое выражение). И оба они считают, что если два аналитических выражения совпадают численно во всех точках какого-нибудь отрезка, то они обязаны совпадать всюду. Но Д'Аламбер и Эйлер глубочайше разнятся между собой в понимании самого смысла слова «функция»: *для Д'Аламбера это было произвольное аналитическое выражение; для Эйлера была произвольно начерченная кривая.*

[1]Аликвотная дробь — дробь вида $1/n$, где n — натуральное число — *прим. ред.*

Полемика между Д'Аламбером и Эйлером. Полностью эта противоположность взглядов выявилась в энергичной полемике, заострившей идеи и облекшей их в точные слова. Д'Аламбер первый начал искать противоречия в понимании Эйлером слова «*функция*». Он пишет: «нельзя мыслить более общего аналитического выражения для количества y, как только предполагая его *функцией* от x и t; но при этом предположении проблема звучащей струны имеет решение лишь тогда, когда различные фигуры этой струны содержатся в одном и том же уравнении». Д'Аламбер заключает, что найденное им самим и Эйлером решение только тогда имеет смысл, когда заданная функция $f(x)$ есть *периодическая функция.* Эйлер возражает на это вопросом: «Если найденное решение в тех исключительных случаях, когда фигура струны не может быть охвачена одним уравнением, негодно, то что тогда называть решением?» Он настаивает на том, что «данная им геометрическая конструкция всегда справедлива, какова бы ни была начальная фигура струны», «что различные части начальной кривой вовсе не связаны уравнением, а просто соединены их описанием» и что «знание геометрической линии совершенно достаточно для знания движения, без того, чтобы нужно было прибегнуть к вычислениям». Реплика Д'Аламбера не заставила ожидать себя. Настаивая на своём понимании решения, он отмечает тот часто ускользающий факт, что уже само наличие дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ требует, чтобы отношение $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ имело определённую (конечную) величину, и, значит, чтобы кривая обладала определённой кривизной в этой точке. В особенности это относится к концам струны, где в силу $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ радиус кривизны должен быть бесконечно велик. Наличие же всяких точек искусственных соединений разнородных кривых, вроде угловых точек, делает в них силу неопределенной и, значит, движение невозможным: «сама природа здесь останавливает вычисления». Что же касается до того, как на деле будет двигаться такая составная струна, — «оставим физике позаботиться о себе самой». Эйлер, уклоняясь от продолжения полемики, ограничивается указанием на то, что возможно создать теорию дифференциальных уравнений, содержащих такие «неправильные» или «смешанные» функции. На возражения Д'Аламбера он замечает, что его решение, употребляющее такие «неправильные» функции, подтверждает например подмеченный Д Бернулли факт распространения вдоль струны сотрясений. Д'Аламбер настаивая на своей точке зрения, повторяет, что наличие на струне угловой точки делает решение невозможным.

Идеи Д. Бернулли. Совершенно иначе подошел к проблеме Д. Бернулли. Он уже имел некоторый опыт в изучении вопросов акустики и начал понимать, что звучащая струна имеет бесчисленное множество главных колебаний. Из исследования систем дискретных точек он вывел заключение, что *наиболее общее движение струны можно получить сложением главных колебаний.*

Идеи Д. Бернулли созрели в 1753 и заключение, к которому он пришел, было то, что уравнение

$$y = a \sin x \cos t + \beta \sin 2x cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t ...$$

охватывает как решение Д'Аламбера, так и Эйлера. Таким образом Д. Бернулли открыл важнейший принцип математической физики, и ему принадлежит честь не только его формулировки, но и ясного понимания далеко идущих последствий.

Но если Д. Бернулли понимал значение и смысл открытого им принципа сложения колебаний, то *математически* он не мог его обосновать, чем вызвал живейшие возражения как Д'Аламбера, так и Эйлера. Сначала Эйлер указал, что Д. Бернулли сам не замечает того совершенно неприемлемого следствия, которое содержится в его идеях и согласно которому совершенно произвольная функция переменного x изобразима рядом синусов кратных дуг. По мнению Эйлера, тогда функция была бы нечетная и периодическая. Мы видим, что Эйлер снова неявно опирается на тот принцип, в силу которого два аналитических выражения, численно совпадающих в каком-нибудь отрезке, должны совпадать всюду. Д. Бернулли ответил на это указанием, что его формула содержит бесчисленное множество неопределенных коэффициентов, которыми всегда можно распорядиться таким образом, чтобы заставить его кривую пройти через сколько угодно точек заданной кривой и тем самым получить сколько угодно сильное приближение. Относительно возможности упущения из этого процесса той или иной отдельной точки Д. Бернулли ссылается на возражения, которые Д'Аламбер делал раньше Эйлеру. Эйлер на это ответил, что подобрать коэффициенты желаемым для Д. Бернулли образом весьма трудно, если не невозможно. С своей стороны Д'Аламбер заявил, что он вполне согласен с Эйлером в его возражениях Д. Бернулли и что он идет дальше, т. к. думает, что не всякая (аналитическая) периодическая функция может быть изображена рядом синусов, что всякая функция, изобразимая рядом синусов должна обладать непрерывной кривизной, и что совпадение обеих кривых в бесконечно многих точках еще не делает их тождественными. Из характера спора между Д'Аламбером и Д. Бернулли легко усмотреть, что первый был по современной терминологии «арифметизатором» математического анализа; второй же был физиком и смотрел на вещи с этой точки зрения.

Выступление Лагранжа. В то время, как знаменитейшие математики спорили о математических принципах, выдвинутых проблемой звучащей струны, на сцене появляется неизвестный никому молодой человек, Лагранж, сразу обративший на себя внимание своими «ловкими» вычислениями (1759). Лагранж внимательнейшим образом изучил состояние проблемы звучащей струны и занял определенную позицию в этом споре: он всецело присоединился к Эйлеру и стал в оппозицию к Д'Аламберу и Д. Бернулли. Желая доказать правоту Эйлера, Лагранж ставит на первый план *проблему интерполирования.* Беря одну из «неправильных» функций Эйлера, т. е. беря просто графически данную кривую, вообще состоящую из кусков самых различных линий, Лагранж делит ось абсцисс на малые равные отрезки. Затем проводя в точках деления перпендикуляры и отмечая т. о. последовательность точек на графической кривой, Лагранж ищет интерполяционную кривую, проходящую через отмеченные точки. Интерполяцию Лагранж предпринимает *линейную тригенометрическую* с ограниченным числом членов, откуда следовало, что его интерполирующие кривые были «законами» и для Д'Аламбера, т. к. были даны простыми аналитическими выражениями. Разрешив т.о. интерполяционную задачу, Лагранж ищет решение проблемы звучащей струны для *интерполяционной кривой.* Совершив наконец несколько переходов к пределу, Лагранж получает в окончательном результате формулу Эйлера для фигуры звучащей струны. Интересно, что в руках Лагранжа было величайшее открытие, мимо которого он прошел, его не заметив: делая подготовку к окончательному выводу формул Эйлера, Лагранж по дороге получает *тригонометрические ряды Фурье.* Следовало лишь сделать перестановку пределов, и открытие закона коэффициентов Фурье было бы сделано, а вместе с ним были бы окончены все дебаты. Но мысль Лагранжа устремлялась по другому пути, и он, почти касаясь открытия, так мало сознавал это, что бросил по адресу Д. Бернулли фразу: «Досадно, что столь остроумная теория несостоятельна», хотя именно идеи Д. Бернулли, перешедшие к Фурье, собственно и решили спор. В следующей работе (1760) Лагранж снова берется за проблему струны, идя на этот раз уже методом Д'Аламбера, и приходит к формулам этого последнего, как ему казалось, «не употребив никакой непрерывности» («непрерывности» в смысле Эйлера, т. е. на современном языке «аналитической продолжаемости»). На самом деле это было не совсем верно, ибо, как известно, Лагранж глубоко верил в то, что всякая непрерывная (в современном смысле) функция имеет все производные и даже разложима в ряд Тейлора, за исключением может быть отдельных точек: поэтому было в высшей степени трудно проследить, где в рассуждениях Лагранжа входит или не входит эйлеровская непрерывность. Критики Лагранжа, не входя в принципиальные стороны его исследования и признавая его выкладки в целом «исключительно ловкими», возражали лишь против отдельных пунктов. Прежде всего Д'Аламбер обрушился на многочисленные у Лагранжа переходы к пределу: тонкий ум Д'Аламбера вполне прозревал связанные с ними трудности. Затем Д'Аламбер возражает против расходящихся рядов. Лагранж, отвечая ему, просто указывает на то, что «ни один человек, заменив ряд $1 + x + x^2 + x^3...$ формулой $\dfrac{1}{1-x}$, еще не совершил ошибки». Далее Лагранж, защищаясь от возражений Д'Аламбера (сделанных этим последним и Эйлеру) о принудительном существовании в точках звучащей струны радиусов кривизны, указывает, что «природа не может остановить выкладок, так как физически угловых точек у струны нет, а всегда есть некая закругленность, вызванная жесткостью струны». В дальнейшей переписке Д'Аламбер принуждает Лагранжа согласиться с тем, что решение последнего неявно предполагает наличие и конечность всех производных. А так как и Д'Аламбер и Лагранж разделяли господствующее в то время убеждение в том, что наличие всех производных делает функцию разложимой в ряд Тейлора, то Лагранж был вынужден согласиться с тем, что он молчаливо ввел эйлерову непрерывность, иначе говоря — изображение функции уравнениями, на чем всегда и настаивал Д'Аламбер.

Лагранж впрочем сделал еще одну попытку подкрепить свои соображения, истинность которых весьма определенно чувствовал. В новом изложении он проводит кривую, являющуюся решением задачи о струне и составленную из m синусоид, через определенное число точек. Существенно, что точки эти уже не лежат на самой заданной кривой, но расположены вблизи нее. Эту проведенную кривую Лагранж назвал «женератриссой». Он замечает, что когда m очень велико, отклонения женератриссы от начальной формы струны очень малы, и тогда можно эту начальную фигуру рассматривать как кусок женератриссы. Он ставит вопрос: не предполагает ли это уже, что начальная фигура струны составлена из синусоид? И отвечает:

если дело идет о «геометрическом» тождестве, такое предположение неизбежно; но во всех остальных случаях начальная кривая является как бы родом асимптоты, к которой женератрисса неограниченно приближается, никогда однако не делаясь тождественной с ней. А из коэффициентов своей интерполяционной формулы Лагранж тут же выводит заключение, что пренебрегать отклонением женератриссы можно лишь тогда, когда начальная фигура имеет непрерывные производные *всех* порядков; это свойство должно сохраняться во все время движения струны. Только в этих условиях движение струны возможно. Но Лагранж не показывает читателю, что это утверждение есть полный отказ от защиты точки зрения Эйлера (что было его первоначальной целью) и составляет возврат к Д'Аламберу. Этот же последний упорно держался своих взглядов, настаивая на незаконности употребления расходящихся рядов. Достойно внимания, что он цитирует функцию $\sqrt[3]{\sin x}$ как пример того, что всюду конечная функция не разложима в ряд Тейлора. От его острого взора не ускользает, что именно этот пример направляется против него же самого: с одной стороны здесь налицо «уравнение», и, значит, такая форма струны допускает решение; с другой — здесь конечности всех производных уже не имеется. Чтобы помочь делу, Д'Аламбер говорит, что бесконечно-большие значения производных допустимы, лишь бы не было только скачков. Дебаты эти длились еще 20 лет, не получая окончательного решения.

Открытие Фурье. Понятие функции вовсе не является в настоящий момент окончательно выкристаллизовавшимся и беспрекословно установленным, как это казалось одно время в конце 19 в.: без преувеличения можно сказать, что в настоящий момент понятие функции подверглось дальнейшей эволюции и что спор о звучащей струне все еще длится, только разумеется в совсем другой научной обстановке, другими лицами и в другой терминологии. Возвращаясь к спору 18 в. и рассматривая его уже с современной точки зрения, следует прежде всего отметить чрезвычайную проницательность и интуитивную мощь споривших мыслителей и необыкновенное богатство глубоких аналитических идей, связанных с этим спором и в значительной степени порожденных им. В этом смысле спор был пестрым клубком, составленным из глубоких и труднейших вопросов, касавшихся возможности перехода к пределу и перестановки пределов; условий пользования расходящимися рядами; сходимости ряда Тейлора при наличии *всех* производных; различия функции от ее аналитического изображения; аналитического продолжения функции; понятия произвола; бесконечных определителей; кривой без кривизны и кривой, составленной из одних угловых точек; интерполирования; разрывов функции и, в особенности, тригонометрических рядов. Последние имели в споре и в последующее время такое значение, что справедливо получили в дальнейшем имя «оси, около которой вращается весь математический анализ». Разбираться в столкновении всех этих идей нелегко даже в свете современного математического анализа; притом у нас нет полной уверенности в правильном понимании точки зрения каждого из споривших мыслителей. Например Эйлер еще в 1744 сообщает Гольбаху формулу $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{\pi-x}{2}$, отнюдь не делая отсюда заключения о том, что *два аналитических выражения могут совпадать в отрезке, без того, чтобы совпасть всюду.* Такое заключение казалось в ту эпоху чудовищным, и Эйлер, имея в руках уже точный факт, прямо подтверждающий это, не видел его по каким-то неясным для нас причинам. В общем, в свете современного математического анализа, дело по-видимому происходило следующим образом. Вопрос, поставленный спором, касался отношения между аналитическим определением функции и определением до некоторой степени физическим; если отклонить *произвольно* струну из ее положения равновесия, то существует ли формула, дающая в точности начальное положение этой струны? Ни тонкий аналитический ум Д'Аламбера, ни творческие усилия Эйлера, Д. Бернулли и Лагранжа не могли решить этого труднейшего вопроса. Сделать это выпало на долю Фурье, который в 1807 к общему изумлению дал правило вычисления коэффициентов a_n и b_n тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, изображающего «произвольно-заданную» функцию $f(x)$. Формулы эти

$$a_n = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi} f(a)\cos na\, da \qquad \text{и} \qquad b_n = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi} f(a)\sin na\, da,$$

получившие тот час же имя «*формул Фурье*», категорически решили спор в пользу Д. Бернулли: главным возражением против Д. Бернулли и было как-раз отсутствие правила вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольно» заданную функцию $f(x)$. Оставалось, правда, еще возражение против Фурье, состоявшее в том, что неизвестно было, сходятся ли его ряды; но, во-первых, уже одно столь простое правило вычисления коэффициентов тригонометрического ряда говорило само за себя; а во-вторых, последовавшие работы Лежен Дирихле (1805—1859) окончательно установили сходимость рядов Фурье для всякой функции $f(x)$, имеющей ограниченное число максимумов и минимумов. Открытие Фурье произвело величайшее недоумение и растерянность среди всех математиков. Оно опрокидывало все понятия. До сих пор считали, как это делали Эйлер и Д'Аламбер, что всякое аналитическое выражение изображает только такую кривую, последовательные части которой, взаимно зависят друг от друга. Эйлер ввел свой термин «непрерывная функция» для того, чтобы выразить эту взаимную зависимость частей функции; в настоящее время его термин «непрерывность» получил совсем иной смысл. Под влиянием идей эйлеровской непрерывности Лагранж в своей теории аналитических функций (1797) пытался доказать, что всякая непрерывная функция разложима в ряд Тейлора: уже в то время чувствовалась связь между различными частями функции, разлагаемой в ряд Тейлора, так как сознавали, что знание малой дуги позволяет узнать всю кривую. И вот Фурье показал, что подобные претензии тщетны и невозможны, т. к. физик, чертящий произвольным образом кривую, в каждый момент может изменить течение кривой по своему капризу; но раз кривая уже начерчена, то оказывается возможным представить ее единым аналитическим выражением. Таким образом начали приходит к парадоксальному результату, будто нет никакой органической связи между различными участками одной и той же прямой или различными дугами одной и той же окружности, потому что открытие Фурье показывало, что можно охватить единой аналитической формулой, одним уравнением непрерывную линию, составленную из отрезков различных прямых или других различных окружностей. Правда раздавались робкие голоса, указывавшие, что уравнение единой прямой или единой окружности выглядит «проще», чем разложение Фурье. Но скоро увидели, что этот критерий «простоты» никуда не годился, т. к. заставлял ограничиваться лишь алгебраическими функциями и запрещал пользоваться скомпрометированными открытием Фурье бесконечными разложениями, важность и польза которых росла со дня на день.

Понятие функции после открытия Фурье. Современное понимание функции и ее определения, кажущиеся нам сейчас точными, могли родиться лишь после открытия Фурье. Открытие это ясно показало, что большинство недоразумений в споре о звучащей струне происходило из-за смешения двух понятий, казавшихся совпадающими, но на самом деле глубоко различных: понятия самой функции и понятия *ее аналитического изображения*. Действительно, оба эти понятия: «функция» и «аналитическое выражение» до Фурье совсем не различались и лишь открытие Фурье произвело их *расцепление*. С этого момента усилия математиков направились по двум совершенно различным руслам. *С одной стороны,* стремление удержать взаимную зависимость частей кривой вылилось в современную *теорию функций комплексного переменного.* На этом пути предстояло уже совершенно отделить понятие функции от ее аналитического изображения. Это и было сделано Вейерштрассом в понятии «аналитическая» («голоморфная») функция. *С другой стороны,* открытие Фурье и изучение значений аналитических выражений разрушали всякую связь между различными частями кривой. Казалось, что значения аналитических выражений обладают лишь одним свойством: *быть определенными* — в остальном же они совершенно произвольны, будучи независимы друг от друга. В этом смысле и было определено понятие функции, данное Дирихле. Это определение явилось основным для современной *теории функций действительного переменного.* Определения функциям, данные Вейерштрассом и Дирихле, внесли в свое время большую ясность и успокоение в среду математиков. Казалось, что эта ясность уже окончательна и что больше ничего не остается, как развивать следствия добытых наконец после стольких трудов и усилий твердых определений. Однако в самое последнее время стало очевидным, что среди математиков отнюдь не установилось полного единодушия относительно ценности и даже смысла полученных определений функции: все чаще и чаще стали появляться подкрепленные неоспоримыми фактами намеки на то, что определение функции, данное Вейерштрассом, — слишком *узко*; с другой стороны, математики с чувством глубочайшего изумления констатировали, что в их среде нет полного единодушия в понимании смысла определения функции, данного Дирихле: в то время как одни находили его совершенным, другим оно казалось слишком широким, а третьи просто отрицали за ним какой-либо смысл. Таким образом сделалось ясно, что спор о звучащей струне возобновился в наши дни, но в ином свете и с иным содержанием. В общем, схема развития понятия функции представляется следующей (см. рисунок).

Функции действительного переменного. Открытие Фурье показало, что можно рассматривать как единую функцию ординату непрерывной кривой, соста-

вленной из дуг кривых, не имеющих между собой ничего общего и следовательно совершенно различной природы. Органическая (логическая) связь между различными частями кривой, изображенной единым аналитически выражением — и при том столь простым, каков например тригонометрический ряд, — была совершенно разрушена. В этих условиях казалось, что ничего другого не оставалось делать, как совершенно забыть об аналитическом выражении и заявить, что понятие функции исчерпывается просто совокупностью численных значений для разных величин x — значений, вообще говоря, совершенно независимых одно от другого. Этой идеей и руководствовался Лежен Дирихле, когда он устанавливал свое знаменитое определение функции, сохраняющее силу и по настоящий момент.

Определение функции по Дирихле: y есть функция переменного x, определенная на отрезке $[a \leq x \leq b]$, если всякому значению переменного x, содержащемуся в этом отрезке, соответствует вполне определенная величина переменного y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие. Это определение сразу пролило яркий свет на целый ряд явлений математического анализа, понимание которых было смутным. Вначале оно казалось столь совершенным, что было принято почти единогласно. Долгое время это определение рассматривали как настоящее открытие; самую формулировку его считали столь точной, что не допускали и мысли о возможности ее изменения. И действительно, это определение поставило на ноги целый ряд изысканий. С этого момента начали думать, что дальнейшие работы математического анализа должны быть посвящены лишь разысканию свойств тех или иных *частных семейств* функций, получающихся из данного Дирихле общего определения функции путем его ограничения. Таким образом возникли отделы анализа, посвященные семействам: *непрерывных* (в смысле Коши) *функций; монотонных; имеющих ограниченное число максимумов и минимумов; удовлетворяющих условиям Липшица, Дини; дифференцируемых; и т. д.* Лишь тогда, когда указанные частные семейства были выделены и изучены, стали подыматься голоса, требовавшие большей ясности от определения Дирихле, вначале не давшего никакого повода для сомнений. Атакуемым пунктом в этом определении стали слова: «*причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие*». Возражения против этого пункта и его защита впоследствии связались с обсуждением одного положения теории множеств, называемого *принципом произвольного выбора* и высказанного Цермело («аксиома Цермело»). Одним из первых, кто совершенно ясно высказывал свое недовольство этой «прибавкой» к определению функции по Дирихле, был Броден (1897). К сожалению, его соображения носили слишком общий характер; поэтому не все математики своевременно обратили внимание на его сомнения. Броден указывал на то, что определение функции должно иметь некоторое специальное свойство, чтобы легко передаваться от ума к уму. Чтобы получить представление об этом свойстве, разделим каким-нибудь способом основной отрезок $[a, b]$, где нами определяется функция $y(x)$, на бесконечное число отрезков, которые мы обозначим через δ_1, δ_2, δ_3, $\ldots$, δ_n, $\ldots$ — Пусть определяемая нами функция $y(x)$ совпадает: в первом отрезке δ_1 с ординатою некоторой прямой линией L_1, во втором отрезке δ_2 — с ординатой некоторой циклоиды L_2, в третьем отрезке δ_3 — с ординатой некоторой лемнискаты L_3, и т. д. Броден спрашивает: когда следует рассматривать в этом случае функцию $y(x)$ как определенную? И отвечает: тогда и только тогда, когда имеется определенный закон выбора кривых L_1, L_2, L_3, $\ldots$, т.е. когда эти кривые имеют между собою нечто общее и следовательно в некотором смысле будут между собой однородными («гомогенными»). Согласно Бродену, функция, составленная из бесконечного множества абсолютно неоднородных («гетерогенных») между собой кривых, не может быть предметом изучения, так как такая функция никогда не может быть нам заданной (или данной); задать или дать абсолютно разнородные кривые можно только тогда, когда они имеются в *конечном* числе: в этом случае они могут быть заданы абсолютно независимыми между собою. Но бесконечное число абсолютно независимых между собою кривых, согласно Бродену, никогда не может быть предметом изучения. Независимо от Бродена и немного позже его, за требование определенного закона, всегда *молчаливо подразумеваемого*, когда дело идет о понятии функции, высказывались Борель, Бер и Лебег (1905). Бер указал на то, что там, где дело идет о бесконечном, там аналогия мешка с шарами, который передают из рук в руки, должна быть раз навсегда изгнанной: хотя всякая функция и является, по существу, совокупностью численных значений, соответствующих различным величинам переменного x, однако эту совокупность нельзя просто передать из рук в руки, как упомянутый мешок; здесь совершенно необходимо описания *закона соответствия* всякому x числа $y(x)$, причем именно этот закон и должен быть сообщаем всякому, кто хочет рассматривать эту функцию $y(x)$. Для нашего ума «все приводится к конечному», замечает Бер. Борель, желая по возможности точнее выявить всю разницу его взглядов и взглядов Цермело и Адамара, производит такой «умственный эксперимент». Прежде всего он отмечает, что десятичное разложение числа $\pi = 3,1415926535\ldots$ следует рассматривать как *вполне определенное*, потому что во всех учебниках по элементарной геометрии показывается, каким образом можно вычислить сколько угодно десятичных знаков. В силу этого всякий десятичный знак, например миллионный, можно рассматривать как вполне определенный, даже если он еще никем не был вычислен. Потом Борель берет миллион людей, выстроенных в ряд, и, заставляя каждого назвать *наудачу* десятичный знак, получает некоторое десятичное разложение, обрывающееся на миллионном десятичном знаке. Это разложение Борель продолжает еще рассматривать как *вполне определенное*. Наконец Борель предлагает расположить в ряд не миллион людей, а бесконечное множество и заставить каждого из них назвать наудачу десятичный знак. Борель спрашивает, можно ли полученное таким образом бесконечное десятичное разложение продолжать еще рассматривать как *вполне определенное*, как например вполне определенным является десятичное разложение числа π. Ответ

Бореля гласит: математики с таким складом ума, как у Цермело и Адамара, конечно будут рассматривать это бесконечное десятичное разложение как «вполне определенное». За самого же себя Борель отвечает отрицательно, ибо полученное таким образом число может оказаться лишенным закона, так что два математика, разговаривающие о нем, никогда не будут уверены в том, что говорят *об одном и том же числе*; не обладая законом, образующим десятичные знаки такого числа, они не могут быть уверенными в его тождестве. Лебег выразился еще определеннее, утверждая, что математик, не обладающий законом, осуществляющим рассматриваемую им функцию $y(x)$, никогда не может быть уверен, что в разные моменты своего рассуждения он говорит о той же самой функции: здесь дело идет уже не об общем языке *двух* математиков, а просто о согласии математика с *самим собой*. Наоборот, Адамар, полемизируя с Борелем, утверждает, что нисколько не затруднительно рассматривать как вполне определенные десятичные разложения, «лишенные закона», т. к. например в кинетической теории газа говорят о скоростях молекул в данном объеме газа, хотя никто никогда в действительности их не будет знать. Адамар указывает, что требование закона, определяющего рассматриваемую функцию $y(x)$, сильно напоминает требование *аналитического выражения* для функции и значит отбрасывает нас к 18 веку.

Математические работы Бера и Лебега пролили много света, хотя вместе с этим и чрезвычайно запутали вопрос. Бер взялся за систематическое исследование изображения функции аналитическими выражениями. Принимая во внимание, что в силу теоремы Вейерштрасса всякая непрерывная функция $f(x)$ изобразима как сумма равномерно сходящегося ряда многочленов $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, Бер называет все непрерывные функции — *функциями класса* 0. Далее, *функциями класса* 1 Бер называет такие разрывные функции $f(x)$, которые являются пределами непрерывных функций, т. е. $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Функции $f(x)$, которые не относятся к классам 0 или 1, но которые являются пределами функций класса 1, Бер называет *функциями класса* 2 и т. д. Определение Бера идет по всем конечным числам и по всем счетным трансфинитным числам, в результате чего Бер получает свою знаменитую *классификацию функций*:

$$K_0,\ K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n,\ \ldots,\ K_\omega,\ \ldots,\ K_\alpha,\ \ldots \,|\, \Omega.$$

Всякая функция $f(x)$, входящая в классификацию Бера, имеет определенное аналитическое изображение с помощью многочленов, над которыми простираются знаки переходов к пределу, в конечном или счетном числе. Таков тип аналитических выражений, рассмотренных Бером. Лебег существенно дополнил изыскания Бера, доказав, что рассмотрение всех иных аналитических действий, как-то: дифференцирование, разложение в ряды, интегрирование, привлечение каких-либо трансцендентных функций, как например, $\sin x$, $\log x$ и т. д., совершенно бесполезно, т. к. всякая функция $f(x)$, образованная конечным или счетным числом таких операций, необходимо войдет в классификацию Бера. Лебег притом дал важное доказательство существования функции $f(x)$ в каждом классе K_α классификации Бера и в заключения нашел глубокомысленным, но чрезвычайно сложным приемом индивидуальную функцию $f(x)$, уже не входящую в классификацию Бера. Открытие Лебега произвело столь же ошеломляющее впечатление, как в свое время открытие Фурье: результат Лебега показал, что *логическое* определение индивидуальной функции является более широким, чем чисто математическое определение, т. к. *путем логического определения была получена частная функция $f(x)$, которая не может быть получена никакими переходами к пределу в конечном или счетном числе, отправляясь от многочленов*. Функция, определенная Лебегом и невходящая в классы Бера, очень сложна, и природа ее еще не изучена. Но московские работы показали, что самый деликатный пункт рассуждений Лебега вызывает возражения: когда Лебег доказывал, что *всякое* аналитическое выражение, составленное из математических знаков, в конечном или счетном числе преобразуется в выражение Бера, составленное из простых (счетных) переходов к пределу, то он, не имея действительно исчерпывающего каталога всех возможных аналитических выражений, подвергал свое дело большой опасности, т. к. всегда могло оказаться аналитическое выражение, не преобразующееся в выражение Бера. И действительно московские работы показали, что уже аналитическое выражение

$$f(x) = \overline{\lim_{y\to+\infty}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} P_{m,n}(x,y),$$

где $P_{m,n}(x,y)$ есть многочлен от букв x и y и где переходы к пределу буквами m и n простые (счетные), а переход к пределу буквой y есть *непрерывный* (*несчетный*), уже несводимо к выражению Бера при надлежащем подборе многочлена $P_{m,n}(x,y)$. И вместе с тем выяснилось, что очень часто аналитические выражения, как предвидел это Борель, не служат ни к чему, т. к. даже функции класса 1 классификации Бера *повидимому* ставят нас лицом к лицу с принципиально неразрешимыми проблемами. Указанные вопросы о природе аналитических выражений далеко еще не разрешены. Но следует указать на то, что среди мнений математиков, возражающих против определений функции Дирихле, имеются заметные и важные нюансы: так, в то время как Лебег мирится с любым законом (логическим или математическим), лишь бы он давал функцию–индивид, Борель вносит дальнейшее ограничение, требуя, чтобы закон был *счетным* (т. е. имеющим дело с натуральными числами, а не с континуумом). Брауэр, повидимому идет еще дальше, отказываясь рассматривать даже бесконечность натуральных чисел.

Функции комплексного переменного. Совсем иные судьбы претерпело определение функции, имевшее целью дать понятию функции такое содержание, при котором «знание малой дуги рассматриваемой кривой приводит к знанию всей кривой». Правда, подобно тому как Дирихле на пути действительного переменного удалось дать такое определение функции, которое рассматривалось как уже окончательное, так и на пути комплексного переменного Вейерштрассу удалось прийти к определению функции, которое столь совершенно, что большинство математиков и до сих пор рассматривают его как единственное и во всяком случае как исчерпывающее все нужды практики. Однако в то время как критика определения Дирихле явным образом домогается его *сужения*, критика определения Вейерштрасса, наоборот, ищет его *расширения*. Работам Вейерштрасса предшествовали работы Коши (1789–1857). Коши первый понял, что упомянутое свойство кривой определяться малой дугой нужно объяснять привлечением *комплексного переменного*: это переменное должно играть хотя и вспомогательную, но неизбежную роль. Мысли Коши и его основные теоремы были приведены в порядок и систематизированы Вейерштрассом (1815–1897). Основная идея Вейерштрасса состояла во введении так называемого *аналитического продолжения.* Из изысканий Коши следовало, что всякий ряд $P(x-a)$, расположенный по положительным степеням разности $x-a$, сходится внутри круга C с центром в точке a определенного радиуса, вне которого он заведомо расходится. Сумма же ряда внутри круга C имеет производные всех порядков. Вейерштрасс рассматривает эту сумму ряда $P(x-a)$ как «аналитическую функцию», определенную внутри круга C, и ищет расширения области существования этой функции путем особого процесса. Основная теорема, на которую этот процесс опирается, следующая: *если круги сходимости двух данных рядов $P(x-a)$ и $P(x-b)$ пересекаются и если в общей части этих кругов имеется точка, в которой значения обеих сумм и всех их производных соответственно равны, тогда обе суммы рассматриваемых рядов тождественны в общей части обоих кругов.* Вейерштрасс рассматривает в этом случае каждый из указанных двух рядов как *непосредственное продолжение другого* и называет каждый из них «элементом» определяемой аналитической функции. Вот определение функции (аналитической) по Вейерштрассу: *аналитическая функция $f(x)$ есть совокупность элементов, выводимых из данного с помощью с помощью последовательных непосредственных продолжений.* Вольтерра и Пуанкаре внесли окончательную ясность в это определение, доказав, что для полного определения аналитической функции во всем поле ее существования достаточно определить лишь *счетное* число непосредственных продолжений. Аналитическая функция $f(x)$ называется *однозначной*, когда нет точки z, в которой два различных элемента $P(x-a)$ и $P(x-b)$ функции имели бы существенно различные значения. Совокупность точек z, находящихся внутри кругов, принадлежащих элементам рассматриваемой однозначной функции $f(x)$, называется *естественной областью ее существования.* Всякая точка, принадлежащая границе естественной области существования однозначной функции, называется *особой точкой* этой функции. Основной теоремой является следующая: *на окружности сходимости всякого элемента аналитической функции $f(z)$ лежит особая точка.* Определение функции, данное Вейерштрассом, сразу внесло яркий свет в бесчисленные области математического анализа, казавшиеся до того времени темными. Оно сразу объяснило бесчисленное количество парадоксов и вызвало необъятное количество работ (продолжающихся до сих пор), посвященных свойствам аналитических функций. Казалось, что наконец было найдено определение функции столь совершенное, что дальше предстоит лишь изучать свойства, из него вытекающие. Самое главное, что казалось наконец разгаданным то свойство функции, в силу которого «значение малого участка кривой определяет ее всю»: это свойство явилось просто следствием самого определения функции. Вдобавок ко всему разъяснились многие неразгаданные раньше свойства аналитических выражений, преимущественно рядов и бесконечных произведений: равномерно-сходящийся ряд в какой-нибудь области D, составленный из аналитических функций в этой области, оказывался имеющим своей суммой аналитическую функцию в D. Загадка аналитического выражения, сходящегося к разным функциям в разных областях, объяснялась тем, что между этими областями была нарушена равномерная сходимость, как например у ряда

$$\frac{1+z}{1-z}+\frac{2z}{z^2-1}+\frac{2z^2}{z^4-1}+\frac{2z^4}{z^8-1}+\cdots,$$

сходящегося к $+1$ внутри круга $z = 1$ и к -1 вне его. Таким образом понятия аналитической функции и аналитического выражения были расцеплены. Первые совершенно определенные указания на недостаточность определения функции, по Вейерштрассу, были сделаны Борелем (1895), который несколько раз делал попытки построения более общей теории, чем теория Вейерштрасса. Из этих попыток две первые встретили решающие возражения Пуанкаре и Пенлеве. И лишь третья (1917) должна быть признана удовлетворительной. Поискам нового, более широкого класса функций, чем аналитические функции Вейерштрасса была посвящена значительная часть научного творчества Бореля, и в этой области им были высказаны многие чрезвычайно глубокие идеи, легшие в основу почти всех дальнейших работ его последователей в этом направлении. Основным пунктом возражений Бореля против определения Вейерштрасса было указание на совершенную искусственность границы «естественной области существования аналитической однозначной функции». Граница эта в самом деле естественна, если ее образуют конечное или счетное число точек. Но если эта граница является замкнутой линией, то «очень часто, — замечает Борель, — граница эта является совершенно искусственной, так как аналитическое выражение, дающее нам функцию с такой границей, оказывается равномерно сходящимся и вне ее и, значит, дающим некоторую наружную функцию. Обе эти функции, внутренняя и наружная, с точки зрения Вейерштрасса, являются *существенно различными*, т. к. они непродолжаемы одна в другую. Но по существу это есть единая функция, только разрезанная особой линией на две части, так как можно найти класс таких аналитических выражений, что если одна часть удовлетворяет алгебраическому или дифференциальному соотношению, то и другая — тоже». Аналитические выражения, которые имеет в виду Борель, суть ряды рациональных дробей

$$\sum \frac{A_n}{z-a_n},$$

где ряд $\sum |A_n|$ есть сходящийся ряд, а особые точки a_n («полюсы аналитического выражения») всюду плотны на рассматриваемой замкнутой линии или бесконечно накопляются вблизи нее.

Возражения против этой попытки Бореля были сделаны Пуанкаре и Вольфом. Первый указал, что всегда можно разрезать рассматриваемую замкнутую линию на такие две части A и B и определить такие две аналитические функции (с точки зрения Вейерштрасса) $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, что $\Phi_1(z)$ будет аналитической вне A, $\Phi_2(z)$ будет аналитической вне B и что несмотря на это $\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = F_1(z)$ внутри кривой и $\Phi_1(z)+\Phi_2(z) = F_2(z)$ вне кривой, где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ суть две *произвольные* функции, из которых одна аналитическая внутри кривой, другая аналитическая вне кривой, причем обе непродолжаемы нигде через кривую. Вольф же построил такой ряд $\sum \dfrac{A_n}{z-a_n}$, который сходится к нулю внутри кривой, причем полюсы a_n скоплялись к кривой снаружи и ряд $\sum |A_n|$ сходился. После возражений Пуанкаре Борель изменил свою теорию, прибегнув к звездным разложениям Миттаг-Леффлера. Звездное разложение Миттаг-Леффлера представляет собой обобщение ряда Тейлора, т. к. n-й член его есть линейное выражение от первых n коэффициентов a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1} ряда Тейлора. Борель высказал убеждение в том, что понятие аналитической функции, как его дал Вейерштрасс, еще сильно привязано к частному классу аналитических выражений, именно — рядам Тейлора, и что если за «элемент функции» взять не ряд Тейлора $K(x-a)$, а звездное разложение Миттаг-Леффлера, то по лучам звезды Миттаг-Леффлера можно проскользнуть через полюсы аналитического выражения, всюду плотно лежащие на особой линии, во внешнее пространство, если звездное разложение Миттаг-Леффлера было составлено для внутренней точки кривой. Надо иметь в виду, что область сходимости звездного разложения Миттаг-Леффлера для аналитической функции $f(z)$ получается так: зажигают источник света в начальной точке a разложения Миттаг-Леффлера $M(x-a)$, а во все особые точки разлагаемой аналитической функции вбивают в плоскость непрозрачные колышки: тогда освещенные места («звезда») и будут областью сходимости звездного разложения $M(x-a)$ к $f(z)$. Вычисления Бореля, казалось, подтвердили его идею, так как звездное разложение $M(x-a)$ для внутренней точки a оказалось сходящимся на бесконечном множестве лучей звезды и именно к величине наружной функции на этих лучах. Но Пенлеве сделал в своей блестящей, детальной и чрезвычайно тонкой работе возражение Борелю, указав ему, что это может быть и случайностью, т. к. имеются звездные разложения Миттаг-Леффлера, сходящиеся на отрезке луча к нулю без того, чтобы все разложение изображало нуль. Тогда Борель сделал третью, на этот раз уже удавшуюся попытку, *предположив ряд* $\sum |A_n|$ *чрезвычайно сильно сходящимся* (не слабее, чем $e^{-e^{n^4}}$). Это предположение он связал с «*моногенностью на множестве*» [т. е. существованием $f'(z)$ по множеству]. Новая теория Бореля оказалась выдержавшей испытание, и для известного класса функций $f(z)$ (в смысле Дирихле для комплексного переменного) звездные разложения *непременно должны* сходится к $f(z)$, и следовательно знание величины функции и ее производных вполне определяло функцию в ее целом. Это подавно справедливо тогда, когда функция известна на каком-либо отрезке. Несколько поздно для дела оправдание третьей теории Бореля пришло от московских работ (Привалов, Лузин). Именно, было доказано, что аналитическая функция вблизи спрямляемой кривой, уничтожающаяся почти всюду на ней при стремлении к ее точкам по касательным путям, необходимо должна быть тождественной нулю. А так как наружная функция Бореля почти всюду по касательным путям принимает на особой линии (предположенной спрямляемой) те же самые значения, что и внутренняя функция, то отсюда следует, что *такая* функция может быть *только одна*. Эта единственность подтверждает идеи Бореля об *органической* связи внутренней и внешней непродолжимых функций.

Совсем на иной путь вступили Данжуа, С. Н. Бернштейн и Карлеман, отыскивая наиболее естественное обобщение понятия аналитической функции. Большая оригинальность их исследований заключается в стремлении оставаться на почве одного только *действительного переменного*, не привлекая к рассмотрениям комплексных чисел.

Отправной пункт С. Н. Бернштейна — его результаты о наилучшем приближении аналитических функций; основной теоремой, послужившей исходным пунктом, является следующая: если $f(x)$ голоморфна во всякой точке отрезка $[a \le x \le b]$, тогда наилучшее приближение $E_n f$ функции $f(x)$ с помощью многочлена n-й степени должно удовлетворять неравенству $E_n f < M \cdot \rho^n$, где $\rho < 1$. С. Н. Бернштейн называет функцию $f(x)$ *квазианалитической* (P), если имеется такая бесконечная последовательность целых положительных $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, для которых удовлетворено неравенство $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$. Функции эти оказываются замечательными, т. к. фундаментальная теорема Бернштейна гласит: всякая квазианалитическая (P) функция $f(x)$ определяется на всем отрезке $[a \leq x \leq b]$ знанием ее значений на какой-нибудь его части $[a' \leq x \leq b']$. Это предложение дало Бернштейну возможность определить *квази-аналитическое продолжение* (P) *как сохранение неравенства* $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$ *в более широком отрезке* $[c \leq x \leq d]$, *содержащим в себе данный отрезок* $[a \leq x \leq b]$. Наблюдающийся факт существенно различного продолжения данной функции $f(x)$ в зависимости от перемены базы $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$ квази-аналитического продолжения (P) С. Н. Бернштейн уподобляет факту *многозначности* обычных аналитических функций.

Другое определение полагает для квази-аналитичности Карлеман. В то время как квази-аналитические (P) функции С. Н. Бернштейна могут не обладать даже и первой производной, Карлеман ставит непременным условием наличие у рассматриваемой им функции $f(x)$ производных *всех* порядков. Он обозначает через C_A семейство всех таких функций $f(x)$, для которых в данном отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство: $|f^{(n)}(x)| < k^n \cdot A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — данная последовательность положительных чисел, а k — любое положительное постоянное, независящее от n.

Основной теоремой Карлемана–Данжуа является следующее важное предложение: *для того чтобы семейство* C_A *было квази-аналитическим* (т. е. сохраняющим свойство: значение функции на части $[a', b']$ отрезка $[a, b]$ определяет ее на целом отрезке), *необходимо и достаточно, чтобы всякая мажоранта ряда* $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$ *была расходящимся рядом*. Лично Данжуа установил лишь достаточность этого условия. Определение Карлемана уже получило приложение к теории моментов; его отношение к определению С. Н. Бернштейна оказалось неопределенным, так как здесь нет ни тождества, ни отношения общего к частному.

Литература

[1] Лузин Н. Н., *Интеграл и тригонометрический ряд*, М., 1915.

[2] Лузин Н. Н., *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, P., 1930.

[3] Burkhard H., *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*, Lpz., 1901.

[4] Hobson E. W., *The Theory of Function of a Real Variable*, 2 vls, Cambridge, 1921-26.

[5] Borel É., *Leçons sur la théorie des fonctions*, P. [1905] (см. Cing letters sur la théorie des fonctions).

[6] Borel É., *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*, P., 1922.

[7] Lebesgue H., *Sur des fonctions re résentables analytiquement*, «Jornal de mathématiques pures et appliquées», P., 1905.

[8] Bernstein S., *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, P., 1925.

[9] Carleman T., *Fonctions quasi-analytiques*, P., 1926.

Публикация подготовлена редакцией журнала “Математическое образование”.

Пересекаются ли диагонали параллелограмма?

С. Н. Богданов, С. В. Дворянинов, З. Краутер

В статье рассматриваются примеры конечных аффинных и проективных геометрий, определяемых аксиоматически, при этом аксиомы аффинной геометрии входят и в список аксиом школьного курса евклидовой геометрии. В таких геометриях некоторые очевидные факты школьного курса, например, что диагонали любого параллелограмма пересекаются, могут оказаться неверными.

Статья способствует углубленному пониманию аксиоматического подхода к геометрии.

“Что за странное название статьи!” — воскликнет наш читатель. В любом школьном учебнике сказано, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. А вопрос об их пересечении даже не обсуждается — это совершенно очевидно. Разумеется, читатель будет прав. Но прав только отчасти. Прав, если вести речь о параллелограммах из школьной геометрии. Но геометрии бывают разные. Об этом немного рассказано в статье [1]. Геометрии могут различаться тем, как в них, в этих геометриях, решается вопрос о параллельных прямых. Точнее говоря, какие законы (в математике законы называют аксиомами) принимают создатели геометрии по поводу параллельных прямых. Другие аксиомы в этих геометриях могут быть общими. Вначале перечислим общие аксиомы:

Аксиома А1. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.

Аксиома А2. Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Аксиома А3. Через любые две точки проходит прямая, и при том только одна. Как обычно, две прямые на плоскости называют *параллельными*, если они не пересекаются. В школьной геометрии принимают **аксиому Евклида**: через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.

Геометрии, определяемые такой аксиомой и аксиомами А1-А3, называют *аффинными геометриями.*

Геометрию, в которой нет параллельных прямых (т.е. любые две прямые пересекаются), называют *проективной геометрией.* В такой геометрии в дополнение к аксиомам А1-А3 действует следующая аксиома: любые две прямые или совпадают, или пересекаются.

Рис. 1.

Любую аффинную геометрию очень просто превратить в проективную. Давайте проделаем такое превращение с обычной школьной плоскостью. Для этого рассмотрим произвольную прямую и все прямые, которые ей параллельны. Все такие прямые будем называть *направлением.* Будем считать, что все прямые одного направления пересекаются в точке, которую назовем *бесконечно удаленной точкой.* Направлений бесконечно много, поэтому и бесконечно удаленных точек получается бесконечно много. Все такие точки по определению образуют *бесконечно удаленную прямую* (рис.1).

Обычные точки (сокращенно О.Т.) и все бесконечно удаленные точки (сокращенно Б.Т.) образуют множество точек проективной геометрии.

Упражнение 1. Убедитесь, что в такой геометрии любые две прямые пересекаются, другими словами, параллельных прямых здесь нет.

В свою очередь проективную геометрию столь же просто превратить в аффинную, исключив из проективной геометрии любую прямую.

Снова ограничимся рассмотрением примера. Пусть по-прежнему проективная плоскость = обычная плоскость + бесконечно удаленная прямая. Начинаем исключать прямые. Здесь возможны два случая.

1. Если исключается Б.У. прямая, то получается исходная аффинная плоскость (рис. 1).

2. Пусть исключается обычная прямая l. Проверим, что и в этом случае получается аффинная плоскость, то есть становится справедливой аксиома о существовании единственной прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку. Сразу заметим, что на Б.У. прямой исключена и точка, отвечающая исключенной прямой l, точнее — отвечающая данному направлению. Здесь возможны несколько вариантов: данная прямая может быть обычной (параллельной или непараллельной исключенной прямой) или бесконечно удаленной; точка также может быть обычной или бесконечно удаленной.

2.1. Пусть в качестве данной прямой выступает Б.У. прямая. Пусть данная точка — обычная точка. Тогда в качестве прямой, параллельной Б.У. прямой, выступает обычная прямая, проходящая через точку и параллельная исключенной прямой (рис. 2).

2.2. Пусть в качестве данной прямой выступает обычная прямая, параллельная

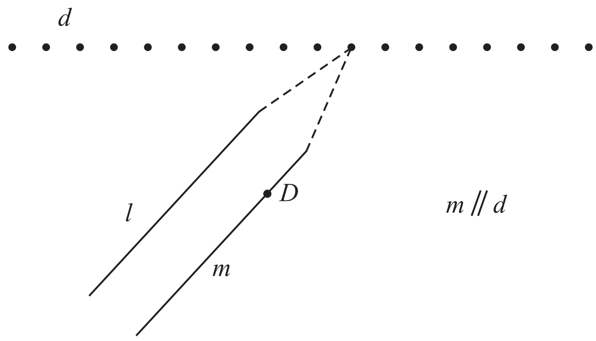

Рис. 2.

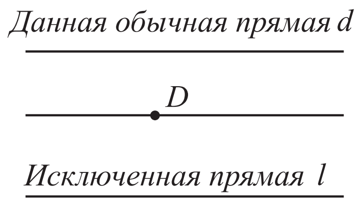

Рис. 3.

исключенной прямой, D — обычная точка. Здесь параллельная прямая очевидна (рис. 3).

2.3. Пусть в качестве данной прямой выступает обычная прямая, параллельная исключенной прямой , D — Б.У. точка. Здесь в качестве параллельной прямой выступает Б.У. прямая (рис. 4).

2.4. Пусть данной прямой является обычная прямая, пересекающая исключенную обычную прямую. (Может показаться, что при этом данная прямая состоит из двух лучей. Но если вспомнить про бесконечно удаленную точку, то эти два луча как раз в этой Б.У. точке и “склеиваются”). Пусть данная точка D — обычная точка. Тогда параллельной прямой является обычная прямая, проходящая через точку и исключенную точку пересечения данной прямой и исключенной прямой (рис. 5).

2.5. Пусть снова данной прямой является обычная прямая, пересекающая исключенную обычную прямую . Пусть теперь D — Б.У. точка. В этом случае параллельной прямой оказывается обычная прямая, проходящая через точку пе-

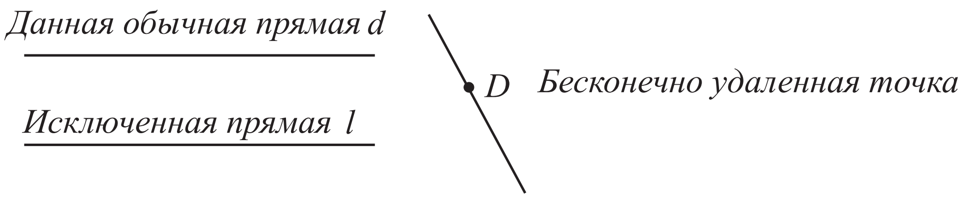

Рис. 4.

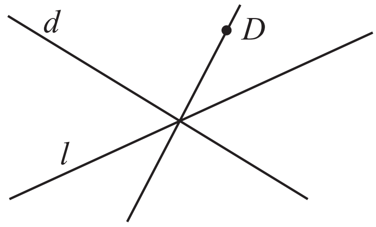

Рис. 5.

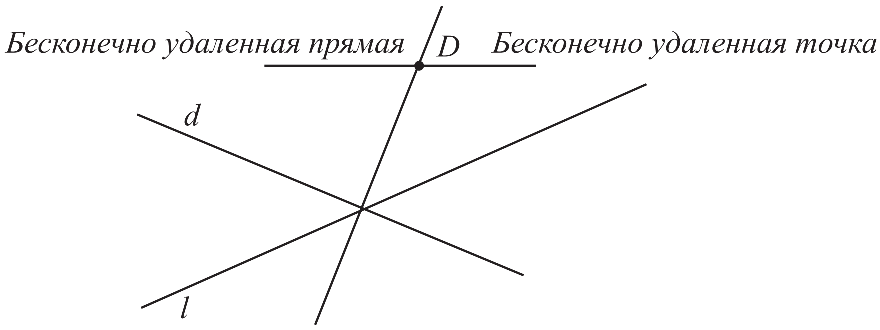

Рис. 6.

ресечения данной и исключенной прямой в направлении, отвечающем выбранной Б.У. точке (рис. 6).

Замечание 1. Особо подчеркнем, что на проективной плоскости все точки абсолютно одинаковы и абсолютно равноправны. Лишь ради удобства речи одни точки мы называем обычными, а другие — бесконечно удаленными.

На обычной школьной плоскости множество всех точек бесконечно. Далее поведем речь о *конечных* геометриях: в каждой такой геометрии множество всех точек является конечным. При этом будем рассматривать лишь такие конечные геометрии, в которых количество точек на прямой одинаково для всех прямых.

Простейшая конечная аффинная геометрия состоит из четырех точек. Обозначим точки A, B, C, D (рис. 7).

В этой геометрии 6 прямых: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Здесь для каждой прямой имеется (и при том единственная) прямая, ей параллельная, всего имеется три пары параллельных прямых.

Примем такое определение. Пусть в произвольной геометрии четыре точки A,

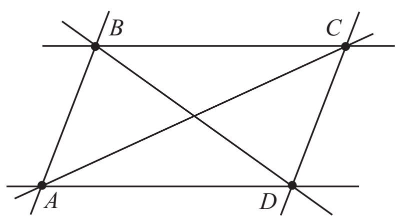

Рис. 7.

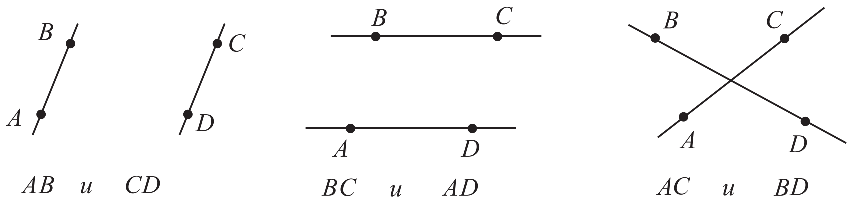

Рис. 8.

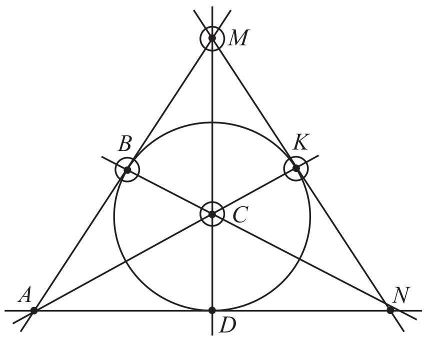

Рис. 9.

B, C, D таковы, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. В этом случае будем говорить, что эти перечисленные четыре прямые образуют *параллелограмм.* Пару параллельных прямых будем называть *противоположными сторонами параллелограмма.* (Заметим, что обычный школьный параллелограмм образован отрезками попарно параллельных прямых, так что наше определение параллелограмма не совпадает с традиционным). В этой геометрии из четырех точек имеется всего три параллелограмма (рис. 8).

Уже в этой простейшей ситуации мы можем дать ответ на вопрос, который мы вынесли в название нашей статьи. Естественно *диагоналями* наших параллелограммов считать прямые, проходящие через пары противоположных вершин. Так для параллелограмма из первой строки таблицы на рис. 8 диагоналями являются прямые AC и BD. Но эти прямые не пересекаются! Это верно и для двух других параллелограммов. Стало быть, в этой геометрии **диагонали любого параллелограмма не пересекаются**.

Рассмотренная нами конечная геометрия из четырех точек является аффинной. Давайте дополним ее до геометрии проективной. Согласно общей теории, мы должны добавить к имеющимся четырем точкам так называемые бесконечно удаленные точки. Каждая бесконечно удаленная точка порождается одним семейством параллельных прямых (или одним направлением). У нас имеется всего лишь три направления, по две параллельных прямых каждого направления. Следовательно, пополнять геометрию нам приходится всего лишь тремя новыми точками. Обозначим их M, N, K. Модель конечной проективной геометрии из семи точек представлена на рис. 9.

Количество прямых в этой геометрии также равно семи. На каждой прямой лежат три точки. На рис. 9 прямые моделируются сторонами правильного треугольника, его высотами и вписанной окружностью.

Упражнение 2. Проверьте, что

а) любые две прямые в этой геометрии пересекаются;

б) исключение любой из семи прямых приводит к аффинной геометрии из четырех точек.

Среди наших читателей наверняка есть те, кто, анализируя таблицу на рис. 8, подумал о вершинах наших параллелограммов. Действительно, говоря о параллелограммах, мы сделали акцент на параллельных прямых. При этом оказалось, что четырем точкам A, B, C, D (а других точек вообще нет!) соответствует три параллелограмма. Получается, что четыре точки являются вершинами трех разных параллелограммов. В школьной геометрии такое невозможно!

А вот в проективной геометрии параллелограммов нет в принципе, поскольку нет параллельных прямых. Для того, чтобы спасти ситуацию в этом смысле (в смысле параллелограммов), в проективной геометрии можно рассмотреть четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой. Эти четыре точки определяют шесть прямых. Так вот, эти четыре точки и эти шесть прямых называют *полным четырехвершинником.* При этом точки называют *вершинами*, а прямые — *сторонами* полного четырёхвершинника. Любые две стороны, не проходящие через одну вершину, называют *противоположными* (стало быть, пар противоположных сторон получается ровно три). Наконец, точки пересечения противоположных сторон называют *диагональными точками.* Диагональных точек оказывается тоже три.

Мы рассмотрели проективную геометрию из семи точек. Здесь на каждой прямой лежат три точки. Возьмем четыре точки B, M, K, C. Они являются вершинами полного четырехвершинника (рис. 9). Его диагональные точки — это A, D, N. Заметим, что три диагональные точки лежат на одной прямой.

Упражнение 3. Рассмотрите любой другой полный четырехвершинник и убедитесь, что три его диагональные точки также лежат на одной прямой.

Превратим эту проективную геометрию в аффинную, удаляя прямую, содержащую точки A, D, N. Четыре точки B, M, K, C в полученной аффинной геометрии служат вершинами трех разных параллелограммов, диагонали которых не пересекаются. Это следует из того, что точки пересечения диагоналей были удалены одновременно с точками пересечения противоположных сторон параллелограммов!

Таким образом, мы заметили следующее: если диагональные точки полного четырехвершинника лежат на одной прямой проективной геометрии, то диагонали параллелограммов, получаемых из таких четырехвершинников, в соответствующей аффинной геометрии не пересекаются.

Рассмотрим теперь проективную геометрию, каждая прямая которой содержит ровно четыре точки. Такую геометрию удобно задать таблицей (таблица 1).

В этой геометрии общее количество точек равно 13, таково же количество и прямых. Точки обозначены M_k , а прямые — l_k, индекс k принимает значения от 1 до 13. Каждой прямой соответствует горизонтальная строка этой таблицы: в строке звездочками отмечены точки, лежащие на прямой. Так на прямой l_1 лежат

Таблица 1.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}
l_1	*	*	*							*			
l_2				*	*	*				*			
l_3							*	*	*	*			
l_4		*				*	*				*		
l_5	*				*				*		*		
l_6			*	*				*			*		
l_7			*			*			*			*	
l_8		*			*			*				*	
l_9	*			*			*					*	
l_{10}	*					*		*					*
l_{11}			*		*		*						*
l_{12}		*		*					*				*
l_{13}										*	*	*	*

точки M_1, M_2, M_3, M_{10}, на прямой l_5 — точки M_1, M_5, M_9, M_{11}.

Читая любой вертикальный столбец таблицы, определяем все прямые, проходящие через соответствующую точку. Пересечение двух прямых эквивалентно тому, что в двух строках, соответствующим этим прямым, есть звездочки, стоящие в одном вертикальном столбце. Так у прямых (то есть у строк) l_8 и l_{11} звездочки стоят в пятом столбце: эти две прямые пересекаются в точке M_5.

Упражнение 4. Проверьте для некоторых прямых и точек из геометрии таблицы 1 справедливость всех аксиом проективной геометрии.

В этой геометрии четыре точки M_1, M_2, M_4, M_5 являются вершинами полного четырехвершинника (любые три из них не лежат на одной прямой — проверьте это по таблице). Противоположными сторонами являются пары прямых l_1 и l_2, l_8 и l_9, l_5 и l_{12}; им соответствуют диагональные точки M_9, M_{10}, M_{12}. По таблице 1 устанавливаем, что три диагональные точки **не лежат** на одной прямой. (Заметим, что это справедливо для любого полного четырехвершинника из этой геометрии. Желающие могут рассмотреть примеры).

Удалим из этой геометрии прямую l_{13}. При этом удалятся все лежащие на ней точки M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13} — среди них и две диагональные. Новая геометрия с 9 точками и 12 прямыми представлена угловой частью таблицы 1, включающей точки M_1 – M_9 и прямые l_1 – l_{12}. Эта геометрия является аффинной.

Упражнение 5. Проверьте для некоторых прямых и точек из этой геометрии справедливость всех аксиом аффинной геометрии.

В этой аффинной геометрии точки M_1, M_2, M_4, M_5 служат вершинами параллелограмма. Вершины M_1 и M_5, M_2 и M_4 являются попарно противоположными. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке M_9. Это следует из того, что точка M_9 не лежит на удаленной из проективной геометрии прямой. В этой аффинной геометрии **диагонали любого параллелограмма пересекаются**.

Рассмотрим, наконец, проективную геометрию с пятью точками на каждой прямой (составьте соответствующую таблицу самостоятельно). Можно убедиться в том, что здесь **три диагональные точки любого полного четырехвершинника лежат на одной прямой**. Это влечет за собой то обстоятельство, что в соответствующей аффинной геометрии **диагонали любого параллелограмма не пересекаются**. Предлагаем проверить справедливость этого утверждения для некоторых четырехвершинников и параллелограммов самостоятельно.

Итак, ответ на вопрос из названия нашей статьи оказывается разным в разных аффинных геометриях. От чего он зависит? — рассказ об этом в следующей статье.

Литература

1. С. Богданов, С. Дворянинов, З. Краутер. Какая геометрия нужна пассажирам метро? // "Квант", №4, 2002, с.26-30.

2. Ф. Картеси. Введение в конечные геометрии. – М.: Наука, 1980.

3. А. Н. Земляков. Тезисы по геометрии. // Математическое образование. №3 (18), 2001, с.2-21.

4. Леонард Беве. Мини-геометрия // "Квант", №6, 1976, с.2-12.

Богданов Сергей Николаевич,
к.ф.-м.н., доцент Самарского
государственного педагогического университета.

Дворянинов Сергей Владимирович,
к.ф.-м.н., доцент Самарского
государственного университета.
dvoryan@ssu.samara.ru

Prof. Siegfried Krauter,
Institut f. Mathematik und Informatik
PL d. Hochschule Ludwigsburg, Deutschland.
krauter@ph-ludwigsburg.de

Объекты в курсе математики: описание концепции и возможные применения

В. М. Имайкин

В статье развивается, на основании опыта работы автора в старших классах средней общеобразовательной школы, объектный подход к материалу школьного курса математики. Показаны применения этого подхода к математическим задачам, а также связь с некоторыми фундаментальными математическими идеями.

1. Предисловие

Предлагаемые в данной работе идеи разработаны на материале курса математики для общеобразовательной средней школы. Однако, по мнению автора, они применимы и в вузовском математическом образовании. Разработка и апробация этой концепции были осуществлены Михаилом Николаевичем Вялым (кандидат физико-математических наук, научный сотрудник вычислительного центра им. А. А. Дородницына РАН) и автором в 1994-2000 гг. в "Проектном Колледже", ныне школа-лаборатория №1314 г. Москвы [1]. Статья может быть полезна методистам, учителям на этапе заключительного повторения школьного курса, а также учащимся старших классов и студентам, интересующимся структурой математики "в целом". Первоначально статья была опубликована в сборнике научных работ херсонского филиала Украинского Государственного Морского Технического Университета, выпуск 1, Херсон, 2003 г. В настоящую публикацию внесены небольшие исправления и дополнения.

2. Введение. Объектный подход к организации учебного материала

Материал школьного курса математики организован тематически. Например, в учебнике [2] рассматриваются следующие темы:
- Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений.
- Степень с рациональным показателем.
- Степенная функция.
- Элементы тригонометрии.
- Прогрессии.

Мы считаем, что на определенных этапах изучения, например, на завершающей стадии школьного курса в конце 10-го – 11-м классах полезно предложить учащимся другие схемы организации материала. Одним из возможных вариантов является предлагаемый нами объектный подход. А именно, сквозными темами через весь курс школьной математики проходит изучение совсем небольшого количества *математических объектов*. Мы выделяем в школьном курсе следующие объекты (не претендуя на бесспорность и полноту списка):

- число;
- фигура;
- вектор;
- функция;
- множество;
- выражение.

Для каждого объекта имеются определенные способы *представления*, выявляются его различные *свойства*, с ним можно осуществлять те или иные *операции*, которые, в свою очередь могут иметь определенные свойства.

3. Объекты курса математики

Опишем более подробно основные объекты школьного курса математики, с более тщательным разъяснением терминологии и с конкретными примерами.

3.1. Число

В школьном курсе изучаются понятия натуральных, целых, рациональных и действительных (а при углубленном изучении — и комплексных) чисел. Объект "число" означает не одно из этих конкретных понятий, а всю последовательность развивающихся и углубляющихся представлений о числе, с возможными обобщениями и усложнениями. Например, в курсе высшей математики мы отнесем к объекту "число" кватернионы, числа Кэли и т.п. Аналогичное замечание относится и к другим объектам. Далее, числа имеют определенные способы представления: в виде записи по определенным правилам или изображения на числовой прямой; с ними можно выполнять определенные операции, например, арифметические или сравнение. Как числа, так и операции с ними обладают некоторыми свойствами. Например, целые числа имеют те или иные свойства делимости. Арифметические операции над числами также обладают определенными свойствами, например, переместительный или сочетательный законы сложения или умножения.

3.2. Фигура

В школьной программе, разработанной под руководством А. Н. Колмогорова и основанной на теоретико-множественном подходе, фигура определялась как подмножество точек плоскости или пространства, а значит, объект "фигура" был частным случаем объекта "множество". Современные программы в основном не основаны на теоретико-множественном подходе, и мы считаем целесообразным выделение объекта "фигура". Геометрические фигуры в школьном курсе имеют разные способы представления, например синтетический и аналитический. Изучаются разнообразные свойства фигур, например треугольника или тетраэдра. Над фигурами можно выполнять различные операции, например, движения или преобразования подобия. Примером менее часто изучаемой в школе операции является разрезание многоугольника и складывание из частей нового многоугольника. Изучаются также свойства операций над фигурами.

3.3. Вектор

В колмогоровской программе вектор определялся как параллельный перенос и был, таким образом, частным случаем понятия отображения. Современные программы отказались от такого подхода, и мы считаем целесообразным выделение самостоятельного объекта "вектор". Векторы имеют различные способы представления, например, геометрический и координатный, с ними можно осуществлять определенные операции, например, сложение, умножение вектора на число, проектирование, взятие скалярного произведения двух векторов и т.д. Эти операции можно осуществлять в различных представлениях. Изучаются свойства как самих векторов, так и операций над ними.

3.4. Функция

В программе Колмогорова понятие числовой функции было частным случаем абстрактного понятия функции как отображения множеств. В современной ситуации целесообразно выделение такого достаточно богатого объекта, как числовая функция (в дальнейшем называем просто "функция"). К нему относятся также последовательности как числовые функции на множестве натуральных чисел. Для функций существуют различные способы представления, например, формульный и графический, с ними можно производить определенные операции, например алгебраические, а также более специфические для функций операции — взятие композиции, нахождение обратной функции, дифференцирование и т.д. Изучаются свойства функций и операций над ними.

3.5. Множество

В современных программах понятие множества утратило роль фундамента, на котором строится весь курс математики. Однако разумно выделить достаточно богатый объект "множество", представленный числовыми промежутками, геометрическими местами точек на плоскости и в пространстве, а также множествами решений уравнений, неравенств и их систем и совокупностей. Множества могут быть представлены разными способами, например, числовые промежутки можно записывать аналитически или изображать графически. Над множествами можно выполнять различные операции, например, обычные теоретико-множественные, или сравнение (установление взаимно-однозначного соответствия) и т.д. Изучаются свойства множеств и операций над ними.

3.6. Выражение

"Выражение" как запись действий с числами, использующая переменные и знаки алгебраических действий (в старших классах также знаки функций), является скорее не объектом, а одним из способов представления объекта — набора действий с числами, — который, в свою очередь есть очень частный случай математического объекта "алгоритма" (также можно считать выражение частным случаем функции многих переменных). Но в рамках школьной программы можно рассматривать выражение как объект. Этот объект интересен и сложен для изучения тем, что кроме достаточно сложной "содержательной", смысловой составляющей он имеет развитую и сложную "грамматическую", синтаксическую составляющую. Вместе с тем свободное овладение работой с выражениями очень важно для освоения всего школьного курса математики. С выражениями можно выполнять различные операции: алгебраические, подстановку, замену, тождественные преобразования и т.д. Изучаются свойства операций с выражениями.

4. Объекты и задачи

4.1. Задачи об объектах

Объектный взгляд на материал школьной математики позволяет предложить довольно естественную и рациональную классификацию задач школьного курса математики и увидеть общее в методах решения задач одного типа, независимо от сложности объекта, к которому относится задача. Напомним, что объект "тянет" за собой цепочку: "способ представления, свойства объекта, операции над объектом, свойства операций". А значит, естественно выделяются такие типы задач:

Переход от одного представления к другому. Например, переход от одного способа записи числа к другому или переход от задания функции формулой к графическому представлению.

Дадим более подробный комментарий. В младших классах изучаются некоторые простые алгоритмы перехода от одного способа записи числа к другому, например переход от обыкновенной дроби к десятичной. Теперь допустим, что дана задача построить график функции, заданной формулой. Если мы понимаем, что это задача того же типа — переход к другому способу представления объекта, — мы можем предположить, что существует алгоритм, позволяющий осуществить этот переход. И действительно, соответствующий, но теперь достаточно сложный, с использованием дифференцирования, алгоритм изучается и предъявляется в старших классах.

Выявление свойств объекта. Например, доказательство различных свойств параллелограмма, или исследование свойств данной функции. При этом, для выявления того или иного свойства часто требуется переход к удобному представлению объекта; таким образом привлекается задача предыдущего типа. Поэтому существенно понимание того, насколько изучаемое свойство связано с конкретным представлением объекта. Например, изучаемый в школе признак делимости на 3 относится к записи чисел в десятичной системе счисления, а свойство "если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3" не зависит от представления.

Построение объекта с заданными свойствами. К этому типу относятся, например, геометрические задачи на построение. Приведем также интересный пример, когда задача этого типа является вспомогательной задачей при решении задачи предыдущего типа — выявлении свойства объекта. Соответствующая схема рассуждения неоднократно применяется в курсе геометрии, поэтому ее полезно явно предъявить учащимся (вообще заметим, что из схем рассуждения фактически явно предъявляется лишь одна — схема доказательства от противного).

Итак, пусть требуется доказать, что объект A обладает свойством B. Для этого мы строим объект C, обладающий свойством B по построению, а затем доказываем, что объект C совпадает с объектом A. Следовательно, A обладает свойством B.

Такая схема используется, например, при доказательстве свойств средней линии треугольника или трапеции.

Выполнение операций с объектами в том или ином представлении. Например, арифметические действия с числами, записанными в определенной системе счисления, или нахождение пересечения двух множеств на числовой прямой, заданных, скажем, двойными неравенствами; или нахождения результата данного движения данной геометрической фигуры.

Выявление свойств операций. Например, выявление коммутативности сложения чисел или векторов, соответственно некоммутативности композиции движений плоскости.

Можно описать и другие типы задач, например получаемые комбинированием “подзадач” указанных типов; для целей нашей заметки нам будет достаточно перечисленных типов.

4.2. Что дает объектный подход для математических задач

Мы считаем решение и исследование задач важнейшей частью математической деятельности. Интересно понять, какую пользу для этой деятельности может дать объектный подход. Приведем некоторые соображения. Объектный подход позволяет выявить, какие классы задач слабо представлены в школьном курсе.

Например, довольно много задач посвящено переходу от формульного к графическому представлению функции, а обратный переход практически не представлен. А он содержит достаточно интересные и важные виды задач. К примеру, если класс функций заранее задан, получаем интерполяционные задачи, которые решаются точно и вполне доступны школьникам. А именно,

1) найти формулу линейной функции, график которой проходит через две данные точки (эта задача обычно в школе изучается);

2), 3) ... найти уравнение квадратичной, кубической и т.д. функции, график которой проходит через 3, соответственно 4 и т.д. точки (эта задача практически не встречается).

С практической точки зрения интерполяционные задачи важны при обработке результатов физического эксперимента. С другой стороны, если класс функций явно не задан или задача не может быть точно решена в заданном классе, возникает задача приближенной интерполяции.

Например, через равные промежутки времени замеряется температура в остывающем стакане вскипяченной воды. Зависимость температуры от времени напоминает показательную. Требуется наилучшим образом подобрать параметры показательной функции. Заметим, что это естественный момент для введения метода наименьших квадратов. Все вычислительные процедуры вполне доступны школьникам 9 класса (как и в случае, если зависимость предположительно линейная).

Другой пример связан с выполнением операций с объектами в заданном представлении. Школьники много упражняются в выполнении действий с функциями в формульном представлении, а задачи на выполнение действий с функциями в графическом представлении практически не представлены. Например, даны графики двух функций. Построить, схематически, график их суммы, разности, произведения, частного, композиций, обратных функций (если они определены). Или (пример заимствован у В. И. Арнольда): дан график функции, построить схематически графики производной и первообразной[1].

С другой стороны, учащиеся много упражняются в выполнении преобразований фигур в геометрическом представлении, но практически никогда — в аналитическом (за исключением параллельного переноса и симметрий относительно осей). Например, даны координаты точки или вектора и поворот на определенный угол с данным центром (для простоты, например, в начале координат). Найти координаты результата поворота.

Объектный подход позволяет также находить методы решения конкретных задач, если понимать, к какому классу они относятся, и какой объект стоит за задачей. Рассмотрим, например, задачу построения некоторого геометрического места точек (ГМТ), удовлетворяющего нескольким условиям. Мы знаем, что эта задача об объекте "множество", в данном случае, множество точек плоскости.

Множества имеют разные способы представления, в частности множество точек плоскости может быть задано некоторым условием. С множествами можно выполнять различные теоретико-множественные операции, например пересечение. Множество точек, удовлетворяющих нескольким условием, является пересечением множеств точек, удовлетворяющих каждому условию по отдельности (понимание этого является существенной частью освоения объекта "множество").

Отсюда вытекает метод решения задачи: находим ГМТ, удовлетворяющие каждому условию по отдельности (обычно это некоторые стандартные ГМТ, например, прямые, окружности и т.п.), а затем находим их пересечение.

Далее, объектный подход позволяет установить принадлежность к одному классу задач, появляющихся разрозненно в разное время в разных частях курса, а значит осознать единство методов решения этих задач. Например, в школьном курсе явно выделены геометрические задачи на построение, однако полезно понимать, что многие другие рассеянные по курсу задачи относятся к тому же классу построения объекта с заданными свойствами (в частности, в курсе высшей математики это важные теоремы существования и единственности).

В качестве примера метода решения подобной задачи приведем интересную схему "сначала единственность, затем существование". Допустим, надо доказать

[1] См. также: А. Н. Земляков, Математический анализ реальности, гл. 2, упр. 1 ("Математическое образование", №1(32), 2005 г., стр. 41).

существование и единственность объекта A с заданными свойствами. Предполагаем, что такой объект существует. Тогда на основании свойств устанавливаем, что он должен иметь некоторое однозначное представление B, а значит единственный. Итак, если A существует, то единственный. Но почему A существует? Ответ: это тот самый объект, представление которого есть B. Значит, существование доказано.

В курсе высшей математики таким способом доказываются некоторые теоремы существования и единственности решений дифференциальных уравнений, а в курсе элементарной математики, например, существование и единственность центра масс для системы материальных точек с ненулевой суммарной массой.

5. Объектный подход и некоторые фундаментальные математические идеи

5.1. Объекты как классы эквивалентности

Как уже отмечалось, объект имеет разные представления, и можно переходить от одного представления к другому. Мы считаем, что эту идею следует доносить до учащихся как можно раньше. Практически это означает, например, что учащимся младших классов надо демонстрировать несколько способов записи чисел, например, в разных позиционных системах счисления, показывать способы перехода от одной системы к другой, а также, возможно показать одну-две непозиционные системы, например, римскую, и, обязательно, графический способ представления чисел на числовой прямой. Одним словом, как можно раньше формировать различение “число – способ записи”.

Опыт работы показывает, что многие дети доходят до старших классов, не различая число и способ записи, что создает большие трудности при решении задач и понимании дальнейшего материала. То же относится и к остальным объектам.

Полезно сопоставить переходы от одного представления объекта к другому и переводы текстов с одного естественного языка на другой, например, с английского на русский. При переводах такого типа “объектом”, который должен сохраняться, можно считать “смысл” — тонкое и до конца не формализуемое понятие; соответственно задача перевода до конца не алгоритмизируется. В отличие от этой ситуации переход от одного представления математического объекта к другому осуществляется по алгоритму, можно осуществить обратный переход; перейдя от одного представления к другому, а от этого другого к третьему, мы тем самым перейдем от первого представления к третьему. В итоге у учащихся старших классов школ с углубленным изучением математики, а также у студентов математических специальностей можно сформировать достаточно глубокое и современное представление о математическом объекте как о классе эквивалентных представлений.

Это подводит к пониманию одной из сторон вопроса о том, как возникают объекты в математике. А именно, многие важные объекты возникают не как *индивиды*, а как *классы эквивалентности*. В частности, как классы эквивалентности некоторых *формальных символов*. Тем самым ряд учащихся и студентов можно подвести к освоению очень мощной мыслительной процедуры, часто применяемой в математике: при построении нового объекта сначала вводится некоторая совокупность символов, обычно с возможностью выполнения над ними некоторых операций. Затем объект строится как класс эквивалентности по некоторому естественному отношению эквивалентности. Примеры: векторы, комплексные числа, расширения рациональных чисел по корням неприводимых многочленов и т.п.

5.2. Корректность операции и выбор представления

> Когда группа ученых в Америке получила 2 милиграмма гидроокиси плутония, то от любопытных, жаждавших увидеть новый элемент, не было отбоя. Но рисковать драгоценными кристаллами было нельзя, и ученые насыпали в пробирку кристаллики гидроокиси алюминия и, подкрасив их зелеными чернилами, выставили для всеобщего обозрения. "Содержимое пробирки *представляет собой* гидроокись плутония", — невозмутимо заявляли они посетителям. Те уходили удовлетворенными.
>
> "Физики продолжают шутить",
> Москва, "Мир", 1968.

Обратимся к выполнению операций над объектами. Мы можем определить и выполнить операцию в некотором фиксированном представлении, например, сложить два числа, записанных в десятичной системе счисления. Возникает вопрос о *корректности* операции, т.е. об инвариантности результата операции по отношению к представлению. Мы считаем, что можно достаточно рано разъяснить детям смысл этого вопроса на простых примерах. Пусть мы складываем два числа в десятичном представлении и получаем результат, также в десятичном представлении. Мы можем перевести каждое число в двоичное представление, выполнить сложение и получить результат в двоичном представлении. В чем заключается корректность операции сложения (почему мы уверены, что выполняем операцию с числами, а не просто манипуляции с записями)? В том, что при переводе суммы из десятичного представления в двоичное мы получим именно тот результат, который получен при выполнении сложения в двоичном представлении (или, наоборот, при переводе из двоичного в десятичное). Это можно изобразить графически в виде схемы:

$$\begin{array}{ccccc} A_{10} & + & B_{10} & = & C_{10} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ A_2 & + & B_2 & = & C_2 \end{array}$$

Здесь нижние индексы указывают на систему счисления, в которой записаны числа, а вертикальные двойные стрелки означают переход от одной системы к другой и обратно. Какой практический смысл имеет вышеизложенное при изучении школьного курса математики? На наш взгляд, главное — понимание того, что в ситуации конкретной математической задачи нужно использовать представление, максимально удобное для решения задачи. Чтобы применять этот принцип на практике, учащиеся должны овладеть разнообразными представлениями объектов.

5.3. Языки и переводы

Способы представления объектов школьной математики относятся в основном к трем большим группам, к которым можно относиться как к *языкам* внутри курса математики. Это алгебраический, векторный и геометрический языки. Изменение представления объектов, относящихся к той или иной задаче, можно рассматривать как перевод задачи с одного языка на другой. Например, задачу "Выяснить, сколько точек пересечения могут иметь две окружности" можно перевести на алгебраический язык как "Выяснить, сколько решений может иметь система из двух уравнений вида $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R_1^2, (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=R_2^2$". Теорему о свойстве средней линии треугольника можно перевести на векторный язык как "Точки D, E — середины сторон AB, BC треугольника ABC соответственно. Доказать векторное равенство $\vec{DE}=(1/2)\vec{AC}$".

В этой связи мы хотели бы обратить внимания на роль системы координат как инструмента перевода. Изучение системы координат, в частности координатной плоскости, не должно иметь самодовлеющего характера. Систему координат следует вводить и применять таким образом, как удобно в ситуации конкретной задачи. Возвратимся к первому примеру. Если сразу разместить начало координат в центре одной из окружностей, то как результат перевода можно получить более простую алгебраическую задачу: "Выяснить, сколько решений может иметь система из двух уравнений вида $x^2+y^2=R^2$, $(x-a)^2+(y-b)^2=R_1^2$". Для такого "вольного" обращения с системой координат полезно упражняться в задачах на замену координат, на введение разных типов систем координат в разных ситуациях (полярные координаты, координаты на окружности, на сфере (приложения в географии!), на цилиндре, на конусе и т.п.). В общем, задачу следует перевести на тот язык, на котором она наиболее просто решается, а система координат — один из мощных инструментов перевода. Для реализации этого подхода полезно иметь переводы с одного языка на другой для большого количества известных "опорных" математических фактов. Заметим также, что для многих задач важным шагом в решении является переформулировка в рамках одного языка, но в настоящей статье мы не будем на этом подробно останавливаться.

5.4. От операции к объекту

Укажем еще на один важный источник появления объектов в математике. На определенном этапе изучения можно изменить точку зрения и начать рассматривать операции над объектами как объект. Например, от операции сравнения чисел со временем целесообразно перейти к изучению самостоятельного объекта "отношение". Фактически в школьной программе довольно подробно рассматривается отношение порядка. Другой пример: от движений как операций над геометрическими фигурами можно перейти к самостоятельному объекту "движения плоскости" или, более обобщенно, "преобразование пространства". Этот объект имеет разные способы представления, например, синтетический и аналитический, можно изучать его свойство, а в качестве операции над объектом рассмотреть взятие композиции. В заключение отметим, что объектный подход позволяет подготовить учащихся, в случае, если они собираются продолжить математическое образование, к восприятию важнейших математических структур: групп, колец, полей, линейных пространств и т.д.; мы не будем подробно останавливаться на этом в настоящей статье.

6. Оснащение учебного процесса объектно-ориентированными пособиями

В общепринятых учебниках математики материал располагается в соответствии с программой по алгебре и геометрии для данного класса и в течение года изучается "кусочек" каждого объекта и его взаимосвязи с "кусочками" других объектов. Мы считаем, что наряду с обычными учебниками полезно создать ряд пособий, каждое из которых посвящено одному объекту в объеме всего школьного курса математики. Каждое такое пособие предполагается состоящим из двух частей: справочной и задачной. Предполагаемые преимущества подобного пособия:

- Можно собрать в одном пособии весь материал, относящийся к данному объекту в школьном курсе, а также его взаимосвязи "в целом" с другими объектами. Это удобно как для самостоятельного изучения материала, так и для повторения, особенно при существую-щей системе выдачи учебников, когда ученик не имеет учебников за предыдущие классы.

- При небольшом объеме пособия можно включить не только материал обязательной школьной программы, но и дополнительный — для использования в школах с углубленным изучением математики и в работе кружков и факультативов.

- Подбор системы заданий позволит использовать их как на занятиях в классе, так и при самостоятельной проверке освоения той или иной темы.

Существующие *справочники* не вполне соответствуют этой идее, поскольку они пытаются покрыть весь материал школьной программы и вынуждены включать только необходимый минимумом материала из-за ограниченности объема. Кроме того, справочники, как правило, не содержат задач и упражнений. Примером пособия, отражающего объектный подход, является пособие [3].

Литература

1. Разработка и внедрение деятельностного содержания образования на экспериментальных площадках. (К 10-летию общеобразовательной экспериментальной гуманитарно-методологической школы 1314 г. Москвы), издано Московским Комитетом Образования, Москва 2000 г.

2. Ш. А. Алимов и др. Алгебра 9, под руководством А. Н. Тихонова, М.: "Просвещение", 2000 г.

3. В. М. Имайкин, Т. Б. Филановская. Целые и рациональные алгебраические выражения. Учебное пособие для 6-9 классов. Москва, Институт учебника "Пайдейя", 1998 г.

Имайкин Валерий Марсович,
к. ф.-м. н., главный редактор
журнала "Математическое образование".
ivm@infoline.su

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал временно обращайтесь по электронным адресам:

E-mail: fmop@dnttm.ru; Matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2005 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2005 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении

№6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents