Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятый

№3 (34)

Июль - сентябрь 2005 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 3 (34), 2005 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (34), июль – сентябрь 2005 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2005 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2005 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5,25 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

<u>Учебное пособие в журнале</u>

Вокруг теоремы Холла: Учебное пособие

А. Ю. Эвнин

В учебном пособии рассматриваются теорема Ф. Холла о системе различных представлений, решающая задачу о свадьбах, и эквивалентные ей теоремы Менгера, Дилворта, Кёнига–Эгервари, Форда–Фалкерсона. Показано, что эти теоремы являются проявлением принципа двойственности в линейном программировании. Приведён также венгерский алгоритм решения задачи о назначениях. Книга ориентирована на студентов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», изучающих дискретную математику и дискретную оптимизацию. Отдельным изданием пособие выходит в издательстве Южно-Уральского Университета.

Предисловие

Данное учебное пособие посвящено ряду замечательных результатов теории графов, которые были получены в 30–50-х годах прошлого столетия различными математиками, и которые, как выяснилось впоследствие, эквивалентны друг другу: каждая из этих теорем может быть выведена из любой другой.

В комбинаторном анализе и теории сложности вычислений (как и вообще в математике) важнейшей является **идея сведения** одной задачи к другой. Поэтому интересно показать, как внешне различные утверждения переходят друг в друга в результате построения некоторых дополнительных конструкций. И это — не «бесплодная игра разума»! Понимание таких переходов и преобразований важно и для программистов: зная, как одна задача сводится к другой, можно алгоритм решения первой задачи преобразовать в алгоритм решения второй задачи.

В пособии, помимо формулировок и различных доказательств теорем Холла, Менгера, Дилворта, Форда – Фалкерсона, Кёнига – Эгервари,

- устанавливается связь данных теорем с теорией двойственности в линейном программировании;
- приводятся примеры задач, эффективно решаемых с помощью этих теорем;
- обсуждаются некоторые алгоритмы, связанные с двудольными графами (при этом упор делается не на технических деталях, а на принципиальных моментах);
- имеются задачи для самостоятельного решения.

За рамками пособия остались критерий существования совершенного паросочетания в произвольном (не двудольном) графе (теорема Татта) и алгоритмы поиска наибольшего паросочетания в произвольном графе. Для изучения этих вопросов читатель может обратиться к книгам [5] и [6].

Заметим также, что одним из обобщений теоремы Холла является критерий существования независимой трансверсали — теорема Радо. Этот вопрос рассмотрен в [10].

А.Ю. Эвнин, 31 августа 2005 г.

1. Минимаксные теоремы

1.1. Теоремы Менгера

1.1.1. Вершинная форма. Пусть a и b — две различные несмежные вершины графа G. Множество S вершин графа (не содержащее a и b), после удаления которых вершины a и b

становятся несвязанными, называют ab-**отделяющим множеством**. Другими словами, S — ab-отделяющее множество, если любой маршрут, соединяющий вершины a и b в графе G, проходит хотя бы через одну вершину из S.

Теорема 1.1 (К. Менгер, 1927 г.). *Максимальное число простых цепей, соединяющих различные несмежные вершины a и b графа G и не имеющих общих вершин, кроме a и b, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества.*

Доказательство. Если вершины a и b не связаны, то есть принадлежат разным компонентам связности графа, то пустое множество является ab-отделяющим, и утверждение теоремы тривиально. Поэтому будем считать в дальнейшем, что вершины a и b связаны.

Пусть a и b — две различные несмежные вершины графа G; $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ — ab-отделяющее множество минимальной мощности; $P_1, P_2, \ldots, P_m$ — цепи, соединяющие a и b, без общих вершин (кроме a и b). Поскольку через каждую вершину v_i может проходить не более одной цепи P_j, число цепей не превосходит числа k. Индукцией по числу вершин графа докажем, что существует ровно k цепей с указанным свойством. Из этого и будет вытекать утверждение теоремы.

База индукции соответствует случаю, когда в графе три вершины: a, b и, например, c и два ребра: ac и cb. Имеем одну цепь, соединяющую a и b и одноэлементное ab-отделяющее множество $\{c\}$.

Индукционный шаг. Пусть в графе G имеется n вершин, и утверждение теоремы справедливо для всех графов с меньшим, чем n, количеством вершин. Отдельно рассмотрим три возможных случая.

I. *В графе есть вершина v, смежная одновременно и с a, и с b.* Очевидно, что она входит в любое ab-отделяющее множество. Если вершину v удалить, в новом графе (в котором вершин меньше, чем в исходном, и к которому применимо предположение индукции) минимальная мощность ab-отделяющего множества будет равна $k-1$; значит, имеется столько же непересекающихся цепей, соединяющих a и b. Добавив к ним цепь $a \to v \to b$, получим k интересующих нас цепей.

II. *Существует ab-отделяющее множество $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, в котором есть вершина, не смежная с a, и есть вершина, не смежная с b.* После удаления из графа вершин множества S образуются подграфы A и B без общих вершин, содержащие соответственно вершины a и b. Теперь по графу A получим граф G_1 следующим образом. Во-первых, восстановим вершины из S вместе с рёбрами, инцидентными вершинам из A. Во-вторых, добавим вершину b, соединив её рёбрами со всеми вершинами из S. Поскольку не все вершины из S смежны с b, при переходе от графа G к графу G_1 «потеряется» хотя бы одна вершина, и к графу G_1 можно применить предположение индукции. Заметим, что множество S будет ab-отделяющим множеством минимальной мощности и в графе G_1, так как любое ab-отделяющее множество в G_1 будет таковым и в G. Таким образом, в графе G_1 есть k непересекающихся цепей вида $a \to \cdots \to v_i \to b$. Аналогично по графу B строим граф G_2 с k непересекающимися цепями вида $a \to v_i \to \cdots \to b$. Конструируя очевидным образом (для каждого i) из i-х цепей графов G_1 и G_2 цепь $a \to \cdots \to v_i \to \cdots \to b$ графа G, получаем в нём k непересекающихся цепей.

III. *В любом ab-отделяющем множестве мощности k все вершины смежны с a и не смежны с b, либо все вершины смежны с b и не смежны с a.*

Если какая-то вершина не входит ни в одно отделяющее множество из k вершин, то при её удалении получим граф с той же минимальной мощностью ab-отделяющего множества, но меньшим, чем n, числом вершин. В этом графе есть k непересекающихся цепей, соединяющих a и b, и эти цепи нас устроят и в случае исходного графа. Таким образом, можно считать, что *каждая вершина* входит в какое-либо отделяющее множество минимальной мощности, в силу чего она *смежна либо с a, либо с b.*

Среди вершин, смежных с a, найдётся такая, скажем v, у которой есть смежная вершина $u \neq a$, не смежная с a (иначе вершины a и b не связаны), но тогда вершина u смежна с вершиной b. Имеем цепь $a \to v \to u \to b$.

Поэтому в любое ab-отделяющее множество входит одна из вершин v или u, и притом ровно одна (в силу нашего предположения). Удалим теперь из графа вершины v и u. Мощности всех отделяющих множеств уменьшатся на единицу, минимальная мощность ab-отделяющего множества станет равной $k-1$, и в полученном графе можно указать $k-1$ непересекающихся цепей, соединяющих a и b. Добавив к ним цепь $a \to v \to u \to b$, получим k нужных нам цепей в исходном графе. □

1.1.2. Рёберная форма. Пусть a и b — две различные вершины графа G. Множество T рёбер графа, после удаления которых вершины a и b становятся несвязанными, называют ab-**разделяющим множеством**. Другими словами, T — ab-разделяющее множество, если любой маршрут, соединяющий вершины a и b в графе G, содержит хотя бы одно ребро из T.

Теорема 1.2 (Л. Форд, Д. Фалкерсон, 1955 г.). *Максимальное число цепей, соединяющих две различные вершины a и b графа G и не имеющих общих рёбер, равно минимальной мощности ab-разделяющего множества.*

Доказательство. Зафиксируем в графе G вершины a и b. Обозначим через k минимальную мощность ab-разделяющего множества, а через l максимальное число цепей без общих рёбер, соединяющих a и b.

Пусть множество T, содержащее k рёбер, разделяет вершины a и b. Если бы существовало более k не пересекающихся (по рёбрам) цепей, соединяющих a и b, то хотя бы одна из них не содержала рёбер из T. Но тогда T не является ab-разделяющим множеством. Полученное противоречие говорит о том, что $l \le k$.

Осталось доказать неравенство $l \ge k$. Для этого построим по исходному графу G новый граф G', к которому затем применим терему Менгера 1.1.

Это построение таково. «Отделим» все рёбра графа G друг от друга — при этом каждая вершина графа G порождает столько вершин (назовём их **наследницами**), какова её степень, а затем для каждой вершины G соединим её наследниц попарно **новыми** рёбрами (остальные рёбра графа G' назовём **старыми**). Заметим, что каждая вершина графа G' инцидентна ровно одному старому ребру. Пример перехода от G к G' приведён на рис. 1 Здесь уместна такая

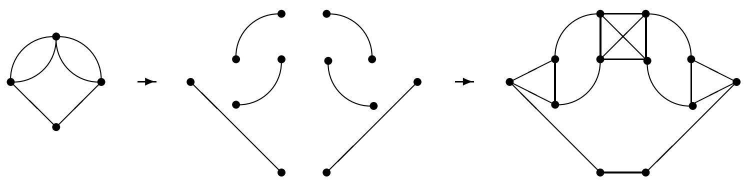

Рис. 1.

транспортная аналогия: для некоторой сети дорог мы на месте каждого перекрёстка строим развязку, позволяющую связать отдельной дорогой любую пару дорог, сходившихся на этом перекрёстке.

Зафиксируем в графе G' одну из наследниц вершины a вершину a' и одну из наследниц b вершину b'. Докажем, что мощность $a'b'$-отделяющего множества не меньше k.

Рассуждение от противного. Если S — $a'b'$-отделяющее множество и $|S| < k$, то множество Q старых рёбер, инцидентных вершинам из S, не является ab-разделяющим в G (поскольку его мощность меньше k). Поэтому в G существует ab-цепь, не имеющая ни одного ребра из Q. Эта цепь порождает в G' цепь, соединяющую a' и b' и не проходящую через вершины из множества S; другими словами, S не отделяет друг от друга вершины a' и b' — противоречие.

Итак, в графе G' минимальная мощность $a'b'$-отделяющего множества не меньше k. По теореме 1.1 в G' имеется не менее k не пересекающихся по вершинам ab-цепей. Выбросив из этих цепей все новые рёбра, мы получим такое же количество цепей без общих рёбер, соединяющих a и b в графе G. Доказано, что $l \ge k$. □

1.1.3. Теоремы Менгера для орграфов. Теоремы 1.1 и 1.2 переносятся и на ориентированные графы — нужно лишь в их формулировках (а также в определении ab-разделяющего множества) заменить всюду термины **ребро** и **цепь** на термины **дуга** и **путь**. Доказательства также почти дословно повторяются.

Итак, имеем следующие утверждения.

Теорема 1.3. *Максимальное число простых путей, соединяющих различные несмежные вершины a и b графа G и не имеющих общих вершин, кроме a и b, равно минимальной мощности ab-отделяющего множества.*

Теорема 1.4 (Теорема о целочисленности). *Максимальное число путей, соединяющих две различные вершины a и b графа G и не имеющих общих дуг, равно минимальной мощности ab-разделяющего множества.*

Теорема о целочисленности позволяет по-новому взглянуть на следующую теорему (непосредственное доказательство которой см. [8], §7.16).

Теорема 1.5 (Л. Форд, Д. Фалкерсон, 1955 г.). *Величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза.*

Доказательство. Превратим сеть $\langle G, c\rangle$ в ориентированный граф G', заменив каждую дугу a с пропускной способностью $c(a)$ на $c(a)$ кратных дуг. Тогда произвольному потоку в сети $\langle G, c\rangle$ соответствует W путей из источника в сток в графе G', не пересекающихся по дугам, где W — величина данного потока. С другой стороны, пропускная способность любого разреза в сети превращается в мощность соответствующего множества дуг графа G', разделяющих источник и сток. Осталось применить теорему 1.4 к паре вершин источник – сток. □

Поясним теперь, почему теорема 1.4 получила название теоремы о целочисленности. Дело в том, что применительно к транспортной сети с целочисленными пропускными способностями дуг она показывает: в оптимальном потоке величина потока по каждой дуге также целочисленна.

1.2. Теорема Холла

Введём некоторые определения и обозначения.

Паросочетанием в графе называют множество попарно несмежных рёбер.

Двудольный граф G с фиксированным разбиением множества вершин на доли V_1 и V_2 будем обозначать $G(V_1, V_2)$. Матрица (a_{ij}), где a_{ij} — число рёбер, соединяющих i-ю вершину доли V_1 с j-й вершиной доли V_2, есть **матрица смежности** графа $G(V_1, V_2)$.

Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф. **Совершенным паросочетанием из V_1 в V_2** называется паросочетание в G, покрывающее V_1 (т.е. для всякой вершины из V_1 найдётся в паросочетании инцидентное ей ребро).

Пусть $A \subset V$ — подмножество вершин графа $G = \langle V, E\rangle$. Окружением множества A называют множество

$$\Gamma(A) = \bigcup_{v\in A} \Gamma(v) \setminus A,$$

где $\Gamma(v)$ — множество вершин, смежных с v.

Теорема 1.6 (Ф. Холл, 1935 г.). *Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset V_1 \quad |\Gamma(A)| \geq |A|.$$

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Действительно, условия $|A| = k$ и $|\Gamma(A)| < k$ означают: некоторые k вершин из V_1 смежны в совокупности менее чем с k вершинами из V_2 — поэтому нет попарно несмежных ребер в $G(V_1, V_2)$, покрывающих вершины даже из $A \subset V_1$, тем более нет совершеннного паросочетания из V_1 в V_2.

Достаточность. Пусть $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. Добавим к графу вершину a, соединив её ребрами со всеми вершинами из доли V_1, и вершину b, соединив её ребрами со всеми вершинами из доли V_2. Полученный граф обозначим G'.

Каждое ребро v_iu_j исходного графа порождает цепь $a \to v_i \to u_j \to b$ в графе G', а совершенное паросочетание в $G(V_1, V_2)$ взаимно однозначно соответствует множеству из k непересекающихся цепей, соединяющих a и b. Таким образом, задача сведена к доказательству существования таких цепей в G'.

Очевидно, что множество $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ является ab-отделяющим. Докажем, что нет отделяющего множества меньшей мощности. Возьмём для этого произвольное ab-отделяющее множество $S = A \cup B$, где $A \subset V_1,\ B \subset V_2$. Ни одна вершина из множества $V_1 \setminus A$ не может быть смежна ни с какой вершиной из $V_2 \setminus B$ (иначе множество $A \cup B$ не будет отделять вершины a и b). Значит, каждая вершина из $V_1 \setminus A$ смежна с какой-либо вершиной из B, то есть $\Gamma(V_1 \setminus A) \subset B$. Отсюда $|\Gamma(V_1 \setminus A)| \leq |B|$. По условию теоремы Холла $|\Gamma(V_1 \setminus A)| \geq |V_1 \setminus A|$. Поскольку $A \subset V_1$, имеем $|V_1 \setminus A| = |V_1| - |A|$. Таким образом,

$$|B| \geq |\Gamma(V_1 \setminus A)| \geq |V_1 \setminus A| = |V_1| - |A|,$$

откуда $|A| + |B| \geq |V_1|$ и

$$|S| = |A| + |B| \geq |V_1| = k.$$

Итак, минимальная мощность ab-отделяющего множества в графе G' действительно равна k. По теореме Менгера существует k непересекающихся цепей, соединяющих a и b. Выбросив из этих цепей крайние звенья, получим искомое совершенное паросочетание. □

Теорема Холла даёт решение следующей задачи.

Задача о свадьбах. *Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно одновременно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?*

Действительно, построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором V_1 есть множество юношей, а V_2 — соответственно множество девушек, а знакомые юноши и девушки соединены рёбрами. Тогда одновременно женить всех юношей означает найти в данном графе совершенное паросочетание из V_1 в V_2. Ответ на вопрос задачи о свадьбах можно сформулировать так: *задача разрешима тогда и только тогда, когда любые k юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с k девушками.*

Приведём теперь **доказательство теоремы Холла, не опирающееся на теорему Менгера**; при этом будут использоваться матримониальные термины.

Необходимость очевидна. *Достаточность* будем доказывать индукцией по числу юношей. Пусть всего имеется m юношей. *База индукции* ($m = 1$) очевидна: уж одного-то юношу, знакомого хотя бы с одной девушкой, поженить можно.

Индукционный шаг. Пусть утверждение теоремы выполняется, если юношей меньше m, и докажем его для m юношей. Рассмотрим два возможных случая.

I. *Любые h юношей ($h < m$) в совокупности знакомы не менее чем с $h + 1$ девушками.* Если в этом случае мы поженим какого-то (любого) юношу на любой знакомой ему девушке, то для любых k оставшихся юношей общее число знакомых им (незамужних) девушек или не изменится, или уменьшится на единицу — значит, не превзойдёт числа k. По предположению индукции оставшихся $m - 1$ юношей поженить можно.

II. *Некоторые h юношей ($1 \leq h < m$) знакомы в совокупности ровно с h девушками.* По предположению индукции их можно поженить. Попробуем устроить судьбу оставшихся $m - h$ юношей. Если какие-то k юношей из их числа знакомы в совокупности менее чем с k девушками, то вместе с указанными h юношами они составят группу из $k + h$ юношей, знакомых менее чем с $k + h$ девушками, что противоречит условию теоремы. Таким образом, и к оставшимся $m - h$ юношам можно применить предположение индукции. □

1.3. Венгерская теорема

Пусть имеется двоичная матрица (т. е. состоящая из нулей и единиц). Единичные элементы этой матрицы, никакие два из которых не лежат в одной строке или одном столбце, назовём **независимыми**. Строки и столбцы матрицы, содержащие в совокупности все её единицы, назовём **покрывающими линиями**.

Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

можно указать четыре независимые единицы (они заключены в прямоугольники), и не больше, а минимальное по мощности множество покрывающих линий составляют первые три столбца и последняя строка.

Теорема 1.7 (Д. Кёниг, Э. Эгервари, 1931 г.). *Наибольшее число независимых единиц двоичной матрицы равно наименьшему числу покрывающих линий.*

Дадим сразу перевод условия теоремы на язык теории графов. Пусть в двоичной матрице $A = (a_{ij})$ m строк и n столбцов. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, для которого A является матрицей смежности.

Независимые единицы матрицы соответствуют попарно несмежным рёбрам, т. е. паросочетанию графа, а покрывающие линии — **вершинному покрытию** графа — множеству таких его вершин, что всякое ребро графа инцидентно хотя бы одной из них.

На рис. 2 представлен граф, соответствующий матрице из примера, приведённого выше. Рёбра $u_1v_1, u_2v_2, u_4v_3, u_5v_4$ составляют максимальное паросочетание, а вершины v_1, v_2, v_3, u_5 образуют минимальное вершинное покрытие.

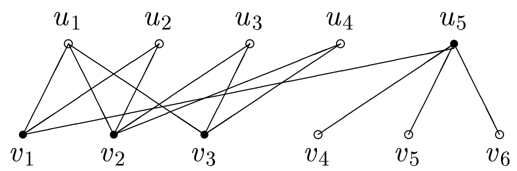

Рис. 2.

Итак, венгерская теорема говорит о том, что
в двудольном графе наибольшая мощность паросочетания равна наименьшей мощности вершинного покрытия.

Доказательство венгерской теоремы. Обозначим через r наибольшее число независимых единиц, а через s наименьшее число покрывающих линий. Пусть все единицы матрицы находятся в некоторых x строках и y столбцах, причём $x + y = s$. Заметим, что если какие-то две единицы лежат (или не лежат) на одной линии, то это свойство сохранится и при любой перестановке строк или столбцов. (В графовой модели задачи перестановки линий сводятся к перенумерованию вершин в долях графа). Поэтому при указанных преобразованиях мощности интересующих нас множеств не меняются. Значит, можно считать, что все единицы расположены в первых x строках и последних y столбцах, а матрица имеет следующий блочный вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right).$$

Рассмотрим двудольный граф $G'(V_1', V_2')$, который задаётся подматрицей A. В долях этого графа соответственно x и $n - y$ вершин. Если все единицы из каких-либо k строк матрицы A покрываются меньшим числом столбцов, то эти k строк можно заменить указанными столбцами и получить меньшее, чем $s = x + y$, число линий, покрывающих единицы матрицы, что приводит нас к противоречию с предположением о минимальности числа s. Таким образом, любые k вершин из доли V_1' смежны в совокупности не менее чем с k вершинами доли V_2' — выполнены условия теоремы Холла! Стало быть, в графе $G'(V_1', V_2')$ существует совершенное паросочетание из V_1' в V_2', то есть в подматрице A есть x независимых единиц.

Аналогичное рассуждение, применённое к подматрице C, доказывает, что C содержит y независимых единиц.

Объединив независимые единицы из A и C, получим $x+y$ независимых единиц. Значит, максимальное число независимых единиц r не меньше числа $s=x+y$. С другой стороны, r независимых единиц нельзя покрыть менее чем r линиями (так как каждая линия покрывает не более одной независимой единицы), то есть r не больше s — минимального числа покрывающих линий. Итак, $r=s$. □

Венгерская теорема была выведена из теоремы Холла. Приведём теперь

Доказательство теоремы Холла на основе венгерской теоремы. Пусть доли двудольного графа $G(V_1,V_2)$ содержат соответственно m и n вершин, A — матрица смежности этого графа. По условию теоремы Холла в любых k строках этой матрицы присутствуют единицы не менее чем из k столбцов. Существование совершенного паросочетания из V_1 в V_2 равносильно тому, что в матрице A есть m независимых единиц. В силу венгерской теоремы достаточно проверить, что менее чем m линий не могут покрыть все единицы матрицы. Предположим противное: какие-то x строк и y столбцов содержат все единицы, причём $x+y<m$. Тогда единицы оставшихся $m-x$ строк могут находиться только в указанных y столбцах, но $y<m-x$. Получили противоречие с условием теоремы Холла. □

Терминологическое замечание. Наибольшее число независимых единиц двоичной матрицы называют её **словарным рангом**.

1.4. Теорема Дилворта

Сначала введём (или напомним) некоторые определения и обозначения. Пусть на некотором конечном множестве A введено **отношение порядка** $\prec$, т. е. отношение, обладающее свойствами **транзитивности** (состоящее в том, что если для элементов a,b и c множества A выполняются условия $a\prec b$ и $b\prec c$, то $a\prec c$) и **антисимметричности** (если $a\prec b$ и $b\prec a$, то $a=b$; другими словами, не существует двух различных элементов a и b, для которых одновременно выполняются условия $a\prec b$ и $b\prec a$). Всем известными примерами отношений порядка являются отношения $<,\leq,>,\geq$, заданные на любом подмножестве числовой прямой, и отношение делимости на множестве натуральных чисел. Множество вместе с введённым на нём отношением порядка называют **упорядоченным**.

Подмножество упорядоченного множества называют **цепью**, если в нём любые два элемента сравнимы по данному отношению, и **антицепью**, если никакие два различные элемента этого подмножества не сравнимы по данному отношению. Например, в множестве $\{2,3,6,7,55\}$, упорядоченном отношением делимости, есть цепи $\{2,6\}$, $\{3,6\}$ и антицепи $\{2,3,7,55\}$, $\{6,7,55\}$. Одноэлементное множество — одновременно и цепь, и антицепь. Число элементов цепи (антицепи) будем называть её **длиной**.

Очевидно, что любая цепь пересекается с любой антицепью не более чем по одному элементу. Отсюда следует, что если в упорядоченном множестве A имеется антицепь длины m, то число цепей, **покрывающих** A (т. е. их объединение есть A), не может быть меньше m.

Таким образом, *наименьшее количество цепей, покрывающих A, не меньше наибольшей длины антицепи.* Как показывает следующая теорема, на самом деле всегда имеет место равенство упомянутых величин.

Теорема 1.8 (Р. Дилворт, 1950 г.). *Минимальное число непересекающихся цепей, покрывающих упорядоченное множество, равно максимальной длине антицепи.*

Доказательство. Обозначим наименьшее количество покрывающих цепей через X, а наибольшую длину антицепи через Y. Уже установлено, что $X\geq Y$. Покажем, что имеет место и неравенство $X\leq Y$.

Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ — упорядоченное множество с отношением $\prec$. Построим двудольный граф $G=\langle V_1\cup V_2,E\rangle$, где $V_1=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$,
$V_2=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ и $x_iy_j\in E \iff (a_i\prec a_j, i\neq j)$. В этом графе вершины x_i и y_i «представляют» элемент a_i исходного множества, а наличие ребра x_iy_j свидетельствует о том, что i-й и j-й

элементы множества A находятся в заданном отношении. Таким образом, построенный граф даёт графическое представление (на то он и граф!) упорядоченного множества.

Возьмём наибольшее (по мощности) паросочетание в этом графе. Пусть его мощность равна k. Это паросочетание «порождает» $m = n - k$ цепей, покрывающих множество A. Покажем, как их получить. Сначала имеем n одноэлементных цепей, соответствующих n элементам A. Каждое ребро паросочетания позволяет объединить две цепи в одну (например, ребро $x_i y_j$ объединяет цепи $\dots \to a_i$ и $a_j \to \dots$ в цепь $\dots \to a_i \to a_j \to \dots$). В итоге и получим m цепей, которые не пересекаются и покрывают множество A. Отсюда следует, что *наименьшее количество покрывающих цепей X не больше m.*

Теперь рассмотрим какое-либо минимальное вершинное покрытие графа

$$T = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}, y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_s}\}.$$

Покажем, что индексы всех вершин в указанном множестве различны, то есть $\forall t, l \;\; i_t \neq j_l$. Ведём рассуждение от противного. Предположим, что для каких-то t и l имеет место равенство $i_t = j_l = h$. Существует ребро вида $x_h y_c$, где $y_c \notin T$, так как в противном случае множество $T \setminus \{x_h\}$ также является вершинным покрытием, что противоречит минимальности T. Аналогично, существует и ребро вида $x_d y_h$ для некоторой вершины $x_d \notin T$. Для указанных c и d имеем $h \prec c$ и $d \prec h$, откуда в силу транзитивности $d \prec c$. Значит, в графе есть ребро $x_d y_c$, соединяющее вершины, не принадлежащие множеству T. Но тогда T не является вершинным покрытием — противоречие!

Таким образом, вершины множества T представляют в точности $r + s$ элементов множества A.

Венгерская теорема, напомним, говорит о том, что наибольшая мощность паросочетания равна минимальной мощности вершинного покрытия; в наших обозначениях получаем $k = r + s$. Заметим теперь, что элементы, не представленные в множестве T, попарно несравнимы, т. е. образуют антицепь, а число таких элементов равно

$$n - (r + s) = n - k = m.$$

Из существования антицепи мощности m вытекает, что *максимальная длина антицепи Y не меньше m.*

Итак, $X \leq m \leq Y$. Вспоминая, что $X \geq Y$, окончательно имеем: $X = m = Y$. $\square$

Замечание. Доказательство теоремы даёт алгоритм нахождения минимального цепного покрытия, основанный на выделении наибольшего паросочетания в соответствующем двудольном графе.

Теорема Дилворта была выведена из венгерской теоремы. Ещё проще осуществить

Доказательство венгерской теоремы на основе теоремы Дилворта. Имея двудольный граф $G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$, введём отношение порядка на множестве его вершин $V = V_1 \cup V_2$, считая, что $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $x \in V_1,\ y \in V_2$ и $xy \in E$. В этом упорядоченном множестве все цепи — одно- или двухэлементные. Поэтому в минимальном цепном разложении множества V число двухэлементных цепей должно быть максимально. Непересекающиеся двухэлементные цепи соответствуют паросочетанию в исходном графе. Таким образом, наименьшее число цепей, покрывающих V, равно $n - k$, где n — количество вершин графа, а k — максимальная мощность паросочетания. По теореме Дилворта, максимальная мощность антицепи в упорядоченном множестве V также равна $n - k$. Очевидно, что антицепь — это **независимое** множество вершин (т. е. множество попарно несмежных вершин).

Отметим такой полезный факт.

Множество вершин P является вершинным покрытием графа тогда и только тогда, когда дополнение к нему $\overline{P}$ — независимое множество.

Действительно, если P — вершинное покрытие, то две вершины из $\overline{P}$ не могут быть смежны (иначе P — не вершинное покрытие). С другой стороны, если $\overline{P}$ — независимое множество, то для любого ребра графа хотя бы один из его концов не входит в $\overline{P}$, т. е. принадлежит P — стало быть, P — вершинное покрытие.

Поэтому дополнение к наибольшему независимому множеству вершин является наименьшим вершинным покрытием.

Мы уже выяснили, что в графе G наибольшая мощность независимого множества равна $n-k$. Значит, наименьшая мощность вершинного покрытия равна k. $\square$

Теорема, двойственная к теореме Дилворта

Если в формулировке теоремы Дилворта заменить слово «цепи» на «антицепи», а «антицепь» на «цепь», то получим также верное утверждение, которое доказывается очень просто.

Теорема 1.9. *Минимальное число непересекающихся антицепей, покрывающих упорядоченное множество A, равно максимальной длине цепи.*

Доказательство. Пусть m — максимальная длина цепи, а P — цепь длины m. Так как любая антицепь имеет с цепью P не более одного общего элемента, исходное множество A покрывает не менее m антицепей. Обозначим через $l(a)$ наибольшую длину цепи, начинающейся с элемента a (то есть элемент a предшествует всем другим элементам данной цепи). Очевидно, если $a \prec b$, то $l(a) > l(b)$. Таким образом, элементы a и b, для которых $l(a) = l(b)$, не сравнимы, а множество

$$A_i = \{a \mid l(a) = i\}$$

является антицепью. Осталось заметить, что в наших предположениях функция l на элементах множества P принимает все значения от 1 до m, и m — наибольшее значение функции l. Значит, имеем m непересекающихся антицепей $A_1, A_2, \ldots, A_m$, покрывающих упорядоченное множество A. $\square$

Из доказанной теоремы вытекает следующий интересный факт.

Теорема 1.10. *Если упорядоченное множество A содержит не менее $(p-1)(q-1)+1$ элементов, то в нём существует цепь длины не менее p или антицепь длины не менее q.*

Доказательство. Если в множестве A нет цепи длины p, то есть максимальная длина цепи не превосходит $p-1$, то, согласно предыдущей теореме, найдётся не более $p-1$ антицепей, покрывающих множество A. Если бы каждая из них содержала не более $q-1$ элементов, то в их объединении было бы не более $(p-1)(q-1)$ элементов, и они не покрывали бы множество A. Стало быть, длина некоторой антицепи не меньше числа q. $\square$

Замечание. Теорема 1.10 легко выводится и из самой теоремы Дилворта, но, как уже заметил читатель, она доказывается не столь просто, как двойственная теорема.

2. Линейное программирование и принцип двойственности

2.1. Общие сведения

Задача линейного программирования состоит в нахождении экстремума (то есть максимума или минимума) линейной целевой функции при линейных ограничениях на переменные.

В дальнейшем будут использоваться следующие соглашения и обозначения.

Жирными буквами будем обозначать векторы-столбцы. Значок $'$, поставленный после обозначения вектора-столбца или матрицы, есть знак транспонирования. Запись $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

означает, что $x_1 \geq y_1,\ x_2 \geq y_2,\ \ldots,\ x_n \geq y_n$.

Рассмотрим следующую пару задач линейного программирования.

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max, \text{ если } \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \tag{1}$$

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}'\mathbf{y} \to \min, \text{ если } \mathbf{y} \geq \mathbf{0},\ A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \tag{2}$$

где A — матрица размера $m \times n$; $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{0}$ — нулевой вектор соответствующего размера.

Задачу (1) будем называть **прямой**, а задачу (2) — **двойственной** к прямой.

Заметим, что если двойственную задачу записать в виде прямой (умножив целевую функцию и нетривиальные неравенства на -1):

$$-g = -\mathbf{b}'\mathbf{y} \to \max, \text{ если } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \ \ -A'\mathbf{y} \leq -\mathbf{c},$$

то двойственной к ней станет, очевидно, задача (1). Таким образом, задача, двойственная к двойственной, есть прямая задача.

Множество векторов $\mathbf{x}$, удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, образуют её **область допустимых решений**. Возможны следующие случаи:

- область допустимых решений пуста (система ограничений несовместна);
- допустимые решения имеются, но **целевая функция** (или **стоимость решения**) $f(\mathbf{x})$ не имеет конечного оптимума (например, в случае задачи максимизации функция принимает сколь угодно большие значения);
- целевая функция имеет конечный оптимум.

Пусть вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет ограничениям прямой задачи, а вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет ограничениям двойственной задачи. Тогда $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{y})$. Это утверждение обосновывается следующей цепочкой неравенств:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{c} \leq \mathbf{x}'(A'\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})'\mathbf{y} \leq \mathbf{b}'\mathbf{y} = g(\mathbf{y}).$$

Оказывается, что в наиболее интересном для нас случае существования конечного оптимума доказанное неравенство на оптимальных решениях обращается в равенство.

Теорема двойственности линейного программирования. *Если одна из задач (1) или (2) имеет конечное оптимальное значение целевой функции, то тем же свойством обладает и другая задача, причём оптимальные значения целевых функций данных задач совпадают.*

Эта теорема была доказана в середине прошлого века Д. Гейлом, Г. Куном и А. Таккером.

Тогда же Дж. Данциг предложил алгоритм решения задач линейного программирования — *симплекс-метод*. Его суть с геометрической точки зрения вкратце можно описать следующим образом.

При $\mathbf{a_i}' \in \mathbb{R}^n$ неравенство $\mathbf{a_i x} \leq b_i$ задаёт полупространство в пространстве $\mathbb{R}^n$, ограниченное гиперплоскостью $\mathbf{a_i x} = b_i$. Ограничения задачи линейного программирования описывают пересечение полупространств — многогранную область. Ограниченная многогранная область есть многогранник (полиэдр).

Если в $\mathbb{R}^n$ ввести новую систему координат, направив одну из её осей по вектору $\mathbf{c}$, то значение целевой функции в точке $\mathbf{x}$ есть просто проекция вектора $\mathbf{x}$ на эту ось (умноженная на длину вектора $\mathbf{c}$), то есть *высота* точки. Симплекс-метод состоит в движении по рёбрам многранника вверх: из текущей вершины переходим в смежную, более высоко расположенную. Через конечное число шагов мы попадём в наиболее высоко расположенную вершину — в ней достигается оптимальное значение целевой функции.

Указанный процесс легко описывается линейными преобразованиями матрицы, задающей многогранник решений.

Несмотря на то, что симплекс-метод очень хорошо зарекомендовал себя при решении задач большой размерности, возникающих из практики, было показано, что в наихудшем случае его трудоёмкость является экспоненциальной.

Долгое время было неизвестно, существуют ли алгоритмы, которые гарантированно за полиномиальное время решают задачу линейного программирования. В 1979 г. советский математик Л. Г. Хачиян доказал полиномиальность алгоритма эллипсоидов, предложенного для решения задач линейного программирования другими советскими математиками Н. З. Шором, Д. Б. Юдиным и А. С. Немировским. На практике метод эллипсоидов не нашёл широкого применения, поскольку требуемое для его работы время решения, хоть и полиномиально, но слишком велико.

В последующих параграфах мы покажем, как некоторые задачи комбинаторной оптимизации формулируются в виде задач линейного программирования. При этом минимаксные теоремы, полученные ранее, окажутся проявлением теоремы двойственности.

2.2. Абсолютно унимодулярные матрицы

Матрица называется **абсолютно унимодулярной**, если все её миноры равны $0,\ 1$ или -1.

Поскольку элемент матрицы является её минором первого порядка, из определения следует, что каждый элемент матрицы равен $0,\ 1$ или -1.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые достаточные признаки, а также свойства абсолютно унимодулярных матриц.

Лемма 2.1. *Пусть в каждом столбце матрицы A ровно два ненулевых элемента, один из которых равен 1, а другой равен -1. Тогда A — абсолютно унимодулярная матрица.*

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по размеру (т. е. порядку) минора. *База индукции* очевидна, поскольку из условия следует, что каждый элемент матрицы равен $0,\ 1$ или -1.

Индукционный шаг. Рассмотрим минор M размера $k \times k$, предполагая, что все миноры меньшего размера равны $0, 1$ или -1. В каждом столбце минора не более двух ненулевых элементов.

Если в M есть нулевой столбец, то $M = 0$.

Если в некотором столбце минора ровно одна единица или минус единица, то разложим минор по этому столбцу и получим с некоторым знаком минор меньшего размера.

Осталось изучить случай, когда в каждом столбце минора есть и 1, и -1. Но тогда сумма строк минора есть нулевая строка, и минор равен нулю. □

Введём понятие **матрицы инцидентности ориентированного графа**. Пусть граф G не имеет петель и содержит n вершин, пронумерованных числами от 1 до n, и m дуг, пронумерованных соответственно числами от 1 до m. Составим матрицу $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ следующим образом. Если j-я дуга графа идёт из k-й вершины в l-ю, то $a_{kj} = 1,\ a_{lj} = -1$, а остальные элементы j-го столбца — нули. Тогда A и есть матрица инцидентности орграфа G.

Тривиальным следствием леммы 2.1 является

Теорема 2.1. *Матрица инцидентности ориентированного графа является абсолютно унимодулярной.*

В качестве несложного упражнения предлагаем читателю убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть A — абсолютно унимодулярная матрица. Выполнение любой из следующих операций сохраняет свойство абсолютной унимодулярности:*
1) транспонирование;
2) умножение любой строки на -1;
3) приписывание к матрице строки, в которой один из элементов равен 1 или -1, а остальные элементы — нули.

Пусть теперь G — непустой граф без петель с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и множеством рёбер $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Введём в рассмотрение **матрицу инцидентности** графа — матрицу $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0 \ \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что каждый столбец матрицы инцидентности содержит ровно две единицы, а в каждой строке столько единиц, какова степень соответствующей вершины графа.

Теорема 2.2. *Матрица инцидентности двудольного графа является абсолютно унимодулярной.*

Доказательство. Пусть $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф. Ориентируем его рёбра по направлению от первой доли V_1 ко второй доле V_2. Пусть B — матрица инцидентности полученного орграфа. По теореме 2.1 матрица B абсолютно унимодулярная. Сменив знаки элементов строк, отвечающих вершинам второй доли, мы получим матрицу инцидентности исходного двудольного графа. По лемме 2.2 эта матрица также абсолютно унимодулярная. □

Роль абсолютно унимодулярных матриц в целочисленной оптимизации определяется следующим важным результатом.

Теорема 2.3. *Пусть A — абсолютно унимодулярная матрица, $\mathbf{b}$ — целочисленный вектор, а полиэдр P задаётся неравенствами $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$. Тогда вершины P имеют целочисленные координаты.*

Доказательство. Пусть матрица A имеет размер $n \times m$. Любая вершина многогранника P есть единственная точка пересечения m гиперплоскостей, отвечающих некоторым его граням. Возьмём соответствующие строки матрицы $\binom{I}{A}$, где I — единичная матрица размера $m \times m$. Неравенства, соответствующие этим строкам, заменим равенствами, после чего координаты вершины находятся в результате решения невырожденной системы линейных уравнений. Если удалить из этой системы переменные, отвечающие тривиальным ограничениям, то получим систему

$$A_1\mathbf{x_1} = \mathbf{b_1}, \tag{$*$}$$

где $\mathbf{x_1}$ — некоторый подвектор вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{b_1}$ — соответствующий подвектор вектора $\mathbf{b}$, а A_1 — некоторая невырожденная подматрица матрицы A. В силу предыдущей теоремы определитель матрицы A_1 равен 1 или -1. Формулы Крамера теперь говорят о том, что система уравнений $(*)$ имеет целочисленное решение. □

Простым следствием теоремы 2.3 является целочисленность вершин многогранника решений двойственной задачи.

Теорема 2.4. *Пусть A — абсолютно унимодулярная матрица, $\mathbf{c}$ — целочисленный вектор, а полиэдр Q задаётся неравенствами $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ и $A'\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$. Тогда вершины Q имеют целочисленные координаты.*

Доказательство. Представив область допустимых значений двойственной задачи в виде

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \ \ -A'\mathbf{y} \leq -\mathbf{c},$$

заметим, что в силу леммы 2.2 матрица $-A'$ абсолютно унимодулярна. □

2.3. Наибольшие паросочетания

Пусть G — непустой граф без петель с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, множеством рёбер $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ и матрицей инцидентности A.

Любое множество рёбер $F \subset E$ можно задать его вектором инцидентности

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad x_i = \begin{cases} 1, \text{если } e_i \in F; \\ 0 \ \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, $|F| = \sum x_i = \mathbf{1}'\mathbf{x}$, где $\mathbf{1}$ — вектор-столбец подходящего размера, составленный из единиц.

Заметим также, что элементы вектора $A\mathbf{x}$ есть степени вершин графа $\langle V, F \rangle$. Таким образом, если F — паросочетание, то выполняется неравенство $A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}$, поскольку каждая вершина инцидентна не более чем одному ребру паросочетания.

Рассмотрим теперь задачу линейного программирования

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} \to \max, \text{ если } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \ A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}. \tag{1}$$

Если добавить к ограничениям (1) требование, чтобы вектор $\mathbf{x}$ был **двоичным** (в котором каждая компонента равна 0 или 1), то получим в точности задачу нахождения максимального паросочетания в графе G.

Вообще говоря, оптимальное решение задачи (1) может и не быть двоичным вектором. Из ограничений задачи и смысла матрицы A (напомним, это матрица инцидентности непустого графа без петель) следут лишь, что его компоненты удовлетворяют неравенствам $0 \leq x_i \leq 1$. Действительно, если $x_i > 1$, а вершина v_k инцидентна ребру e_i, то k-я компонента вектора $A\mathbf{x}$ будет больше 1, что невозможно.

Однако *в случае двудольного графа вершины многогранника решений P являются двоичными векторами.* Убедимся в этом.

Действительно, в силу теоремы 2.2 матрица A является абсолютно унимодулярной. Теперь теорема 2.3 подсказывает нам, что вершины P являются целочисленными.

С учётом того, что $0 \leq x_i \leq 1$, получаем: $x_i \in \{0; 1\}$ для любого i. Нами доказана

Теорема 2.5. *Пусть G — двудольный граф с матрицей инцидентности A. Тогда вершины многогранника решений задачи (1) являются двоичными векторами. Эти вершины суть векторы инцидентности паросочетаний. Точки максимума целевой функции $\mathbf{1}'\mathbf{x}$ соответствуют максимальным паросочетаниям, а максимальное значение этой функции есть максимальная мощность паросочетания.*

Рассмотрим теперь задачу, двойственную к (1):

$$\mathbf{1}'\mathbf{y} \to \min, \text{ если } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, A'\mathbf{y} \geq \mathbf{1}. \tag{2}$$

В силу теоремы 2.4 вершины многогранника решений (2) представляют собой целочисленные векторы.

Посмотрим на вектор $\mathbf{y}$ как на вектор инцидентности некоторого множества вершин W: если $y_i > 0$, то $v_i \in W$; если $y_i = 0$, то $v_i \notin W$. Тогда условие $A'\mathbf{y} \geq \mathbf{1}$ говорит о том, что всякое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине множества W. Значит, W — вершинное покрытие графа.

Легко убедиться, что точки минимума целевой функции на самом деле являются двоичными векторами. Действительно, если мы возьмём произвольный допустимый целочисленный вектор $\mathbf{y}$, не являющийся двоичным, и заменим в нём все положительные координаты на 1, то неравенство $A'\mathbf{y} \geq 1$ сохранится (в силу того, что и элементы матрицы A', и компоненты вектора $\mathbf{y}$ неотрицательные целые числа), а значение целевой функции $\mathbf{1}'\mathbf{y}$ уменьшится.

Поэтому минимальное значение целевой функции равно минимальному количеству вершин в вершинном покрытии.

Нами доказана

Теорема 2.6. *Пусть G — двудольный граф с матрицей инцидентности A. Тогда вершины многогранника решений задачи (2) являются целочисленными векторами. Эти вершины суть векторы инцидентности вершинных покрытий. Точки минимума целевой функции $\mathbf{1}'\mathbf{y}$ соответствуют минимальным вершинным покрытиям, а минимальное значение этой функции есть минимальная мощность вершинного покрытия.*

Сопоставляя формулировки двух последних теорем и применяя теорему двойственности линейного программирования, непосредственно получаем утверждение венгерской теоремы: максимальная мощность паросочетания в двудольном графе (максимальное значение целевой функции $\mathbf{1}'\mathbf{x}$ в задаче (1)) совпадает с минимальной мощностью его вершинного покрытия (минимальным значением целевой функции $\mathbf{1}'\mathbf{y}$ в двойственной к (1) задаче (2)).

2.4. Максимальный поток

Напомним понятие транспортной сети. Пусть G — ориентированный граф с вершинами $v_1, \ldots, v_n$, дугами $r_1, \ldots, r_m$ и матрицей инцидентности A, причём среди вершин имеется единственный источник v_1 (в эту вершину не заходит ни одна дуга), и единственный сток v_n (из стока дуги не исходят). Остальные вершины графа мы называем промежуточными. Будем считать, что в матрице инцидентности источнику и стоку отвечают соответственно первая и последняя строки.

Если для каждой дуги графа определена её пропускная способность — некоторое неотрицательное число, то говорят, что задана **транспортная сеть** (или просто: **сеть**).

Пусть для каждой дуги также определён **поток** — некоторое неотрицательное число, не превышающее пропускной способности этой дуги — так, что сумма потоков по дугам, заходящим в произвольную промежуточную вершину, равна сумме потоков по дугам, исходящим из неё. Тогда говорят, что в сети задан поток.

Пропускную способность j-й дуги и поток по ней обозначаем через d_j и φ_j. Введём векторы

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}.$$

Величиной потока $W(\varphi)$ называют сумму потоков по дугам, исходящим из источника. Несложно показать, что она равна сумме потоков по дугам, заходящим в сток.

Поток в транспортной сети, имеющий наибольшую возможную величину, называют **максимальным потоком.**

Существование максимального потока обосновывается с помощью теоремы Вейрштрасса: функция $W(\varphi)$, будучи линейной, является непрерывной, а множество допустимых потоков в сети образует ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, где m — количество дуг (аккуратное доказательство этого факта можно найти в [1]).

Покажем, как свести задачу нахождения максимального потока в транспортной сети к (прямой) задаче линейного программирования.

Условия балансов потоков для вершин сети можно записать в матричном виде:

$$A\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -w \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $w = W(\varphi)$ — величина потока в сети. Введём вектор $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Тогда (1) можно переписать в виде

$$(A\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

что равносильно

$$(A\mathbf{a}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ w \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}. \tag{3}$$

Действительно, сумма левых частей n скалярных неравенств системы (3) равна нулю, поскольку в каждом столбце матрицы $(A\mathbf{a})$ имеется одна единица, одна минус единица, а остальные элементы — нули. Сумма правых частей этих неравенств тоже нулевая. Поскольку сумма нестрогих неравенств является равенством, каждое из неравенств на самом деле также равенство. Мы доказали равносильность (3) и (2).

Ограничения, связанные с пропускными способностями дуг, запишем в виде

$$I\varphi \leq \mathbf{d}. \tag{4}$$

Объединив (3) и (4) и добавив условие неотрицательности переменных, получим стандартную задачу линейного программирования:

$$w = (0\dots01)\binom{\boldsymbol{\varphi}}{w} \to \max, \quad \text{если } \boldsymbol{\varphi} \ge \mathbf{0},\ w \ge 0 \ \text{ и}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{a} \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right)\binom{\boldsymbol{\varphi}}{w} \le \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Внимательно посмотрим на блочную матрицу $\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{a} \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right)$. Поскольку в каждом столбце матрицы $(A\mathbf{a})$ ровно два ненулевых элемента, один из которых 1, а другой -1, она будет (по лемме 2.1) абсолютно унимодулярной. Тем же весьма привлекательным для нас свойством обладает и матрица $\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{a} \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right)$, так как легко получается из предыдущей матрицы с помощью 3-й операции из леммы 2.2.

Пусть теперь *пропускная способность каждой дуги есть неотрицательное целое число.* Тогда теорема 2.3, применённая к нашей задаче линейного программирования, говорит о том, что *в сети существует максимальный целочисленный поток.*

Перейдём к двойственной задаче. Переменные, отвечающие неравенствам системы (5) будем обозначать $\pi_1, \dots, \pi_n, \gamma_1, \dots, \gamma_m$. Введя естественным образом векторы π и γ, имеем описание двойственной задачи в виде:

$$(\mathbf{0d})'\binom{\pi}{\gamma} = \mathbf{d}'\gamma \to \min, \quad \text{если } \ \pi \ge \mathbf{0},\ \gamma \ge \mathbf{0} \ \text{ и}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & I \\ \hline \mathbf{a}' & \mathbf{0}' \end{array}\right)\binom{\pi}{\gamma} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Поскольку матрица A' имеет размер $m \times n$, система (6) есть система $m+1$ неравенств с $m+n$ переменными. Выясним, что представляют собой эти неравенства. Пусть j-я дуга графа G ведёт из k-й вершины в l-ю. Тогда j-е неравенство системы (6) будет выглядеть так:

$$\pi_k - \pi_l + \gamma_j \ge 0. \tag{7}$$

А последнее неравенство системы таково:

$$-\pi_1 + \pi_n \ge 1. \tag{8}$$

Напомним понятие разреза сети. Если B — множество вершин графа G, содержащее сток и не содержащее источник, то множество дуг

$$S_B = \{uv \mid u \notin B, v \in B\}$$

образует **разрез сети относительно** B. Пропускная способность разреза есть сумма пропускных способностей составляющих его дуг:

$$c(S_B) = \sum_{j:\ r_j \in S_B} d_j.$$

Каждый разрез сети порождает следующее допустимое решение двойственной задачи:

$$\pi_i = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i \in B; \\ 0 \ \text{ в противном случае;} \end{cases} \quad \gamma_j = \begin{cases} 1, \text{ если } r_j \in S_B; \\ 0 \ \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Действительно, $\pi_n = 1, \pi_1 = 0$ — поэтому выполняется условие (8). Перебирая четыре возможные комбинации значений π_k и π_l при проверке соотношения (7), легко убедиться в том, что

$$\pi_k - \pi_l + \gamma_j = \begin{cases} 1, \text{ если } v_k \in B,\ v_l \notin B; \\ 0 \ \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Стоимость решения (9) равна пропускной способности соответствующего разреза:

$$\mathbf{d}'\gamma = \sum_{j:\ \gamma_j=1} d_j = \sum_{j:\ r_j \in S_B} d_j = c(S_B).$$

Общее соотношение между стоимостями допустимых решений прямой и двойственной задачи в нашем случае получает следующее истолкование: *величина любого потока в сети не больше пропускной способности произвольного разреза.*

Абсолютная унимодулярность матрицы $\left(\begin{array}{c|c} A & \mathbf{a} \\ \hline I & \mathbf{0} \end{array}\right)$ позволяет на основании теоремы 2.4 заключить, что двойственная задача имеет оптимальное целочисленное решение $\binom{\pi^*}{\gamma^*}$.

Пусть $B = \{v_i \mid \pi_i^* \geq \pi_n^*\}$. Очевидно, $v_n \in B$. В силу (8) $v_1 \notin B$. Если $r_j = v_k v_l \in S_B$, то $\pi_k^* < \pi_n^* \leq \pi_l^*$, и из (7) следует, что $\gamma_j^* > 0$. Благодаря целочисленности оптимального решения имеем: $\gamma_j^* \geq 1$. Отсюда

$$\mathbf{d}'\gamma^* \geq \sum_{j:\ r_j \in S_B} d_j = c(S_B).$$

Таким образом, стоимость оптимального решения двойственной задачи *не меньше пропускной способности разреза S_B.* Тем же свойством (по теореме двойственности) обладает и стоимость оптимального решения прямой задачи, то есть величина максимального потока в сети.

Итак, с помощью принципа двойственности в линейном программировании мы получили новое доказательство теоремы Форда – Фалкерсона (теорема 1.5).

3. Приложения к различным задачам

3.1. Совершенные паросочетания в регулярных двудольных графах

С помощью теоремы Холла получим результаты, связанные с темой параграфа.

Теорема 3.1 (А. Пуанкаре, 1901 г.). *В любом непустом регулярном двудольном графе $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.*

Доказательство. Пусть степень каждой вершины графа равна $q > 0$. Возьмём произвольные k вершин первой доли $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \ldots, g_l$ второй доли и рассмотрим порождённый этими $k + l$ вершинами подграф исходного графа. В полученном графе степень любой вершины из первой доли равна q, а из второй — не больше q. Число рёбер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(b_i) = kq = \sum_{j=1}^{l} \rho(g_j) \leq lq,$$

откуда $l \geq k$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании в двудольном графе совершенного паросочетания. □

Следствие. *Любой непустой регулярный двудольный граф распадается на совершенные паросочетания.*

Доказательство. Пользуясь теоремой, будем последовательно одно за другим выделять в графе непересекающиеся паросочетания. □

3.2. Латинские прямоугольники

Матрица размера $m \times n$ называется **латинским прямоугольником**, если элементы каждой строки этой матрицы образуют перестановку чисел от 1 до n, и в каждом столбце все числа разные.

Очевидно, что в силу определения число строк латинского прямоугольника m не превосходит числа его столбцов n. В случае $m = n$, как легко догадаться, латинский прямоугольник называют **латинским квадратом**.

Например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

представляют собой латинский прямоугольник размером 3×5 и латинский квадрат 5×5. В этом примере квадрат получается из прямоугольника приписыванием двух строк. Возникает вопрос: *всегда ли латинский прямоугольник $m \times n$, где $m < n$, можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$, приписыванием новых $n - m$ строк?* Оказывается, *всегда!* **Докажем этот факт**.

Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором V_1 есть множество столбцов латинского прямоугольника размера $m \times n$, $V_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$, а вершины $i \in V_1$ и $j \in V_2$ соединены ребром тогда и только тогда, когда в i-м столбце прямоугольника нет числа j.

Например, в случае прямоугольника из рассмотренного примера имеем граф, изображённый на рис. 3. Ясно, что степень любой вершины из доли V_1 равна $n - m$. С другой стороны,

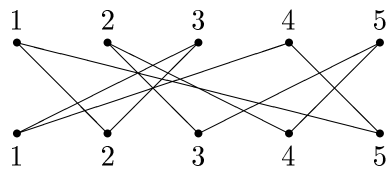

Рис. 3.

любое число j встречается в m строках исходного латинского прямоугольника m раз, значит, оно появляется в m столбцах и отсутствует в $n - m$ столбцах. Отсюда следует, что и степень любой вершины из V_2 также равна $n - m$.

Таким образом, двудольный граф $G(V_1, V_2)$ является непустым и регулярным. Как нам уже известно, такой граф распадается на совершенные паросочетания. Каждое совершенное паросочетание задаёт одну из новых строк латинского квадрата. $\square$

В рассмотренном выше примере переходу от прямоугольника к квадрату соответствует выделение в двудольном графе совершенных паросочетаний: $\{12, 23, 31, 45, 54\}$ и $\{15, 24, 32, 41, 53\}$.

В заключение, отметим, что латинский прямоугольник $m \times n$ (при $m \leq n$) существует. Действительно, сначала заполним произвольно первую строку, затем дополним прямоугольник $1 \times n$ до квадрата, и, наконец, вычеркнем любые $n - m$ строк.

3.3. Дважды стохастические матрицы

Числовая матрица называется **дважды стохастической**, если её элементы неотрицательны, и в каждой строке и каждом столбце сумма элементов равна единице.

Сумма всех элементов такой матрицы равна, с одной стороны, числу её строк, а, с другой стороны, числу столбцов. Значит, дважды стохастическая матрица является квадратной.

Подстановочная матрица состоит только из нулей и единиц, причём в каждой строке и каждом столбце содержится ровно одна единица. Ясно, что подстановочная матрица является дважды стохастической.

Подстановочным множеством матрицы называется множество её элементов, содержащее по одному элементу из каждой строки и каждого столбца.

Теорема 3.2. *Всякая дважды стохастическая матрица $A = (a_{ij})$ имеет подстановочное множество, состоящее из ненулевых элементов.*

Доказательство. Пусть матрица A имеет размер $n \times n$. Минимальное число линий, содержащих все ненулевые элементы матрицы A, равно n, поскольку сумма элементов всей матрицы равна n, а каждой линии — 1. Рассмотрим матрицу B, которая получается из матрицы A заменой ненулевых элементов на единицы. Минимальное число покрывающих линий матрицы B — такое же, как и для матрицы A, то есть n. По венгерской теореме в матрице B есть n независимых единиц. Эти единицы задают подстановочное множество матрицы A. □

Очевидно, что подстановочное множество существует и для матрицы из неотрицательных элементов с одинаковыми суммами по строкам и столбцам.

Теорема 3.3 (Г. Биркгоф, 1946 г.). *Всякая дважды стохастическая матрица представима в виде выпуклой комбинации подстановочных матриц.*

Доказательство. Пусть P_1 — подстановочная матрица, порождённая подстановочным множеством M_1 из ненулевых элементов дважды стохастической матрицы A, а число c_1 — наименьший элемент в M_1. Тогда матрица $A - c_1P_1$ состоит из неотрицательных элементов и имеет одинаковые суммы по строкам и столбцам, и в ней ненулевых элементов меньше, чем у исходной матрицы. Повторяя данное преобразование, через конечное число шагов приходим к равенству

$$A = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_kP_k, \qquad (*)$$

где $c_i > 0$ и P_i — подстановочная матрица для каждого i. Пусть матрица A имеет размер $n \times n$. Так как сумма всех элементов каждой из матриц $A, P_1, P_2, \ldots, P_k$ равна n, из $(*)$ следует: $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$. Таким образом, найденная линейная комбинация является выпуклой. □

Замечание 1. Доказательство теоремы носит конструктивный характер. Описанный процесс получения разложения $(*)$ называют **алгоритмом Биркгофа**. Поскольку каждый шаг этого алгоритма даёт требуемое значение по меньшей мере одному элементу матрицы A, а последний шаг — сразу n элементам матрицы, получаем неравенство $k \leq n^2 - n + 1$, где k — число подстановочных матриц, через которые линейно выражается дважды стохастическая матрица A. Известна (см. [5]) и более точная оценка: $k \leq n^2 - 2n + 2$.

Замечание 2. Представим каждую дважды стохастическую матрицу размера $n \times n$ точкой в n^2-мерном пространстве. Геометрический смысл теоремы Биркгофа следующий: многогранник дважды стохастических матриц имеет своими вершинами подстановочные матрицы. Подробнее об этом можно прочитать в [2] и [7].

3.4. Рёберная раскраска графов

Рёберно-хроматическое число графа — это наименьшее число цветов, которыми можно раскрасить его рёбра так, чтобы смежные рёбра были разного цвета. Указанную раскраску будем называть **правильной**. Обозначают рёберно-хроматическое число графа G через $\chi_e(G)$ (оставляя обозначение $\chi(G)$ для **хроматического** числа графа — наименьшего числа цветов для раскраски вершин графа, при которой смежные вершины имеют разный цвет).

Поскольку рёбра одного цвета при правильной раскраске попарно не смежны, они составляют паросочетание. Таким образом, $\chi_e(G)$ — это наименьшее число паросочетаний, на которые распадается множество рёбер графа G.

Обозначим через $\Delta(G)$ наибольшую степень вершины графа G. Все рёбра, инцидентные фиксированной вершине графа, при правильной раскраске должны иметь разный цвет. Поэтому $\chi_e(G) \geq \Delta(G)$. Неожиданный факт обнаружил советский математик В.Г. Визинг:

Теорема 3.4 (В.Г. Визинг, 1964 г.). *Если в графе G нет петель, то*

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [4].

Вычислим рёберно-хроматические числа некоторых стандартных графов.

Легко видеть, что для циклического графа C_n при $n \geq 2$ имеем:

$$\chi_e(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ 3, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

В случае колеса W_n с $n \geq 4$ вершинами $\chi_e(W_n) = n - 1$.

Более сложно проверяются соотношения для полного графа K_n с $n \geq 2$ вершинами:

$$\chi_e(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ n, & \text{если } n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Если $\chi_e(K_n) = \Delta(G) = n-1$, то каждая вершина графа инцидентна ребру (и притом одному) каждого цвета. Отсюда следует, что количество рёбер одного цвета вдвое меньше общего числа вершин n, которое, стало быть, чётно. Значит, при нечётном n $\chi_e(K_n) > n-1$ и, в силу теоремы Визинга, $\chi_e(K_n) = n$. Приведём, тем не менее,

Пример правильной раскраски рёбер K_n при нечётном n. Изобразим K_n правильным n-угольником с диагоналями. Выберем для каждой его стороны свой цвет. Любая диагональ будет параллельна какой-то стороне, в цвет этой стороны и выкрасим диагональ. Поскольку смежные отрезки (стороны и диагонали) не параллельны, полученная раскраска будет правильной.

В случае чётного n правильную раскраску в $n-1$ цветов можно получить следующим образом. Сначала раскрасим правильным образом подграф K_{n-1}. Вершину, не вошедшую в данный подграф, обозначим v. Для каждой вершины u подграфа будем иметь $n-2$ инцидентных рёбер, покрашенных во все цвета, кроме цвета противоположной (в $n-1$-угольнике) стороны. Используем этот цвет для покраски ребра uv. В результате любые два смежных ребра графа будут разного цвета.

Другие способы правильной раскраски (почерпнутые из практики организаторов спортивных турниров по круговой системе) приводятся в нашем задачнике [9] (задача 557).

Обратимся теперь к регулярному двудольному графу $K_{m,n}$. Без потери общности предположим, что $m \leq n$. Составим латинский прямоугольник $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и будем считать, что a_{ij} обозначает цвет ребра, соединяющего i-ю вершины первой доли с j-й вершиной второй доли. При этом получится правильная раскраска $K_{m,n}$ в n цветов. Поскольку $\chi_e(K_{m,n}) \geq \Delta(K_{m,n}) = n$, делаем вывод: $\chi_e(K_{m,n}) = n$.

В общем случае, $\chi_e(K_{m,n}) = \max(m, n)$. Этот результат можно существенно усилить.

Теорема 3.5. *Пусть G — двудольный граф. Тогда $\chi_e(G) = \Delta(G)$.*

Доказательство. Положим $k = \Delta(G)$. Поскольку $\chi_e(G) \geq k$, достаточно указать способ правильной раскраски графа G в k цветов.

Покажем, как расширить граф G до регулярного двудольного графа, в котором степени всех вершин равны k.

Рассмотрим дизъюнктное объединение k экземпляров графа G, считая при этом, что первые доли указанных графов объединяются в первую долю нового графа, а вторые доли — во вторую. Возьмём произвольную вершину u первой доли исходного графа, степень которой меньше k. Введём во вторую долю строящегося графа $k - \rho(u)$ новых вершин, соединив каждую из них со всеми k «клонами» вершины u. Теперь степень клонов u станет равной k. Новые вершины также имеют эту степень. Затем аналогично поступим с вершинами второй доли, степень которых меньше k. В результате получится регулярный двудольный граф G', имеющий подграфом исходный граф G.

Результаты §3.1 показывают, что граф G' распадается на k совершенных паросочетаний. Покрасив рёбра каждого паросочетания в свой цвет, получим правильную раскраску графа G', а заодно и графа G. $\square$

3.5. Вершинная и рёберная связность

Число вершинной связности $\kappa(G)$ графа G — это наименьшее число вершин графа G, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

Число рёберной связности $\lambda(G)$ графа G — это наименьшее число рёбер графа G, удаление которых приводит к несвязному графу. Ясно, что соответствующие рёбра образуют в графе G разрез (минимальное по включению разделяющее множество).

Приведём пример практической задачи, мотивирующей важность данных характеристик графа. Пусть имеется несколько центров хранения и переработки информации. Некоторые центры соединены каналами связи. Передача информации между двумя центрами может осуществляться либо через соединяющий их канал, либо через другие каналы и центры. Естественно считать сеть таких центров работоспособной, если любые два центра могут обмениваться информацией. Математической моделью описанной информационной сети является связный граф, вершины которого соответствуют информационным центрам, а рёбра — каналам связи. Надёжность (живучесть) сети характеризуется её способностью функционировать (т.е. оставаться работоспособной) при выходе из строя центров или каналов. Мерой этой надёжности и выступают введённые характеристики графа сети.

Если граф G не является связным, то $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$.

Если $\lambda(G) = 1$, то в связном графе G есть **мост** — ребро, при удалении которого граф теряет связность.

Если $\kappa(G) = 1$, то в связном графе G есть **точка сочленения** — вершина, при удалении которой граф теряет связность.

Мосты и точки сочленения — своеобразные «узкие места» связного графа.

Установим соотношения между $\kappa(G)$, $\lambda(G)$, а также $\delta(G)$ — наименьшей степенью вершины графа G.

Теорема 3.6. *Для любого графа G справедливо*

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

Доказательство. Случай несвязного или одновершинного графа очевиден. Будем поэтому считать, что G — связный граф и $\lambda(G) \ge 1$.

Если из графа удалить все рёбра, инцидентные фиксированной вершине, то, очевидно, граф потеряет связность (если он её имел). Отсюда вытекает неравенство $\lambda(G) \le \delta(G)$.

Для доказательстве неравенства $\kappa(G) \le \lambda(G)$ достаточно убедиться в том, что в графе G найдётся не более $\lambda(G)$ вершин, после удаления которых возникает несвязный или одновершинный граф. *При этом можно считать, что G — простой граф.* Действительно, если это не так, удалим из графа G все петли, а также (лишние) кратные рёбра, получив простой граф G', а для него справедливы соотношения $\kappa(G') = \kappa(G)$ и $\lambda(G') \le \lambda(G)$. Очевидно, требуемое неравенство $\kappa(G) \le \lambda(G)$ является следствием аналогичного неравенства $\kappa(G') \le \lambda(G')$ для простого графа.

Выберем в графе G разрез A мощности $k = \lambda(G)$.

От каждого ребра из A возьмём по одному из концов — получим не более k различных вершин (некоторые вершины могут быть выбраны неоднократно), удаление которых ликвидирует указанные k рёбер. Казалось бы, при этом возникнет несвязный граф. Но не всё так просто. Например, для графа K_4 разрез образуют рёбра, инцидентные одной и той же вершине, обозначим её v. Если для каждого из этих рёбер выбирать для последующего удаления вершину v, то после осуществления этой операции получим связный граф. Таким образом, кандидатуры вершин для удаления нужно подбирать достаточно деликатно. Это можно сделать следующим образом.

Зафиксируем какое-нибудь из упомянутых k рёбер — ребро $e = uv$. Удалим из графа G все рёбра множества $A' = A \setminus \{e\}$. Получится связный граф G', для которого ребро e будет мостом. Дальнейшее удаление, например, вершины u приведёт к несвязному или одновершинному графу. Значит, мы добьёмся своей цели (найти не более k вершин, после удаления которых возникает несвязный или одновершинный граф), если при отборе кандидатур для удаления будем от каждого из рёбер, входящих в A', брать вершину, не инцидентную ребру e. И это возможно, поскольку граф G — простой.

Таким образом, $\kappa(G) \le k = \lambda(G)$. $\square$

Теорема 3.7. *Для любых натуральных чисел p, q и r, удовлетворяющих неравенству $p \le q \le r$, существует граф G такой, что*

$$\kappa(G) = p,\ \lambda(G) = q,\ \delta(G) = r.$$

Доказательство. Построим граф с нужными свойствами. Пусть он имеет $2(r+1)$ вершин; половину вершин покрасим в красный цвет, а другую половину — в синий. Любые две вершины одного цвета соединим ребром. Пронумеруем красные и синие вершины по отдельности числами от 1 до $r+1$. При $i \le p$ соединим ребром i-ю красную вершину и i-ю синюю. Кроме того, пусть p-я красная вершина будет смежна с синими вершинами, имеющими номера от $p+1$ до q (если $p < q$). Читателю предлагается проверить, что построенный граф удовлетворяет требованиям теоремы. □

Граф G называют k**-связным,** если $\kappa(G) \ge k$. Непосредственным следствием теоремы Менгера является

Теорема 3.8 (Х. Уитни, 1932 г.). *Граф является k-связным тогда и только тогда, когда любые две его несмежные вершины соединены по меньшей мере k непересекающимися цепями.*

Аналогично формулируются определение и критерий **рёберной k-связности** графа.

3.6. Теорема Эрдёша

Теорема 3.9 (П. Эрдёш.). *Если $n \ge (p-1)(q-1)+1$, то в любой перестановке чисел от 1 до n существует возрастающая подпоследовательность длины p или убывающая подпоследовательность длины q.*

Мы приведём два доказательства этой красивой теоремы — непосредственное и опирающееся на теорему 1.9. Три других доказательства можно найти в сборнике [3] на с. 138–141.

Первое доказательство. Пусть для каждого числа k числа a_k и b_k обозначают наибольшую длину соответственно возрастающей и убывающей подпоследовательностей в перестановке чисел от 1 до n, в которых число k — последний член.

Предположим, что в перестановке число i встречается раньше, чем число j. Если $i < j$, то $a_i < a_j$ (поскольку любую возрастающую последовательность, заканчивающуюся числом i, можно продолжить числом j). Если $i > j$, то $b_i < b_j$ (поскольку любую убывающую последовательность, заканчивающуюся числом i, можно продолжить числом j).

Поэтому при различных i и j пары чисел (a_i, b_i) и (a_j, b_j) также различны. Значит, имеем n различных пар указанного вида.

Если все возрастающие подпоследовательности имеют длину меньше p, то для любого k имеем $a_k \le p-1$. Если все убывающие подпоследовательности имеют длину меньше q, то для любого k имеем $b_k \le q-1$. Но тогда всего пар (a_k, b_k) будет не больше $(p-1)(q-1)$, то есть меньше n. Противоречие! □

Второе доказательство. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — перестановка чисел от 1 до n. На множестве пар (k, a_k) введём отношение порядка: $(i, a_i) \prec (j, a_j)$, если $i < j$ и $a_i < a_j$ (член последовательности с большим индексом больше). Две пары будут несравнимы, если в этих парах член последовательности с большим индексом меньше, чем член последовательности с меньшим индексом. Таким образом, возрастающая подпоследовательность (в перестановке) порождает цепь в упорядоченном множестве пар, а убывающая — антицепь! Осталось воспользоваться теоремой 1.10.

Литература

[1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 288 с.

[2] Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. *Многогранники. Графы. Оптимизация.* — М.: Наука, 1981. – 344 с.

[3] *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике*/ Сост.: К.П. Кохась, С.В. Иванов, С.Л. Берлов и др. — СПб: Невский Диалект, 2002. – 192 с.

[4] *Лекции по теории графов*/ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. – 384 с.

[5] Ловас Л., Пламмер М. *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.* — М.: Мир, 1998. – 653 с.

[6] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* — М.: Мир, 1985. – 512 с.

[7] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* В 2-х т. — М.: Мир, 1991. – 704 с.

[8] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 176 с.

[9] Эвнин А.Ю. *Задачник по дискретной математике.* — 2-е изд., перераб. и доп. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

[10] Эвнин А.Ю. *Элементарное введение в матроиды*// Математическое образование. — 2005. — № 2(33). — С.2–33.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.
evnin@prima.susu.ac.ru

Дифференциальное исчисление

Н. Н. Лузин

Основы дифференциального исчисления входят в настоящее время в школьную программу по математике для старшеклассников. Предлагаемая статья великого русского математика Николая Николаевича Лузина описывает развитие дифференциального исчисления от работ основоположников 16-18 вв. до 30-х годов 20 века. Первоначально статься была напечатана в Большой Советской Энциклопедии.

Дифференциальное исчисление, математическая дисциплина, посвященная рассмотрению производных и дифференциалов заданных функций. Сущность Д. и. неотделима от его исторического пути, самое же открытие Д. и. тесно связано с задачей о **проведении касательной**. Весь этот цикл проблем теснейшим образом связан с вопросом о *бесконечно-больших* и *бесконечно-малых* (см.).

Историческое развитие Д. и. Античный период. Задачей о проведении касательной занимались еще греческие геометры. После открытия Платоном *геометрических мест* (см.), т.е. совокупностей точек, характеризуемых некоторым общим свойством, античная мысль направилась на изучение конических сечений, (**эллипс**, в частности окружность, **парабола**, **гипербола**) как определенных геометрических мест. В этом изучении касательные прямые играли весьма важную роль, т.к. они были тесно связаны с обнаружением чрезвычайно важных и глубоких свойств конических сечений. Но самое понятие касательной прямой было определено **статически**, т.е. вполне характерным для античной мысли способом: касательной называлась просто прямая, имеющая с кривой только одну общую точку (рис. 1). С течением времени к указанным кривым греческими геометрами были присоединены еще и другие кривые (квадратриса Динострата, конхоида Никомеда, циссоида Диоклеса и др.), но при этом прежнее статическое определение касательной оставалось неприкосновенным. С другой стороны, речь всегда шла не о **вычислении** положения касательной, а о точном ее **построении**, т.е. о таком использовании элементов данной фигуры, при котором становилось возможным — после анализа этих элементов — фактическое проведение той прямой, которая должна оказаться касательной. Важно заметить, что у античных геометров отсутствовала общность метода решения различных задач: не было классификации кривых, и всякое построение касательной осуществлялось глубоко частным методом, вытекавшим из анализа именно данного случая и вообще уже неприложным ни к какому другому случаю (см. *Геометрия).*

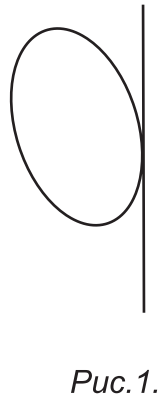

Рис.1.

Эпоха Возрождения. После разрыва античных традиций вопрос о проведении касательной ставится заново в эпоху Возрождения. Следует прежде всего упомянуть о Кардане (1501—76). Одним из первых он ввел кинематический момент в определение касательной, рассматривая ее как предельное положение вращающейся секущей. Начиная с этого момента, задача о проведении касательной становится в центре внимания европейской математической мысли. Легко указать ближайшую причину этого. Для античных геометров касательные скорее служили ценным инструментом для открытия важных и глубоко лежащих свойств фигур, нежели имели самодовлеющее значение. Для геометров же нового времени оказалось важным не столько статическое построение касательной, сколько **вычисление** (хотя бы даже приближенное) ее положения. Надо иметь в виду, что, начиная с 16 века, физические и астрономические науки настойчиво требовали создания бесконечно-малой геометрии, без которой ходу их развития грозила остановка: теорема площадей требовала квадратур, задача отыскания центров тяжести фигур придала квадратурам совершенно реальное значение; астрономии необходимо было определение объемов тел вращения, т.е. кубатуры, которых не оказывалось в известных тогда сочинениях Архимеда. С другой стороны, математическая сторона явлений природы, установленная Галилеем, и попытки анализировать **криволинейное** движение дали не менее реальный смысл задаче об определении касательной. Именно в связи с этим с указанного времени начинают искать определения касательных для возможно большего числа кривых, как известных еще античным геометрам, так и открытых лишь в новое время. Из ученых, ставших на этот путь, нужно указать прежде всего кроме Кеплера (1571—1630) на самого Галилея (1564—1642) и на его учеников — Кавальери (1598—1647), Торричелли (1608—1647) и Вивиани (1622—1703). Все четверо пользовались с этой целью особым методом геометрических бесконечно-малых, который ими назывался "**методом неделимых**".

Метод неделимых. Согласно современному определению, **бесконечно-малой** называется такая **переменная** величина α, которая удовлетворяет следующему ряду условий: 1) она **конечна** в каждый момент времени и имеет строго определенное числовое значение; 2) среди числовых значений, пробегаемых последовательно величиною α, **нет самого последнего**; 3) каково бы ни было положительное рациональное число ε, наступит такой момент, начиная с которого абсолютная величина α сделается и будет впредь оставаться меньше, чем ε, т.е. с этого момента всегда будет справедливо неравенство: $\alpha < \varepsilon$. Таким образом, согласно современным взглядам, бесконечно-малая величина, будет ли это геометрическая величина или же величина, заимствованная из анализа, есть — по самой своей природе — **переменная конечная** величина, лишь становящаяся с течением времени и остающаяся сколь угодно близкой к нулю. Что же касается до **постоянного бесконечно-малого количества**, отличного от нуля, то современный математический анализ, не отрицая формальной возможности логически определить идею постоянного бесконечно-малого (например как соответствующий отрезок "неархимедовой" геометрии), рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, так как **ввести его в исчисление оказывается невозможным.**

Возвращаясь к **методу неделимых**, следует отметить, что под неделимыми тогда понимали как раз постоянные бесконечно-малые. Но одновременно с этим относительно истинной природы неделимых в то время царили весьма смутные взгляды. Неделимые употреблялись практически, причем изредка это приводило к ошибкам в конечных выводах, обусловленным как раз смутностью взглядов на неделимые, потому что предохранительной логической ясности не было, а интуиция иногда подсказывала ложный конечный итог. Наиболее стройный вид учению о неделимых пытался придать Кавальери. Считаясь с возражениями Аристотеля и средневековых схоластов против неделимых "в себе" — возражениями, устранить которые Кавальери не считал возможным, — он вводит неделимые не абсолютным образом, а **относительным**, стараясь, чтобы неделимые фигурировали лишь в отношениях. Так как невозможно, чтобы "нечто" было суммою чистых "ничто", то неделимые, собственно говоря, столь же сложны, как и само целое, если рассматривать их "в себе". Но истина, по Кавальери, заключается именно в том, что неделимые имеют не абсолютное, а относительное существование, будучи в состоянии фигурировать в отношениях. Подобно тому, как **единица масштаба** для геометрии сама по себе (т.е. абсолютным образом) не нужна, будучи необходимой лишь для сравнения размеров фигур, так и неделимые, необходимые для сравнения между собою разнородных фигур, исчезают сами собой в конце вычислений, являясь в их ходе лишь промежуточной ступенью. Сравнение неделимых — вот то новое, что внес Кавальери. Однако, как бы ни было шатко теоретическое обоснование неделимых, практически их теория оказалась очень плодотворной. В частности удалось провести касательные ко многим кривым, для которых античные математики не имели соответствующих построений. Была наконец изучена столь важная новая и неизвестная античным геометрам кривая, как *циклоида* (см.). Касательная к циклоиде была проведена учениками Галилея.

Почти в это же время метод неделимых рассматривался и во Франции Паскалем (1623—1662), Робервалем (1602—1675) и Гюйгенсом (1629—1695). Впрочем Гюйгенс, получая новые результаты методом неделимых, предпочитал публично излагать эти результаты лишь методом античных геометров, т.е. синтетически. Зато оба первых геометра были горячими сторонниками неделимых и внесли много ясности в понимание самой их природы; их точка зрения уже приблизилась к современной: под неделимым они начали понимать уже не геометрический нуль, но "исчезающе-малое" количество той же природы, что и сама данная конечная величина. Так, в отличие от Кавальери, площадь они понимали не как "сумму ординат", а как сумму бесконечно-малых прямоугольников. Роберваль, претендовавший на самое открытие метода неделимых, дал оригинальный метод проведения касательных к кривым, по принципу уже близкий к методу флюксий Ньютона. Он описывал данную кривую с помощью движения и затем разлагал это движение на две составляющих, для которых он мог определить скорости по величине и направлению. В этих условиях скорость первоначального движения была просто диагональю параллелограмма, построенного на скоростях обеих составляющих движений, т.е. касательная к кривой оказывалась построенной. Этим способом Роберваль очень просто провел касательные ко многим кривым, дав построения, неизвестные древним. Однако несмотря на обогащение новыми идеями, выходящими из рамок античных рассуждений, одна крайне существенная черта сближает путь античных геометров и метод неделимых: это — все то же **отсутствие общности**. Каждое построение касательной, хотя бы и очень простое, дается методом глубоко частным, пригодным только для данной кривой и ни для какой другой. Общности и **общего** алгорифма здесь так же нельзя искать, как и у античных геометров.

Появление алгорифма в геометрии. Новое в этом смысле начинается с Декарта (1596—1650). Создание им *аналитической геометрии* (см.), т.е. метода характеристики кривых линий посредством уравнений, впервые ввело **общность** в геометрические вопросы. Отныне исчезает уже та зависимость геометрических выводов от частного расположения деталей в данном чертеже, которая столь характерна для геометрии древних. Одновременно с этим сделалась возможной классификация кривых по виду их уравнении. Сам Декарт также занимался задачею о проведении касательной, и ему принадлежит глубокий, но на практике тягостный метод проведения касательных. Декарт ищет не касательную, а **нормаль** к данной кривой.

С этой целью Декарт ищет среди окружностей, проходящих через данную точку M кривой и имеющих центр на оси OX, такую, которая пересекает данную кривую в двух слившихся точках (рис.2). Следовательно положение центра m искомой окружности и значит нормали Mm к кривой ищется чисто алгебраическим путем, посредством разыскания кратных корней системы двух уравнений с двумя неизвестными. Ясно, что этот метод по самой сути применим лишь к алгебраическим кривым.

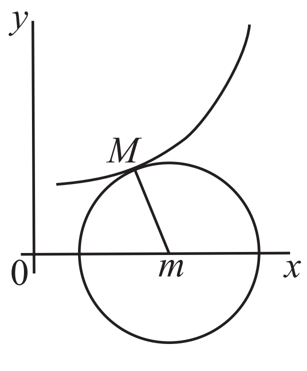

Рис.2.

Предшественники Ньютона и Лейбница. Вплотную подошел к созданию Д. и. знаменитый современник Декарта — Ферма (1601—1665), который независимо от Декарта употреблял метод координат, почему его и считают предшественником Декарта по изобретению аналитической геометрии. В 1629 Ферма, пораженный идеями Кеплера по отысканию *экстремумов* (см.), дал следующее правило, которое Лагранж, Лаплас и Фурье считали уже самим открытием Д. и. “Чтобы отыскать максимум или минимум количества $f(x)$, надо составить уравнение $f(x+e)=f(x)$, где e есть **неопределенное** число. Затем, освободив это уравнение от дробей и радикалов и сделав приведение подобных членов, нужно разделить упрощенное таким образом уравнение на это неопределенное e. Полагая затем в оставшихся членах $e=0$, мы имеем некоторое уравнение, содержащее букву x, корни которого и суть максимумы и минимумы”. Без сомнения легко в этом правиле Ферма узнать правило составления производной (по крайней мере для алгебраических функций) и приравнивания ее нулю. На этом основании указанные геометры были склонны приписать честь открытия Д. и. Ферма. Однако Пуассон справедливо отмечает, что Д. и. “состоит в системе точных правил для отыскания дифференциалов всех функций, и это существеннее, чем то употребление, которое можно сделать из рассмотрения бесконечно-малых изменений, стремясь решить одну или две частных проблемы”. Во всяком случае Ферма из своего метода отыскания экстремумов сделал способ проведения касательных. Другие историки называют изобретателем Д. и. учителя Ньютона — Барроу (Barrow, 1630—77), который был сперва профессором в Лондоне, потом в Кембридже и в 1669 передал свою кафедру Ньютону. Метод Барроу возник из упрощения метода Ферма путем введения двух бесконечно-малых вместо одного. На прилагаемом чертеже (рис. 3), воспроизводящем чертеж Барроу, мы имеем бесконечно-малый треугольник ABB', составленный из приращения абсциссы BA, приращения ординаты AB' и кривой стороны BB'. Этот треугольник подобен треугольнику TPB, составленному из ординаты, касательной и субкасательной. Отсюда, если известно отношение AB' к AB, то известно и отношение ординаты к субкасательной, и значит, касательная строится сразу. Самое вычисление отношения AB' к AB Барроу производит, пренебрегая бесконечно-малыми высших порядков, т.е. почти современными методами. Для того чтобы совершилось открытие Д. и., не хватало лишь обозначения и алгорифма. То и другое было дано почти одновременно, независимо друг от друга и с разной целью, Ньютоном и Лейбницем.

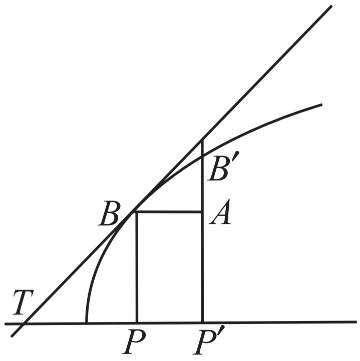

Рис.3.

Ньютон (1642—1727) был учеником Барроу, глубоко чтившего его гений. До открытия Д. и. он изучал кроме античных геометров “Geometrie” Декарта, “Optik” Кеплера, труды Вьета, “Lectures” Барроу и “Arithmetica infinitorum” Валлиса. В этой последней книге Валлис рассматривает кривые с ординатами $\left(1-x^2\right)^0$, $\left(1-x^2\right)$, $\left(1-x^2\right)^2$... и вычисляет площади этих кривых для отрезка $[0\leqslant x\leqslant 1]$. Получив таким образом числа 1, 2/3, 8/15, 48/105, ..., Валлис, бывший одним из величайших разгадывателей криптограмм, ставит себе вопрос, как наряду с этими числами должно было бы выглядеть число, выражающее площадь кривой $(1-x^2)^{1/2}$? После в высшей степени сложного и трудного анализа Валлис приходит к своему известному изображению числа π в виде бесконечного произведения $\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots}$. Изучение этого места у Валлиса повело Ньютона сперва к открытию его знаменитого бинома, а затем к размышлениям о том, каким образом вообще находить **фактически** квадратуру кривой. Эти размышления привели Ньютона (1665—66) к замыслу некоторого общего метода, названного им **методом флюксий** и изложенного сначала очень бегло в рукописи “De analysi per alquatones numero terminorum infinitas” написанной в 1669 и опубликованной в 1711, и затем более подробно в рукописи “Method of Fluxions”, написанной в 1671 и опубликованной в 1736. Нежелание публиковаться и стремление отложить печатание было вообще одной из черт характера Ньютона, ценившего более всего на свете внутренний покой и возможность невозмущаемого ничем течения размышлений. Впервые метод флюксий увидел свет, когда появилось первое издание знаменитых “Principia” Ньютона, где в примечании, как бы мимоходом, едва намечены основы этого метода, хотя он насквозь проникает “Principia” и фактически подчиняет себе содержание этого труда.

Это произошло в 1687. В этом методе флюксий основной идеей Ньютона было рассмотрение переменных количеств $\nu, x, y, z...$ как **текущих** (fluents) и тех скоростей, с которыми они текут. Ньютон эти скорости называет **флюксиями** (fluxions) и обозначает их соответственно через $\nu, x, y, z...$ Чтобы избавиться от упрека, что в геометрию и анализ вводится чуждое им понятие времени, Ньютон замечает, что он лишь **формально** рассматривает независимое переменное (абсциссу) как время. В этих условиях, согласно Ньютону: “площадь кривой есть непрестанно рождающееся количество, увеличивающееся непрерывной флюксией, пропорциональной ординате кривой”. Из этих слов ясно, что флюксия пропорциональна производной или дифференциалу. Но затруднительно сказать, рассматривает ли Ньютон флюксию как **конечное** количество (т.е. как производную) или как **бесконечно-малое** (т.е. как дифференциал). В этом отношении у Ньютона нет полной ясности, и даже можно установить, что его доктрина не оставалась неизменной, но менялась с течением времени в зависимости от выдвигавшихся против нее возражений. Чтобы, отметить разницу точек зрения своей и Лейбница, Ньютон пишет (“Quadrature of Curves”, 1704): “Я рассматриваю математические количества не как состоящие из очень маленьких частиц, а как описанные непрерывным движением. Это образование в природе вещей и ежедневно наблюдается в движении тел. Флюксии суть как бы нарушения количеств, образованные во времени, малые, как угодно; строго говоря, они находятся в первом отношении к рождающимся наращениям; несмотря на это, они могут быть изображены всякими линиями, им пропорциональными”. Эти утверждения Ньютон иллюстрирует на проблеме проведения касательной. Приводимый чертеж Ньютона (рис. 4) отличается от чертежей Барроу (рис. 3) лишь проведенной хордой CK. Согласно Ньютону: “Когда ордината bc, двигаясь к BC, совпадает с ней, тогда Ec абсолютно будет равно ET; тогда же кривой треугольник CEc станет подобен треугольнику CET и значит уничтожающиеся стороны этого криволинейного треугольника станут пропорциональными сторонами треугольника CET. Отсюда следует, что флюксии линий AB, BC и AC, будучи в последнем отношении с их уничтожающимися наращениями, суть пропорциональны сторонам треугольника CET или треугольника ABC. Пока b не совпала с B, линия CK мало отклоняется от CH, но все-таки отклоняется. Но когда CK совпадает с CH и линии CE, Ec, cC достигнут их последнего отношения, тогда точки C и c в точности совпадут”.

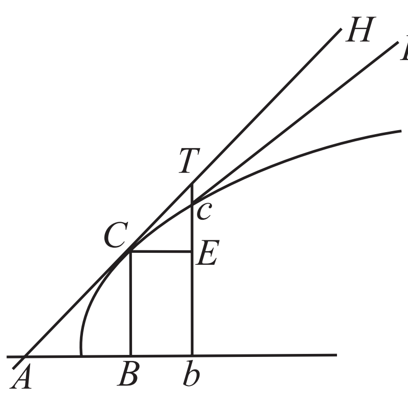

Рис.4.

Приведенное, место показывает, сколь необходима была для этих вещей теория пределов и как трудно было быть понятым без нее: уже современники Ньютона много спорили об его "первых" и "последних" отношениях, в введении которых Ньютоном можно видеть намек на современную теорию пределов. Но хотя у Ньютона не было идущих с самого начала ясных формальных определений, хотя он и не дал ни таблиц производных и интегралов, ни ряда основных теорем, составляющих обычный скелет дифференциального и интегрального исчисления, однако оба эти исчисления полностью раскрывают свое содержание и свою мощь в работах Ньютона; по мере надобности Ньютон с величайшей легкостью проводит касательные к любым встретившимся в его исследованиях кривым, вычисляет кривизну, находит площади, длины дуг, центры тяжести, экстремумы и т.д. Ньютон без труда, благодаря изобретенному им общему приему, отыскивает производные неявных функций, и ему удается интегрировать не только обыкновенные дифференциальные уравнения, но и уравнения с частными производными. Эта общность и гибкость в применениях была достигнута Ньютоном благодаря концепции флюксии (производной) и благодаря специальному для нее обозначению, вследствие чего стал возможным общий алгорифм, хотя он на деле и оказался громоздким.

Лейбниц (1646—1716) исходил при открытии Д. и. из совсем других соображений. Насколько Ньютон был **натуралист**, для которого скорость тел была чем-то самодовлеющим, настолько Лейбниц был чистый **логик**, для которого количества не возникали путем движения, но были даны как суммы бесконечно-малых разностей, "элементов"; здесь отголосок его философской доктрины монад. В 1666, в бытность свою в Германии, Лейбниц публикует сочинение "De arte combinatoria", в котором он дает план теории математической логики, т.е. некоторого символического метода, вроде **алгебры мышления**, где процесс непосредственной ищущей живой мысли сделался бы ненужным, т.к. **искусство думать** было бы сведено к алгебраическим выкладкам. Эта идея, существовавшая еще в средние века, внушена была Лейбницу изучением "Геометрии" Декарта, в которой в самом деле непосредственные размышления над чертежом заменяются часто простыми алгебраическими выкладками. Следует отметить, что эта идея почти полностью воскрешена в настоящее время в символической логике Шредера, Пеано и Ресселя и в работах Гильберта. Часть этого сочинения Лейбница осталась неопубликованной; она была разыскана и напечатана недавно и оказалась содержащей **исчисление классов**, включая индуктивность и ноль-класс. Это исчисление практикуется в современной **теории множеств**. В 1672 Лейбниц едет с политической миссией в Париж, где знакомится с Гюйгенсом, принявшим горячее участие в молодом ученом и познакомившим его со всеми тогдашними математическими знаменитостями Парижа. Он лично руководит пополнением недостаточного математического образования Лейбница. В 1673 Лейбниц едет в Лондон, где живет несколько месяцев. Здесь он представляет Королевскому обществу изобретенную им счетную машину. Вернувшись в Париж, Лейбниц с неутомимой энергией пополняет свои сведения по математике. Занимаясь задачей о квадратуре круга, Лейбниц приходит к ряду

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...,$$

правда, найденному раньше Григори (Gregory). Но по-прежнему в центре его внимания находится "реальная характеристика", т.е. изобретение системы знаков, долженствующей упразднить не только латынь, но и вообще всякий язык, заменив его системой "знаков мысли", т.е. замена работы мышления механизмом. Он упрекает английских логиков Дальгарно ("Ars signorum", 1661) и Уилкинса ("Real character", 1668) в том, что они оперируют с синтаксисом, а не с алгеброй. Он замечает, что, прежде чем атаковать всю область мысли, следует осуществить свои намерения в частной науке, например в теории чисел, пополненной в целях изучения природы "непрерывными числами", придав такой обобщенной теории чисел вид арифметики. По словам Лейбница: "Наши идеи все время дают ряды непрерывных разностей, и эти бесконечно-малые разности не войдут в наше исчисление, если не будут обозначены новыми символами и подвергнуты специальным операциям". Значит, надо создать алгебру бесконечно-малых, если хотят приступить к универсальной логике. Таким образом "Исчисление понятий" и "Исчисление разностей" ведут Лейбница к созданию Д. и. и интегрального исчисления. После своих занятий площадью круга Лейбниц снова берется за "Geometrie" Декарта и атакует то, что он называет "прямой и обратной проблемой касательных". Первая проблема: "**дана кривая, найти**

касательную", ведущая к Д. и., была трактована Декартом в простейших случаях. Но обратная проблема: "**зная касательную, восстановить кривую**", выходит за пределы метода Декарта. Лейбниц с этой целью строит то, что он называет "**характеристическим треугольником**"; это — бесконечно-малый треугольник, составленный из приращения абсциссы, ординаты и дуги кривой, совпадающей с касательной, т.к. Лейбниц рассматривает кривую как многоугольник. Чертеж Лейбница совпадает с чертежом Барроу (рис. 3) и был им заимствован у Паскаля. Из этого чертежа Лейбниц устанавливает, что обратная проблема касательных и проблема квадратур суть тождественные вещи. Этот вывод Лейбница содержится в рукописи 1673.

Установив, что обращение задачи дифференцирования есть задача о квадратуре, Лейбниц в ближайшие годы сосредоточивает все свое внимание на выработке удачных значков для созидаемой им алгебры "непрерывных чисел". Сначала он употребляет символику Кавальери значок omn (omnia, что значит —вес), но находит его громоздким. Наконец 29 октября 1675 Лейбниц заменяет значок Кавальери значком интегрирования "$\int$" и пишет свои первые уравнения:

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \qquad \int (x+y) = \int x + \int y.$$

В этот же день он вводит значок "d" для обозначения разности, т.е. действия, обратного действию $\int$. Таким образом, этот день замечателен тем, что является датой рождения нового исчисления. Но сначала Лейбниц не знает, как ему употреблять значок d, доставлявший ему много забот. Рассматривая его как значок, обратный значку, он сперва даже помещает его в знаменатель и пишет: если $\int l = ya$, то $l = \frac{ya}{d}$. Затем он начинает писать вместо d современное dx. Чрезвычайных усилий от него потребовало решение вопроса, каким образом писать $d(xy)$ — в виде ли $dxdy$, или в виде $\frac{dx}{dy}$, или же в виде $d\frac{x}{y}$. Наконец 21 ноября 1675 он выводит свою знаменитую формулу: $d(xy) = ydx + xdy$ и приступает к составлению таблиц дифференциалов и интегралов. В ноябре 1676 он еще делает ошибки в вычислении, написав: $d\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Но 11 июля 1677 обе таблицы были в полном порядке, и Лейбниц переходит к решению всех встречавшихся ему вопросов путем вновь созданного исчисления.

Наконец, в 1684 Лейбниц публикует в новом немецком журнале "Acta eruditorum" на 6 страницах принцип своего исчисления и свои таблицы, на 3 года раньше появления Ньютоновых "Principia", где были первые сведения об исчислении флюксий. Сначала на работу Лейбница никто не обратил внимания, но затем на чрезвычайную мощь нового исчисления обратила внимание семья Бернулли, и оно начало быстро завоевывать известность на континенте. Сначала Ньютон, узнавший о новом исчислении, сочувственно отнесся к нему и обменялся с Лейбницем письмами. Но затем под влиянием окружающих они были вынуждены к долгой и печальной полемике о приоритете.

По этому поводу следует заметить, что открытое Д. и. было совершенно подготовленным, как и открытие неевклидовой геометрии. Учет влияний в такой напряженной атмосфере крайне затруднителен. Аналогичное мы наблюдаем в теории квант или ведущейся в настоящее время полемике о законе "исключенного третьего", т.е. собственно опять о сущности бесконечного. В такие исторические моменты каждое слово, мысль, даже жест ведут к образованию того или иного потока идей.

Обоснования Д. и. Ни Ньютон, ни Лейбниц не дали безупречного обоснования Д. и. Это дело выпало на долю дальнейших поколений. Через весь 18 в. тянутся дискуссии об основании Д. и. В математической литературе того времени содержатся самые разнообразные способы обоснования, — по преимуществу такие, которые непригодны для этой цели. Сюда относятся попытки Ивана Бернулли (1667—1748) и Эйлера (1707—1771) рассматривать дифференциал **как нуль**. Непригодна формальная попытка Лагранжа (1736—1813) рассматривать производные как коэффициенты ряда Тейлора. Оказались также бесплодными усилия ввести актуально-малые, т.к. на теории неархимедовых величин нельзя обосновать Д. и. Одновременно с дискуссией об основании Д. и. шли дискуссии относительно **бесконечных рядов**, т.к. употребление расходящихся рядов в 18 в. было совершенно некритическим (Эйлер). Таким было положение вещей даже в начале 19 в. Так, в 1826 Абель (1802—1828) жалуется на то, что "математический анализ окутан туманом, хотя и имеется много верных предложений, недоказанных однако прочным образом". Приближалось время критики, и дискуссии вызывались также введением мнимых чисел и даже вещественных отрицательных чисел. Согласно современным взглядам, начало действительно строгому обоснованию дифференциального исчисления положил Коши (Augustin Cauchy, 1789—1857). Его точка зрения принимается и в настоящее время преобладающим числом математиков, работы которых протекают в классических областях математики, и на эту же самую точку зрения нередко становится современная педагогика.

Точка зрения теории пределов. По взглядам Коши, для полного обоснования математического анализа прежде всего должна быть построена т.н. теория пределов (см. *Пределов теория).* С этой целью сперва вводится понятие **переменной величины**, проходящей **последовательно** через различные числовые значения, среди которых **нет самого последнего**; в каждый момент времени переменная x имеет одно строго определенное числовое значение. Мы говорим, что переменная величина x **стремится к пределу** a, если, каково бы ни было положительное число ε, начиная с некоторого момента времени, осуществится и будет сохраняться неравенство $|x-a|<\varepsilon$, т.е. если разность $(x-a)$ по абсолютной величине в некоторый момент времени сделается и останется меньше, чем ε. Отсюда и следует, что переменная величина x может иметь только один предел a или же может не иметь совсем никакого предела. Когда число a есть предел переменной величины x, то пишут символическое, равенство $\lim x = a$. Наконец переменная величина x называется **бесконечно-малой**, если ее предел равен нулю, т.е. если $\lim x = 0$. Как выше было объяснено, всякая бесконечно-малая есть **переменная** величина, и постоянных бесконечно-малых, отличных от нуля, с этой точки зрения не существует для современного анализа.

Теория пределов вся состоит собственно из одного только предложения: предел суммы, разности, произведения и частного двух переменных величин равен сумме, разности, произведению и частному соответствующих пределов. В символах

$$\lim(x+y)=\lim x+\lim y; \qquad \lim(x-y)=\lim x-\lim y;$$

$$\lim(xy)=\lim x\cdot\lim y; \qquad \lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y},$$

причем предполагается, что предел знаменателя $\lim y$ не равен нулю, т. к. **деление на нуль принципиально невозможно**.

Теперь, чтобы обосновать Д. и., берут чертеж Ньютона (рис. 4), причем предполагают, что изображенная там кривая имеет своим уравнением $y=f(x)$. Пусть координаты точки C кривой суть x и y и пусть координаты точки c, близкой к C, суть $x+\Delta x$ и $y+\Delta y$, где Δx и Δy называются **приращениями** переменных x и y. Так как точка c лежит на кривой, имеем $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$; отсюда $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. На чертеже Ньютона $CE=\Delta x$ и $cE=\Delta y$. Ясно, что имеем $tg(ECc)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть теперь точка c безгранично приближается к точке C. Тогда секущая CK поворачивается и стремится к касательной CH, как к своему пределу. Значит tg (ECc) является переменной величиной, имеющей своим пределом тангенс наклона касательной к оси абсцисс, т.е. $\lim$ tg (ECc)= tg (BAC). Отсюда следует, что искомый тангенс наклона касательной является пределом отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, в символах $tgBAC=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, где и Δy суть две бесконечно-малые величины. Таким образом **отыскание касательной к заданной кривой производится при помощи алгебраического отыскания предела отношения двух бесконечно-малых величин на основе теории пределов**.

Указанный предел $\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$, предполагаемый существующим, в общем случае зависит от x. Поэтому этот предел является некоторой новой функцией независимой переменной x. Эта функция называется **производной от данной функции** $f(x)$ и, следуя Лагранжу (1736— 1813), обозначается через $f'(x)$. Самый процесс получения производной $f'(x)$ из данной функции $f(x)$ называется **дифференцированием** функции $f(x)$ по независимой переменной x. Беря производную от $f'(x)$, мы приходим к новой функции, которая называется **второй производной** от данной $f(x)$ и обозначается через $f''(x)$; дифференцируя $f''(x)$, мы получаем третью производную $f'''(x)$ и т.д. Таким образом создается понятие о производных **высших порядков**.

Гениальным является обозначение производной, принадлежащее Лейбницу. Производная от функции $y = f(x)$ обозначается через символ $\frac{dy}{dx}$, или $\frac{df(x)}{dx}$, или даже $\frac{d}{dx}f(x)$. Здесь в **своем первом значении** дробь $\frac{dy}{dx}$ есть только символическая, т.е. является просто стилизованным обозначением производной, вызывающим в нашей памяти самый процесс получения производной, как предела истинной дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Таким образом числитель dy в своем первом значении есть только символический, не имеющий числового математического смысла. Но затем, по мере развития Д. и., было найдено в высшей степени целесообразным последовать примеру Лейбница и придать знаменателю dx и числителю dy конкретный числовой смысл. С этой целью берут **произвольное конечное** приращение Δx независимой переменной x и полагают $dx = \Delta x$. В этих условиях dx уже утрачивает свой исключительно символический характер и становится **новой независимой** переменной, будучи совершенно **произвольным**; это dx называется **дифференциалом независимой переменной** $\boldsymbol{x}$.

После этого равенство $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ даст нам $dy = f'(x)dx$, т.е. и числитель dy, бывший только символическим, теперь уже приобретает, конкретный числовой смысл, будучи равен произведению производной $f'(x)$ на дифференциал независимой переменной dx. Этот числитель dy, являющийся теперь функцией **двух** независимых переменных x и dx, называется **дифференциалом данной функции** $y = f(x)$. Если на чертеже Ньютона (рис. 4) отрезок Bb, равный CE, есть $\Delta x = dx$, то отрезок ET есть очевидно dy, в то время как отрезок Ec есть приращение Δy. Таким образом, приращение функции Δy и дифференциал функции dy суть разные вещи. Но если Δx стремится к нулю, то очевидно $\lim \frac{\Delta y}{dy} = 1$, если производная $f'(x)$ отлична от нуля.

Понятие о **дифференциале** функции есть в высшей степени важное понятие. Можно подумать, что для того чтобы иметь дифференциал функции dy, надо сначала знать ее производную $f'(x)$. **На практике обычно происходит наоборот**: сперва непосредственно вычисляют дифференциал функции dy, а затем, деля его на dx, узнают производную $f'(x)$.

Для нахождения же дифференциалов **всех** функций, которые могут быть написаны помощью конечного числа знаков элементарных функций, служит следующая **таблица основных дифференциалов**, впервые составленная Лейбницем:

1) $d(u+v) = du + dv$
2) $d(u-v) = du - dv$
3) $d(uv) = vdu + udv$
4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
5) $dx^n = nx^{n-1}dx$, в частности $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
6) $da^x = a^x \ln a \cdot dx$
7) $de^x = e^x dx$
8) $d\log_a x = \frac{dx}{x \ln a}$
9) $d\ln x = \frac{dx}{x}$
10) $d\sin x = \cos x dx$
11) $d\cos x = -\sin x dx$
12) $d\,\mathrm{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$
13) $d\,\mathrm{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
14) $d\arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15) $d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
16) $d\,\mathrm{arctg} x = \frac{dx}{1+x^2}$
17) $d\,\mathrm{arcctg} x = -\frac{dx}{1+x^2}$

Наиболее важным однако является предложение о дифференцировании функции от функции: если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, то предложение это гласит: $dy = f'(u)du$, или в словах: **чтобы найти дифференциал функции от функции, поступают так, как если бы внутренняя функция** u **была независимым переменным**. Если, например, $y = \ln z$, а $z = \sin x$ (т.е. нам нужно продифференцировать функцию $y = \ln \sin x$), то мы имеем:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{z}; \quad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \mathrm{ctg} x.$$

Именно эта теорема и позволяет находить дифференциалы всех функций, которые можно написать конечным образом. Именно она дает чрезвычайную мощь новому исчислению; без нее Д. и. как алгорифм не существовало бы.

Чтобы должным образом понять значение дела Коши и оценить обоснование Д. и. на построенном им фундаменте, нужно обратить внимание на роль, которую играет в его учении понятие переменной величины. Роль эта исключительно важна, и в то время как, например, алгебра и теория чисел имеют дело исключительно лишь с постоянными числами, т.е. с величинами в стационарном состоянии, Коши вводит в математический анализ переменные величины на равных правах с постоянными, подчинив и те и другие одинаковым правилам исчисления. В этой одинаковости правил лежал залог успеха учения Коши. В конечном итоге математический анализ имеет целью получение определенных соотношений между теми или другими постоянными или параметрами, важными для естествознания или самой математики. Согласно идеям Коши, математический анализ, чтобы иметь эти соотношения, может вводить в рассмотрение переменные величины, подчиняющиеся тем же правилам исчисления. Как и постоянные величины, эти переменные величины играют в рассуждениях лишь служебную роль и исчезают сами собой, при правильном ведении рассуждения в конце доказательств, так что в итоге рассуждения остаются лишь нужные соотношения между постоянными. Согласно Коши, роль переменных величин та же самая, какую играют в алгебре промежуточные неизвестные, которые исключают в ходе вычислений. Легко заметить, что в этом введении в анализ переменных величин сказывается тесная связь идеи Коши именно с идеями Ньютона, а не Лейбница. Именно Ньютон рассматривал производные как скорости. Для него как великого естественника скорость движения была самым основным, самым естественным, самым обыденным и самым понятным явлением, которое находится у нас каждый день перед глазами. И поэтому не только существование производных, но и самое понимание, определение производных Ньютон тесно связывает с понятием скорости. О существовании производных нет надобности спрашивать, потому что должна существовать скорость движения. Когда Ньютона упрекали за то, что он явным образом ввел в математику время, он отвечал, что за “вводимое” им “время” можно принять любую изменяющуюся величину. Как раз у Коши и вводятся принципиальным образом переменные величины, и таким образом с этих пор анализ становится обогащенным новыми величинами, употребляемыми на равных правах с постоянными, как вводятся мнимые числа наравне с вещественными.

Такая точка зрения совершенно безукоризненна, и Коши по заслугам принадлежит слава первого строгого основателя Д. и. Реформа, сделанная им в математическом анализе, находит могучие отзвуки и в наше время. Его обоснование Д. и. сохраняет силу и сейчас и принимается безоговорочно очень многими математиками, убежденными сторонниками взглядов Коши. Их число следует увеличить еще теми представителями математических наук, которые, соглашаясь по тем или иным причинам с недостаточностью фундамента Коши для математического анализа и признавая, на словах, необходимость положить в основу Д. и. точку зрения теории множеств, на деле, в их текущей работе, полностью ограничиваются идеями Коши, нигде не выходя за их пределы (что всегда легко установить). Если присоединить таких математиков к открытым сторонникам взглядов Коши, то нужно признать, что большинство современных математиков полностью принимает математический анализ таким, каким он представлялся еще Коши. В педагогике, преподавании и в учебниках обоснование Д. п. на основе идей Коши является замечательным по силе и совершенно неоценимым средством придавать совершенную ясность математическим понятиям, рассеивая туман, скопляющийся вокруг наиболее темных и трудных понятий и который никогда не рассеивается, если основные понятия дифференциального исчисления объяснять на аналогиях, лишь расширяя смутность представления и на соседние понятия, казавшиеся непосредственно ясными.

Но точка зрения Коши имеет, по современным взглядам, тот основной недостаток, что она бессильна охватить и объяснить многие очень глубокие факты математического анализа, которые были открыты в конце прошлого 19 и в начале настоящего века. Факты эти были открыты теорией множеств и основанной на ней теорией функции и обнаруживают необычайно тонкую и в высшей степени богатую микроструктуру математических предметов, оказывающую могущественное влияние и на соотношение между давно известными классическими свойствами (такова, например, теорема Фишер-Риса). Эти факты, число которых все увеличивается и которые составляют прочное, приобретенное 70-летней работой достояние абсолютной ценности, просто выпадают из поля зрения взглядов Коши. Лицо, признающее только точку зрения Коши, не видит этих фактов и не сможет ни открыть их, ни почувствовать их важность. Точку зрения Коши, важную для преподавания начал математического анализа, нельзя рекомендовать как достаточный научный фундамент Д. и., удовлетворяющий законным и обязательным требованиям ко всякому научному фундаменту — быть строгой и глубокой в отношении охвата известных фактов. Короче, точку зрения теории Коши приходится квалифицировать как близорукую, так как она сильно ограничивает поле зрения.

Как конкретный пример факта, не охватываемого точки зрения Коши, укажем на следующую задачу, теснейше связанную с самой основной проблемой дифференциального исчисления и интегрального исчисления.

Дана функция *f(x)*; отыскать непрерывную функцию *F(x)*, имеющую *f(x)* своею производною, т.е. чтобы $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Проблема эта, поставленная еще при жизни Лейбница и Ньютона (около 1690), не имела общего решения в течение 220 лет, и полное ее решение пришло лишь в наши дни (1910, А.Данжуа). Точка зрения Коши позволяет отыскивать функцию $F(x)$ только в тех случаях, когда $f(x)$ **непрерывна**, и еще для немногих разрывных функций $f(x)$. Но имеется бесчисленно много разрывных функций $f(x)$, положительных и меньших единицы, $0 < f(x) < 1$, заведомо служащих производными в **каждой точке** непрерывных функций $F(x)$ и однако таких, что отыскать эти непрерывные функции $F(x)$ применением интегрирования, по Риману, невозможно (что доказывается абсолютно строго); значит для отыскания соответствующих непрерывных $F(x)$ необходимо применить высшие приемы интегрирования, что неизбежно связано с существенным выходом за точку зрения Коши.

Точка зрения теории множеств. Эта точка зрения, связанная более с идеями Лейбница, чем Ньютона, прежде всего удаляет из анализа все переменные величины, всякое изменение, движение и все сводит к одним только стационарным состоянием, т.е. к постоянным величинам. Обоснование Д. и., столь блестяще выполненное Коши в начале 19 в., продолжало приобретать все большее и большее число сторонников. Сам Коши был математик могучей творческой силы; дело обоснования Д. и. он не рассматривал как главную свою задачу, т.к. чувствовал для анализа еще и другие творческие возможности, и, видя ясно ограниченность всякого критического пути, выполнил дело обоснования как бы мимоходом. Но критическое настроение в среде математиков все более и более усиливалось, особенно после критических этюдов Абеля (1802—1829) и Гаусса (1777—1855). Но наиболее полное выражение критическое направление умов получило в деятельности Вейерштрасса (1815—1897). Относительно математической личности Вейерштрасса большинство современных математиков, по-видимому, приходит к согласию в том, что ее центром и смыслом было подведение числовой основы под всю математику, "арифметизация математики", и критический пересмотр различных теорий. Его отличие от Коши состояло в том, что в то время как в высшей степени творческий ум Коши видел всюду еще и многие другие возможности для математического анализа, вполне равноценные характеристике феноменов математического анализа, геометрии, механики или физики посредством числа, в это время критический ум Вейерштрасса проникнутый лишь одной идеей униформизация математики на почве числа, идеей "арифметизации математики", обнаруживал самый яркий рационализм в своих построениях. Вейерштрасс систематически изгоняет трактование идей анализа применением геометрии и заменяет его арифметическим трактованием. Правда, математика становится как бы ограниченной для взора, но зато такая ее униформизация на почве числа дала возможность доказательства таких предложений, которые расходились с общим ожиданием или, во всяком случае, далеко выходили за их пределы. Таково, например, существование непрерывных функций, нигде не имеющих производной. Однако дальнейший исторический ход событий показал, что эта униформизация математики, проведенная с такою энергией Вейерштрассом, сама в свою очередь стала источником расхождения взглядов математиков на основы анализа, превратившегося, по мнению некоторых авторов, в его кризис. Ближайшей причиной этого послужила так называемая теория множеств.

Теория множеств как систематическое учение была основана Г.Кантором (1845—1918) в 1861 и была развита им в ряде статей. Его идеи имели необыкновенный успех, и положенные в основу самых разнообразных исследований, послужили к возникновению ряда новых ветвей математики, из которых важнейшею является современная теория функций действительного переменного. Сам Кантор исходил при открытии теории множеств из теории тригонометрических рядов. Но потом его учение перешло в общую теорию множеств, в классификацию актуальных бесконечностей и в создание так называемых трансфинитных чисел. Благодаря созданию Кантором высших континуумов обычная "старая" математика превратилась в маленькую провинцию общей теории множеств. Вещи оказались впоследствии еще более грандиозными, и труды Пеано (1858—1927), Фреге (1848—1923) и Дедекинда (1831—1916) показали, что вообще вся математика может быть построена на основе общей идеи множества. Общая теория множеств стала для математиков нежданною областью, в недрах которой рождались математические идеи, формируясь там, и оттуда появлялись постановки проблем. Обоснование Д. и. на почве теории множеств совершается так, что прежде всего должна быть обоснована сама теория пределов и представлена в совершенно новом виде. Теория множеств вся построена на идее так называемой актуальной бесконечности. Еще до Вейерштрасса обычная теория рядов с положительными членами являла пункты, формулированные в терминах теории множеств и возможные к пониманию только в свете идеи актуальной бесконечности. Такова знаменитая теорема о том, что "сходящийся ряд с положительными членами не изменяет суммы при перестановке его членов": здесь бесконечный ряд необходимо мыслится как совокупность всех его членов, уже найденных, вместе собранных и как бы помещенных в сосуд, при переворачивании которого изменяется порядок членов, без изменения однако самой суммы. Другой пункт, требующий введения актуальной бесконечности, это сама теория иррациональных чисел; кроме того всякое иррациональное число, например $\sqrt{2}$, будучи разложено в бесконечную десятичную дробь, определяет сразу всю совокупность всех ее членов. Для построения Д. и. на почве теории множеств прежде всего должна быть развита теория иррациональных чисел. Затем вводится понятие точечного множества и понятие предельной точки: точка ε, принадлежащая или нет к данному множеству точек E, лежащему на прямой, называется предельной для множества E, если всякий интервал δ, содержащий ее внутри (в строгом смысле, т.е. не на конце), содержит бесконечно много точек множества E. Конечное множество E (т.е. состоящее из конечного числа точек) не может иметь, по самому определению, никакой предельной точки. Согласно теореме Вейерштрасса, всякое бесконечное ограниченное (т.е. лежащее на конечном отрезке) множество точек непременно допускает хотя бы одну предельную точку. Ограниченное множество точек E называется замкнутым, если оно содержит в себе все предельные к нему точки. Всякое ограниченное замкнутое множество точек E необходимо имеет самую первую (идя по прямой в положительном направлении) и самую последнюю точку. Основной теоремой о замкнутых множествах является та, что общая часть любого множества замкнутых множеств есть всегда замкнутое множество. Множество всех предельных точек для данного множества E называется производным множеством от данного множества E и обозначается как E'. Производное множество E' есть непременно замкнутое множество, каково бы ни было начальное данное множество E. Соединение $E + E'$ начального данного множества E и его производного множества E' есть всегда замкнутое множество. Следовательно, множество $E + E'$ имеет самую первую (иначе — начальную) и самую последнюю (иначе — конечную) точку при обходе прямой, на которой лежит E, в положительном направлении. Обе эти точки играют исключительно важную роль: самая первая точка множества $E{+}E'$ называется нижней границей данного множества E и самая правая точка множества $E{+}E$ называется верхней границей данного множества E. Для того чтобы обосновать теорию пределов на почве теории множеств и дать ей другое понимание, вводится понятие упорядоченного множества: множество E, составленное из каких-нибудь элементов, называется упорядоченным, если о всяких двух его элементах a и b можно сказать, какой из них предшествует и какой является последующим: если a предшествует b, это записывают в виде $a < b$. Чтобы совсем избавиться от идеи пространства или времени исходят из следующего определения: множество E, составленное из каких-либо элементов, называется упорядоченным, если определено для его элементов соотношение, выражаемое знаком $<$ и обладающее следующими двумя свойствами: 1) если a и b суть два нетождественных элемента множества E, то из двух соотношений $a < b$ и $b < a$ обязательно верно одно и только одно; 2) если a, b и c суть три нетождественных элемента множества E, то соотношения $a < b$ и $b < c$ делают обязательным соотношение $a < c$. Упорядоченное множество E' называется последовательностью, если среди элементов множества E нет самого последнего, т.е. если для всякого элемента a множества имеется в E такой элемент, что $a < b$.

Затем вводятся стационарные понятия верхнего и нижнего пределов последовательности чисел E следующим образом. Пусть E есть последовательность каких-нибудь чисел или точек числовой прямой, что одно и то же. Возьмем какой-нибудь элемент a последовательности E. Пусть F_a есть совокупность всех элементов последовательности E, следующих за элементом a, и включая сюда самый элемент a. Согласно предыдущему, множество F_a, определенное равенством $F_a = E_a + E'_a$, есть замкнутое. Таким образом является определенной последовательность замкнутых множеств F_a, из которых всякое последующее F_b содержится в предыдущем F_a, где $a < b$. При этих условиях доказывают, что общая часть всех замкнутых множеств F_a есть непустое множество, т.е. действительно содержащее точки. Согласно предыдущему F есть замкнутое множество. Пусть A есть нижняя граница множества F и B — верхняя граница этого множества. Числа A и B определяются очевидно единственно через данную числовую последовательность E и называются соответственно нижним и верхним пределами данной числовой последовательности E. Если числа A и B совпадают, $A = B$, тогда данная числовая последовательность E называется сходящейся и тогда общая величина $A = B$ называется пределом последовательности E.

Как видно из сказанного, актуальная бесконечность и теория множеств позволяют в самом деле формально обойтись без понятия переменной величины, и предел числовой последовательности E определяется словесно вполне стационарно, без всякой идеи изменения, движения и приближения. (Для углубленного анализа идей теории множеств об отношении заменяемости движения стационарным состоянием см. *Множество*.) Всякая переменная величина x, изменяясь во времени, определяет последовательной сменой своих численных значений стационарную числовую последовательность, и предел a переменной величины x (если она его имеет) в точности равен пределу числовой последовательности E. Таким образом получают свое обоснование на почве теории множеств все основные понятия теории пределов, и сама основная (и единственная) теорема теории пределов становится только одною из многих теорем о числовых стационарных последовательностях E.

Таким же точно образом получают свое теоретико-множественное обоснование все понятия Д. и. Пусть x_0 есть какая-нибудь точка, лежащая внутри отрезка (a, b), и E какое-нибудь множество точек этого отрезка, содержащее точку x_0 и имеющее ее одной из своих предельных точек. Обозначим через E_+ и E_- совокупность всех точек множества E, лежащих соответственно вправо и влево от точки x_0, и предположим, что x_0 (не входящая ни в E_+, ни в E_-) есть предельная точка для каждого из двух этих множеств. В этих условиях всякая функция $f(x)$, заданная на сегменте (a, b), определяет две числовые последовательности E_+ и E_- следующим образом: E_+ происходит от величин $f(x)$ на множестве E_+, причем считается $f(x'') < f(x')$, если $x'' > x'$; E_- имеет такое же происхождение, только считается $f(x') < f(x'')$, если $x'' > x'$. Верхний и нижний пределы числовой последовательности E_+ называются правыми максимумом и минимумом функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0; аналогично верхний и нижний пределы числовой последовательности E_- называются левыми максимумом и минимумом функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Если правые максимум и минимум функции $f(x)$ в точке x_0 на множестве E равны $f(x_0)$ тогда функция $f(x)$ называется непрерывной справа на множестве E в точке x_0; аналогично, если левые максимум и минимум функции $f(x)$ в точке x_0 на множестве E равны $f(x_0)$, тогда $f(x)$ называется непрерывной слева на множестве E в точке x_0. Если $f(x)$ непрерывна одновременна и слева, и справа на множестве E точке x_0, она называется просто непрерывною на множестве E в точке x_0. Отношение

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

рассматриваемое на множестве E_+ при условии $\varphi(x'') < \varphi(x')$, если $x'' > x'$, определяет числовую последовательность, верхний и нижний пределы которой называются правыми, верхним и нижним, производными членами функции $f(x)$ на множестве E. Если оба эти производные числа равны между собой, то их общая величина называется правой производной функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Аналогично определяется левая производная функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Когда правая и левая производные функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0 равны между собою, тогда их общая численная величина называется просто производною функции $f(x)$ на множестве E в точке x_0. Если эта производная конечна, функция $f(x)$ необходимо есть непрерывная на множестве E в точке x_0. Наконец если множество E, которое были каким-угодно множеством точек на отрезке (a, b), лишь бы оно содержало точку x_0 и имело ее предельной справа и слева, берется совпадающим с отрезком (a, b), тогда производная функции $f(x)$ на E в точке x_0 просто является обыкновенною производною в смысле Коши. Бесконечномалые и сопровождающие их числа E являются упраздненными совершенно. Таким образом все определение Д. и. получает стационарность и вместе с нею чрезвычайную общность.

Чтобы оценить обоснование Д. и. на основе теории множеств, следует прежде всего назвать его очень плодотворным. Благодаря чрезвычайной общности теоретико-множественных определений и понятий Д. и. было получено очень много тонких фактов, не предполагавшихся и даже невозможных с прежней точки зрения. Так, беря за множество E различные множества точек, мы изучаем производную на различных множествах от непрерывных функций $f(x)$ и, сравнивая численные результаты при разных E, мы проникаем внутрь глубочайших структурных свойств непрерывных функций. Свойства эти являются как бы микроскопическим изучением поведения непрерывной функции в точке x_0 и вскрывают необычайное богатство различных соотношений новых данных, глубоко влияющих в конечном итоге на течение самой функции $f(x)$ на всем отрезке (a, b). Следует сказать, что изучение этих "микроструктур" (Данжуа) далеко еще нельзя считать законченным и по настоящее время, а сейчас еще продолжают появляться по этому предмету важные и интересные работы. Таким образом рассматривание Д. и. с точки зрения теории множеств следует назвать очень острым, в отличие от точки зрения Коши, и давшим богатства микроструктуры неоценимой важности.

Но на основной вопрос, даст ли эта "точка зрения действительно строгое построение Д. и.", в настоящий момент приходится отвечать незнанием. Дело в том, что обоснование вообще всей математики теорией множеств хотя и дало интересные и очень творческие результаты, но не привело к уверенности в строгости, т. к. сама общая теория множеств, развиваемая чисто логически, вошла в столкновение с парадоксами, остановившими ее бурное развитие и делающими невозможными в настоящее время утверждение, что анализ является "правильно" (т.е. логически строго) обоснованным. По современным взглядам, намечается четыре течения для устранения из общей теории множеств парадоксов: логистический метод, интуиционизм, аксиоматизм и релятивизм. Но общего убеждения в том, что единственно правильным является такой-то исход, пока еще не наступило.

Как бы то ни было, само Д. и. состоит собственно в системе формул и правил, а формулы и правила эти должны быть незыблемы при всяком обосновании Д. и. Обоснование Д. и. собственно сводится к обоснованию математического континуума, а при всяких взглядах на континуум, например, формула $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$, как и все другие, останется неизменною. Далее, каково бы в будущем ни было принято решение относительно обоснования Д. и., разумеется, что накопленные знания по микроструктурам ни в коем случае не должны быть заброшены.

Существование производных. Вопрос этот, имевший когда-то большую остроту после принятия тонки зрения Коши, в настоящее время утратил былую жгучесть. Дело в том, что точка зрения Коши, по природе близкая к точке зрения Ньютона, не ушла далеко от рассматривания производной как скорости движения. И так как мы, основываясь на привычном нам простейшем механическом движении материальных тел, склонны приписывать всякому движению определенную скорость, то общим убеждением долгое время после реформы Коши было, что всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет производную кроме отдельных исключительных точек. Но вместе с тем было замечено, что все дававшиеся доказательства теоремы о существовании производной у всякой непрерывной функции [сводившейся, как стало ясным теперь, к предположению данной функции $f(x)$ функцией с ограниченным изменением, в каковом случае $f(x)$ действительно не имеет производной лишь в исключительном множестве меры нуль] неизменно страдали либо грубым заблуждением, либо тонким предположением некоторых частных гипотез.

Так было дело до 1871, когда Вейерштрасс, достаточно глубоко проведший арифметизацию анализа, оказался в силах установить существование непрерывной функции, не имеющей нигде производной. Пример этот вызвал живейшее недоумение, споры, но пришлось уступить силе непререкаемого факта. К тому же дальнейшие поиски на этом пути привели к построению других примеров непрерывных функций без производных и непрерывных кривых без касательных, много более простых и геометрически более ясных (Хельге фон Кох, Бибербах). Сам Вейерштрасс дал свою функцию в виде абсолютно и равномерно сходящегося тригонометрического ряда $\sum\limits^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, где $0 < a < 1$ и где b есть целое нечетное число, большее единицы, и такое, что ab превосходит $1 + \frac{3}{2}\pi$. Лишь в самое последнее время обнаружено, что пример Вейерштрасса не совсем удачен и что его непрерывная функция имеет производную, правда, равную $+\infty$ или $-\infty$, но на бесконечном всюду плотном (и даже всюду несчетном) множестве точек. Первый пример непрерывной функции, действительно не имеющей производной ни в какой точке, дан Безиковичем.

Но если ввести обобщение понятия обыкновенной производной, данное почти одновременно А.Я.Хинчиным и Данжуа, которые определяют обобщенную (“асимптотическую”, по А.Я.Хинчину, и “аппроксимативную”, по Данжуа) производную от данной функции $f(x)$ в точке x_0, беря обыкновенную производную от $f(x)$ на множестве E, имеющем в точке x_0 точку плотности (что обеспечивает единственность численного результата, не зависящего следовательно от выбора множества E), то оказывается, что всякая без исключения непрерывная функция обладает в несчетном множестве точек во всяком интервале асимптотической односторонней производной (правой или левой), конечной или бесконечно-большой определенного знака.

Чтобы иметь конкретный пример непрерывной функции без производной, или, что то же самое, непрерывной кривой без касательной, проще всего поступить так: возьмем на плоскости XOY очень тонкий и очень извилистый двухмерный шнур, пересекающийся всякой параллелью оси OY только по одному разу, и назовем его “шнуром 1-го порядка” (рис. 5).

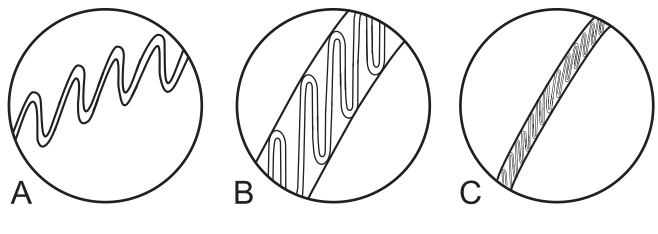

Рис.5.

Впишем в этот шнур 1-го порядка другой шнур, еще более тонкий и еще более извилистый, и назовем его “шпуром 2-го порядка”. В этот последний точно таким же образом вписываем новый шнур, еще более тонкий и извилистый, и назовем его “шнуром 3-го порядка” в т. д. Повторяя этот прием бесконечное число раз, мы получим бесконечную последовательность шнуров, все более и более тонких и все более и более извилистых, таких, что извилины 1-го шнура чрезвычайно уплотнены в каждой извилине предыдущего шнура. В этом случае легко показать, что при надлежащем подборе тонкости и извилистости этих шнуров точки плоскости, заключенные во всех этих шнурах, образуют непрерывную кривую, нигде не имеющую касательной, наклонной к оси OX.

Это построение можно интерпретировать следующим образом: представляют себе, что имеют бесконечное множество микроскопов M_1, M_2, M_3,..., из которых каждый в 100 раз сильнее предыдущего. Тогда, взяв первый микроскоп M_1 мы видим нашу кривую несколько размытой, в виде первого шнура. Чтобы видеть ее отчетливее, мы берем и второй микроскоп M_2 и убеждаемся в том, что то, что мы считали за легкую расплывчатость, оказывается на деле очень густыми витками, напоминающими первый шнур и в свою очередь слегка размытыми. Взяв еще более сильный микроскоп M_3, мы усматриваем, что то, что мы считали за кривую, оказывается лишь вторым шнуром, наполненным новыми витками, и т. д. Ясно, что всякая прямая линия, проходящая через точку кривой и не параллельная оси OY, должна непрерывно пересечь бесчисленное количество раз нашу кривую, потому что она тянется вдоль витков каждого шнура.

Хельге фон Кох указал иной способ построения непрерывной кривой без касательной. Возьмем равнобедренный треугольник в качестве первого шага процесса. Боковые его стороны разделим на 3 равные части и построим на средних частях по треугольнику; это составит второй шаг процесса (рис. 6).

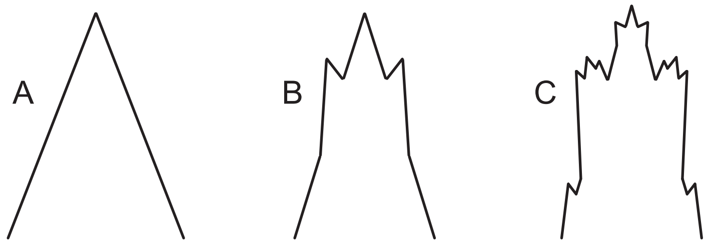

Рис.6.

Далее, разделив каждую сторону полученного многоугольника на 3 равные части, на всякой средней из них опять строим треугольник, что дает, третий шаг процесса, и т.д. Когда мы совершим бесконечное множество шагов, мы в пределе получим непрерывную линию, не нигде наклонной касательной. Этот способ вполне строгий, но может ввести в заблуждение. Дело в том, что кривая выглядит колючей, и действительно, на ней имеется бесконечно много вершин. Но множество их только счетно, и вовсе не им обязано отсутствие касательной, а изгибам кривой, как и в предыдущем случае.

Дифференциальное исчисление и естествознание. Роль Д. и. в развитии геометрии была уже отчасти освещена выше в историческом обзоре. Подробнее см. об этом в ст. *Геометрия, Дифференциальная геометрия, Выпуклость* и *Вогнутость.* — Не менее важную роль играет Д. и. и в математической обработке проблем естествознания в широком смысле слова (т. е. включая сюда и вопросы техники). Причиной этого является главным образом то обстоятельство, что только понятие о производной дает возможность строго определить важнейшее понятие **скорости**. Если переменная величина y изменяется в зависимости от другой переменной величины x, то встает вопрос об **относительной скорости** изменения величины y по отношению к величине x. Если зависимость y от x **равномерна**, т. е. изменение Δy величины y пропорционально изменению Δx величины x, то скорость v изменения величины y по отношению к величине x естественно определяется, как отношение соответствующих изменений: $v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это — величина постоянная, она не зависит от выбранных x значений и y, а также от приращений Δy и Δx. Так, само собою ясно понятие **скорости прямолинейного равномерного движения** (x — время, y — пройденный путь). Другой пример: работа постоянной силы, приложенной к движущемуся телу, растет пропорционально пройденному пути (x — путь, y — работа). Скорость изменения y по отношению к x численно равна работе на единице пути и очевидно равна действующей силе. Понятие относительной скорости изменения двух величин существенно осложняется в случае зависимости **неравномерной** (т.е. в случае, когда приращения величин и y связаны законом более сложным, чем прямая пропорциональность). Тогда отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет различным для различных x, $y, \Delta x$ и Δy; оно дает среднюю скорость изменения величины y (относительно величины x) на участке от x до $x + \Delta x$. Если Δx мало, то эта средняя скорость на участке от x до $x + \Delta x$ **приближенно** характеризует собою "мгновенную" скорость "в момент x", хотя конечно и несколько отличается от нее, т.к. на участке от x до $x + \Delta x$ скорость изменения величины y успевает все же измениться. Чем меньше Δx, тем ближе очевидно средняя скорость на участке от x до $x + \Delta x$ к "мгновенной" скорости в начале этого участка ("в момент x"). Поэтому за скорость изменения величины y относительно величины x (при некотором определенном значении этой последней) принимают **предел** отношения при условии, что Δx стремится к нулю, т.е. производную от функции, выражающей зависимость величины y от x. Качественная природа скорости или производной (физическая размерность) определяется в зависимости от природы величин y и x; так, если y — длина, x — время, то y' есть скорость движения; если y — работа, x — длина, то y' есть сила и т.п. Следует иметь в виду, что численное значение производной существенным образом зависит от единиц, которыми измеряются величины x и y.

О других, более частных приложениях Д. и. см. *Бесконечный ряд, Ряд Тейлора, Экстремум.*

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная $y' = F(x)$ от функции $y = F(x)$ есть функция от x, которую можно снова дифференцировать; производная от производной будет по отношению к основной функции y ее второю производною (или производною второго порядка):

$$y'' = f''(x) = \frac{dy'}{dx}.$$

Подобным образом можно определить производные третьего, четвертого и т.д. порядка. Точно так же дифференциал dy функции $y = f(x)$ есть функция от x (наряду с этим он зависит от Δx; эта зависимость нас в данный момент не занимает). Поэтому имеет смысл говорить о дифференциале от дифференциала или о втором дифференциале функции $y = f(x)$. Очевидно

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)(dx)^2 = y''(dx)^2,$$

откуда

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

т.е. вторая производная равна второму дифференциалу функции, деленному на квадрат первого дифференциала независимой переменной. Подобным же образом устанавливаются формулы

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4}, \text{и вообще} \quad y^n = f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Из производных высших порядков только вторая имеет первостепенное значение в геометрии, механике и технике. Первая производная характеризует собою направление кривой в соседстве данной точки (определяющееся направлением касательной). Так как вторая производная дает скорости изменения первой производной, то величина ее очевидно связана с тем, насколько быстро в данном месте изменяется направление кривой, таким образом насколько кривая в данном месте **искривлена**. Поэтому от величины второй производной существенно зависит *кривизна (см.)* кривой; вследствие этого со второй производной приходится иметь дело во всех технических расчетах, связанных с кривизною, например при исследовании изгиба балок.

Механически вторая производная, как скорость изменения скорости, интерпретируется как **ускорение движения**. Так как, согласно закону Ньютона, сила, вызывающая движение, равна произведению массы движущегося тела на его ускорение, то во всех динамических задачах, где требуется рассчитать движение, которое произойдет под действием данных сил, непременно участвуют вторые производные.

Дифференцирование функций нескольких переменных. Если $u = f(x, y)$ есть функция от двух независимых переменных x и y, то мы можем, зафиксировав для y какое-нибудь постоянное значение (и сделав таким образом u функцией одной переменной x), дифференцировать u по x. Полученная производная называется **частной производной от** u **по** x и обозначается так: $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная u по y, $\frac{\partial u}{\partial y}$ или $f'_y(x, y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ очевидно, подобно самой величине u, зависят от обеих переменных x и y. Если, считая y постоянной, дважды продифференцировать u по x, то мы получим вторую производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ или $f''_{xx}(x, y)$. Аналогично определяется $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ или $f''_{yy}(x, y)$. Но мы можем также найти производную по y от $\frac{\partial u}{\partial x}$; эту производную мы обозначим через $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ или $f''_{xy}(x, y)$; аналогично определится $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ или $f''_{yx}(x, y)$.

Теория показывает, что две последние производные совпадают между собою, так что функция u имеет **три** различных частных производных второго порядка. При повышении порядка число производных очевидно еще возрастает; при этом в качестве общего правила производные, отличающиеся друг от друга только порядком дифференцирования, совпадают между собою.

Предметное значение частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ очевидно: она представляет собою скорость, с которой изменяется величина u по отношению к величине x, при условии, что величина y сохраняет постоянное значение. В естествознании и технике, где каждая встречающаяся величина, как правило, зависит в своих изменениях от целого ряда других величин, с частными производными постоянно приходится иметь дело.

Пример:

$$u = 4xy^3 - 5x^2y; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 4y^3 - 10xy; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12xy^2 - 5x^2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -10y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 12y^2 - 10x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 24xy.$$

Полный дифференциал du функции $u = f(x,\ y)$ определяется формулой:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial x}{\partial y}dy;$$

где dx и dy — приращения независимых переменных x и y. Его роль в теории функций нескольких переменных та же, что роль обычного дифференциала для функций одной переменной: полный дифференциал есть виртуальное приращение функции u; при малых dx и dy он почти не отличается от истинного приращения Δu и практически может заменять его. Так как, с другой стороны, вычислить полный дифференциал значительно легче (в большинстве случаев), чем приращение, то понятна его роль в приближенных вычислениях.

Полная производная. Если в функции $u = f\ (x,\ y)$ мы станем считать x и y функциями некоторой новой переменной t, т.е. $x = \varphi(t), y = \varphi(t)$, очевидно, и u станет функцией от t; во многих случаях важно иметь выражение $\frac{\partial u}{\partial t}$ через производные: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$и $\frac{dy}{dt}$; формула эта называемая формулой **полной производной**, имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Эта — общая формула, содержащая в виде частных случаев многие из правил, приведенных выше в разделе “формальная теория”.

Литература см. при ст. *Бесконечно-большие и бесконечно–малые.* Кроме того—Cajori F., A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse, L., 1920; Goursat E., Cours d’analyse mathematique, 3 tt.. P., 1923—25 (на рус. яз. имеется: Гурса Э., Курс математического анализа, т. I—II, M, 1911—23); Picard E., Traite d’analyse, t. I—III, 2 ed., P., 1901—08; Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых, ч. 1—2, Одесса, 1913—14; Ковалевский Г., Основы дифференциального и интегрального исчислений, Одесса, 1910; Грэнвилль В. и Лузин Н., Элементы дифференциального и интегрального исчислений, ч. 1—2, 10 изд., М.—Л., 1930—31; Выгодский М. Я., Основы исчисления бесконечно-малых, 2 изд., М.—Л., 1932; Ла-Валле Пуссен Ж. Ш., де, Курс анализа бесконечно-малых, т. I, вып. 1—2, П., 1922. *Н. Лузин.*

Две математические заметки

С. В. Дворянинов

Представляем вниманию читателей две заметки нашего постоянного автора С. В. Дворянинова. Первая содержит некоторые полемические соображения о языке учебников математики. Вторая посвящена понятию равномерности — одному из важнейших в математике. Она адресована старшеклассникам и студентам младших курсов.

1. Называется или называют?..

"— Кто вы такой?
— Ну хорошо, зовут меня Азазелло,
но ведь все равно вам это ничего не говорит."

М.А.Булгаков

"Может ли волк назвать себя хищником?
Нет, так как он не умеет говорить."

Детская загадка

Однажды, после музыкального концерта, когда внимание к звукам было особенно обострено, мои ученики обратили внимание на то, как звучит... определение параллельных прямых из школьного учебника:

"**Определение**. *Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются*" [1].

"Две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются" [2].

В этих предложениях прислушаемся к двум одинаково звучащим сказуемым — пересекаются и называются. Звучат они одинаково, особенно их окончания. В оркестре для передачи и выражения того или иного образа используются разные музыкальные инструменты, разные выразительные средства. То же самое наблюдается и в живописи. Даже в народных сказках читаем: Волк с толстым голосом заговорил тонким голоском, когда ему язык подковал кузнец.

В двух приведенных предложениях сказуемые одного и того же вида используются для описания принципиально различных свойств предмета (двух прямых). Первое сказуемое — называются — выражает наше отношение, наше действие, действие читателя, связанное с его наименованием. Второе сказуемое — не пересекаются — характеризует свойство этого предмета, которое является объективным, не зависящим от нас. Действительно, две прямые могут пересекать одна другую (и поскольку это отношение — пересекать — является симметричным, могут пересекать сами себя, то есть пересекаться). А вот термины и слова, которые описывают эту ситуацию, — целиком зависят от нас! Мы (автор книги, учитель, ученики и т.д.) сами даём название этому свойству, именно мы называем тот или иной объект так или иначе.

В разговорной речи это, разумеется, заметно. Спрашивают обычно: "Как вас зовут? Как зовут твоего друга? Как зовут твою собаку?" Конечно, есть и другой вариант: "Как называется этот фильм? Как называется этот город?"

Можно утверждать, что авторы школьных учебников также учитывают данное обстоятельство. К примеру, в [2] читаем: "*Четырехугольником* называется фигура..." (с.81), а затем говорится, что "Параллелограмм — это четырехугольник..." (с.83), "прямоугольник — это параллелограмм...” (с.86), “ромб — это параллелограмм...” (с.87), “квадрат — это прямоугольник...” (с.88). Затем на с.92 снова возвращается более распространенная конструкция определения: “Трапецией называется четырехугольник...”.

Стилистически весьма привлекательный вариант представления определения находим в [1] на с.53: “Некоторые пары этих углов имеют специальные названия: накрест лежащие углы..., односторонние углы..., соответственные углы...”.

К сожалению, этот пример остается почти что единичным. Даже беглый анализ текстов школьных учебников приводит к выводу о том, что из двух вариантов — *называется* и *называют* — предпочтение явно отдается первому. В [1] на с.5 читаем: прямые обозначают, точки обозначают. В этом твердом окончании отражается наличие того, кто играет активную роль, подразумевается наличие человека, который изучает реальную действительность и который подобен первопроходцам, дающим названия новым землям, рекам, горам и наносящим их на карты. Ученик и должен ощущать себя таким первопроходцем при изучении любого предмета. В учебной, тренировочной (даже игровой) ситуации он должен испытывать те же ощущения радости (гордости, восторга, удивления, трудности, победы), которые бывают в реальной жизни. Использование оборотов *называется, обозначается* и пр. (с сюсюкающим *-ся* в конце) отводит человеку (ученику), изучающему предмет, — в данном случае геометрию, — пассивную, подчиненную роль.

Этот пассивный оборот явно преобладает. Уже на с.6 [1] находим: “отрезком называется..., точки называются...”, но “запись **используют**”(!). На с.7 там же “прием используется, вехи ставят, прием называется”, снова “прием используется”.

Активная роль остается ученику при выполнении упражнений: на с.8 читаем: — “назовите отрезки”. Там же “угол — это...”

На с.11 — “точка отрезка, делящая его пополам, называется серединой отрезка”. Пожалуй, не называется, а так ее, эту точку, называют.

В упражнении на с.16 “точка B делит отрезок AC на два отрезка”. Вот это предложение устроено каноническим образом: подлежащее, сказуемое, второстепенные члены предложения. Так же просто, как “мама мыла раму”. Непростая наука (и школьный предмет) — математика. Даже мелочью не стоит пренебрегать, если эта мелочь поможет нашим ученикам. Речь должна быть простой и понятной. Структура предложений должна быть ясной. Пожалуй, предложение “отрезок разделен на три части” со страдательным залогом из упражнения на с.17 [1] лучше заменить предложением с глаголом “отрезок разделили на три части”.

Не менее важна и форма обращения к ученику, форма и формулировка вопроса. На с.3 содержится образец вопроса: Что это такое — геометрия?

Именно так — что это такое, а не что называется геометрией! На с.25 [1] читаем: объясните, что такое луч; что такое секущая? (с.63); объясните, как построить треугольник (с.85); что такое координаты вектора? Что такое радиус-вектор? (с.236).

Нам важны по большей части в каждой конкретной ситуации не имя, не название, не кличка, не метка и пр., а связь нового, незнакомого предмета, объекта, явления с уже известными. Незнакомого человека из вежливости мы вначале спрашиваем об имени, чтобы затем, используя обращение, поскорее узнать нечто содержательное о его профессии, месте жительства, увлечениях и так далее. “Хоть горшком назови, только в печь не ставь”, или, как сказал Гете, “Name ist Schall und Rauch”. Отношение народа к имени отражено, например, в поговорках: “Такое название, что с морозу не выговоришь”, “Как хошь зови, только хлебом корми”([3]). Про венгерский город Секешфехервар наши воины Отечественной войны говорили, что его легче взять, чем произнести.

В учебной литературе можно найти немало синонимов, которые могут заменить наше традиционное математическое *называется.* Например: называют, говорят, именуют, получают название (получили название), принято называть, носит название, обозначают термином, давать название.

Нельзя не сказать здесь и об определениях. Что это такое — разъясняется на с.41 [1]. В учебнике находим определения окружности, параллельных прямых, параллелограмма, подобных треугольников, вектора. Соответствующая часть текста выделена курсивом. Однако, здесь нет последовательности, и при описании трапеции, прямоугольника, ромба, квадрата, синуса, касательной, серединного перпендикуляра эта метка, указатель — **Определение** — отсутствует. Это может создать определенные трудности для части учеников. Они сами должны догадаться, что текст, набранный курсивом, содержит определение.

И ладно, если б так было всегда! Но вот на с.191 говорится о понятии суммы двух векторов (что такое *понятие* — это определение?). При этом текст выделен курсивом. А строчкой ниже сказано, что это правило! Вот и думай ученик: что же это такое — определение или правило?! Ученик привык к тому, что курсивом выделяется определение, а теперь ему говорят, что это правило. Значит, определение и правило — одно и то же?

Далее читаем: “рисунок 250 поясняет это название”. Слово *название* в этом параграфе до сей поры отсутствовало, и речи о названии не было! Что же этот рисунок тогда поясняет? До всего этого ученик должен доходить сам.

В учебнике [1] на с.198 речь идет о произведении вектора на число. Слово *определение* вначале здесь также отсутствует.

На с.248 в [1] упомянуто действие — скалярное умножение. Ни разу больше это сочетание слов — скалярное умножение — в книге не встречается. В книге оно явно лишнее (кстати, в [2] его нет). Но тут же описание упомянутого действия, описание деятельности (то есть описание умножения) подменяется описанием результата этого действия.

“Стиль — это человек”, — сказал прославленный естествоиспытатель Бюффон в 1963 г., при избрании его в члены Французской академии. Стиль есть неповторимая особенность человека, которая отличает его от других людей, тогда как идеи, развиваемые им, могут быть достоянием многих.

На с.273 [1] рассматривается свойство осевой симметрии. Перед этим подчеркнуто, что осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя. Тем не менее чуть ниже читаем: Осевая симметрия обладает следующим важным свойством — это отображение плоскости на себя (?), которое сохраняет расстояние между точками.

Конструкция последнего предложения явно неудачна. Описание важного свойства содержится в... придаточном предложении. Построение предложения нацеливает в первую очередь на то, что “важное свойство — это отображение плоскости на себя”. Но последнее вообще никакого свойства в данном контексте не описывает. Отказ здесь от стандартной конструкции “мама мыла раму” (подлежащее + сказуемое + второстепенные члены предложения) создаёт логические трудности для читателя. Разумеется, ясно, что здесь подразумевается следующее: осевая симметрия обладает следующим важным свойством — она сохраняет расстояние между точками. Но такая реконструкция текста (по сути дела его расшифровка) перекладывается на плечи читателя.

Интересно сравнить построение анализируемого текста с традиционной, однозначно понимаемой структурой предложений из [1], описывающих свойства параллелограмма, ромба, квадрата. По нашему мнению, абсолютно ясно, что заслуживает предпочтения.

Анри Пуанкаре писал, что “Математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам” (А. Пуанкаре. “О науке”. М., 1990, с.388). Позволим предположить, что преподавание математики должно включать в себя искусство разными способами давать название одной и той же вещи.

“Как слово наше отзовется?...” — Лишь не уставая по-разному и по-хорошему говорить об одном и том же, мы смеем надеяться, что наши цели в работе с учениками не окажутся недостижимыми.

Встречаются языковые погрешности и в учебниках по математике для высшей школы. В одном серьезном курсе математического анализа читаем:

“ $\ldots |a_n(x)| \leq p_n$. Говорят..., что ряд $\sum a_n(x)$ **мажорируется** рядом $\sum p_n$”. Следует говорить, что функциональный ряд **мажорируем** числовым рядом, или что числовой ряд мажорирует функциональный ряд.

В заключение приведем выдержку из книги [4]:

“**Только старшую сестру**
он еще слушается”.

Своеобразие этого предложения заключается в том, что оно построено в нарушение элементарного грамматического правила: винительный падеж без предлога может употребляться только при переходных глаголах (в этом заключается их особенность в любом языке), но этого как раз и нет в данном случае, поскольку глагол с суффиксом *-ся* является непереходным.

То же самое находим в предложениях: *Дети боялись строгую мать*; *Все дожидались Анну Ивановну*, в которых вместо родительного падежа употреблен винительный после непереходного глагола. И тем не менее такие предложения узаконены в разговорной речи, имеющей свои нормы, часто не совпадающие с нормами речи книжной. Сравните у писателей: *Дядю боялись все* (Н. С. Лесков); *Вы ведь Гришу дожидаетесь?* (Ф. М. Достоевский)."

Используя в учебниках возвратный глагол *называется*, мы следуем нормам книжной речи или речи разговорной?

Литература

1. Геометрия 7-9. Учеб. для 7-9 кл. сред. шк./ Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — М., 1990.

2. Геометрия 7-11. Учеб. для 7-11 кл. сред. шк./ А. В. Погорелов; — М., 1993.

3. Пословицы русского народа / В. Даль; М., Русская книга, 1984.

4. А как лучше сказать? / Д. Э. Розенталь, М., Просвещение, 1988.

2. Что такое равномерность

Каждый школьник знает, что такое равномерное прямолинейное движение. К примеру, вам нужно начертить на бумаге отрезок прямой длиной 10 см. Для этого следует взять линейку, разместить ее на листе бумаге и провести на бумаге соответствующую линию. При этом грифель карандаша движется по прямой. Движение прямолинейное. Грифель начинает движение из состояния покоя. Его скорость не является постоянной. По мере приближения к концевой точке его скорость уменьшается. Это неравномерное движение.

При равномерном движении за любые равные промежутки времени движущаяся точка проходит равные по длине отрезки пути. При этом траекторией равномерно движущейся точки не обязательно является прямая. Точка может двигаться равномерно по окружности или по какой-либо другой траектории.

В определении равномерного движения важно, что говорится о *любых* равных промежутках времени. Если известно, что лишь за *некоторые* равные промежутки времени проходится равный путь, то такое движение не обязательно является равномерным. Пусть, например, за каждые сутки турист проходит 25 километром. Совершенно очевидно, что его движение неравномерное.

Вот чуть более сложный пример. Пусть путь, проходимый точкой, выражается формулой

$$S(t) = t + \sin t.$$

Легко проверить, что

$$S(t + 2\pi) - S(t) = 2\pi$$

при любом значении t. Это означает, за каждый временной отрезок длины 2π точка проходит отрезок пути длиной 2π. Рассмотрим теперь два временных отрезка длины $\frac{\pi}{2}$: $[0; \frac{\pi}{2}]$ и $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$. За первый промежуток времени точка проходит путь длиной $\frac{\pi}{2} + 1$, за второй — путь длиной $\frac{\pi}{2} - 1$. Это разные величины. Следовательно, точка движется неравномерно.

При равномерном движении путь оказывается равным (одинаковым) для любых равных (одинаковых) отрезков времени.

Заметим, что это понятие — *равномерно* — широко используется в обыденной жизни. Каждая хозяйка, пекущая пироги, заботится о том, чтобы пирог пропекся равномерно. Засыпая манную крупу в воду или молоко, стремятся полученную кашу равномерно размешать, чтобы не образовалось комочков. Когда на стройку везут строительный раствор (состоящий из воды, песка и цемента) особо заботятся, чтобы раствор был хорошенько перемешан (равномерно) и для транспортировки используют специальные машины с вращающимися емкостями. Это не позволяет раствору, как принято говорить, садиться. Поверхность стола, за которым работает ученик, должна быть равномерно освещена. Земледельцы особо радуются, когда на пшеничных полях хлеба подходят (созревают) равномерно или, как говорится, дружно. Во многих подобных случаях слово *равномерно* можно заменить другими синонимами, например, *одинаково*, *в равной мере*.

Во время шахматной игры все ходы должны быть достаточно хорошими. Один очень неверный ход может привести к поражению. Любой промах во время выступления фигуристов снижает оценку судей.

Если налить в стеклянный сосуд кипяток, то сосуд может прогреться неравномерно, различные его части расширятся по-разному, в материале возникнут внутренние напряжения, и в результате сосуд может треснуть.

Схожие проблемы возникали при отливке колоколов — чем крупнее колокол, тем труднее обеспечить его равномерное охлаждение и тем большее мастерство требовалось для его изготовления.

Во всех рассмотренных ситуациях речь идет о некоторых "героях" или "действующих лицах", о переменных величинах, которые стремятся к некоторой цели или идеалу.

В случае пирога есть интуитивное представление об идеальном пироге, о котором говорится в кулинарной книге. Трудность же в том, что пирог *большой*. Когда одна его часть уже готова, другая может быть еще сыроватой. Вот и поворачивают этот пирог в духовом шкафу и так и эдак, стараясь, чтобы все его *точки* были одинаковы хороши. Другими словами, каждая часть пирога должна быть приближена к идеалу в равной мере, одинаково. В чем здесь заключается мастерство кулинара? В том, что надо следить за бесконечным множеством точек этого пирога. Если сосредоточиться только на одной какой-то части пирога, то можно проглядеть другие, и результат окажется далеким от желаемого. Мечта каждой хозяйки — такой духовой шкаф, в котором все пропекается равномерно и не подгорает.

Выражение *пирог пропекся* означает, что каждая его точка приблизилась к некоторому идеальному состоянию в равной мере, независимо от выбора каждой конкретной точки.

Во многих случаях свойство равномерности является положительным. Каждый учитель стремится к тому, чтобы все ученики в классе (герои процесса обучения) усваивали материал равномерно. Ко времени проведения контрольной работы знания каждого ученика должны отличаться от некоторой нормы так, чтобы это отличие выражалось положительной оценкой. В противном случае в классе появляются отстающие, и это плохо.

Во время парада на площадь вступают воинские шеренги. Проявлением прекрасной выучки является то, что за время движения по площади строй сохраняется, и каждая шеренга покидает площадь столь же синхронно, как и вступала на неё. Сравните это движение с тем движением воинского соединения, которое осуществляется при прочесывании по пересеченной местности!

Что уж говорить о сыгранности музыкантов симфонического оркестра! Чуткое ухо дирижера и взыскательной публики заметят любую минимальную несыгранность.

Можно представить еще несколько положений, когда отсутствие равномерности огорчает. Вы покрасили пол в квартире. Прошли положенные три дня, после которых краска должна высохнуть. Так написано на банке. Но... прямо в середине комнаты небольшой участок все не сохнет и не сохнет. Хотя вы и наносили краску на пол равномерным слоем, как предписывает инструкция. Говоря формальным языком, состояние каждой точки пола вашей квартиры приблизилось к цели не в равной мере для всех точек. Печально.

Схожая картина может быть на садовом участке. Кругом на грядках сухо, а как раз на дорожке — грязь непролазная. Пока дорожка высохнет — поздно будет заниматься посадкой. Вот она неравномерность.

Раньше в "докодаковские" времена фотолюбители печатали фотографии дома сами. Качество фотографий зависело от многих обстоятельств. Во-первых, надо было выбрать такое положение лампы фотоувеличителя, при котором поле освещалось бы равномерно. Во-вторых, иногда отдельные части фотографии в растворе проявителя появлялись неравномерно, с неодинаковой скоростью. И тогда приходилось карточки частично вынимать из раствора. Все это напоминало печение пирогов в духовом шкафу. И все это ради достижения равномерности качества.

Еще пример. Бывает порой, что каблуки на наших башмаках уже сносились, а сами туфли — почти как новые. Жалко выбрасывать. Вот еще одно проявление неравномерности, которая заставляет отправляться в мастерскую и чинить туфли. По этой же причине появляются иногда и заметные заплаты на локтях. Неравномерность служит оправданием ремонта и даже трансплантации органов.

Но вот, наконец, краска на полу в отремонтированной квартире высохла, и вы постелили в комнате ковер. Желательно делать это без складок, так, чтобы ковер равномерно прилегал к полу. Если это не сразу получилось, то дело легко поправить. Схожая картина возникает при наклеивании бумажных обоев на стены. Здесь все надо делать с первой попытки. Никаких воздушных пузырей между обоями и стеной быть не должно. Обои должны равномерно прилегать к стене. Для этого есть специальные правила работы. Так, ни в коем случае нельзя сразу с самого начала приклеивать оба края бумажной полосы.

Разумеется, не следует думать, что отсутствие равномерности несет одни только неприятности. Это не так. И от неравномерности есть польза. Когда вы кушаете по утрам с пылу-жару овсяную кашу, то берете ее с края тарелки. Там она уже остыла. Остывает же каша неравномерно, и именно этот факт позволяет нам наслаждаться горячим завтраком.

Во время спектакля по замыслу режиссера сцена может быть освещена совершенно неравномерно, и это позволяет менять декорации в затененной части, не привлекая внимания зрителей.

Пора, пожалуй, от равномерности, понятной каждой домохозяйке, перейти к математике.

Равномерная ограниченность

Рассмотрим бесконечное множество функций $f_A(x) = A\sin x$. Здесь независимая переменная $x \in R$, параметр $A \in R$ — индекс, "номер" функции. Очевидно, что каждая из функций этого множества ограничена: при любом фиксированном A и любом x выполняется неравенство$|f_A(x)| \leq |A|$. Легко понять, что нет такой постоянной, которая ограничивала бы *все функции* из этого семейства сразу для всех возможных значений параметра A. Свойство функции быть ограниченной не выполняется равномерно для всего семейства. В таких случаях говорят, что это семейство функций не является равномерно ограниченным.

Другое семейство, состоящее из функций $f_A(x) = \sin Ax$ является равномерно ограниченным. Существует постоянная, ограничивающая сразу все функции семейства: $|f_A(x)| \leq 1$ при всех значениях x и A.

Равномерная сходимость

Рассмотрим семейство функций $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$. Здесь $x \in R$, n — натуральное число. При $n = 0$ получается функция $f(x)$, график которой приведен в школьном учебнике "Алгебра и начала анализа 10-11" под ред. А. Н. Колмогорова, М., "Просвещение", 1994, на с.49. График функции $f_n(x)$ получается из графика $f(x)$ сдвигом на n единиц вправо вдоль оси OX. Сосредоточимся на рассмотрении значений функций из нашего семейства в фиксированной точке x. При возрастании номера n эти значения, монотонно убывая, неограниченно приближаются к нулю. В подобных случаях говорят, что функциональное семейство поточечно сходится к нулю. При каждом фиксированном значении независимой переменной значения всех функций с достаточно большими номерами оказываются сколь угодно малыми. Другими словами выбор большого n приводит к тому, что значения всех функций оказываются сколь угодно малыми. Можно ли указать такие n сразу для всех значений $x \in R$? Другими словами, выполняется ли это свойство равномерно относительно $x \in R$? Верно ли, что картина, которую мы наблюдаем при фиксированном значении x, одинакова на всей числовой прямой? (Сравните: в одной точке пирог хорошо пропекся, а как в целом?)

Нет. Обратившись к точке с абсциссой $x = n$, мы обнаружим, что в этой точке значение функции $f_n(n) = 1$ не является сколь угодно близким к нулю. (Можно сказать, что при “приклеивании” графиков к оси абсцисс получаются “воздушные пузыри”.) В подобных случаях говорят, что сходимость функционального семейства к нулю не является равномерной.

Семейство $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$ поточечно сходится к нулю, но также неравномерно.

Напротив, семейство $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin x$ сходится к нулю равномерно. Это означает, что графики всех таких функций с достаточно большими номерами практически неотличимы от оси абсцисс (графики “приклеиваются” к оси абсцисс равномерно).

В предыдущих примерах неравномерно сходящиеся к нулю функциональные семейства рассматривались на всей числовой прямой. Если же каждое из этих семейств считать заданным на отрезке $a \le x \le b$, то на этом отрезке сходимость к нулю будет равномерной (продумайте это!).

Рассмотрим теперь на интервале $0 < x < 1$ семейство степенных функций $f_n(x) = x^n$, где n — натуральное число. Поточечно семейство сходится к нулю, или к нулевой функции. Рассмотрим значения всех этих функций при любом фиксированном значении x (или соответствующие точки графиков этих функций). Очевидно (и это легко доказать строго), что при достаточно больших n эти точки практически неотличимы от точек с координатами $(x; 0)$. Выполняется ли это свойство близости точек графиков к оси абсцисс сразу для всех x, то есть равномерно относительно значений $x \in (0; 1)$?

Нет, не выполняется. Плохими в этом смысле значениями аргумента являются значения, близкие к 1.

Семейство бесконечно убывающих геометрических прогрессий

Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...,$$

причем для простоты будем считать, что ее знаменатель положителен $0 < q < 1$.

Известно, что сумма n первых членов этой геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

и что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна

$$S = \frac{1}{1 - q}.$$

Легко найти разность между этими двумя суммами:

$$\Delta_n = S - S_n = \frac{q^n}{1 - q}. \qquad (1)$$

Для данной прогрессии (то есть при фиксированном значении q) величина Δ_n может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения n.

Выясним, может ли величина Δ_n быть сколь угодно малой за счет достаточно больших значений n сразу для всех бесконечно убывающих прогрессий. Другими словами, может ли величина Δ_n быть сколь угодно малой за счет больших n равномерно относительно всех значений $q \in (0; 1)$.

Ответ на этот вопрос — нет. Действительно, давайте зафиксируем любое сколь угодно большое значение n. Теперь среди геометрических прогрессий будем выбирать такие, у которых знаменатель q все ближе и ближе к 1. В этом случае числитель дроби в (1) будет “похож” на 1, знаменатель — на 0, а вся эта дробь будет очень большой.

Вывод. Для множества всех сходящихся геометрических прогрессий суммы нескольких первых их членов не приближают равномерно суммы всех этих прогрессий.

Это, означает, например, следующее. Если мы будем рассматривать суммы (их называют частичными суммами), состоящие из миллиона первых членов сходящихся геометрических прогрессий, найдется такая прогрессия, для которой эта частичная сумма отличается от суммы прогрессии более, чем на миллиард (в действительности таких прогрессий бесконечно много).

Помните поговорку — *в каждом стаде найдется паршивая овца*? Так и здесь в нашем стаде (по научному — во множестве) бесконечно убывающих геометрических прогрессий "паршивые" получаются при выборе знаменателей, неограниченно приближающихся к единице.

Равномерно сходящиеся семейства интегралов

Возможно, кому-то из наших читателей будет полезным такое неформальное описание равномерности. Пусть имеется набор неких объектов. Назовем их сущностями. Имеется также некий рычаг, который каждую сущность приближает к ее пределу. Определена мера отличия сущности от ее предела. Пусть рычаг позволяет сделать все эти отличия малыми одновременно для всех сущностей сразу. В подобных случаях говорят о равномерной сходимости этих сущностей. В противном случае (при наличии некоторой "паршивой" сущности, из ряда вон выходящей) равномерной сходимости нет.

Возьмем в качестве сущностей семейство интегралов $\int\limits_1^b \frac{dx}{x^{p+1}}$, каждый из которых обозначим $F_p(b)$. Каждый интеграл — это функция независимого аргумента $b > 1$, число $p > 0$ — "номер", индекс каждой функции. Действие "рычага" заключается в том, что верхний предел интегрирования — число b — неограниченно возрастает, $b \to +\infty$.

Выясним, что происходит при этом с каждым из этих интегралов. По формуле Ньютона-Лейбница $F_p(b) = \frac{1}{p}(1 - \frac{1}{b^p})$. Действие "рычага" приводит к тому, что $F_p(b)$ стремится к пределу, равному $\frac{1}{p}$. Разность между каждым интегралом и его пределом равна величине $\Delta_p(b) = \frac{1}{pb^p}$.

Могут ли достаточно большие значения b обеспечить малость этой разности сразу для всех положительных значений p? Или же найдутся такие значения параметра p, которые нейтрализуют, сведут на нет влияние этих больших значений b?

Справедливо второе. Такими "паршивыми" с точки зрения равномерной сходимости семейства интегралов являются значения p, близкие к нулю. При любом сколь угодно большом значении b малые значения p неограниченно увеличивают величину $\Delta_p(b)$.

Вывод таков. Данное семейство функций, представимых собственными интегралами, равномерно не сходится.

Есть, конечно, и равномерно сходящиеся семейства функций, представимых собственными интегралами, в которых верхний предел интегрирования стремится к бесконечности. При этом почему-то несобственный интеграл называют равномерно сходящимся. Это не совсем правильно: несобственный интеграл никуда не сходится, к нему сходятся собственные интегралы. Но традиция укоренилась...

Равномерно непрерывные функции

Любая функция $f(x)$ порождает семейство "сущностей"

$$\Delta_x(b) = f(x + b) - f(x).$$

Полный титул этой сущности таков: "приращение функции f в точке x, отвечающее приращению аргумента b". Пусть действие рычага b заключается в том, что $b \to 0$, то есть b стремится к нулю. Снова можно изучать это семейство

1) локально, при фиксированном x, или

2) глобально, сразу для всех значений x, лежащих, например, в области определения функции f.

Если в первом случае $\Delta_x(b)$ становится сколь угодно малой величиной, то функцию f называют непрерывной в точке x.

Если же при достаточно малых b величина $\Delta_x(b)$ оказывается сколь угодно малой сразу для всех значений $x \in X$, то функцию f называют равномерно непрерывной на множестве X.

Рассмотрим на всей числовой прямой две функции, одна их которой равномерно непрерывна, а другая нет.

Для функции $\sin x$ величина $\Delta_x(b)$ имеет такую оценку:

$$|\Delta_x(b)| = |\sin(x+b) - \sin x| = 2\left|\cos\frac{2x+b}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{b}{2}\right| \le 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{b}{2}\right| = |b|\,.$$

(здесь учтено, что модуль синуса не превосходит модуля его аргумента — известное неравенство $\sin|\alpha| \le |\alpha|$). Теперь ясно, что малость величины $|b|$ точно в такой же мере обеспечивает малость величины $\Delta_x(b)$ сразу для всех значений x, равномерно относительно x. Следовательно функция синус равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

Для другой функции $f(x) = x^2$ величина $\Delta_x(b) = (x+b)^2 - x^2 = b(2x+b)$. Пусть приращение аргумента b сколь угодно близко подходит к нулю и пусть для определенности $b > 0$. Что происходит при этом с $\Delta_x(b)$? При ответе на этот вопрос следует учесть её зависимость еще и от независимой переменной x, которая может принимать любые значения!

Присмотримся: гарантирует ли малость b малость $\Delta_x(b)$ сразу для всех $x \in X$? Нет. Для любого фиксированного b можно подобрать такое x, что величина $\Delta_x(b)$ не будет малой.

Это означает, что квадратичная функция не является равномерно непрерывной на всей прямой.

Задачи

1. Объясните, что означают слова: “краску нанесите равномерно на окрашиваемую поверхность”, “груз в багажнике автомобиля следует размещать равномерно”, “сетка на батуте должна быть натянута равномерно”, “во время физических упражнений дышите равномерно”.

2. Установите, является ли данное семейство функций равномерно ограниченным на всей числовой прямой: а) $f_n(x) = n\cos nx$, б) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, в) $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}$, $x \ge 0$.

3. Исследуйте данное семейство функций на равномерную сходимость на множестве R при $n \to +\infty$: а) $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$, б) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, в) $f_n(x) = \frac{|x|}{n+|x|}$.

4. Исследуйте каждую функцию в ее области определения на равномерную непрерывность: а) $f(x) = cosx$, б) $f(x) = 5x$, в) $f(x) = \sqrt{x}$, г) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, к.ф.м-н.,
Самарский государственный университет.
e-mail: dvoryan@ssu.samara.ru

От школьной задачи к студенческой проблеме

П. Самовол, М. Эпплбаум

Авторы статьи, начиная с довольно простой задачи о существовании числовой последовательности с необычным, на первый взгляд, свойством, рассматривают и анализируют ряд обобщений этой задачи, в том числе, интересных для студентов.

На школьных математических соревнованиях самого разного уровня встречаются задачи с парадоксальной формулировкой. Например, в книге [1, p.105] находим:

Задача № 1: «Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Может ли быть так, что за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год, его доход превысил расход?»

Второй пример, под номером 19.2, предлагался на XIX Международной Математической Олимпиады (IMO) 1977 года в Белграде (6 очков).

Задача № 2: «В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна. Найти наибольшее число членов данной последовательности» (см. [2, p.5]).

Обобщим данную задачу: Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия (*):

1) сумма любых n идущих подряд членов — S_n — отрицательна;

2) сумма любых k идущих подряд членов — S_k — положительна.

Какое *максимальное* значение — $N_{\max}$ — может принимать число членов данной последовательности?

I. Предположим, что $k > n$. *Очевидно,что если решение задачи существует, то числа n и k не могут быть кратны друг дугу.* Для допустимых значений параметров n и k *первую часть решения искомой задачи можно обосновать следующей* теоремой № 1:

Теорема № 1. Максимальное число членов искомой последовательности не больше, чем $N_{\max} = n + k - d - 1$, где $d = (n, k)$ и k не делится на n.

Доказательство. Пусть наибольший общий делитель чисел n и k равен $d = (n, k) \neq n$. Тогда $n > d$. Обозначим $n = n_1 \cdot d$, $k = k_1 \cdot d$; $(k_1, n_1) = 1$. Покажем, что число $N_{\max}$ увеличить нельзя. Используем для доказательства «метод от противного». Предположим, что в последовательности $N_1 = n + k - d = d \cdot (k_1 + n_1 - 1)$ членов.

1.1. Разобьем последовательность длины N_1 на $(k_1 + n_1 - 1)$ групп по d чисел в каждой группе. Согласно условию задачи получаем, что сумма чисел в любых k_1 группах — $S_k = S_{k_1 \cdot d} > 0$, а сумма чисел в любых n_1 группах — $S_n = S_{n_1 \cdot d} < 0$.

1.2. Рассмотрим любые $(k_1 - n_1)$ групп подряд идущих членов нашей последовательности. Остальных групп из членов последовательности осталось $(k_1 + n_1 - 1) - (k_1 - n_1) = 2n_1 - 1$. Так как число $(2n_1 - 1)$ — нечетное, то при любом разбиении этого числа на два слагаемых одно из них будет не меньше n_1. Значит, всегда есть возможность выбранные нами наугад $(k_1 - n_1)$ групп членов последовательности дополнить слева (или справа, где это возможно) ещё n_1 группами чисел.

1.3. Дополним выбранные $(k_1 - n_1)$ групп членов n_1 группами чисел.

1.4. Пусть S_{k-n} — сумма чисел в выбранных $(k_1 - n_1)$. Из условия ($S_{n_1 \cdot d} = S_n < 0$ и $S_{k_1 \cdot d} = S_k > 0$) следует, что $S_{(k_1 - n_1) \cdot d} > 0$. То есть сумма чисел в любых выбранных $(k_1 - n_1)$ группах положительна.

1.5. Переопределим условие задачи. Для последовательности $N_1 = n + k - d = d \cdot (k_1 + n_1 - 1)$ действительных чисел, которые записаны в строчку и разбиты на $(k_1 + n_1 - 1)$ групп по d чисел в каждой группе, выполняются следующие условия:

1.4.1) сумма членов в n_1 изначально определённых группах — S_n — отрицательна;

1.4.2) сумма чисел в любых изначально выбранных $(k_1 - n_1)$ группах $S_{(k_1-n_1)\cdot d} > 0$;

Заметим, что замена числа групп k_1 на число групп $(k_1 - n_1)$ соответствует шагу в алгоритме Евклида. Повторим это рассуждение необходимое число раз в соответствии с алгоритмом Евклида. Так как $(k_1, n_1) = 1$, то получим, что сумма любых d чисел *в одной группе* должна быть положительна или всегда отрицательна. Так как $k = k_1 \cdot d$ и $n = n_1 \cdot d$, то получаем тогда, что числа S_k и S_n будут одного знака. Противоречие.

II. Предположим, что существует последовательность максимальной длины, которая в общем виде состоит из двух переменных $x \,\&\, y$ и удовлетворяет условию (*). Предположим, так же, что каждая подпоследовательность из n членов будет содержать, например, b_1 членов, равных y, и a_1 членов, равных x. Аналогично, пусть каждая подпоследовательность из k членов будет содержать, например, b_2 членов, равных y, и a_2 членов, равных x. Составим для $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, $a_1 + b_1 = n$, $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, $b_2 + a_2 = k$ систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = S_n = -b, \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = S_k = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{b \cdot a_2 + a \cdot a_1}{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}, \\ x = \dfrac{a \cdot b_1 + b \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1}, \\ b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 \neq 0. \end{cases} \qquad (C)$$

Теорема № 2. Система составленных уравнений всегда совместна.

Доказательство. Пусть $a_1 > 0$, $b_1 > 0$; $a > 0$, $b > 0$; $b_2 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 + a_1 = n$, $b_2 + a_2 = k$.

1. Используем метод от противного. Предположим, что $b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1 = 0$ (*). Тогда из этого равенства и данных системы (C) получим:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = t \cdot b_2, \\ a_1 = t \cdot a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 + b_1 = t \cdot (a_2 + b_2) \Leftrightarrow n = t \cdot k;$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k} < 1,\ a_1 < n,\ b_1 < n,\ a_2 < k,\ b_2 < k, a_1 + b_1 = n,\ a_2 + b_2 = k.$$

2. Если $d = (n, k) = 1$, то дробь $\frac{n}{k}$ несократима. Поэтому, равенство $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k}$ невозможно. А значит, в этом случае, предположение (*) ложно.

3. Если $d = (n, k) > 1$, то из равенства $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n}{k}$ и условия $a_1 < n$, $b_1 < n$, $a_2 < k$, $b_2 < k$, $a_1 + b_1 = n$, $a_2 + b_2 = k$, получаем, что n делится на a_1 и на b_1, а k делится на a_2 и b_2. То есть $n \geq 2a_1$ и $n \geq 2b_1$, $k \geq 2a_2$ и $k \geq 2b_2$. Получаем, что $n \geq a_1 + b_1 = n$ и $k \geq a_2 + b_2 = k$. Это означает, что существует только одна возможность: $a_1 = b_1 = \frac{n}{2}$ & $a_2 = b_2 = \frac{k}{2}$. То есть, количество отрицательных и положительных членов в каждой группе из n членов равны между собой. И количество отрицательных и положительных членов в каждой группе из k членов равны между собой. Но тогда мы неверно задали параметры a & b, которые в этом случае будут разных знаков. Противоречие. Таким образом, при выполнения условия $k > n$ и k не делится на n, $a_1 \cdot b_2 \neq b_1 \cdot a_2$.

III. Перейдём к описанию алгоритма построения подходящего примера. Будем строить последовательность максимальной длины, которая в общем виде состоит из двух переменных x & y и удовлетворяет условию (*). Искомый алгоритм состоит из следующих шагов:

3.1. Если k и n такие, что $(k - n) = d = (n, k) \geq 1$, то $N_{\max} = 2 \cdot n - 1$. Тогда искомая последовательность может быть определена в форме таблицы:

a_1	a_2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{n-1}	a_n	a_{n+1}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{2n-2}	a_{2n-1}
x	x	x	x	x	x	y	x	x	x	x	x	x

Соответствующая система (C) в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} (n-1) \cdot x + 1 \cdot y = -b, \\ n \cdot x + 1 \cdot y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (n-1) \cdot a + n \cdot b, \\ x = a + b. \end{cases} \qquad (C_1)$$

3.2. Если $(k-n) > d = (n,k) \geq 1$, то:

3.2.1. Запишем $j \geq 2$ *первых* шагов алгоритма Евклида, полагая $n = n_1$, $k = k_1$:

$$(k_1, n_1) = (k_1 - n, n_1) = \cdots = (k_{j-1}, n_{j-1}) = (k_j, n_j), \ |k_j - n_j| = d.$$

3.2.2. Если, например, $k_j = n_j + d$, то рассмотрим нечётное число $N_j = k_j + n_j - d - 1 = (n_j + d) + n_j - d - 1 = 2 \cdot n_j - 1$. Первую часть последовательности заполним по правилу 3.1 ($a_{n_j} = y$).

3.2.3. Пусть, например, для некоторых смежных пар $(k_{i-1}, n_{i-1}) = (k_i, n_i)$ выполняется: $k_{i-1} = k_i + n_i$, $n_{i-1} = n_i$, $i = 2, 3, \ldots, j$. Достроим $(j+2-i)$-ю часть последовательности, соответствующей (k_{i-1}, n_{i-1})-ой паре, с помощью ровно $n_i = n_{i-1}$ членов. Их мы получаем с помощью параллельного сдвига (*переноса*) последних $n_i - n_{i-1}$ членов из *объединения предыдущих* $(j+1-i)$ частей последовательности.

3.2.4. Выполним подобное достроение последовательно для всех $i = j, (j-1), \ldots, 2$. Получим последовательность только с двумя неизвестными (x, y). Их определим с помощью системы (C). Приведём пример (задача № 2) для, $n = n_1 = 7$ & $k = k_1 = 11 \Rightarrow (11, 7) = (7, 4) = (4, 3) \Rightarrow j = 3$.

- Первая часть последовательности состоит из $N_1 = 3 + 4 - 1 - 1 = 5$ членов и построена в соответствии 3.1

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x											

- Вторая часть последовательности состоит из 4 членов, так как пара $(3, 4)$ получена из пары $(3+4, 4)$. Эту часть получим с помощью параллельного сдвига последних $n_2 = n_3 = 4$ членов из первой части последовательности. Рассмотрим теперь объединение двух частей.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x	x	y	x	x							

- Третья часть последовательности согласно алгоритма Евклида состоит из 7 членов, так как пара $(7, 4)$ получена из пары $(4+7, 7)$. Её получим с помощью параллельного сдвига последних $n_1 = 7$ членов из объединения двух первых частей последовательности.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
x	x	y	x	x	x	y	x	x	y	x	x	x	y	x	x

- Для найденных значений $a_1 = 5$, $b_1 = 2$, $a_2 = 8$, $b_2 = 3$ составим и решим систему уравнений, например, для значений $a = b = 1$:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 8x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{8+5}{2 \cdot 8 - 3 \cdot 5} = -13, \\ x = \dfrac{2+3}{2 \cdot 8 - 3 \cdot 5} = 5. \end{cases}$$

Получим искомую последовательность (Ответ для задачи № 2).

5	5	-13	5	5	5	-13	5	5	-13	5	5	5	-13	5	5

IV. Обоснование сформулированного в III алгоритма. Пусть

$$(k_1, n_1) = \cdots = (k_i + n_i, n_i) = (k_i, n_i) = \cdots = (k_{j-1}, n_{j-1}) = (k_j, n_j).$$

Предположим, что для подпоследовательности, состоящей из $(j+1-i)$ частей, выполняется условие: в любой выборке из k_i членов, ровно b_2 членов равны числу y, и в любой выборке из n_i членов ровно b_1 членов так же равны числу y.

Теорема № 3. Если к $(j+1-i)$ частям последовательности добавить согласно очередного шага алгоритма $(j+2-i)$-ю часть, которая соответствует $(i-1)$-й паре алгоритма Евклида для заданных чисел, $(k_i + n_i, n_i)$, то для всех полученных $N_{i\,\max} = (k_i + n_i) + n_i - d - 1$ чисел будет выполняться условие:

- в любой выборке из n_i членов ровно b_1 членов равны числу y,
- в любой выборке из $(k_i + n_i)$ членов, $(b_2 + b_1)$ членов равны числу y.

Доказательство. Согласно указанного алгоритма $(j + 2 - i)$-ю часть последовательности, состоящую из n_i членов заполняем с помощью параллельного сдвига последних n_i членов из предыдущих $(j + 1 - i)$ частей последовательности. Очевидно, общее число членов станет $N_{i\max} = (k_i + n_i) + n_i - d - 1$, что соответствует установленному ранее закону. Так как каждый член, равный числу y, сместился ровно на n_i членов, то для достроенной последовательности так же выполняется условие: сумма любых n_i членов последовательности равна одному и тому же числу b. Покажем, что в любой выборке из $(k_i + n_i)$ членов, ровно $(b_2 + b_1)$ равны числу y. В самом деле, для $(k_i + n_i)$ стоящих справа-налево членов получаем b_2 членов, равных y в выборке из k_i членов, а b_1 членов, равных y в любой выборке из n_i членов. Это же число не измениться при смещении на любое возможное число справа-налево по причине того, что предыдущей части последовательности в любой выборке из k_i членов содержится ровно b_2 членов, равных числу y, а в достроенной последовательности в любой выборке из n_i членов содержится ровно b_1 членов равных y. Этим самым обосновывается индукционный переход от i к $(i-1)$, когда $i = j$, $(j-1), \cdots, 2$. Ранее было показано, что при $1 = j$ искомая часть последовательности существует и удовлетворяет условию задачи.

Задача № 3. О данной последовательности действительных чисел известно следующее (R):

1. Все члены этой последовательности записаны в строчку.
2. Сумма любых записанных подряд $n = 10$ чисел равна $-b$, $b > 0$.
3. Сумма любых записанных подряд k чисел равна a, $a > 0$.
4. Известно, что максимально возможное число членов данной последовательности $N = 23$ члена.

Необходимо определить значение числа k. Привести пример.

Приведём краткое решение задачи № 3.

- Если $(n, k) = 1 \Rightarrow N_{\max} = 23 = 10 + k - 2 \Leftrightarrow 15 = k$. Но $d = (10, 15) = 5 \neq 1$. Противоречие.
- Рассмотрим $(10, k) = d > 1 \Rightarrow 23 = 10 + k - d - 1 \Rightarrow k - d = 14$,
$$d = (10, k) = (10, k - d) = (10, 14) = 2; \qquad 23 = 10 + k - 2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = k.$$
- $(10, 16) = (6, 10) = (4, 6) \Rightarrow j = 3$.
- С помощью алгоритма, описанного выше составим последовательность членов в общем виде:

x	x	x	y	x	x	x	x	x	y	x	x	x	y	x	x	x	x	x	y	x	x	x

Составим соответствующую систему уравнений, пользуясь, например, условием (R) при $a = 4$, $b = 2$:
$$\begin{cases} 13x + 3y = 4, \\ 2y + 8x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = -29. \end{cases}$$
Ответ: $7, 7, 7, -29, 7, 7, 7, 7, 7, -29, 7, 7, 7 - 29, 7, 7, 7, 7, 7, -29, 7, 7, 7$.

Задача № 4. Для последовательности действительных чисел, составляющих множество M и записанных в строчку, выполняются следующие условия:

1. Сумма любых n идущих подряд членов — S_n — отрицательна.
2. Сумма любых k идущих подряд членов — S_k — положительна.

Известно, что максимальное число членов данного множества ровно $N = 30$. Найти максимум возможной разности $|k - n|$. Привести примеры, удовлетворяющие условию задачи.

Решение. Если $N = 30$, то $n + k - d - 1 = 30 \Leftrightarrow n + k = 31 + d$.

- Если $d > 1$, то $n = n_1 d$, $k = k_1 d$, $(n_1, k_1) = 1$. Тогда 31 делится на число $d > 1 \Rightarrow d = 31$. Получаем, что
$$n = 31n_1,\ k = 31k_1,\ \Rightarrow\ 31n_1 + 31k_1 = 62\ \Rightarrow\ n_1 + k_1 = 2\ \Leftrightarrow\ n = k.$$
Это указывает на отсутствие решения задачи в данном случае.

- Если $d = 1$, то $n + k = 32$. Тогда получим с помощью метода перебора:
$$\max(|k - n|) = 29 - 3 = 26.$$

Ответ: 26.

Примечание: если условие задачи изменить на следующее: «...Известно, что максимальное число членов данного множества не больше $N = 30$...», то решение задачи несколько изменится.

Ответ: 27.

Задача № 5 (для школьников старших классов и студентов). Про функцию $f(x)$ на отрезке $[0; 23]$ известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины 10 положителен, а по отрезку длины 16 отрицателен. Может ли такое быть? Как изменится ответ, если $x \in [0; 24]$?

Подсказка: да. Решение практически описано в решении задачи № 3. Функцию $f(x)$ следует определить, как ступенчатую, принимающую только два значения 7 и -29.

Задача № 6 (для студентов). Про интегрируемую функцию $f(x)$ на отрезке $[0, c]$ известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины n положителен, а по отрезку длины m отрицателен, $c > m > n > 0$.

а) Докажите, что $c < m + n$; b) докажите, что если m и n соизмеримы, т. е. $\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$ — несократимая дробь, p, q — целые числа, то оценку можно улучшить до $c < m + n - \frac{m}{q}$.

Решение. Из необходимого условия интегрирования функций следует, что $f(x)$ ограничена на $[0; c]$, т. е. существует $M > 0$, что $|f(x)| < M$ на $[0; c]$. Пусть $F(x)$ обозначает первообразную функцию функции $f(x)$. Определим на отрезке $[0; c - m]$ функцию $h(x) = F(x + m) - F(x) = \int\limits_x^{x+m} f(x)\,dx$. Очевидно, что функция $h(x)$ является непрерывной, кроме того, как следует из условия $h(x) < 0$, в частности $h(0) < 0$, $h(m) < 0$. В силу непрерывности на отрезке $[0; c - m]$ функция достигает максимального значения. Обозначим $\max\limits_{0 \le x \le c-m} h(x) = -B < 0$. Для любого $0 < d$, $k \in \mathbb{N}$, $kd \le c$, обозначим через $S_{d,k} = \int\limits_{(k-1)d}^{kd} f(x)\,dx$. Выберем натуральное число p, удовлетворяющее неравенству $p > \frac{2Mn}{B}$. Положим $d = \frac{n}{p}$, тогда очевидно $n = pd$, $d < \frac{B}{2M}$. Определим числа $q \in \mathbb{N}$ и $0 \le r < d$, чтобы $m = qd + r$.

Доказательство. а) Предположим $c \ge m + n$, тогда $(p + q)d \le c - r \le c$. Исходя из условий задачи получаем систему уравнений
$$\begin{cases} \int\limits_0^n f(x)\,dx = S_{d,1} + \dots + S_{d,p} = a_1, \\ \int\limits_d^{n+d} f(x)\,dx = S_{d,2} + \dots + S_{d,p+1} = a_2, \\ \dots\dots\dots \\ \int\limits_{qd}^{n+qd} f(x)\,dx = S_{d,q} + \dots + S_{d,p+q} = a_q; \\ \int\limits_0^m f(x)\,dx = S_{d,1} + \dots + S_{d,q} + r_{d,1} = b_1, \\ \int\limits_d^{m+d} f(x)\,dx = S_{d,2} + \dots + S_{d,q+1} + r_{d,2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ \int\limits_{pd}^{m+pd} f(x)\,dx = S_{d,p} + \dots + S_{d,p+q} + r_{d,p} = b_p, \end{cases} \qquad (**)$$

где

$$r_{d,k} = \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} f(x)\,dx, \quad 0 < a_i,\ b_j \le -B < 0.$$

Оценим

$$|r_{d,k}| \le \left| \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} f(x)\,dx \right| \le \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{m+kd-r}^{m+kd} M\,dx = Mr < Md < \frac{M}{2}.$$

Тогда

$$0 < \sum_{i=1}^{q} a_i = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} S_{d,i} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q} S_{d,i} = \sum_{j=1}^{p}(b_j - r_{d,j}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{p} b_j - \sum_{j=1}^{p} r_{d,j} \le -pB + \sum_{j=1}^{p} |r_{d,j}| < -pB + \frac{pB}{2} < 0.$$

Противоречие. Итак $c < m+n$.

Второй способ. Итак, «от противного» предположим $c \ge m+n$, обозначим через $\Phi(x)$ первообразную функцию функции $F(x)$. Тогда используя формулу Ньютона–Лейбница и учитывая условие задачи (интеграл от положительной функции положителен, от отрицательной отрицателен), получаем

$$0 < \int\limits_{0}^{m}\int\limits_{x}^{x+n} f(y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{m} (F(x+n) - F(x))\,dx = \Phi(m+n) - \Phi(n) + \Phi(0) =$$
$$= \int\limits_{0}^{n} (F(y+m) - F(y))\,dy = \int\limits_{0}^{n}\int\limits_{y}^{y+m} f(x)\,dxdy < 0$$

противоречие. Итак $c < m+n$. Что и требовалось доказать.

Как видно из доказательства, переменные интегрирования попали в пределы интегрирования.

b) Докажите, что если m и n соизмеримы, т. е. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь p, q — целые числа, то оценку можно улучшить до $c < m + n - \frac{m}{q}$.

Решение. Исходя из условия соизмеримости, положим $d = \frac{m}{q} = \frac{n}{p}$, очевидно $n = pd$ и $m = qd$. Пусть $c \ge m + n - \frac{m}{q} = (p+q-1)d$. Рассмотрим последовательность состоящую из $(p+q-1)$ членов: $S_{d,1}, S_{d,2}, \ldots, S_{d,p+q-1}$. Эта последовательность удовлетворяет следующим свойствам:

1. Сумма любых подряд идущих p её членов положительна.

2. Сумма любых подряд идущих q её членов отрицательна.

Но в соответствии с теоремой № 1 в такой последовательности может быть не более $p+q-(p,q)-1$ членов, где (p,q) — наибольший общий делитель чисел p и q. Противоречие. Что и требовалось доказать.

Задача № 7. Члены некоторой последовательности выписываются в одну строку. Известно, что для любых натуральных n & k выполняются следующие условия (*):

1. Сумма любых k подряд идущих чисел будет равна положительному числу.

2. Сумма любых n подряд идущих чисел будет равна отрицательному числу.

Может ли при $k = 7$, $n = 4$ член $a_s < 0$? Выяснить знак произведения $a_4 a_5 a_6$.

V. Ещё одно обобщение.

5.1. Положительным ответом на вопрос первой задачи может быть, например, последовательность: $2, 2, 2, 2 - 9, 2, 2, 2, 2, -9, 2, 2$.

5.2. В общем виде существует и чисто алгебраическое решение данной задачи. (См. [1], р.105). Рассмотрим, например, систему из $(k + n - 2d)$ уравнений и $(k + n - d - 1)$ неизвестных.

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = a_1, \\ x_2 + \cdots + x_{n+1} = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{kd} + \cdots + x_{k+n-d-1} = a_{kd}; \\ x_1 + \cdots + x_k = b_1, \\ x_2 + \cdots + x_{k+1} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{nd} + \cdots + x_{k+n-d-1} = a_{nd}. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет максимально возможный ранг $r = (k + n - 2d)$. Если даже взять значения всех $a_i > 0,\ 1 = 1, \ldots, k - d$ и $b_j > 0,\ j = 1, \ldots, n - d$, то система всегда совместна. При $d = 1$ она имеет ровно одно решение. Таким образом всегда можно найти одну строчку, удовлетворяющую требованию задачи.

Литература

[1] Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Работ, А. Л. Тоом «Заочные математические олимпиады», М.: Наука, 1987.

[2] «Международные математические олимпиады». Сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузминская. М.: «Дрофа», 2001.

Dr. Peter Samovol, lecturer of mathematics,
mathematics club "Youth Kidumatica".
E-mail: Pet12@012.net.il

Dr. Mark Applebaum,
Kaye Academic College of Education,
Beer- Sheva, Israel.
E-mail:Amark@012.net.il

Математических и специальных наук школа

В. В. Вавилов

В 2003 году исполнилось сто лет со дня рождения выдающегося ученого современности, гуманиста и патриота академика Андрея Николаевича Колмогорова и сорок лет со дня основания физико-математической школы-интерната №18 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. В 1988 году школе закономерно и по праву было присвоено имя А.Н. Колмогорова, ее основателя и руководителя, для которого она стала одним из главных дел жизни. Просто невозможно не отметить, как переплелись имена этих двух классиков науки – М.В. Ломоносова и А.Н. Колмогорова. Основная черта, их объединяющая, стала традицией Московского университета и его преподавателей: отбор талантов, создание условий для их развития, непосредственное участие в этом деле широкой научной общественности.

Немного истории

Сейчас трудно себе представить, что не так давно у нас мало кого на государственном уровне интересовали задачи поиска, развития и поддержки талантливой школьной молодежи, проявляющей интерес к изучению естественных наук; до начала 60-х годов прошлого столетия господствовала педагогика "всеобщего равенства", "идея" полной унификации всех школ и среднего образования вообще. Поэтому при открытии в Москве, недалеко от Филей, в Давыдково, физико-математической школы — интерната при МГУ ("Мы живем в Филейной части белокаменной Москвы" — первые строки школьного гимна) были преодолены многие бюрократические препятствия.[1]

Это было бы практически неосуществимым делом, если бы организацией школы при МГУ, и подобных школ в г.г. Новосибирске, Ленинграде и Киеве, не занялись (прямо или косвенно) выдающиеся ученые, ясно отдающие себе отчет в государственной важности работы с талантливой молодежью и необходимости реализации на практике принципов дифференциации обучения в старших классах – А.Н. Колмогоров, М.В. Келдыш, И.Г. Петровский, П.С. Александров, М.А. Лаврентьев, И.К. Кикоин, И.М. Гельфанд, Б.В. Гнеденко, Е.Б. Дынкин, С.Л. Соболев, А.А. Ляпунов, Н.И. Ахиезер, С.Т. Беляев, В.М. Глушков, А.И. Маркушевич, В.С. Смирнов, Д.К. Фаддеев, Д.В. Широков и многие другие.

Физико-математическая школа-интернат №18 Мосгороно при МГУ им. М.В. Ломоносова была открыта 2 декабря 1963 года и задумана она была, прежде всего, как *школа научного*

[1] Как известно, первая российская школа с углубленным изучением математики была открыта в Москве Петром I в 1701 году, которая называлась "Математических и навигацких наук школа". Надеюсь, что у читателя не возникнет возмущения по поводу названия статьи; наша школа также уникальна, специализированна и в Москве. Эту работу поддержал "Клуб ФМШ Колмогорова", объединяющий выпускников, преподавателей и ветеранов Специализированного Учебно-Научного Центра МГУ и школы им. А. Н. Колмогорова (club-fmsh@mail.ru). Раньше эта школа называлась физико-математической школой-интернатом 18 Мосгороно при МГУ.

творчества для молодежи, куда на конкурсной основе принимаются школьники из Центральной России. Школа небольшая (около 350 учащихся), в ней организованы только десятые и одиннадцатые классы; имеется как двухгодичный цикл обучения, так и одногодичный. Специализаций обучения в настоящее время пять: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая; для одногодичного обучения — только физико-математическая. Система обучения лекционно-семинарская и приближена к вузовской. Большое внимание на всех специальностях отводится информатике и практической работе на компьютерах. На каждом уроке по профилирующим дисциплинам работают одновременно два преподавателя, что позволяет обеспечить индивидуальный подход в процессе обучения и значительно повысить его эффективность. Говоря *о школе научного творчества,* мы имеем в виду не только профилирующие дисциплины; выступая на одном из заседаний педагогического совета школы А.Н. Колмогоров специально выделял эту учительскую задачу (см. [3]): *"Существенно, что здесь в интернате, школьники приходят в соприкосновение с творческой мыслью. Это наш запрос, но по всем предметам! Метод работы — имитация научного исследования, шаг за шагом находить, вычислять нечто..., а не давать готовенькое..."*.

Начиная с 1988 года на базе школы-интерната №18 был организован (постановлением правительства за №1241 от 21.10.88) Специализированный учебно-научный центр МГУ, который стал самостоятельным структурным подразделением Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова со всеми его атрибутами: возникло звание "учащийся Московского университета" с соответствующим удостоверением, правами и обязанностями, появились кафедры, выпускники школы при наличии рекомендации ученого совета Центра зачисляются в МГУ без экзаменов и т.д.

Экзаменационные рифы

Каждый год происходит прием новых учащихся, который начинается в апреле. Для его осуществления проводятся вступительные экзамены (письменные и устные), причем в местах проживания абитуриентов. Часто окончательное решение о зачислении принимается после работы летней школы для абитуриентов, куда приглашаются все успешно выдержавшие вступительные экзамены. Уже при проведении вступительных экзаменов по математике мы, в первую очередь, стремимся отобрать среди наших абитуриентов тех школьников, которые не только обладают определенной суммой знаний, но и *проявляют стойкий интерес к учебе*, умеют нестандартно мыслить, хорошо восприимчивы к новому материалу. О задачах по математике, физике и химии, которые в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в школу, можно судить по материалам статей и книг.[2]

Летняя физико-математическая школа (ЛФМШ) работает с 1963 года, и идея ее создания возникла одновременно с идеей об организации самой ФМШ при МГУ. Программа обучения в ней строится так, чтобы помочь нашим будущим учащимся подготовится к восприятию основной программы в школе-интернате. В первые годы летние школы проходили в Красновидово, затем в г. Пущино на Оке Московской области; в последнее время, когда они проводятся, — на базе школы-интерната им. А.Н. Колмогорова.

Организация работы летней школы и другие многочисленные хлопоты целиком лежат на спецшколе-интернате. А.Н. Колмогоров работал в Красновидовских летних школах в 1964, 1965, 1968 и 1970 годах, в г. Пущино на Оке — в 1971, 1972, 1975 и 1977 годах. В ЛФМШ — пятидневная рабочая неделя. Система занятий, как правило, лекционно-семинарская. Лекций немного: 1-2 часа по каждому предмету в неделю. Учащиеся занимаются 6 часов: четыре часа до обеда и два часа после обеда. Традиционно проводятся различные олимпиады и тестирования. Дополнительно к обязательным занятиям для особо интересующихся школьников работает несколько кружков. В каждой группе работают два - три преподавателя математики, которые одновременно присутствуют на занятиях, так что во время работы на уроке преподаватель беседует с каждым школьником несколько раз. Тесное общение между преподавателями и школьниками,

[2] В следующем номере журнала "Математическое образование" планируется к публикации статья "Математическая библиография", в которой будет отражен широкий перечень публикаций о школе и опыте преподования математики в ней.

конечно, не ограничивается только уроками, школьники в любое время могут получить нужную консультацию. Благодаря такой организации, занятия в ЛФМШ проходят в атмосфере дружбы, взаимопонимания и увлеченности.

Содержание курсов в летней школе всегда отбирается так, чтобы разница в уровне подготовки учащихся как можно меньше сказывалась на результатах их работы в ЛФМШ. Отбор учебных материалов происходит таким образом, чтобы обучение было интересным и доступным для всех, а его изучение создавало атмосферу поиска, увлеченности и *развития интереса к проведению, пусть небольших, работ исследовательского характера.* По каждому предмету проводятся контрольные работы, а в конце — зачеты. По итогам работы в летней школе лучшие учащиеся зачисляются в школу им. А.Н. Колмогорова. ЛФМШ является удобной базой для экспериментирования с содержанием и методикой обучения школьников, интересующихся математикой и физикой, и поэтому в летней школе нет раз и навсегда заданных программ.

Курс А.Н. Колмогорова (Пущино-78) для 9-х классов (ныне десятых) состоял из 5 лекций. Его содержание сводилось (по сохранившимся конспектам) к следующему: задача о камне, брошенном вверх; радиоактивный распад; первообразная и интеграл; формула Ньютона-Лейбница; задача о прыгающем мячике; гармонические колебания Циклоида; векторнозначные функции и их производные (практикум); теория часов (практикум).

Другой из курсов ЛФМШ-78 назывался “Комбинаторика и теория групп” (лектор — А.Н. Земляков). Его программа содержала: отображения и подмножества конечных множеств; сочетания, перестановки, размещения, разбиения; группы вращений плоских и пространственных фигур; комбинаторика раскрасок; группы подстановок и их подгруппы; представление об изоморфизме групп. Основная цель курса — на доступном материале познакомить учащихся с одним из важнейших понятий современной алгебры, понятием группы. Эта тема начинается с самых простых и наглядных примеров: группы самосовмещений прямоугольника, правильных многоугольников, тетраэдра и куба. Эти группы выступали в роли характеристики степени симметрии правильных фигур. Интересны возникающие здесь задачи о числе геометрически различных раскрасок вершин таких фигур. Интерпретируя вращения фигур с помощью перестановок вершин, отыскиваются композиции поворотов, подводя учащихся ко второму основному примеру — группам подстановок. Имея перед собой конкретные примеры, школьники свободно обращаются с общими понятиями группы, подгруппы, циклической группы и т.п. Весь этот материал, несмотря на серьезность математического содержания, доступен учащимся абитуриентам и с интересом ими осваивается.[3]

О содержании некоторых других курсов ЛФМШ можно судить по воспоминаниям о летней школе в Красновидово, о летней школе на Рубском озере под г. Иваново 1970 года и о летней школе, проводившейся на базе школы им. А.Н. Колмогорова в 1999 году.

О математических курсах

В школе три математические дисциплины: алгебра, геометрия и математический анализ (9 часов в неделю, по три на каждый предмет, из которых один час — лекционный). В массовой школе курсы алгебры и математического анализа объединены в один. Мы же придерживаемся той точки зрения, что они должны изучаться раздельно. Стабильных математических программ, в строгом понимании, в школе не существует даже в рамках одной специализации (физико-математические классы разделены на два потока), не говоря уже обо всех специализациях вместе взятых. Все программы индивидуальны и отражают вкусы и опыт работы (не только школьный) лектора, а также накопленные опыт и традиции, сложившиеся в нашей школе. Конечно, эта индивидуальность программ сказывается только на 20-25 процентов от всего отводимого на учебную дисциплину учебного времени, а в остальном — это сложившаяся и довольно устойчивая тематика. Школа стремится к тому, чтобы все занятия (по всем предметам!) не только увеличивали сумму знаний учащихся, но и систематически воспитывали те качества, которые необходимы любому человеку: уважение к коллективу, ответственное отношение к делу,

[3] См. статью А.Н.Землякова ”Алгебра*” (Журнал ”Математическое образование” 4(27), 2003 г. и 2(29), 2004 г.), в которой опубликован сильно расширенный вариант этого курса.

привычка к систематическому труду, стремление к качественному выполнению работы, поиску нового и самостоятельности мышления, упорству в достижении цели.

Отсутствие единой основы математической подготовки у вновь поступивших обязывает нас широко использовать индивидуальные подходы в процессе обучения. Это достигается тем, что в довольно небольшом классе работают одновременно два преподавателя, один из которых проводит общую линию урока, а оба вместе непосредственно за рабочими столами учеников отвечают на их вопросы, разъясняют непонятные места, подсказывают, поясняют, рассказывают что-то интересное и новое именно для этого ученика. Наличие двух преподавателей в классе — это важный момент в организации всего обучения специальным дисциплинам. Это, конечно, дорогое удовольствие для Московского университета, но оно стоит того — школа качественно готовит его будущих студентов и аспирантов, а в конечном итоге, и будущее научное поколение страны.

Курс алгебры двухгодичного потока (физико-математического отделения) включает в себя довольно обычный для нас набор основных тем: математическая индукция; комбинаторика; алгоритм Евклида и основная теорема арифметики; арифметика остатков; рациональные и иррациональные числа; многочлены; комплексные числа и отображения комплексной плоскости; неразрешимость трех классических проблем; алгебраические неравенства, уравнения, системы.

Алгебраическая часть курса в одногодичном потоке имеет свою специфику, хотя бы уже потому, что школьники приходят к нам на один год обучения с более хорошей подготовкой, с более четко выраженными интересами. Журнал “математическое образование” в своих двух номерах 15 и 16 (в 2000 и 2001 годах) опубликовал материалы А.Н. Землякова “Тезисы по алгебре”, которые лучше чем, какие-либо слова, расскажут и о программе по алгебре в этом потоке, и о той манере преподавания, которая там сложилась под влиянием А.Н. Землякова. А.Н. Земляков — выпускник школы, ее золотой медалист, работал в школе в качестве преподавателя математики в 1969 - 1984 годы (в одногодичном потоке с 1971 г.), а начал он работать в школе тогда, когда был еще студентом третьего курса механико-математического факультета МГУ.

Алгебра, как учебный предмет в массовой средней школе, довольно далека от современной алгебры как науки, что вполне естественно, т.к. на самом деле в этом школьном курсе сильно переплетаются элементы трех математических дисциплин (“три великие А”, по выражению Ф. Клейна, - Арифметика, Алгебра, Анализ). Наш алгебраический курс, в основном, ориентирован не на теории и аксиоматику, а на конкретные ситуации, примеры и задачи (в рамках первых двух “великих А”). Конечно, на лекциях, да и на семинарских занятиях, доказываются теоремы, закладываются основы теорий, но все-таки лицо дисциплины определяют те задачи, которые выносятся на упражнения. Там, где это целесообразно, на типичных примерах рассматриваются различного рода алгебраические структуры. Много внимания уделяется задачам, лежащим на стыке алгебры и теории чисел, геометрии, математического анализа. Стержневой идеей курса, его стержневым понятием является понятие уравнения. Курс содержит значительные исторические экскурсы, служит расширению кругозора и *повышает математическую культуру* учащихся. Становлению этой дисциплины в нашей школе способствовали основные и специальные лекционные курсы В.И. Арнольда, А.М. Степина, А.А. Егорова, А.Н. Землякова, Т.Н. Трушаниной, С.Б. Гашкова, О.И. Василенко, А.А. Русакова, А.В. Устинова, В.А. Колосова и др.

Общие цели изучения ***курса геометрии*** в школе им. А.Н. Колмогорова мало, чем отличаются от тех основных целей, которые пытаются достигнуть в массовой средней (да и высшей) школе. Если говорить о них коротко, то это изучение свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве, формирование пространственных представлений в широком понимании этого слова, развитие логического мышления, подготовка аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин.

Интересен был лекционный курс геометрии А.Н. Колмогорова, который он дважды читал для вновь поступивших в школу-интернат (тогда — для девятиклассников); затем он был положен в основу геометрических курсов, которые в течение ряда лет читали В.Н. Дубровский, А.Н. Земляков, В.В. Вавилов и др. Колмогоровский цикл лекций знакомил учащихся с глубокими математическими идеями, был завершенным, он (как, видимо, никакой другой курс) эффективно *приобщал слушателей к самостоятельным исследованиям и к научной работе*. Этот курс лекций, вместе с подобранными к нему упражнениями, сохранился и ждет своей публикации. На лекциях сначала вводилась аксиоматика аффинной и проективной плоскостей. Затем строились различные модели таких плоскостей, включая конечные геометрии; анализировались независимость, непротиворечивость, полнота и минимальность выбранного набора аксиом. Изучалась возможность построения конечных плоскостей. Строился пример Гильберта недезарговой плоскости. Доказывалась теорема о пополнении аффинной плоскости до проективной. В аффинном и проективном пространствах доказывались основные теоремы стереометрии, которые выводятся только из аксиом соединения. Затем изучались параллельные переносы, векторы и операции над ними, преобразования подобия и их классификация.

А.Н.Колмогоров, В.В.Вавилов в 1970 году.

Учебный план курса геометрии сейчас и его реализация при двухгодичном обучении сильно отличается от учебных планов средних школ (как массовой, так и специализированной). Главное отличие состоит в том, что в десятом классе у нас проходит *повторительный курс планиметрии* и только в одиннадцатом классе изучается систематический курс стереометрии (иногда этот курс начинается во втором полугодии десятого класса - это зависит, в основном, только от лектора курса). Такой учебный план нам позволяет не только повторить и систематизировать знания, навыки и умения, полученные учащимися ранее, но и расширить объем знаний, уделить особое внимание конкурсным экзаменам в вузы, развить интерес к изучению математики, реализовать на практике принципы обучения, связанные *с повышением интереса к изучению математики и развитием математической культуры школьников*. Кроме того, такая возможность преподавания позволяет уделить более серьезное внимание по-настоящему прикладным вопросам (а не только к так называемым задачам с практическим содержанием) и использованию ПК, а также не забыть и “деятельность руками” (склеить, построить, сосчитать, нарисовать и т.д.); последнему обстоятельству служат задания математического практикума (см. ниже).

Так как курс по планиметрии в двухгодичном потоке является, в основном, повторительным, а наши *учащиеся уже проявили свой интерес* к изучению математики и физики, то это позволяет затронуть (иногда только на лекциях) многие вопросы, которые нацелены на качественно иной уровень геометрических знаний и представлений. Приведем тематический список лекций (он меняется и обновляется год от года), который сильно превышает тот, который удается реализовать на практике — он просто отражает наш опыт работы.

Так, например, читались следующие лекции: равносоставленность многоугольников; задача Дидоны; многоугольники на клетчатой бумаге; формулы Эйлера и Пика; классификация движений на плоскости (теорема Шаля); правильные паркеты; группы самосовмещений фигур; центр масс и его применение; классификация преобразований подобия; инверсия и шарнирные механизмы; конечные аффинные и проективные плоскости; теоремы Дезарга и Паскаля; пучок кривых второго порядка; принципы исключенного третьего, математической индукции, включения и исключения, Дирихле, непрерывности в геометрии.

При изучении стереометрии характер лекций, конечно, меняется (курс этот учащимися изучается впервые и не за два учебных года, как в массовой школе, а за один), однако наряду с обязательной частью программы на лекции выносятся и некоторые дополнительные темы. Например, такие: геометрия тетраэдра; седлообразная поверхность; две проекции; конические сечения; многогранники, теоремы Эйлера и Коши; правильные многогранники и их группы самосовмещений; неравносоставленность куба и правильного тетраэдра; объем тетраэдра; элементы сферической геометрии и тригонометрии; геометрия сфер; задача о тринадцати шарах; алгебра скользящих векторов; принцип Кавальери; теоремы Гюльдена об объемах; площадь поверхности и пример Шварца.

Материалы А.Н. Колмогорова к лекциям.

В разные годы геометрическими курсами руководили А.Н. Колмогоров, А.Б. Сосинский, В.Б. Алексеев, А.Н. Звонкин, А.М. Абрамов, А.Н. Земляков, А.П. Веселов, В.Н. Дубровский, В.В. Вавилов, М.В. Смуров, Ю.П. Соловьев, Н.П. Долбилин, С.А. Богатый, В.Ф. Бутузов и др.

Курс ***“Математический анализ”*** довольно стабилен и наиболее устойчив в школе. И в то же самое время, при его реализации возникают наибольшие дискуссии и хлопоты. Здесь три главные проблемы. Первая – это строгость изложения курса и его уровень; по этому поводу и методики его преподавания А.Н. Колмогоров всегда считал, что изложение анализа должно быть доступным и наглядным, и этого тезиса мы придерживаемся и сейчас. Он писал: *“Опыт наглядного преподавания начал анализа говорит, что эти начала могут быть изложены в форме, в которой они совсем не воспринимаются как что-либо более трудное, чем обычный, чисто алгебраический материал”.* Вторая причина - самоуверенность некоторых преподавателей: “что-что, а уж математический анализ, да еще на уровне средней школы, мы знаем!”. А третья причина связана с желанием избежать значительного дублирования университетских программ.

При постановке этого курса, особенно в первые 10-15 лет существования школы, было много экспериментов, которые касались не только конкретных тем, но и общей идеологии курса. А.Н. Колмогоров, например, в одном из своих экспериментальных курсов анализа еще в шестидесятых годах попытался в рамках курса построить теорию вещественных и комплексных чисел, используя операторный подход. В другой раз, лекции вводного курса анализа содержали теорию действительных чисел, основанную на аксиоматике скалярных величин, им же и разработанную. От этого, в целом, отказались, и здесь не место для подробного анализа причин, но главное то, что, во-первых, пятнадцатилетние учащиеся еще не готовы к восприятию такого уровня строгости и абстракций (и не только по своему общему развитию), а во-вторых, - при таком подходе тратится слишком много учебного времени на тему, которая в глазах большинства детей (да и некоторых преподавателей) довольно скучна. А в школе, да еще специализированной, *должно быть всегда интересно учиться.* Сейчас действительные числа вводятся как бесконечные десятичные дроби, которые возникают в процессе измерения, но акцент на упражнениях делается на рациональные числа и представление их в виде бесконечных десятичных периодических дробей (длина периода, операции над такими дробями и т.д.). Принцип вложенных отрезков (или его эквиваленты), как правило, постулируется. Специальный раздел посвящен приближенным вычислениям и работе с погрешностями.

Предел последовательности и предел функции — главнейшие и основные понятия анализа. Начала анализа стали изучаться в массовой средней школе около тридцати лет тому назад и за это время этот курс претерпел значительную инволюцию: от серьезного теоретического уровня, до уровня рецептурного, от введения строгого понятия предела до исключения из употребления самого слова "предел". В современном научном мире, большинство ученых и педагогов все-таки разделяет ту точку зрения, что введение в программы начал дифференциального и интегрального исчислений необходимо и целесообразно. Конечно, не в рамках традиционного подхода к преподаванию, начинающегося сразу с приобщения учащихся к формальному определению предела (последовательности, функции в точке). Мы всегда разделяли то мнение, что *воспитание будущих исследователей* в специализированной школе невозможно без изучения основ того аналитического аппарата, без которого человечество в своей практической деятельности бессильно. Начала математического анализа, имеющие большую образовательную ценность, несут в себе качественно новые возможности *для развития математической и общей интеллектуальной культуры учащихся.* В обучении математическому анализу мы придерживаемся генетического подхода, который характеризуется главным образом тем, что строгое математическое понятие вводится в рассмотрение не посредством его формального определения, а в процессе его формирования. Интересен, например, подход, когда для дискретных функций (последовательностей) строится соответствующий анализ (конечные разности, формулы суммирования, т.е. аналог формулы Ньютона-Лейбница, интерполяционный ряд Ньютона и т.д.) - это хороший пропедевтический прием для изучения в дальнейшем основных тем математического анализа.

Было время, когда знакомство с анализом начиналось с понятия непрерывности функции (сторонником такого подхода являлся О.С. Ивашев-Мусатов, ученик и последователь А.Н. Колмогорова). Мотивировалось это тем, что теория пределов представляет серьезные трудности для начинающего, и, во-вторых, тем, что каждый обучающийся интуитивно знаком с непрерывностью из повседневного опыта. В настоящее время формированию понятия предела последовательности и строгого его определения отведено достойное место, все определения доводятся до их точного значения, но акцента на технику вычислений пределов последовательностей нет.

Тема "Функции и графики" традиционно включает в себя, наряду с элементарными методами построения графиков и их преобразованиями, рассмотрение функций заданных неявно (например, кривые Уатта), заданных параметрически (фигуры Лиссажу, циклоиды), векторнозначные функции и их годографы и т.д. Имеется раздел, посвященный функциям двух переменных: задачи линейного программирования, геометрическое множество точек с заданными свойствами их координат, графические методы решений уравнений, неравенств, систем и задач с параметрами (метод сечений и метод областей).

Иногда рассматриваются итерации различных функций. В связи с требованиями программ по информатике, возникает необходимость раннего введения логарифмической функции; здесь мы часто определяем логарифм как площадь под гиперболой, широко используя интуицию и правдоподобные соображения и оставляя вопросы обоснования на будущее. Данная функциональная тема программы содержит много практикумов, предоставляет возможности широко использовать в процессе преподавания ПК и способствует активному изучению самого различного готового программного обеспечения.

При изучении раздела "Производная, интеграл и их применения" имеется практически неразрешимая проблема координации и реализации межпредметных связей курсов математического анализа и физики. Понятия производной и интеграла физики начинают активно использовать прямо с начала десятого класса — это объяснимо и целесообразно. В курсе анализа эти понятия и техника работы с ними появляются значительно позже. Раньше это требование физиков удовлетворялось в летней школе или в рамках короткого обязательного факультатива "Введение в анализ", который много раз читал и А.Н. Колмогоров. Сейчас такого факультатива нет, а летние школы проходят не ежегодно, но даже когда они есть, указанная тема в последнее время на них не выносится.

Сначала производная, а потом интеграл или наоборот? Иногда мы начинали с интегрального исчисления, а только затем возникала производная; в методическом отношении это довольно любопытный и полезный опыт, да и исторически так создавалось дифференциальное и интегральное исчисление. Нужна ли в специализированной школе (типа нашей, например) тема "Дифференциальные уравнения"? Мы даем на это однозначный ответ — нужна. В первую очередь это связано с потребностями физики, возможностью ознакомить учащихся с хорошими задачами прикладного характера, показать силу методов математического исследования самых разнообразных проблем в физике, химии, биологии, географии, экологии, экономике и т.д. Ряды Тейлора всегда, а ряды Фурье иногда, также включаются в наши программы анализа. При рассмотрении рядов Фурье мы ограничиваемся только соответствующими тригонометрическими многочленами и вычислениями его коэффициентов при помощи метода суперпозиции и на конкретных примерах знакомим учащихся с явлением Гиббса. Если ряду Тейлора посвящены и лекции и семинарские занятия, то представление функций рядом Фурье рассматривается только на лекциях, но с выполнением задания математического практикума на эту тему.

Здесь также уместно вспомнить о легендарных в стенах школы (да и за ее пределами также) курсах анализа для одногодичного потока. Первый курс был разработан А.Н. Земляковым с сильным акцентом в сторону дифференциальных уравнений (в основном, качественной теории), с большим количеством задач "физической математики"; см. публикацию в "Математическом образовании" в №2(29) 2005 года. Второй курс был разработан Е.Н. Щепиным, центральное место в котором занимали вопросы теории функций комплексного переменного. При этом выход в комплексную плоскость проводился для того, чтобы решать вопросы действительного анализа. Этот курс Е.В. Щепина "прижился" и продолжительное время изучался нашими одногодичниками. Е.В. Щепин одним из первых (первым был Ю.В. Матиясевич) наших выпускников стал доктором физико-математических наук. Курс лекций Е.В. Щепина существует в рукописи, но никогда широко не публиковался и, быть может, будет все-таки представлен широкой публике. В настоящее время Е.В. Щепин преподает информатику в школе.

Возвращаясь к теме "Дифференциальные уравнения" уместно отметить, что в классах химической специализации конкретным и основным физическим моделям, приводящим к дифференциальным уравнениям второго порядка (или к линейным системам), постоянно отводится значительное учебное время. Курс лекций А.В. Карапетяна для химиков, в котором эта часть мастерски написана, сохранился, но в широкой печати не публиковался.

В основной курс анализа (именно анализа, а не алгебры) часто включается тема "Комплексные числа". Если говорить о тех разделах этой темы, которые изучаются в большинстве специализированных школ страны, то здесь существенных отличий нет (если не считать введения самих комплексных чисел как операторов — так делалось несколько раз). Более того, не всегда эта тема присутствует и в наших программах по математическому анализу. Однако, когда мы ее туда включаем, то здесь изучаются дробно-линейные отображения, основная теорема алгебры, модель Пуанкаре плоскости Лобачевского с довольно серьезными продвижениями, комплексная экспонента (здесь неоценим опыт и педагогическое мастерство А.А. Егорова — нашего старейшего преподавателя и лектора, реализовавшего на практике многие из методических задумок А.Н. Колмогорова). Комплексная тематика богата заданиями математического практикума.

За счет часов, выделенных на математический анализ, за все время существования школы только три раза читался семестровый курс "Введение в теорию вероятностей", обязательный для всех школьников (в те годы была только физико-математическая специализация) двухгодичного потока. Первые несколько лекций всегда читал А.Н. Колмогоров, а продолжали его читать, при полном с ним согласовании, И.Г. Журбенко, М.В. Козлов, В.Н. Дубровский, В.В. Вавилов и др.

Курсом "Математический анализ", этим важнейшим школьным курсом, руководили многие профессора и доценты механико-математического факультета МГУ: А.Н. Колмогоров, В.Б. Алексеев, В.И. Арнольд, А.М. Степин, В.А. Скворцов, И.Г. Журбенко, О.С. Ивашев-Мусатов, Ю.В. Нестеренко, М.В. Козлов, А.В. Карапетян, В.И. Гаврилов, Д.Л. Абраров, А.А. Егоров, В.В. Рождественский, В.В. Вавилов, В.Ф. Пахомов, В.Н. Дубровский, Б.М. Ивлев, А.Н. Земляков, В.А. Любишкин, А.П. Веселов, Е.М. Щепин, А.П. Комбаров и другие.

Столбовая дорога в математику

Обучение *постановкам и решениям* задач является важной составной частью всех наших математических (и других) курсов. Можно сказать и более прямолинейно: постановка и решение задач — цель и средство обучения математике в нашей школе. Уместно здесь привести высказывание известного математика П. Халмоша: "Задачи – сердце математики, и мы должны подчеркивать все более и более в классе, на семинарах, в книгах и статьях, которые мы пишем, чтобы наши ученики стали лучшими постановщиками и решателями задач, чем мы сами". Решение задач, как отмечалось многими крупнейшими учеными и педагогами, та столбовая дорога в математику, шире которой нет и, видимо, другого способа привить интерес к математике и полюбить эту мудрую науку не существует. *Все наши школьники (за очень редким исключением) будут использовать математику и ее методы в своей будущей профессии или вообще станут профессиональными математиками-исследователями.* В частности, именно поэтому мы здесь говорим не только о решении задач, но и о постановках задач в ходе семинарских занятий по инициативе преподавателей и — что более важно — по инициативе самих школьников. Вся *школьная жизнь пропитана решениями задач* и их обсуждениями: обычные занятия, самостоятельные и контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены, олимпиады и конкурсы решения задач, кружки, собственные исследования школьников и т.д.

Основная "задачная нагрузка" школьника состоит из решения задач в классе и из выполнения домашних заданий. Задачный материал подбирается и разрабатывается под руководством ведущих преподавателей, дозируется и именно на этой основе формируются календарные планы обучения. Важное место отводится организации контроля над ходом учебного процесса. Лектор, совместно с другими преподавателями, разрабатывает *тематические списки задач* (иногда крупные, чаще — не очень), часть из которых изучается на уроках, часть — в ходе самостоятельной работы (такой системы придерживаются многие специализированные школы). Затем все учащиеся без исключений должны сдать этот список задач преподавателю на соответствующем коллоквиуме (на занятиях, на зачете), предъявив тетрадь с полными записями решений задач и доказательствами теорем. При этом, неукоснительным требованием является система оформления: четкие чертежи (выполненные циркулем и линейкой с применением различных цветов), полнота аргументации в решениях задач, ясные ссылки на теоремы и ранее решенные задачи. Если есть возможность проводить такие коллоквиумы после уроков, то мы проводим их там, а если такой возможности нет, то они проводятся во время обязательных часов. Эта система довольно эффективна, т.к. на коллоквиум требуется принести тетрадь с тщательно оформленными записями (что само по себе уже важно), не тратится время на подробный разбор домашних заданий в классе (при такой схеме — обычных поурочных домашних заданий просто нет), школьники привыкают к правильному оформлению решений и к полноте необходимой аргументации — "писанию и чистописанию", да и индивидуальная устная беседа с учителем по решенным и нерешенным задачам приносит неоценимую помощь обучающемуся. Еще один важный плюс при такой схеме контроля состоит в том, что нет особой нужды "в текущем опросе учащихся с выставлением оценки", что сильно экономит драгоценное время на текущих уроках. Мнение о том, что для сдачи коллоквиума школьники занимаются списыванием решений задач друг у друга не выдерживает серьезной критики, да мы и не препятствуем взаимным консультациям учащихся; опытный учитель всегда легко оценит качество изученного материала и практически всегда определит реальные источники написанных решений задач.

Отметим, что ничего страшного нет в том, что на коллоквиуме предъявлены решения не всех задач из списка; общая же схема такова – прием заданий проходит только два раза, во время второй попытки отличную оценку получить нельзя. Еще одной важной компонентой такой работы является то, что в такие списки зачастую *включаются задачи исследовательского плана*, требующие значительного времени на их продумывание, а это практически невозможно на текущих занятиях. Кроме того, сюда включаются так называемые *"задачи на доказательство теорем"*, которые представлены в виде цепочки вспомогательных задач. По ходу такой работы как бы сама собой решается и "проблема накопляемости оценок", решение которой при обычной схеме ориентировано не на весь класс — многие школьники "отдыхают" или начинают заниматься другим делом, а в это время у доски "страдает" вызванный к ней учащийся (а это уже — неэффективно использованное учебное время). Такой методики, конечно, придерживаются не все преподаватели нашей школы, да и не всегда хватает желания, терпения и трудолюбия на такую большую деятельность (намного проще: 5-7 задач в классе, столько же — на дом, разбор домашнего задания, 5-7 задач в классе...). *Проблема домашних заданий, а точнее, их выполнения* — это проблема, к которой нужно очень серьезно относиться всем преподавателям, а не только преподавателям математики. Простой подсчет показывает, что в семестр наши школьники только по основным математическим курсам должны решать около 500 задач, не считая задач на контрольных работах, на зачетах и др. А это колоссальная нагрузка для учащихся, имеющих кроме математики еще много дисциплин и, тем самым, много других домашних заданий и практикумов.

У каждой подборки задач и упражнений для вынесения на коллоквиум имеется свой лейтмотив, который иногда выносится прямо, в ее тематический заголовок, а чаще используется преподавателями в процессе обсуждений решений и при комментариях к ним. Приведу некоторые из них: "Какой способ шнуровки ботинок более выгоден?", "Права ли царевна Дидона?", "Почему алгоритм Евклида такой многоликий?", "Мы играем на гармошке... Шварца", "Как считать, чтобы не считать?", "Противные доказательства или как?", "Что такое элементарная функция?", "Где же индукция?", "Какие возможности у паркетчика?", "Пятая операция. Конец беспределу?", "Как бороться с модулями?", "Геометрия масс. Точка опоры в планиметрии?", "Векторы. Куда поедет телега?", "Площадь под гиперболой. Причем здесь логарифмы?", "Две прогрессии. Каковы их спутники", "Каковы дискретные аналоги анализа?", "Жизнь замечательных точек треугольника. Кто биографы?", "Равенство тетраэдров. Сколько признаков?", "Какая теорема анализа важней?", "Что, как и зачем мы дифференцируем?".

Приведем здесь примеры некоторых тематических списков заданий (за разные годы), которые выносились на текущие коллоквиумы.

Бесконечные периодические десятичные дроби. (Нахождение длины периода и его свойства, теоремы Ферма и Эйлера, связи длины периода с арифметическими операциями, ...)

По следам теоремы Пифагора. (Несколько различных доказательств самой теоремы Пифагора, предложенные Евклидом, Леонардо да Винчи, Г. Перигэлом, Г.Дьюдени; обобщения, полученные Евклидом и Паппом; как следствия из последних — теоремы Симпсона, Стюарта, Апполония, Эйлера; луночки Гиппократа и сравнение площадей криволинейных фигур)

Разрезание и складывание фигур. (Здесь евклидовские доказательства теорем о площадях простых многоугольников; доказательство теоремы Бойяи - Гервина о равносоставленности равновеликих многоугольников разбито на серию задач; содержится задание практического характера: изготовить из бумаги или картона конкретное разрезание квадрата на части, из которых можно сложить заданный многоугольник)

Площади многоугольников. (Это задание состоит из двух больших циклов задач: аффинного и вычислительного. В аффинной составляющей содержатся задачи на сравнение площадей: например, задачи на клетчатой бумаге, теорема Вариньона, теорема Евклида о трех параллелограммах, так называемые "сталагмиты и сталактиты". Центральными задачами во второй части являются разбитые на вспомогательные шаги доказательства многочисленных теорем "о бабочках", теоремы Рота и как следствия из нее теорем Чевы и Менелая, теоремы Гаусса о серединах диагоналей четырехсторонника; доказательство теоремы косинусов, использующее метод разбиения; приложения формулы Пика)

Тетраэдры. (Основу этого списка задач составляют два набора задач, характеризующих ортоцентрические и равногранные тетраэдры — каждый из них содержит 10-15 эквивалентных свойств, а иногда и больше. От учащегося требуется реализовать доказательства эквивалентности этих свойств, используя свою собственную логическую схему и, по возможности, покороче. Иногда в это задание, или в его новое продолжение, включаются характеристики каркасных, изодинамических тетраэдров. И даже — получение всех правильных разбиений пространства на равные тетраэдры)

Алгоритм Евклида. (Наибольший общий делитель. Решение линейных диофантовых уравнений. Число шагов в алгоритме и теорема Ламе. Цепные дроби и их геометрическая интерпретация — "алгоритм вытягивания носов". Геометрия цепных дробей. Задачи и теоремы о диофантовых приближениях. Устройство календарей различных типов)

Кроме отмеченных выше, готовились и многие другие списки задач: принцип математической индукции; принцип Дирихле; принцип включения — исключения; принцип суперпозиции; принцип двойственности; принцип непрерывности в геометрии; задачи с параметром; применение производной; вычисления интегралов; итерации и т.п.

О задачах, которые реально использовались в курсе алгебры нашей школы с использованием традиционной для массовой школы системы домашних заданий, можно узнать (или составить точное впечатление) из книг наших преподавателей: Н.Б. Алфутовой и А.В. Устинова, С.Б. Гашкова, В.А. Колосова и др.

А.Н. Колмогоров при организации упражнений под читаемые им курсы зачастую выдавал письменные рекомендации учителям типа следующих (1978 г):

"1. Правила дифференцирования векторных функций (кроме 1У) были на лекциях, но я упустил из виду, что их нет в белой книжке...

Я о них рассказываю во введении к практикуму, но надо их закрепить. На контрольной в следующую пятницу будут легкие задачи типа тех, которые в более трудных вариантах даны на практикум.

2. В ближайшие понедельник и среду на занятиях надо поговорить о первообразных, определенных интегралах (неопределенного интеграла у нас не будет — его заменяет понятие первообразной), выяснив могущие иметься недоумения, и решить несколько задач на вычисление площадей... и на нахождение первообразных (в том числе, хотя бы в одной задаче "сообщенных"). Такие задачи могут встретиться в контрольной работе в следующую пятницу. Таблица первообразных и общие правила не обязательны, в принципе первообразные подыскиваются "по соображению". Но, вероятно, сами учащиеся заметят, что первообразная суммы может быть получена сложением первообразных слагаемых и т.п."

Кроме рекомендаций такого рода А.Н. Колмогоровым готовились и конкретные списки задач.

Целенаправленная и интенсивная подготовка к вступительным экзаменам в вузы, и самого высокого уровня, проходит, как правило, вне основного учебного времени (раньше, когда часов на математику было больше, они проводились в рамках основного расписания занятий). Эти дополнительные занятия кафедрой тщательно планируются, для этого зачастую приглашаются специальные преподаватели (авторы книг и пособий, опытные преподаватели школ и вузов), любящие работать со школьниками, имеющие репетиторский опыт и сами принимавшие участие в составлении задач вступительных экзаменов. Начиная с первых дней, в школе был специальный обязательный курс элементарной математики, который в первые годы вели И.К. Сурин, затем А.А. Шершевский, А.Б. Сосинский, А.Н. Звонкин и многие другие, и главной задачей этих курсов была подготовка к вступительным экзаменам в вузы. В одногодичном потоке этот курс появился с приходом в этот поток А.Н. Землякова в 1971 году. Стоит отметить, что начиная с осени 2005 года (а в одногодичном потоке двумя годами раньше) снова появился (возродился) обязательный для посещения учащимися специальный курс "Элементарная математика" (правда, пока за основной сеткой часов), который полностью посвящен "Абитуроматике". Все наши выпускники (за крайне редким исключением) становятся студентами, школа и кафедра тщательно анализирует итоги их поступления в вузы, а также и собственные пробелы в организации тренировочных предэкзаменационных занятий школьников. Подчеркнем, что подготовка к вступительным экзаменам — *это еще не подготовка к обучению в вузе* (хотя, конечно, сначала туда нужно поступить), а фрагмент этой общей подготовки в нашей системе преподавания математики. Подготовка же к обучению в вузе включает в себя самые разнообразные элементы, включая и *подготовку к занятиям научными исследованиями.*

Мощнейшим стимулом для активной работы школьников на занятиях мы считаем формулирование (постановку) задач самими учащимися непосредственно на уроках. Чтобы стимулировать ребят к этому на постоянной основе мы стараемся при выдаче каждого нового списка задач обозначить его каким-то вопросом общего характера и желательно с неоднозначным ответом. Постоянно возвращаемся к нему в процессе классной работы. Мы не жалеем времени на эту процедуру, включая в нее головоломки и софизмы, исторические фрагменты, содержательные рассказы об общем замысле задания и различные другие “песни и пляски” вокруг него. Из тех задач, а точнее вопросов, которые возникли у школьников прямо на уроках в недавнем прошлом мне хотелось бы выделить такие:

1. При изучении темы, связанной с представлением рациональных чисел бесконечной периодической десятичной дробью, появился вопрос о том, как найти минимальный знаменатель рациональной дроби, которая внутри периода своего десятичного представлении содержит заданную комбинацию цифр. Полный ответ получился в итоге коллективной работы, но в результате этих исследований возникли новые вопросы и поиски ответов на них до сих пор продолжаются.

2. После одной из лекций по математическому анализу, на которой обсуждался контрпример Шварца к одному из казалось бы разумных подходов к определению площади поверхности цилиндра, появилось несколько вопросов: “Имеются ли аналоги такого контрпримера для шара и других поверхностей? Что же такое “площадь поверхности” и как ее вычислять приближенно?”. Ответы в науке известны, частично были получены самими школьниками при выполнении затем специально составленного списка задач. И я уверен, что после этих занятий, возникших по инициативе самих школьников, этот “Сапог Шварца” они запомнят навсегда.

3. В списке задач, посвященных применению принципа математической индукции в геометрии, была важная задача о том, что любой простой многоугольник имеет по крайней мере одну внутреннюю диагональ. Было дано три различных доказательства этого утверждения. Затем этот факт многократно использовался и, в частности, при доказательстве формулы Пика для вычисления площадей многоугольников, расположенных на клетчатой бумаге. Желание получить аналог этой формулы для многогранников в пространстве с прямым использованием схемы доказательства в плоском случае, привело некоторых учащихся к попыткам установить утверждение о внутренней диагонали для многогранников. Они оказались бесплодными, появились контрпримеры, которые привели затем к проблеме (до сих пор не решенной) описания многогранников, которые не имеют внутренних диагоналей.

4. Любопытный “детский” вопрос широкого плана возник, когда рассматривался принцип математической индукции в целом. Какие принципы вообще имеются в математических рассуждениях? Ответ на него закончился рассказами о многих важнейших математических принципах и разработкой специальных списков задач, им посвященных.

В список стимулов к учению нужно внести и такие, быть может, неожиданные формы совместной работы преподавателей и учащихся: домашнее задание на каникулы, где первым пунктом является просьба написать стихотворение, рассказ, песню, юмореску, придумать анекдот по пройденному материалу или о каких-то моментах школьной жизни. Отчет об итогах выполнения одного такого домашнего задания опубликован. Хорошим стимулом бывают и программные уроки в школьном саду (он у нас имеется и довольно большой).

Для активизации работы учащихся на уроках у преподавателя, как у “продавца математики неучам”, кроме безудержной и надоевшей рекламы своего “товара” должны быть припасены шутки, анекдоты, стихи, песни, сказки и много чего другого (то есть иметь в запасе “математические хиты”), он должен обладать хорошими мотивировками и аргументами, которые убеждают обучающихся в том, что без этого “товара” им не обойтись и … “впарить” его школьникам. Нет, конечно, таких преподавателей, которые постоянно шутят и балагурят для реализации своих целей на уроках. Но важно то, что только просто понимание важности постоянного использования стимулирующего принципа не позволит включить в списки задач только рутинные задачи; для них (а они неизбежны в учебе) придется искать другие формы и приемы (например, “Кто быстрее сделает 10 задач?”). “Втянуть в задачу” можно и чисто авантюрным путем — просто голосованием всего класса при угадывании ответа, так как поднятие руки уже обязывает и затрагивает авторитет и самолюбие ее поднявшего. Когда же удается настолько “расшевелить” школьников, что они сами (в текущей работе) ставят задачи и, тем самым, играют основную роль, то это является мощнейшим стимулом, который “держит” аудиторию довольно продолжительное время. Сложно еще и потому, что задач в методической литературе, около которых была бы написана рекомендация, что их можно использовать в таком ключе, очень мало. Часто такие возможности возникают неожиданно прямо на уроке, и учитель должен уметь реагировать быстро, что напрямую зависит от его педагогического опыта и должного образования. В плановой подготовке к занятиям, преподаватель, конечно, должен заготовить такие задачи и тщательно продумать “режиссуру” для того, чтобы затем ее осуществить на уроках вместе со школьниками. Но зачастую, по таким заранее заготовленным задачам, это получается не очень хорошо, хотя внешне все и выглядит нормально: имеется диалог и даже активный, но его инициатором и ведущим является, в основном, учитель, а не ученик. Такой диалог (больше похожий на монолог) довольно быстро заканчивается. Да и урок короткий, а после перемены продолжить дискуссию довольно трудно. Причина в том, что тут нет и не может быть коллективного куража, который возникает только при активной работе мысли большинства участников, а сама работа над постановкой задачи должна возникать естественным образом и непосредственно на том материале, который изучается в данный момент времени (быть может и рутинного характера). Я использовал многие домашние заготовки (специально подобранные для организации театрального действа “по постановке задач учащимися”), для которых я черпал материал из широко известных книг и различного рода научной и научно-популярной периодики. Из них можно отметить такие, удавшиеся мне, “математические этюды”: теорема Пифагора — теорема Паппа — теоремы Евклида (цель: естественные обобщения в различных направлениях одной классической теоремы); замечательные точки и линии тетраэдра (цель: интуиция и аналогия); графики квадратично-рациональных функций (цель: роль классификации); индукция в геометрии (цели: новый материал, математика едина); конечные геометрии (цель: аксиоматические построения) и т.п. Несомненно, что наибольшие возможности для постановки новых задач самими учащимися появляются при изучении тех тем программы, о которых они вообще ничего раньше не слышали (и здесь преподавателю нужно “держать ухо востро”); не раз отмечалось, что на таких уроках царит нормальная деловая атмосфера, интерес несомненен. Аудитория становится более ровной — резко сокращается деление на “передовиков и отстающих”, что крайне важно для обучающихся, которые зачастую “перестают махать на себя рукой”, и побуждает поверить в собственные силы и возможности.

Еще одним стимулом для повышения активности занятий математикой у нас является конкурс решения задач памяти основателя школы, академика Андрея Николаевича Колмогорова. Ежемесячно участникам конкурса предлагается пять задач из различных разделов математики. Итоги конкурса подводятся один раз в год - в конце апреля. Принять участие в конкурсе можно в любой момент времени; при этом совсем не обязательно представлять решения всех задач — можно также использовать задачи, предлагавшиеся и ранее. Некоторые из задач конкурса становятся началом научных исследований и служат основой докладов учащихся на различных научных конференциях школьников.

Математический практикум

Особое место в системе организации учебного процесса в школе им. А.Н. Колмогорова занимают практикумы (по математике, физике, информатике, химии); это заметно отличает нашу школу от других. При этом, говоря о математических экспериментах (практикуме), речь идет не столько о тех вопросах постановки математического образования, где сливаются математика и информатика, но просто о чертежах, расчетах, графиках, схемах, построения моделей, составлении таблиц, решении задач и т.д. Кроме того, здесь преследуются и более серьезные цели: привить вкус к конкретной, реальной математике, проиллюстрировать наиболее тонкие теоретические разделы курса, показать силу только что освоенных методов при решении практических задач. Задания практикума состоят из одной или нескольких ступеней: от очень конкретной до исследовательской. Начальная часть обязательна для всех учащихся, исследование — только для желающих; *задания содержат также темы творческого характера для проведения самостоятельных исследований.* Все задания практикума строго индивидуализированы и сдаются учащимися индивидуально. Довольно значительный промежуток времени в учебном плане школы был отдельный предмет (1970-1988), которой так и назывался “Математический практикум”; при этом был предусмотрен один лекционный час (на постановку заданий), время на консультации и прием заданий. В разгар кавалерийской и непродуманной так называемой “гуманитаризации” школьного образования произошел “передел собственности” и вместо 12 часов в неделю на математику в сетке часов осталось только девять. Это было большой и трудно исправляемой сейчас ошибкой — в специализированной школе при МГУ столь высокого уровня, с хорошо организованными и согласованными курсами по естественным дисциплинам, фактически самим (школа могла не следовать в полном объеме этой реорганизации Министерства, т.к. подчиняется МГУ) пойти по сомнительному пути. Конечно, это нужно исправить и так, чтобы “фирменный галстук” школы ее выпускники хранили всю свою жизнь. Уменьшение часов сказалось немедленно и на математическом практикуме, который сейчас проводится только эпизодически и далеко не всеми преподавателями. Попутно отметим, что программы по информатике содержат, конечно, некоторую составляющую “вычислительного практикума”, но соответствующие задания служат несколько другим целям.

Это А.Н. Колмогоров, со всей настойчивостью, реализовал сначала в университете, а затем и в школе, такое нововведение в нашей стране. Он сам сначала и руководил этими практикумами, придумывал новые постановки задач, используя, зачастую, самые современные научные достижения. Именно, эта конкретная вычислительная и графическая работа при выполнении заданий практикума в школе, не на словах, а на деле показывает силу математических методов исследований в нашей жизни и в научных исследованиях, осуществляет прикладную направленность математического образования в школе и устанавливает реальные межпредметные связи. Общие установки при создании практикума в школе А.Н. Колмогоров описывал так: “Часы математического практикума, проводящегося, в идеале, одновременно для всего потока, используются частично для унификации требований к различным классам письменных контрольных работ, состоящих из серии задач обычного школьного типа. Но в основном эти часы отводятся для выполнения работ большого объема, требующих больших вычислений и чертежного оформления. Например, фактически осуществляется программа оценки числа Пи, после изучения в классе движения по циклоиде исследуются графически более сложные случаи сложения движений, находятся и изображаются графически решения системы дифференциальных уравнений последовательного радиоактивного распада.... В проведении практикума участвуют преподаватели, работающие в классах, но отдельная небольшая группа преподавателей его организует и готовит для него материал”.

Тематика заданий математического практикума очень разнообразна. Приведем здесь примеры тех заданий, которые в разные годы выполняли учащиеся: приближенное вычисление корней уравнений; графические методы решений уравнений и систем; две задачи линейного программирования; итерации; метод секущих и касательных Ньютона; номограммы; графостатика; численное дифференцирование и интегрирование; дискретные гармонические функции; непрерывные дроби; задачи на клетчатой бумаге; магические квадраты; конечные поля и латинские квадраты; неприводимые многочлены; графики дробно-квадратичных рациональных функций; фигуры Лиссажу; кривые Уатта; циклоиды; розы и розетки; годографы; эволюты циклоидальных кривых; пучок кривых второго порядка; измерения на местности; модели многогранников; сечения многогранников; две проекции; группы самосовмещений плоских фигур и правильных многогранников; круговые преобразования плоскости; теоремы Паскаля и Дезарга и построение при помощи линейки; инверсия и построения при помощи циркуля; навигация; расчет лунных затмений; конечные аффинные и проективные плоскости и пространства; интерполяция и сплайны; квадратурные формулы; космические поезда; диаграммы касательных; прыгающий мячик; изоклины; радиоактивный распад; фазовые портреты; теория часов; две экологические модели; полет диска в сопротивляющейся среде; динамическое программирование; тригонометрические многочлены и ряды Фурье; профили собственных колебаний натянутой нити с бусинками; доска Гальтона; модель размножения и гибели; случайные блуждания; датчики случайных чисел; криптография и расшифровка текстов; дробно-линейные преобразования; расположение комплексных корней многочлена, зависящего от параметра; фракталы; модель Пуанкаре плоскости Лобачевского; линии равного модуля и аргумента; области однолистности многочленов.

Несмотря на то, что задания практикумов строго индивидуализированы, мы ни в коем случае не препятствуем взаимным консультациям в “домашней стадии” выполнения работы. Результаты выполнения работ обсуждаются в классе. Это тем более оправданно, т.к. в результате работы учащихся часто появляется полное исследование, полный каталог, полная классификация и т.д.

В качестве примеров отметим, что в процессе работы была создана коллекция картонных моделей всех полуправильных многогранников (которая погибла безвозвратно), решены *все* задачи на построение треугольника циркулем и линейкой по некоторым заданным параметрам (выбирая их из двадцати возможных и, как правило, по три) и доказана невозможность таких построений в отдельных случаях, описаны все тринадцать возможных типов кривых Уатта (а впоследствии и доказано, что других нет), построены 17 различных типов графиков дробно-квадратичных рациональных функций и создан полный каталог их диаграмм касательных (и потом доказано, что других не бывает), построены все одиннадцать различных мозаик на плоскости (с полным обоснованием, что это полный перечень), для многочленов пятой степени описаны все возможные качественные картинки их областей однолистности, в определенной модели описаны все возможные траектории полета “летающей тарелочки” и т.д. и т.п. В школе большинство материалов о практикумах сохранились и ждут своей публикации.

В.В.Вавилов и И.Ю.Селиванова на “торжественном приеме” практикума.

В первой четверти этого учебного года десятиклассники двух моих классов выполнили два задания. Первое было связано с теоремой Бойяи - Гервина о равносоставленности многоугольников, которая на одной из лекций по геометрии была доказана. Учащимся были предложены два конкретных равновеликих многоугольника и требовалось изготовить из картона соответствующий “конструктор”, который для этой пары многоугольников или реализовывал бы идею конструктивного доказательства основной теоремы, или был бы изготовлен “по индивидуальному проекту”. Второе задание относилось к курсу анализа, в котором сейчас изучается тема “Элементарные функции”. Им было, в частности, предложено в плоскости коэффициентов Opq

семейства квадратных уравнений вида $x^2 + px + q = 0$ определить те области, в которых корни таких уравнений обладают тем или иным свойством.

Отметим, что некоторые из тем и методических находок, которые появились при разработке наших заданий математического практикума были использованы при разработки учебно-математических компьютерных комплексов на CD, руководителем этой работы являлся В.Н. Дубровский.

Спецкурсы и семинары

Значительную часть в учебном процессе занимают факультативные занятия, различные специальные лекционные курсы, спецсеминары и кружки: здесь речь идет о занятиях вне основной сетки уроков, т.е. о так называемых факультативных занятиях. Основная цель здесь — *повысить математическую культуру учащихся, подготовить их к активному обучению в вузе и ведению научных исследований* (и желательно, начиная с младших курсов). Их значимость в нашей школе определяется уже тем, что в соответствии с учебным планом школы, каждый школьник за весь период обучения должен посещать и получить зачет (сдать экзамен) по одному годовому курсу естественно-научного содержания и одному годовому курсу гуманитарного содержания или активно участвовать в работе спецсеминара, кружка; об этом делается отметка в аттестате. Запись учащихся на курсы производится на добровольных началах в соответствии с их интересами. Приходя в школу, наши воспитанники сначала начинают “бегать” со спецкурса на спецкурс (семинар, кружок) и только потом окончательно формируют свой выбор. Эти специальные курсы, семинары и кружки, как правило, посвящены дополнительным главам к основным курсам. Их тематика очень разнообразна, год от года меняется и отражает вкусы и научные интересы, которые присущи их организаторам.

Не претендуя на полноту, приведем некоторые темы этих курсов (в ретроспективе), получившие одобрение преподавателей и учащихся, и которые скажут сами за себя. Это: геометрия Лобачевского; теория Галуа; элементы математической логики; задачи с параметрами; элементы теории вероятностей и математической статистики; введение в кибернетику; теория автоматов; теория колебаний; вероятность и информация; элементы теории чисел; история математики; геометрия и группы; поверхности и кривые; элементы теории множеств; сложность булевых функций; наглядная топология; геометрическая алгебра; комплексный анализ; дискретные гармонические функции; теория графов; элементы математической кибернетики; алгебраическая геометрия; многозначная логика; элементы функционального анализа и квантовая механика; некоторые вопросы теории аппроксимаций; Бильярды; высшая математика с точки зрения элементарной; что такое фрактал? теоремы невозможности; диофантовы приближения и геометрия; геометрическая теория чисел; введение в теорию динамических систем; динамическая геометрия и геометрическая динамика; популярная небесная механика; математика и механика; геометрический кружок; кубический кружок; олимпиадные задачи; математический семинар и многие другие кружки, семинары, спецкурсы (иногда, “просто по случаю”).

В последние годы наиболее динамично в школе работают научно-исследовательский семинар “Математика. Кибернетика. Информатика” (В.Б.Кудрявцев, С.В. Алешин, А.А. Часовских, Г.И. Сыркин, Ю.П. Николаев), математический семинар (А.Б.Скопенков), научно-исследовательский семинар по элементарной математике (В.В.Вавилов, в стенах МГУ), семинар по олимпиадным задачам (В.З.Шарич, А.А. Пономарев). Эти семинары, в частности, осуществляют подготовку и обсуждение докладов учащихся для участия их в различных конференциях школьников, на них ставятся новые задачи научно - исследовательского характера, решаются олимпиадные задачи и т.д. Отметим, что инициирующая роль кафедры математики в настоящее время при планировании тематики специальных курсов и семинаров заметно уменьшилась и сузилась.

Примером занятий геометрического кружка под руководством А.Н. Колмогорова, может служить изучение покрытий плоскости правильными многоугольниками, быть может различными, но без наложений и пропусков. На одном занятии кружка участникам было предложено не только дать примеры таких покрытий, но и установить теорему, которая содержала бы описание всех правильных покрытий (паркетов), т.е. таких, когда в каждой вершине покрытия сходятся одинаковые многоугольники и в том же порядке. На занятиях кружка это и было сделано: доказано, что таких различных правильных паркетов на плоскости существует ровно 11. Об этом А.Н. Колмогоров впоследствии писал в журнале "Квант"; там же были помещены отклики на эти публикацию и статьи, содержащие довольно подробные доказательства. Отметим, что в 2001 году десятиклассники нашей школы И. Седошкин и Е. Мычка продолжили эти исследования (под руководством В.В. Вавилова) показав, что на всех этих возможных паркетах, говоря свободным языком, *можно расположить только такие правильные многоугольники, которые "видны невооруженным взглядом"* (расположить — это значит поместить так, чтобы их вершины являлись узлами паркетов). Доклады этих школьников на Харитоновских научных чтениях в г. Сарове и на Колмогоровских научных чтениях в школе им. А.Н. Колмогорова вызвали значительный интерес. Н. Однобоков (11 класс) в 2004 году (руководитель — В.В. Вавилов) на таких паркетах установил еще один замечательный результат, доказав, что *для каждого из паркетов, кроме паркета* $4^2 3^3$, *и заданного натурального числа n существуют открытые круги и окружности, содержашие ровно n узлов паркета.* В качестве еще одного примера приведем тему курса "Высшая математика с элементарной точки зрения", где, в частности, рассматривались функции дискретного аргумента. В каждый узел бесконечного листа клетчатой бумаги поместим действительное число так, чтобы любое число было бы равно среднему арифметическому чисел, стоящих в четырех соседних узлах бумаги. Другими словами, рассмотрим функцию двух переменных $y = H(i, j)$, которая определена на всех целочисленных точках (i, j) и такую, что

$$H(i,j) = 1/4(H(i-1,j) + H(i+1,j) + H(i,j-1) + H(i,j+1))$$

для любых целых значений i и j. Такие функции $y = H(i, j)$ называются *дискретными гармоническими функциями.* На школьных олимпиадах о таких функциях, например, встречались такие две задачи:

1) Доказать, что если дискретная гармоническая функция принимает только натуральные значения, то эта функция равна некоторой постоянной, т.е. все ее значения равны.

2) Доказать, что если рассмотреть любой прямоугольник с вершинами в узлах клетчатой бумаги и сторонами параллельными ее линиям, то наибольшее и наименьшее значение из числа тех, которые принимает дискретная гармоническая функция во внутренних и граничных узлах этого прямоугольника, находятся в граничных узлах.

Имеет место следующая теорема Лиувилля: если дискретная гармоническая функция ограничена, то она постоянна. В рамках этой части курса рассматривался вопрос о расширении теоремы Лиувилля в различных направлениях; в частности: верно ли, что если все значения дискретной гармонической функции вещественны и неотрицательны, то эта функция постоянна? В результате, на лекциях (и на семинарах "по этому случаю") строилась довольно законченная теория дискретных гармонических функций вместе с ее некоторыми важными физическими приложениями. Затем эти разрозненные рассмотрения переросли в другой специальный курс, который назывался уже "Дискретные гармонические функции".

Наши специальные курсы являются, в основном, лекционными, хотя на них, конечно, разбираются и решения конкретных задач, *возникают новые задачи для самостоятельных исследований.* Другое дело — кружки и семинары: здесь, безусловно, имеется лекционная составляющая, но она невелика по сравнению с поисками решений конкретных задач и всесторонними их обсуждениями всеми участниками. Обязательных домашних заданий здесь нет никаких. Дело сильно усложняется тем, что общая школьная нагрузка, которую имеют учащиеся, составляет более сорока часов в неделю и поэтому после семи — восьми обязательных уроков очень трудно рассчитывать на активность участников спецкурса или спецсеминара, которые заканчивают свою работу уже около шести — семи часов вечера. Существующая система факультативных курсов и семинаров *решает и еще крайне важную проблему адаптации наших выпускников к обучению на первых курсах высших учебных заведений*, способствует безболезненному и успешному переходу от форм и методов обучения в школе к формам и методам обучения в вузах, позволяет уже на первых курсах в университете *начать самостоятельные научные исследования.* Другими словами, эта система решает, и не на словах, а на деле, важную задачу непрерывности математического образования в школе, вузе, в дальнейшей учебе и деятельности. Уже в школьный период под научным руководством наших преподавателей осуществляется подготовка докладов учащихся на научные школьные конференции, проводятся исследования, подготавливаются к печати и публикуются научные статьи. Некоторые из наших преподавателей математики еще в школе "приглядываются" к своим питомцам с целью пополнения группы студентов и аспирантов в университете, над которыми они осуществляют затем свое научное руководство: В.И. Арнольд — Н.Н. Нехорошев; В.А. Скворцов — Т.П. Лукашенко; А.А. Карацуба — С.М. Воронин, Г.И. Архипов; В.В. Вавилов — В.П. Прохоров, С.М. Кошель, Д.В. Прохоров; С.Н. Артемов — Ю.В. Гиматов; А.В. Карапетян — А.П. Евдокименко и др. Наши же выпускники, в свою очередь, при выборе кафедры и научного руководителя в университете в значительной мере живут школьными воспоминаниями о том или ином их бывшем преподавателе. Отметим, например, что при распределении студентов на кафедрах механико-математического факультета МГУ, их будущие научные руководители любят работать с большинством наших выпускников.

Научная работа школьников

В жизни науки, и вообще в научном мире, роль конференций, симпозиумов, съездов огромна. Школа и кафедра математики, ее преподаватели, ставя в качестве одной из целей *подготовку к научной деятельности*, уделяет значительное внимание подготовке докладов для участия в различных конференциях школьников. Как показывает опыт, на таких конференциях, ее участники, часто представляют реферативные работы, или решение задач(и) понятной по формулировке и по методам исследований всем участникам, работы "с претензией на содержательную научную новизну" и действительно новые научные результаты математических исследований. Последние крайне редки и, конечно, требуют особого внимания со стороны всех сопричастных: научного руководителя, кафедры, администрации школы. Главными "поставщиками" здесь, конечно, являются активно работающие спецкурсы и спецсеминары. Наши учащиеся успешно выступают на школьных научных конференциях в Калуге, С.-Петербурге, Сарове, Москве и др. научных центрах, в различных международных конференциях. Начиная с 2000 года СУНЦ МГУ совместно с факультетами университета проводит международные школьные Колмогоровские чтения, что стало уже хорошей традицией. Каждый год на эту конференцию наши учащиеся представляют около десяти довольно интересных исследований. Добротными работами, получивших одобрение оргкомитетов, жюри и участников конференций, являлись (в разные годы), например, доклады школьников А. Евдокименко, Д. Прохорова, М. Скопенкова, Т. Лепского, Е. Мычки, И. Седошкина, Ю. Кудряшова, М. Шевелева, А. Барана, А. Колчина, Н. Однобокова, В. Добровольской, А. Хоренко, А. Бекларяна, А. Деркача, С. Канищева, А. Драль, Д. Веселина и многих других учащихся.

Тематика исследований моих учеников, о которой мне рассказывать проще, в последние годы была таковой. Т. Лепский, используя новый метод, уточнил расположение числа е в интервале $((1+1/n)^n;\ (1+1/n)^{n+1})$ при любом n, получив при этом новые интересные неравенства.

О "паркетных" исследованиях Е. Мычки, И. Седошкина, Н. Однобокова уже упоминалось выше, но исследования продолжаются и поныне. Правда, уже в несколько ином направлении: осуществляется поиск (приближенного) аналога формулы Пика для многоугольника, расположенном на паркете.

В целом цикле исследований А. Хоренко изучались обобщения классического уравнения Эйлера $x^y = y^x$, в которых слева и справа в уравнении фигурируют "многоэтажные башни", и поиск решений таких уравнений в множестве целых чисел. Более того, им был получен, важный для приложений, критерий равномерной сходимости на отрезке последовательности суперпозиций (итераций) различных экспоненциальных функций.

Д. Веселин получил аналоги теорем Лиувилля, принципа Дирихле, принципа максимума для дискретных гармонических функций в неограниченных областях, что, в частности, позволило ему установить единственность решения задачи Дирихле в таких областях (чего нет в "непрерывной теории").

А. Бекларян решил одну старую задачу об отношении площадей так называемых медианных четырехугольников к площади исходного четырехугольника (медианные четырехугольники получаются в результате соединения каждой вершины данного четырехугольника с серединой “противоположной” стороны). Для доказательств ему пришлось широко использовать средства дифференциального исчисления для функций нескольких переменных. Другая работа, выполненная в совсем другом ключе, была посвящена на первых порах компьютерным экспериментам в среде Geometer's Sketchpad (Живая Геометрия), в результате которых удалось “увидеть и угадать” ряд возможных теорем из “красивой жизни замечательных точек треугольника”. В частности, были изучены траектории движения замечательных точек треугольника, вершины которого перемещаются по двум пересекающимся окружностям (конструкция однозначно определялась окружностями и выбором одной вершины). Показано, что при перемещении одной вершины такого треугольника по окружности точки пересечения его медиан, высот, серединных перпендикуляров, биссектрис описывают также окружности, а прямая Эйлера имеет центр вращения.

А. Колчин получил точные формулы для числа нетипичных троек игроков теннисного турнира (когда слабый выигрывает у сильного) в достаточного широком множестве турниров, состоящих из игроков “высокого класса”.

О задачах, которые сейчас привлекли внимание моих учеников-десятиклассников отмечу (кроме тех, о которых говорилось раньше) такие: Где могут находится вершины ортоцентрического тетраэдра, для заданного его ортоцентра и центра описанной сферы? Каково замыкание множества нулей всех конечных подсумм (формального) ряда $1+z+z^2+\ldots$? Где могут находится нули производной аналитической в области функции с постоянным модулем на ее границе? Верно ли, что если три чевианы треугольника конкурентны и делят его на шесть (пять, четыре, три) равновеликих треугольников, то эти чевианы являются медианами?

Из понравившихся мне исследовательских тем других преподавателей этого учебного года отмечу вопрос Г.И. Шарыгина: Каков на сфере аналог теоремы Бойяи — Гервина о равносоставленности многоугольников? Очень любопытный вопрос сформулировал А.В. Устинов: Как рассчитать сопротивление между двумя любыми узлами целочисленной решетки, если каждый отрезок, соединяющий соседние узлы имеет единичное сопротивление? Еще одна тема, которую для исследования предложил школьникам А.В. Устинов, возникла у нас с ним в период проведения занятий в летней олимпиадной школе в прошлом году, когда мы размышляли о задачах для математического боя, проводившегося в рамках регламента работы этой школы. Тема такова: Как нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник (все вершины которого являются ее узлами), который как можно меньше отличается от правильного многоугольника?

Своеобразным отчетом об организации научной работы школьников, о темах исследований и о конкретных полученных результатах можно судить по многим публикациям (см. сноску на стр. 59).

Олимпиадные дела

Школьные математические олимпиады в своем современном виде берут свое начало с так называемого этвешского соревнования, проведенного в 1894 году в Венгрии по инициативе Лорана Этвеша — президента Венгерского физико-математического общества. Начиная с этого момента, школьные математические соревнования начали распространяться по всему миру. Сейчас многие страны имеют хорошо отлаженные схемы проведения своих научных соревнований для молодежи. Накопленный опыт в проведении национальных соревнований школьников в разных странах совершенно естественно привел к организации Международных олимпиад (математики здесь были первыми, но сегодня такие олимпиады проходят по физике, химии, биологии, информатике, географии, русскому языку). Проведение первой международной математической олимпиады (ММО) в 1959 году взяла на себя Румыния. Такие олимпиады проводятся сейчас ежегодно, и команда СССР, а теперь команда России (в 1992 году уже выступали команды СНГ и России) является ее постоянным участником (только в 1960, 1961, 1978 году наших школьников на этих олимпиадах не было; в 1980 году ММО не проводилась).

Итоги выступления наших национальных команд на международных олимпиадах всегда было успешными и заслуживают всяческих похвал. Эти блестящие успехи наших олимпийцев обусловлены в первую очередь достаточно высоким уровнем (по сравнению со многими другими странами) общей школьной математической подготовкой, возникшим (правда, не так уж и давно — 40 лет назад) специализированным школам и классам, хорошо организованной системе национальной олимпиадной пирамиды (начиная со школьных олимпиад), разросшейся сети кружков при вузах страны и очным, заочным, летним юношеским математическим школам, научным школьным конференциям, первоклассным научно-популярным книгам и брошюрам, журналам "Математика в школе" и "Квант". А главное, этим успехам мы обязаны великолепным учителям, первоклассным ученым и всем тем энтузиастам (организаторам, композиторам задач, студентам, аспирантам), без которых такое многомасштабное дело невозможно было бы хорошо сделать. И здесь, прежде всего, должны быть названы Борис Николаевич Делоне и Андрей Николаевич Колмогоров, стоявшие у истоков школьного олимпиадного движения в нашей стране и под влиянием которых сложились прочные его традиции. Придавая большое значение олимпиадам в общей системе поиска, поддержки и воспитания талантливой молодежи, Андрей Николаевич считал, что главное — это приобщение способных школьников к изучению математики, подготовительная работа (кружки, лекции для школьников, которые не ограничиваются только разбором олимпиадных задач и методов их решений), привлечение широкого круга ученых и учителей к повседневной работе с одаренными молодыми людьми.

А.Н. Колмогоров принимал самое активное участие во многих московских математических олимпиадах (он только на посту председателя олимпиады работал в 1937, 1951, 1963 и 1975 годах, не говоря уж о работе в качестве члена оргкомитета этих олимпиад). Когда стали проводиться Всероссийские (с 1961 года), а затем Всесоюзные (с 1967 года) олимпиады и было решено создать постоянно действующий оргкомитет, ее методическую комиссию по математике в течении более чем 20 лет возглавлял А.Н. Колмогоров (его заместителями в разные годы работали Н.Б. Васильев, М.И. Башмаков, А.Н. Земляков, Н.Х. Розов, Ю.В. Нестеренко, В.В. Вавилов); затем с 1983 года по его просьбе ее возглавлял Б.В. Гнеденко (заместитель В.В. Вавилов). С 1992 года олимпиады вновь стали чисто российскими (председатель оргкомитета Н.В. Карлов, председатель комиссии по математике — Г.Н. Яковлев, его заместитель Н.Х. Агаханов).

Андрей Николаевич Колмогоров всегда интересовался задачами, предлагавшихся на разного рода олимпиадах, их итогами и статистикой результатов участников по задачам, участвовал в формировании составов оргкомитетов и жюри Всесоюзной олимпиады, возглавлял работу жюри пяти заключительных этапов Всесоюзных олимпиад в Воронеже (1966), Симферополе (1970), Ташкенте (1978), Саратове (1980) и в Одессе (1982), занимался вопросами подготовки и формирования команды страны для участия в Международных математических олимпиадах. Отметим, что научными руководителями команды страны для участия в международных школьных олимпиадах многие годы являлись А.М. Абрамов (выпускник нашей школы и ученик А.Н. Колмогорова) и В.В. Вавилов (преподаватель школы, теперь уже с 35 летним стажем).

Не случайно поэтому, что создавая интернат при МГУ, в качестве его первых абитуриентов (по предложению А.Н. Колмогорова) в Летнюю школу в Красновидове пригласили 46 участников Третьей Всероссийской олимпиады (из которых было зачислено только 19 школьников). Более того, многие годы прием учащихся в ФМШ при МГУ осуществлялся в значительной мере через олимпиады. Для этого МГУ им. М.В. Ломоносова командировал своих студентов, аспирантов и преподавателей, которые не только являлись членами жюри областных, Всероссийских и Всесоюзных олимпиад, но и в периоды проведения самих олимпиад осуществляли работу, связанную с приемом в школу-интернат №18 при МГУ.

Из числа преподавателей школы-интерната при МГУ в работе методической комиссии и в подготовке олимпиадных задач активную роль играли А.А. Егоров, А.М. Абрамов, Б.М. Ивлев, В.Н. Дубровский, Ю.В. Нестеренко, А.М. Слинько, С.Б. Гашков, М.В. Смуров, И.Н. Сергеев, О.В. Ляшко, О.Р. Мусин, А.Б. Скопенков и многие студенты, аспиранты механико-математического факультета МГУ — выпускники школы-интерната №18 при МГУ (много лет на факультете под руководством В.В. Вавилова работал семинар "Олимпиадные задачи", где они были, пожалуй, самыми активными участниками). Подготовкой команды страны для участия в Международных математических олимпиадах (и научного руководства ею в период самой олимпиады) занимались долгое время В.А. Скворцов, Е.А. Морозова, А.Н. Земляков, А.М. Абрамов, В.В. Вавилов — преподаватели ФМШ при МГУ (а двое, еще и ее выпускники).

На Всероссийских, а затем на Всесоюзных олимпиадах, школы-интернаты при университетах г.г. Москвы, Новосибирска, Ленинграда и Киева были представлены по положению своими собственными командами (сейчас этого нет). Поэтому в нашем интернате ранее уделялось специальное место для "олимпиадой подготовки". Так в нашей школе работал специальный семинар, на котором разбирались различные олимпиадные задачи и методы их решений, решались вновь придуманные и т.д. Этим семинаром в разное время руководили Б.М. Ивлев, С.Б. Гашков, В.В. Вавилов, А.А. Егоров, И.В. Кричевер, С.А. Богатый, А.Н. Дранишников, М.В. Смуров, С.В. Струков, В.Н. Дубровский, А.А. Русаков, А.Б. Скопенков и др. Последние несколько лет таким семинаром руководят энергичные молодые наши выпускники В.З. Шарич и А.А. Пономарев; более того, стали традиционными летние олимпиадные школы, которые, в основном, они и организуют.

Летняя двухпредметная школа для победителей олимпиад по математике и информатике 2004 года, например, проводилась для небольшого числа участников, и ее отличительной особенностью являясь то, что для некоторых ее участников по итогам работы в ней решался вопрос о из зачислении в нашу школу. Тематика занятий была следующей: элементарная теория чисел (А.А. Егоров); арифметика; алгоритмы; сложность вычислений (В.Н. Чубариков); вписанные и описанные многоугольники (Г.И. Шарыгин); планарные графы, плоские лабиринты, дискретная геодезическая задача (А.А. Часовских); задачи на решетках (В.В. Вавилов, О.Н. Герман, А.В. Устинов); целозначные многочлены (В.З. Шарич). В период работы летней школы прошли три тренировочные олимпиады, математический бой.

Итоги участия в олимпиадах наших учеников *довольно значительны.* Достаточно сказать, что только на международных олимпиадах наши воспитанники завоевали 12 золотых, 16 серебряных и 9 бронзовых медалей. Не менее внушительны успехи наших олимпийцев на Всесоюзных и Всероссийских математических олимпиадах: 27 дипломов первой степени, 60 дипломов второй степени, 46 дипломов третьей степени и 12 похвальных отзывов (поименный список см. в приложении 1 в книге автора "Школа математического творчества" (– М.: "РОХОС", 2004 г.)).

Преподаватели школы всегда поддерживают и интересуются успехами наших олимпийцев, гордятся их успехами. Вместе с тем, мы призываем школьников очень осторожно относится к успехам на олимпиадах. Так в предисловии к одной из олимпиадных книг А.Н. Колмогоров, например, писал: "Участие в школьных математических кружках и олимпиадах может помочь каждому оценить свои собственные способности, серьезность и прочность своих увлечений математикой... Желая... всяческих успехов в решении задач и побед на школьных, городских, Всероссийских олимпиадах, я хочу в то же время заметить, что пути к серьезной работе в области математической науки разнообразны. Одним легче дается решение замысловатых задач, другие вначале не выделяются на этом поприще, но, двигаясь медленно, овладевают глубоко и серьезно теорией и несколько позднее научаются работать самостоятельно. В конечном счете, при выборе математики как предмета основных интересов и работы на долгое будущее каждый должен руководствоваться собственной самооценкой, а не числом премий и похвальных отзывов на олимпиадах...".

Сейчас количество самых разнообразных математических соревнований школьников, организуемых в Москве, и вообще в стране, на мой взгляд, превысило разумные границы и зачастую уводит учащихся в сторону от полноценного обучения математике.

Наши преподаватели

Для осуществления обширной педагогической и воспитательной деятельности, конечно, необходимы преподаватели, обладающие высокой квалификацией. Существенным моментом здесь является подбор лекторов, перед которыми стоят непростые задачи: курс должен полностью покрывать обязательную программу массовой школы, он должен быть в русле положений о непрерывной математической подготовке, т.е. обеспечивать быструю адаптацию к университетским курсам и при этом не дублировать там, где это возможно, эти самые университетские курсы, он должен *расширять кругозор и способствовать повышению математической культуры в целом*, он должен содержать задачи практического содержания и быть тесно увязанным с другими школьными дисциплинами. Источником таких преподавательских кадров был и остается Московский университет, его профессора и доценты, аспиранты и студенты, причем зачастую — выпускники нашей школы. Основным критерием при подборе преподавателей являются личная научная и творческая активность, опыт и желание работы со школьниками. Другими критериями при подборе всегда являлся общий уровень культуры приглашаемых, их туристические, спортивные достижения и другие личные интересы. Роль учителя в школе для любознательных, увлеченных и талантливых детей особенно велика, его труд огромен, тяжел и его деятельность бывает эффективной (“научить учиться думать”) только тогда, когда он сам является неординарной личностью, активным, неравнодушным, творческим и увлеченным человеком.

Нет одинаково способных людей, каждый из них индивидуален. Поэтому целенаправленная *работа по развитию способностей учащихся* не может не использовать индивидуальные методы работы, которые учитывали бы особенности учащихся и способствовали активизации их учебной деятельности. Каждый ученик нуждается в личном руководстве учителя и в его внимании к конкретным проблемам учащегося. Именно этим мотивируется наличие на уроке математики двух (а иногда и трех) преподавателей математики. В школе всегда был (и сложился сейчас), в основном, дружный и работоспособный коллектив преподавателей, который и решает самые разнообразные задачи — от организационных, культурно-просветительских и воспитательных до методических и научных.

На каждую математическую лекцию отводится один академический час. Продумать такую лекцию довольно трудное дело, так как сам отобранный лекционный материал должен быть замкнут и “не растягиваться” на длительное время. Много времени и усилий уходит на электронную и печатную подготовку (когда она делается) текстов лекций для учащихся. Кроме того, мы стремимся к тому, чтобы изучаемые темы (и курс в целом) имели, по возможности, законченный характер, как это бывает в хорошем научном исследовании или научной теории и *способствовали развитию интереса к ведению (пусть даже самых маленьких) самостоятельных научных исследований.*

Д.И.Гордеев, “Секундочку помечтали...”

А.Н. Колмогоров очень тщательно подбирал преподавателей (особенно в первые десять лет работы школы) и, прежде чем пригласить в школу, часто проводил личные собеседования с кандидатами. Примерами этого может служить своеобразный “экзамен” на даче в Комаровке, куда приглашались некоторые будущие преподаватели как для более тесного знакомства, так и для беседы, которая включала и несколько чисто математических тем. Более того, чтобы укомплектовать штат преподавателей математики и поддержать их, А.Н. Колмогоров держал долгое время на научных должностях в своей университетской лаборатории статистических методов А.А. Егорова, Д.И. Гордеева, В.В. Вавилова, О.С. Смирнову (с основными обязанностями в школе). О Д.И. Гордееве следует сказать особо: он окончил механико-математический факультет под научным руководством А.Н. Колмогорова, затем с первых дней работал в школе-интернате №18 при МГУ и очень увлекался живописью; затем он перестал вести активную научную работу — сосредоточился на преподавании в ФМШ и на живописи (в школе в течение 1967 работала мастерская Д.И. Гордеева). После рождения известной группы “Двадцать московских художников” он прекратил свою работу в школе, став профессиональным художником.

Директорами школы-интерната, с одобрения А.Н. Колмогорова, начиная с 1971 года были выпускники механико-математического факультета МГУ и его аспирантуры: И.Т. Тропин, В.Л. Натяганов, Д.Л. Абраров, Е.А. Ивин, К.Л. Козлов; в настоящее время директором СУНЦ МГУ работает доцент А.А. Часовских. Первым директором спецшколы–интерната № 18 при МГУ работал П.А. Кузнецов, также математик, после которого эту обязанность выполняла историк Р.А. Острая. Освобожденными секретарями комсомольской организации в школе (оставаясь и преподавателями) работали в разные годы, по рекомендации механико-математического факультета (также при согласовании с А.Н. Колмогоровым и при его одобрении), выпускники механико-математического факультета МГУ (в первые годы работали школьники В. Шумилин, В. Крайзман и историк Р. Невский) В.В. Вавилов, И.И. Мельников, В.Л. Ковалев, Е.Б. Федоров, А.А. Русаков, С.И. Карташов, В.П. Колпаков, А.А. Васильев.

Преподаватели кафедры всегда широко участвовали и участвуют сейчас в общественной жизни школы. Футбольно-математическая школа (от ФМШ) собирает много зрителей, когда в первенстве школы, или в товарищеских встречах, по футболу (баскетболу, волейболу, шахматам) играют команды школьников против команды преподавателей (много лет существовала “математическая команда” по этим вида спорта; сейчас — сборные преподавателей). Застрельщиками и инициаторами многих туристических походов (например, ставшая традиционной “Звездочка”) являлись и являются преподаватели математики. Музыкальные вечера и лекции по живописи А.Н. Колмогорова, работа музыкального клуба “Топаз” (А.Т. Фоменко, В.Ф. Пахомов, А.Н. Звонкин), музыкальные программы В.Н. Дубровского, работа Клуба интересных встреч, выпуски “Физико-математического вестника” (более 60 выпусков — бессменный редактор Г.Г. Григорьев) и радиогазеты, КВНы, различные театральные постановки (начиная с Ю. Кима), математические бои и другие научные соревнования, летние трудовые лагеря в Крыму и строительные отряды в Москве, Смоленске и на Сахалине, учебно-познавательные (и в рамках обмена) поездки за рубеж в Венгрию, Польшу, Югославию, Англию, США и др., создание школьного музея (сейчас многое утрачено), литературные чтения (иногда на уроках математики!) и т.д. — все перечислить практически невозможно.

Опыт работы нашей физико-математической школы оказал значительное влияние (а сама школа долгое время служила экспериментальной площадкой) на идеи модернизации школьного математического образования в стране, проводимой в шестидесятых и семидесятых годах прошедшего столетия, и которая осуществлялась под руководством А.Н. Колмогорова. Реформа тогда явно назрела (это мнение разделяли все здравомыслящие ученые и работники народного образования), так как школьный курс математики пришел в значительное противоречие с жизненными потребностями общества в математических знаниях, умениях и навыках, которыми обладали тогда выпускники школ. Реформирование школьного образования, да еще в многонациональной и огромной стране, дело далеко не простое: разработка программ и методических приемов, создание учебников и задачников требует усилий многих людей, значительного времени и глубоких экспериментов. Для этого требовались высококвалифицированные преподаватели средней школы, разделяющие основные положения проводимой реформы, новаторы, люди с творческими чертами характера. Именно в самый разгар этой работы в авторские коллективы новых учебников по курсам геометрии, алгебры и началам анализа А.Н. Колмогоровым были включены сотрудники нашей школы, бывшие ее ученики и воспитанники Московского университета Б.М. Ивлев, А.М. Абрамов, А.Н. Земляков, А.Б. Сосинский, В.А. Гусев, А.А. Шершевский. После создания научно-популярного журнала “Квант”, что также являлось одним из важных реформаторских дел, где первым заместителем главного редактора был А.Н. Колмогоров, по его приглашению в составе редколлегии работали многие наши преподаватели: А.А. Егоров (работает с первых дней и по настоящее время), А.Н. Земляков, В.В. Вавилов, А.Б. Сосинский, Ю.П. Соловьев, В.Н. Дубровский, Н.П. Долбилин. Желание помочь постановке школьного математического образования в стране привело к организации в 1989 году при кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ кабинета методики преподавания математики, и основную инициативу здесь взяли на себя преподаватели школы-интерната

В.В. Вавилов и И.И. Мельников (бессменный заведующий кабинета, ныне — профессор МГУ и государственный деятель); деятельность кабинета сейчас связана с проведением широкого спектра научно-педагогических исследований, и нацелена на приобретение студентами мехмата второй специальности — преподавателя математики, на работу с аспирантами и переподготовку учителей средней школы.

Сказанное выше, убедительно доказывает, что в известной полемике П.Л. Капицы и А.Н. Колмогорова по проблеме воспитания талантливых школьников оба оказались правы, а сама школа им. А.Н. Колмогорова, и кафедра математики также, стала *“клиникой, которая изучает и отрабатывает новые методы диагностики и лечения... и ее задача — внедрять передовые методы в жизнь ... ”*. Отметим, что среди наших более чем 6000 выпускников имеются члены-корреспонденты академий, доктора и кандидаты наук, специалисты технического профиля, политики, бизнесмены и т.д.(к сожалению, достаточно полных данных для публикаций пока нет). В значительной мере на базе нашей школы при МГУ были подготовлены и успешно защищены докторские диссертации В.А. Гусева и И.И. Мельникова, кандидатские диссертации А.М. Абрамова, А.Н. Землякова, Т.Н. Трушаниной, В.А. Бахтиной и др.; под руководством преподавателей кафедры и сейчас готовятся к защите несколько диссертаций на соискание степени кандидата педагогических наук. Уникальный факт, говорящий о многом, состоит в том, что О.Е. Долгалева и Ю.Е. Егоров, работающие вместе в одних классах, в один день (14 октября 2005) защитили в МГУ диссертации на соискание звания кандидата физико-математических наук, немного раньше такую диссертацию защитила А.В. Прошкина, а в скором времени предстоит и защита кандидатской диссертации Д.В. Алексеева. Члены кафедры математики являются авторами многих статей методического и научно-популярного характеров, книг и учебников для средней школы (далеко не полная библиография только широко известных и важных работ сейчас насчитывает свыше пятисот наименований — см. следующий номер журнала ”Математическое образование”).

В этом учебном году на кафедре математики школы им. А.Н. Колмогорова при Московском государственном университете работают: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН Трещев Д.В., д.ф.м.н. и профессора Виноградов О.П. (зав. каф.), Шавгулидзе Е.Т., Бутузов В.Ф., Сергеев И.Н., к.ф.м.н., профессор Макаров А.В.; к.ф.м.н., профессор Часовских А.А. (директор СУНЦ); доценты, к.фм.н. Дубровский В.Н., Довбыш С.А., Русаков А.А., Вавилов В.В., Устинов А.В., Носов М.В., Нараленкова И.И; доцент Рождественский В.В.; к.ф.м.н., ст. преподаватель Шкаликова Н.А.; ст. преподаватель, к.ф.м.н. Селиванова И.Ю., старшие преподаватели Егоров А.А., Семенова Т.Г., Сыркин Г.И,; к.ф.м.н., ассистенты. Шарыгин Г.И., Евдокименко А.П.; ассистенты Егоров Ю.Е., Алексеев Д.В., Николаев Ю.П. (ученый секретарь), Степанов А.А., Долгалева О.Е., Прошкина А.В., Рубан М.Е., Герман О.Н., Пономарев А.А.; к.ф.м.н., научный сотрудник Колосов В.А., к. пед. наук, мл. научный сотрудник Шивринская Е.В.; на общественных началах работают д.ф.м.н. Скопенков А.Б. и студент механико-математического факультета МГУ Шарич В.З.

В сноске на первой странице этой статьи указано, что подготовку этой статьи (а также и многих других) поддержал “Клуб ФМШ Колмогорова”. Основная идея учредителей Клуба (среди них преподаватели школы разных лет, математики А.М. Абрамов, Н.Б. Алфутова, В.Н. Дубровский, А.В. Назаренко, В.Ф. Пахомов, А.А. Русаков, В.Н. Чубариков, Е.В.Щепин и др.) при его создании, который должен объединять выпускников, преподавателей, ветеранов школы, — это идея создать содружество людей, помогающих друг другу и школе только потому, что они все они сопричастны с жизнедеятельностью этого прекрасного учебного заведения (которая проходит, конечно, не без проблем). “Клуб ФМШ Колмогорова” (учрежден в апреле 2004 года) — некоммерческое партнерство с фиксированным членством, созданный для того, чтобы его члены активно общались друг с другом, вместе работали по реализации своих идей, нацеленных на процветание своей родной и любимой школы (почта Клуба: club-fmsh@mail.ru). Сейчас идет формирование Клуба, становление форм его работы, отработка конкретных реализаций самых разнообразных и многочисленных идей его членов.

Я закончу эту работу довольно большими выдержками из воспоминаний профессора Московского университета В.М. Тихомирова, ученика А.Н. Колмогорова, где он делится своими воспоминаниями и размышлениями о целях и задачах математического образования и о той роли, которую играл его учитель при реализации реформаторских идей по пересмотру содержания математических дисциплин в средней школе. “По мнению Андрея Николаевича. . . , — пишет В.М. Тихомиров — курс математики должен быть *научным, строгим и современным.*

Далее, среди целей математического образования, должно быть, по мнению Андрея Николаевича, и присутствовать *формирование научного мировоззрения.* А.Н. Колмогоров писал, например: “Вряд ли нужно доказывать, насколько желательно с общеобразовательной точки зрения достигнуть того, чтобы все учащиеся могли вполне конкретно понять хотя бы ньютоновскую концепцию математического естествознания”. В той же статье В.М. Тихомиров отмечает, что при обдумывании основных моментов изменения школьных программ по математике “Он был *идеалистом.* Не в философском или религиозном значении этого слова, а в своем взгляде на окружающий мир. . . Он видел людей и окружающую действительность как бы сквозь особые волшебные очки, в несравненно лучшем свете, чем оно было в реальности. . . . Андрей Николаевич полагал, что вообще мир населен людьми благородными, культурными, стремящимися к поиску истины — словом, похожими на него самого и на тех, с которыми он всю жизнь общался. И мне представляется, что планируя будущую программу средней школы, он исходил из такого идеального образа советского школьника... Это была реформа для идеального государства. . .

Глядя на мир сквозь свои волшебные очки, Андрей Николаевич полагал, что едва ли не самым привлекательным и желанным видом человеческой деятельности для каждого является творческий труд, направленный на поиск истины. А потому, в частности, стремление к высшему образованию является естественным и безусловным для каждого молодого человека. Он много раз писал, что жизнь человеческая должна быть спланирована так, чтобы избранному виду *творческой деятельности* человек отдал максимум того, на что он способен.

“. . . Если во главу угла ставить личность, ее права, ее интересы, то государство должно быть институтом, призванным удовлетворять естественные и непременные права личности. Среди этих прав, вне всякого сомнения, должно быть право на получение *математического* (как и любого другого) образования. Но личность должна быть действительна свободна, и в частности свободна требовать от государства того математического образования, которое соответствует этой личности, ее желаниям и возможностям. А значит, образование не может, не должно быть *единым.*

. . . Целью математического образования, по моему скромному мнению, должно быть **развитие**. Развитие навыков оперирования с числами и фигурами, пространственного воображения, логического мышления — словом, развитие интеллекта. Ничто не может обучить этому лучше, чем математика, — об этом говорит весь опыт человечества. При всем этом обучение должно быть интересным, увлекательным, поучительным. Таким должно быть обучение для всех. Но отдельно нужно подумать и о тех людях, которые действительно испытывают удовольствие от творчества, от поиска истины, от красоты самой математики. Этих людей нужно учить по особому. Таких людей не так уж мало — такова природа человеческая. И чем более благополучно общество, чем больше в нем благоденствия, тем значительнее этот слой и тем сильнее он облагораживает все общество. И этот слой людей также должен обладать правом получить адекватное, глубокое математическое образование”.

Мне представляется, что наша школа, *школа научного творчества* — школа им. академика А.Н. Колмогорова Специализированного Учебно-Научного Центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и является, в значительной мере, реализацией именно этих идей и мыслей об идеальных учащихся и их преподавателях, об идеальной школе в свободном государстве.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-матем. наук.
Email: vvavilov@mtu-net.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефонам: (095) 362-82-56 или (095) 248-64-83.

Адрес для корреспонденции Фонда: 111250, г.Москва, ул.Солдатская, д. 6, корп. 2, кв. 69.

E-mail: fmop@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2005 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2005 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents