Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год девятый

№4 (35)

Октябрь-декабрь 2005 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 4 (35), 2005 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (35), октябрь – декабрь 2005 г.

Содержание

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2005 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.12.2005 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Вокруг теоремы Холла (окончание)

А. Ю. Эвнин

Завершаем начатую в предыдущем номере публикацию учебного пособия, предназначенного для студентов специальностей «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем». Отдельным изданием пособие выходит в издательстве Южно-Уральского Государственного Университета.

4. Алгоритмы для задач о двудольных графах

4.1. Теорема Бёржа

Пусть M — паросочетание в графе G (не обязательно двудольном). Рёбра, входящие в M, назовём черными, а остальные рёбра графа — белыми. Простая цепь — **чередующаяся** (**относительно** M), если любые два соседних ребра в этой цепи разного цвета. Вершину, покрываемую некоторым ребром из M, назовём **насыщенной** (**относительно** M); в противном случае вершина — **ненасыщенная** (или **свободная**) (**относительно** M).

Если в графе имеется чередующаяся цепь, соединяющая две ненасыщенные вершины, то легко получить новое паросочетание, в котором на одно ребро больше, чем в M: достаточно поменять цвета рёбер указанной цепи. Поэтому такую цепь называют **увеличивающей относительно** M, или M-**увеличивающей**. Очевидно теперь, что относительно наибольшего паросочетания увеличивающей цепи не существует. Оказывается, верно и обратное.

Теорема 4.1 (К. Бёрж, 1957 г.). *Паросочетание M в графе G является наибольшим тогда и только тогда, когда в G не существует увеличивающей относительно M цепи.*

Доказательство. *Необходимость* уже доказана. Убедимся в *достаточности.* Пусть паросочетание M не допускает увеличивающей относительно себя цепи, а M' — некоторое наибольшее паросочетание. Рассмотрим подграф графа G, образованный рёбрами из симметрической разности $M \oplus M'$. В нём степень каждой вершины не превосходит 2, в силу чего этот подграф распадается на циклы и простые цепи. Поскольку в цикле рёбра из M и M' чередуются, цикл имеет чётную длину. Чередование происходит и в каждой цепи. Цепь не является увеличивающей ни относительно M (по условию теоремы), ни относительно M' (наибольшего паросочетания). Отсюда вытекает, что длина цепи является чётным числом. Стало быть, в симметрической разности $M \oplus M'$ поровну рёбер из M и M', а множества M и M' равномощны, то есть M, как и M', является наибольшим паросочетанием. □

4.2. Нахождение наибольшего паросочетания

Теорема Бёржа обосновывает корректность следующего способа нахождения наибольшего паросочетания в графе.

I. Построить произвольное паросочетание M.

II. Искать M-увеличивающую цепь.

III. Если такая цепь P найдена, то заменить M на $M \oplus P$ и перейти к шагу II. В противном случае закончить работу (текущее паросочетание M является наибольшим).

В случае **двудольного графа** поиск M-увеличивающих цепей происходит довольно просто. Используем для этого механизм пометок.

Алгоритм $\mathcal{A}$

1. Построить какое-нибудь паросочетание M.

2. Свободные относительно M вершины из доли V_1 пометить нулём, остальные вершины считаются непомеченными.

3. Для каждой помеченной на предыдущем шаге вершины $v_i \in V_1$ пометить её номером i все непомеченные вершины из V_2, которые соединяются с v_i белыми рёбрами.

   Если при этом окажется помеченной свободная вершина, то M-увеличивающая цепь P найдена; она восстанавливается по меткам, начиная с указанной вершины: метка вершины есть номер очередной вершины P. Увеличивающую цепь перекрасить (т.е. заменить M на $M \oplus P$) и перейти к шагу 2.

   Если же новых пометок на этом шаге не возникает, перейти к 5.

4. Для каждой помеченной на предыдущем шаге вершины $u_j \in V_2$ пометить её номером j непомеченную вершину из V_1, которая соединяется с u_j чёрным рёбром. Если новых пометок на этом шаге не возникает, перейти к шагу 5, иначе вернуться к шагу 3.

5. Текущее паросочетание M является наибольшим. Конец работы.

Проиллюстрируем работу изложенного алгоритма на следующем примере. Для графа на

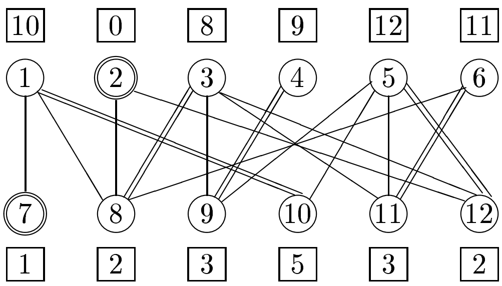


Рис. 1.

рис. 1 текущее паросочетание M состоит из рёбер, изображённых двойными линиями. Напомним, что рёбра из M мы называем чёрными, а остальные рёбра графа — белыми. Свободные вершины изображены двойными кружками.

В доле V_1 только одна свободная вершина — с номером 2; она помечается нулём (пометки — это числа в прямоугольниках). Белые рёбра (изображены тонкими линиями) соединяют эту вершину с вершинами 8 и 12, которые получают пометку 2.

Чёрное ребро 8-3 даёт пометку 8 вершине 3; чёрное ребро 12-5 даёт пометку 12 вершине 5.

Из вершины 3 к непомеченным вершинам ведут два белых ребра, и их другие концы — вершины 9 и 11 — получают пометку 3. Аналогично, у вершины 10 возникает пометка 5.

Далее помечаются вершины из первой доли: 4, 1 и 6.

Наконец, удаётся пометить свободную вершину 7 из второй доли — номером 1. Идя по пометкам, начиная с этой вершины, находим M-увеличивающую цепь: 7–1–10–5–12–2. Перекрасим её ребра и получим новое (более мощное, чем ранее) паросочетание (см. рис. 2). Построенное паросочетание является совершенным (оно покрывает все вершины графа), значит, и наибольшим.

Замечание 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ является, по сути, "проекцией" алгоритма Форда – Фалкерсона нахождения максимального потока в сети (см., например, [21]).

Подробно поясним этот тезис. Превратим двудольный граф $G(V_1, V_2)$ в транспортную сеть следующим образом:

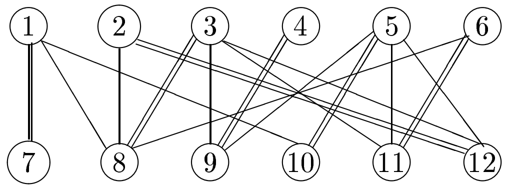


Рис. 2.

- ориентируем каждое ребро $u_i v_j$ в направлении от V_1 к V_2;
- к множеству вершин графа добавим источник a и сток b;
- проведём дуги из источника a ко всем вершинам из V_1;
- из каждой вершины доли V_2 проведём дугу к стоку b;
- положим пропускные способности всех дуг равными единице.

Существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми целочисленными потоками в этой сети и паросочетаниями исходного двудольного графа: по каждой дуге сети, соответствующей ребру $G(V_1, V_2)$, входящему (не входящему) в паросочетание, идёт единичный (соответственно нулевой) поток. При этом максимальному (по включению) паросочетанию будет отвечать полный поток. M-увеличивающей цепи

$$u_\alpha - v_\beta - u_\gamma - \cdots - v_\omega \tag{1}$$

соответствует цепь транспортной сети:

$$a \to u_\alpha \to v_\beta \leftarrow u_\gamma \to \cdots \to v_\omega \to b. \tag{2}$$

Перекраска рёбер в цепи (1) суть увеличение потока вдоль цепи (2). Например, ребро $u_\alpha - v_\beta$ было белым, а стало чёрным, соответственно поток по дуге $u_\alpha \to v_\beta$ из нулевого превратился в единичный; следующее ребро цепи $u_\gamma - v_\beta$ из чёрного стало белым, а поток по дуге $u_\alpha \to v_\beta$ стал нулевым.

Замечание 2. Несложно оценить трудоёмкость данного алгоритма. Пусть n — число вершин в доле V_1 (без ограничения общности можно считать, что в V_1 вершин не более, чем в V_2), а m — число рёбер графа $G(V_1, V_2)$. Тогда при работе алгоритма будет выполнено не более n итераций (итерацию составляют шаги 2, 3 и 4), а на каждой итерации порядка $O(m)$ действий. Стало быть, общее число операций есть $O(nm)$. Если $|V_1| = |V_2| = n$, то имеем оценку трудоёмкости, зависящую только от числа вершин: $O(n^3)$. В книгах [1] и [8] можно найти подробное изложение алгоритма Хопкрофта – Карпа трудоёмкости $O(n^{5/2})$. В книге [12] представлен алгоритм нахождения наибольшего паросочетания в произвольном графе (в общем случае, не двудольном), в котором число операций равно $O(n^3)$, где n — количество вершин графа.

4.3. Нахождение наименьшего вершинного покрытия

Вновь ограничимся случаем двудольного графа.

Оказывается, изложенный выше алгоритм $\mathcal{A}$ нахождения наибольшего паросочетания заодно позволяет обнаружить и наименьшее вершинное покрытие.

Пусть $A \subset V_1$ и $B \subset V_2$ — множества помеченных вершин обеих долей графа $G(V_1, V_2)$ по окончании работы алгоритма $\mathcal{A}$. Обозначим $\overline{A} = V_1 \setminus A$.

Теорема 4.2. *Множество $\overline{A} \cup B$ является минимальным вершинным покрытием графа $G(V_1, V_2)$.*

Доказательство. Пусть M — наибольшее паросочетание в графе $G(V_1, V_2)$, построенное в результате работы алгоритма $\mathcal{A}$. Рёбра, входящие в M, как и ранее, мы называем чёрными; а остальные рёбра графа для нас белые.

Доказательство теоремы разобьём на три этапа.

1) Докажем, что **концы любого чёрного ребра либо оба помечены, либо оба не помечены**.

   Возьмём произвольное чёрное ребро uv, где $u \in V_1,\ v \in V_2$.

   Если вершина v помечена, то на шаге 4 алгоритма $\mathcal{A}$ пометку получит и вершина u.

   Рассмотрим теперь случай, когда вершина v не помечена. Тогда непомеченной будет и вершина u. Действительно, u, будучи насыщенной вершиной, не помечается на 2-м шаге. Но и на 4-м шаге вершина u не получает пометку, так как она инцидентна единственному чёрному ребру — uv, а другой его конец не помечен.

   Утверждение доказано.

2) Проверим, что $C = \overline{A} \cup B$ — **вершинное покрытие графа.**

   Возьмём в графе $G(V_1, V_2)$ произвольное ребро $e = uv$, где $u \in V_1,\ v \in V_2$. Докажем, что $u \notin A$ или $v \in B$.

   Если это не так, то $u \in A$ (то есть u — помеченная вершина) и $v \notin B$ (v — непомеченная вершина). Тогда в силу утверждения 1 ребро e не может быть чёрным. Но оно и не белое, поскольку при помеченной вершине u и белом ребре uv на 3-м шаге алгоритма $\mathcal{A}$ вершина v получила бы пометку. Противоречие получено.

3) Заметим, что (благодаря утверждению 1)
   1) количество чёрных рёбер с помеченными концами равно $|B|$ — количеству помеченных вершин из доли V_2 (каждая из них инцидентна одному чёрному ребру);
   2) количество чёрных рёбер с непомеченными концами равно $|\overline{A}|$ — количеству непомеченных вершин из доли V_1 (любая такая вершина насыщенная, и из неё также исходит ровно одно чёрное ребро).

   Таким образом, $|M| = |B| + |\overline{A}| = |\overline{A} \cup B|$, то есть вершинное покрытие $\overline{A} \cup B$ равномощно наибольшему паросочетанию. В силу венгерской теоремы это означает минимальность вершинного покрытия. □

Как отмечалось в §1.4, дополнение к наименьшему вершинному покрытию графа является его наибольшим независимым множеством вершин. Значит, множество $A \cup \overline{B}$ — наибольшее независимое. Стало быть, алгоритм $\mathcal{A}$ (имеющий, как мы выяснили, полиномиальную трудоёмкость) позволяет наряду с наибольшим паросочетанием в двудольном графе найти также наименьшее вершинное покрытие и наибольшее независимое множество. Известно ([12]), что задачи определения наименьшего вершинного покрытия и наибольшего независимого множества для *произвольного графа* являются NP-полными, другими словами, для них нет эффективных алгоритмов решения (по крайней мере, они пока не известны науке). Очень важно, что для двудольных графов, возникающих во многих практических задачах, полиномиальные алгоритмы решения указанных задач существуют!

Пример. На рис. 3 изображён граф, в котором выделено наибольшее паросочетание и расставлены пометки, возникающие по окончании работы алгоритма $\mathcal{A}$. Имеем $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{6, 7\}$. Значит, вершины 4, 5, 6 и 7 образуют минимальное вершинное покрытие, а вершины 1, 2, 3, 8, 9, 10 — наибольшее независимое множество.

4.4. Венгерский алгоритм

Пусть $G(V_1, V_2)$ — взвешенный полный двудольный граф $K_{n,n}$ с матрицей весов рёбер $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} \geq 0$ есть вес ребра, соединяющего i-ю вершину доли V_1 с j-й вершиной доли V_2.

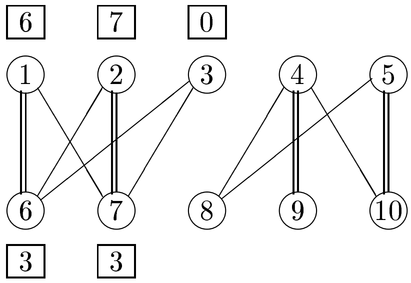


Рис. 3.

В **задаче о назначениях** требуется найти совершенное паросочетание минимального веса (ниже будем называть такое паросочетание **оптимальным**). Название задачи объясняется следующей её трактовкой. Пусть u_i — i-й работник, v_j — j-я работа, а c_{ij} — стоимость выполнения i-м работником j-й работы. Тогда совершенное паросочетание наименьшего веса описывает такое распределение работ между работниками (*назначение* работников на работы), при котором каждый работник выполняет ровно одну работу, а суммарная стоимость выполнения работ минимальна.

Заметим, что если к весам всех рёбер, инцидентных некоторой фиксированной вершине, прибавить одно и то же число (не обязательно положительное), то упорядоченность совершенных паросочетаний графа по их весу не изменится, поскольку каждое такое паросочетание содержит ровно одно ребро с изменённым весом. Назовём такую операцию **приведением**. Для матрицы весов приведение означает прибавление константы ко всем элементам некоторого столбца или строки.

С помощью операций приведения легко свести задачу к графу, в котором каждая вершина инцидентна некоторому ребру нулевого веса (будем называть такие рёбра **нулевыми**), и при этом веса всех рёбер остаются неотрицательными числами. Если в таком графе существует совершенное паросочетание нулевого веса (в матрице весов ему соответствуют n независимых нулей), очевидно, оно и будет решением задачи. Основная идея излагаемого ниже **венгерского алгоритма** (Г. Кун, 1955 г.) состоит в том, что в результате поиска M-увеличивающей цепи в $G(V_1, V_2)$, где M — паросочетание из нулевых рёбер, удаётся найти такие операции приведения, в результате которых количество нулевых рёбер увеличивается. В некоторый момент возникает граф, в котором есть совершенное паросочетание нулевого веса.

Алгоритм $\mathcal{B}$

1. Из каждой строки матрицы C вычесть её минимальный элемент. Так же поступить со столбцами.

2. Пусть N — множество нулевых рёбер текущего графа $G = G(V_1, V_2)$ (с матрицей весов C). Найти в графе $G' = \langle V_1 \cup V_2, N\rangle$ с помощью алгоритма $\mathcal{A}$ наибольшее паросочетание M, беря в качестве начального паросочетания текущее наибольшее паросочетание (если шаг 2 алгоритма $\mathcal{B}$ выполняется не впервые). Если найденное паросочетание M — совершенное, то конец работы.

3. Пусть $A \subset V_1$ и $B \subset V_2$ — множества помеченных вершин обеих долей графа G по окончании работы алгоритма $\mathcal{A}$ (напомним, что пометки расставляются с целью найти M-увеличивающую цепь). Вычислить d — наименьший вес ребра, соединяющего помеченную вершину из V_1 с непомеченной вершиной из V_2. Из всех строк, отвечающих вершинам из A, вычесть число d. Ко всем столбцам, отвечающим вершинам из B, прибавить число d. Перейти к шагу 1.

Обоснуем **корректность** алгоритма $\mathcal{B}$. Во-первых, применяемые в нём операции приведения не меняют множества оптимальных паросочетаний. Во-вторых, алгоритм заканчивает работу, когда обнаруживает в двудольном графе с неотрицательными весами рёбер совершенное паросочетание нулевого веса. Осталось убедиться, что такой момент непременно наступит.

После первого шага работы алгоритма получаем граф, в котором каждая вершина инцидентна хотя бы одному нулевому ребру. Поэтому после шага 2 все вершины из V_1, не покрытые текущим паросочетанием, помечены. Значит, на шаге 3 множество A непусто. С другой стороны, если найденное в результате выполнения шага 2 паросочетание не является совершенным, это означает, что не все вершины из V_2 удалось пометить — значит, непусто и множество $\overline{B} = V_2 \setminus B$. Вес любого ребра, соединяющего вершину i из A с вершиной j из $\overline{B}$, положителен, так как в противном случае по алгоритму $\mathcal{A}$ вершина j должна была бы получить пометку. Таким образом, $d > 0$.

Посмотрим, что происходит с весами рёбер на шаге 3.

Рёбра из подграфа $G(A, B)$ сохраняют свой вес, поскольку первоначальное вычитание числа d компенсируется последующим его прибавлением.

Вес каждого ребра из $G(\overline{A}, B)$ увеличивается на d.

Поскольку $d > 0$ — наименьший вес ребра в графе $G(A, \overline{B})$, после шага 3 в этом подграфе появится хотя бы одно нулевое ребро.

Наконец, рёбер из $G(\overline{A}, \overline{B})$ никакие изменения не коснутся.

Значит, после шага 3 веса всех рёбер остаются неотрицательными. Как было отмечено в предыдущем параграфе, концы любого чёрного ребра либо оба помечены, либо нет. В первом случае ребро входит в $G(A, B)$, во втором — в $G(\overline{A}, \overline{B})$. Таким образом, после шага 3 рёбра текущего максимального паросочетания M остаются нулевыми. С другой стороны, рёбра из $G(A, \overline{B})$, ставшие нулевыми, при последующем выполнении шага 2 расширяют множество B. Поэтому на некоторой итерации будут найдены M-увеличивающая цепь и новое, более мощное, паросочетание M. Рано или поздно в текущем графе будет будет существовать совершенное паросочетание из нулевых рёбер. $\square$

Проиллюстрируем работу алгоритма $\mathcal{B}$ следующим **примером**.

Пусть веса рёбер графа $K_{4,4}$ задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После вычитания минимальных элементов строк и столбцов последовательно получим матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим граф G', образованный нулевыми рёбрами (текущего) графа G (см. рис. 4). Выделим

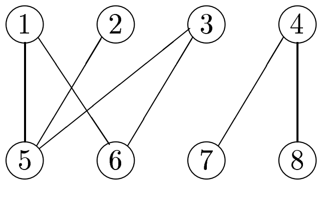


Рис. 4.

в нём максимальное по включению паросочетание (его рёбра изобразим двойными линиями) и осуществим процесс расстановки пометок согласно алгоритму $\mathcal{A}$. Пометки последовательно получают вершины 2, 5, 1, 6, 3 (см. рис. 5). Таким образом, множество помеченных вершин из V_1 и V_2 есть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{5, 6\}$ соответственно. Теперь в матрице весов подграфа $G(A, \overline{B})$, образованной тремя верхними строками и двумя последними столбцами матрицы C, находим наименьший элемент: $d = 1$. В результате вычитания числа d из строк, отвечающих

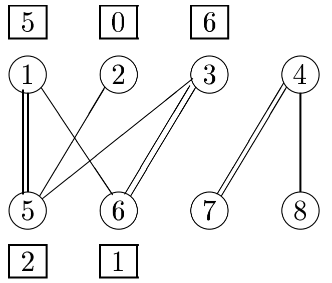


Рис. 5.

A, а затем прибавления d к столбцам, отвечающим B, возникают матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возвращаемся к шагу 2. Теперь имеем граф G', изображённый на рис. 6, в котором существует

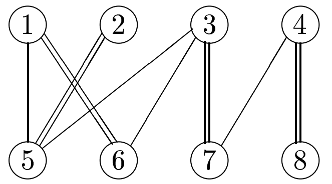


Рис. 6.

совершенное паросочетание. Итак, оптимальное паросочетание состоит из рёбер 16, 25, 37, 48, а его вес, как легко подсчитать, равен 12 (разумеется, в исходном графе).

В заключение — несколько замечаний.

Замечание 1. Трудоёмкость алгоритма $\mathcal{B}$ оценивается как $O(n^4)$ операций. Различные варианты его эффективной программной реализации можно найти в монографиях [1] и [12]. Известны модификации венгерского алгоритма, имеющие трудоёмкость $O(n^3)$.

Замечание 2. Часто рассматривают также задачу нахождения во взвешенном двудольном графе совершенного паросочетания **наибольшего** веса. Читателю предлагается подумать над тем, как преобразовать матрицу весов исходного графа, чтобы перейти к графу, в котором оптимальное паросочетание (наименьшего веса) соответствует паросочетанию наибольшего веса в исходном графе. В [12] и [9] описываются весьма изощрённые алгоритмы нахождения максимального по весу паросочетания в произвольном графе трудоёмкости $O(n^3)$, где n — число вершин графа.

4.5. Задача о назначениях на узкое место

Пусть на некотором конвейере (поточной линии) имеется n рабочих мест. Мастер должен расставить по этим местам n работников. Известна производительность труда c_{ij} i-го работника на j-м месте. Производительность конвейера определяется минимальной производительностью занятых на нём работников. Рабочее место, на котором реализуется минимальная производительность при заданной расстановке работников (другими словами, при заданном *назначении*), и есть **узкое** место этого назначения.

Нужно помочь мастеру “сделать узкое место как можно шире”: найти такое распределение работников по рабочим местам, при котором скорость конвейера (т.е. минимальная производительность занятых работников) будет максимальной.

На языке теории графов задача состоит в *выделении во взвешенном двудольном графе такого совершенного паросочетания, в котором наименьший вес ребра будет наибольшим.*

Другими словами, требуется найти такое наибольшее число f, при котором в графе существует совершенное паросочетание M, составленное из рёбер, чей вес не меньше f (паросочетание M и будет искомым).

Это можно сделать с помощью дихотомического поиска. Суть его в том, что на каждом шаге множество, содержащее искомое значение, сокращается вдвое. В описываемом ниже алгоритме индексы a и b задают границы указанного множества.

Алгоритм $\mathcal{C}$

1. Отсортировать рёбра по возрастанию веса, получив массив $w_1, w_2, \ldots, w_{n^2}$.

2. Положить $a = 1,\ b = n^2 - n + 2$.

3. Если $a = b - 1$, перейти к шагу 6.

4. Положить $k = \left[\frac{a+b}{2}\right],\ f = w_k$.

5. С помощью алгоритма $\mathcal{A}$ искать совершенное паросочетание в подграфе G' графа G, образованном рёбрами, чей вес не меньше f.

   Если такое паросочетание найдено, то объявить его текущим и положить $a = k$. В противном случае положить $b = k$.

   Перейти к шагу 3.

6. Текущее паросочетание является оптимальным. Конец работы.

Нетрудно оценить число операций при выполнении алгоритма $\mathcal{C}$. Наиболее трудоёмкий шаг 5 выполняется примерно $\log_2(n^2 - n + 1)$ раз. Поэтому общая трудоёмкость — $O(\log_2 n \cdot n^3)$ операций. В случае использования вместо $\mathcal{A}$ более эффективного алгоритма трудоёмкость алгоритма $\mathcal{C}$ соответственно понизится.

5. Упражнения[1]

1. Непосредственно проверить утверждения теорем Менгера 1.1 и 1.2 (при различных вариантах выбора вершин a и b) для а) графа куба; б) графа Петерсена.

2. Найти числа вершинной и рёберной связности для графов: а) C_n; б) K_n; в) $K_{m,n}$; г) W_n.

3. В коробке лежит 1000 карандашей. Известно, что среди любых 10 карандашей с попарно различными цветами найдутся два карандаша одинакового размера, а среди любых 10 карандашей попарно различных размеров найдутся два одноцветных. Доказать, что в коробке найдётся 112 карандашей одного цвета или 112 карандашей одного размера.

4. Перманент квадратной матрицы есть сумма всевозможных произведений её элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Пусть A — двоичная матрица размера $n \times n$. Доказать, что её перманент равен нулю тогда и только тогда, когда в A существует i строк и j столбцов, где $i + j \geq n + 1$, на пересечении которых стоят одни нули.

5. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. В каждой деревне общее число женихов и невест не больше половины общего их числа. Доказать: можно всех переженить так, что в каждой паре жених и невеста будут из разных деревень.

6. На танцевальном вечере каждый юноша знаком с k девушками, а каждая девушка знакома с k юношами. Доказать, что можно провести k (медленных) танцев так, чтобы каждый участник вечера станцевал со всеми своими знакомыми (противоположного пола).

7. На шахматной доске пометили 16 из 64 клеток так, что на каждой вертикали и горизонтали оказалось по две помеченные клетки. Доказать, что на помеченных клетках можно

[1]В упражнениях имеются ссылки на параграфы 1-3, опубликованные в предыдущем выпуске журнала. — *Прим. ред.*

расставить 8 чёрных и 8 белых фигур так, чтобы на каждой вертикали и каждой горизонтали стояло по одной белой и одной чёрной фигуре.

8. Вуз посылает 8 юношей и 8 девушек на стажировку по восьми специальностям в 8 зарубежных университетов, причем каждый университет принимает по два человека и учит их двум разным специальностям, и каждой из восьми специальностей учат два университета. Всегда ли можно так распределить студентов, чтобы в каждом университете стажировались юноша и девушка, и при этом как юноши, так и девушки обучались (в совокупности) по всем восьми специальностям?

9. Выполняя домашнее задание, каждый студент группы решил по 4 задачи. Известно, что каждая задача была решена четырьмя студентами. Доказать, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый студент рассказал решение ровно одной задачи и чтобы все задачи были разобраны (по одному разу).

10. Показать, что теорема 3.2 есть следствие теоремы 3.3.

11. Вывести теорему 3.1 из теоремы 3.2.

12. Имеются 27 карточек с числами от 1 до 27. Двое показывают следующий фокус. Первый получает четыре карточки, выбранные случайным образом. Одну из них он убирает, а три оставшиеся выкладывает в ряд. Второй должен узнать спрятанную карточку. Могут ли участники договориться так, чтобы по выложенным карточкам можно было узнать спрятанную?

13. Пусть в двудольном графе $G(V_1, V_2)$ степень любой вершины из V_1 не меньше k, а степень любой вершины из V_2 не больше k, где k — некоторое натуральное число. Доказать, что в этом графе существует совершенное паросочетание.

14. Пусть A — n-элементное множество, $n \geq 3$, натуральное число k удовлетворяет условию $1 \leq k < n/2$, V_1 — множество k-элементных подмножеств множества A, V_2 — множество $k+1$-элементных подмножеств множества A, $G(V_1, V_2)$ — двудольный граф, в котором вершины $X \in V_1$ и $Y \in V_2$ смежны тогда и только тогда, когда $X \subset Y$. Доказать, что в $G(V_1, V_2)$ существует совершенное паросочетание.

15. Рассмотрим булеан (т.е. множество всех подмножеств) как упорядоченное множество (отношением порядка является отношение включения). Основываясь на результате предыдущей задачи, доказать, что существует разбиение булеана n-элементного множества на цепи, каждая из которых содержит множество мощности $[n/2]$.

16. Доказать **лемму Шпернера**: *максимальная длина антицепи в булеане n-элементного множества равна $C_n^{[n/2]}$.*

17. Доказать венгерскую теорему с помощью теоремы 1.1.

18. Доказать теорему 1.10 с помощью теоремы Дилворта.

19. **[Одномерная теорема Хелли].** *Если отрезки прямой попарно пересекаются, то найдётся точка, принадлежащая всем отрезкам одновременно.* Доказать.

20. На прямой расположено $mn+1$ отрезков. Доказать, что из них можно выбрать $m+1$ попарно непересекающихся отрезков или $n+1$ отрезков, имеющих общую точку.

21. Пусть в двудольном простом графе $G(V_1, V_2)$ существует паросочетание, покрывающее все вершины графа, и степень каждой вершины из доли V_1 не меньше k. Доказать, что в графе G не менее $k!$ совершенных паросочетаний.

22. Пусть в непустом двудольном простом графе степень каждой вершины равна k. Доказать, что в нём не менее $k!$ совершенных паросочетаний.

23. Пусть A — конечное множество натуральных чисел, обладающее свойством: среди любых трёх чисел из A можно выбрать два, одно из которых делится на другое. Доказать, что A можно разбить на два подмножества таких, что среди любых двух чисел, входящих в одно подмножество, большее число делится на меньшее.

24. Пусть A — конечное множество натуральных чисел, обладающее свойством: среди любых четырёх чисел из A найдётся два, ни одно из которых не делится на другое. Доказать, что A можно разбить на три подмножества таких, что в каждом из них ни одно число не делится на любое другое.

25. Доказать, что в последовательности из n^2+1 различных действительных чисел найдётся монотонная подпоследовательность длины $n+1$.

26. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая сможет выйти замуж за знакомого юношу!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

27. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая сможет выйти замуж за знакомого юношу!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

28. Словарный ранг двоичной матрицы равен r. Миша красит синим цветом r строк, в которых, как он знает, есть r независимых единиц. Митя красит жёлтым цветом r столбцов, также содержащих r независимых единиц. Клетки, покрашенные дважды, стали зелёными. Всегда ли можно указать r независимых единиц в зелёных клетках?

29. Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ — некоторая последовательность его подмножеств. Частичные трансверсали P определяют трансверсальный матроид ранга r. Доказать, что этот матроид можно задать последовательностью из r множеств.

30. Пусть $\alpha(G)$ — наибольшее число попарно несмежных вершин графа G; $\tau(G)$ — наименьшая мощность вершинного покрытия G. Доказать, что $\alpha(G) + \tau(G) = n$, где n — число вершин графа G.

31. Пусть в графе G нет изолированных вершин, $\nu(G)$ — наибольшее число попарно несмежных рёбер G; $\rho(G)$ — наименьшая мощность рёберного покрытия G. Доказать, что $\nu(G) + \rho(G) = n$, где n — число вершин графа G.

32. Пусть имеется m неженатых мужчин, n незамужних женщин и k свах. У каждой свахи есть список своих клиентов; между любыми мужчиной и женщиной из этого списка сваха может устроить брак. Для i-й свахи число устроенных ею за год браков не превосходит числа b_i. Перевести задачу нахождения наибольшего числа браков, которые могут устроить свахи за год, в задачу нахождения максимального потока в некоторой сети.

33. Найти наибольшее паросочетание и наименьшее вершинное покрытие в двудольных графах с матрицами смежности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

34. Найти минимальные цепные разбиения булеанов множеств а) $\{1, 2, 3\}$ и б) $\{1, 2, 3, 4\}$ с помощью выделения наибольших паросочетаний в соответствующих двудольных графах (см. доказательство теоремы 1.8).

35. Назовём цепь подмножеств n-элементного множества A **симметричной**, если их мощности образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 и суммой крайних членов, равной n (в частности, при чётном n множество мощности $n/2$ образует такую цепь). Покажем, как, имея разбиение множества A на симметричные цепи, получить аналогичное разбиение для множества $A' = A \cup \{a\}$. Если в симметричной цепи для множества A всего одно множество B, то для A' получим цепь из двух множеств: $B \subset B \cup \{a\}$. Если же симметричная цепь подмножеств множества A имеет длину $k > 1$:

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_k,$$

то она порождает две симметричные цепи в булеане множества A':

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_k \subset B_k \cup \{a\} \quad \text{и} \quad B_1 \cup \{a\} \subset B_2 \cup \{a\} \subset \cdots \subset B_{k-1} \cup \{a\}.$$

Докажите, что описанная процедура даёт минимальное цепное разбиение булеана.

36. Найти разбиения булеанов множеств $\{1,2,3\}$ и $\{1,2,3,4\}$ на симметричные цепи.

37. Решить задачу о назначениях для двудольных графов с матрицами весов:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \ \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{в)} \begin{pmatrix} 7 & 4 & \infty & 6 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & \infty & 4 \\ 4 & \infty & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 0 & 7 & \infty & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ \infty & \infty & 2 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

38. Найти максимальные по весу совершенные паросочетания в двудольных графах с матрицами весов:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 9 & 4 \\ 9 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \ \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{в)} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 8 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 9 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 5 & 9 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 9 & 11 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 3 & 8 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

39. Решить задачу о назначениях на узкое место для графов из задачи 38.

Ответы, указания, решения к некоторым упражнениям

3. Пусть имеется всего m различных цветов и n различных размеров карандашей. Пронумеруем цвета числами от 1 до m и размеры числами от 1 до n. Составим матрицу A размера $m \times n$, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число, равное количеству карандашей i-го цвета и j-го размера. Заменив ненулевые элементы этой матрицы на единицы, получим двоичную матрицу B, в которой, согласно условию задачи, наибольшее число независимых единиц меньше 10, то есть не больше 9. По венгерской теореме, найдётся не более 9 линий, покрывающих матрицу B. Хотя бы на одну из этих линий в матрице A приходится не менее 1000/9 карандашей, то есть по меньшей мере 112 карандашей.

4. Докажем *необходимость* (*достаточность* устанавливается обратным ходом рассуждений).

Первое решение (венгерская теорема). Получим из матрицы A заменой единиц на нули, а нулей на единицы матрицу B. По условию задачи, в матрице A не найдётся n независимых единиц, то есть её словарный ранг меньше n. Применим венгерскую теорему. Согласно этой теореме, матрицу A покрывают некоторые i' строк и j' столбцов, где $i' + j' < n$. Оставшиеся $i = n - i'$ строк и $j = n - j'$ столбцов в своём пересечении имеют только нули. В исходной матрице A на пересечении упомянутых строк и столбцов будут одни единицы. Осталось заметить, что $i + j = 2n - (i' + j') > n$, откуда $i + j \geq n + 1$.

Второе решение (теорема Холла). Пусть строки матрицы A отвечают юношам, а столбцы — девушкам, и пусть условие $a_{kl} = 1$ означает, что k-й юноша знаком с l-й девушкой. Тогда, по условию задачи, всех юношей женить на знакомых девушках нельзя. Согласно теореме Холла, это означает, что какие-то i юношей знакомы в совокупности с не более чем $i - 1$ девушкой и не знакомы с оставшимися девушками, а последних не менее $n - i + 1$. Значит, на пересечении i строк, отвечающих указанным юношам, и $j \geq n - i + 1$ столбцов, отвечающих не знакомым ни с кем из них девушкам, стоят одни нули.

11. Пусть A — матрица смежности двудольного графа, r — степень каждой его вершины. Тогда матрица $\frac{1}{r}A$ является дважды стохастической.

12. Ответ. Да. **Указание.** Рассмотрите двудольный граф, в одной доле которого — сочетания из 27 по 4, в другой — размещения из 27 по 3, и ребро соединяет размещение с сочетанием, если все элементы размещения входят в сочетание. Теперь нужно выяснить, существует ли совершенное паросочетание в этом графе.

14. Первое решение (венгерская теорема). Степень любой вершины из доли V_1 равна $n-k$, а из доли V_2 — $k+1$. Заметим, что $k+1 \leq n-k$. Матрица смежности A графа $G(V_1, V_2)$ имеет размер $C_n^k \times C_n^{k+1}$ и содержит $C_n^k(n-k)$ единиц, а каждая линия покрывает не более $n-k$ единиц. Значит, покрывающих линий должно быть не менее C_n^k. Поскольку ровно столько имеем строк в матрице, C_n^k и есть минимальное число покрывающих линий. По венгерской теореме в матрице A есть C_n^k независимых единиц, что означает существование совершенного паросочетания в $G(V_1, V_2)$.

Второе решение (теорема Холла). Возьмём произвольные m вершин первой доли b_1, b_2, $\ldots$, b_m и смежные с ними вершины $g_1, g_2, \ldots, g_l$ второй доли и рассмотрим порождённый этими $m+l$ вершинами подграф исходного графа. В полученном графе степень любой вершины из первой доли равна $n-k$, а из второй — не больше $k+1$. Число рёбер двудольного графа равно сумме степеней вершин любой из его долей:

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(b_i) = m(n-k) = \sum_{j=1}^{l} \rho(g_j) \leq l(k+1). \qquad (*)$$

Поскольку $n-k > k$, справедливо неравенство $n-k \geq k+1$. Учитывая $(*)$, получаем $m \leq l$. Таким образом, выполнены условия теоремы Холла о существовании в двудольном графе совершенного паросочетания.

16. Из предыдущей задачи вытекает, что длина антицепи не превышает числа $l = C_n^{[n/2]}$. С другой стороны, все $[n/2]$-элементные подмножества образуют антицепь длины l.

Замечание. Другое решение этой задачи см. в [22] (задача 667).

17. Будем доказывать венгерскую теорему в графовой формулировке.

Дополним двудольный граф G двумя вершинами a и b, одну из которых соединим со всеми вершинами первой доли, а другую — со всеми вершинами второй доли. Обозначим новый граф G'. Каждому ребру uv графа G поставим в соответствие цепь $a \to u \to v \to b$ в графе G'. При этом паросочетанию в графе G будет отвечать набор из непересекающихся цепей, соединяющих вершины a и b в графе G'. С другой стороны, ab-отделяющее множество в графе G' суть вершинное покрытие графа G. Теперь применение теоремы 1.1 к графу G' сразу даёт требуемое утверждение относительно графа G.

19. Расположим прямую горизонтально. Искомой точкой является, например, самый левый из правых концов отрезков.

20. Считая прямую числовой, положим $[a, b] \prec [c, d]$, если $b < c$. Используйте теорему 1.10 и предыдущую задачу.

21. Индукция по числу вершин в V_1. Рассмотрим два возможных случая.

I. Найдётся такое множество $A \subset V_1$, что $|\Gamma(A)| = |A|$. Тогда существует совершенное паросочетание M в графе $G(V_1 \setminus A, V_2 \setminus \Gamma(A))$. По предположению индукции в графе $G(A, \Gamma(A))$ имеется не менее $k!$ совершенных паросочетаний. Добавив M к каждому из них, получим не менее $k!$ совершенных паросочетаний и в графе $G(V_1, V_2)$.

II. Для любого множества $A \subset V_1$ выполняется неравенство $|\Gamma(A)| > |A|$. Пусть $v_1 \in V_1$ и $\Gamma(v_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$. По условию $\rho(v_1) = s \geq k$. Если удалить из графа вершины v_1 и u_i (где i — некоторое фиксированное число), то условие существования совершенного паросочетания

$$\forall A \subset V_1 \quad |\Gamma(A)| \geq |A|$$

будет выполнено, так как $|\Gamma(A)|$ уменьшается не более чем на единицу. По предположению индукции в графе $G(V_1 \setminus \{v_1\}, V_2 \setminus \{u_i\})$ имеется не менее $(k-1)!$ совершенных паросочетаний, ибо степень любой вершины из $V_1 \setminus \{v_1\}$ не меньше $(k-1)$. Таким образом, в исходном графе не менее $(k-1)!$ совершенных паросочетаний, включающих в себя ребро v_1u_i, для каждого значения i, а последних — не менее k. Поэтому всего имеем не менее $k!$ совершенных паросочетаний.

26. Прав. См. конец §2.2.

27. Ответ. Прав. **Доказательство.** Отметим на прямой точки, изображающие юношей, а на параллельной прямой — точки, изображающие девушек. Точки, соответствующие брюнетам и блондинкам, покрасим соответственно в синий и жёлтый цвет. Остальные точки будем называть белыми. Вариант образования супружеских пар, имеющийся у первой свахи, изобразим синими отрезками, а вариант второй свахи — жёлтыми. Некоторые отрезки при этом станут зелёными. Наша цель — найти попарно не смежные цветные отрезки (то есть без общих концов), покрывающие в совокупности все цветные точки.

Каждый зелёный отрезок не смежен ни с каким другим цветным отрезком. Ясно также, что отрезки одного цвета попарно не смежны. Поскольку каждая цветная точка является концом одного или двух цветных отрезков, синие и жёлтые отрезки образуют несколько ломаных (отрезок считаем частным случаем ломаной) без общих концов, причём цвета звеньев любой ломаной чередуются.

Если ломаная замкнутая, то её звенья синего цвета покрывают все её вершины, поэтому можно стереть жёлтые звенья этой ломаной.

Пусть теперь ломаная незамкнутая. Так как каждая цветная точка порождает свой цветной отрезок, концы ломаной не могут быть оба белыми (иначе цветных точек будет меньше, чем цветных отрезков). Возьмём цветной конец ломаной и пойдём по ней. Другой её конец будет белым, так как в каждую цветную точку мы попадаем, идя по отрезку другого цвета, и, значит, ломаная продолжается отрезком цвета этой точки. Таким образом, звенья ломаной, имеющие цвет её цветного конца, покрывают все её цветные вершины. Звенья другого цвета стираем.

В результате у нас останутся цветные отрезки без общих концов, покрывающие все цветные точки. Задача решена.

28. Ответ. Всегда. **Доказательство.** Рассмотрим двудольный граф, для которого данная матрица будет матрицей смежности. Вершины первой доли назовём юношами, а второй — девушками. Пусть синие строки отвечают брюнетам, а жёлтые столбцы — блондинкам. Из предыдущей задачи вытекает, что имеется набор независимых единиц, стоящих в каждой синей строке и каждом жёлтом столбце. Если хотя бы одна из этих единиц стоит не в зелёной клетке, а, к примеру, в синей, то вместе с r единицами, стоящими в жёлтых столбцах, получим $r+1$ независимую единицу, что противоречит условию задачи. Значит, все единицы указанного набора стоят в зелёных клетках, и их, легко видеть, ровно r.

29. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором вершины первой доли соответствуют множествам S_i, а второй — элементам множества E. Ребро S_ie_j присутствует в графе тогда и только тогда, когда $e_j \in S_i$.

Любое независимое множество трансверсального матроида можно теперь рассматривать как множество вершин второй доли, покрытое некоторым паросочетанием.

Зафиксируем некоторую максимальную частичную трансверсаль. Ей отвечает некоторое паросочетание мощности r. Пусть оно покрывает множество A вершин из V_1.

Возьмём теперь произвольное независимое множество матроида — множество B вершин из V_2, покрываемое некоторым паросочетанием. Согласно задаче 27, существует паросочетание, покрывающее одновременно множества A и B. Его мощность не меньше r (поскольку покрывает A), но и не больше r (это ранг матроида) — значит, она равна r.

Таким образом, элементы множества B образуют частичную трансверсаль для системы множеств A. Стало быть, если мы сохраним в P лишь множества, вошедшие в A, то получим тот же самый матроид.

31. Пусть C — наименьшее рёберное покрытие графа $G = \langle V, E\rangle$, $|C| = \rho(G)$. Рассмотрим подграф $\langle V, C\rangle$. Очевидно, в нём нет циклов и цепей длины более чем из двух рёбер. Поэтому он представляет собой дизъюнктное объединение звёздных графов. Пусть последних ровно k штук. Из известного соотношения между числом вершин и рёбер леса имеем равенство $k = n-\rho$. Взяв по одному ребру из каждого звёздного графа, получим паросочетание. Значит, $\nu \geq n-\rho$, или

$$\nu + \rho \geq n. \tag{1}$$

Пусть теперь M — паросочетание наибольшей мощности, U — множество вершин, не покрытых M. Очевидно, что U — независимое множество, и
$|U| = n-2|M| = n-2\nu$. Поскольку в G нет изолированных вершин, существует множество рёбер S, покрывающих вершины из U. Тогда $M \cup S$ — рёберное покрытие. Кроме того, $|S| = |U|$ и

$M \cap S = \phi$. Поэтому
$$\rho \leq |M \cup S| = |M| + |S| = \nu + n - 2\nu = n - \nu,$$
откуда
$$\nu + \rho \leq n. \tag{2}$$
Из (1) и (2) вытекает доказываемое утверждение.

33. а) $u_1v_1, u_2v_6, u_3v_2, u_4v_3, u_5v_4, u_6v_5$; $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$;
б) $u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_5v_4, u_6v_6$; u_6, v_1, v_2, v_3, v_4;
в) $u_1v_2, u_2v_3, u_3v_4, u_4v_5, u_5v_6, u_6v_8, u_7v_7, u_9v_1$; $u_2, u_4, u_7, u_9, v_2, v_4, v_6, v_8$.

34. а) $\phi \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$; $\{2\} \subset \{2,3\}$; $\{3\} \subset \{1,3\}$;
б) $\phi \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$; $\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\}$;
$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\}$; $\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\}$; $\{2,4\} \subset \{1,2,3,4\}$; $\{3,4\}$.

36. а) $\phi \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$; $\{2\} \subset \{2,3\}$; $\{3\} \subset \{1,3\}$;
б) $\phi \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$; $\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\}$;
$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\}$; $\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\}$; $\{2,4\}$; $\{3,4\}$.

37. а) $u_1v_3, u_2v_4, u_3v_1, u_4v_5, u_5v_2$; б) $u_1v_1, u_2v_4, u_3v_3, u_4v_2, u_5v_5$;
в) $u_1v_2, u_2v_4, u_3v_3, u_4v_6, u_5v_1, u_6v_5$.

38. в) $u_1v_6, u_2v_3, u_3v_4, u_4v_5, u_5v_2, u_6v_1$.

Литература

[1] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы.* — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 288 с.

[2] Ашманов С.А. *Линейное программирование.* — М.: Наука, 1981. – 340 с.

[3] Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. *Теория графов.* — М.: Высшая школа, 1976. – 392 с.

[4] Емеличев В.А., Ковалёв М.М., Кравцов М.К. *Многогранники. Графы. Оптимизация.* — М.: Наука, 1981. – 344 с.

[5] *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике*/ Сост.: К.П. Кохась, С.В. Иванов, С.Л. Берлов и др. — СПб: Невский Диалект, 2002. – 192 с.

[6] Кофман А. *Введение в прикладную комбинаторику.* — М.: Наука, 1975. – 480 с.

[7] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*/ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. – 384 с.

[8] Липский В. *Комбинаторика для программистов.* — М.: Мир, 1988. – 213 с.

[9] Ловас Л., Пламмер М. *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.* — М.: Мир, 1998. – 653 с.

[10] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов.* — СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

[11] Оре О. *Теория графов.* — М.: Наука, 1980. – 392 с.

[12] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* — М.: Мир, 1985. – 512 с.

[13] Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.

[14] Саати Т. *Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы.* — М.: Мир, 1973. – 304 с.

[15] Спивак А.В. *Цепи и антицепи*// Квант. – 2003. – № 5. – С.11–14.

[16] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* В 2-х т. — М.: Мир, 1991. – 704 с.

[17] Уилсон Р. *Введение в теорию графов.* — М.: Мир, 1977. – 208 с.

[18] Форд Л., Фалкерсон Д. *Потоки в сетях.* — М.: Мир, 1966. – 276 с.

[19] Харари Ф. *Теория графов.* — М.: Мир, 1973. – 300 с.

[20] Холл М. *Комбинаторика.* — М.: Мир, 1970. – 424 с.

[21] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 176 с.

[22] Эвнин А.Ю. *Задачник по дискретной математике.* — 2-е изд., перераб. и доп. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 164 с.

[23] Эвнин А.Ю. *Элементарное введение в матроиды*// Математическое образование. — 2005. — № 2(33). — С.2–33. — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 40 с.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.
evnin@prima.susu.ac.ru

Возникновение теоретической математики и пифагорейская сотериология вспоминания

А. И. Щетников

По общепринятой версии, теоретическая математика возникла в пифагорейской школе. Автор выдвигает гипотезу о возможном происхождении теоретической математики из сотериологического учения пифагорейцев (сотериология — учение о спасении во многих религиях, раздел теологии и эсхатологии). Рассмотрено влияние орфиков как идейных предшественников пифагорейцев, приведены интересные исторические параллели.

Проблема возникновения теоретической математики

Эпоха развития древнегреческой математики до Евклида, завершившаяся созданием систематической дедуктивной науки, основанной на определениях, аксиомах и постулатах, издавна привлекала повышенное внимание историков математики, искавших правдоподобный и убедительный ответ на вопрос о том, по какой причине греки перестали довольствоваться в математике эмпирическими знаниями и вычислительными рецептами, характерными для математики стран Древнего Востока, и стали искать для математических положений теоретических доказательств общего характера.

В рамках этого общего вопроса следует выделить две отдельных проблемы, которые часто смешиваются друг с другом, хотя они и относятся к разным периодам развития древнегреческой математики. Превращение математики в систематическую дедуктивную науку, стремящуюся к последовательному доказательству всех своих положений, исходя из некоторого небольшого набора недоказуемых аксиом, произошло в IV в. до н. э., в эпоху Платона и Аристотеля; эту математику мы знаем прежде всего по *Началам* Евклида, созданным около 300 г. до н. э., и трудам последующих математиков. Но такому превращению предшествовал длительный этап становления математики отдельных теоретических доказательств и объединяющих такие доказательства «локальных» теорий. Однако отдельные доказательства обязательно должны были иметься и в математике стран Древнего Востока.[1] Поэтому вопрос о возникновении дедуктивной математики в Древней Греции следует в первую очередь поставить так: почему греки стали считать, что в математике теоретические доказательства важнее полученных результатов и вычислительных рецептов, что только они и делают ее математикой?

В поисках ответа на этот вопрос обратимся сначала к общепринятой концепции возникновения теоретической математики в Древней Греции, высказанной, например, А. Н. Колмогоровым (1991):

> Развитие математики в Древней Греции приняло существенно иное направление, чем на Востоке. Если в отношении вычислительной техники, искусства решения задач алгебраического характера и разработки математических средств астрономии лишь в эллинистическую эпоху был достигнут и превзойден уровень вавилонской математики, то уже гораздо раньше математика в Древней Греции вступила в совершенно новый этап логического развития. Появилась потребность в отчетливых математических доказательствах, были сделаны первые попытки систематического построения математической теории. Математика, как и все научное и художественное творчество, перестала быть безличной, какой она была в странах Древнего Востока; она

[1] Эпистемологические доводы в пользу этого тезиса см. Перминов 1997.

> создается теперь известными по именам математиками, оставившими после себя математические сочинения (дошедшие до нас лишь в отрывках, сохраненных позднейшими комментаторами). Это изменение характера математической науки объясняется более развитой общественно-политической жизнью греческих государств, приведшей к высокому развитию диалектики, искусства спора, к привычке отстаивать свои утверждения в борьбе с противником. Возникновение независимой от религии философской мысли привело к потребности в рациональном объяснении явлений природы, что поставило перед математикой новые задачи.

Некоторые другие концепции возникновения теоретической математики тоже делают акцент на возникновении «дедуктивной системы». К. фон Фритц (Fritz 1955), подобно Колмогорову, связывает возникновение математического доказательства с развитием софистических техник «искусства спора». А. Сабо (1959) придает особую роль в становлении древнегреческой математики появлению доказательств «от противного», связывая их с философией элейской школы. Однако авторы всех этих концепций фактически предпочитают иметь дело с относительно более поздними шагами становления древнегреческой математики. Нас же интересует самый ранний этап, на котором возникла не «дедуктивная система», но теоретическое доказательство как таковое вкупе с осознанием его особой роли в системе математических знаний.

Социокультурные особенности математики пифагорейцев

Возникновение теоретической математики по всеобщему согласию древних авторов связывается с Пифагором и его последователями. Как пишет об этом Прокл в *Комментарии к первой книге «Начал» Евклида* (65_{11}),

> Пифагор преобразовал занятия геометрией в форму свободного образования, изучая сами ее начала отвлеченно от материи и умозрительно.

Умозрительное и отвлеченное от материи занятие геометрией есть занятие теоретическое. Слова «теория» и «теорема», выражающие самую суть восходящего к Пифагору древнегреческого понимания математики, пришли в математические науки из религиозной практики. Древние греки называли теорией (θεωρία) священное посольство, отправляемое полисом для представительства на Олимпийских играх, для почитания богов в их святилищах или для вопрошания оракула; теоремой (θεώρημα) же называлось само божественное зрелище, раскрывавшееся перед глазами зрителей, когда незримое божество подавало людям свои знаки.

Диоген Лаэрций, ссылаясь на Гераклида Понтийского, рассказывает (I, 12), что Пифагор впервые назвал себя философом (= «любителем мудрости») в разговоре с Леонтом, сикионским или флиунтским тираном. Еще раз (VIII, 8) он сообщает об этой беседе со ссылкой на *Преемства* Сосикрата, и пересказывает данное Пифагором разъяснение слова «философ», в котором фигурируют как созерцание истины, так и Олимпийские игры. Это же разъяснение излагает Ямвлих в книге *О пифагорейской жизни* (58):

> Говорят, что Пифагор первый стал называть себя философом, не только придумав новое слово, но и прекрасно разъясняя, что оно обозначает. Он говорил, что приход людей в жизнь подобен толпе на игрищах. Там суетятся разные люди, пришедшие каждый со своей целью (один стремится продать товар подороже, другой — добиться славы и показать телесную силу; но есть и третий вид людей, причем самый свободный, которые собираются ради зрелищ, прекрасных творений, благих деяний и речей, обычно представляемых на праздниках). Так и в жизни всевозможные люди собираются в одном месте, движимые различными интересами: одних обуревает жажда денег и роскоши, других привлекает власть, первенство, соперничество и честолюбие. Но самый чистый образ жизни у того, кто занимается созерцанием (θεωρία) прекрасного, и он называется философским.

Геометр-пифагореец — это «теоретик», рассматривающий чертеж, мысленно вычленяющий отдельные его части, проводящий на нем дополнительные линии и подмечающий в нем такие соотношения, которые делают скрытое — явным. К примеру, сколько не разглядывай различные треугольники, их внешний вид ничего не скажет о том, чему равна сумма углов каждого из них. Но стоит провести на одном-единственном чертеже прямую линию, проходящую через вершину треугольника параллельно его противоположной стороне, и теорема о том, что сумма углов любого треугольника равна развернутому углу, сразу же станет совершенно очевидной.[2]

Непосредственная цель деятельности геометра состоит единственно в прояснении истины. Придумав красивое доказательство той или иной теоремы, мы говорим: «меня осенило», и эта фраза звучит совершенно по-гречески: ведь победитель Олимпийских игр точно так же становится победителем именно потому, что его осеняет своей дланью незримое божество; отсюда и награда в виде венка из ветвей священной оливы. Как пишет Б. Рассел в *Истории западной философии* (2001, т. 1, с. 67),

> Для всех тех, кто был вдохновлен Пифагором, слово «теория» сохранило в себе элемент экстатического откровения. Это может показаться странным для тех, кто немного и весьма неохотно изучал математику в школе, но тем, кто испытал опьяняющую радость неожиданного понимания, которую время от времени приносит математика тем, кто любит ее, пифагорейский взгляд покажется совершенно естественным.

Если мы начнем теперь обдумывать тот факт, что теоретическая математика с ее особым отношением к своему предмету впервые возникла в пифагорейском сообществе, то отсюда сразу же воспоследует несколько возражений к высказанной А. Н. Колмогоровым концепции.

Во-первых, в этой концепции о древнегреческой математике говорится как об «авторской» науке, — а математика пифагорейцев была совершенно безличной. Все открытия, сделанные внутри пифагорейской школы, было принято приписывать ее основателю. Как сказал об этом Х. Л. Борхес в публичной лекции *Книга* (Borges 1979),

> Пифагор намеренно ничего не писал; он хотел, чтобы его мысль пережила его физическую смерть в сознании учеников. Отсюда и выражение *Magister dixit*, «учитель сказал». Оно не означает, что ученики связаны тем, что сказал учитель; напротив, оно утверждает свободу следовать в мышлении изначальной мысли учителя. Мы не знаем, положил ли он начало доктрине циклического времени, но мы знаем, что его ученики ее исповедовали. Пифагор умер телесно, а они, словно путем переселения душ — Пифагору это понравилось бы, — вновь и вновь следовали его мысли, а когда их упрекали в том, что они говорят что-то новое, они находили прибежище в следующей формуле: *Magister dixit.*

Во-вторых, исследователи обычно связывают возникновение дедуктивного доказательства с состязательным духом древних греков, — а о пифагорейцах известно, что они старались избегать любых споров, изгоняя дух соперничества из истинной дружбы, на которой основывался их союз. Пифагор учил, а не диспутировал; надо думать, что так вели себя и его ученики. В овладении искусством спора нуждаются те, кто хочет быть на первых ролях в жизни демократического полиса; а пифагорейцы по своим убеждениям были безусловными приверженцами аристократического образа жизни и правления. Кроме того, софисты, практиковавшие искусство спора как специальную технику, демонстрировавшие это искусство на публике и обучавшие ему, появляются на сцене греческой истории гораздо позднее пифагорейцев.

В-третьих, А. Н. Колмогоров говорит о присущем древним грекам рационализме, о возникновении независимой от религии философской мысли, — однако математика и философская мысль пифагорейцев были безусловно тесно связаны с их религиозным учением. Впрочем, само это учение было достаточно необычным, ибо первоочередное внимание в нем уделялось не

[2] О том, что пифагорейцы доказывали эту теорему именно таким способом, сообщает Прокл в *Комментарии к первой книге «Начал» Евклида* (379_2).

характерному для традиционной религии улаживанию взаимоотношений с божеством путем вопрошания оракулов и совершения жертвоприношений, но спасению души путем сосредоточенного собирания ее в сознающее себя целое. Содержание этого религиозно-мистического учения и его роль в возникновении теоретической математики пифагорейцев мы и рассмотрим ниже подробнее.

Орфизм как предшественник пифагореизма

С концептуальной стороны пифагореизм представляет собой учение о переселении душ и вечном возвращении, перенесенное на греческую почву с Востока. До пифагорейцев о переселении душ в Древней Греции учили орфики. Переселение душ у орфиков — это наказание, выпавшее душам за их «родовую вину», причастность к преступлению титанов, убивших Диониса. Цель орфического очищения и посвящения в таинства состояла в том, чтобы освободиться от «колеса судьбы и рождения».

Культ Диониса-Вакха был связан со священным опьянением, приводящим к состоянию «энтузиазма» — вселения бога в поклоняющегося ему человека. Орфики считали, что опьянение, отход от благоразумия под влиянием страсти — это путь, которым только и приобретается мистическое знание об освобождении души, недостижимое обычными средствами.

Важным источником о содержании орфического учения служат напутствия, начертанные на золотых пластинках, которые клались в могилы посвященных. На этих пластинках записывалось напоминание, которым должен был руководствоваться мертвый после смерти, чтобы сохранить память и обрести спасение:

Слева от дома Аида ты найдешь источник,
Рядом с ним стоит белый кипарис,
К этому источнику даже близко не подходи.
Найдешь и другой: из озера Мнемозины
Текущую холодную воду. Над ней — стражи.
Скажи: «Я сын Земли и звездного Неба,
Но род мой — небесный, об этом вы знаете сами.
Я иссох от жажды и погибаю. Так дайте же мне
Холодной воды, текущей из озера Мнемозины».
И они дадут тебе пить из божественного источника.
(1 B17 DK)

Топография Аида, как она представлена в этих напутствиях, выглядит следующим образом. На входе в Аид текут медленные и темные воды реки забвения-Леты. Воду из этой реки невозможно удержать ни в каком сосуде. Душа, испившая из нее воды, теряет память обо всем, что происходило с ней прежде. Дальше находится озеро, из которого вытекает холодная и чистая река памяти-Мнемозины — дочери Неба-Урана и Земли-Геи, матери всех муз.

Обычные души, объятые страхом только что пережитой смерти, в смятении забывают правильный путь и, чтобы насытить нестерпимую жажду, пьют из ближайшего к ним источника, после чего погружаются в полное беспамятство. И лишь души посвященных, способные помнить о своем небесном происхождении и удерживать эту память в сознании при отделении души от тела, могут дойти до холодной реки памяти, испить из нее и укрепиться в своей способности помнить, что они увидели в предыдущей жизни и в загробном мире, и частица этой памяти сохранится в них в следующем рождении. Если душа совершит такой путь три раза подряд, она уподобится божеству и сможет «круга конец положить и от зла вздохнуть с облегченьем».[3] А на еще одной из напутственных пластинок сохранилась такая надпись:

[3] Эту цитату из Орфея приводит Прокл в *Комментарии к «Тимею» Платона* (3, 297_{10}).

> Я прихожу, чистый из чистых, о подземная царица,
> Эвклей, Эвбулей и другие бессмертные боги!
> Ведь я тоже происхожу от вашего счастливого рода,
> Но Мойра сразила меня и другие бессмертные боги,
> < * * * > и метатель звезд — перуном.
> Я вырвался из круга глубокой скорби и мучений,
> Быстрыми ногами я достиг вожделенного венца.
> Я погрузился в лоно Владычицы подземной царицы.
> «Счастливый и блаженный, ты станешь богом вместо смертного!»
> Я — козленок — упал в молоко.
>
> (1 B18 DK)

В чем заключалось пифагорейское учение о спасении души?

Учение о спасении и соответствующая религиозная практика пифагорейцев, безусловно, многое заимствовали у орфиков. Однако основные положения пифагорейского религиозного учения держались в глубокой тайне и не разглашались среди непосвященных. Поэтому мы довольно много знаем об обрядовой стороне пифагореизма, состоявшей из многочисленных предписаний и запретов, и весьма мало — о его сокровенных началах, направленных на спасение души.

Возможный ключ к ответу на вопрос о целях и путях религиозной практики пифагорейцев мы находим в кратком сообщении Аристотеля, передаваемом Ямвлихом в книге *О пифагорейской жизни* (31–32):

> В книге *О философии пифагорейцев* Аристотель сообщает, что они хранили в строжайшей тайне следующее разделение: разумные животные суть бог, человек и тот, кто подобен Пифагору. И совершенно понятно, что они его воспринимали именно так, ибо он предложил верное, соответствующее существу и не противоречащее ни явлениям, ни умственным понятиям представление о богах, демонах и героях, о космосе и всевозможных движениях сфер и светил, о затмениях, покрытиях и аномалиях, об эксцентриситетах и эпициклах, обо всем в космосе, о небе, земле и находящихся между ними видимых и невидимых творениях. Он положил у эллинов начало математическим наукам, теоретическому созерцанию и всяческим знаниям, которые делают душу истинно зрячей и исцеляют ум от слепоты, являющейся следствием других занятий. И он дал эллинам возможность понять целостные начала и причины всего сущего. Наилучшее политическое устройство, совместное проживание, принцип «у друзей все общее», служение богам и почитание умерших, законодательство и образование, обет молчания и непричинение вреда другим живым существам, сдержанность и благоразумие, проницательность, религиозность и другие добродетели, — одним словом, благодаря ему все это стало желанным и достойным стремления для жаждущих учения. Поэтому справедливо за все то, о чем я сейчас говорил, они почитали Пифагора столь высоко.

Аргументы, который Ямвлих приводит в защиту учения об особой сущности Пифагора, отличающей его от обычных людей, в общем-то понятны: создатель школы описывается здесь как культурный герой, положивший начало правильному воззрению на устройство космоса и назначение человека. Наверное, было бы не так удивительно, если бы пифагорейцы причислили своего учителя к сонму богов еще при жизни, о каковом причислении сам Ямвлих и говорит непосредственно перед цитированным отрывком. Однако выделение для Пифагора и подобных ему существ некоего особого «третьего рода», наряду с богами и людьми, и сохранение этого учения в глубочайшей тайне представляет собой действительно нечто особенное.

Поэтому мы должны отнестись к сообщению Аристотеля более пристально и задаться вопросом: что это значит по сути — быть подобным Пифагору существом? Чем такое существо по своей сущности отличается как от бога, так и от человека? Бог — существо бессмертное, человек — существо смертное; какие есть еще варианты, помимо этих двух? Когда вопрос задан таким образом, найти на него ответ оказывается не так сложно. Мы обнаруживаем его, в частности, у Диогена Лаэрция (VIII, 4–5), сообщающего о Пифагоре следующее:

> Вот что он, по словам Гераклида Понтийского, рассказал о себе. Некогда он был Эталидом и считался сыном Гермеса. Гермес предложил ему выбрать все, что угодно, кроме бессмертия. Тогда он попросил, чтобы и при жизни и после смерти он сохранял память о том, что с ним происходило. Так-то в жизни он все отчетливо запомнил, а когда умер, то сохранил ту же самую память. Впоследствии он вошел в Евфорба и был ранен Менелаем. Евфорб рассказывал, что он был когда-то Эталидом, что получил от Гермеса его дар, как странствовала его душа, в каких растениях и животных она оказывалась, что претерпела она в Аиде и что терпят там остальные души. После смерти Евфорба душа его перешла в Гермотима, который, желая доказать это, явился в Бранхиды и в храме Аполлона указал щит, посвященный богу Менелаем (отплывая от Трои, говорил он, Менелай посвятил Аполлону этот щит), ныне прогнивший, от него осталась только обделка из слоновой кости. После смерти Гермотима он стал Пирром, делосским рыбаком, и по прежнему все помнил, как он был сперва Эталидом, потом Евфорбом, потом Гермотимом, потом Пирром. А после смерти Пирра он стал Пифагором и продолжал все это помнить.

На основании этого и нескольких других подобных сообщений[4] можно заключить, что согласно тайному учению пифагорейцев всякое подобное Пифагору существо схоже с обычным человеком тем, что имеет смертное тело, однако отличается от него бессмертной душой, хранящей память о своем божественном происхождении и последующей цепи телесных воплощений. Именно эта память души о своем начале и последующем пути дарует ей спасение, вырывает ее из беспамятства смертей и рождений.

В этом учении о благотворной роли памяти пифагореизм и соединяется с орфизмом, и расходится с ним: если целью орфиков было спасение путем выхождения из круга смертей и рождений, а обретение памяти требовалось для вспоминания о своем небесном происхождении и удержания на правильном пути, то для пифагорейцев, как об этом можно судить по заявлению самого Пифагора, обретение нерушимой памяти о божественном начале человеческой души уже само по себе являлось конечной целью и окончательным спасением.

Пифагорейская установка на спасение души путем вспоминания прошлых жизней зафиксирована в краткой фразе Ямвлиха, которой он завершает свой рассказ о предыдущих жизнях Пифагора (63):[5]

> Мы хотим показать всеми этими рассказами, что он знал свои прежние жизни и на этом основал попечение о других людях, напоминая им о их прежних жизнях.

Теперь мы можем в новом свете оценить и сообщение Ямвлиха (164–166) о постоянном упражнении пифагорейцами своей памяти, осмыслив это упражнение как основную религиозную практику пифагорейцев.

> Они считали, что следует держать и сохранять в памяти все, чему учат и объясняют, и что уроки и лекции укладываются до тех пор, пока их может вмещать познающее и запоминающее, ибо именно ими следует познавать и хранить познанное. Память они ценили чрезвычайно, весьма упражняли ее и заботились о ней, в учении они не

[4] Один и тот же рассказ о Евфорбе приводят Ямвлих (*О пифагорейской жизни*, 63) и Порфирий (*О жизни Пифагора*, 26). Порфирий (30 = 31 B129 DK) цитирует также стихи Эмпедокла, в которых говорится, что «некий муж, умудренный безмерным познаньем,... все несчетные мира явленья за десять или за двадцать людских поколений провидел». Сам же Эмпедокл, не чуждый орфико-пифагорейской мудрости, говорил о себе так: «Некогда я уже был мальчиком и девочкой, кустом, птицей и выныривающей из моря рыбой» (Диоген Лаэрций VIII, 77 = 31 B117 DK).

[5] Ср. Порфирий, *О жизни Пифагора*, 26.

> переходили от одной темы к другой до тех пор, пока не усваивали прочно содержание предыдущего урока и не вспоминали сказанного за день. Пифагореец поднимался со спального ложа не раньше, чем вспомнит все, что произошло вчера. А вспоминание (ἀνάμνησις) он осуществлял так. Он старался повторить в уме, что первым он сказал или услышал, или приказал домочадцам после того, как встал, что — вторым и что — третьим, и о последующем в таких же выражениях. И точно так же, кого он встретил первым, кого вторым, и какие разговоры велись во-первых, во-вторых и в-третьих, и о прочем в таких же выражениях. Он старался повторить в уме то, что произошло за весь день, причем норовя вспомнить все события в том же порядке, в каком они происходили. Если же по пробуждении у него было больше досуга, то он таким же образом старался повторить и события третьего дня. Они старались упражнять память еще больше, так как нет ничего более важного для знания, опыта и ума, чем способность помнить.

И действительно, всякий человек, упражняющий память, приобретает в этом упражнении единство собственного «я». Душа, которая научилась помнить и сохранять себя, становится цельной и неподверженной внезапным изменениям, которые случаются с ней из-за многочисленных внешних воздействий и претерпеваний. Именно о таком собирании души говорит перед своей смертью Сократ в *Федоне* (67cd), ссылаясь на «сокровенное учение (ἀπόρρητος λόγος)» (62b) и «истинных философов (ὡς ἀληθῶς φιλόσοφοι)» (64b), в которых безусловно узнаются пифагорейцы:

> Очищение (κάθαρσις) состоит в том, чтобы как можно тщательнее отрешать душу от тела, приучать ее собираться из всех частей тела, сосредотачиваться самой в себе и по возможности пребывать — и сейчас, и в будущем — наедине с собою, освободившись от тела, как от оков.

Погружаясь в глубины самой себя, душа обретает не только индивидуальное вспоминание предыдущих рождений и смертей, но также и более высокое надындивидуальное вспоминание истины сущего. Конечная цель пифагорейской религиозной практики тем самым оказывается теснейшим образом связанной с этим надындивидуальным вспоминанием, о чем Ямвлих (228) повествует в следующих словах:

> Важнейшим наставлением касательно мужества является их конечная цель — вызволить и освободить от стольких темниц и оков наш исходно ограниченный ум, без которого никто не может познать ничего здравого и истинного и не может ничего воспринять каким-либо чувством. Только ум сам по себе все видит и слышит, а остальное глухо и слепо. Вторая заповедь такова: прилагать все усилия к тому, чтобы ум наконец очистился и всячески подготовился математическими таинствами (διὰ τῶν μαθηματικῶν ὀργιασμῶν), и тогда внедрить в него и передать ему полезное и божественное, чтобы он не боялся отходить от телесных предметов и, ведомый к бестелесным предметам, не отводил от них взгляда из-за их яркого сияния и не обращался к страстям, пригвоздившим душу к телу, и в целом был недосягаем для всех возникающих и низменных страстей; ведь упражнение и возвышение над ними будет делом совершенного мужества.

Ямвлих говорит в этом отрывке о математических науках как о таинствах, служащих для очищения и освобождения ума из темниц и оков. Отчасти в точности те же самые, а отчасти приблизительно такие же слова, восходящие к какому-то более раннему источнику, мы обнаруживаем у Порфирия в *Жизнеописании Пифагора* (46–47):

> Философия, которую он исповедовал, целью своей имела вызволить и освободить от стольких темниц и оков плененный с рождения ум; без которого никто не может познать ничего здравого и истинного и не может ничего воспринять каким-либо

> чувством. Только ум сам по себе все видит и слышит, а остальное глухо и слепо. А для тех, кто уже совершил очищение, есть некоторые полезные приемы. Приемы же он придумал такие: медленно и постепенно, всегда одним и тем же образом, начиная от самого незначительного, переводить себя к созерцанию вечного и сродного ему бестелесного, чтобы полная и внезапная перемена не спугнула нас, столь давно привыкших к дурной пище. Математические и иные пограничные между телесным и бестелесным предметы созерцания служили для подготовки душевных очей к постепенному обращению от телесного, никогда не пребывающего в одном и том же состоянии, к истинно сущему, что как бы искусственно подводило к потребности в питании. Подводя с помощью такого приема к созерцанию истинно сущего, он дарил людям блаженство. Для этого и нужны были ему математические упражнения.

О связи математических наук и практики вспоминания у пифагорейцев свидетельствует также Прокл в *Платоновской теологии* (I, 20_{8-10}):

> Математические науки изобретены пифагорейцами для вспоминания о божественном; посредством этих наук как образов они пытались осуществлять переход.

Связь между учениями Пифагора и Платона

Можно сказать, конечно, что приведенные выше описания сотериологического предназначения математических наук у Ямвлиха, Порфирия и Прокла являются излишне «платонизирующими», слишком напоминающими ряд мест в различных диалогах Платона. Но я склоняюсь к тому, чтобы считать основные мотивы учения Платона о спасении души и о той роли, которую созерцание математических предметов играет в этом спасении, восходящими к учению пифагорейцев в еще большей степени, чем это обычно принято считать.[6]

Старинное учение о том, что тело — это могила души, упоминается Платоном в *Кратиле* (401c), *Горгии* (493ac), *Федре* (250c). В *Кратиле* Платон называет это учение орфическим, а в *Горгии* оно связывается с «неким хитроумным рассказчиком мифов, сицилийцем или италиком». Под этим рассказчиком скорее всего подразумевается знаменитый пифагореец Филолай из Кротона, у родственников которого Платон за 100 мин купил книги с изложением пифагорейского учения. Климент Александрийский в *Строматах* (III, 17) цитирует Филолая прямо:

> Стоит привести и цитату из Филолая. Пифагореец говорит так: «Свидетельствуют и древние богословы и прорицатели, что в наказание за что-то душа сопряжена с телом (σῶμα) и похоронена в нем, как в могиле (σῆμα)».

А согласно пересказанной в *Горгии* притче, непосвященные в Аиде таскают воду в дырявую бочку дырявым решетом, причем с решетом сравнивается душа этих несчастных — ведь она не способна ничего удержать по своей забывчивости (λήθη). Истина же на греческом языке называется словом ἀλήθεια — то, что не скрыто, не предано забвению, не поглощено мифической Летой с ее медленными и темными водами.

Учение о круговращении душ неоднократно изложено Платоном в *Меноне* (81ae), *Федоне* (72e–76e), *Федре* (245c–249c), *Филебе* (34bc), *Государстве* (621ad). С этим учением Платон связывает и представление об обучении как припоминании того, что душа видела до своего рождения. В *Меноне* (81a) об этой связи обучения и вспоминания говорится в следующих словах:

> Раз душа бессмертна, многократно рождается и видела все и здесь, и в Аиде, то нет ничего такого, чему бы она не научилась; поэтому ничего удивительного нет

[6] Пифагорейско-платоновское учение об анамнесисе анализировал H. S. Long (1948). Из новейшей литературы по вопросу об анамнесисе у пифагорейцев и Платона следует назвать книгу Т. Эберта (2005), в которой диалог *Федон* трактуется как диалектический и направленный против пифагорейцев, а не как жизнеучительный и выражающий устами Сократа пифагорейские идеи.

> в том, что и насчет добродетели, и насчет всего прочего она способна вспомнить то, что она прежде знала. И раз все по природе друг другу родственно, а душа все изучила, ничто не мешает тому, кто вспомнил что-нибудь одно, — люди называют это научением ($\mu\acute{\alpha}\theta\eta\sigma\iota\varsigma$) — самому найти и все остальное, если только он будет мужественен и неутомим в поисках: ведь искать и учиться — в этом и заключается вспоминание ($\dot{\alpha}\nu\acute{\alpha}\mu\nu\eta\sigma\iota\varsigma$).

А. А. Тахо-Годи, комментируя этот отрывок из *Менона* (Платон 1990, т. 1, с. 823), настаивает на том, что

> представление об анамнесисе принадлежит, видимо, самому Платону, так как в досократовской философии даже сам этот термин не встречается ни разу, за исключением одного места у пифагорейцев (58 D1 Diels), где говорится о «восстановлении в памяти недавних событий».

Указанное А. А. Тахо-Годи место у пифагорейцев — это приведенный выше отрывок из Ямвлиха (164–166). Следуя развиваемому в этой заметке воззрению, я склоняюсь к противоположному выводу: представление об анамнесисе не изобретено Платоном, но восходит к тайному учению орфиков и пифагорейцев, причем для последних оно составляет самое ядро их религиозной практики; Платон же заимствует это представление у пифагорейцев вместе с их учением о круговращении душ. Безусловно, Платон вносит в изложение этого религиозно-философского учения свой философский и художественный гений, умея ясно сказать о наиважнейшем. Но говорит он о том, что открылось до него другим вдохновенным мужам, придавая своими словами этому древнему открытию особую убедительность. Как сказано в *Федре* (249c),

> Из того живого существа, что было когда-то человеком, душа может снова вселиться в человека. Но душа, никогда не видавшая истины, не примет такого образа. Ведь человек должен постигать в соответствии с эйдосом, исходящим от многих чувственных восприятий, но сводимым воедино в рассуждении. А это есть вспоминание того, что некогда видела наша душа, когда она сопутствовала богу, свысока глядела на то, что мы теперь называем существующим, и поднималась до подлинного бытия. Поэтому по справедливости окрыляется разум философа: у него всегда по мере его сил память обращена на то, чем божественен бог. Только человек, правильно пользующийся такими вспоминаниями, всегда посвящаемый в совершенные таинства, становится подлинно совершенным. И так как он стоит вне человеческой суеты и обращен к божественному, большинство, конечно, станет увещевать его, как помешанного, — ведь его исступленность ($\dot{\epsilon}\nu\theta o\upsilon\sigma\iota\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$) скрыта от большинства.

Дополнение 1: Параллели в индуизме и буддизме

Орфико-пифагорейский миф о забвении и обретении памяти имеет свои многочисленные аналоги в древнеиндийской литературе. Чтобы описать утрату человеком сознания своей истинной и бессмертной природы в результате слишком сильного погружения в жизнь, здесь используются образы повязки на глазах, пленения, сна, забвения; и наоборот, обретение сознания собственного «я» образно описывается как снятие повязки, освобождение, пробуждение, вспоминание.

Как указывает М. Элиаде (2001), в *Дигханикае* утверждается, что боги падают с небесных высот, когда «память изменяет им и подводит их»; напротив, те боги, которые ничего не забывают, вечны, несменяемы, и их природа неизменна.

Будда обладал абсолютным всеведением, так как достиг совершенного пробуждения. Подобно мудрецам и йогам, он помнил все свои предыдущие существования, но в то время, как мудрецы и йоги достигли возможности знать лишь определенное количество своих прошлых существований, иногда самых значительных, Будда был единственным, кто знал их все.

Дополнение 2: Параллели в японской храмовой геометрии

Крайне любопытные параллели с пифагорейским отношением к математике обнаруживаются в так называемой японской храмовой геометрии *сангаку*. Искусство храмовой геометрии возникло в Японии в эпоху Эдо (1603–1867), когда страна практически полностью была изолирована от западного мира. Любители геометрии из разных социальных классов, от крестьян до самураев, открывали и доказывали многочисленные теоремы, от простых до очень сложных, причем многие из этих теорем весьма сильно отличаются от тех, что известны в геометрии западного мира. Чертежи к доказанным теоремам вырезались на деревянных досках и красиво раскрашивались. На большинстве досок приводился только результат, а доказательство отсутствовало; также на доске указывался автор и год изготовления доски. Готовые доски вывешивались над входом в синтоистский или буддистский храм. Как пишут Фукагава и Педоу (Fukagawa & Pedoe 1989, p. xi),

> Чувство формы и восприятие природной красоты всегда отличали жителей Японии, так что не удивительно, что геометрия, притягательная своей красотой и неочевидностью задач и теорем, стала для практикующих это искусство людей не только развлечением, но и подходящим предметом для приношений богам.

Считается, что безымянных синтоистских божеств *ками* — восемь миллионов, и они тайно странствуют по земле. Когда человеку неожиданно открывается что-либо прекрасное, это означает, что рядом с ним прошло незримое божество.

Это японское отношение к богам в чем-то смыкается с древнегреческим. Во всяком случае, здесь уместно будет вспомнить рассказ о Гераклите, который передает Аристотель в трактате *О частях животных* (645 a17):

> Рассказывают, что некие странники желали встретиться с Гераклитом, но когда подошли и увидели, что он греется у печки, остановились в смущении. Тогда он пригласил их смело входить, «ибо и здесь тоже есть боги».

Приношение досок с доказанными теоремами в качестве дара божеству напоминает известный рассказ о Пифагоре, принесшим при открытии своей теоремы обильные жертвы богам. Этот рассказ передается несколькими авторами, в том числе Диогеном Лаэрцием (VIII, 12) и Проклом (*Комментарий к первой книге «Начал» Евклида*, 426_6). История о гекатомбе примиряется с пифагорейским вегетарианством в рассказе Порфирия (*О жизни Пифагора*, 36), который, ссылаясь на «надежнейших авторов», сообщает, что жертвенные быки Пифагора были сделаны их пшеничного теста.

Метод открытия геометрических теорем, практиковавшийся японскими геометрами, основывался на интенсивной и продолжительной концентрации. Когда одного геометра спросили, как он получил свои замечательные теоремы об эллипсах, он ответил, что не размышлял ни над чем, кроме эллипсов, в течение последних десяти лет!

Эту историю можно сопоставить с пассажем Плутарха в *Марцелле* (17), посвященным Архимеду и являющимся настоящим гимном занятиям геометрией:

> Все свое рвение он обратил... на занятия, не сравнимые ни с какими другими, представляющие собою своего рода состязание между материей и доказательством, и в этом состязании первая являет величие и красоту, а второе — точность и невиданную силу: во всей геометрии не найти более трудных и сложных предположений, объясненных посредством столь простых и прозрачных начал. Некоторые приписывают это природному дарованию этого мужа, другие же считают, что лишь благодаря огромному труду все до малейших частностей у него кажется возникшим легко и без всякого труда. Собственными силами вряд ли кто найдет предлагаемое им доказательство, но стоит изучить его, и появляется уверенность, что ты и сам мог бы его открыть: таким легким и быстрым путем ведет оно к цели. И нельзя не верить рассказам, будто он был тайно очарован некоей сиреной, не покидавшей его ни на миг, а

> потому забывал о пище и об уходе за телом, и его нередко силой приходилось тащить мыться и умащаться, но и в бане он продолжал чертить геометрические фигуры на золе очага и даже на собственном теле, натертом маслом, проводил пальцем какие-то линии — весь во власти великого наслаждения, поистине вдохновленный Музами.

Известно также, что когда японские геометры ознакомились с китайским переводом НАЧАЛ *Евклида*, они были сильно удивлены: зачем доказывать такие очевидные факты, как равенство углов при основании равнобедренного треугольника и т. п., если имеется множество сложных теорем, на открытие которых не жаль потратить свои силы?

Дополнение 3: Принцип свободного образования

Мысль о том, что свободным людям подобает получать свободное образование, восходит к пифагорейцам. Выше уже цитировался отрывок из ПРОКЛА, в котором говорилось, что ПИФАГОР придал геометрии форму свободного образования. Принцип «свободного образования» может быть истолкован, по меньшей мере, трояко, и все эти три толкования так или иначе связаны с пифагореизмом. Во-первых, это образование, ведущее к освобождению человеческой души; во-вторых, это образование, приличествующее свободному человеку; и в-третьих, это образование, которое не может осуществляться путем принуждения. ЯМВЛИХ (183_{10-14}) сообщает, что согласно учению пифагорейцев,

> правильное обучение должно возникать добровольным соединением, по обоюдному желанию учителя и учащегося, ибо если та или иная сторона противится, то задача не будет выполнена надлежащим образом.

Эта же мысль высказана и в переданном СТОБЕЕМ (II, 31, 119) отрывке из *Пифагорейских изречений* АРИСТОКСЕНА:

> Они говорили, что всякое изучение знаний и искусств, если оно добровольно, то правильно и достигает цели, а если недобровольно, то негодно и безрезультатно.

Ее же повторяет и ПЛАТОН в *Государстве* (536d):

> Свободнорожденному человеку ни одну науку не следует изучать рабски. Правда, если тело насильно заставляют преодолевать трудности, оно от этого не делается хуже, но насильственно внедренное в душу знание непрочно.

Упражнение в математических науках, согласно пифагорейцам и ПЛАТОНУ, — это путь к облагораживанию и спасению души. Поэтому математические науки следует изучать не ради «выгоды», а ради мусического вдохновения и упражнения в познавании истины. Отсюда проистекает знаменитая античная установка на «бесполезность» чистой математики, нашедшая свое выражение в анекдоте о ЕВКЛИДЕ, который передает СТОБЕЙ (II, 31, 114):

> Приступив к изучению геометрии и разобрав первую теорему, один юноша спросил у ЕВКЛИДА: «А какая мне будет польза от этой науки?» ЕВКЛИД подозвал раба и сказал: «Дай ему три обола, раз он хочет извлекать выгоду из учебы».

Сам этот анекдот имеет пифагорейские корни, поскольку ЯМВЛИХ в *Протрептике* (108_{11}) и ПРОКЛ в *Комментарии к первой книге «Начал» Евклида* (84_{16}) приводят такое пифагорейское изречение: «Фигура и шаг, а не фигура и три обола».

А в книге *О пифагорейской жизни* (21–25) ЯМВЛИХ рассказывает историю о некоем самосском юноше, которого ПИФАГОР привлек к изучению математических наук, платя ему сначала по три обола за каждый разобранный геометрический чертеж. Когда юноша увлекся математикой, мудрец притворно стал ссылаться на свою бедность и недостаток денег. И тогда юноша ответил ему, что он сам готов платить своему учителю по три обола за каждую изученную геометрическую фигуру.

Благодарности. Я выражаю свою признательность А. С. Штерну (Омск) — за правильно заданный вопрос, ответом на который и является эта статья; И. С. Рубанову (Киров) — за то, что он познакомил меня с задачами японской храмовой геометрии. Я благодарен также Е. В. Афонасину и А. С. Кузнецовой (Новосибирск) за содержательные беседы и понимание.

Библиография

Диоген Лаэртский. *О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов.* Пер. М. Л. Гаспарова. М.: Мысль, 1986.

Жмудь Л. Я. *Наука, философия и религия в раннем пифагореизме.* СПб.: Алетейя, 1994.

Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии.* М.: Наука, 1991.

Перминов В. Я. О природе доказательного мышления в догреческую эпоху развития математики. *Историко-математические исследования*, **2(37)**, 1997, с. 180–200.

Платон. *Собрание сочинений.* В 4 т. М.: Мысль, 1990–94.

Плутарх. *Сравнительные жизнеописания.* В 2 т. М.: Наука, 1994.

Прокл. *Комментарии к первой книге «Начал» Евклида. Введение.* Пер. и комм. Ю. А. Шичалина. М.: ГЛК, 1994.

Рассел Б. *История западной философии.* В 3 т. Новосибирск: Сибирское университетское изд-во, Изд-во НГУ, 2001.

Сабо А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования. *Историко-математические исследования*, **12**, 1959, с. 321–392.

Фрагменты ранних греческих философов. Ч. 1: От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики. Пер. А. В. Лебедева. М.: Наука, 1989.

Эберт Т. *Сократ как пифагореец и анамнезис в диалоге Платона «Федон».* СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2005.

Элиади М. *Аспекты мифа.* М.: Академический проект, 2001.

Ямвлих. *О пифагоровой жизни.* Пер. И. Ю. Мельниковой. М.: Алетейя, 2002.

Borges J. L. El libro. En: *Borges oral.* Buenos Aires: Emece editores, 1979, p. 13–24.

Burkert W. *Weisheit und Wissenschaft: Studiern zu Pythagoras, Philolaos und Platon.* Nürnberg: Carl, 1962. Английский перевод: *Lore and science in ancient pythagoreanism.* Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1972.

von Fritz M. K. Die APXAI in der griechischen Mathematik. *Archive für Begriffsgeschichte.*, **1**, 1955, p. 13–103.

Fukagawa H., Pedoe D. *Japanese temple geometry problems = San Gaku.* Winnipeg: Charles Babbage Research Centre, 1989.

Long H. S. *A study of the doctrine of metempsychosis in Greece from Pythagoras to Plato.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

Zuntz G. *Prsephone: Three essays on religion and thought in Magna Graecia.* Oxford, 1971.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта “Школа Пифагора”,
Центр образовательных проектов “СИГМА”,
Новосибирск.
email: pythagor@ngs.ru

В предыдущем номере журнала был опубликован рассказ об уникальном учебном заведении — школе-интернате физико-математического профиля при МГУ, известном как ФМШ-18, ныне одно из подразделений СУНЦ МГУ. Продолжая эту тематику, мы публикуем в настоящем номере две статьи преподавателя ФМШ В. В. Вавилова. В первой из них приводится краткая история создания школы и рассказывается о методической работе преподавателей, а также прилагается большой список учебно-методических работ учителей ФМШ. Вторая статья посвящена конкурсу задач памяти А. Н. Колмогорова.

Математическая биобиблиография школы

Эта статья является естественным продолжением работы, опубликованной в предыдущем выпуске журнала. Обе публикации осуществлены при поддержке автора ***"Клубом ФМШ Колмогорова",*** объединяющим выпускников, преподавателей и ветеранов школы.

Инициатор создания и первооснователь Московского университета М. В. Ломоносов неоднократно писал, что университет без студентов, что поле без семян. И университет постоянно заботился о том, чтобы это поле было обеспечено наилучшими семенами. В день открытия университета (26 апреля 1755 года) при нем начала работать гимназия, которая просуществовала до 1812 года и в которой обучались будущие студенты университета. М. В. Ломоносов так говорил об этом: "При университетах должна быть гимназия, без которой университет как пашня без семени. Здесь следует преподавать школьные предметы так, чтобы вышедшие оттуда должны быть способны приступить к занятиям высшего порядка в университетах". Два века спустя два выдающихся ученых А. Н. Колмогоров и И. К. Кикоин возродили вновь эту "гимназию", добившись создания при Московском университете специализированной школы-интерната №18 физико-математического профиля. Более точно, постановление Совета Министров страны "Об организации специализированных школ-интернатов физико-математического и химико-биологического профиля" датировано 23 августа 1963 года, а соответствующие ему Положение о специализированной школе-интернате при государственном университете и Правила приема в школу-интернат были утверждены приказом министра высшего и среднего специального образования лишь 22 июня 1964 года. Аналогичные школы-интернаты были открыты также в Новосибирске, Ленинграде и Киеве; справедливости ради, нужно отметить, что при Новосибирском университете такой интернат был открыт еще до выхода правительственного постановления — в 1962 году (здесь решимость и настойчивость проявил академик М. А. Лаврентьев).

В конце пятидесятых годов особенно активизировалось движение за организацию специализированных школ и классов с повышенным вниманием к математическому образованию учащихся, в которых на изучение математики и физики отводилось немного больше часов, чем в обычной массовой школе. Кроме того, повсеместно расширялись такие формы работы со школьниками, как олимпиады, кружки, воскресные лектории, вечерние школы и т. д. Дополнительные часы в разных школах употреблялись на разные цели: на изучение программирования, основ математического анализа, на более глубокое проникновение в традиционный курс математики средней школы. С самого начала организаторы и энтузиасты идеи повышенного специализированного образования ставили перед собой, в качестве основной цели, задачу подъема общего уровня преподавания естественнонаучных дисциплин в стране; не менее важной целью являлась задача поиска, воспитания и поддержки одаренной молодежи.

Нужно иметь в виду, что задача создания новой формы профессионального обучения школьников, да еще в широких масштабах, и чтобы она оказала существенное влияние на содержание преподавания математики и физики в массовой средней школе, чрезвычайно сложна даже при наличии определенной концепции, признанной специалистами и педагогами-практиками, а наша страна не располагала в то время никакими разработками и экспериментами в этом направлении. Поэтому потребовалась академическая и вузовская научная общественность, способная влить новую струю в довольно застоявшуюся к тому времени систему общего среднего образования. (В скобках заметим, что все глобальные реформы среднего образования начинались и проводились в жизнь ведущими учеными как у нас в стране, так и за рубежом).

Всем понятно, что развитие средней общеобразовательной школы (как и показывает опыт многих стран) может совершаться лишь очень медленно. На это есть много причин, но имеются и такие, которые специально относятся к преподаванию математики. Об этом много писал и говорил Э. Борель; он справедливо отмечал наличие, в период реорганизации, сильных консервативных тенденций, а во-вторых, он выделял важность общественно согласованных целей преподавания математики. Он писал: "...Если преподавание математики имеет целью образование ума, а не приобретение точных знаний, и если эта цель достигается почти совершенным образом с помощью традиционных программ, то к чему изменять эти программы?

Я желал бы объяснить, почему такая точка зрения представляется неприемлемой. Прежде всего — вследствие фактической стороны дела. Невозможно сохранить в неприкосновенности одну часть организма, если изменяются все остальные его части. В самом деле, в гуманитарном образовании словесные и точные науки составляют одно целое: нельзя отдельно рассматривать различные специальные программы, если цель школы одна — формировать культурного человека. Математика не может поэтому оставаться единственной неизменной частью школы, коль скоро все в этой школе меняется: необходимость в таких изменениях вызывается уже нуждами родственных предметов программы.

Но еще важнее, может быть, следующая сторона дела: для школы не безопасно удаляться все более и более от жизни и реальных условий. С каждым днем приложения науки все глубже проникают в обиход нашей жизни: мы ежедневно пользуемся велосипедом, на столбцах газет мы постоянно встречаем различные графики; когда у нас дома кто-нибудь заболевает, мы вычерчиваем графики температуры... . Если преподавание математики будет опираться на эти столь привычные нам вещи, то оно сделается более интересным, будет чуждо мертвой схоластики. Когда преподавание математики получает слишком схоластический характер, то оно вызывает у многих учеников отвращение и не только не действует образовательным образом, но, напротив, известной части наносит вред".

Конечно, тот факт, что в нашей стране именно в пятидесятые годы началось это движение за повышение уровня математического образования тех школьников, которые проявляют интерес и способности к изучению математики, легко объясним. К этому времени достаточно определенно выявилась фундаментальная роль математики для прогресса наших знаний об окружающем нас мире, для развития народного хозяйства и его управления, для космических исследований, для обороны страны. В эти же годы педагогическая наука все более настойчиво стала проводить в жизнь и идеи полной реорганизации среднего образования.

Понимая, что начинать нужно немедленно, имея достаточно большой опыт работы с московскими школьниками и учителями, и учитывая огромные размеры страны, А. Н. Колмогоров неоднократно в начале шестидесятых годов обращается к идее о том, чтобы организовать в порядке эксперимента при крупных университетах специализированные школы-интернаты, учащиеся которых должны отбираться вне крупных городов, вне научных центров. Эта идея включала в себя следующее соображение: очень многие способные к математике учащиеся сельских и поселковых школ остаются без серьезного воздействия математической общественности, нет возможности в каждой такой школе организовать математические кружки и специальные группы для получения дополнительных математических знаний, обеспечив их квалифицированными руководителями, которые одновременно участвуют в развитии математической науки. Экспериментальная же составляющая идеи заключалась в том, чтобы отработать основные моменты реформы содержания дифференцированного обучения школьников в масштабах всей страны.

Несомненно то, что при создании школы-интерната при МГУ и других аналогичных школ (особенно при разработке содержания профилирующих дисциплин) был изучен опыт работы различных учебных заведений Франции, Англии, Германии, Италии, Австрии и других стран, а также использованы некоторые идеи реформирования математического образования в этих странах; у А. Н. Колмогорова на даче в Комаровке, дома и в интернате, в частности, были книги и педагогические статьи Э. Бореля, которые он изучал и высоко оценивал. При организации школы-интерната в Москве, кроме того, сказался и личный опыт школьного преподавания А. Н. Колмогорова, который еще в свои студенческие годы преподавал математику и физику в Потылихинской опытно-показательной школе, о чем и гласит первая запись в его трудовой книжке (см. [1]): "До поступления на работу в МГУ (1929 г.) — общий стаж работы 3 года. Основание — копия удостоверения №87, март 1925 г." В этой школе он был секретарем школьного совета и воспитателем в интернате, чем он очень гордился. Сейчас довольно много людей, которых А. Н. Колмогоров приглашал на работу в школу-интернат (и не только математиков и физиков), имеют аналогичные первые записи в своих трудовых книжках, но уже отражающих начало своей трудовой деятельности в школе-интернате при МГУ — школе им. А. Н. Колмогорова.

Говоря о первых шагах в становлении будущего ученого (и приобщении школьников к исследовательской работе в том числе), А. Н. Колмогоров, в период создания школы при МГУ, говорил: "Прослеживая биографии известных ученых, в большинстве случаев в начале их пути мы найдем увлекшегося наукой школьного учителя, обратившего на способного ученика индивидуальное внимание, первого научного руководителя, указавшего подходящую тему самостоятельного исследования, часто обдуманно приспособленную к возможностям именно данного студента. Часто заметим мы и одного или нескольких близких друзей-сверстников, поддерживающих друг друга. Думаю, что эти тонкие человеческие взаимоотношения, формирующие будущего ученого, сохранят все свое значение и в будущем.

Сейчас, когда наша страна нуждается в большом числе способных и хорошо подготовленных исследователей в самых разных областях науки и техники, нужна, конечно, широкая система организационных мероприятий, в которой находят свое место и факультативные занятия по выбору со старшими школьниками, специализированные школы, различные виды внешкольной работы (кружки школьников при вузах, олимпиады и т.п.), широкое ознакомление молодежи со специальным характером работы университетов и технических вузов (типа Московского физико-технического института), надлежащая организация конкурсных экзаменов в такого рода вузы, широкое вовлечение в научную работу и студентов тех вузов, в которых подготовка будущих научных работников является лишь побочной задачей. Конечно, однако, все эти организационные мероприятия не дадут ожидаемого результата, если за ними не будут стоять та индивидуальная забота о развитии каждого юноши — потенциального будущего ученого, о которой я сказал сначала".

Вот некоторые выдержки из Положения о специализированной школе-интернате при государственном университете (оно было утверждено приказом Минвуза СССР за №196 от 22.06.64 г.):

"... — В специализированную школу-интернат принимаются учащиеся из числа наиболее успешно окончивших неполную среднюю городскую или сельскую общеобразовательную школу и проявивших способности к овладению физико-матема-тическими и химико-биологическими науками...

— Отбор кандидатов на зачисление... производится университетом совместно с органами народного образования на основе конкурсных экзаменов по профилирующим дисциплинам и собеседования ученых с поступающими, с учетом рекомендации педагогического совета школы.

— Учащиеся, принятые в специализированную школу-интернат, обязаны систематически и глубоко изучать все дисциплины учебного плана, посещать обязательные учебные занятия по расписанию и в установленные сроки выполнять учебные задания, участвовать в общественно полезном труде, самообслуживании и общественной жизни коллектива, соблюдать правила внутреннего распорядка и социалистического общежития.

— Выпускникам ... , окончившим обучение и успешно сдавшим выпускные экзамены, выдается аттестат о среднем образовании и свидетельство о получении специальности, которые дают право работать по избранной специальности и поступать в высшие учебные заведения на общих основаниях.

— Учебно-воспитательная работа... строится в соответствии с требованиями современной науки...

Усиление подготовки учащихся в зависимости от профиля обучения по математике, ... достигается путем изучения специальных курсов по особым программам, занятий в кружках... , прохождения учащимися практикумов...

Учебные планы и программы по профилирующим дисциплинам утверждаются Министерством высшего и среднего специального образования СССР. Учебные занятия по остальным предметам проводятся по программам, утвержденным Министерством просвещения (народного образования).

— Обучение... обеспечивает всестороннее умственное и физическое развитие учеников, сознательное усвоение основ науки, развитие инициативы, любви к науке, привитие навыков к самостоятельной работе и умение применять полученные знания в практической работе.

В школе-интернате проводятся уроки, лекции, лабораторные практикумы, экскурсии, практические работы в мастерских и на учебно-опытных участках, занятия в лабораториях и в вычислительных центрах университета и т.д. В учебных заведениях должны широко применяться учебное кино и другие технические средства, способствующие лучшему усвоению учебного материала.

— Численность учащихся в классе и число воспитанников в группе ... устанавливается в 30 человек. Для занятий по труду, иностранному языку, физической культуре и производственному обучению класс делится на две подгруппы при наличии не менее 20 человек в классе.

— Преподавание учебных дисциплин ... ведут учителя, назначаемые органами народного образования ... , по согласованию с университетом...

Для преподавания в школе-интернате профилирующих дисциплин, специальных курсов, проведения лабораторных работ привлекаются профессора и преподаватели государственного университета и научные сотрудники научно-исследовательских институтов

— В целях обеспечения необходимой подготовки учащихся по профилирующим дисциплинам ... по решению совета школы создаются кабинеты, учебно-производст-венные мастерские и учебно-опытные участки как самостоятельные подразделения школы.

— Для рассмотрения и решения основных вопросов обучения и воспитания учащихся ... создается совет школы. Состав совета утверждается ректором университета"; более подробно см. в [26].

По этому положению (точнее, на основании правил приема, которые были утверждены тем же приказом Минвуза), в школу-интернат не принимались жители университетских городов. Московская ФМШ имела только девятые и десятые классы (нынче мы бы сказали — десятые и одиннадцатые), в которых обучалось около 360 школьников. Каждый год набиралось 150 человек на двухлетнее обучение и 60 человек на одногодичное обучение (последнее было организовано в 1967 году). Специализация обучения в школе-интернате до 1988 года была только по математике и физике. Отметим, что в порядке эксперимента (1973-1974 годы) набирался один класс на трехгодичное обучение; этот опыт у нас не удался (в отличие от Ленинградского и Новосибирского университетов), так как психологические трудности, связанные с отрывом от семьи и значительной самостоятельностью жизни в условиях интерната, а также огромная учебная нагрузка в этом возрасте для многих детей оказались непреодолимыми (а сама школа с такими "малышами" работать была не подготовлена).

Школы-интернаты были задуманы как школы научного творчества, а отнюдь не как своеобразные курсы по подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения (хотя этому вопросу всегда уделялось должное внимание). Главное стремление — привить питомцам навыки самостоятельного научного мышления, вооружить их всем, что необходимо для восприятия университетских курсов с полным пониманием существа дела и для быстрого вхождения в самостоятельную и активную научную работу.

Эти основополагающие принципы в деятельности школы не всегда находили одобрение и поддержку в органах народного образования, у отдельных работников университета и некоторых видных ученых. Ярким примером может здесь служить одна дискуссия между П. Л. Капицей и А. Н. Колмогоровым (см. [38, 64, 85]). Время, конечно, расставило все по своим местам. Сейчас во всем мире, в том числе и в России, существуют и активно развиваются специализированные школы, лицеи, гимназии, колледжи. Об эффективной национальной системе поиска, развития и поддержки талантливой молодежи заботится любая страна, думающая о своем будущем.

Активная личная деятельность по поиску и воспитанию роднит наших выдающихся ученых и общественных деятелей М. В. Ломоносова и А. Н. Колмогорова в озабоченности проблемами народного образования и будущего страны. Московский университет всегда высоко оценивал и поддерживал деятельность школы-интерната. Об этом неоднократно высказывались на встречах в школе и в печати его ректоры И. Г. Петровский, Р. В. Хохлов, А. А. Логунов, В. А. Садовничий и многие из деканов и профессоров университета. На первых порах, практически во всех высказываниях о школе специально подчеркивалось, что к самой идее создания школы отношение положительное, что эксперимент по ее созданию удачен и т.д. (обращалось внимание, конечно, и на некоторые проблемы и недостатки). Вот как, например, оценивал роль университета в делах школы, задачи школы и итоги работы в конце ее десятилетия ректор МГУ, академик Р. В. Хохлов: “Московский университет всегда стремится всевозможными способами помогать ученикам средней школы в развитии интереса и углубленном изучении той или иной области знаний. Ученые университета пишут для школьников учебники и учебные пособия, издают различные тематические книги и журналы; руководят на факультетах вечерними и заочными школами (например, широко известная по всей стране заочная математическая школа с многотысячным коллективом обучающихся в ней школьников), школьными кружками; читают для школьников циклы лекций в лектории университета и на курсах по подготовке в высшие учебные заведения; делают многое другое, привлекая к этой работе аспирантов и студентов старших курсов.

И ваша школа, одна из первых подобного вида школ, была создана и продолжает работать при активном участии ученых университета. Бессменным председателем ее Попечительского совета является академик Андрей Николаевич Колмогоров.

Большая часть выпускников вашей школы успешно продолжает учиться в Московском университете или в институтах.

Хочется поблагодарить преподавателей и сотрудников школы за работу и внимание к ученикам, за умение не только хорошо подготовить их по своему предмету, но и помочь стать сознательными гражданами своей Родины. Пожелать преподавателям и сотрудникам еще больших успехов в учебно-воспитательной работе.

И наконец, хочется пожелать всем ученикам школы настойчиво и целеустремленно учиться, чтобы вернее избрать свой путь, чтобы ваша жизнь в дальнейшем была как можно более насыщенной для вас самих и наиболее полезной для нашего общества, чтобы вы завершали XX век во всеоружии разнообразных знаний, необходимых для людей будущего”.

В настоящее же время все уже давно забыли о том, что школа-интернат при университете была создана в порядке эксперимента. “Очень хорошо, что в России есть такое явление, как школа-интернат №18. И делает эта школа святое дело — ищет способных, талантливых ребят и дает им возможность учиться” — так совсем недавно говорил В. А. Садовничий в своем выступлении перед учащимися школы им. А. Н. Колмогорова.

В 1988 году на базе школы-интерната в Московском университете (и в Новосибирском), после успешной 25-летней ее деятельности, на основании решения правительства страны, был создан Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ МГУ), который объединяет школу им. А. Н. Колмогорова (это звание официально было присвоено школе-интернату лишь в 1989 году, хотя ее практически всегда называли “колмогоровской” школой) с другими подразделениями университета, работающими со школьной молодежью. (И, на мой взгляд, закончился “романтический период” в жизни и развитии школы-интерната). Этот столь прогрессивный шаг вперед стал возможен благодаря инициативам директоров школ-интернатов при НГУ и МГУ того периода (и их выпускников) А. А. Никитина и Д. Л. Абрарова; А. Н. Колмогоров был в курсе намечаемых перемен и поддерживал их, но состояние его здоровья не позволило ему тогда активно помочь в их реализации. В 1988 году в школе им. А. Н. Колмогорова по инициативе

Ю. Д. Третьякова, академика и профессора МГУ, была открыта химическая специализация; в 1992 году по инициативе академика А. Н. Тихонова и декана факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ, профессора Д. П. Костомарова — компьютерно-информационная специализация, а по инициативе самой школы, при поддержке Совета школы и экономического факультета МГУ, появился один класс (двухгодичного обучения), специализирующийся по математическим проблемам экономики. Правда, экономическая специализация просуществовала в школе только четыре года; от нее отказались, главным образом, потому, что такое отделение было открыто на механико-математическом факультете, куда поступают многие наши выпускники, и из-за трудностей с реализацией учебного плана в школе, т.к. обучение такой специальности требует не только широкого спектра экономических дисциплин, но и очень глубокой математической подготовки.

Положение, на основе которого работают школа и СУНЦ, включает в себя многое из того, что было и в первом положении о школе-интернате. Однако имеются и существенные отличия. Во-первых, СУНЦ является самостоятельным подразделением Московского университета и имеет соответствующие права и обязанности, присущие факультетам университета (раньше школы-интернаты имели двойное подчинение — органам народного образования и университету). В первые годы возглавлял СУНЦ проректор МГУ — сначала это профессор В. В. Козлов, ныне академик РАН (у него было два заместителя: В. В. Вавилов и И. В. Кривченков), затем профессор М. В. Михалев (один из заместителей — И. Н. Сергеев). Кроме того, изменился сам статус школы и ее учеников: появилось звание учащегося Московского университета с соответствующим удостоверением и правами, а также то, что выпускники школы, успешно ее окончившие и получившие рекомендацию Ученого Совета СУНЦ МГУ, зачисляются на профильные факультеты университета без вступительных экзаменов. В школе им. А. Н. Колмогорова появились кафедры с полнокровными штатными расписаниями. Первоначально была создана кафедра математики и информатики (заведующий — доцент В. В. Вавилов) и при ней лаборатория информатики (заведующий — доцент Е. В. Чепурин); впоследствии на основе этой лаборатории была создана кафедра информатики (зав. кафедрой — профессор Ю. В. Шестопалов; в настоящее время — доцент Е. В. Андреева). Четыре года (с 1992 по 1994) при кафедре математики работала также учебная лаборатория математической экономики, которой заведовал профессор экономического факультета МГУ Ю. Н. Черемных. Два года (1996-1997) исполнял обязанности заведующего кафедрой математики доцент М. В. Смуров, а начиная с 1997 года и по настоящее время заведующим кафедрой математики СУНЦ МГУ является профессор О. П. Виноградов.

Конечно, кафедра математики не возникла на пустом месте; во все предыдущие годы работало так называемое методическое объединение математиков и была соответствующая должность — заведующий математическим циклом ("завуч по математике" на общественных началах). В 1964 – 1966 годы организовывал работу по специальным дисциплинам — математике и физике — О. Н. Найда (он же был самым активным помощником И. К. Кикоина и А. Н. Колмогорова при открытии самой школы). В 1966 году эта должность была разделена и появился завуч по математике. Им стал И. Г. Журбенко, аспирант А. Н. Колмогорова. Он проработал в должности завуча 5 лет (1966 – 1970 гг.); отметим, что именно в этот период в наших учебных планах появилась дисциплина "Математический практикум". Будучи уже аспирантом механико-математического факультета МГУ и преподавателем математики в школе-интернате, обязанности завуча в 1970-72 гг. исполнял ее же выпускник самого первого набора А. М. Абрамов; в эти же годы он был приглашен А. Н. Колмогоровым также к реализации проводимой в стране реформы среднего образования и к написанию учебников для массовой средней школы (ныне А. М. Абрамов — член-корреспондент Российской Академии Образования). Почти десять лет (1972-81 гг.) завучем по математике работал В. В. Вавилов, два года затем (1981-82 гг.) работал С. А. Богатый; в 1982 году эту должность занял А. В. Макаров и проработал до 1988 года — вплоть до создания кафедры математики и информатики.

Из чего же складывается профессиональная деятельность преподавателя математики (профессора, доцента, старшего преподавателя, ассистента) в школе? Каковы итоги работы кафедры математики (до 1988 года — математического объединения преподавателей) и что в ее деятельности нужно исправить? Как нужно преподавать математику для талантливых юношей и девушек? Каково содержание математических курсов в программах и их методическое обеспечение? Как правильно построить программы с учетом всех необходимых межпредметных связей? Каковы роль и место новых технологий в процессе обучения математики? Какова система домашних заданий и контроль за его выполнением? Как реализуется система непрерывного математического образования: школа — университет — аспирантура — ... ? Эти и многие другие вопросы приходится решать как администрации школы, так и руководству кафедры. Сразу отметим, что некоторая проблема состоит в том, что наши "молодые преподаватели" (которые, как правило, не имеют специального педагогического образования) стремятся к тому, чтобы их воспитанники восприняли (выучили) все то, что они сами сумели узнать в школе и в университете за много лет.

Чтобы разобраться во всех этих проблемах преподавания математики, в школе, при методическом объединении ранее, а затем уже на кафедре математики эпизодически работал (и работает сейчас) методический семинар (его заседания проходили и в лаборатории у А. Н. Колмогорова, и на мехмате и, конечно, в стенах школы). Правда, ради справедливости нужно сказать, что его эффективность не очень велика; это связано, прежде всего со спектром выносимых для обсуждения на нем вопросов, а также с отсутствием должного интереса преподавателей кафедры к вопросам методического характера. Мне представляется, что для повышения роли и значимости работы кафедрального семинара должна быть некоторая объединяющая всех участников тема (проект). Например, в качестве темы может служить такая:"Научные основы школьного курса математики" (см. статьи А. Н. Колмогорова в журнале "Математика в школе") и предполагая при этом, что после соответствующих обсуждений на семинаре должны публиковаться в широкой прессе наиболее удачные доклады под этим общим названием. В качестве примера одного из возможных реализаций проектов приведем организацию В. В. Вавиловым на кафедре семинара *"Лаборатория педагогического творчества"* в сентябре 2005 года. Этот семинар ставит в качестве одной из своих целей реализацию научно-педагогического проекта, который включает в себя, в частности, публикацию серии новых статей в научно-методической газете "Математика" издательского дома "Первое сентября" в специальной рубрике "В гостях в школе им. академика А. Н. Колмогорова". Предполагается опубликовать многие из учебно-методических материалов, используемых в школе и разработанных нашими сотрудниками, рассказать о работе специальных курсов и семинаров, о заданиях математического практикума, о творческих достижениях наших учащихся, о традиционной конференции "Колмогоровские чтения", о работе летних олимпиадных школ и о многом другом. Кроме того, в рамках проекта предполагается работа по адаптации и подготовке к переизданию некоторых статей прошлых лет А. Н. Колмогорова, В. М. Алексеева, А. Н. Землякова, Б. М. Ивлева, Т. Н. Трушаниной и других преподавателей школы, посвященных различным аспектам педагогического труда в специализированных школах и частично реализованных в физико-математической школе-интернате №18 при МГУ, в других специализированных школах и центрах. Опять же отметим, что пока активность преподавателей и их участие в работе такого семинара оставляет желать лучшего к нему отношения, но кое-что сделано (см. список публикаций ниже); кроме того, в реализации проекта значительно помогают современные компьютерные технологии, дающие возможности быстро обсудить многие из нужных вопросов в электронной форме. Идею проекта поддержала и редколлегия журнала "Математическое образование", в котором также предполагается публикация значительного цикла статей, отражающих жизнь нашей "Математических и Специальных Наук Школы". С пониманием к этой важной работе членов кафедры и бывших ее сотрудников отнесся "Клуб ФМШ Колмогорова", выделив для поддержки и развития этой инициативы определенные денежные средства.

В статье "Математических и Специальных Наук Школа" в предыдущем номере журнала "Математическое образование" немного говорилось о том, что математики довольно активно участвуют в общественной жизни школы. К сказанному там можно добавить еще несколько штрихов. Например, уроки математики (в конце полугодий) посвящались "литературным чтениям", где происходили "читки" "запрещенных" и разрешенных произведений М. Булгакова, братьев Б. и М. Стругацких, А. Ахматовой, Дж. Милна и Б. Заходера и др. В школьных спектаклях и при подготовки концертов в них непременно участвовали преподаватели математики (и не только). Любопытно, что при обсуждении дополнений к положению о кафедре СУНЦ (это было в 1988 году, когда создавались кафедры и, тем самым, писались "необходимые бумаги") в сохранившемся у меня протоколе заседания кафедры было отмечено, что следует "вписать в типовое положение о кафедре МГУ: Сотрудники кафедры участвуют в учебной, методической работе, научной и воспитательной деятельности в СУНЦ согласно индивидуальному плану, утверждаемому заведующим кафедрой с учетом пп. 3-19 ниже". Далее перечислялись эти пункты: Олимпиады. Командировки по приему в СУНЦ (новый прием), Подготовка и поведение конференций. Летняя (и другие) школы. Курсы повышения квалификации. Научное руководство учащимися. Общешкольные праздники и мероприятия (участие и проведение) — 1 сентября, День посвящения, День рождения ФМШ, Новый год, турпоход "Звездочка", Последний звонок и поход, Выпускной вечер. Подготовка команд школьников на конференции и поездки на эти конференции. Организация и проведение тематических вечеров для учащихся, дискуссионных и иных клубов. Участие в культурной программе для учащихся, экскурсии, выставки, музеи, театр, кино. Участие в самодеятельности (школьные театральные постановки, вечера, КВН). Участие в педсоветах. Участие в заседаниях кафедр. Командировки по научно-методической работе. Участие в работе воспитательного отдела. Публичные лекции. Научная работа по собственной тематике. А вот другая выписка из заседания кафедры математики от 19.10.1990 года, на котором рассматривался вопрос об участии сотрудников кафедры в проведении праздника школы "День посвящения в учащиеся МГУ". Было решено: "Просить оргкомитет по подготовке праздника включить в его программу следующие мероприятия: 1) "Пресс-конференция" кафедры математики и лаборатории информатики (45 мин, актовый зал; отв. В. В. Вавилов, Е. В. Чепурин); 2) Лекция В. В. Вавилова "Фибоначчи, Пушкин и Химия"; 3) Музыкальные встречи В. Н. Дубровского "Из истории джаза" (2x45 мин.) и Е. Б. Федорова "Машина времени: вчера, сегодня, завтра"; 4) Постановка спектакля по мотивам произведения Л. Филатова "Сказка про Федота-стрельца, удалого молодца" (Т. Г. Семенова, Н. Б. Алфутова и др.); 5) Компьютерные игры (45 минут в двух учебных классах; отв. Е. В. Андреева)". И все это, за исключением лекции В. В. Вавилова, было включено в программу праздника и с успехом прошло. В заключение упомяну о такой "добровольной стихотворческой деятельности" учащихся ("Все по желанию. Не пожелал — два в журнал!"): на школьные каникулы в качестве задания предлагается каждому учащемуся написать стихотворение, рассказ, песню, юмореску, анекдот и т.п. на учебные темы и темы интернатской жизни (см. отчеты [155, 161]; а также фольклорные сборники [476]).

За весь период работы школы им. академика А. Н. Колмогорова в ней работало много университетских людей и, в том числе, преподавателями математики. Подавляющее большинство преподавателей являлись совместителями: они имели основные обязанности на механико-математическом факультете МГУ, были его студентами или аспирантами. Многие из тех, кто пришел на работу в школу, раньше был ее учеником. Ниже мы публикуем список всех тех преподавателей математики школы (за весь период ее существования), который удалось восстановить; в скобках иногда указано "комсорг", "директор", выпускник и т.д.; все связано, конечно, с нашей школой. Наверняка имеются кое-какие неточности и не все преподаватели названы. Буду рад, если эта работа найдет свое продолжение. Итак, в школе (или только в летних школах, или приглашались лишь для руководства кружком или спецсеминаром, к олимпиадной деятельности или вообще эпизодически) преподавателями математики работали (при составлении использовались материалы сайтов pms.ru, internat18.ru и книги [476]; точный поименный список преподавателей с указанием их должностей и фотографии в последние пять лет см. в [139] и в предыдущем номере журнала "Математическое образование"):

Абрамов А.М. (выпускник первого набора в школу, ныне член-корреспондет РАО), Абраров Д.Л. (выпускник, директор), Авдеев М.Г. (военрук и преподаватель информатики), Алексеев В.Б. (выпускник первого набора в школу), Алексеев В.М. (профессор МГУ), Алексеев Д.В. (выпускник), Алфутова Н.Б. (выпускница), Андреева Е.В., Арнольд В.И. (профессор, ныне академик РАН), Артемов С.Н., Ахметьев П.М. (выпускник), Бабин Д.Н., Бахтина В.А., Бахшиян Г.С., Баштова Е.Е., Белкин С.Е., Бельнов В.К., Бовт Н.М., Богатый С.А., Богачев Л.В. (выпускник), Бочкарева Е.Э., Буров А.А. (выпускник), Бутузов В.Ф. (зав. кафедрой математики на физическом факультете МГУ, профессор), Вавилов В.В., Василенко О.Н., Васильев А.А. (комсорг), Веселов А.П. (выпускник), Ветров Л.Г., Виноградов В., Виноградов О.П., Волков А.А. (выпускник), Гаврилов В.И., Гайдуков Е.В., Гашков И.Б. (выпускник), Гашков С.Б.(выпускник), Герман О.Н. (выпускник), Годованчук В.В. (выпускник), Голендухина И.В. (выпускница), Гордеев Д.И., Григорьев Г.Г., Гринева Н.В., Гринчук М.Н. (выпускник), Гуревич М.Я., Гусев В.А., Гущин И.С., Довбыш С.А., Долбилин Н.П., Долгалева О.Е., Дранишников А.Н. (выпускник), Дубровский В.Н. (выпускник), Дубсон М.Э. (выпускник), Евдокименко А.П. (выпускник), Егоров А.А. (работает с первого дня открытия школы до настоящего времени), Егоров Ю.Е., Ермилов А.Е., Ерошенков М.Г. (выпускник), Журбенко И.Г., Звонкин А.К., Земляков А.Н. (выпускник), Зенкин А.А., Иванова Е.А., Ивашев-Мусатов О.С., Ивин Е.А. (директор), Ивлев Б.М. (выпускник), Имайкин В.М. (выпускник), Инжеватова Г.В. (выпускница), Капустина Г.В. (лаборантка), Карапетян А.В. (член-корреспондент РАН, профессор МГУ), Карташев С.Н. (комсорг школы), Кашалов И.А., Ковалев В.Л. (комсорг школы, ныне профессор МГУ), Ковалев В.А., Козлов М.В, Козлов В.В. (проректор и профессор МГУ, директор СУНЦ; ныне академик РАН), Козлов К.Л. (директор школы), Колесников Н.Н., ***Колмогоров А.Н. (основатель школы, академик РАН, профессор МГУ)***, Колосов В.А., Колпаков В.П. (комсорг, ныне зам. декана механико-математического факультета МГУ), Комбаров А.П., Кричивер И.В. (выпускник), Кудряшова Г.В., Кузнецов П.А. (директор), Лужина Л.М., Лузгин В.Н., Лукашенко Т.П. (выпускник), Любишкин В.А., Ляшко О.В. (выпускник), Макаров А.В., Макаров В.В., Макаров И.Г., Матвеев С.В., Мельников И.И. (комсорг), Мощевитин Н.Г., Мусин О.Р. (выпускник), Мычка А.Ю. (выпускник), Назаренко А.В. (выпускник, уч. секретарь кафедры), Нараленкова И.И. (уч. секретарь кафедры), Натяганов В.Л. (директор), Нестеренко Ю.В. (член-корреспнондет РАН, профессор МГУ), Нечаев А.Н., Никифорович Е.И., Николаев Ю.П. (уч. секретарь кафедры в настоящее время), Никулин В.В. (выпускник), Носов М.В, Окс Ф.С., Пашнова Н.А. (лаборантка), Пахомов В.Ф., Педора С.А. (выпускник), Перетрухин В.В. (выпускник), Петухов М.Ю. (выпускник), Плескунин В.В. (выпускник), Плиско В.Е. (выпускник), Полецкий Е.А. (выпускник), Полякова Л.С., Пономарев А.А. (выпускник), Прасолов В.В. (выпускник), Прошкина А.В., Разгулин А.В. (выпускник), Рождественский В.В., Рубан М.Е., Русаков А.А. (комсорг), Руголь В.А., Садовничий Ю.В., Селезнева Н.А., Селиванова И.Ю. (уч. секретарь кафедры), Семенова Т.Г., Сергеев И.Н., Скворцов В.А., Скопенков А.Б. (выпускник), Слинько А.М., Смирнова О.В., Смуров М.В. (выпускник), Соловьев О.А., Соловьев Ю.П. (профессор МГУ, зав отделом в журнале “Квант”), Сосинский А.Б., Спивак А.В. (выпускник), Степанов А.А., Степин А.М., Строгова А.И., Струков С.Н. (выпускник), Субханкулов Г.И., Сулим О.М. (выпускник), Сурин И.К., Сутырин В.Г., Сыркин Г.И., Терехина Е.Ю., Тиханина И.Г., Титова Е.В. (лаборантка), Трещев Д.В. (выпускник, ныне член-корреспондет РАН), Тропин И.Т. (директор), Троянов И.Н. (выпускник), Трушанина Т.Н. (выпускница), Угольников А.Б., Устинов А.В. (выпускник), Федоров Е.Б. (комсорг), Федотов М.В., Хлебутин С.Г. (выпускник), Христов П.В., Чалых О. А. (выпускник), Часовских А.А. (в настоящее время директор СУНЦ МГУ), Чепурин Е.В., Черемных Ю.Н., Чернов А.Г., Чубариков В.Н. (выпускник, ныне зам.декана механико-математического факультета МГУ, профессор), Чулаевский В.А. (выпускник), Шавгулидзе Е.Т., Шагиров Э.А., Шарич В.З. (выпускник), Шарыгин Г.И., Швец А.Н., Шамеева Т.Ю., Шамеев Т.Ю., Шеворошкин А.В., Шершевский А.А., Шивринская Е.В., Шкаликова Н.А., Шкред А.В. (выпускник), Щепин Е.В.(выпускник).

Ниже приводится *библиографический* перечень, куда собраны ссылки на избранные публикации основателя школы, академика А.Н. Колмогорова, на работы бывших и работающих ныне преподавателей о самой школе и о вопросах, тесно связанных с методикой преподавания в школе математических дисциплин. Он *далеко не полный* и, конечно, подготовка полной библиографии является важным для школы делом. Мало найдется школ (да и кафедр в вузах), в которых ее преподаватели столь активны. Эти публикации составляют неотъемлемую страницу *математической биографии* школы. Именно поэтому мы так и назвали статью. Итак, *первый шаг сделан* и мы надеемся, что найдутся активные продолжатели этой работы.

А. Н. Колмогоров

Литература

[1] А. Н. КОЛМОГОРОВ в воспоминаниях, Редактор-составитель А. Н. Ширяев, – М.: Физматлит, 1993.

[2] Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. – М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.

[3] КОЛМОГОРОВ. Юбилейное издание в 3-х кн. (Редактор-составитель А. Н. Ширяев). – М. Физматлит, 2003.

[4] А. Н. Колмогоров, Как я стал математиком? – Журнал "Огонек", 48(1963).

[5] А. Н. Колмогоров, Как я стал математиком. Что такое математика? (В книге "Союз, рождающий чудеса"). – М.: Знание, 1978.

[6] А. Н. Колмогоров, Физико-математическая школа. – М.: "Учительская газета", 11.02.1964.

[7] А. Н. Колмогоров, К обоснованию теории вещественных чисел. – Сборник "Математическое просвещение", 2(1957).

[8] А. Н. Колмогоров, И. М. Яглом, Юношеские математические школы. – Журнал "Вестник высшей школы", 11(1959).

[9] А. Н. Колмогоров, И. М. Яглом, О содержании школьного курса математики. – "Математика в школе", 4(1965).

[10] А. Н. Колмогоров, Шаг в науку. – Газета "Московский университет", 10.12.1966.

[11] А. Н. Колмогоров, Одна проблема из теории кривых. (В сборнике "Математическая школа. Лекции и задачи", выпуск VIII). – М.: Издательство МГУ, 1966.

[12] А. Н. Колмогоров, Пожелания к пятилетию (ФМШ при МГУ). – Газета "Московский университет", 04.12.1968.

[13] А. Н. Колмогоров, Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1975, (5 изданий).

[14] А. Н. Колмогоров, Б. Е. Вейц, И. Т. Демидов, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1975, (5 изданий).

[15] А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Б. Е. Вейц, О. С. Ивашев-Мусатов, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1975, (10 изданий).

[16] А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 и 11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1991, (13 изданий, осуществлены переводы на 15 языков).

[17] А. Н. Колмогоров, Введение в анализ. – М.: Издательство МГУ, 1966.

[18] А. Н. Колмогоров, Научные основы школьного курса математики. Первая лекция: Современные взгляды на природу математики. – Журнал “Математика в школе”, 3(1969).

[19] А. Н. Колмогоров, Научные основы школьного курса математики. Вторая лекция: Натуральные числа. – Журнал “Математика в школе”, 5(1969).

[20] А. Н. Колмогоров, Научные основы школьного курса математики. Третья лекция: Обобщение понятия числа. Неотрицательные рациональные числа. – Журнал “Математика в школе”, 2(1970).

[21] А. Н. Колмогоров, Современная математика и математика в современной школе. – Журнал “Математика в школе”, 6(1971).

[22] А. Н. Колмогоров, Действительные числа, бесконечные последовательности и их пределы. – Журнал “Математика в школе”, 2(1975).

[23] А. Н. Колмогоров, О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения. – Журнал “Математика в школе”, 3(1978).

А. Н. Колмогоров, В. В. Вавилов, Д. И. Гордеев

[24] А. Н. Колмогоров, В. В. Вавилов, Физико-математическая школа при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова. – Журнал “Квант”, 1(1977).

[25] А. Н. Колмогоров, В. В. Вавилов, И. Т. Тропин, ФМШ при МГУ — 15 лет. – Журнал “Квант”, 1(1979).

[26] А. Н. Колмогоров, В. В. Вавилов, И. Т. Тропин, Физико-математическая школа при МГУ. – М.: Знание, 1981. (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика и кибернетика. №5).

[27] А. Н. Колмогоров, Школа-интернат при университете. Для чего она? – Журнал “Математика в школе”, 2(1974).

[28] А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев, А. А. Егоров, Е. Л. Сурков, Физико-математические школы-интернаты. – Журнал “Квант”, 1(1970).

[29] Как растить увлеченных (О встрече акад. А. Н. Колмогорова с выпускниками ФМШ — докторами наук). – Газета “Известия” 28.01.1984.

[30] Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым (беседу записал А. Б. Сосинский). – Журнал “Квант”, 4(1983).

[31] А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, Г. В. Пухова, О. С. Смирнова, С. В. Смирнов, Летняя школа на Рубском озере. – М.: Просвещение, 1971.

[32] А. Н. Колмогоров, Физико-математическая школа. – “Учительская газета”, 11.02.1964.

[33] А. Н. Колмогоров, В. А. Гусев, А. Б. Сосинский, А. А. Шершевский, Курс математики для физико-математических школ. – М.: Издательство МГУ, 1971.

[34] 34. А. Н. Колмогоров, О скалярных величинах. – Журнал “Математика в школе”, 3(1986).

[35] А. Н. Колмогоров, Как растят таланты (О работе ФМШ при МГУ). – “Учительская газета”, 28.01.1971.

[36] А. Н. Колмогоров, Таланты требуют внимания (О ФМШ при МГУ). – Газета “ Московский комсомолец”, 14.12.1971.

[37] А. Н. Колмогоров, Школа-интернат при университете. Для чего она? – Газета “Московский университет, 30.11.1973.

[38] А. Н. Колмогоров, Письмо П. Л. Капице. – Журнал “Вопросы философии”, 9(1972).

[39] А. Н. Колмогоров, Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики. – Журнал “Квант”, 4(1980).

[40] А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров, Введение в теорию вероятностей, – М.: Наука, 1982. (Библиотечка журнала “Квант”, вып. 23).

[41] А. Н. Колмогоров, Математика — наука и профессия. (Составитель Г. А. Гальперин). – М.: Наука, 1988. (Библиотечка журнала “Квант”, вып. 64).

[42] А. Н. Колмогоров, К обсуждению работы по проблеме “Перспективы развития советской школы на ближайшие 30 лет.” – Журнал “Математика в школе”, 5(1990).

[43] А. Н. Колмогоров, О работе вузов со школами. – Журнал “Математика в школе”, 2(1995).

[44] А. Н. Колмогоров, Знания, навыки, способности и конкурсные экзамены (О подготовке учащихся физико-математических школ). – “Литературная газета”, 1967, 11 января.

[45] А. Н. Колмогоров, Радость научного поиска. – Журнал “Смена”, 116(1972).

[46] А. Н. Колмогоров, Научные основы школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1973 (Программы педагогических институтов).

[47] А. Н. Колмогоров, Новые программы: специализированные школы. (В книге “Математическое образование сегодня”). – М.: Просвещение, 1975.

[48] А. Н. Колмогоров, Каким быть X-XI классам? (Коллективное письмо девяти академиков с предложением к проекту реформы школы). – Газета “Известия”, 26.01.1984.

[49] А. Н. Колмогоров, Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики. – Журнал “Квант”, 4(1980).

[50] А. Н. Колмогоров, Паркеты из правильных многоугольников. – Журнал “Квант”, 3(1970), 8(1986).

[51] А. Н. Колмогоров, Ф. П. Варпаховский, О решении десятой проблемы Гильберта. – Журнал “Квант”, 7(1970).

[52] А. Н. Колмогоров, Полулогарифмическая и логарифмическая сетки. – Журнал “Квант”, 3(1973).

[53] А. Н. Колмогоров, Что такое график функции. – Журнал “Квант”, 2(1970).

[54] А. Н. Колмогоров, Что такое функция? – Журнал “Квант”, 1(1970), 9(1993).

[55] А. Н. Колмогоров, Решето Эратосфена. – Журнал “Квант”, 1(1974), 3(1983).

[56] А. Н. Колмогоров, Путь в математику открыт. – Журнал “Квант”, 9 и 11(1993).

[57] А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Б. Е. Вейц, О. С. Ивашев-Мусатов, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9-10 классов средней школы, 8-е изд. Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1988.

[58] А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, Б. М. Ивлев, С. И. Шварцбурд, Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов общеобразовательной школы. – М.: Просвещение, 1997.

[59] А. Н. Колмогоров, И. Т. Тропин, К. В. Чернышев, Заботясь о достойном пополнении. – Журнал “Вестник Высшей Школы”, 6(1974).

[60] А. Н. Колмогоров, Научные основы школьного курса математики. Программы педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1983.

[61] А. Н. Колмогоров, Новые программы: специализированные школы. (В книге “Математическое образование сегодня”). – М.: Просвещение, 1974.

[62] А. Н. Колмогоров, О формировании диалектико-материалистического мировоззрения школьников на уроках математики и физики. (В книге “Роль учебной литературы в формировании мировоззрения школьников”). – М.: Педагогика, 1978.

[63] А. М. Абрамов, О педагогическом наследии А. Н. Колмогорова. (В книге “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”). – М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.

[64] А. М. Абрамов, Переписка П. Л. Капицы и А. Н. Колмогорова. (В книге “Математика в образовании и воспитании”. Составитель В. Б. Филиппов). – М.: ФАЗИС, 2000.

[65] А. М. Абрамов, Еще раз о программе обновления содержания общего среднего образования. Там же.

[66] А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, А. А. Егоров, А. Н. Земляков, А. Г. Мордкович, Избранные вопросы математики: Факультативный курс 10. – М.: Просвещение, 1980.

[67] А. М. Абрамов, О положении с математическим образованием в средней школе (1978 - 2003). – М. ФАЗИС, 2003.

[68] А. М. Абрамов, М. В. Грабиленков, Российское образование в XXI веке: новые рубежи. – М.: МИРОС, 2001.

[69] А. М. Абрамов, Как нам организовать большой развор. – М.: МИРОС, 2001.

[70] А. М. Абрамов, Административная грация - XXI. – М: ФАЗИС, 2005.

[71] Б. И. Александров, И. И. Мельников, В. Ф. Пахомов. Задачи и методические указания по математике. – М.: Издательство МГУ, 1982.

[72] В. М. Алексеев, Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.

[73] В. М. Алексеев, О преподавании математического анализа в IX классах школы-интерната при МГУ. (В книге “Математический анализ и алгебра”). – М.: Просвещение, 1987.

[74] Н. Б. Алфутова, Т. П. Корнеева, М. В. Смуров, А. В. Устинов, Варианты вступительных экзаменов в Школу им. А. Н. Колмогорова. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1999.

[75] Н. Б. Алфутова, В. В. Загорский, Т. П. Корнеева, А. В. Устинов, Варианты вступительных экзаменов. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000.

[76] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов, Кучка закручек. Сборник задач по алгебре. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1999.

[77] Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов, Алгебра и теория чисел. Сборник задач. – М.: МЦНМО, 2002; 2-е издание в 2005.

[78] С. Н. Артемов, Ю. Гиматов, В. Федоров, Много битов из ничего. – Журнал “Квант”, 7(1971), 3(1977), 2(1995).

[79] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, Лекции по математическому анализу. Учебник для университетов и пед. вузов. – Москва: Высшая школа, 2000.

[80] Л. С. Атанасян, И. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, С. А. Шестаков, И. И. Юдина. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 кл. – М.: Вита-Пресс, 2002.

[81] Л. С. Атанасян, И. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина. Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 9 кл. – М.: Вита-Пресс, 2002.

[82] С. В. Ашманов, Числа и многочлены. – Журнал “Квант”, 2(1980).

[83] Э. Белага, Узел на столе математика. – Журнал “Квант”, 7(1975).

[84] В. Г. Болтянский, В. В. Вавилов, Комбинаторная геометрия. – Ротапринт МП СССР, 1984.

[85] В. В. Вавилов, Об одной дискуссии П. Л. Капицы и А. Н. Колмогорова. – Журнал ФМШ, 1(1996).

[86] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, В. И. Клумова, XIV Всесоюзная олимпиада школьников: Олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1980).

[87] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, XV Всесоюзная олимпиада школьников: Олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1981).

[88] В. В. Вавилов, С. В. Резниченко, XIX Всесоюзная олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1985).

[89] В. В. Вавилов, А. П. Веселов, Геометрия треугольника и окружности. – Ротапринт МП СССР, 1985.

[90] В. В. Вавилов, Б. М. Ивлев, Геометрия тетраэдра и сферы. – Ротапринт МП СССР, 1985.

[91] В. В. Вавилов, С. В. Конягин, Задачи по теории чисел. – Ротапринт МП СССР, 1985.

[92] В. В. Вавилов, И. Н. Сергеев, Анализ функций. – Ротапринт МП СССР, 1986.

[93] В. В. Вавилов, Ю. В. Нестеренко, Неравенства. – Ротапринт МП СССР, 1986.

[94] В. В. Вавилов, И. Н. Сергеев, И. Н. Резниченко, XX Всесоюзная олимпиада школьников. – Журнал “Квант”, 11(1986).

[95] В. В. Вавилов, Задачи отборочных математических олимпиад. – М.: Издательство МГУ, 1992.

[96] В. В. Вавилов, Заочная олимпиада по математике. – Журнал “Математика в школе”, 4(1990).

[97] В. В. Вавилов, А. А. Фомин, XXX Международная олимпиада. – Журнал “Математика в школе”, 2(1990).

[98] В. В. Вавилов, А. А. Фомин, XXIX Международная олимпиада школьников. – Журнал “Математика в школе”, 2(1989).

[99] В. В. Вавилов, С. Н. Резниченко, XXI Всесоюзная олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1987).

[100] В. В. Вавилов, Ю. П. Соловьев, А. А. Фомин, XXVIII Международная математическая олимпиада. – Журнал “Квант”, 12(1987).

[101] В. В. Вавилов, Г. М. Кузнецова, С. В. Резниченко, XXII Всесоюзная математическая олимпиада. – Журнал “Математика в школе”, 5(1987).

[102] В. В. Вавилов, С. В. Резниченко, XXII Олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1988).

[103] В. В. Вавилов, А. А. Фомин, XXIX Международная олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 12(1988).

[104] В. В. Вавилов, Ю. П. Соловьев, А. А. Фомин, Международная олимпиада. – Журнал “Математика в школе”, 1(1988).

[105] В. В. Вавилов, Итерации радикалов. – М.: Школа им А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000.

[106] В. В. Вавилов, Радикалы правые, левые и нейтральные. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 1995.

[107] В. В. Вавилов, Изобретатель криволинейных координат. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000.

[108] В. В. Вавилов, В. Н. Дубровский, Проективная геометрия. (В книге “Энциклопедия для детей”). – М.: “Аванта+”, 1998.

[109] В. В. Вавилов, Векторы и их применение. (В книге “Энциклопедия для детей”). – М.: “Аванта+”, 1998.

[110] В. В. Вавилов, В. А. Бахтина, Спецкурсы по математике. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1999.

[111] В. В. Вавилов, Избранные лекции по геометрии. – Алматы, РНПЦ “Дарын”, 1999.

[112] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, Из опыта работы летней физико-математической школы при МГУ. – Журнал “Математика в школе”, 4(1978).

[113] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, Учебные задания по математике. Практические работы №1-2. – М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1977.

[114] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, Учебные задания по математике. Практические работы №3-6. – М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1977.

[115] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, Учебные задания по математике. Практические работы №7-10. – М.: Ротапринт НИИ СИМО АПН СССР, 1978.

[116] В. В. Вавилов, Т. Н. Трушанина, Н. А. Шкаликова, Экзаменационные рифы для будущих учащихся Московского университета. – Журнал "Математика в школе", 5(1995).

[117] В. В. Вавилов, А. В. Назаренко, Д. А. Кузмичев, Информационно-обучающая система с дискетой и описанием. – М.: Издательство МГУ, 1993.

[118] В. В. Вавилов, Габриэль Ламе. – Журнал "Математика в школе", 4(1998).

[119] В. В. Вавилов, Шарнирные механизмы. Кривые Уатта. – Журнал "Квант", 1(1997).

[120] В. В. Вавилов, Геометрия круга. – Журнал "Квант", 6(1977).

[121] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, Касательная. – Журнал "Квант", 5(1978).

[122] В. В. Вавилов, Сетчатые номограммы. – Журнал "Квант", 9(1978).

[123] В. В. Вавилов, Сечения многогранников. – Журнал "Квант", 10(1978).

[124] В. В. Вавилов, Об одной формуле Христиана Гюйгенса. – Журнал "Квант", 6(1992).

[125] В. В. Вавилов, Задачи с параметром. – Журнал "Квант", 5(1997).

[126] В. В. Вавилов, А. Н. Земляков, Учебные задания по математике для участников учебно-тренировочных сборов команды СССР на международную математическую олимпиаду. – М.: Ротапринт НИИ СИМО, 1981.

[127] В. В. Вавилов, Т. Н. Трушанина, Государственные экзамены в школе им. А. Н. Колмогорова. – Журнал "Математика в школе", 3(1994).

[128] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко, Задачи по математике. Алгебра. – М.: Наука, 1987.

[129] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко, Задачи по математике. Уравнения и неравенства. – М.: Наука, 1988.

[130] В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко, Задачи по математике. Начала анализа. – М.: Наука, 1990.

[131] В. В. Вавилов, Многоугольники на решетках. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, "Самообразование", 2002.

[132] В. В. Вавилов, Н. А. Шкаликова, Экзаменационные рифы. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2003.

[133] В. В. Вавилов, Школа им. академика А. Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. (В книге "Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова". Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шиверинская). – М.: Научно-технический центр "Университетский", 2003.

[134] В. В. Вавилов, Об одной задаче математического кружка А. Н. Колмогорова. Там же.

[135] V. V. Vavilov, Pearls of elementary Mathematics. – Журнал "Mathematics competitions" (Австралия), v.6, 1(1993).

[136] V. Vavilov, P. Fauring, F. Gutierez, Olimpiadas Matematicas Rusas. – Buenos Aires, "Red Olimpica", 1998.

[137] V. Vavilov, J. Araujo, G. Keilhauer, N. Pietrokola, Area y Volumen. – Buenos Aires, “Red Olimpica”, 2000.

[138] В. В. Вавилов, Математический практикум в школе им. А. Н. Колмогорова МГУ им. М. В. Ломоносова. (В книге “Сборник трудов конференции “Вторые научные Колмогоровские чтения”). – Ярославль, ЯрПГУ им. К. Д. Ушинского, 2004.

[139] В. В. Вавилов, Школа математического творчества. – М.: РОХОС, 2004.

[140] В. В. Вавилов, Педагогические конференции. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[141] В. В. Вавилов, Некоторые итоги работы в 2003/04 учебном году. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[142] В. В. Вавилов, Календарные планы и программы по математическому анализу и геометрии. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[143] В. В. Вавилов, Школьный конкурс решения задач памяти А. Н. Колмогорова. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2005.

[144] В. В. Вавилов, Мои специальные курсы в 2003/04 учебном году. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[145] В. В. Вавилов, Математические коллоквиумы. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[146] В. В. Вавилов, А. В. Устинов, Многоугольники на решетках. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[147] В. В. Вавилов, Одно домашнее задание. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[148] В. В. Вавилов, Школьные Харитоновские чтения. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2004.

[149] В. В. Вавилов, Школьные Харитоновские чтения. – Учебно-методическая газета “Математика”, №18, 2004.

[150] В. В. Вавилов, А. А. Егоров, А. А. Русаков, Школа научного творчества. – Журнал “Квант”, 6(2004).

[151] В. В. Вавилов. Школа математического творчества. – Журнал “Математика в школе”, 2(2005).

[152] В. В. Вавилов, П. М. Красников. Пифагоровы штаны. – Учебно- методическая газета “Математика”, №17, 2005.

[153] В. В. Вавилов, Ю. А. Андрианова. Окружность, парабола, ломаная и алгебраические уравнения. – Учебно-методическая газета “Математика”, №20, 2005.

[154] В. В. Вавилов, П. М. Красников. Бимедианы четырехугольника. – Учебно-методическая газета “Математика”, №22 (2005).

[155] В. В. Вавилов, И. И. Нараленкова, И. Ю. Селиванова, Е. В. Шивринская, Классная летопись. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2005.

[156] В. В. Вавилов. Конкурс решения задач памяти А. Н. Колмогорова. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2005.

[157] В. В. Вавилов. Многоугольники на решетках. (В книге “Летняя школа СУНЦ МГУ”). – М.: ЛЕНАНД, 2005.

[158] В. В. Вавилов. Математические коллоквиумы в школе. (В книге “ Труды третьих Колмогоровских чтений”). – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005.

[159] В. В. Вавилов, П. М. Красников. Разрезание и складывание многоугольников. – Учебно-методическая газета “Математика”, №21, 2005.

[160] В. В. Вавилов, О. Н. Герман, А. В. Устинов, Задачи на решетках. (В книге “Летняя школа СУНЦ МГУ”). – М.: ЛЕНАНД, 2005.

[161] В. В. Вавилов, И. Ю. Селиванова. Начинаем писать ... классные летописи. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “VVV”, 2005.

[162] В. В. Вавилов, Конкурс задач-1. – Учебно-методическая газета “Математика”, №23, 2005.

[163] В. В. Вавилов, Конкурс задач-2. – Учебно-методическая газета “Математика”, №24, 2005.

[164] В. В. Вавилов, Конкурс задач-3. – Учебно-методическая газета “Математика”, №1, 2006.

[165] В. В. Вавилов, Математических и специальных наук школа. – Журнал “Математическое образование”, 3(34), 2005.

[166] Н. Б. Васильев, А. А. Егоров, Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, 1963.

[167] Н. Б. Васильев, А. А. Егоров, Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988.

[168] Н. Васильев, В. Сендеров, А. Скопенков, Вокруг уравнения Маркова. – Журнал “Квант”, 6(1995).

[169] Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, А. Н. Земляков, Н. Х. Розов, Т. А. Сарычева, XIII Всесоюзная олимпиада школьников. – Журнал “Математика в школе”, 6(1979).

[170] А. П. Веселов, О математике гармонических колебаний. – Журнал “Квант”, 5(1986).

[171] Н. Я. Виленкин, А. Н. Земляков, Р. С. Гутер, И. Л. Никольская, Избранные вопросы математики. Факультативный курс (7-8 кл.). – М.: Просвещение, 1978.

[172] О. П. Виноградов, Некоторые методические вопросы преподавания математики в школе-интернате им. А. Н. Колмогорова. (В книге “Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова”). – М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003.

[173] О. П. Виноградов, Выездной экзамен в 10 классе (2004 г.). – Газета “Математика”, №20, 2005.

[174] О. П. Виноградов, Задачи вступительных экзаменов по математике в СУНЦ МГУ (2004 год). – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2004.

[175] А. Вирский, А. Звонкин, Овал, восьмерка, два овала... – Журнал “Квант”, 8(1979).

[176] В. И. Гаврилов, Математический анализ. Курс лекций, Ч.1-3. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1999.

[177] Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков, Математические бильярды. – М.: Наука, 1990.

[178] Г. А. Гальперин, А. М. Степин, Периодические движения бильярдного шара. – Журнал “Квант”, 3(1983).

[179] Г. А. Гальперин, А. М. Степин, О треугольном бильярде. – Журнал “Квант”, 11(1989).

[180] С. Б. Гашков, Задача Чебышева и тригонометрические многочлены. – Журнал “Квант”, 6(1990).

[181] С. Б. Гашков, Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника. – Журнал “Квант”, 10(1985).

[182] С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков, Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. – М.: Высшая школа, 2000.

[183] С. Б. Гашков, Системы счисления и их применение. – М.: МЦНМО, 2004.

[184] С. Б. Гашков, О тригонометрических многочленах наименее уклоняющихся от нуля с фиксированным средним коэффициентом. Сборник “Математическое просвещение”, 3 серия, 9(2005). – М.: МЦНМО, 2005.

[185] С. Б. Гашков, Неравенство Фейера-Егервари-Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов. Сборник “Математическое просвещение”, 3 серия, 9(2005), – М.: МЦНМО, 2005.

[186] С. Б. Гашков, Легко ли складывать дроби? – Журнал “Квант”, 3(1994).

[187] С. Б. Гашков, Алгоритм Евклида, непрерывные дроби и квадрирование прямоугольников. Сборник “Математическое просвещение”, 3 серия, 6(2002). – М.: МЦНМО, 2002.

[188] С. Б. Гашков, А. В. Макаров, В. В. Макаров, Д. Н. Бабин, М. И. Гринчук, Лекции и упражнения по основам информатики. – М.: Издательство МГУ, 1994.

[189] С. Б. Гашков, С. Табачников, Задачи Чебышева. – Журнал “Квантум”, т. 5(1994), (на англ. языке).

[190] С. Б. Гашков, Простое геометрическое доказательство детерминантного неравенства Сасса. – Журнал “Elemente der Mathematik”, т. 45, 6(1990), (на нем. языке).

[191] Б. Гейдман, Б. Давидович, А. Н. Земляков, XI праздник юных математиков в Батуми. – Журнал “Квант”, 10(198О).

[192] Б. В. Гнеденко, Политехнические аспекты преподавания математики в средней школе. – Журнал “Математика в школе”, 6(1974).

[193] Б. В. Гнеденко, О воспитании научного мировоззрения на уроках математики. – Журнал “Математика в школе”, 4(1977).

[194] Б. В. Гнеденко, О математическом творчестве. – Журнал “Математика в школе”, 6(1979).

[195] Б. В. Гнеденко, Школьный курс математики и воспитание мировоззрения. – Журнал “Математика в школе”, 3(1979).

[196] Б. В. Гнеденко, Математика в современном мире. – М.: Просвещение, 1980.

[197] Б. В. Гнеденко, Московский университет и математическое просвещение. – Журнал “Математика в школе”, 2(1980).

[198] Б. В. Гнеденко, Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982.

[199] Б. В. Гнеденко, О математических способностях и их развитии. – Журнал “Математика в школе”, 1(1982).

[200] Б. В. Гнеденко, О роли математики в формировании у учащихся научного мировоззрения и нравственных принципов. – Журнал “Математика в школе”, 5(1989).

[201] Б. В. Гнеденко, Математика в современном мире и математическое образование. – Журнал “Математика в школе”, 1(1991).

[202] Б. В. Гнеденко, О математике. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

[203] Б. В. Гнеденко, Беседы о математике, математиках и механико-математическом факультете. – М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2003.

[204] В. А. Гусев, Как помочь ученику полюбить математику? – М.: Авангард, 1994.

[205] В. А. Гусев, Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: Вербум-М., 2003.

[206] В. А. Гусев, Г. М. Возняк, Прикладные задачи на экстремум. – М.: Просвещение, 1985.

[207] В. А. Гусев, А. П. Комбаров, Математическая разминка. – М.: Просвещение, 2005.

[208] В. Гурарий, К. Стыркас, Об одной рекуррентной последовательности. – Журнал “Квант”, 8(1978).

[209] Н. П. Долбилин, Жемчужины теории многогранников. – М.:МЦНМО, 2000.

[210] Н. П. Долбилин, Жесткость выпуклых многогранников. – Журнал “Квант”, 5(1988).

[211] Н. П. Долбилин, Игра “Хаос” и фракталы. – Журнал “Квант”, 4(1997).

[212] Н. П. Долбилин, Пик Делоне. – Журнал “Квант”, 3(1986).

[213] Н. П. Долбилин, Самоподобные мозаики. – Журнал “Квант”, 2(1998).

[214] В. Н. Дубровский, Как возникает распределение Пуассона. – Журнал “Квант”, 8(1988).

[215] В. Н. Дубровский, Математика волшебного кубика. – Журнал “Квант”, 8(1982).

В. Н. Дубровский

[216] В. Н. Дубровский, Что скрывается за превращениями тетраэдра. – Журнал “Квант”, 7(1983), 6(1997).

[217] В. Н. Дубровский, Кубик в картинках. – Журнал “Квант”, 9(1983).

[218] В. Н. Дубровский, Преобразования плоскости в задачах на построения. – Журнал “Квант”, 8(1987).

[219] В. Н. Дубровский, А. Т. Калинин, Математические головоломки. – М.: “Знание”, 1990.

[220] В. Н. Дубровский, А. Б. Скопенков, А. В. Спивак, Математика, 10 класс (Материалы Летней физико-математической школы). – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, "Самообразование", 1999.

[221] В. Н. Дубровский, Прямые и плоскости в пространстве. Лекции и задачи. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, "Самообразование", 2000.

[222] В. Н. Дубровский, Я. С. Смородинский, Оптические изображения и проективная плоскость. – Журнал "Квант", 9 и 10(1989).

[223] В. Н. Дубровский, Шесть доказательств теоремы о медианах. – Журнал "Квант", 4(1978), 1(1990).

[224] В. Н. Дубровский, Геометрические метаморфозы. – Журнал "Квант", 6(1997).

[225] В. Н. Дубровский, И. Ф. Шарыгин, Геометрический стереоскоп. – Журнал "Квант", 1 и 2(1993).

[226] В. Н. Дубровский, Релятивистский мир. – М.: Наука, 1984.

[227] В. Н. Дубровский, В поисках определения площади поверхности... – Журнал "Квант", 4(1978), 1(1995).

[228] В. Н. Дубровский, Площадь поверхности по Минковскому. – Журнал "Квант", 5(1978), 1(1995).

[229] В. Н. Дубровский, Не только игрушка. – Журнал "Квант", 7(1979).

[230] В. Н. Дубровский, Неожиданный ракурс. – Журнал "Квант", 2(1980), 1(1996).

[231] В. Н. Дубровский, Алгоритм волшебного кубика. – Журнал "Квант", 7(1982).

[232] В. Н. Дубровский, Игра, задача или спорт. – Журнал "Квант", 7(1982).

[233] В. Н. Дубровский, Кубик в картинках. – Журнал "Квант", 9(1983).

[234] В. Н. Дубровский, Момент инерции в геометрии. – Журнал "Квант ", 7(1984), 1(1995).

[235] В. Н. Дубровский, Несколько задач на один прием. – Журнал "Квант", 1(1987).

[236] В. Н. Дубровский, Перевертыши. – Журнал "Квант", 7(1987).

[237] В. Н. Дубровский, В. Матизен, Из геометрии тетраэдра. – Журнал "Квант", 8(1988).

[238] В. Н. Дубровский, Э. Готман, О свойствах центра вневписанной окружности. – Журнал "Квант", 8(1989).

[239] В. Н. Дубровский, Головоломка "цветной треугольник". – Журнал "Квант", 9(1990).

[240] В. Н. Дубровский, А. Калинин, Четыре головоломки с одной идеей. – Журнал "Квант", 11(1990).

[241] В. Н. Дубровский, Кубик Мак-Магона и таблица Конвэя. – Журнал "Квант", 12(1990).

[242] В. Н. Дубровский, Коммутативная головоломка Эрне Рубика. – Журнал "Квант", 6(1991).

[243] В. Н. Дубровский, Новости кубологии. – Журнал "Квант", 11(1992).

[244] В. Н. Дубровский, Чемпионат мира по головоломкам. – Журнал "Квант", 4(1996).

[245] В. Н. Дубровский, Ловушка для треугольника. – Журнал "Квант", 3(1999).

[246] В. Н. Дубровский, Задачи в задачнике журнала “Квант”: М517, 763, 793, 850, 954, 984, 990, 1070, 1104, 1239 (1978-1990 гг.).

[247] В. Н. Дубровский, Решения задач в задачнике журнала “Квант”: М517, 728, 751, 763, 781, 787,802, 841, 850, 857,895, 913, 931, 954, 956, 963, 982, 984, 990, 1013, 1318, 1046, 1062, 1070, 1077, 1104, 1149, 1154, 1202, 1206, 1207, 1218, 1239, 1263; 732, 744, 755, 819, 827, 831, 838, 843, 868, 872, 884, 892, 896, 903, 905, 908, 910, 912, 920, 924, 930, 941, 951, 955, 961, 973, 980, 981, 1007, 1012, 1020, 1028, 1037, 1054, 1055, 1068, 1074, 1088, 1101, 1105, 1109, 1113, 1121, 1126, 1141, 1152, 1176, 1182, 1191, 1193, 1216, 1233, 1255. (1979-1991 гг.).

[248] В. Н. Дубровский, Чертеж в сложной стереометрической задаче. – Журнал “Квант”, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12(1983), 6(1985) и 1, 2(1986).

[249] В. Н. Дубровский, Математические головоломки на обложках журналов “Квант”: 9(1983); 2-7, 9-12(1987); 2, 6, 10(1988); 2, 3, 5, 7-9, 12(1989); 1-6, 8, 11, 12(1990); 1, 2(1991).

[250] В.Н. Дубровский, Проективная плоскость и поверхность Боя. – Журнал “Квант”, 10(1989).

[251] В. Н. Дубровский, Сборник задач по геометрии для 2-го полугодия 11 кл. М.: Ротапринт НИИ Механики МГУ, 1989.

[252] В. Н. Дубровский, Статьи в книге “Энциклопедия для детей. Математика”. – М.: “Аванта +”, 1998:

- Несколько советов начинающим волшебникам, или Как решать уравнения.

- Кубические уравнения.

- Решение неравенств.

- Треугольник, простейший и неисчерпаемый.

- Многоугольники.

- Окружность и круг.

- Геометрические построения.

- Три знаменитые задачи древности.

- Метрические соотношения в треугольнике.

- Четыре доказательства теоремы Пифагора.

- Из геометрии четырехугольника.

- Равносоставленность многоугольников. Теорема Больяи-Гервина.

- Формула Пика.

- Длина окружности и площадь круга.

- Задачи из японских храмов.

- Все или ничего.

- Радикальная ось и радикальный центр.

- “Странное” предложение из “Начал” Евклида.

- Задача деления круга.

- Начала стереометрии.

- Геометрия тетраэдра.

- Несколько задач на пространственное воображение...

- Как сделать флексор Штеффена.

- Формулы объема.

- Площадь поверхности.
- Объем клина.
- Как Архимед находил объем шара.
- “Сапог Шварца”.
- Парадокс маляра.
- Объем и площадь поверхности тел вращения.
- Тригонометрия.
- Формулы сферической тригонометрии.
- Векторы и геометрия треугольника.
- Уравнения прямой в прямоугольных координатах.
- Фигуры на сфере.

[253] В. Н. Дубровский, Прямые и плоскости в пространстве. Лекции и задачи. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000.

[254] В. Н. Дубровский, “Интерактивность, мультимедиа, моделинг — отличительные черты информационных компьютерных технологий для образования”. (В сборнике “Основные направления развития электронных образовательных изданий и ресурсов”). – М.: ГНУ “Республиканский мультимедиа центр”, 2002.

[255] В. Н. Дубровский, Интерактивные стереочертежи к учебнику “Геометрия 10-11” А. В. Погорелова, CD. – М.: РЦЭМТО, 2003.

[256] В. Н. Дубровский, Стереометрия с компьютером. – СПб.: Журнал “Компьютерные инструменты в образовании”, 6(2003).

[257] В. Н. Дубровский, В. В. Рождественский, А. А. Егоров, Ю. Е. Егоров, А. А. Русаков, Математика: Алгебра. Планиметрия. Элементы математического анализа, CD, Производство фирмы 1С, Москва, 2001.

[258] В. Н. Дубровский, М. И. Башмаков, В. В. Вавилов, И. Р. Высоцкий, А. Н. Земляков, В. В. Калиниченко, С. К. Ландо, А. Наумов, А. В. Пантуев, Ю. А. Первин, С. Н. Поздняков, А. В. Прохоров, А. Н. Сиротин, И. С. Храповицкий, А. В. Чехлова, Г. Б. Шабат, П. С. Шестаков, Образовательный комплекс “Математика 5-11”. – М.: ЗАО “1С”, АНО “Учебно-издательский центр “Интерактивная линия”, Учреждение “Институт новых технологий”, 2004.

[259] А. А. Егоров, Действительные числа как операторы на системе скалярных величин, Сборник научных трудов АПН СССР. – М.: НИИ СИМО, 1975.

[260] А. А. Егоров, Дидактические особенности введения показательной функции в комплексной области. Сб. научных трудов АПН СССР. – М.: НИИ СИМО, 1976.

[261] А. А. Егоров, Показательная функция в комплексной области. В книге “Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова” (Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шивринская). – М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003.

[262] А. А. Егоров, Уравнения и пределы. – Журнал “Квант”, 10(1977).

[263] А. А. Егоров, Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента. – Журнал “Квант”, 6(1973).

[264] А. А. Егоров, О дискриминанте. – Журнал “Квант”, 6(1992).

[265] А. А. Егоров, Алгебраические уравнения и неравенства. Задачи. – Журнал “Квант”, 9(1992).

[266] А. А. Егоров, Тригонометрические задачи. – Журнал “Квант”, 11(1992).

[267] А. А. Егоров, Прибавим, вычтем... умножим, разделим, – Журнал “Квант”, 5(1994)

[268] А. А. Егоров, А. Ю. Котова, Необыкновенные арифметики. – Журнал “Квант”, 3 и 4(1993).

[269] А. А. Егоров, Ж. М. Раббот, Иррациональные уравнения. – Журнал “Квант”, 5(2001).

[270] А. А. Егоров, Ж. М. Раббот, Иррациональные неравенства. – Журнал “Квант”, 6(2001).

[271] А. А. Егоров, Ж. М. Раббот, Монотонные функции в конкурсных экзаменах. – Журнал “Квант”, 6(2002).

[272] А. А. Егоров, Целые и дробные части числа. – Журнал “Квант”, 5(2002).

[273] А. А. Егоров, О месте олимпиад в матпросвещении. Труды конференции “Математическому образованию в России — 300 лет”. – М.: МЦМНО, 2002.

[274] А. А. Егоров, Неравенство обращается в равенство. – Журнал “Квант”, 1(1996).

[275] А. А. Егоров, Решим относительно параметра. – Журнал “Квант”, 4(1997).

[276] А. А. Егоров, Формула Лейбница. – Журнал “Квант”, 6(1997).

[277] А. А. Егоров, Ортоцентрический треугольник. – Журнал “Квант”, 4(2001).

[278] А. А. Егоров, Сравнение по модулю и арифметика остатков. – Журнал “Квант”, 5(1970).

[279] А. А. Егоров, Деление с остатком и сравнения по модулю. – Журнал “Квант”, 6(1991).

[280] А. А. Егоров, Решетки и правильные многоугольники. В книге “Математический кружок. Выпуск 2”. – М.: Бюро Квантум, 1998. (Приложение к журналу “Квант”,№5, 1998).

[281] А. А. Егоров, Показательные и логарифмические уравнения. В книге “Практикум абитуриента: Алгебра и тригонометрия”. – М.: Бюро Квантум, 1995. (Приложение к журналу “Квант” №3, 95).

[282] А. А. Егоров, А. Н. Колмогоров и колмогоровский интернат. В книге “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове.” – М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.

[283] А. А. Егоров, Ряды. – Журнал “Квант”, 2(2000).

[284] А. А. Егоров, Неравенство в треугольнике. – Журнал "Квант", 5(2005).

[285] А. А. Егоров, Магия формул. – Журнал "Квант", 2(2004).

[286] А. А. Егоров, Неравенство в тетраэдре. – Журнал "Квант", 4(2005).

[287] А. А. Егоров, Числа Пизо. – Журнал "Квант", 5, 6(2005).

[288] А. А. Егоров, Теоремы Чевы и Менелая. – Журнал "Квант", 3(2004).

[289] А. А. Егоров, Архимедесу 25 лет. – Журнал "Квант", 3 1998.

[290] В. А. Жигульский, А. А. Часовских, Школа им. А. Н. Колмогорова сегодня. (В книге "Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова". Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шивринская). – М.: Научно-технический центр "Университетский", 2003.

[291] Есть ФМШ... (Под ред. С. А. Педоры). – М.: Издательство МГУ, 1995.

[292] Журнал "Университет и школа", №№ 3-4, 2001.

[293] Журнал ФМШ, №1, 1996.

[294] Л. И. Звавич, Д. И. Аверьянов, Б. П. Пигарев, Т. Н. Трушанина. Задания по математике для подготовки к письменному экзамену в 9 классе. – М.: Просвещение, 1999.

[295] А. К. Звонкин, Анализ помогает алгебре. – Журнал "Квант", 6(1978).

[296] А. К. Звонкин, Когда существует предел? – Журнал "Квант", 10(1978).

[297] А. К. Звонкин, Что такое Пи? – Журнал "Квант", 11(1978).

А. Н. Земляков

[298] А. Н. Земляков, Наглядность при введении основных понятий математического анализа. (В книге "Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе"). – М.: Просвещение, 1981.

[299] А. Н. Земляков, Арифметика и геометрия столкновений. – Журнал "Квант", 4(1978).

[300] А. Н. Земляков, Бильярды и поверхности. – Журнал "Квант", 9(1979).

[301] А. Н. Земляков, Математика бильярда. – Журнал "Квант", 5(1976).

[302] А. Н. Земляков, В. Орлов, Вопросы для выпускников. – Журнал "Квант", 7(1987).

[303] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Вопросы по алгебре и анализу. – Журнал "Квант", 2(1978).

[304] А. Н. Земляков, Еще 17 вопросов. – Журнал “Квант”, 12(1978).

[305] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Задачи на повторение. – Журнал “Квант”, 9(1979).

[306] А. Н. Земляков, Как выглядит парабола? – Журнал “Квант”, 3(1978).

[307] А. Н. Земляков, Осторожно — максимум! – Журнал “Квант”, 10(1976).

[308] А. Н. Земляков, Проверь себя. – Журнал “Квант”, 7(1979) и 9(1980).

[309] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, 17 задач по анализу. – Журнал “Квант”, 1(1977).

[310] А. Н. Земляков, В. А. Орлов, Трехфазный ток. – Журнал “Квант”, 11(1978).

[311] А. Н. Земляков, Четные и нечетные функции. – Журнал “Квант”, 4(1977).

[312] А. Н. Земляков, Орнаменты. – Журнал “Квант”, 3(1977).

[313] А. Н. Земляков, Алгебра и анализ: 10 класс. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Гуманитарный издательский центр “Владос”, в печати (21 п.л.).

[314] А. Н. Земляков, Алгебра и анализ: 11 класс: Часть I: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Гуманитарный издательский центр “Владос”, в печати (20 п.л.).

[315] А. Н. Земляков, Алгебра и анализ: 11 класс: Часть II: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Гуманитарный издательский центр “Владос”, в печати (20 п.л.).

[316] А. Н. Земляков, Геометрия в 11 классе: Методические рекомендации к учебнику А. В. Погорелова: Пособие для учителя. (3-е изд., доработанное). – М.: Просвещение, в печати.

[317] А. Н. Земляков, Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для физико-математических классов, X кл. – М.: Школа-Пресс, в печати (20 п.л.).

[318] А. Н. Земляков, Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для физико-математических классов, XI кл. – М.: Школа-Пресс, в печати (30 п.л.).

[319] А. Н. Земляков, Статьи: Конус, Куб, Многогранник, Многоугольники, Окружность и круг, Призма, Развертка, Сфера и шар, Тетраэдр, Треугольник, Угол, Цилиндр. В книге “Энциклопедический словарь юного математика”. – М.: Педагогика, 1985.

[320] А. Н. Земляков, Геометрия в 9 классе (Методические рекомендации к преподаванию курса геометрии по учебному пособию А. В. Погорелова): Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1985. 2-е изд., доработанное, 1988. Переводы: на молдавский язык (Кишинев, Лумина, 1987), на латышский язык (Рига: Звайгзне, 1987).

[321] А. Н. Земляков, Геометрия в 10 классе (Методические рекомендации к преподаванию курса геометрии по учебному пособию А. В. Погорелова): Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1986. 2-е изд., доработанное, 1991.

[322] А. Н. Земляков, Специальные курсы: Математика в приложениях: IX-X кл. В кн.: Программы факультативных курсов для восьмилетних и средних школ: Математика, физика и др. – М.: Просвещение, 1981.

[323] А. Н. Земляков, Наглядность при введении основных понятий математического анализа. В кн.: “Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе: Сборник статей” (Библиотека учителя математики). – М.: Просвещение, 1981.

[324] А. Н. Земляков, Дифференциальные уравнения как математические модели физических процессов. – Журнал “Математика в школе”, 1(1979).

[325] А. Н. Земляков, Программы факультативных курсов на 1980-1985 гг.: Математика. – Журнал “Математика в школе”, 4(1980).

[326] А. Н. Земляков, Т. А. Сарычева, XIV Всесоюзная олимпиада школьников. – Журнал “Математика в школе”, 1(1981).

[327] А. Н. Земляков, Примерное тематическое планирование факультативного курса “Математика в приложениях”. – Журнал “Математика в школе”, 3(1981).

[328] А. Н. Земляков, О. Ф. Кабардин, Тестирование знаний и умений учащихся. – Журнал “Советская педагогика”, 12(1991).

[329] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Периодические функции. – Журнал “Квант”, 12 (1976).

[330] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Задачи на повторение. – Журнал “Квант”, 9(1977).

[331] А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Вопросы по геометрии. – Журнал “Квант”, 11(1978).

[332] А. Н. Земляков, Множества значений числовых функций. – Журнал “Квант”, 2(1978). Опубликовано под псевдонимом А. Зазело.

[333] А. Н. Земляков, Проверьте себя. – Журнал “Квант”, 9(1980).

[334] А. Н. Земляков, XVI Всесоюзная олимпиада школьников: Олимпиада по математике. – Журнал “Квант”, 11(1982).

[335] А. Н. Земляков, Введение в стереометрию или “аксиоматические игры”. – Журнал “Квант”, 9(1985).

[336] А. Н. Земляков, О некоторых межпредметных связях, существенных для нового курса математики. – В книге. “Заочное обучение математике школьников VШ-Х кл. (Сборник научных трудов)”. – М.: НИИ СИМО, АПН СССР, 1978.

[337] А. Н. Земляков, Учебные задания по математике для учащихся IX-X кл., посещающих факультативные занятия: Задачи повышенной трудности. – М.: Ротапринт НИИ СИМО, 1980.

[338] А. Н. Земляков, Факультативный курс “Математика в приложениях”: Методические рекомендации к изучению отдельных вопросов курса. – М.: Ротапринт НИИ СИМО, 1980.

[339] А. Н. Земляков, Задания с выбором ответов для отборочных сборов кандидатов в команду СССР на международную математическую олимпиаду: Задания “А, Б, В, Г”. – М.: Ротапринт НИИ СИМО, 1982.

[340] А. Н. Земляков, Задания с выбором ответов для отборочных сборов кандидатов в команду СССР на международную математическую олимпиаду: Задания “А, Б, В”. – М.: Ротапринт НИИ СИМО, 1982.

[341] А. Н. Земляков, Геометрические задачи: Стереометрические задачи и теоремы (вводный курс): Учебные задания для учащихся X классов физико-математического профиля. Выпуск 1. – М.: НИИ ОСО, 1991.

[342] А. Н. Земляков, Задачи повышенной трудности: Геометрические задачи (задачи устного экзамена): Учебные задания для учащихся XI классов физико-математического профиля. Выпуск 1. – М: НИИ ОСО, 1991.

[343] А. Н. Земляков, Математический практикум: Часть 1: Численное решение уравнений: Учебные задания для учащихся X классов физико-математического профиля. – М.: НИИ ОСО, 1991.

[344] А. Н. Земляков, Всесоюзная математическая олимпиада 1977 г. Республиканский тур: Тестовые задания для 8, 9, 10 кл. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1977.

[345] А. Н. Земляков, XI Всесоюзная математическая олимпиада: Тесты для 8, 9, 10 кл. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1977.

[346] А. Н. Земляков, Всесоюзная математическая олимпиада 1978 г. Республиканский тур: Тестовые задания для 8, 9, 10 кл. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1978.

[347] А. Н. Земляков, Всесоюзная математическая олимпиада 1979 г. Республиканский тур: Тестовые задания для 8, 9, 10 кл. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1979.

[348] А. Н. Земляков, Задания с выбором ответов для VIII, IX, X кл., рекомендуемые для республиканских математических олимпиад: 1980г. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1980.

[349] А. Н. Земляков, Задания с выбором ответов для республиканских математических олимпиад 1981 г. – М.: Ротапринт УМС МП СССР, 1981.

[350] А. Н. Земляков, Тезисы по алгебре. – Журнал “Математическое образование”, 4(15), 2000; 1(16) и 2(17), 2001.

[351] А. Н. Земляков, Тезисы по геометрии: Геометрия под микроскопом (предисловие). Аксиоматический подход к геометрии (тезисы). – Журнал “Математическое образование”, 3(18), 2001.

[352] А. Н. Земляков, Методическое пособие по алгебре. – Журнал “Математическое образование”, 1(20) и 2(21), 2002.

[353] А. Н. Земляков, Алгебра*. – Журнал “Математическое образование”, 4(27), 2003; 1(28), 2004.

[354] А. Н. Земляков, Элективный курс “Математический анализ реальности”. Дифференциальные уравнения как математические модели реальных процессов. Методический и методологический комментарий. Главы 1 и 2. – Журнал “Математическое образование”, 2(29), 3(30), 4(31) 2004; 1(32), 2005.

[355] А. Н. Земляков, Геометрия в 10 классе: Методические рекомендации к учебнику А. В. Погорелова. – М.: Просвещение, 2003.

Б. М. Ивлев

[356] О. С. Ивашев-Мусатов, Производная логарифма. – Журнал “Квант”, 4(1986).

[357] О. С. Ивашев-Мусатов, Опыт изложения начал математического анализа. (В книге “Математический анализ и алгебра”). – М.: Просвещение, 1987.

[358] Б. М. Ивлев, А. Н. Земляков, Ф. Н. Томашевич, Ю. В. Калиниченко, Сборник задач по алгебре и началам анализа для 9 и 10 классов. – М.: Просвещение, 1978.

[359] Б. М. Ивлев, Двугранные и трехгранные углы. – Журнал “Квант”, 12(1984).

[360] Б. М. Ивлев, Еще 13 доказательств теоремы о биссектрисе. – Журнал “Квант”, 2(1985).

[361] В. М. Имайкин, Т. Б. Филановская, Целые и рациональные алгебраические выражения. Учебное пособие для 6-9 классов. – М.: Институт учебника “Пайдейя”, 1998.

[362] В. М. Имайкин, Описание способов деятельности как основа выявления межпредметных связей и содержания общего образования. – В сб. “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков. Дубна, сентябрь 2000 г.” – М.: МЦНМО, 2000.

[363] В. М. Имайкин, Описание способов деятельности как основа выявления содержания общего образования. – Журнал “Математическое образование” 1(20), 2002.

[364] В. М. Имайкин, О дополнении курса математики элементами деятельностного содержания. II открытые научно-методические чтения “Математика для экономики и экономистов: Проблемы преподавания и применения.” – Херсон, 2003.

[365] В. М. Имайкин, Объекты в курсе математики: описание концепции и возможные применения. – Сборник научных работ Херсонского филиала Украинского Государственного морского технического университета, выпуск 1. – Херсон, 2003.

[366] В. М. Имайкин, Фрагменты деятельностного содержания образования на материале математики. – Журнал “Математическое образование” 4(31), 2004.

[367] В. М. Имайкин, Несколько слов об Учителе. – Журнал “Математическое образование” 1(32), 2005.

[368] В. М. Имайкин, Объекты в курсе математики: описание концепции и возможные применения. – Журнал “Математическое образование” 2(33), 2005.

[369] А. Каибханов, А. Скопенков, Примеры трансцендентных чисел. – Сборник “Математическое просвещение”, 10(2006), в печати.

[370] А. В. Карапетян, Математический анализ для химиков. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 1995, рукопись.

[371] Г. И. Катаев, Об А. Н. Колмогорове (HOMO UNIVERSALES). (В книге “Колмогоров в воспоминаниях”. Редактор-составитель А. Н. Ширяев). – М.: Наука, 1993.

[372] А. Кириллов, И. Клумова, А. Сосинский, Сюрреальные числа. – Журнал “Квант”, 11(1978).

[373] П. Кожевников, А. Скопенков, Узкие деревья на плоскости. – Журнал “Математическое образование”, 2-3(9-10), 1999.

[374] В. В. Козлов, В поисках талантов: от Ломоносова до Колмогорова. – Журнал “Вестник высшей школы”, 10-12(1992).

[375] В. В. Козлов, Соударение тел. – Журнал “Квант”, 4(1995).

[376] Н. Н. Колесников, М. К. Потапов, О вступительных экзаменах в физико-математическую школу-интернат при МГУ. – Журнал “Наука и жизнь”, 1(1969).

[377] В. А. Колосов, Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. – М.: Гелиос АРВ, 2001.

[378] В. Корепин, Узоры Пенроуза и квазикристаллы. – Журнал “Квант”, 6(1987).

[379] С. В. Кравцев, Ю. Н. Макаров, Т. П. Лукашенко, М. И. Нараленков, Е. Т. Шавгулидзе, В. Г. Чирский, Математика. Ответы на вопросы. Теория и примеры решения задач (учебное пособие). – М.: Издательство “Экзамен”, 2000.

[380] Краткие сведения для поступающих в физико-математическую школу-интернат при МГУ. – М.: Издательство МГУ, 1971.

[381] В. Курлин, А. Скопенков, Базисные вложения графов в плоскость. – Журнал “Математическое образование”, 3(1997).

[382] В. Курлин, А. Скопенков, Базисные вложения графов в плоскость. В книге: 9-я летняя конференция Турнира Городов. – М.: МЦНМО, 1998.

[383] Летняя школа СУНЦ МГУ. – М.: ЛЕНАНД, 2005.

[384] О. В. Ляшко, Почему не уменьшится сопротивление. – Журнал “Квант”, 1(1985).

[385] Л. М. Лужина, В. Л. Натяганов, Е. В. Шивринская, Магия правильных многогранников и мозаики Пенроуза. (В книге “Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова”. Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шивринская). – М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003.

[386] Математическая школа. Лекции и задачи. Выпуск IV-V. Составители: Э. Винберг, Е. Дынкин, С. Молчанов, А. Шершевский, И. Яглом. – М.: Издательство МГУ, 1965.

[387] В. Матизен, В. Н. Дубровский, Из геометрии тетраэдра. В книге “Практикум абитуриента: Геометрия, Выпуск 2”. – М.: Бюро Квантум, 1996. (Приложение к Журналу “Квант” №3, 1996).

[388] Ю. Матиясевич, Формулы для простых чисел. – Журнал “Квант”, 5(1975).

[389] Ю. Матиясевич, Модели многогранников. – Журнал “Квант”, 1(1978).

[390] И. И. Мельников, Проблемы совершенствования современного школьного и вузовского математического образования. – М.: Книжный дом “Университет”, 1999.

[391] И. И. Мельников, И. Н. Сергеев, Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. – М.: Издательство МГУ, 1990.

[392] И. И. Мельников, Рычаг и опора. (В книге “Образование, которое мы можем потерять”). – М.: Московский Государственный университет им. М. В. Ломоносова; Институт компьютерных исследований, 2003.

[393] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, Кватернионы. – Журнал “Квант”, 9(1983).

[394] О. Р. Мусин, Теорема о четырех вершинах для многоугольника. – Журнал “Квант”, 2(1997).

[395] В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина, Методы решения задач с параметрами, Части 1-4. – М.: Издательство МГУ, 1994.

[396] В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина, Методы решения задач с параметрами. Учебное пособие. – М.: Издательство МГУ, 2003.

[397] В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина, В. А. Мамонтов, Е. В. Шивринская, Ломоносов о междисциплинарном характере математики. (В сборнике “Ломоносовские чтения-2004. Тезисы”). – М.: Издательство МГУ, 2004.

[398] Ю. В. Нестеренко, Е. М. Никишин, Очерк о цепных дробях. – Журнал “Квант”, 5 и 6(1983).

[399] Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов, Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука, 1980.

[400] Ю. В. Нестеренко, Алгоритмические проблемы теории чисел. – Сборник “Математическое просвещение”, Третья серия, 2(1998). – М.: МЦНМО, 1998.

А. В. Шевкин, С. М. Никольский, Н. Х. Розов Д. В. Трещев

[401] С. М. Никольский, Мой век. – М.: ФАЗИС, 2005.

[402] А. А. Панчишкин, Е. Т. Шавгулидзе, Тригонометрические функции в задачах (учебное пособие). – М.: Наука, 1986.

[403] В. Ф. Пахомов, Демократия с точки зрения математики. – Журнал “Квант”, 4(1992).

[404] М. К. Потапов, Н. Х. Розов, Школа-интернат при МГУ. – Журнал “Наука и жизнь”, 4(1968).

[405] В. В. Прасолов, Задачи по планиметрии, Части 1-2. – М.: Наука, 1995.

[406] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989.

[407] В. В. Прасолов, Точки Брокара и изогональное сопряжение. – М.: МЦМНО, 2000.

[408] В. В. Прасолов, Многочлены. – М.: МЦНМО, 2003.

[409] В. В. Прасолов, Геометрические задачи древнего мира. – М.: ФАЗИС, 1997.

[410] В. В. Прасолов, Четыре рассказа по геометрии. – Журнал “Математическое образование”, 1(4), 1998.

[411] В. В. Прасолов, Суммы квадратов многочленов. – Журнал “Математическое образование”, 1(8), 1999.

[412] В. В. Прасолов, Теорема Жордана. – Журнал “Математическое образование”, 2-3(9-10), 1999.

[413] В. В. Прасолов, Заметки о неравенствах. – Журнал “Математическое образование”, 4(11), 1999.

[414] В. В. Прасолов, Графы ребер многогранников. – Журнал “Математическое образование”, 1(12), 2000.

[415] В. В. Прасолов, Три главы из книги по алгебре. – Журнал “Математическое образование”, 4(19), 2001.

[416] Программы основных и аннотации специальных курсов (Под редакцией Д. Л. Абрарова). – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 1995.

[417] Д. Реповш, А. Скопенков, Теория препятствий для начинающих. – Сборник “Математическое просвещение”, 4(2000). – М.: МЦНМО, 2000.

[418] Д. Реповш, А. Скопенков, Характеристические классы для начинающих. – Сборник “Математическое просвещение”, 6(2002). – М.: МЦНМО, 2002.

В. В. Рождественский

[419] В. В. Рождественский, Решение уравнений и неравенств. Теория и практика. Задачи вступительных экзаменов в МГУ. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000.

[420] В. В. Рождественский, О специальном курсе программирования в ФМШ №18 при МГУ. – Журнал “Математика в школе”, 4(1983).

[421] В. В. Рождественский, Умеете ли Вы считать? – Журнал “Квант”, 4(1984).

[422] В. В. Рождественский, С. Г. Хлебутин, Программирование на микрокалькуляторе: ветвления и циклы. – Журнал “Квант”, 3(1986).

[423] В. В. Рождественский, С. Г. Хлебутин, Структурный подход и язык программирования Бейсик. – Журнал “Квант”, 3(1978).

[424] В. В. Рождественский, В. Я. Шкадов, Сборник задач и методических указаний по программированию. – М.: Издательство МГУ, 1981.

[425] В. В. Рождественский, Е. В. Панкратьев, И. И. Мельников, В. В. Вавилов, Математический тренинг. Арифметика, алгебра, тригонометрия и анализ. – М.: Издательский отдел УНЦ ДО МГУ, 1997.

[426] В. В. Рождественский, М. В. Смуров, Минизадачник по геометрии. – М.: МГДД(Ю)Т, 2004.

[427] В. В. Рождественский, Иррациональные уравнения и неравенства. – М.: МГДД(Ю)Т, 2005.

[428] В. В. Рождественский, Действительные числа (лекции). – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, рукопись.

[429] А. А. Русаков, В. Н. Чубариков, К столетию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. – Материалы научно-практической конференции “Колмогоров: Современная математика и образование”. – Тула, 2003.

[430] А. А. Русаков, А. А. Часовских, CD: СУНЦ МГУ им. А. Н. Колмогорова. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 2003.

[431] А. А. Русаков, Юным дарованиям. В книге “Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова” (Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шиврин-ская). – М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003.

[432] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 1: Рациональные уравнения, неравенства, системы. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[433] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 2. Иррациональные уравнения, неравенства, системы. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[434] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 3: Показательные уравнения, неравенства, системы. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[435] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 4: Логарифмические уравнения, неравенства, системы. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[436] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 5: Тригонометрические уравнения, неравенства, системы. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[437] Ю. В. Садовничий, Математика. Конкурсные задачи по алгебре с решениями (Учебное пособие). Часть 6: Решение текстовых задач. – М.: УНЦ ДО, Москва, 2000.

[438] Сборник статей ко дню рождения А. Н. Колмогорова. (Ред. коллегия: А. А. Часовских, В. В. Вавилов, А. Н. Качалкин, Е. В. Шивринская). – М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003.

[439] В. С. Секованов. Гений из Туношны. Художественно-документальная повесть. – Ярославль, 2005.

[440] И. Н. Сергеев, С. Н. Олехник, С. Б. Гашков, Примени математику. – М.: Наука, 1989.

[441] И. Н. Сергеев, МАТЕМАТИКА. Задачи с ответами и решениями. – М. КДУ: Высшая школа, 2003.

[442] В. А. Скворцов, Примеры метрических пространств. – М.: МЦНМО, 2002.

[443] А. Б. Скопенков, n-мерный куб и решение проблемы Борсука. – Журнал “Математическое просвещение, 3(1999). – М.: МЦНМО, “ЧеРо”, 1999.

[444] А. Б. Скопенков, А. Таламбуца, Упаковки правильных многогранников. – Журнал “Математическое образование”, 3(14), 2000.

[445] А. Б. Скопенков, А. Таламбуца, Экстремальные расположения правильных многогранников. – Журнал “Математическое просвещение, 8(2004). – М.: МЦНМО, “ЧеРо”, 2004.

[446] A. Skopenkov, Borsuk’s problem, J. “Quantum”, 7:1(1996).

[447] А. Скопенков, Л. Смирнова, Д. Тарасенко, А. Чернятьев, Сборник задач по математике, 9-10 классы. – Кострома, Эврика-М, 1998.

[448] А. Б. Скопенков, Вокруг критерия Куратовского планарности графов. – Журнал “Математическое просвещение, 9(2005). – М.: МЦНМО, 2005.

[449] А. Б. Скопенков, Олимпиада и математика. – Журнал “Математическое просвещение”, 10(2006), в печати.

[450] М. В. Смуров, А. Спивак, Покрытия полосками. – Журнал “Квант”, 4 и 5(1998).

[451] Ю. П. Соловьев, Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Части 1-3. – М.: СУНЦ МГУ, 1988.

[452] Ю. П. Соловьев, Арифметика эллиптических кривых. – Журнал “Квант”, 7(1987).

М. В. Смуров Ю. П. Соловьев

[453] Ю. П. Соловьев, Вызов Ван Роумена. – Журнал “Квант”, 6(1986).

[454] Ю. П. Соловьев, А. Б. Сосинский, Геометрия скользящих векторов. – Журнал “Квант”, 8(1985).

[455] Ю. П. Соловьев, Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма. – Журнал “Квант”, 4(1999).

[456] Ю. П. Соловьев, Инверсоры. – Журнал “Квант”, 4(1990).

[457] Ю. П. Соловьев, Старый алгоритм. – Журнал “Квант”, 3(1987).

[458] Ю. П. Соловьев, Комплексные числа. – Журнал “Квант”, 2(1991).

[459] Ю. П. Соловьев, Неопределенные уравнения первой степени. – Журнал “Квант”, 4(1992).

[460] Ю. П. Соловьев, Предел последовательности. – Журнал “Квант”, 10(1992).

[461] Ю. П. Соловьев, Огюстен Луи Коши и математическая индукция. – Журнал “Квант”, 3(1991).

[462] Ю. П. Соловьев, Открытие вселенной. – Журнал “Квант”, 5(1992).

[463] Ю. П. Соловьев, “Ради отечества наук и славы”. – Журнал “Квант”, 7(1989).

[464] Ю. П. Соловьев, Творцы новой астрономии. – Журнал “Квант”, 7 и 8(1992).

[465] Ю. П. Соловьев, Христиан Гюйгенс. – Журнал “Квант”, 4(1995).

[466] Ю. П. Соловьев, Эварист Галуа. – Журнал “Квант”, 12(1986).

[467] А. Б. Сосинский, Логарифмическая и показательная функции. (В сборнике: Математическая школа. Лекции и задачи, выпуск VII). – М.: Издательство МГУ, 1966.

[468] А. Б. Сосинский, Дифференцирование. (В сборнике: Математическая школа. Лекции и задачи., выпуск VI). – М.: Издательство МГУ, 1965.

[469] А. Б. Сосинский, Конечные группы. – Журнал “Квант”, 2(1987), 6(1996).

[470] А. Б. Сосинский, Косы и узлы. – Журнал “Квант”, 2(1989).

[471] А. Б. Сосинский, Перемещения пространства. – Журнал “Квант”, 8(1980).

[472] А. Б. Сосинский, Узлы, зацепления и их полиномы. – Журнал “Квант”, 4(1989).

[473] А. Б. Сосинский, Мыльные пленки и случайные блуждания. – М.: МЦМНО, 2000.

[474] А. Б. Сосинский, Узлы и косы. – М.: МЦНМО, 2001.

[475] А. Б. Сосинский, Как учатся математике во Франции. – Журнал “Квант”, 5(1995).

[476] Три кубика (Сборники фольклорных произведений учащихся школы при МГУ), Части 1-3. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1997.

[477] В. М. Тихомиров, Гений, живший среди нас. В книге “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”. (Составитель Н. Х. Розов, Под общей редакцией В. М. Тихомирова). – М.: ФАЗИС, 1999.

[478] В. Трофимов, Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки. – Журнал “Квант”, 5(1985).

[479] В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско, Вводный курс математической логики. – М.: Физматлит, 2004.

[480] А. Ходулев, Расселение фишек. – Журнал “Квант”, 7(1982).

А. А. Часовских

[481] А. А. Часовских, Из опыта работы СУНЦ МГУ. (В книге: “Всероссийская конференция “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”, Дубна, сентябрь 2000). – М.: МЦНМО, 2000.

[482] Р. С. Черкасов, А. Н. Колмогоров и школьное математическое образование. (В книге “Колмогоров в воспоминаниях”. Редактор-составитель А. Н. Ширяев). – М.: Наука, 1993.

[483] Е. Т. Шавгулидзе, В. Г. Чирский, Уравнения элементарной математики. – М.: Наука, 1999.

[484] Е. В. Шивринская, Задачи с параметрами как средство повышения мотивации обучения математике. – Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук, 2002.

[485] Е. В. Шивринская, Л. М. Лужина, В. Л. Натяганов, Научно-исследовательские задачи механики и прикладной математики как аналоги примеров с параметрами. – М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002.

[486] Е. В. Шивринская, М. В. Ломоносов как популяризатор науки. (В "Ломоносовские чтения-2004. Тезисы"). – М.: Издательство МГУ, 2004.

[487] А. Н. Ширяев, Увлеченный до крайности. Материалы научно-практической конференции "Колмогоров: современная математика и образование" (Составители: В. Н. Чубариков, А. Е. Устян, А. А. Русаков). – Тула: Издательство Тульского гос. пед. университета им. Л. Н. Толстого, 2003.

[488] Е. В. Щепин, Лекции по анализу в одногодичном потоке. – М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, 1995, рукопись.

[489] Е. В. Щепин, М. В. Шевелев, Н. Е. Щепин, О топологии числа 64. – Журнал "Чебышевский сборник", 4(8), 2003.

[490] Н. Е. Щепин, Компьютерная программа "Пасьянс 64". www. mi.ras.ru/ ~scepin.

Задачный калейдоскоп

Кафедра математики СУНЦ[1] МГУ им. М. В. Ломоносова проводит конкурс решения задач памяти основателя школы-интерната при МГУ, академика Андрея Николаевича Колмогорова. Ежемесячно участникам конкурса предлагается пять задач из различных разделов математики. Итоги конкурса подводятся один раз в год — в конце апреля. В статье мы поместили в хронологическом порядке задачи трех последних лет, причем в том виде, в котором они предлагались. Некоторые из задач конкурса становятся началом научных исследований и являются основой докладов для участия в различных научных конференциях.

Школьники могут принять участие в конкурсе в любой момент времени; при этом, совсем не обязательно представлять решения всех задач, можно также использовать задачи, предлагавшиеся и ранее.

Приглашаем читателей журнала принять участие в этом конкурсе и тщательно оформленные решения задач направить по адресу: 127357, Москва, Кременчугская ул., 11. Кафедра математики СУНЦ МГУ, Вавилову В.В.

Отзывы о предложенных задачах и новые задачи для конкурса будут встречены с большой благодарностью.

Январь 2003

1. Двузначное число таково, что если его умножить на обе его цифры, то получится число с тремя одинаковыми цифрами. Найти все такие числа.

2. Решить систему уравнений:

$$x^2-2=y,\quad y^2-2=z,\quad z^2-2=x.$$

3. Точки D и E лежат на стороне BC треугольника ABC. Известно, что $BD=CE$ и то, что углы BAD и CAE равны. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Поместить внутри правильного шестиугольника со стороной 1 квадрат возможно больших размеров. Найти сторону этого квадрата.

5. Доказать, что на координатной плоскости не существует замкнутой ломаной с нечетным числом звеньев, у которой координаты всех вершин рациональны, а длина каждого звена равна 1.

Февраль 2003

6. Найти все натуральные n, для которых число n^4+4^n является простым числом. Что можно сказать о $n^{16}+16^n$ и n^k+k^n?

7. Уравнение $ax^2-bx+c=0$, где a — натуральное число, а b и c — целые числа, имеет два различных корня, которые расположены строго внутри интервала (0;1). Доказать, что $a\geq 5$.

8. Доказать, что

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{....\sqrt{n}}}}}<3,\quad n=2,3,4,...$$

9. Пусть P — точка внутри тетраэдра $ABCD$. Прямые AP, BP, CP, DP пересекают противоположные грани тетраэдра в точках A', B', C', D' соответственно. Доказать, что точка P не может быть серединой более чем одного из отрезков AA', BB', CC', DD'.

10. Все вершины треугольника ABC имеют целые координаты, а строго внутри этого треугольника имеется ровно одна точка P с целыми координатами. Прямая AP пересекает BC в точке E. Найти наибольшее значение, которое может принимать отношение AP/PE.

[1] СУНЦ – Специализированный Учебно-Научный Центр Московского государственного университета. Это, ныне самостоятельное подразделение университета, организовано на основе спецшколы-интерната 18 при МГУ, которая ныне носит название школы им. академика А. Н. Колмогорова. О самой школе см. статью автора в нашем журнале: “Математическое образование”, № 3(34), 2005.

Март 2003

11. Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел x, y, z таких, что $x^3 + y^5 = z^7$.

12. Доказать, что на плоскости существует *равноугольный* шестиугольник, стороны которого равны 5, 8, 11, 14, 23 и 29 в некотором порядке.

13. Для каждого натурального числа n, $n \geq 2$, найти функцию вида

$$f_n(x) = a_n + b_n x + c_n|x - D_n|,$$

где a_n, b_n, c_n, D_n зависят только от n и такую, что

$$f_n(k) = k + 1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, ..., n - 1 \text{ и } f_n(n) = 1.$$

14. Найти $x^2 + y^2 + z^2$, если натуральные числа x, y, z таковы, что

$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \quad \text{и} \quad 16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3.$$

15. На плоскости даны две точки, расстояние между которыми больше 1 км. При помощи только неразмеченной короткой линейки (с длиной меньше 20 см) провести отрезок, соединяющий заданные точки.

Сентябрь 2003

16. Дан треугольник ABC. Точки D, E и F, отличные от вершин треугольника, лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Доказать, что если около четырехугольника $AFDE$ можно описать окружность, то

$$\frac{4[DEF]}{[ABC]} \leq \left(\frac{EF}{AD}\right)^2,$$

где обозначено: $[F]$ — площадь фигуры F.

17. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n\,(n!)^2.$$

18. Доказать, что ни одно из чисел вида

$$a_n = 1001001...1001, \quad n \geq 2,$$

не является простым числом; здесь n обозначает число единиц в записи числа a_n.

19. а) Математик R сказал математикам P и S: “Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше 100. Математику P я сейчас сообщу — по секрету от S — произведение этих чисел, а математику S я сообщу — по секрету от P — их сумму”. Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

- Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. (π_1)
- Я заранее знал, что Вы этого не сможете. (σ_1)
- А ведь тогда я их знаю. (π_2)
- А тогда и я их знаю. (σ_2)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

б) Начало условия этой задачи — вплоть до (σ_1) — то же, что и в а). Дальше диалог меняется:

- А я заранее знал, что Вы это будете знать заранее. (π_2)
- Я не знаю, чему равны задуманные числа. (σ_2)
- А я тогда их знаю. (π_3)

Найдите задуманные числа.

20. Даны две сферы: S_A с центром A и S_B с центром B. Прямая p касается сферы S_A в точке A_1 и сферы S_B в точке B_1; прямая q касается сферы S_A в точке A_2 и сферы S_B в точке B_2. Доказать, что ортогональные проекции отрезков A_1A_2 и B_1B_2 на прямую AB равны.

Октябрь 2003

21. Ученик, используя свои записи, должен был написать на доске шесть членов арифметической прогрессии, составленной из натуральных чисел. В итоге он написал только пять членов

$$113, 137, 149, 155, 173;$$

при этом ошибся при записи одного из этих пяти чисел. Можно ли восстановить все шесть членов прогрессии?

22. Пусть ABC остроугольный треугольник и p — прямая, проходящая через его ортоцентр. Доказать, что три прямые, симметричные p относительно сторон ABC, пересекаются в одной точке.

23. Какую наибольшую площадь имеет правильный треугольник, который можно покрыть тремя равносторонними треугольниками со сторонами 1?

24. Доказать, что для любых действительных чисел a и b существует действительное число $c \in (0;1)$ такое, что

$$\left| ac + b + \frac{1}{c+1} \right| > \frac{1}{24}.$$

25. Для каждого $n \geq 3$ найти наименьшее $f(n)$ со следующим свойством: при любом выборе подмножества $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ с $f(n)$ элементами в нем найдутся три попарно взаимно простых числа.

Ноябрь-декабрь 2003

26. (Из протокола Кишиневской гимназии за 1879г.; обнаружила Б. П. Коварская – см. “Математика в школе”, 2(1998).

Три мужа — Андрей, Иван и Степан пошли со своими женами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку рублей, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван — больше Екатерины на 11 вещей, а Степан – меньше Ольги на 23 вещи. Определить, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал 63-мя рублями больше своей жены.

27. (VII Соросовская олимпиада). Пусть γ — наибольший корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Найти первые 100 знаков после запятой у числа γ^{1000}.

28. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники. BCA_0, CAB_0 и ABC_0. Доказать, что отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 равны и попарные углы между ними равны 60^0.

29. (И. И. Воронович, г. Минск). Найти все пары положительных чисел α и β, такие, что при любом $n \in N$ выполняется равенство $[\alpha\ [\beta n]\ ] = n - 1$. Здесь $[x]$ — целая часть числа x.

30. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники BCA_0, CAB_0 и ABC_0. Доказать, что отрезки AA_0 , BB_0 и CC_0 равны и попарные углы между ними равны 60^0.

Январь 2004

31. Можно ли подобрать 100 натуральных чисел так, чтобы разность двух любых из них равнялась наибольшему общему делителю этой пары чисел? (С. И. Токарев; см. “Математика в школе”, 2(1998), задача 4310).

32. Совет директоров большой компании, состоящий из 15 человек, решил образовать из своих членов 20 комитетов. Можно ли сформировать эти комитеты так, что

– каждый член совета входит в 4 комитета;

– каждый комитет состоит из трех членов;

– нет двух комитетов, включающих более одного общего члена?

33. Докажите, что круг не равносоставлен никакому многоугольнику.

34. Куб разбит на конечное число прямоугольных параллелепипедов так, что объем шара, описанного около куба, равен сумме объемов шаров, описанных около параллелепипедов разбиения. Доказать, что все параллелепипеды являются кубами.

35. В теннисном турнире принимали участие 10 игроков. Каждый играл с каждым только один раз. В этом турнире если игрок i выигрывал партию у игрока j, то количество партий, которые проиграл i плюс количество партий, которые выиграл j, не меньше 8. Скажем, что три игрока i, j, k образуют нетипичную тройку игроков, если i выиграл у j, j выиграл у k и k выиграл у i.

Докажите, что в этом турнире участвовало ровно 40 нетипичных троек игроков.

Февраль 2004

36. Пусть $n \geq 2$ — целое число. Найти максимальное количество элементов в множестве M пар целых чисел (j, k), $1 \leq j < k \leq n$, удовлетворяющих условию: если $(j, k) \in M$, то $(k, m) \notin M$ при всех m.

37. На сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC построены равнобедренные треугольники ABL, DCK и ACM, с углами при основаниях, равных, соответственно, 25^0, 20^0 и 15^0, а точки L, K и M лежат внутри треугольника ABC. Обозначим через R, Q, P — точки пересечения прямых AL и CK, BK и AM, CM и BL (также соответственно). Найти углы треугольника PQR.

38. Докажите, что правильный 2κ-угольник можно разрезать на ромбы.

39. Решить систему уравнений ($a > 0$)

$$\begin{gathered}
x_1|x_1| = x_2|x_2| + (x_1 - a)|x_1 - a|, \\
x_2|x_2| = x_3|x_3| + (x_2 - a)|x_2 - a|, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n|x_n| = x_1|x_1| + (x_n - a)|x_n - a|.
\end{gathered}$$

40. Доказать, что существует целое число n, удовлетворяющее системе неравенств

$$1 \leq n \leq 800,$$

$$|\sin\sqrt{n}| < 1/100.$$

Март 2004

41. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(x^3) + Q(x^3)$ делится на $x^2 + x + 1$. Доказать, что $P(x)$ и $Q(x)$ делятся на $(x - 1)$.

42. Даны k равносторонних треугольников со сторонами 1, 1/ 2, 1/3, ..., 1/k. Каково наименьшее число a, при котором все эти треугольники можно без наложений поместить в равносторонний треугольник со стороной a?

43. Доказать, что

$$d^2 + (b - a)^2 < c^2,$$

где d — диаметр вписанной в треугольник окружности и a, b, c — его стороны.

44. Найти все функции целого аргумента $f(x)$, которые при любых целых x и y удовлетворяют соотношению

$$f(x + y) + f(x - y) = f(3x).$$

45. Последовательность положительных действительных чисел $a_1, a_2, a_3, ..$ обладает следующим свойством:

$$a_n^2 \leq a_n - a_{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доказать, что

$$a_n < \frac{1}{n}$$

при любом n.

Апрель-май 2004

46. Найти все такие целые положительные числа k, для каждого из которых выражение

$$\sin kx \sin^k x + \cos kx \cos^k x - \cos^k 2x$$

не зависит от x.

47. Даны две непересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2. Построим окружность с центром на прямой O_1O_2, касающуюся двух первых внешним образом. Доказать, что третья окружность пересекает общие внутренние касательные к данным окружностям в четырех точках, являющихся вершинами четырехугольника, две стороны которого соответственно параллельны общим внешним касательным к данным окружностям.

48. Многочлены $P(x)$ и $T(x)$ таковы, что $P(x^3) + T(x^3)$ делится на $x^2 + x + 1$. Доказать, что $P(x)$ и $T(x)$ делятся на $x - 1$.

49. В тетраэдре $ABCD$ двугранный угол с ребром AB равен двугранному углу с ребром DA. Доказать, что $[ABD] = [BDC]$, $[ABC] = [ADC]$ ($[F]$ — площадь фигуры F).

50. Найти наименьшее значение величины

$$max\{x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5, x_4 + x_5 + x_6, x_5 + x_6 + x_7\},$$

где все $x_к$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Сентябрь 2004

51. Доказать, что по окончании волейбольного турнира 2^n команд (в один круг) можно выбрать команды K_1, K_2, $\ldots$, K_{n+1} так, что каждая из команд K_j, $j \le n$, выиграла у всех команд $K_{j+1}, \ldots, K_{n+1}$.

52. Известно, что уравнение

$$x^2 + y^2 - az^2 - au^2 = 0,$$

где a — целое число, имеет ненулевое решение в целых числах. Доказать, что тогда и уравнение

$$x^2 + y^2 - az^2 = 0$$

имеет ненулевое решение в целых числах.

53. Найти все простые четырехугольники такие, что на их сторонах и диагоналях можно расставить стрелки так, что сумма шести полученных векторов будет равна нулю.

54. "Изобретатель" придумал прибор, позволяющий через любую данную точку плоскости провести прямую, делящую площадь данной фигуры пополам. При помощи этого прибора, циркуля и линейки

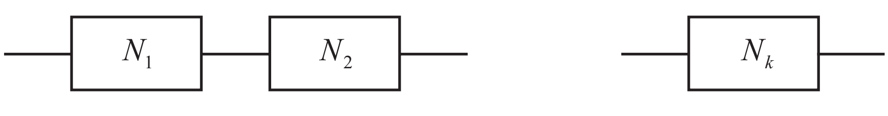
а) разделить данный угол на три равные части.

б) построить квадрат, по площади равный площади данного круга.

55. Дано 16 кубов с длинами ребер соответственно равных 1, 2, 3, $\ldots$, 16. Разделить их на две группы так, чтобы в обеих группах были равны: суммарные объемы, суммы площадей боковых поверхностей, суммы длин всех ребер и количество кубов.

Октябрь 2004

56. Схема железнодорожного узла изображена на рисунке



Он состоит из k разъездов, в которых $N_1, N_2, \ldots, N_k$ железнодорожных веток. Справа к узлу приближается состав из m локомотивов, которые могут двигаться только справа налево. При каком наибольшем m локомотивы при прохождении железнодорожного узла могут перестроиться в любом порядке? В любой ветке может поместиться любое количество локомотивов.

57. Внутри сферы S с центром в точке O и радиусом R расположены точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, так, что $OA \perp AB$, $OA \perp AC$. Через точки A, B, C проведены две сферы радиусов R_1 и R_2, касающиеся сферы S. Доказать, что $R_1 + R_2 = R$.

58. Доказать неравенство

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^{a} \left(\frac{b}{d}\right)^{b},$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

59. На плоскости дан треугольник ABC. Если кузнечик находится в некоторой точке X, то ему разрешается прыгать только в точки, симметричные точке X относительно любой из прямых AB, BC или AC. Доказать, что из любой точки плоскости кузнечик может за конечное число прыжков заскочить внутрь треугольника ABC либо на его границу.

60. Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots$, где $a_0 = 1$ и при всех $n \geq 1$

$$a_n = a_{\left[\frac{2n}{3}\right]} + a_{\left[\frac{n}{4}\right]}.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Ноябрь 2004

61. На клетчатом листе бумаги нарисован квадрат со стороной 64, а в нем отмечено 62 квадрата со сторонами 1, 2, 3, ..., 62 (стороны всех 63 этих квадратов проходят по линиям клетчатого листа). Доказать, что хотя бы один из отмеченных квадратов содержит другой отмеченный квадрат.

62. Ученик начертил четырехугольник $ABCD$ и измерил длины его сторон и диагоналей. Он получил следующие результаты: $AB = 6$, $BC = 7$, $CD = 8$, $DA = 9$, $AC = 10$, $BD = 11$. Докажите, что его измерения неточны.

63. Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел такая, что сумма любых нескольких членов этой последовательности не представляется в виде степени натурального числа с натуральным показателем, большим единицы?

64. Доказать, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из отрезка [0,1] справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \leq \frac{n^2}{2}.$$

65. Имеются два тетраэдра, проекции которых на любую плоскость пространства являются многоугольниками с одинаковым числом вершин. Доказать, что эти тетраэдры равны.

Декабрь 2004

66. На острове зарыто некоторое число кладов, которые делят между собой несколько пиратов (все разной силы). Координаты кладов известны всем пиратам. Они договорились о том, что клад в данный момент принадлежит тому из пиратов, который находится к нему ближе остальных. Если несколько пиратов находятся на одинаковом расстоянии от клада, то клад достается наиболее сильному из них.

Перед началом дележа каждому из них принадлежит хотя бы один клад. В первый момент времени каждый пират перемещается в такую точку острова, каждая координата которой является средним арифметическим соответствующих координат кладов, которыми данный пират владеет. В следующий момент каждый пират определяет какие клады принадлежат ему после перемещения и вновь перемещаются по тому же правилу, что и в первый момент. Если после очередного перемещения у одного из пиратов не оказалось ни одного клада, он выбывает из дележа. Доказать, что дележ закончится через конечное число перемещений.

67. Уравнение

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

имеет шесть действительных корней. Найти коэффициенты a, b, c, d.

68. Доказать, что существует число вида 5^n (n — натуральное), десятичная запись которого содержит 100 подряд идущих нулей.

69. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точки a, b, c, d, являются ортоцентрами треугольников BCD, CDA, DAB, ABC соответственно. Доказать, что четырехугольники $ABCD$ и $abcd$ равны.

70. Доказать, что для всех положительных x справедливо неравенство

$$\frac{1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n}}{x + x^3 + ... + x^{2n-1}} \geq \frac{n+1}{n}.$$

Январь 2005

71. На плоскости расположено 100 точек так, что расстояние между любыми двумя из них не больше единицы. Две из этих точек, удаленные друг от друга на расстояние больше чем $1/\cos 36^0$, соединяются отрезком. Доказать, что число проведенных отрезков не превосходит 3750.

72. Доказать неравенство

$$\min_{i \leq j}(a_i - a_j)^2 \leq \frac{12}{n(n^2-1)}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа.

73. На бесконечном листе клетчатой бумаги (со стороной клетки 1) некоторые стороны клеток окрашены краской так, что из любого узла можно перейти в любой другой узел по окрашенным отрезкам, при этом отсутствуют замкнутые пути. Доказать, что существуют такие два соседних узла, что кратчайший путь из одного в другой по окрашенным линиям больше 1000.

74. Вычислить сумму

$$\operatorname{tg} 1 \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} 3 + \ldots + \operatorname{tg}(n-1) \operatorname{tg} n.$$

75. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены равнобедренные треугольники APB, AQC и CRB ($AP = PB$, $AQ = QC$, $CR = RB$). Треугольники APB и AQC лежат вне треугольника ABC, а треугольник CRB расположен по ту же сторону от отрезка BC, что и треугольник ABC. Доказать, что четырехугольник $APRQ$ является параллелограммом.

Февраль 2005

76. а) Докажите, что в равногранном тетраэдре основания высот, середины высот и точки пересечения высот граней принадлежат одной сфере. (Эта сфера называется *сферой двенадцати точек равногранного тетраэдра.*)

б) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре окружности девяти точек всех четырех граней лежат на одной сфере. (Эта сфера называется *сферой двадцати точек тетраэдра)*

77. В квадратной таблице $n \times n$ расставлены буквы так, что все строки таблицы различны. Докажите, что можно вычеркнуть один из столбцов таблицы так, что в полученной таблице $n \times (n-1)$ все строки будут по-прежнему различны.

78. На множестве действительных чисел введена новая операция $x \# y$ такая, что для любых x, y, z

1) $(x+y)(x \# y) = x^2 \# y^2$, 2) $x \# y = (x+z) \# (y+z)$, 3) $1 \# 0 = 1$.

Найти эту операцию (выразить через известные).

79. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE и точка O — точка их пересечения. На отрезках OA и OC взяты точки M и K соответственно так, что углы BMC и BKA — прямые. Докажите, что $BK = BM$.

80. Какие натуральные числа можно представить в виде

$$\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right],$$

где n — натуральное число?

Март 2005

81. Стороны треугольника являются корнями уравнения третьей степени с целыми коэффициентами. Докажите, что высоты являются корнями уравнения шестой степени с целыми коэффициентами.

Обладают ли похожими свойствами медианы и биссектрисы?

82. Пусть $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями ($x_1 < x_2 < x_3$) уравнения $p(x) = A$, а числа y_1, y_2, y_3 — корнями (в порядке возрастания) уравнения $p(x) = B$, $A < B$. Докажите, что $y_3 - x_3 = (y_2 - x_2) + (y_1 - x_1)$.

83. Существует ли треугольник, который можно разрезать на три части по высоте и по биссектрисе, выходящих из одной вершины, из которых можно сложить другой треугольник?

84. Найти все целые числа a, b, c, d такие, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2b^2c^2.$$

85. Четыре вершины куба, не лежащие в одной плоскости, имеют целые координаты в прямоугольной декартовой системе координат. Доказать, что координаты всех вершин куба — целые числа.

Апрель 2005

86. Доказать, что не существует квадрата, вершины которого расположены на четырех концентрических окружностях, радиусы которых образуют арифметическую прогрессию.

87. Найти наименьшее натуральное число n такое, чтобы числа $2n + 1$ и $37n+1$ были квадратами некоторых чисел.

88. Объем тетраэдра $ABCD$ равен V. На луче $[A, B)$ выбрана точка E такая, что $AE = 2AB$. Аналогично на лучах $[BC)$, $[CD)$, $[DA)$ отмечаются точки F, G, H. Найти объем тетраэдра $EFGH$.

89. При помощи циркуля и линейки построить окружность, касающуюся данной окружности S и проходящую через две точки A и B, расположенные внутри S.

90. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — действительные числа. Составим десять сумм по три слагаемых в каждой: $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_4$, …, $x_3 + x_4 + x_5$. Найти наименьшее число n со следующим свойством: если n из указанных сумм равны нулю, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Май 2005

91. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\{(5 + \sqrt{24})^n\}.$$

92. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC касаются друг друга. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABD и CDB также касаются друг друга.

93. Пусть $0 < \alpha < \pi$. Доказать, что

$$\arcsin\frac{\alpha}{6} + \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\frac{\alpha}{4}\right) < \frac{\alpha}{3}.$$

94. На прямой заданы n красных и n синих точек. Докажите, что сумма квадратов расстояний между точками одного цвета, не превосходит суммы квадратов расстояний между точками разного цвета.

95. Найдите все функции $f\colon R \to R$ такие, что

$$f(x) = \sup_y (xy - f(y)).$$

Июнь — Август 2005 *(летний исследовательский цикл задач)*

96. Верно ли, что

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} > \frac{5}{p},$$

где m_a, m_b, m_c — медианы треугольника, а p — полупериметр?

97. Для любого ли натурального числа b

$$\left(\frac{1}{b + \frac{1}{b + \ldots}}\right)^n = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \ldots}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{a - \frac{1}{a - \ldots}}$$

при подходящем выборе натурального числа a?

98. Справедливость равенства

$$\left[\frac{3^n}{2^n}\right] = \left[\frac{3^n}{2^n - 1}\right], \quad n > 2,$$

установлена для $3 \le n \le 150$. Однако, является ли это равенство тождеством, неизвестно. Что можно добавить к указанному результату вычислительного характера?

99. Сколько различных ненулевых решений (x, y), $x^2 + y^2 \ne 0$, может иметь алгебраическая система уравнений

$$\begin{cases} x^5 = a_1 y^5 + a_2 x^3 y^5 + a_3 x^6 y^8, \\ y^5 = b_1 x^5 + b_2 x^5 y^3 + b_3 x^8 y^6 \end{cases}$$

с положительными коэффициентами?

100. Задача о полном описании (на плоскости комплексного параметра a) бифуркаций фазового портрета в системе $\dot{z} = \varepsilon z + a z^3 \bar{z} + \bar{z}^3$ при малых комплексных ε до сих пор остается не решенной. (Правдоподобные гипотезы и некоторые результаты, конечно, имеются). Попробуйте рассмотреть частные случаи этой задачи.

Сентябрь 2005

101. В круг вписан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Доказать, что его диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB{\cdot}CD{\cdot}EF = BC{\cdot}DE{\cdot}FA$.

102. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = a$, $x_2 = b$ и

$$x_{n+1} = |x_n| - x_{n-1}, \quad n \ge 3.$$

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ периодична.

103. Доказать, что существует такая перестановка $p_1, p_2, \ldots, p_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ сумма чисел $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ делится на p_{k+1}.

104. На сторонах четырехугольника $ABCD$, как на гипотенузах, построены с внутренней стороны равнобедренные прямоугольные треугольники ABK, BCL, CDM, DAN. Доказать, что точки K и M совпадают тогда и только тогда, когда совпадают точки L и N .

105. Даны два равновеликих выпуклых многогранника. Доказать, что первый многогранник можно разбить на несколько тетраэдров $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и второй — на такое же количество тетраэдров $B_1, B_2, \ldots, B_n$ так, что для всех k $(1 \le k \le n)$ тетраэдры A_k и B_k равновелики.

Октябрь 2005

106. Доказать, что для положительных чисел a, b, c и d справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

Более общим является неравенство Ф. Шлейфера: для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) + n\sqrt[n]{a_1^2\, a_2^2\, \ldots\, a_n^2} \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

При $n = 4, a_1 = a^2, a_2 = b^2, a_3 = c^2, a_4 = d^2$ получим утверждение данной задачи.

107. Многочлен

$$p(x) = x^n - x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \ldots - (-1)^n a_n$$

имеет n действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (с учетом кратностей) и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \quad 0 \leq x_к \leq 1.$$

Доказать, что

$$0 \leq a_к \leq \frac{C_n^k}{n^k}, \ \ 2 \leq k \leq n,$$

причем знак равенства имеет место лишь тогда, когда все корни многочлена $p(x)$ равны $1/n$.

108. В этой задаче нужно разработать ряд алгоритмов, которые могут быть положены в основу вычислительных компьютерных программ.

а) (В. В. Рождественский). С парой чисел (a, b) разрешается проделать следующее преобразование: к одному из этих чисел прибавить другое и превратить имеющуюся пару либо в пару $(a+b,\ b)$, либо в пару $(a,\ a+b)$. Написать алгоритм, вычисляющий наименьшее число таких преобразований, необходимых для превращения пары (1,1) в пару, содержащую число N, $1 \leq N \leq 2000$.

б) (Е. Е. Тыртышников). Последовательность $\{a_n\}$ задана своим первым членом $a_1 = 1/e$ и рекуррентным соотношением $a_n = 1 - na_{n-1}$. Вычислить число a_n для $n \leq 50$ с точностью до четырех знаков после запятой.

в) (Ю. В. Нестеренко, А. М. Слинько). Последовательность $\{x_n\}$ называется периодической, если для некоторых натуральных чисел M и T равенство $x_n = x_{n+T}$ имеет место для любых $n > M$. Наименьшие числа M и T с этим свойством называются длиной нерегулярной части и длиной периода, соответственно.

Известно, что для некоторой ограниченной функции натурального аргумента $f(x)$ для всех $k \geq 1$ справедливо равенство $x_{k+1} = f(x_k)$ так, что последовательность $\{x_n\}$ периодическая.

Указать алгоритм, который по заданной последовательности определяет M и T, используя число сравнений, линейное по максимуму этих двух чисел.

109. Решить в целых числах систему уравнений

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 8.$$

110. На сфере с центром в начале координат отмечена совокупность из 64 точек, половина из которых окрашена в красный цвет, а половина в синий. Известно, что если повернуть сферу на 180^0 вокруг любой из осей $Ox,\ Oy,\ Oz$, то в каждом случае отмеченная совокупность точек переходит в себя, причем ровно половина всех точек сохраняет свой цвет. Какая часть точек сохраняет цвет при **всех** таких поворотах?

Ноябрь 2005

111. Докажите, что каждая точка окружности $|z| = 1$ является предельной точкой для множества нулей уравнений вида $z^n + z^m + 1 = 0$, где $n > m$ — натуральные числа.

Докажите аналогичное утверждение для уравнений вида

$$z^{k_1} + z^{k_2} + \ldots + z^{k_s} + 1 = 0.$$

112. Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Верно ли, что если три чевианы треугольника конкурентны (т.е. пересекаются в одной точке) и делят его на шесть (пять, четыре, три) равновеликих треугольников, то эти чевианы являются медианами?

113. Все вершины выпуклого многоугольника P являются узлами клетчатой бумаги. Доказать, что

$$Ne \leq 2N_i + 7,$$

где N_e — число всех узлов клетчатой бумаги расположенных на границе P, а $N_i > 0$ — число узлов внутри P.

Доказать, что равенство достигается только для одного единственного треугольника.

114. В плоскости даны две точки O и H; обозначим через T любой треугольник (этой плоскости), для которого точка O является центром его описанной окружности, а H — ортоцентром.

Найти множество вершин треугольников T. Выделить из него множества точек, где могут находится вершины тупоугольных и прямоугольных треугольников.

115. Найти рациональную функцию $f(x)$ такую, что

$$f(x) = f(x-1) = f(1/x), \; x \neq 0.$$

Декабрь 2005

116. Доказать, что если a, b, c являются длинами сторон треугольника, то

$$(2a+2b-c)(2b+2c-a)(2c+2a-b) > 25abc.$$

117. Каждой паре (k, m) натуральных чисел поставлено в соответствие действительное число $u(k, m)$, $0 \leq u(k, m) \leq 1$, причем

$$2u(k, m) = u(k+1, m) + u(k, m+1); \; k, m \in \mathrm{N}.$$

Доказать, что все числа $u(k, m)$ равны между собой.

118. Уравнение

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

имеет шесть действительных корней. Найти коэффициенты a, b, c, d.

119. Последовательность $\{a_n\}$ задана формулой

$$a_n = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (n-1)^2 + n, n \in \mathrm{N}.$$

Найти

$$\min_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

120. В тетраэдр с площадью поверхности 1 вписана сфера. Найти максимально возможное значение площади треугольника, получающегося в сечении тетраэдра плоскостью, параллельной одной из граней тетраэдра и касательной к сфере.

Январь 2006

121. На бесконечном листе клетчатой бумаги отмечено n клеток. Назовем две клетки соседними, если они имеют общую сторону или общую вершину. Доказать, что из отмеченных клеток можно выбрать $k \geq n/4$ клеток так, чтобы никакие две из них не были соседними.

122. Уравнение

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

имеет шесть действительных корней. Найти коэффициенты a, b, c, d.

123. Доказать, что существует натуральное число n, $1 \leq n \leq 2005$, такое, что

$$\|e\sqrt{n}\| < \frac{1}{60},$$

где $\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего целого числа.

124. В тетраэдр с площадью поверхности S вписана сфера. Найти максимально возможное значение площади треугольника, получающегося в сечении тетраэдра плоскостью, параллельной одной из граней тетраэдра и касательной к сфере.

125. Доказать, что для любого простого числа p многочлен

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$$

нельзя представить в виде произведения двух многочленов степеней не меньше первой и с неотрицательными действительными коэффициентами.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-матем. наук.
Email: vvavilov@mtu-net.ru; vvavilov@tochka.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2005 год (включая стоимость пересылки) – 50 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2005 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 40 руб., сдвоенных номеров 3-4 (6-7) за 1998 г. и 2-3 (9-10) за 1999 г. — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents