Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год десятый

№1 (36)

январь-март 2006 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дориченко С.А. (заместитель главного редактора)
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Саблин А.И.

№ 1 (36), 2006 г.

© “Математическое образование”, составление, 2006 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (36), январь – март 2006 г.

Содержание

Студентам и преподавателям математических специальностей

Е. З. Гржибовская, В. В. Ивлев. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть I) 2

Актуальные вопросы математического образования

И. П. Костенко. Коренная проблема втузовского учебника математики (суть проблемы, истоки, история, результаты) 10

История и философия математики

А. И. Щетников. Вопрос о характере касания прямой и круга как проблемная точка развития древнегреческой геометрии в конце V – начале IV века до н.э. 38

Перспективные направления математического моделирования

А. А. Воронин. Эволюция простоты 57

Содержание образования

А. А. Устиловская. Реализация принципов мыследеятельностной педагогики при построении курса геометрии для общеобразовательной школы 69

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2006 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2006 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (часть I)

Е. З. Гржибовская, В. В. Ивлев

В работе предлагается обобщение метода интегрируемых комбинаций применительно к системам линейных дифференциальных уравнений. Для системы из n уравнений удаётся построить n независимых интегрируемых комбинаций с последующим определением искомых функций-решений. В дальнейшем предполагается рассмотреть системы высших порядков и получить решение задачи Коши в терминах интегрируемых комбинаций.

Среди известных методов решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами — операционный, матричный, Эйлера — довольно скромное место занимает метод интегрируемых комбинаций, простой по сути, но редко применяемый при порядке системы $n \geq 3$.

Идея метода заключается в следующем: с помощью простейших алгебраических операций — сложить, вычесть, умножить, разделить — система уравнений "свертывается" в одно дифференциальное уравнение того же порядка относительно некоторой комбинации из искомых функций; причем это уравнение легко интегрируется. Отсюда и термин — *интегрируемая комбинация*. При нахождении n таких независимых интегрируемых комбинаций через них можно выразить исходные неизвестные функции, и задача интегрирования системы считается решенной.

Однако при $n \geq 3$ принято считать, что эти приемы "не работают". Это и определяет ограниченность применения метода.

Цель настоящей заметки — обосновать возможность применения метода при произвольном натуральном n. Итак, рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i(x), \quad \text{где} \quad i = \overline{1,n}\ , \ a_{ik} = const, \quad y_k = y_k\left(x\right), \tag{1}$$

или в матричной записи

$$\mathbf{y}' = \frac{dy}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \tag{2}$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}=[a_{ik}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Пусть α — произвольный вектор-столбец вида $\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$.

Умножим (2) на вектор α скалярно:

$$(\alpha,\mathbf{y}')=(\alpha,\mathbf{A}\mathbf{y})+(\alpha,\mathbf{f}) \tag{3}$$

или, подробнее, умножим i-ю строку уравнения на α_i:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1'=\alpha_1(a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n)+\alpha_1 f_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \alpha_n y_n'=\alpha_n(a_{n1}y+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n)+\alpha_n f_n \end{cases} \tag{4}$$

и просуммируем (4) по столбцам сверху вниз, тем самым получим (3). Из уравнения (3) следует

$$(\alpha,\mathbf{y}')=(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\alpha,\mathbf{y})+(\alpha,\mathbf{f}). \tag{5}$$

Здесь A^T — транспонированная матрица для A, т.е $A^T=[a_{ki}]$.

Применительно к произвольному постоянному вектору α выполненные преобразования ничего не дают. Пусть теперь α — собственный вектор линейного оператора A^T, т.е. по определению $A^T\alpha=\lambda\alpha$, где λ — собственное значение оператора A^T. Тогда для (5) имеем:

$$(\alpha,\,\mathbf{y}')=\lambda(\alpha,\,\mathbf{y})+(\alpha,\,\mathbf{f}). \tag{6}$$

Обозначив линейную комбинацию $J=(\alpha,\,y)=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n$, получим:

$$J'=\lambda J+(\alpha,\,\mathbf{f}). \tag{7}$$

Уравнение (7) есть обыкновенное неоднородное линейное уравнение первого порядка с известным [1] общим решением для интегрируемой комбинации J:

$$J=Ce^{\lambda x}+e^{\lambda x}\int(\alpha,\,f)e^{-\lambda x}dx. \tag{8}$$

В случае однородного уравнения (8) при $f\equiv 0$ имеем

$$J=Ce^{\lambda x}. \tag{9}$$

Для получения всех n интегрируемых комбинаций необходимо рассмотреть характеристическое уравнение для оператора A^T

$$|\mathbf{A}^T-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{10}$$

$$\text{где } I \text{ — единичный оператор:} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В общем случае действительных коэффициентов a_{ik} корни $\lambda_1, \dots \lambda_n$ уравнения (10) могут быть:

— *простыми* вещественными;
— *кратными* вещественными;
— *простыми* комплексными;
— *кратными* комплексными.

Следуя вышесказанному, необходимо рассмотреть следующие варианты.

Простые вещественные корни.

Пусть оператор $\mathbf{A}^T$ имеет n вещественных простых, а, следовательно, различных собственных значений. При этом каждому λ_i соответствует свой собственный вектор α_i. Можно показать [3], что собственные векторы оператора $\mathbf{A}^T$ линейно независимы и, следовательно, интегрируемые комбинации $J_1, \dots, J_n$ линейно независимы.

Пусть собственному значению λ_i, $i = 1, \dots, n$ соответствует собственный вектор

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}$$

и интегрируемая комбинация

$$J_i = (\alpha_i, \mathbf{y}) = \alpha_{1i}y_1 + \alpha_{2i}y_2 + \dots + \alpha_{ni}y_n.$$

В этом случае возникает система n неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \dots + \alpha_{n1}y_n = C_1e^{\lambda_1 x}, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{n2}y_n = C_2e^{\lambda_2 x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n = C_ne^{\lambda_n x}. \end{cases} \tag{11}$$

Так как α_i — линейно независимые собственные векторы, то:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, система (11) однозначно разрешается относительно искомых функций $y_1, \dots, y_n$. Для системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений (1) или (2) алгебраическая система уравнений для интегрируемых комбинаций имеет вид:

$$J_i = C_ie^{\lambda_i x} + e^{\lambda_i x}\int(\alpha_i y)e^{-\lambda_i x}dx, \quad i = \overline{1, n}.$$

Собственные векторы α_i определяются для каждого собственного значения λ_i из решения однородной системы (10). Можно показать [3], что с точностью до постоянного сомножителя компоненты вектора α_i равны алгебраическим дополнениям к элементам какой-либо строки определителя системы (10).

Кратные вещественные корни.

При наличии кратных вещественных корней характеристического уравнения (10) получение интегрируемых комбинаций усложняется и требует дополнительных рассуждений.

Будем рассматривать лишь один корень λ кратности m, полагая, что для данного собственного значения существует собственный вектор α_0 и $m-1$ присоединенных векторов, порождаемых вектором α.

Напомним, [3] что присоединенным вектором α_k порядка k называется вектор, удовлетворяющий условиям

$$[\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}]^k\alpha_k \neq 0, \text{ но } [\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}]^{k+1}\alpha_k = 0.$$

Тогда векторы α, α_1,..., α_{m-1} определяются из соотношений:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{A}^T\alpha = \lambda\alpha_0, & & [\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}]\alpha_0 = 0, \\ \mathbf{A}^T\alpha_1 = \lambda\alpha_1 + \alpha_0, & & [\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}]\alpha_1 = \alpha_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{или} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}^T\alpha_{m-1} = \lambda\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}, & & [\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}^{m-1}]\alpha_{m-1} = \alpha_{m-2}. \end{array} \tag{11}$$

Вернемся теперь к однородному случаю (9). Интегрируемая комбинация, соответствующая собственному вектору α_0 имеет вид:

$$J_0 = C_0 e^{\lambda x}, \quad \text{где} \quad J_0 = \alpha_{01}y_1 + \ldots + \alpha_{0n}y_n, \qquad \alpha_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{01} \\ \ldots \\ \alpha_{0n} \end{bmatrix}.$$

Пусть теперь α_1 — присоединенный вектор первого порядка для собственного вектора α_0. Имеем:

$$\mathbf{A}^T\alpha_1 = \lambda\ \alpha_1 + \alpha_0.$$

Подставим это соотношение в уравнение-свертку:

$$(\alpha_1, \mathbf{y})' = (\mathbf{A}^T\alpha_1, \mathbf{y}) = (\lambda\alpha_1 + \alpha_0, \mathbf{y}) = \lambda(\alpha_1, \mathbf{y}) + (\alpha_0, \mathbf{y}). \tag{13}$$

Обозначим $(\alpha_1, \mathbf{y}) = J_1$, $(\alpha_0, \mathbf{y}) = J_0$. Тогда (13) примет вид

$$J_1' = \lambda J_1 + J_0 \quad \text{или} \quad J_1' = \lambda J_1 + C_0 e^{\lambda x}. \tag{13$'$}$$

Интегрируя (13$'$) получим решение для J_1:

$$J_1 = e^{\lambda x}(C_1 + C_0 x). \tag{14}$$

Аналогично формируются комбинации $J_2, \ldots, J_{m-1}$

$$J_k = e^{\lambda x}(C_k + C_{k-1}x + \frac{C_{k-2}x^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{C_0 x^k}{k!}), \quad k = \overline{2,\ m-1}.$$

Простые комплексные корни.

Рассмотрим случай, когда собственное значение оператора A^T — комплексное число вида $\lambda = \lambda' + i\lambda''$. Покажем сопряженность λ и $\overline{\lambda}$ и собственных векторов α и $\overline{\alpha}$. Пусть $\lambda = \lambda' + i\lambda''$, $\overline{\lambda} = \lambda' - i\lambda''$; $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\overline{\alpha} = \alpha' - i\alpha''$;

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1' + i\alpha_1'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n' + i\alpha_n'' \end{bmatrix}; \quad \overline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1' - i\alpha_1'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n' - i\alpha_n'' \end{bmatrix}.$$

Имеем: $A^T\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \overline{A^T\alpha} = \overline{\lambda\alpha} \Rightarrow \overline{A^T}\overline{\alpha} = \overline{\lambda}\overline{\alpha}$. Из вещественности A^T получаем $\overline{A^T} = A^T \quad \Rightarrow \quad A^T\overline{\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}$. Для комплексных собственных значений λ и $\overline{\lambda}$ возникают две интегрируемые комбинации.

$$J_1 = (\alpha, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k = e^{\lambda x};$$

$$J_2 = (\overline{\alpha}, y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k y_k = e^{\overline{\lambda} x}.$$

Далее получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k' y_i \quad + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k'' y_k = e^{\lambda' x}(\cos\lambda'' x + i \sin\lambda'' x),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k' y_i \quad - i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k'' y_k = e^{\lambda' x}(\cos\lambda'' x - i \sin\lambda'' x).$$

Разделим мнимые и действительные части:

$$\begin{array}{lcl} J_1' = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k' y_k = (\alpha' y) & & J_1' = e^{\lambda' x}\cos\lambda'' x \\ & \Rightarrow & \\ J_2' = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k'' y_k = (\alpha'' y) & & J_2' = e^{\lambda' x}\sin\lambda'' x. \end{array}$$

Итак, J_1 и J_2 заменяются на J_1' и J_2', исключая работу с комплексными числами. Далее штрих можно опустить: $J_1' = J_1$ и $J_2' = J_2$.

Рассмотрение случая кратных комплексных корней предоставим читателю.

Пример Решить однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 5y_1 - y_2 - 4y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -12y_1 + 5y_2 + 12y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 10y_1 - 3y_2 - 9y_3. \end{cases} \tag{$*$}$$

Согласно вышеизложенному, необходимо найти матрицу транспонированную к матрице коэффициентов, т.е. A^T.

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -12 & 10 \\ -1 & 5 & -3 \\ -4 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

Далее необходимо найти собственные значения и соответствующие им собственные векторы. Для этого составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -12 & 10 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ -4 & 12 & -9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет три корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_{2,3} = 1$. Тогда, в рассматриваемом случае, для первого корня возникает один собственный вектор, а для второго один собственный и один присоединенный вектор.

Пусть $\alpha_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \end{bmatrix}$ — собственный вектор линейного оператора A^T, тогда для его вычисления, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\alpha_{10} - 12\alpha_{20} + 10\alpha_{30} = 0, \\ -\alpha_{10} + 6\alpha_{20} - 3\alpha_{30} = 0, \\ -4\alpha_{10} + 12\alpha_{20} - 8\alpha_{30} = 0. \end{cases}$$

Применяя известные методы решения систем линейных уравнений, получим: $\alpha_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. Аналогично вычисляется собственный вектор $\beta_0 = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{bmatrix}$, соответствующий следующему корню: $\beta_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. Однако, данный корень является двукратным, следовательно в этом случае необходимо вычислить вектор присоединенный к β_0, т.е.

вектор $\beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \beta_{31} \end{bmatrix}$ Для этого, учитывая (12), необходимо решить неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\beta_{11} - 12\beta_{21} + 10\beta_{31} = -1, \\ -\beta_{11} + 4\beta_{21} \;\; - \;\; 3\beta_{31} = \frac{1}{2}, \\ -4\beta_{11} + 12\alpha_{21} - 10\beta_{31} = 1. \end{cases}$$

Используя методы решения неоднородных систем линейных уравнений, вычислим присоединенный вектор $\beta_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$. Далее, для нахождения решения системы дифференциальных уравнений (*), необходимо составить систему из трех линейных комбинаций:

$$\begin{cases} -y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3 = C_0e^x, \\ -\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{4}y_2 + y_3 = (C_1 + C_0x)e^x, \\ -y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = C_2e^{-x}. \end{cases}$$

Выполняя соответствующие преобразования, известные из курса линейной алгебры, получим решение:

$$\begin{cases} y_1 = -5C_0e^x + 3C_2e^{-x} + 2e^x(C_1 + C_0x), \\ y_2 = 6C_0e^x - 6C_2e^{-x}, \\ y_3 = -7C_0e^x + 2e^x(C_1 + C_0x) + 6C_2e^{-x}. \end{cases}$$

Обобщая все вышеизложенное, получим:

1. Интегрируемая комбинация есть скалярное произведение собственного или присоединенного вектора и вектора-решения линейной системы дифференциальных уравнений.

2. В случае простых (а значит и попарно различных) корней используются лишь собственные векторы (11).

3. При наличии кратных корней для получения всех комбинаций используются присоединенные векторы.

4. При наличии комплексных корней, для обеспечения вещественных решений, производится разделение общей комбинации на две — соответствующие действительной и мнимой частям уравнений.

Следует отметить, что в данной статье не рассматривается проблема решения системы линейных неоднородных уравнений (11), правая часть которых есть сами комбинации, а левая — некоторые функции, хотя формально формулы Крамера и дают решение (11). Также является специальной проблемой вычисление собственных значений, собственных и присоединенных векторов.

Список литературы

1. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, М.: Наука., 1971.
2. Краснов М.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Высшая школа, 1983.
3. Матвеев Н.М., Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям, СПб.: Издательство "Лань", 2002.
4. Тихонов А.Н. и др., Дифференциальные уравнения, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Гржибовская Екатерина Зориевна,
аспирантка кафедры высшей математики
Московского Государственного Открытого
Педагогического Университета им. М. А. Шолохова.
email: artlonga@mail.ru

Ивлев Валерий Васильевич,
доктор технических наук,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Открытого
Педагогического Университета им. М. А. Шолохова.

Коренная проблема втузовского учебника математики (суть проблемы, истоки, история, результаты)

И. П. Костенко

Данная статья представляет собой модернизированный вариант цикла из трех статей автора, опубликованных в журнале "Университетская книга", 1997, №№ 6,8,9. Сокращенный вариант опубликован журналом "Педагогика", 2005, №9, сс. 98-109.

Отыщи всему начало, и многое поймешь.

Козьма Прутков

Учебник и качество обучения

Проблема учебника — одна из самых важных проблем современного образования. Никакие реформы, никакие управленческие решения (даже если бы они имели подлинной целью благо) не улучшат образования, если нет хороших учебников.

Справедливость данного тезиса почти очевидна. Но необходимо, наверное, дополнительное обоснование, ибо образовательная политика на всех уровнях многие десятилетия проводится с его полным игнорированием. Управленцы увлекаются все новыми и новыми "передовыми" идеями — внедряют непрерывное образование, учебно-методические комплексы, ТСО, компьютеризацию, демократизацию, бакалавризацию и пр., и пр. Последнее их увлечение — болоньизация[1].

Между тем, качество образования (вузовского и школьного), начиная с реформ того и другого в 60-70-х годах, непрерывно и катастрофически падает, и превратилось сегодня в фикцию. Это утверждение мало кто будет оспаривать, кроме, наверное, авторов действующих учебников, некоторых академиков ("одно из лучших в мире"), экс-министра В. Филиппова и Президента [1, с. 10, 12, 41, 42, 117, 128]). Но, все же, приведу несколько подтверждающих фактов.

[1]Попытка преобразовать российскую систему образования в соответствии с европейскими стандартами, от так называемого "болонского проекта" — *прим. ред.*

Вот вывод Исследовательского Центра Гособразования СССР по проблемам управления качеством подготовки специалистов: “В последний период (80-е годы, после реформ, — *И.К.*) все больший размах приобретает снижение качества обучения на всех ступенях школы, распространяется функциональная неграмотность. В частности, среди поступающих и студентов-первокурсников ведущих вузов С.-Петербурга доля молодых людей, успешно справляющихся со стандартными заданиями по физике и математике, по сравнению с концом тридцатых (!) годов, сократилась в полтора-два раза, резко понизился уровень грамотности молодежи. ...Это уже сказалось на квалификации и культуре специалистов и ученых. Допущенные ими профессиональные ошибки стали одной из основных причин недавних промышленных и экологических катастроф” [2, с. 127].

Что это такое — “функциональная неграмотность”? Коротко, — неспособность многих современных “образованных” молодых людей понять точный смысл простых текстов — инструкций, информаций и т. п., а также неумение составить такие тексты. Симптом *обессмысливания образования.* Кажется, что это явление обусловлено сложными процессами. Но есть простое объяснение, вытекающее из характера современного образования, — в нем нет места практике смыслового чтения (и в школе, и в вузе), что, в свою очередь, объясняется отсутствием доступных, понятных учащимся учебников.

А вот более свежие факты. По данным международного тестирования 1995 г. российские школьники оказались на 52-м месте. Главный качественный вывод — неспособность наших детей мыслить [3, с. 6-11]. Не страшно ли это? Недавнее исследование ОЭСР 2001 г. констатирует: “большая часть подростков в России испытывает трудности с пониманием содержания текстов” [4, с. 11]. В своей практике я постоянно ощущаю, что студенты не воспринимают смысла слов, которые они слышат, и не могут сами составить имеющие смысл предложения. То ли это образование, которое мы “можем потерять” [1]?

В дискуссии “Учебник для вуза: каким ему быть?”, которую проводил в течение всего 1980 г. журнал “В мире книг”, приводились экспериментальные данные: “90,3% учащихся (московских школ, — *И.К.*) не имеют навыков смыслового чтения ..., 60% будущих учителей не смогли правильно составить развернутый план или тезисы ответа по сравнительно несложной проблеме..., 50% студентов пользуются только конспектами. ... Среди причин — “непривлекательность” учебников, неприученность студентов систематически работать с книгой. Это неумение, можно сказать, катастрофически сказывается на будущей работе специалистов” [5, с. 17].

Хороший учебник — фундамент хорошего преподавания (К. Д. Ушинский), — истина старая. Сегодня она имеет научное подтверждение. В 70-х годах в некоторых развивающихся странах был проведен международный эксперимент, который дал следующие результаты: 83% статистических показателей обнаружили положительное влияние учебника на успеваемость учащихся и только 54% — влияние качества подготовки учителей [6, с. 47]. А ведь учебник влияет не только на ученика, но и на учителя, во многом определяя характер его преподавания.

В высшей школе зависимость преподавания и качества знаний учащихся от учебника сильнее, чем в средней. Это связано с более сложным учебным материалом и более слабой педагогической подготовкой преподавателей, точнее, с ее отсутствием.

Суть проблемы

Проблема вузовского учебника возникла в 60-х годах в результате реформы преподавания точных наук. Руководящая идея этой реформы — “поднять теоретический уровень” преподавания. Были изменены программы, изъяты хорошие старые учебники и внедрены плохие новые. С тех пор проблема не имеет решения вот уже четыре десятилетия. Очевидно, первопричина — в реформе, в ее идее. Симптоматично, что вскоре аналогичная реформа была проведена в средней школе и дала те же результаты.

Осознаваться проблема стала в 70-х годах, когда проявился массовый результат обучения по новым программам и учебникам. В 1978 году в МГУ проведена первая Всесоюзная конференция “Проблемы вузовского учебника”, в мае 1994 года в Москве, в Академии печати состоялась четвертая конференция. Этим официально засвидетельствовано, что в течение трех десятилетий (а теперь уже в течение четырех!) проблема не теряет актуальности и не решается. Значит, что-то существенное в проблеме остается скрытым.

В опубликованных материалах четырех конференций можно найти массу разнообразных личных соображений. И вот что интересно, — сама проблема никем явно не формулируется, как будто, вытесняется в подсознание. В то время, как суть ее проста, — современные учебные книги *непонимаемы.* Это свойство имманентно нынешним учебникам и не зависит от способностей учащихся. Экспериментально установлено: “в среднем усваивается 0,1 материала учебника” [5, с. 17].

Непонимаемость учебных книг является главной причиной их нечитаемости. Это значит, что огромное количество учебной литературы, в лучшем случае, бесполезно, в худшем — вредно, ибо уродует мыслительные способности учащихся всей страны. И тогда понятно, почему существо проблемы вытесняется. Огромное количество труда и денег выбрасывалось и продолжает выбрасываться на ветер.

Заинтересованные люди скажут, — не все же учебники плохие. Издаваемые с 60-х годов новые учебники математики — **все**. Это не субъективное мнение, а объективно проверяемый факт. Его, как будто, признает и многодесятилетний руководитель математического образования инженеров, первый заместитель председателя Президиума НМС (Научно-методического Совета — *прим. ред.*), профессор Л. Д. Кудрявцев: “мы еще (?) не знаем, как надо наиболее экономно (?) и эффективно учить математике ... не знаем просто потому, что ... не написаны необходимые учебники (?)” [7, с. 42].

Последняя фраза авторитетно констатирует неэффективность обучения, — оно не достигает цели. Вместе с тем, создается впечатление, что это естественный, временный недостаток. Однако, не забудем, что неэффективность длится вот уже более сорока лет. Отметим и нелогичность фразы.

Как же решить проблему? Теоретическое решение должно ответить на вопросы: почему учебники непонимаемы? что надо менять? как это сделать? Практическое решение — реальный учебник, учебник *понимаемый,* принятый учеником, а не группой “экспертов”.

Решение проблемы невозможно без выяснения ее причины, без знания генезиса. Поэтому далее мы подробно проследим историю на примере втузовского учебника математики с 20-30-х годов, там — корни проблемы.

Конкретизация математикой необходима для глубокого анализа. Но выводы будут иметь гораздо более общий смысл. Они относятся не только к учебникам естественно-математического цикла, но и к гуманитарным, а также к школьным. Все современные учебные книги составляются под сильным влиянием научной Системы и с игнорированием Ученика, психологии его восприятия. Результат — наукообразие и непонимаемость учебников, отвращение к учебе учащихся.

Когда-то проблемы не было

К 30-м годам было выработано, по крайней мере, два прекрасных втузовских курса математики — ленинградцем Г. М. Фихтенгольцем и москвичом Н. Н. Лузиным.

Г. М. Фихтенгольц (1888-1952) — крупный математик, основатель ленинградской школы анализа, всю жизнь посвятил преподаванию. Его учебник "Математика для инженеров" (1-е издание в 1931 г.) — больше, чем учебник, это энциклопедия из трех томов прикладных математических знаний своего времени. Решена грандиозная педагогическая задача — создан цельный курс для студента и для инженера с органической прикладной направленностью и массой инженерных задач, доведенных до числа. В предисловии определены педагогические принципы: "для того, чтобы сделать из математики действительно полезное орудие в руках инженера, автору казалось необходимым и самое изложение ее основ увязать с приложениями и, так сказать, сразу показать математику в действии ... все эти приложения группируются вокруг отчетливого математического костяка, без чего усвоение математических понятий было бы затруднено" [8, с. 5].

Автор второго учебника "Курс дифференциального и интегрального исчислений" (1-е издание в 1934 г.) — великий Николай Лузин (1883-1950), человек уникального философско-математического склада ума, обладавший магическим даром педагога. В 1921 году Н. Н. Лузин ввел в высшую школу учебник американского педагога В. Э. Грэнвиля (1863-1943), ежегодно редактировал его и совершенствовал. В конце концов, написал свой учебник, но, по редкой деликатности, оставил на титуле имя Грэнвиля. В этом проявилось глубокое понимание необходимой органической преемственности.

"Эта книга, как и все, написанное Н. Н. Лузиным, отличалась необыкновенной живостью и ясностью изложения, красочностью языка; автор не только доказывает, но и в живой, образной форме разъясняет (!) содержание курса" [9, с. 481]. Сравните с современным примитивом: "Лучший (?) способ объяснить теорему — это доказать теорему" [10, с. 7].

Учебник Н. Н. Лузина отличался от учебника Г. М. Фихтенгольца, в частности, в плане приложений. Но главный педагогический принцип был тот же. Вот что сказано в предисловии к пятому изданию: "Благоприятное отношение учащихся нашей страны к этому учебнику (имеется в виду учебник Грэнвиля — *И.К.*) — о чем свидетельствует самое число (пятнадцать) его изданий — побуждает нас сохранить основную его установку, ориентирующуюся целиком на понимании (!) учащимся и читателем излагаемого материала" [11, ч. 1, с. 3].

Итак, непреложной целью лучших авторов 20-30-х годов, целью традиционной для русской педагогики, было *понимание* изложения читателем. И цель эта достигалась, — учащиеся принимали учебник.

В предисловии к изданию 1937 г. Н. Н. Лузин пишет: "Ввиду наблюдаемого в настоящее время повышения уровня подготовки учащихся, в настоящем издании отпала необходимость в большом количестве элементарных задач" [11, ч. 2, с. 6]. Как чутко он реагирует на запросы учащихся! Сегодня этот ориентир утрачен.

Обратим внимание на удивительный для нас факт. Оказывается были времена, когда уровень знаний учащихся повышался. Значит, это возможно! В педагогической печати 30-х годов, в частности в журнале "Высшая школа", можно найти немало объективных свидетельств этому. Тем самым, доказывается высокая эффективность учебников того времени. Надо иметь в виду, что и в среднюю школу в это время вернулись прекрасные учебники учителя Воронежского реального училища А. П. Киселева.

Сделаем вывод — главным педагогическим принципом наших классиков был *принцип понимаемости.* Поэтому в 30-50-х годах, когда действовали их учебники, проблемы не существовало.

Полезно было бы раскрыть этот принцип и выяснить, какими приемами достигалась понятность изложения. Это тема другого исследования. Здесь лишь отметим, что большую долю старых учебников составляли неформальные, образные разъяснения. В современных учебниках эта педагогическая составляющая исчезла, она объявлена "не научной". Традиция понятного изложения разрушена. Богатейший опыт отечественной методики забыт.

Второй фундаментальный принцип — *принцип научности.* Излагаемые в учебнике понятия, факты, их объяснения должны соответствовать современному состоянию знания, должны вызывать "в уме своего читателя совершенно правильные в современном смысле понятия и образы (!)" [12, с.VII]. Обратите внимание, как изумительно трактует Н. Н Лузин этот принцип. Он акцентирует не адекватность учебного текста и науки, а адекватность науки и тех "образов" (!), которые возникают в уме учащегося. Он органически объединяет оба принципа, — один без другого не должен реализовываться в обучении.

В соединении понимаемости и научности заключается главная трудность составления учебника. Вот почему так мало хороших учебников — "элементарные руководства наук ... требуют высших (!) способностей" (из отчета Академии наук России за 1853 г.).

Корни проблемы

Поразительно, но еще в 20-х годах Н. Н. Лузин разглядел тенденцию искажения указанных принципов, катастрофический результат которой проявился в 60-х годах. Он заметил, что учебник для высших технических школ "имитирует (!) университетский курс анализа", подвергнутый "осторожному процессу сокращения ... вследствие чего в учебник проскальзывают многие весьма затруднительные для учащихся рассуждения ... хотя ... они ... всегда могут быть заменены другими, более интуитивными и столь же (!) научными" [12, с. V-VI].

Тенденция эта была обусловлена объективной причиной — возникшим в начале XX века рассогласованием между абстрактной формой, которую принимали математические знания, и формой их преподавания. Математика пришла к аксиоматически-дедуктивной организации своего содержания. Многие дисциплины приобрели почти совершенную логическую обоснованность и упорядоченность. Это не могло не влиять на преподавание.

Академик А. Н. Крылов, знаменитый кораблестроитель, математик и педагог бил тревогу: "В преподавании математики начинает выступать на первый план чисто логическое умозрение в ущерб наглядности и прикладной стороне дела ... такой характер преподавания ... в технических школах ... противоестественен, ибо он не соответствует ни склонностям и направлению ума слушателей, ни цели учебного заведения" [13, вып. 16, с. 35].

Возражал А. Н. Крылов против схоластической идеи повышения строгости изложения математики. "Для инженера ... такая всеобъемлющая строгость является бесцельной. На инженера эти строгие, лишенные наглядности доказательства и рассуждения наводят тоску и уныние, он видит в них топтание на месте, жевание жвачки, стремление доказать очевидное, что давно им понято и что ему до доказательства кажется более ясным и понятным, нежели после доказательства" [14, с. 9].

Тем не менее, среди части математиков непреодолимо росло желание "поднять теоретический уровень преподавания". Зачем? Какие будут последствия? Над этими вопросами они глубоко не задумывались. Ими, видимо, управляло желание, связанное с профессиональным самоудовлетворением. Это были молодые честолюбивые специалисты, в основном, сотрудники Математического института АН и Института математики МГУ. Характерная их особенность — малый педагогический опыт и даже отсутствие его.

В начале 30-х годов в Москве шли бурные дискуссии. Профессор М. Я. Выгодский, автор оригинального вузовского учебника, премированного Наркомпросом в 1932 году, и автор действующих по сию пору справочников, а в сущности, кратких учебников по элементарной и высшей математике, разъяснял специалистам их педагогическую ошибку: "Понятно стремление преподавателя, вводя студента в математику, поднять его на возможно более высокую ступень теоретического развития науки. Однако, такое изложение, перепрыгивая через целый этап развития научной мысли, затрудняет для учащегося процесс выкристаллизовывания теории из практики (генетический закон педагогики — *И.К.*), а следовательно, делает более трудным и приложение теории к практике" [13, вып. 1, с. 57].

Не странно ли, что столь ясный довод не воспринимался математиками-специалистами? Мешал высокий профессионализм и ограниченность специального мышления. Ограниченность эта может быть ослаблена длительным педагогическим опытом, которого не было у молодых энтузиастов.

Обратите внимание, — инженеры и педагоги против, а математики-специалисты — за. А. Н. Крылов говорит, что инженерам такое преподавание не нужно и противно. М. Я. Выгодский объясняет, почему оно ведет к непонимаемости. Но энтузиасты не слышат. Это не очень удивительно. Удивительно и не совсем понятно другое. Сегодня, когда жизнь подтвердила правоту их оппонентов, наследники энтузиастов 30-х годов по-прежнему глухо и слепо продолжают их дело. И возникает вопрос, — только ли в профессиональной глухоте причина?

Вирус ВТУ

Давайте попытаемся определить, в чем же состоит принцип “высокого теоретического уровня” (ВТУ) обучения. Характерно, что никем из ВТУ-идеологов он никогда внятно не излагался и “строго” не обосновывался. Но это нисколько не затрудняло реализацию его в учебниках, которая, в конечном счете, сводилась к копированию университетского курса (Лузин).

Основные черты нового “дидактического” принципа, пожалуй, следующие:

1. Дедуктивно-аксиоматическая последовательность изложения — “от абстрактного к конкретному”. Тем самым, ставится с ног на голову один из краеугольных законов познания и педагогики.

2. Повышение абстрактности — введение самых “современных”, самых обобщенных понятий и методов без раскрытия путей, ведущих к ним. Нарушается другой закон педагогики — генетический, на что указывал М. Я. Выгодский.

3. Повышение формальной строгости определений и доказательств. Это противоречит инженерному мышлению (А. Н. Крылов), а главное, — ведет к противоречиям с интуицией учащегося, к обессмысливанию изложения (разъясним это чуть позже).

4. Логическая перегруженность (“я **все** (?) доказываю”) или, как изящно выражаются адепты, “логическая завершенность” изложения. Эта “логическая полнота” отдаляет учащегося от смыслов, тормозит его содержательное мышление и ведет к формализму знаний. Другое следствие — резко возрастает объем учебника.

В предисловиях можно найти фразы типа: “идейное обогащение” курса, изгнание “рецептуры” и т. п. Они рассчитаны на впечатление.

Воздействие на подсознание — характерный прием модернизаторов, и в этом мы неоднократно убедимся в дальнейшем. Так например, фраза – “логическая завершенность” — тонко и ненавязчиво провоцирует возникновение у читателя ощущения, что старые курсы — суть “незавершенные”, дефективные, их прямо-таки необходимо “завершить”, улучшить.

Строгость против интуиции

Специального обсуждения требует третье свойство ВТУ-вируса, ибо может возникнуть впечатление, что отвергая принцип ВТУ, мы отвергаем и математическую строгость в обучении.

Точность формулировок и логичность доказательств, конечно, не отделимы от математики. Это метод математики. Это научный метод в чистом виде. Но закавыка в том, что абсолютной строгости нет! Ни окончательно точных определений, ни безупречно логичных выводов достичь невозможно. Последнее утверждение является сегодня научно установленной истиной.

Отсюда следует, что проблема преподавания математики состоит в определении **меры** строгости. Мера эта зависит от педагогических соображений. И она разная для разных условий обучения, — различны цели обучения математике для разных специальностей, различны учебное время, подготовка и способности учащихся. Следовательно, надо иметь учебники с разным теоретическим уровнем изложения, что не отрицает принципа научности, ибо на любом уровне можно излагать материал без ошибок и вульгаризации, адекватно современным научным представлениям. На любом уровне изложения математики должны присутствовать и строгие определения, и логичные рассуждения. Мера строгости состоит в количестве таких рассуждений и в их исходной интуитивной базе. Критерием правильного выбора меры строгости, а вместе с тем и меры обобщенности, теоретичности изложения, является педагогическая практика, а именно, понимаемость учебника учащимися, его принятие Учеником.

Поясню сказанное простым примером. Основным в теории вероятностей является понятие "события". Научный смысл его близок к житейскому. Вот как вводилось оно в не современном учебнике: "Под "событием" в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти" [15, с. 23]. Понятно? Да. Строго? Нет. Нужно ли во втузовском учебнике повышать строгость и давать математическое определение этого понятия? Принцип ВТУ требует, — нужно. И вот к чему это ведет.

Один из самых "современных" учебников по теории вероятностей для втузов начинается так: "Произвольное множество Ω назовем пространством элементарных событий" и далее — "событием будем называть любое подмножество множества Ω" [16, с. 11, 14]. Оцените здравым смыслом: событие — это множество точек (!?). Мотивировка— "для избежания неясностей" (?!) [там же, с. 11]. Нетрудно представить, какие мысли и чувства возникают у студента, которого заставляют учиться по такому учебнику. Возникает отвращение к предмету и к учебе. Что мы и видим. Учебник этот — единственный, рекомендованный студенту последней программой. Автор – многолетний член НМС.

Пример иллюстрирует, насколько противоестественна для нормального человеческого мышления "строгая" формализация. Она удаляет мысль от реальности и, тем самым, затрудняет приложения математики. Более того, она искажает (!) реальность. Здесь — причина непонимаемости современных учебников. Но ВТУ-авторы этого не замечают. Потому что для них такой язык и такое мышление привычно. Профессиональная жесткость мышления не позволяет им понять учащегося, представить себе точку зрения читателя, стать педагогом.

Принцип ВТУ ведет к нарушению меры строгости изложения. Унифицирует один, "высший", университетский уровень для всех. Вместе с тем, он игнорирует и выхолащивает интуитивное содержание учебного предмета — основу его понимаемости. Он принципиально не совместим с интуитивными разъяснениями, которые всегда не строги и логически уязвимы.

О решающей роли интуиции в науке и обучении знали классики. Великий А. Пуанкаре (1854-1912) — духовный брат нашего Н. Лузина по глубине проникновения в суть проблем и предвидению их развития — специально размышлял над этим вопросом. В очерке "Интуиция и логика в математике" он писал: "Сделавшись строгой, математическая наука получает искусственный (!) характер, который поражает всех ... Это указывает нам на то, что недостаточно одной логики ... Я уже имел случай указать на то место, какое должна иметь интуиция в преподавании математических наук. Без нее молодые умы не могли бы проникнуться пониманием (!) математики; они не научились бы любить ее и увидели бы в ней лишь пустое словопрение (не правда ли, — то, что мы сегодня имеем, — *И.К.*), без нее они никогда не сделались бы способными применять ее” [17, с. 165].

Н. Лузин идет еще глубже и предупреждает авторов учебников, что многие, так называемые “строгие” рассуждения “в смысле строгости немного стоят и всегда могут быть заменены другими, более интуитивными и **столь же научными**” [12, с. VI-VII] (выделение мое, — *И.К.*). Подчеркнем, — интуитивные рассуждения не просто добавляются к строгим, они часто их заменяют в педагогическом курсе. Это необходимо, как для понимания курса учащимися, так и для истинной, неформальной научности его. И учебники Лузина учат нас, как органически сочетать строгость и интуицию, научность и понимаемость.

ВТУ-идеологи соглашаются на словах, что “необходимо уделять достаточно большое внимание разъяснению понятий, в том числе и на интуитивном уровне” [7, с. 76]. На деле же, в их учебниках интуицией и не пахнет. На словах они декларируют: “Преподавание математики должно ... базироваться на уровне разумной строгости” [там же, с. 67]. На деле, ведут свое изложение “на уровне строгости, принятом в настоящее время в классической математике” [16, с. 10]. Как объяснить явное противоречие в высказываниях “строгого” математика? Оно доказывает, что после выхода за пределы математики-науки мышление специалиста становится не зависящим от логики.

С философской точки зрения деятельность адептов принципа ВТУ состоит в подмене Сущности Формой и, следовательно, идет против Природы. И Природа в лице Ученика протестует против насилия, против своего извращения.

Протестуют и инженеры, подтверждая сегодня, “в эпоху ЭВМ” аргументы академика А. Н. Крылова и даже усиливая их: “технические специалисты ... постоянно подвергают учебный курс анализа самой жесткой критике за то, что он перегружен “чистой математикой”, методами и рассуждениями, которые не используются в прикладных дисциплинах ... К этой критике дружно присоединяются математики-прикладники, основной инструмент которых — ЭВМ. Вы стараетесь строго изложить эти свои рассуждения ..., а они для нас непригодны ... Подобная практика идет еще дальше и указывает на тот факт, что при всех стараниях преподавателей студенты все равно плохо усваивают $\varepsilon - \delta$ - понятия и рассуждения. ... В дальнейшем, в инженерной практике, от этих понятий попросту отказываются. ... Это явление настолько систематическое и давнее, что не может быть объяснено обстоятельствами случайного или временного характера” [13, вып. 17, с. 139-140].

И ведь не слышат, никаких аргументов не слышат “чистые” математики, контролирующие математическое образование инженеров.

Суть — обессмысливание

В чем же суть нового “принципа дидактики”? Попытайтесь найти слова, кратко выражающие эту суть, — не получится. Так бывает, когда положительной сути просто нет. Можно перечислять фразы, которые говорят сторонники этого принципа, обозначать внешние особенности их курсов и, задумавшись, прийти в итоге к определению Н. Н. Лузина — *имитация* университетского курса [12, с. VI].

Сравните теперь, как легко выразить суть принципов понимаемости и научности. Изложение должно быть понятным, содержание — истинным. Можно ли это оспорить?

Суть, конечно, есть и у нового принципа, только она отрицательная — изложение должно быть *бессмысленным.* Вот какая суть скрывается под невнятным словосочетанием "высокий теоретический уровень". Здесь — рыночный прием подмены качества товара его словесным обозначением. На гипноз слов поддаются дилетанты, специалисты и управленцы.

Новый "дидактический" принцип следовало бы назвать наукообразием или формализмом, абстракционизмом, модернизмом. Оставим историческое название и условимся кратко обозначать его — *принцип ВТУ*. Мы выяснили его истоки и поддерживающие его силы специалистов-*непедагогов*. Поняли, что он органически несовместим с принципами понимаемости и научности. Несовместим он и с принципом прикладной направленности математического образования инженера. Внедрение этого вируса в образование неизбежно должно было привести к его разрушению. Проследим этот процесс далее.

30-е годы — зародыш реформы

Итак, в 30-е годы идея высокого теоретического уровня (ВТУ) обучения заявила о себе, прибрела сторонников и сделала первые практические шаги. ВТУ-идеологи требовали "внесения большей систематичности и идейности в преподавание" (Л. А. Люстерник) [18, с. 82] и ставили целью провести реформу преподавания точных наук в средней и высшей школе.

В 1939 г. вышел первый учебник, практически реализовавший принцип ВТУ, — "Курс математического анализа для втузов". Автор А. Ф. Бермант (1904-1959) — сотрудник Математического института АН. Пробный вариант появился в 1936 г., 2-я часть — в 1941 г. Обратим внимание на молодость автора и, по-видимому, полное отсутствие педагогического опыта, что видно из биографической справки [19, 1959, с. 117-121]. В педагогическом багаже, впрочем, стоял "Графический справочник (атлас кривых)".

В предисловиях авторы обычно разъясняют свои педагогические цели (вспомните содержательные предисловия Н. Н. Лузина и Г. М. Фихтенгольца). Читая предисловие А. Ф. Берманта, трудно выделить суть, — она расплывается. Такими будут предисловия и последующих ВТУ-авторов. И это закономерно, ибо положительных педагогических идей у них нет.

Отчетливо просматривается в предисловии Берманта только одна цель — принизить классиков (метод всех модернистов в любой области). Имея в виду, прежде всего, стабильный учебник Лузина, он пишет: "основные положения преподносятся на невысоком теоретическом уровне ... традиционный шаблон в последовательности изложения ... не отвечает ... возросшим потребностям в действительной математической подготовке инженеров" [20, с. 3-4].

Обратите внимание на бессмыслицу — "последовательность изложения не отвечает потребностям" (?). Запомните также риторическую фигуру — "не отвечает возросшим потребностям". Вероятно, это первый случай применения политической формулы к педагогике.

Журнал "Успехи математических наук", одним из редакторов которого был автор нового учебника, сразу же поместил хвалебную рецензию. Написал ее другой молодой ВТУ-идеолог, член-корр. АН Л. Г. Шнирельман: “я считаю курс анализа А. Ф. Берманта прекрасным, лучшим из мне известных” [19, 1939, вып. VI, с. 288].

Мы не будем сравнивать по содержанию и педагогическим качествам новый учебник со старым, в этом нет необходимости. Отметим только факт: две части курса Лузина помещались на 686 страницах (издание 1937 г.), а две части курса Берманта — на 1007 (издание 1950 г.). Объем увеличился почти в полтора раза, а более точно, с учетом знаковой наполняемости страниц, — в 1,7 раза.

В дальнейшем учебник Берманта многократно переиздавался, вплоть до 1973 года, и “совершенствовался” — в 1950 году. Но даже его единомышленники (редактор Л. Я. Цлаф) вынуждены были признать в 1971 году, что “полнота изложения доставляла студентам втузов немало затруднений” [13, вып. 1, с. 107]. То есть ВТУ-учебник отторгался учащимися, и именно по причине “логической завершенности”.

В 30-е годы начали активно критиковаться учебники, особенно агрессивно — школьные (Л. Г. Шнирельман) [18, с. 63], а также издательская и управленческая политика. Критика шла из тех же узкоспециализированных кругов Правления Московского математического общества и Группы математики АН СССР [там же, с. 79-81; 20, 1937, с. 60].

Критика эта захлебнулась. В то время еще сильны были традиции дореволюционной русской школы, немало было хранителей традиций и педагогической культуры. В комиссию АН СССР по высшей технической школе входил А. Н. Крылов [18, с. 69], — может быть, поэтому критика втузовских учебников математики была очень сдержанной.

Для глубокого понимания ситуации надо знать, что в год выхода первого варианта учебника Берманта шла политическая травля Н. Н. Лузина. В этой компании, очень хорошо скоординированной, принимали самое активное участие ВТУ-идеологи — А. Н. Шнирельман, А. Ф. Бермант, П. С. Александров, С. Л. Соболев, А. Н. Колмогоров. А. О. Гельфонд, Л. А. Люстерник, А. Я. Хинчин, Б. И. Сегал и др., многие из которых были учениками Н. Н. Лузина. Феномен Иуды вечен, как вечен императив: “Уничтожь лучшего!”.

Для нашего исследования интересен в “деле Лузина” следующий факт — возникновение темы учебника. Журнал “Успехи математических наук”, в редакции которого были ученики Лузина — Колмогоров и Люстерник, открыл номер редакционной статьей “Изжить лузинщину в научной среде”. В ней, среди прочего вздора, ставились в вину Лузину “двусмысленные рецензии на плохие книги ... это объективно направлено против политики партии и правительства ... Если, например, выходит, утверждается и переиздается скверный учебник, то за него должны отвечать, наряду с авторами, также рецензенты ...” [19, 1937, вып. 3, с. 4]. Редактировали номер Ф. Р. Гантмахер и Д. А. Райков.

Можно предположить, что одной из тайных целей ВТУ-математиков в “деле Лузина” было уничтожение его учебника. В случае успеха “дела” этот учебник, который имел гриф стабильного, изгонялся бы из высшей школы автоматически. И, конечно, заменялся бы “лучшим из мне известных” учебником Берманта. И принцип ВТУ начал бы победное разрушительное шествие в высшей школе уже в 30-х годах. Процесс этот был задержан почти на 25 лет.

Подчеркнем очень существенное для нашей темы обстоятельство, — травившие Лузина математики (в то время молодые) в дальнейшем, в 60-70-х годах, приняли активное участие в подготовке и проведении ВТУ-реформы советского математического образования, результатом которой стала деградация его качества. Об этом немного дальше.

30-50-е годы — преемственность и стабильность

Втузовское образование развивалось до конца 50-х годов естественно и эволюционно. В стабильную программу регулярно вносились необходимые небольшие изменения, которые обеспечивались в учебниках дополнительными главами. Издавались проверенные временем старые учебники А. К. Власова, В. И. Смирнова, которые сохраняли традицию педагогической культуры и гуманистическую направленность отечественной школы. Н. Н. Лузин тактично изменял свой учебник, учитывая меняющиеся потребности учащихся и инженеров. Всего с 1930 г. вышло двадцать изданий его учебника, последнее — в 1961 г. Поучительно сравнить первые и последние издания — наглядно видно, как зрел и развивался вместе с жизнью этот уникальный учебник, не теряя ничего ценного и непрерывно обогащаясь новым.

Развитие образования направлялось сознательной целенаправленной политикой, основанной на опыте старой русской школы. В этом можно убедиться, познакомившись хотя бы с докладом Председателя Всесоюзного комитета по делам высшей школы при СНК СССР И. И. Межлаука "Уроки первого полугодия в высшей школе", посвященным анализу работы ленинградских вузов в 1936 г. [18, с. 10-21]. Одна из главных целей — стимуляция самостоятельной работы, для этого "существенной предпосылкой ... является наличие в руках студентов необходимых учебников и учебных пособий" [там же, с. 14]. Правильно понимались и способы достижения цели: "именно таким образом — путем проверки и улучшений из года в год (!) — создавалось и, как известно, продолжает создаваться множество хороших учебников в высшей школе" [там же, с. 14].

Такая же твердая политика, ориентированная на проверенные временем ценности отечественной школы, проводилась Наркомпросом. Политика эта давала очевидные плоды. Результатом цельной государственной политики в образовании, ее венцом и символом стал запуск спутника в 1957 г. и полет Ю. А. Гагарина в 1961 г. Недаром американский адмирал Риковер заявил: "Советский Союз страшен нам не столько своей военной мощью — он угрожает нам своей системой образования" [22, с. 3].

Приведем еще один поражающий факт: "наукометрический анализ научных открытий СССР за последние сорок лет показывает, что 34% всего фонда научных открытий было сделано в 50-е, 46% — в 60-е, 18% — в 70-е и только 2% — в 80-е годы" [23, с.4].

Что же произошло? Что вызвало такой обвал в 70-х и, особенно, в 80-х годах? Ответ надо искать в процессах, происходивших в системе образования в предшествовавшие годы.

Подготовка реформы

После неудачи 30-х годов реформаторы перешли к длительной планомерной работе по внедрению идеи ВТУ в сознание педагогической общественности и подготовке механизмов изменения образовательной политики. Работа эта в 40-50-х годах концентрировалась на средней школе. Эту важнейшую линию, параллельную нашей, мы здесь оставляем “за кадром”.

К середине 50-х годов общественная атмосфера стала меняться — возникала подходящая обстановка для реформ. А. Ф. Бермант, который перешел на педагогическую работу, организовал в 1954 г. объединенный научно-методический семинар кафедр высшей математики московских вузов. Явные и неявные цели, силы и политику этого социального инструмента, созданного для подготовки реформ, приоткрывают интересные обзоры [21, 1957, с. 183-186, 195-209]. Одно из главных направлений его работы — критика программ и учебников, вузовских (Лузина) и школьных. Результат — “Методическое управление Министерства высшего образования согласилось с наличием недостатков в действующих программах и поручило семинару подготовить проект программы” [там же, с. 184].

Следующий шаг — Всесоюзное совещание заведующих кафедрами высшей математики втузов, проведенное в Москве в 1959 г. Идея созыва совещания “возникла и развилась” в процессе работы семинара А. Ф. Берманта [там же, с. 215], который и возглавил Организационный комитет по подготовке и проведению совещания. Его “доклад был положен в основу проекта общей резолюции” [там же, с. 216]. “Проекты резолюций были заранее (!) подготовлены Оргкомитетом” [там же, с. 218].

Общая резолюция начиналась знакомой нам фразой: “уровень преподавания математики во втузах не соответствует ... возросшим требованиям” [19, 1959, с. 242]. Главная методическая установка резолюции: “Последовательность изучения различных разделов программы должна быть такой, чтобы курс математики являлся систематическим и логически цельным” [там же, с. 252]. Узнаете? Принцип ВТУ! Наконец, он получает “одобрение общественности” — метод, корни которого уходят в 30-е годы, — и приобретает силу для внедрения.

Фраза “высокий научный уровень” искусственно приклеивалась в разных местах резолюций. Пример: “Основная задача курса математики во втузе состоит в том, чтобы научить будущего инженера пользоваться математическим аппаратом и эффективными методами математики на достаточно высоком научном уровне” (там же, с. 258). “Научная” добавка превратила верный тезис в бессмыслицу, воздействующую, тем не менее, на подсознание читателя.

О резком сопротивлении навязываемым решениям можно догадываться по некоторым фразам из тенденциозного отчета о совещании И. Н. Бронштейна: “были и очень спорные (?) высказывания ... вспыхивала острая полемика ... большие разногласия ... обсуждение многих пунктов снова переходило в продолжение дискуссий” [21, 1960, с. 216-218].

Согласованность действий по внедрению принципа ВТУ в высшую и среднюю школу проявилась в том, что руководители совещания, подготавливая школьную реформу-70, поставили вопрос о расширении программы средней школы — о введении элементов высшей математики. Этот “вопрос ... вызвал большие разногласия ... Но ... непрогрессивная (?) точка зрения не получила поддержки на совещании” [там же, с. 218].

Сегодня мы видим результаты внедрения “прогрессивной” точки зрения — школьники не усваивают ни “элементов” высшей математики, ни элементов элементарной математики. Преподаватели МГУ пишут в открытом письме Министру: "сегодня почти каждый второй абитуриент Московского (!) университета не в состоянии решить несложное алгебраическое неравенство ... Почти две трети абитуриентов не могут решить планиметрическую задачу ... школьник уже не сможет стать полноценным студентом ... заведомо следовало бы исключить из программы темы ... относящиеся к высшей математике ... Изучение этих тем часто происходит формально, и они остаются не понятыми школьником" [24, с. 2-3].

Важнейшее стратегическое следствие изменения программы — уничтожение старых учебников. Разумно было бы, оставив испытанные учебники для инвариантной части программы, написать дополнения, что, как мы знаем, делалось раньше. Но цель-то была теперь другая — внедрить принцип ВТУ. А старые учебники были главным препятствием. И они были-таки уничтожены в 60-х годах, как в высшей школе, так и в средней. Физически уничтожены. В библиотеках вузов и школ их теперь не найти! Преподаватели сегодня не знают, что такое хороший учебник.

Вопрос "Об учебной литературе" был специально поставлен перед Всесоюзным совещанием. Л. Я. Цлаф, редактор книг А. Ф. Берманта, заявил, что учебник Н. Н. Лузина содержит "много дефектов" [25, с. 189]. Некто Е. Б. Ваховский возмущался: "Особое место среди имеющихся учебников занимает учебник Н. Н. Лузина. Некоторое время назад покойным В. П. Минорским, Л. Я. Цлафом и мною была написана отрицательная рецензия на учебник Лузина. И хотя уже было принято решение (кем? — *И.К.*) об изъятии этого учебника их списков рекомендуемой литературы, он все же был еще раз переиздан со всеми отмеченными недостатками" [там же, с. 239]. Никто больше не сказал плохого слова в адрес Лузина. Его учебник выходил в 1960 и 1961 годах, как учебное пособие. В 1961 г. вышел в свет последний раз.

Отметим две малозаметные детали резолюций. Рекомендовалось "создание в составе МВО компетентного научно-методического органа, координирующего деятельность кафедр ..." [19, 1959, с. 243]. (О какой координации речь? Покажет время. Мы вспомним об этом чуть позже.) Второе: "Просить программно-методическую комиссию включить в список рекомендованных учебников и учебных пособий учебник по высшей математике Пискунова Н. С." [там же, с. 245]. Что это за новый ценный автор?

Н. С. Пискунов — в 30-е годы сотрудник Математического института АН, работавший там вместе с А. Ф. Бермантом и другими ВТУ-идеологами — Л. Г. Шнирельманом, С. Л. Соболевым, Л. А. Люстерником [26, с. 33], тесно сотрудничавший с главным идеологом ВТУ-реформы средней школы А. Н. Колмогоровым.

60-70-е годы: реформа, результаты

Учебник Н. С. Пискунова "Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов" вышел за два года до совещания — в 1957 г. Он не прошел практическую проверку, преподаватели его, в сущности, не знали. Принципиально он ничем не отличался от учебника А. Ф. Берманта, разве лишь большей педагогической небрежностью. Но он стал мощно внедряться в массовое преподавание. Тираж с 1963 г. резко возрос, сравнительно с прошлыми тиражами Берманта, — с 25-50 тыс. до 200-300 тыс. экземпляров — и каждые год-два переиздавался. Большими тиражами переиздавался в 60-х годах и учебник А. Ф. Берманта, дополненный и переработанный под новую программу И. Г.

Арамановичем. Кстати, этот факт — свидетельство безличности ВТУ-учебников, их авторы взаимозаменяемы и взаимодополняемы. Попробовали бы они "дополнить" Н. Н. Лузина!

Как видите, механизм реализации реформы в высшей школе был гениально прост. Втузовские библиотеки быстро набились двумя учебниками и принцип ВТУ повел массовое наступление.

Результат проявился очень быстро. Уже к концу 60-х годов математика стала самым неприятным предметом для студентов и деканов. Возникло мнение, что математика не нужна в профессиональной деятельности инженера. И оно небезосновательно, — ВТУ-математика, действительно, не нужна инженеру. Это оправдывало негативное отношение многих студентов, а также спецкафедр к изучению математики. Преподаватели обвиняли студентов в нерадивости. Деканаты давили на преподавателей, заставляя ставить фиктивные оценки. Уничтожалась профессиональная этика педагога, а с ней и профессиональное отношение к делу. Насаждался формализм во всем. Немногие пытались бороться, большинство приняло реальность. Математическое образование превратилось в фикцию.

Вот как легко разрушить систему, внедрив в нее чужеродный вирус. После этого автоматически идет ее саморазрушение.

Высказанная оценка — свидетельство очевидца. А вот официальное заключение 1985 г.: "Проверка подготовки экономистов, проведенная Минвузом СССР, показала, что многие студенты накануне выпуска не владеют азами высшей математики ..." [13, вып. 17, с. 27]. Студенты со временем превращаются в специалистов. Безграмотность специалистов была экспериментально подтверждена Минвузом при попытке осуществить в середине 70-х годов программу непрерывной математической подготовки. Выяснилось "недостаточное математическое образование преподавателей специальных, особенно технологических кафедр. Анализ использования математики в специальных курсах показал, что иногда приложения математики излагаются совершенно неудовлетворительно, чисто формально, с ошибками, **без понимания сути дела** (замечательная констатация! Вспомните, — ведь это суть принципа ВТУ, это цель реформы; цель достигнута! — *И.К.* Разрядка моя) ... В 1977 г. Минвузом СССР принято решение о необходимости повышения математической квалификации преподавателей спецкафедр по всей стране" [13, вып. 11, с. 61-62]. Ну и что? Повысили? Управленцы всегда лечат симптомы, а не причину.

Неблагополучие с преподаванием математики активно обсуждалось в 70-х годах на страницах "Сборника научно-методических статей по математике", издаваемого министерским НМС. Констатировался провал курса на "повышение уровня": студенты учатся плохо (Н. И. Вайсфельд), знания формальны, непрочны (Г. Л. Гараков). Вскрывались причины: дедуктивное, логически последовательное и строгое изложение математики делает невозможным ее приложение (А. Д. Мышкис, Е. С. Вентцель). "Современная математика, действительно, развивается в духе господства аксиоматического метода. Но, с точки зрения педагогической, такого рода тенденции являются бедствием ... господство абстракции препятствует усвоению математики, ее применению ..." (Ф. Д. Гахов) [13, вып. 4, с. 25]. И ведь все это предвидели мудрые люди еще в 20-30-х годах!

Но обратите внимание, — проблема учебника остается в тени, дискуссия сдвинута на проблему преподавания. Зависимость преподавания от учебника не осознается. Стало привычным, что студенты не пользуются учебниками и учатся по конспектам лекций. Такое положение признается Л. Д. Кудрявцевым нормальным: "студент может и не читать учебников. В этом нет ничего плохого (?)" [7, с. 83]. Диалектика: ВТУ-учебник породил непонимаемость; студент перестал пользоваться учебником; в сознании ВТУ-идеологов причина вытесняется и они объявляют ситуацию нормальной.

Итак, жизнь доказала, что курс на "повышение уровня преподавания" ведет к понижению уровня знаний и качества мышления, убивает интерес к учебе, превращает образование в фикцию. Это очевидно всем. Как будто, понимаются и причины.

Что же дальше? Логично было бы заняться устранением причин. Но для нашего образования, как и для общества, характерна иррациональность управления. Принцип ВТУ не только не был пересмотрен, а наоборот — жестко закреплен и доведен до предела в 80-х годах.

80-е годы — закрепление результатов

В конце 70-х годов проф. А. Д. Мышкис готовился уменьшить формализм курса и придать ему прикладную направленность, приближая к характеру мышления прикладника, "наряду с воспитанием необходимого (?) математического мировоззрения" [27, с. 12]. То есть, в рамках принципа ВТУ? Странно, ведь это несовместимые цели. Ориентировочный учебник существовал — в 1969 году изданы "Лекции по высшей математике" самого А. Д. Мышкиса. Был подготовлен и разослан в вузы проект новой программы. Но не тут-то было. Строгие математики не позволили "вульгаризовать" свой святой принцип. В аппаратной борьбе они одержали победу и утвердили Минвузом свою новую программу.

Готовила программу комиссия единомышленников под председательством академика С. М. Никольского, состоящая из 24 профессоров, из которых 20 москвичей [13, вып. 9, с. 5-6]. В программу добавились абстрактные разделы линейной алгебры, математической логики, гильбертовых пространств и др., что "позволило повысить теоретический уровень всего курса" [13, вып. 11, с. 24], как удовлетворенно рапортовали сами себе авторы. На самом же деле повышены абстрактность и формализм курса и, следовательно, еще больше понижена его понимаемость, а точнее — зафиксирована непонимаемость. Но ВТУ-идеологи, как мы знаем, абстрагируются от проблемы понимаемости. Число учебных часов практически не увеличилось.

В 30-х годах на курс высшей математики во втузах отводилось 330 часов, а Академия наук требовала повысить это число до 440 часов, из которых 300 должно быть лекционных. Обоснование: "Количество часов, которое нами предлагается (оно было принято единогласно), является минимальным. Мы считаем, что этот объем является необходимым для того, чтобы наши студенты были не ремесленниками своего дела, а сознательными людьми, которые на базе полученного ими математического образования могли бы вести соответствующую техническую работу" [18, с. 72]. Заботились о качестве знания студентов, а не об "уровне преподавания".

Программа-79, которая далеко ушла по объему и абстрактности от программы 30-х годов, рассчитывалась формально на 450-510 часов. Однако, в учебных планах большинства технических специальностей на математику отводилось значительно меньшее число часов. Сам Л. Д. Кудрявцев писал свой учебник в расчете на 350 часов и в предисловии успокаивал преподавателей: "В полном объеме весь материал, содержащийся в учебнике, можно подробно, в умеренном темпе рассказать (?!) за 75 лекций" [28, с. 9]. Вот цель ВТУ-автора — "рассказать" математику за 150 лекционных часов. Сказка и только!

Изумляет утверждение о прикладной направленности программы "путем совершенствования фундаментальной подготовки студентов по математике" [13, вып. 9, с. 7]. Математики-специалисты по определению не способны понять ту здравую мысль, которую объяснял им еще акад. А. Н. Крылов и которую повторяет в 1971 г. акад. В. В. Новожилов: "Существуют принципиальные различия между образом мышления теоретиков-математиков и инженеров-конструкторов" [13, вып. 4, с. 4]. Для специалистов существует только один образ мышления — их собственный.

А теперь посмотрите, как ВТУ-идеологи обосновывают объективную необходимость своей программы: "Научно-технический прогресс предъявляет все новые и новые требования к математическому образованию инженеров ... Назрела (?) необходимость в обновлении и вузовских математических курсов ..., действующая программа курса математики ... (действовала 4 года — *И.К.*) не отвечает современным требованиям" [13, вып. 9, с. 5]. Чувствуете, как возникает тень Берманта?

Но пусть еще раз возникнет свет А. Н. Крылова. Вот что говорил он 1 октября 1940 г. на заседании президиума АН: "Может быть, следовало созвать конференцию, но не из одних только профессоров, а также из практиков дела (!) и предложить пересмотреть то, чему учат, нужно ли всему этому учить и как учить. А то загромождают курсами невероятной толщины, которые даже и сократить-то нельзя" [29, с. 323].

То есть, на самом деле, более полувека назад "назрела" совсем другая необходимость — остановить вакханалию "обновлений". В 40-50-х годах ее удавалось сдерживать. Но с 1961 г. программа курса математики поменялась 4 раза за 18 лет и лавина "обновлений" сокрушила-таки систему образования, которая своей эффективностью пугала Америку.

Непрерывное "обновление" ведет к хаосу — это метод разрушения. Неторопливое совершенствование — вот метод созидания. Термин "обновление" (как и "высокий теоретический уровень") — этикетка, скрывающая подлинный смысл политики. Заметим, что программа-79 почему-то не обновлялась более 20 лет. Или научно-технический прогресс перестал предъявлять требования?

Еще один свет возникает здесь — свет Н. Н. Лузина. Посмотрите, как осторожно и педагогично обновлял он свой курс в 1937 г.: "В настоящем издании мы, в виде опыта, решили прикоснуться (!) к одному из труднейших в педагогическом отношении пунктов: равномерной непрерывности. Мы решились дать более детальные сведения по этому делу, надеясь на то, что небольшое теоретическое отягощение (не "высокий уровень", а отягощение (!) — *И.К.*) материала здесь даст впоследствии — при трактовке интегрального исчисления — значительное облегчение и выигрыш в экономии времени и ясности понимания" [11, ч. 1, с. 3]. Между прочим, А. Ф. Бермант ввел в свой курс понятие равномерной непрерывности на двух страницах без колебаний и без забот.

И вовсе не научно-технический прогресс заставил ВТУ-идеологов "обновить" математический курс в 80-х годах. Им нужно было спасать свои учебники и принцип ВТУ, который непрерывно отторгается жизнью. Для организации "одобрения общественности” используется упрощенный прием Берманта — инсценируются в 1978 г. “региональные совещания-семинары заведующих математическими кафедрами вузов в городах Иваново и Перми”. В отчете, под видом рекомендаций совещаний, Л. Д. Кудрявцев излагает свои взгляды, цитируя свою книгу [7], и искажает реальность, отмечая “повышение общего уровня преподавания математики” [13, вып. 9, с. 117]. Это в то время, когда “студенты на владеют азами (!) высшей математики”. В этих фактах проявляется отношение ВТУ-идеологов к истине. И оцените их методы — методы 30-х годов.

Какой следующий за обновлением программы ход? Правильно, — написание новых учебников. И вот под программу-79 спешно изготавливается и издается в 1980-1981 годах комплект из трех томов, авторы — проф. Я. С. Бугров и акад. С. М. Никольский. Как всегда с 60-х годов, авторы новых учебников — те, кто стоит во главе “обновления”, кто имеет власть. В этих учебниках принцип ВТУ доведен до отвращения. Особенно остро охватывает это чувство при знакомстве с последней книгой триптиха — физически ощущается, как авторам надоел их тяжкий труд и как они озабочены только тем, чтобы скорее были “изложены (?!) вопросы, предусмотренные программами”, — обязательство, заявленное ими в предисловии к 1-й книге. Подтверждением данной оценки может служить тот факт, что через два года НМС объявил конкурс на создание следующего учебника [13, вып. 10, с. 214]. Конкурс почему-то не состоялся. а был переиздан триптих.

Между прочим, интересный в 70-х годах “Сборник научно-методических статей по математике” сменил редколлегию. С 1981 по 1991 годы вышло еще 9 выпусков – крайне скучных, равнодушных, безмысленных, заполненных, в основном, профессорскими упражнениями по вариациям строгого изложения различных тем, а также проблемами преподавания математики на подготовительных отделениях. И здесь проявилась педагогическая бесплодность принципа ВТУ, его имманентная оторванность от живой педагогики.

“Успехи” — фантом ПУП

Сами идеологи оценивают свою деятельность так: “Вообще, следует отметить повышение общего уровня преподавания математики” [7, с. 41]. “Однако успокаиваться на достигнутых успехах ... нельзя” [там же, с. 107]. Заметьте, речь идет не об уровне знаний учащихся, а об уровне преподавания (подмена, введенная еще Бермантом).

Каковы же “успехи”? О результатах преподавания мы говорили, сравним теперь “уровни” преподавания. Сравним начало и конец — Лузина и Бугрова. Возьмем, к примеру, изложения понятия определенного интеграла в их учебниках. Лузину нужно более 30 страниц [11, ч. 2, с. 25-56], Бугрову достаточно четырех [30, с. 232-235]. Лузин ведет изложение, непрерывно ориентируясь на понимание читателя, помогая ему, оберегая от ошибок, органически увязывая абстрактное и конкретное, формальную точность и образную суть, генетически формируя понятие в сознании читателя. Бугров протокольно излагает две абстрактные задачи и формулирует точное определение. Лузин творит педагогическую поэму (почитайте!), Бугров шаблонно и схематично повторяет порядок, введенный Бермантом. Но последний, все-таки, соблюдал всеобщее в те времена дидактическое требование подробности, — его изложение занимало 15 страниц.

В 1989 г. Л. Д. Кудрявцев тратит на изложение того же сложного понятия менее двух страниц [28, с. 344-345]. Прогресс или деградация?

Из двух дидактических принципов — понимаемости и научности — первый уничтожен начисто. Может остался второй? Суть принципа научности, по Лузину, в соответствии науки и понятий, возникающих "в уме читателя". Так вот, в уме читателя при таком изложении возникают бессмысленные, уродливые формализмы, которые здоровым умом отторгаются. А в душе читателя возникают чувства унижения и отвращения к математике.

Но адептов ВТУ не интересует то, что происходит в уме ученика — их интересует ПУП — собственное "повышение уровня преподавания". Что это значит? Термин "уровень" предполагает измерение. Уровень знаний можно измерить, но как измерить "уровень преподавания"? Это бессмысленное словосочетание вызывает, однако, впечатление значительного улучшения качества обучения. Фантом, призрак. И здесь мы опять встречаем классический модернистский прием подмены, воздействующий на подсознание.

Скрытый смысл ПУПа, его расшифровку находим в учебнике Л. Д. Кудрявцева: "Изложение ведется на уровне строгости, принятом в настоящее время в классической математике" [10, с. 10].

А теперь вспомните, — дело начиналось в 20-30-х годах с "осторожного процесса сокращения университетского курса", а закончилось в 70-80-х "классическим" университетским курсом. Строгие математики "перешли к пределу". Они подменили учебный курс научной монографией. Закономерный итог последовательной реализации принципа ВТУ.

Прежде чем переходить к последнему этапу истории, к 90-м годам, стоит углубить теоретический анализ проблемы и коснуться официальной монополии на производство учебников, которая сделала проблему неразрешимой.

ВТУ-методика

Любая политика требует благопристойного обоснования. Руководитель математического образования инженеров, Первый зам. председателя НМС проф. Л. Д. Кудрявцев сделал таковое в брошюре "Мысли о современной математике и ее изучении", изданной в 1977 г. и переизданной с небольшим добавлением и измененным названием в 1980 г. В этой работе много хороших слов и идеальных моделей, но нет главного — реальности, что характерно для чистых математиков и адептов ВТУ. Нет честного анализа результатов современного математического образования, на котором обязаны базироваться любые рассуждения об образовательной политике. Размышления о современной математике высоко профессиональны, а о педагогике и методике — бессодержательны. На последнем аспекте стоит задержаться.

Среди десяти выдвигаемых автором "принципов преподавания математики" один — пятый — посвящен методике. Формулируется он так: "Преподавание математики должно быть по возможности простым, ясным, естественным и базироваться на уровне разумной строгости" [7, с. 67]. Постулат звучит приятно, но он бессодержателен. Автор это сознает и сразу оговаривает, что "этот тезис каждый может понимать со своей точки зрения и вкладывать в него тот смысл, который ему хочется" [там же]. Смысл, который хочется вложить автору, он пытается разъяснить так:

"Тезис о простоте означает прежде всего простоту построения курса в целом ... следует отдавать предпочтение тому из способов, который проще" [там же]. Тавтология. Забавно и грустно наблюдать, каким беспомощным становится мышление специалиста, когда он покидает привычную формальную систему и ступает на живую почву, принципиально не формализуемую.

Бессодержательное восприятие живой педагогической реальности проявляется и в следующих оценках: "не существует точных рецептов, как преподавать (??) ... Методика математики не наука, а искусство ... рекомендации и принципы, лежащие в их основе, недоказуемы (??)" [там же, с. 82]. Внесем сюда некоторое содержание.

Преподавание — это действительно искусство, но методика — это сокровищница долгого исторического опыта преподавания, содержащая выверенные жизнью принципы и законы, доказуемые практикой, а не формальной логикой. Вот некоторые. Преподавание любого предмета должно быть постепенным и подробным, идти "от простого к сложному", точнее — через простое, элементарное к сложному, составному. Законами обучения, сообразного человеческой природе, являются единство теории и практики, абстрактного и конкретного, логики и интуиции, рационального и эмоционального, мысли и действия — это и законы познания. Понятным будет только генетическое изложение, которое показывает явление, понятие в развитии, чтобы учащийся видел, как оно возникает и почему приобретает тот или иной вид.

Основополагающие законы дидактики, по-видимому, неизвестны ВТУ-методистам. Или игнорируются, как противоречащие принципу ВТУ. Поэтому провозглашается методический плюрализм. На деле же очень жестко контролируется "методика", вытекающая из принципа ВТУ. О механизме контроля скажем позже.

Пример нового "методического" правила: "Лучший и кратчайший способ в процессе обучения математике разъяснить какое-либо понятие — это дать его точную формулировку. Лучший способ ... объяснить теорему ... — это доказать терему" [10, с. 7]. Этому правилу следует "разъяснение" понятия события в учебнике В. П. Чистякова, рассмотренное нами ранее.

Приведенное правило нарушает законы единства абстрактного и конкретного, логики и интуиции и закон генетического развития понятия. Педагогически грамотный путь разъяснения понятий должен начинаться с разнообразных конкретных примеров, с "чувственного созерцания". Затем идет анализ — выявление общего в этих примерах, сначала на интуитивном, образном уровне, затем более точное. И, как результат длительной подготовки, появляется строгая формулировка.

Все это знали отечественные методисты-математики еще в XIX веке: "Сообщить ученику готовое понятие ... с небольшими пояснениями ... это значит не только ничего не сообщить полезного для ума, но даже загромоздить его материалом, путающим (!) умственную деятельность. Слово без ясного представления предмета, к которому оно относится, производит только представление самого слова, а не понятия" [31, с. 13].

Изумительно живой и глубокий анализ процесса формирования понятий в уме ученика сделан А. Пуанкаре в эссе "Математические определения и преподавание". Начинается оно так: "Что разумеют под хорошим определением? Для философа или ученого это есть определение, которое приложимо ко всем определяемым предметам и только к ним; такое определение удовлетворяет требованиям логики. Но при преподавании дело обстоит иначе. Здесь хорошим определением будет то, которое п о н я т о (!) учениками" [17, с. 352-353]. И далее: "не достаточно высказать определение: необходимо его подготовить и необходимо его оправдать" [там же, с. 361].

А теперь перечитайте еще раз правило ВТУ-методики и обратите внимание на его язык и логику: "дать точную формулировку" равносильно "разъяснить", "доказать" равносильно "объяснить". И это утверждает "строгий" математик! Еще один пример того, как язык специалиста становится удивляюще недифференцированным при выходе за пределы компетенции.

Вдобавок, здесь наблюдается явление переноса (психологи называют его "трансфертом"). Введенное Л. Д. Кудрявцевым "методическое правило" есть ни что иное, как правило написания современных научных статей, которое указывает действительно экономный и, главное, удобный для авторов способ передачи специалистам научных результатов. И этот специфический способ переносится ВТУ-методистами в педагогику! Чем объяснить такой абсурд? Все той же узкостью мысли, ее законсервированностью в специальных формах.

Деятельность ученого математика и педагога-математика — две принципиально различные деятельности в глубоко различных сферах. Близость их кажущаяся. Первая почти непреодолимо мешает второй. Тем не менее, ученые математики рвутся контролировать педагогику математики. Вероятно, они чувствуют свою ограниченность и стремятся выйти из нее.

Они требуют признать, что "методика преподавания математики это прежде всего дело самих математиков" [7, с. 81]. Утверждение кажется неопровержимым. Но оно выводится опять из грубой, схематичной модели, не учитывающей различия между математиком и математиком-педагогом. Его надо существенно уточнить так: **методика преподавания математики, в частности, создание учебников, ни в коем случае не должна доверяться математикам-специалистам, это дело математиков-педагогов, профессионалов как в математике, так и в педагогике**.

Кому писать учебник?

Управленцы, объявляя конкурс, обнаруживают непонимание сложнейшего механизма создания учебника. Министерство просвещения тоже пыталось в 80-х годах решить проблему методом конкурса. Конкурсы проведены, награды розданы, а учебника нет. История показывает, что никогда хороший учебник не появлялся по заказу управленцев. Учебник нельзя сочинить за 1-2 года. Он вырабатывается десятилетиями в процессе вдумчивого практического преподавания.

Механизм создания хорошего учебника разъясняет нам Н. Н. Лузин. В предисловии к учебнику 30-х годов для педвузов он пишет: "Предлагаемый в настоящий момент курс анализа сложился у И. И. Жегалкина в течение более чем тридцатилетнего личного преподавания и является результатом непрерывных педагогических размышлений" [32, с. X]. Почему же необходим столь длительный опыт и столь напряженные размышления? Потому что нельзя "исходить при составлении учебника от обычного представления об идеальном читателе. А между тем большинство учебников именно и отправляются от этого представления, наделяя этого абстрактного читателя беспредельными внимательностью, понятливостью, догадливостью и сообразительностью ... Когда вдумываются в причины возникновения иллюзии "идеального читателя", то немедленно замечают, что под таким читателем автор просто разумеет себя самого и именно то состояние своего ума, которое он имеет в момент создания учебника, но отнюдь не то состояние ума, которое было у автора, когда он сам впервые знакомился с излагаемыми им идеями. Об этом последнем обычно говорят очень неохотно, вспоминая его исполненным всяческих недоумений и рассматривая его поэтому как *"неправильное"*, тогда как именно оно самое и было вполне *"правильным"*, потому что являло действительность, наблюдаемую у всех без исключения" [там же, с. XI]. Для того, чтобы понять реальное состояние ума учащегося, необходим длительный опыт "глубокого научного анализа тех иллюзий и заблуждений, которые зарождаются в уме учащихся, которые раскрываются в их неверных проверочных ответах и источником которых, в конце концов является неверная оценка их умом тех или других элементов обыденной жизни" [там же, с. X].

Какое глубокое проникновение в Истину! И как пошл в сравнении с подлинной мудростью современный "плюрализм". Может быть, теперь нам станет понятно, почему молодой автор в принципе не может создать хороший учебник? Учебник — это итог жизни талантливого педагога. Итог непрерывного Труда всей жизни.

Чтобы создать учебник, полезный Ученику, а не автору, не обязательно быть большим ученым — необходимо быть профессионалом и в совершенстве владеть предметом. Второе требование гораздо сильнее — педагогический талант, дар понимания ученика и сочувствия с ним. Третье условие — очень длительный опыт, который помогает снять узость норм и жесткость профессиональных представлений и глубоко проникнуть в психологию ученика. Четвертое — психолого-педагогические знания, педагогическая культура, включающая традицию. Эти четыре условия в совокупности достаточны для создания Учебника.

Чтобы "написать" учебник, полезный ВТУ-идеологам, достаточно одного — первого условия. Выше мы вели разговор о таких учебниках. Но есть другие. Есть авторы, стремящиеся преодолеть ложность принципа ВТУ — Е. С. Вентцель, А. Д. Мышкис. Их книги менее формальны и более понятны. Однако, и они несут печать специального, непедагогического мышления, и они не умеют учитывать психологию учащегося. Последствия операции отсечения отечественной педагогической культуры, проведенной в 60-х годах.

Монополия антидидактики

Практическое решение проблемы учебника предполагает еще одно условие — социальное, включающее механизм объективной оценки педагогического качества учебных книг. Сама по себе оценка качества не составляет проблемы — любой педагог и студент без труда отличит хороший учебник от плохого (труднее отличить менее плохой от более плохого). В 30-50-х годах действовал подобный естественный механизм и издавалось немало хороших книг. Естественный отбор авторов был разрушен введением в структуру Минвуза цензуры НМС.

Что такое НМС? Помните задумку А. Ф. Берманта о методическом органе, "координирующем деятельность кафедр"? Такой орган был создан и назван научно-методическим советом — НМС. Его задачи официально формулировались так: "разработка мероприятий методического характера, обеспечивающих дальнейшее повышение качества подготовки специалистов в свете постановлений партии ... изучает и обобщает методику и уровень преподавания ... дает рекомендации по выдаче соответствующих грифов ... по составам авторов ..." [13, вып. 9, с. 3].

Как всегда, расплывчатый, бессмысленный язык, — можно ли "обобщать уровень преподавания"? Более точный смысл имеют только последние две фразы, которые показывают, что НМС — это цензура. И больше ничего. Впрочем, есть и нечто большее — НМС не только фильтрует ВТУ-авторов, он назначает (!) авторов учебников. Ими оказываются, как правило, сами члены НМС. Каково? И даже высшие управленцы не властны над этим органом — они не специалисты. Они слепо исполняют его решения. Тайной является механизм комплектования НМС и его состав, — он нигде не публикуется.

Механизм действия НМС предельно прост. Альтернативная учебная книга передается на рецензию ВТУ-эксперту. Эксперт, не утруждая себя анализом, находит несколько несоответствий со своим курсом, подает их как ошибки и обвиняет автора в недостаточном ВТУ. Мнение эксперта заносится в протокол как решение НМС. Рецензия, в которой подпись ее автора даже не заверена и не расшифрована, передается автору конкурирующей книги. Вот и все. Экономно и эффективно. И безответственно, ибо официального ответа НМС может никому не давать. Учебники Лузина были бы зарублены НМСом запросто. Ну, какой "эксперт" позволил бы ему сегодня писать: "чтобы убедиться в том, что это верно ... надо ... просто подождать такого момента времени ..." [11, ч. 1, с. 25]?

Совершенно аналогичный механизм был еще раньше создан при Министерстве просвещения, там он назывался учебно-методический совет — УМС, теперь ФЭС — Федеральный экспертный совет. Деятельность УМС-ФЭСа раскрывает учитель В. К. Совайленко. Учебники школьного учителя отклоняются, как не обеспечивающие ВТУ, несмотря на то, что их двухгодичная экспериментальная проверка в школах АПН дала в 2,3 раза больше хороших и отличных оценок и в 2,6 раза меньше "двоек", нежели дали в этом же эксперименте действующие учебники профессора математики Н. Я. Виленкина, одобренные УМСом [33, с. 84]. В этой же книге В. К. Совайленко придает гласности бесчестные махинации, примененные официальными лицами для "чудовищной фальсификации" результатов эксперимента [там же, с. 83-87].

НМС, УМС, ФЭС — это механизмы, с помощью которых достигает своих целей ВТУ-мафия. Термин — не преувеличение. Вдумайтесь только в официальное признание Президиума АПН СССР, сделанное им в 1981 году после провала ВТУ-реформы средней школы: "монополия на авторство оказалась одной из главных причин возникновения осложнений с учебными программами и учебниками по математике. Необходимо создать надежные преграды всем попыткам реставрации монополии ... оценку учебников производить не только в экспериментальных школах академии, но и в массовой школе, используя опыт учителей-практиков" [34, с. 126].

Обратите внимание, — Президиум признает, что в школах Академии добиться объективной оценки учебников невозможно (!). Президиум понимает, что "монополия" почти непреодолима (!). Опасения подтвердились. Учебники В. К. Совайленко — первые и единственные, которые прошли опытно-сравнительную проверку. Создать преграды ВТУ-монополии не удалось.

90-е годы — что дальше?

Что же дальше? Ведь “успокаиваться на успехах нельзя”! А дальше будет то, что было, что циклически повторяется, — будет сделана новая программа еще более “высокого уровня” и под нее новый учебник. И вот появляется “стандарт” математического образования и в нем очередные абстракции — булевы алгебры, функциональный анализ, топология. Учебное время, наоборот, сокращается.

В 1996 г. Министерство (Ю. Г. Татур) утвердило программу для изготовления “бакалавров”, составленную под руководством проф. МГУ Е. В. Шикина. В нее добавлен функциональный анализ, качественная теория дифференциальных уравнений, методы оптимизации, дискретная математика, значительно расширены теория вероятностей и математическая статистика.

Стоит обратить внимание на теоретическое развитие принципа ВТУ новым поколением идеологов. В пояснительной записке они пишут: “В этой программе не следует особенно акцентироваться на будущую профессиональную деятельность (??), но следует создать (?) общее видение (?) мировоззренческого характера (?)”. Что это значит? Как всегда, претенциозная бессмыслица.

Программа-96 заявляет о своей фундаментальности, которую составители понимают, как “логическую строгость изложения математики” (??) (наряду с “общностью понятий и конструкций)”. Но *фундаментальность* в отечественном образовании всегда понималась, как *осмысленное знание основ*, а не многознание и не навык формально доказывать непонятые вещи. Как видите, непонимание смысла слов и неумение составить осмысленные предложения обнаруживают не только наши учащиеся, но уже и наши ВТУ-профессора.

Составители программы-96 оценивают необходимое для нее учебное время в “800 часов трудоемкости (?)”. Но где существуют эти 800 часов? Для абсолютного большинства втузов и специальностей министерские планы отводят на математику около 350 часов (как и в 30-е годы!). Составители, вероятно, это знают и предлагают преподавателям “ориентировать” (?) их программу на свои 350 часов. Опять абсурд. И зачем тогда их 800-часовая программа?

В 1994 г. объявляется конкурс на учебники “нового поколения” (безостановочный прогресс!). Результаты этого конкурса можно было точно предсказать: гранты и деньги получат москвичи (“и один из Тюмени”), победит принцип ВТУ, новые учебники будут так же непригодны для обучения и не будут использоваться студентами, как и предыдущие. Так и получилось.

В 1998 г. лауреатами стали огромные “авторские коллективы”, доходящие почти до десятка элитных московских профессоров и академиков (МФТИ, МГУ, МИРАН) [35, с. 5-8]. Очевидно, переработать новую программу в учебник уже не под силу одному-двум авторам. Лауреатом стал и “коллектив под руководством” Е. В. Шикина, разработчика программы-96. Такая вот “объективность и непредвзятость оценок” [там же, с. 5] руководителями конкурса.

В 90-х пошло очередное "обновление", объявлена очередная реформа высшей школы, ее назвали "структурно-содержательной" (понятно?). Где она сегодня, в 2004 году, эта реформа? Нет ее. Очередная управленческая иллюзия.

А принцип ВТУ есть. Его монополия укреплена. И новые ВТУ-идеологи есть. И власть у них сохранена. Министр-математик — ученик главного ВТУ-идеолога (руководитель диссертации), который, естественно, остался полновластным контролером учебной продукции страны. Под "крышей" Министерства по-прежнему переиздаются только антипедагогические ВТУ-учебники Кудрявцева, Чистякова, Бугрова, Гмурмана, Берманта и пр., и пр. Теперь они подаются в аннотациях как "классические", дабы повысить их рыночную ценность. . .

А качество образования падает, падает, ...

Выводы

В начале статьи были поставлены вопросы, — дадим краткие ответы.

Почему современные учебники непонимаемы? Потому что их "пишут" специалисты-*непедагоги*, подчиненные принципу ВТУ, игнорирующие дидактический принцип понимаемости и формально понимающие принцип научности. Утрачена психолого-педагогическая культура.

Принцип ВТУ — главная, коренная, исходная причина катастрофического падения *качества* образования (и школьного, и вузовского). Он изгнал из учебников педагогику и методику, изгнал Ученика. Он ответствен за деградацию мышления, а значит, и личности учащихся. Именно он привел учащихся к массовому отвращению от учебы. Он породил государственную ложь (так называемую Прокофьевскую "процентоманию"), которая заблокировала все возможности исправления ситуации.

И, несомненно, есть связь между организованным массовым отуплением молодежи, начатым в 60-х гг., и тем, что происходит с нашей страной с 90-х гг. То, что пытаются сделать с нашим образованием сегодня и что безуспешно пытается остановить Российская Академия Наук (см. [1]), нельзя правильно понять, не зная или забыв то, что сделано в 60-70-х гг. Первопричина — там. А корни — еще глубже.

Что надо менять? Принцип ВТУ на *принцип понимаемости* и, соответственно, авторов-специалистов на специалистов-педагогов, профессионалов как в специальной области, так и в педагогике.

Учебная книга не должна пересказывать шаблон научной системы, а должна перестроить ее в педагогическую систему, главная цель которой — **понимание** предмета учащимися. Дидактические аспекты этой задачи рассмотрены в статье [36, с. 26-33].

Как это сделать? Прежде всего, придется вспомнить классические законы обучения, сформулированные еще в 1658 г. Я. А. Коменским в знаменитой "Opera didactica omnia" и основательно забытые современной педагогикой в ее стремлении к инновациям и диссертациям. Эффективное обучение всегда идет от известного к неизвестному, от простого к сложному, от конкретного к абстрактному. Это именно *законы* (!) правильного, понятного обучения. И они всеобщи, — им подчиняется восприятие и ребенка, и взрослого человека, и специалиста. Этими законами должно непременно руководиться изложение в любой учебной книге.

Но законы эти столь основательно забыты, что нам нужно заново учиться их понимать и учиться правильно их использовать. Это совсем не просто. Полезно было бы переосмыслить их с учетом новых научных фактов, в частности, с учетом двуполушарности мозга и ведущей роли правого полушария (образы, интуиция) в процессах понимания и творчества.

В отличие от догматического шаблона ВТУ-учебника, каждый ответ, реализованный в конкретном П-учебнике, будет нести печать личности автора. Таковы лучшие старые книги — Лузина, Власова, Киселева. Их следовало бы переиздать (и широко распространить среди преподавателей) для воссоздания отечественной педагогической культуры и возрождения гуманистической традиции русской педагогики, всегда ориентированной на главную ценность — на Ученика (а не только на науку). Видный русский педагог П. Ф. Каптерев в 1911 г. выразил это качество Русской Школы так: общественное образование не есть “изучение предметов, а есть развитие личности предметами” [37, с. 11].

Наконец, надо бы приостановить конвейер современной “вариативной” учебной продукции, памятуя хорошее пожелание Президента РАО Н. Никандрова: “Учебники надлежит не печь, а создавать” [38]. Но это, по-видимому, неисполнимо в условиях рыночной демократии. Ну, так пусть РАО возьмет под контроль хотя бы выдачу грифов, профессионально и объективно оценивая именно педагогические качества учебных книг.

Учебник, полезный Ученику (а не автору), нельзя “написать”, его можно выработать только в процессе очень длительного преподавания, вдумчиво наблюдая многочисленные затруднения учащихся и стараясь понять их причины, анализируя психологию их ошибок, испытывая различные методические решения, оттачивая их до результата[2]

Но главная трудность — в системе управления: как преодолеть ВТУ-монополию? А захотят ли этого сами управленцы? Если вообразить, что они глубоко поймут суть проблемы, избавятся от гипноза “специалистов”, их титулов и от гипноза ложной идеи “высокого теоретического уровня” обучения, если они действительно захотят поднять качество, тогда они сами найдут ответ.

Одно “конкретное предложение” управленцам — введите в процедуру отбора учебных книг механизм оценки их студентами. Разработку методики такой оценки можно поручить, например, Исследовательскому центру проблем качества подготовки специалистов.

Конкретное предложение специалистам-математикам, академикам — **признайте ложность принципа ВТУ**! Не считают должным. Вообще, специалисты легче признают ошибки в своей специальной области, нежели там, куда они самонадеянно и некомпетентно вторгаются.

Горячую заинтересованность в сохранении (правильнее говорить о восстановлении) традицонных ценностей они проявляют в высоко авторитетном сборнике “Образование, которое мы можем потерять!” [1]. Уже само название “лукавит”, — создает впечатление, будто еще не потеряли. Некоторые авторы очень осторожно касаются реформы-70, осуждая ее, но замалчивая главную причину и результат [1, с. 27, 124]. А тот же Л. Д.

[2]Как пример (удачный или нет — покажет время) учебной “анти-ВТУ” книги, ориентированной на понимание, укажем пособие [39], вышедшее недавно в издательстве РХД (Журнальный вариант см. “Математическое образование”, №№ 21-29) — *Прим. ред.*.

Кудрявцев, который был ее участником и идеологом для высшей школы, вообще прячет ВТУ-суть этой реформы и пытается перевести внимание на несущественные особенности, “связанные с его (образования, — *И.К.*) политехнизацией” [1, с. 53].

А ведь **только после честного, публичного, официального (!) признания ошибок (если это ошибки) может появиться надежда и открыться путь к плодотворным изменениям.**

Литература

[1] Образование, которое мы можем потерять. М., 2002.

[2] Народное образование. 1998, №4.

[3] Эксперт. 2001, №46.

[4] Современная высшая школа. 1991, №4.

[5] В мире книг. 1980, №5.

[6] Перспективы. Вопросы образования. 1984, №3.

[7] *Кудрявцев Л. Д.* Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977.

[8] *Фихтенгольц Г. М.* Математика для инженеров. — Л.-М.: ОНТИ, 1934.

[9] *Лузин Н. Н.* Собр. Соч. , т. 3. — М.: Изд. АН СССР, 1959.

[10] *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. М.: Высшая школа. 1973.

[11] *Грэнвиль В., Лузин Н.* Курс дифференциального и интегрального исчислений. М.-Л.: ОНТИ, 1937, ч. 1-2.

[12] *Грэнвиль Э.* Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Ч. 1. Л.: ГИ, 1924.

[13] Сборник научно-методических статей по математике. 1971-1978, вып.1-8. 1981-1989, 1991, вып. 9-17.

[14] *Крылов А. Н.* О курсе и постановке преподавания математики во втузах. М., 1936.

[15] *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука. 1987.

[16] *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. М.: Наука. 1987.

[17] *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука. 1983.

[18] Высшая школа. 1937, №2.

[19] Успехи математических наук. 1959, т. XIV, вып. 5(89); 1939, вып. VI; 1937, вып. III.

[20] *Бермант А. Ф.* Курс математического анализа для втузов, ч. 1. М.-Л.: Гостехиздат. 1939.

[21] Математическое просвещение. М.:1937, №11; 1957, вып. 1; 1960, вып. 5.

[22] Правда. 1994, 28 декабря.

[23] Поиск. 1993, №14.

[24] Математика в школе. 1996, №1.

[25] Проблемы преподавания высшей математики в высших технических учебных заведениях. М.: Высшая школа. 1961.

[26] Вестник АН СССР. 1937, №4-5.

[27] *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. М.: Наука. 1969.

[28] *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука. 1989.

[29] *Крылов А. Н.* О подготовке специалистов. // Мои воспоминания. Л.: Судостроение, 1984.

[30] *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.

[31] *Евтушевский В.* Методика арифметики. 7-е изд. СПб., 1877.

[32] *Жегалкин И. И., Слудская М. И.* Введение в анализ. М.: Учпедгиз. 1935.

[33] *Совайленко В. К.* Образование, которое мы теряем. Новочеркасск, 2004.

[34] Коммунист. 1982, №2.

[35] Высшее образование в России. 1999, №4.

[36] *Костенко И. П.*Педагогические проблемы учебника математики. // Вестник высшей школы. 1988, №5.

[37] Педагогика. 1993, №4.

[38] Вузовские вести 1998, №22.

[39] *Костенко И.П.* Введение в вероятностное прогнозирование. Москва-Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2004.

Костенко Игорь Петрович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры “Высшая математика-1”
Ростовского государственного университета
путей сообщения (Краснодарский филиал).
email: kost@kubannet.ru

Вопрос о характере касания прямой и круга как проблемная точка развития древнегреческой геометрии в конце V — начале IV века до н.э.

А. И. Щетников

Автор, пользуясь эпистемологическим методом рациональной реконструкции истории, рассматривает реально известную по источникам область соприкосновения софистики, философии и математики, относящуюся к концу V – началу IV в. до н.э. — задачу о характере касания прямой и круга.

§1. Введение

В популярной литературе по истории математики часто встречается мнение, что логическая структура греческой геометрии, в которой доказываются даже очевидные факты и в которой непрерывная цепочка теорем разворачивается из небольшого числа аксиом и постулатов, была создана в конце V — начале IV вв. до н. э., чтобы противостоять нескончаемым придиркам софистов. Вот что пишет об этом, к примеру, В. П. Шереметевский (1940, с. 16):

> Увлекаясь спором для спора, приёмами привычной профессии, софист готов оспаривать всякое положение, хотя бы истину вполне очевидную, если её не защитят прочной, непрерывной цепью правильно построенных силлогизмов. Интерес к самому предмету спора отходит на задний план, когда толпа чутких слушателей с живейшим участием следит за всеми приёмами и изворотами диалектической борьбы. Истины математики отличаются такой простотой, так сказать, прозрачностью содержания, такой осязательной убедительностью, что дать им соответственно строгое доказательство, выстроить их в непрерывный ряд друг друга обуславливающих положений, сделать их неуязвимыми для нападения самой придирчивой критики — казалось и сравнительно лёгкой и наиболее настоятельной задачей рассматриваемой эпохи. Она как раз соответствовала направлению мысли, господствующим интересам учёных и общества начала IV века.

Надо сказать, что такая картина возникновения дедуктивной системы геометрии в значительной мере принадлежит воображению авторов популярных книг и нигде в античных источниках не зафиксирована. Чтобы понять, как взаимодействовали между собой математика и софистика (которая была отнюдь не только искусством спора!), и к каким преобразованиям в структуре математики это взаимодействие привело, мы рассмотрим в этой статье одну реально известную по источникам область соприкосновения софистики, философии и математики, по времени относящуюся к концу V — началу IV в. до н. э.

В этом исследовании я буду активно пользоваться эпистемологическим методом рациональной реконструкции истории, понимая его в том же ключе, в котором его развил и применял Имре Лакатос в *Доказательствах и опровержениях* (1967). Я попробую описать воображаемую, рационально реконструированную историю одной геометрической теоремы, наложив этот воображаемый пласт на историю реальную, к сожалению — известную нам по весьма скудным свидетельствам. Соответственно этой установке, я отнюдь не намереваюсь утверждать, что те рассуждения и доказательства, которые будут разобраны ниже, действительно выполнялись древнегреческими математиками рассматриваемой эпохи; однако я буду настаивать на том, что они могли выполняться, поскольку задействованные в них представления и методы были присущи греческой мысли и могут быть подтверждены имеющимися у нас источниками. Следуя методу *Доказательств и опровержений*, я буду интересоваться не только «безошибочными окончательными результатами», которые были когда-то получены греками и с тех пор входят в школьный учебник геометрии, но также и теми «ошибочными и тупиковыми ходами» (с точки зрения авторов учебников, конечно), благодаря которым стало возможным возникновение *Начал* Евклида и всей последующей геометрии.

§2. Тезис Протагора «знание есть ощущение» в применении к геометрии

История донесла до нас имена двух софистов, так или иначе связанные с математикой: это самый знаменитый софист Эллады Протагор из Абдеры (480–411 до н. э.) и его младший «коллега по цеху» Гиппий из Элиды. Их отношение к математике в некотором смысле противоположно.

Из диалогов Платона *Гиппий больший*, *Гиппий меньший*, *Протагор* мы узнаём, что Гиппий был сведущ во всех пифагорейских дисциплинах — логистике, геометрии, астрономии, музыке, и учил этим наукам других. Из его математических открытий известна так называемая квадратриса — механическая кривая, изобретённая для решения задачи о делении угла в произвольном отношении (частный случай этой задачи — знаменитая трисекция угла)[1].

Напротив, Протагор никогда не занимался математикой специально, не считая её хоть сколько-нибудь полезной для домашних и общественных дел. В начале диалога Платона *Протагор* есть примечательная сцена, когда Протагор, поглядывая на Гиппия, говорит Сократу:

[1] О задаче трисекции угла см. Белозёров 1975, Прасолов 1997.

> «Ведь софисты просто терзают юношей, так как против воли заставляют их, бегущих от упражнений, заниматься этими упражнениями, уча их вычислениям, астрономии, геометрии, музыке» (318de).

И тем не менее, Протагор был знаком с двумя крупнейшими натурфилософами и значительными геометрами своего времени — Анаксагором из Клазомен (497–428 до н. э.) и Демокритом из Абдеры[2]. Из диалога Платона *Теэтет* мы знаем, что младшим товарищем Протагора был ещё один известный геометр, Феодор из Кирены, у которого, по сообщению Диогена Лаэрция (II, 103; III, 6), учился математике Платон. Общаясь с этими геометрами, Протагор был в курсе новейших математических исследований. Он даже выступил с критикой этих исследований в сочинении *О математических науках* (*Περὶ τῶν μαθημάτων*), упоминаемом Диогеном Лаэрцием (VII, 55).

Главный тезис философского учения Протагора — «человек есть мера всех вещей, существующих — что они существуют, несуществующих — что они не существуют» (Платон, *Теэтет*, 152a). Из этого тезиса проистекает вывод о том, что знание есть ощущение (*ἐπιστήμη ἐστιν ἡ αἴσθησις*). Под ощущением или восприятием здесь подразумевается то, что мы можем воспринять нашими чувствами: зрением, слухом, обонянием, вкусом, осязанием. Этот вывод надо понимать как суждение здравого смысла: я вижу, что число камней в кучке равно семи, и я знаю, что они равно семи, и т. п.

Ниже я попробую, сообразуясь с тезисом Протагора о восприятии, выделить несколько типов математических утверждений по отношению к тому, как мы воспринимаем их истинность, и попытаюсь понять, как Протагор мог бы отнестись к утверждениям каждого из этих типов. К сожалению, источники наших сведений о Протагоре весьма скудны; однако в сочинениях Аристотеля всё-таки сохранились два фрагмента, непосредственно относящиеся к нашей теме.

1. Непосредственно очевидные утверждения. Ясно, что приводить примеры я могу только на свой страх и риск, поскольку то, что одному человеку представляется очевидным, другому может вовсе даже не показаться таковым. И всё же, вот несколько примеров: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны», «Прямая — это кратчайшее расстояние между двумя точками», «Диаметр делит окружность пополам», «Два перпендикуляра к одной прямой при их продолжении не пересекаются». Исходя из тезиса Протагора, для этих утверждений не надо искать доказательства, поскольку мы и так их уже знаем. Возможно, что именно к Протагору относится следующее возражающее суждение Аристотеля из *Второй аналитики* (87b35–37):

> Даже если бы и можно было воспринимать чувствами, что треугольник имеет

[2]Вопрос о годах жизни Демокрита весьма тёмен и запутан. Согласно Евсевию, Демокрит родился в 70 олимпиаду (ок. 498), одновременно с Анаксагором. Диоген Лаэрций сообщает (IX, 41), что Демокрит, по его собственному утверждению в *Малом диакосмосе*, был моложе Анаксагора на 40 лет, а также о датах рождения Демокрита по Аполлодору (ок. 460) и по Трасиллу (ок. 470). Для смерти Демокрита несколько авторов указывают 94 олимпиаду (ок. 402). При этом сообщается, что он умер в глубоко старости, прожив то ли 90, то ли 100, то ли даже 104 года. Ещё существует легенда, по которой Протагор был носильщиком дров, а в люди его вывел Демокрит, увидав, каким образом тот связывает дрова в вязанки. Если Демокрит родился в 460 г., то он был младше Протагора на 20 лет, и тогда эта легенда представляется очень странной. Сделать на основании всех этих сведений какие-то уверенные выводы о годах жизни Демокрита вряд ли возможно.

> углы, равные двум прямым, мы всё равно искали бы доказательство, а не знали бы, как говорят некоторые.

(Согласно Аристотелю, если хочешь иметь знание о чём-то, надо искать его доказательство; согласно Протагору, если ты узнал что-то посредством чувств, то никаких доказательств искать уже не нужно. Здесь надо помнить, что слово ἀπόδειξις, которым греки называли доказательство, восходит к судебной практике. Если судья видел, как было совершено преступление, требуются ли ему доказательства, что преступление было совершено? Протагор бы сказал, что нет, а Аристотель, что да: а вдруг судья в качестве свидетеля ошибся, приняв одного человека за другого? Поэтому такой судья должен не судить, а выступать на суде в качестве свидетеля.)

Тезис о непосредственном восприятии перечисленных выше утверждений не надо понимать в том смысле, что мы, к примеру, можем сравнивать углы в равнобедренном треугольнике на глаз с абсолютной точностью. Однако этого и не нужно делать: через восприятие у нас формируется умный образ (εἶδος, Gestalt) равнобедренного треугольника и понимание связи равенства сторон с равенством углов. Во всяком случае, мы знаем это равенство до всякого его доказательства, о чём и говорит тезис Протагора.

2. Неочевидные утверждения, истинность которых проясняется преобразованиями чертежа. Примеры: «Сумма углов треугольника равна двум прямым», «Параллелограммы на одном основании и под одной высотой равны между собой», «В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы», «Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны». Это классические теоремы, в которых некий неочевидный факт демонстрируется с помощью преобразований чертежа, опирающихся на очевидные геометрические утверждения, а также на не менее очевидные соображения типа «если две величины порознь равны третьей, то они равны между собой» и т. п. Как говорит Аристотель в *Метафизике* (1051a24–26):

> Почему углы в треугольнике составляют два прямых? Потому что углы, примыкающие к одной точке, равны двум прямым. Таким образом, если бы была выпущена прямая параллельно одной из сторон, то при взгляде на неё всё стало бы ясно.

3. Неочевидные утверждения о несуществовании. Классический пример: «Сторона и диагональ квадрата несоизмеримы». Что думал Протагор об этом замечательном открытии, мы к сожалению не знаем. Пифагорейцы искали общую меру стороны и диагонали, а их же собственные рассуждения привели их к выводу, что такой меры не существует. Стало быть, когда они её искали, они предполагали, что она есть. Но из того, что люди нечто предполагают, ещё не следует, что они это знают; ведь предполагая, можно и ошибиться. Деление отрезков на мельчайшие части воспринимается нами весьма туманно и неопределённо. И если кто-то считает, что всякие два отрезка должны иметь общую меру, то это его мнение основано не на восприятии, но на предубеждении. Впрочем, граница таких суждений всегда зыбка и размыта. Во всяком случае, у Протагора не было никаких оснований считать их противоречащими восприятию и тем самым ложными. Правда, несуществующие «в себе» вещи не существуют «для нас» в этом случае не потому, что мы не можем их воспринять, а потому, что мы путём логических доводов убеждаемся в невозможности их существования.

4. Утверждения, явно противоречащие нашему восприятию. Самый яркий пример такого утверждения: «Круг соприкасается с прямой в точке». У Протагора были все основания считать это утверждение ложным! Ведь все мы видим, что при касании прямой и круга возникает некое трудно различимое слияние, совсем не похожее на точку. И Аристотель в *Метафизике* (998a1–4) сообщает:

> Чувственно воспринимаемые линии не таковы, как те, о которых говорит геометр; ибо нет такого чувственно воспринимаемого, что было бы прямым (*εὐθύ*) или закруглённым (*στρογγύλον*) именно таким образом; ведь круг соприкасается с линейкой не в точке, а так, как указывал Протагор, возражая геометрам.

§3. Две теоремы о взаимном положении прямой и круга у Евклида

Вопрос о взаимном расположении прямой и круга при касании решается во 2 и 16 предложениях III книги *Начал* Евклида. Доказательства этих предложений проводятся схожим способом и опираются на один и тот же круг предложений I книги. Поэтому можно предположить, что в каком-то варианте *Начал*, написанном до Евклида, эти два предложения стояли рядом и составляли один блок.

Предложение III.2. *Если на окружности взять какие-либо две точки, то прямая, соединяющая эти точки, попадёт внутрь круга.* В самом деле, пусть такая прямая AB попадёт вне круга. Тогда возьмём на ней точку C и проведём из центра прямую OC, пересекающую дугу AB в точке D (рис. 1). Поскольку $OA = OB$, тем самым $\angle OAC = \angle OBC$ (предложение **I.5** — углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой). Далее, $\angle OCB > \angle OAC$ (предложение **I.16** — в треугольнике внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного). Тем самым $\angle OCB > \angle OBC$. Но тогда $OB > OC$ (предложение **I.19** — в треугольнике против большего угла лежит большая сторона). С другой стороны, $OC > OD$ (часть и целое). Но $OD = OB$ как два радиуса одной окружности. Получается, что меньшее равно большему, что нелепо. В силу возникшего противоречия прямая AB не может попасть вне круга. «Подобным же образом докажем, — говорит Евклид, — что она не попадёт и на саму окружность; значит, внутрь круга».

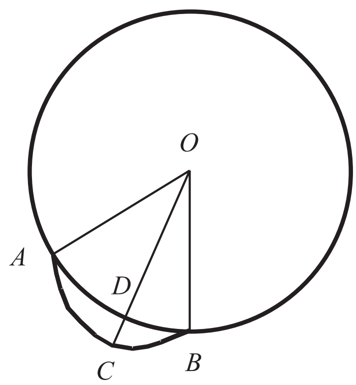


Рис. 1.

Предложение III.16. В первой части этого предложения Евклид доказывает, что *концевой перпендикуляр к диаметру «падает вне круга».* В самом деле, пусть он падает внутри, как AB; соединим OB (рис. 2 *a*). Поскольку $OA = OB$, тем самым $\angle OAC = \angle OBC$ (предложение **I.5**). Но $\angle OAB$ прямой по условию, поэтому $\angle OBA$ тоже будет прямым. Но в треугольнике два угла прямыми быть не могут (предложение **I.17**). Следовательно, концевой перпендикуляр к OA не

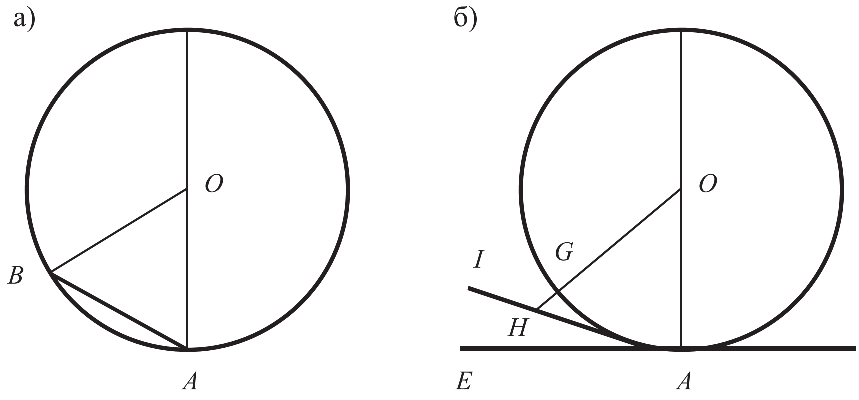


Рис. 2

упадёт внутри круга. «Подобным же образом докажем, — говорит Евклид, — что он не упадёт и на саму окружность; значит, вне круга».

Осталось доказать обратное утверждение: касательная, проходящая через конец радиуса, будет перпендикулярна к этому радиусу. Евклид формулирует это утверждение так: *«в промежутке между перпендикулярной прямой и окружностью не поместится другая прямая»* . В самом деле, пусть в промежутке между перпендикуляром AE и окружностью поместится прямая AI. Опустим на неё перпендикуляр OH (рис. 2 *б*). И поскольку $\angle OHA$ прямой, $\angle OAH$ меньше прямого, значит $\angle OAH \angle OHA$ и $OH < OA$ (предложение **I.19**). С другой стороны, $OG < OH$ (часть и целое). Но $OA = OG$ как два радиуса одной окружности. Получается, что меньшее равно большему, что нелепо. Следовательно, в указанном промежутке не поместится никакая другая прямая[3].

§4. Гипотеза о первоначальном обосновании утверждения «прямая касается круга в одной точке»

Чтобы Протагор мог возражать геометрам, нужно было, чтобы они уже выставили свой тезис о касании прямой и круга. Но откуда они сами узнали, что прямая соприкасается с окружностью в точке? Этот факт не может быть установлен чувствами, и постигается лишь на пути доказывающего рассуждения. Стало быть, сначала геометры каким-то образом попытались обосновать своё утверждение, и только потом Протагор стал им возражать.

Правильно ли будет предполагать, что начальное рассуждение геометров о касании прямой и круга было похоже на представленные в §3 доказательства Евклида? Похоже, что у нас имеются веские основания в этом сомневаться.

- Во-первых, за 16, 17, 19 предложениями первой книги *Начал* стоит разветвлённая сеть обоснований, которую ещё только предстояло развить — раньше в ней не было никакой необходимости; да и само использование этих предложений при доказательстве отнюдь не очевидно, и предполагает незаурядное владение техникой доказательства от противного.

[3]Далее в III.16 Евклид доказывает ещё одно утверждение: «Угол полукруга больше всякого острого прямолинейного угла, а остаток меньше». Это утверждение является непосредственным следствием второй части этой теоремы.

- Во-вторых, понимание необходимости доказывать прямую и обратную теорему тоже представляет собой элемент развитой логической культуры.

- В-третьих, в первоначальном доказательстве речь должна была идти не о перпендикуляре к диаметру (ведь он оказывается касательной к кругу лишь опосредованно), а о касательной как таковой. Стало быть, оно должно было начинаться со слов «пусть прямая касается круга своей протяжённой частью».

Я предполагаю, что первоначальное доказательство тезиса о касании круга и прямой в точке было в большей степени «философским», нежели собственно геометрическим, и велось по следующей схеме. Допустим, что прямая касается круга своей протяжённой частью. Протяжённая часть прямой линии — всегда прямая. А протяжённая часть окружности — всегда кривая. Но ведь прямое ни в коем случае не есть кривое, поскольку они являются противоположными качествами! Следовательно, этот вариант исключён. Остаётся единственный вариант: прямая касается круга в одной точке.

Рассуждающего так могут спросить: а что это такое — прямое и кривое, о которых он говорит как о противоположных качествах? Прямое и кривое (*εὐθὺ καὶ καμπύλον*) являются одной из противоположностей в пифагорейском списке десяти парных полярных начал, который приводит Аристотель в *Метафизике* (986a25)[4]. Тем самым их различение могло предполагаться изначальным, о котором уже не надо спрашивать[5].

Я полагаю, что сначала прямое и кривое, как и прочие геометрические объекты и их свойства, действительно никак не определялись. Ясное свидетельство тому, что геометры V в. до н. э. никаких определений своим объектам не давали, представляют собой следующие слова Сократа в *Государстве* (510cd):

> Я думаю, ты знаешь, что те, кто занимается геометрией, вычислениями и тому подобными занятиями, в любом своём исследовании предполагают известным чёт и нечет, фигуры, три вида углов и прочее в таком же роде. Они принимают это за исходные предположения и не считают нужным приводить для них объяснение (λόγος) ни себе, ни другим, словно это всякому и без того ясно. Исходя из этого, они разбирают уже всё остальное и последовательно доводят до конца то, что было предметом их рассмотрения[6].

[4]Прямое и кривое противопоставляются в этом списке по общей парадигме «единое — многое», «определённое и неопределённое». Прямое может быть прямым единственным образом, а кривое может иметь большую и меньшую степень кривизны, — так же, как есть один покой и много степеней движения. При этом покой отнюдь не рассматривается как «наименьшая степень движения», и прямизна — как «наименьшая степень кривизны», поскольку они исходно мыслятся двумя противоположностями.

[5]О полярных противоположностях как одной из архаических основ доказательного рассуждения см. Lloyd (1966), Рожанский (1972, с. 170).

[6]Первые попытки определить прямое и округлое мы как раз встречаем в двух диалогах Платона. Во-первых, это реплика Сократа из диалога *Менон* (74d): «Ты многие вещи называешь одним именем и говоришь, что все они не что иное, как фигуры, даже если они противоположны друг другу; так что же это такое, включающее в себя округлое (*τὸ στρογγύλον*) и прямое (*τὸ εὐθύ*), — то, что ты именуешь фигурами, утверждая, что округлое и прямое — фигуры в равной мере?» Во-вторых, это реплика Парменида из диалога *Парменид* (137e): «Ведь округлое есть то, края чего повсюду одинаково отстоят от середины. А прямое — то, середина чего заслоняет оба края». Надо заметить, что в *Началах* Евклида слово *στρογγύλον* и производные от него ни разу не употребляются.

Следующий вопрос: а откуда мы знаем, что рассуждение надо вести по схеме выбора из двух противоположностей? А вдруг прямое и кривое в малом совпадают? Ведь речь идёт о таких мельчайших предметах, которые нельзя разглядеть глазами. И ещё: а вдруг помимо протяжённых отрезков и не имеющих протяжения точек существует некий третий род, промежуточный между этими двумя? И уверены ли мы в том, что точки, не занимающие никакого места, вообще существуют?

Вопросы этого круга обсуждались двумя крупнейшими исследователями природы и известными геометрами, жившими с Протагором в одно время: Анаксагором из Клазомен и Демокритом из Абдеры. Созданные этими мыслителями учения о «незримо малом» развивались из одного корня, но в вопросе о безграничной делимости сущего оказались принципиально противоположными друг другу.

§5. Континуализм Анаксагора и пифагорейская теорема о бесконечной делимости отрезка

Анаксагор был прежде всего физиком, и как всякий физик, он занимался объяснением земных и небесных явлений[7]. Из учения Анаксагора о критерии истины кое-что дошло до нас через сочинение Секста Эмпирика *Против учёных*:

> Физичнейший из физиков, Анаксагор, дискредитируя ощущения, говорит: «Из-за их слабости мы не способны различать истину». В доказательство их недостоверности он ссылается на постепенное (*παρὰ μικρόν*) изменение цветов. Если взять две краски, чёрную и белую, и затем по капле вливать из одной в другую, то зрение не сможет различать постепенных перемен, хотя в природе они будут (VII, 90).

Анаксагор не призывал отвернуться от явлений, как это делали философы элейской школы, но считал, что явления служат лишь отправной точкой для размышления о скрытой природе вещей: «явления суть зрение неявного (*ὄψις τῶν ἀδήλων τὰ φαινόμενα*)» (там же, VII, 140).

Анаксагору принадлежит оригинальное физическое учение об «универсальной смеси», согласно которому в любом веществе, каким бы чистым оно не казалось, присутствуют доли всех других первоначал, а называем мы вещество золотом или водой по преобладающему первоначалу. Число первоначал бесконечно, и «всё содержится во всём». С этим учением связана и концепция подобочастных (*ὁμοιομερῆ*), то есть таких сущностей, которые при любом делении на части остаются сами собой: любая часть золота — это золото, и любая часть воды — вода. Согласно этому учению,

> У малого нет наименьшего, но всегда ещё меньшее (ибо бытие не может перестать быть путём деления). Так же и у большого есть всегда ещё большее. И оно равно малому по множеству. Сама же по себе всякая вещь и велика, и мала (DK 59 B3).

Тезис Анаксагора «бытие не может перестать быть путём деления» может быть проиллюстрирован пифагорейской теоремой, доказательство которой изложено в схолии 1 к X книге *Начал* Евклида:

[7]Анаксагору посвящено обстоятельное исследование И. Д. Рожанского (1972).

> Взяв равносторонний треугольник, они [пифагорейцы] делят его основание пополам и, отложив на одной из сторон отрезок, равный половине основания, проводят через точку прямую, параллельную основанию, так что отсечённый треугольник будет опять равносторонним. Разделив таким же образом его основание, они повторяют то же самое и никогда не могут достичь вершины треугольника. Ведь если достигнут, то половина основания полученного в тот момент равностороннего треугольника окажется равной каждой из сторон. Следовательно две стороны будут равны оставшейся, что нелепо.

О собственно математических занятиях Анаксагора мы знаем довольно мало. Витрувий упоминает трактат Анаксагора по теории перспективы (второй трактат на эту же тему под названием *'Ακτινογραφίη*, *Описание лучей*, написал Демокрит), а Плутарх — занятия Анаксагора квадратурой круга, когда он в 431 г. сидел в афинской тюрьме по обвинению в государственном преступлении — как человек, не признающий богов и преподающий учения о небесных явлениях.

Попытку восстановить содержание геометрии Анаксагора предпринял В. А. Янков (2003). Согласно этой реконструкции, интерес математиков круга Анаксагора сосредотачивался, прежде всего, на величинах подобных фигур и тел. Им же принадлежит постановка задачи удвоения куба и квадратуры круга.

Задача квадратуры круга безусловно связана если и не с проблемой касания круга и прямой, то, во всяком случае, с устройством дуги окружности «в малом», при бесконечном её делении, со «слиянием» этой дуги и хорды при бесконечном уменьшении последней. Спрашивается, к каким результатам приведёт процедура удвоения числа сторон вписанного многоугольника, в чём-то аналогичная описанной выше пифагорейской процедуре рассечения треугольников? Сольются ли когда-нибудь хорда и дуга, или они всегда будут охватывать сегмент круга, имеющий хотя и малую, но конечную высоту?

Анаксагор мог отвечать на такие вопросы, исходя из базовых предпосылок своего учения. Рассуждение, аналогичное приведённому в предыдущем параграфе, должно было привести его к выводу: прямое не может совпадать с кривым, хорда и дуга всегда будут различны. А это означает, что для конструктивного решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки нужно искать какой-то хитрый приём (ведь Анаксагор не знал, что эта задача с помощью циркуля и линейки не решается!). И именно такой хитрый приём стал искать геометр следующего за Анаксагором поколения, Гиппократ из Хиоса, известный по постановке и решению задачи о квадрировании луночек

§6. Атомизм Демокрита как один из вариантов решения проблемы касания

Круг философских занятий Демокрита был поистине всеохватен[8], однако в последующую историю он вошёл в первую очередь как создатель атомизма. Атомистическое

[8]С содержанием учений Демокрита можно познакомиться по переводам А. О. Маковельского (1946) и С. Я. Лурье (1970).

учение была впервые выдвинуто Левкиппом, сведения о жизни которого крайне скудны (известно только, что он был учеником Зенона из Элеи), и развито его учеником Демокритом. Согласно базовой посылке этого учения, те, кто думает, что деление тела можно продолжать до бесконечности, ошибаются: ведь одновременное деление тела повсюду невозможно, поскольку оно привело бы к полному уничтожению этого тела, — а потому должны существовать некие последние неделимые (ἄτομα) и не имеющие частей (ἀμερῆ) тела, вечные и неуничтожимые.

С. Я. Лурье (1935) выдвинул гипотезу о том, что Демокрит различал физические и математические атомы; термин «атом» более относился к физике (атом имеет размеры и форму, он может быть шарообразным, кубическим или пирамидальным, иметь крючки и зацепы, но его невозможно разделить физически), а термин «амера» — к математике (амера не может быть разделена на части даже мысленно, хотя и имеет нечто общее с протяжёнными частицами)[9].

Что касается учения Демокрита об истине, то оно пронизано мыслью о противопоставлении чувственных восприятий, которые у всех различны, и единой истины, ни с какими ощущениями не схожей и познаваемой только разумом. Чувственные явления поверхностны, а истина скрыта в глубине, и нужен разум, чтобы проникать в эту глубину и добираться до того, что лежит в основе природы, то есть до «атомов и пустоты». Из того, что мёд одному кажется сладким, а другому горьким, Демокрит делает вывод, что на самом деле он не сладкий и не горький. Вот два изречения Демокрита, которые приводит Секст Эмпирик в сочинении *Против учёных*:

> (VII, 135) Демокрит отвергает воспринимаемые явления (τὰ φαινόμενα ταῖς αἰσθήσεσι) и утверждает, что всё воспринимаемое соответствует не истине, но одному лишь мнению; по истине есть только атомы и пустота. «Условно сладкое, условно горькое, условно горячее, условно холодное, условен цвет, на самом деле — атомы и пустота».
>
> (VII, 138) Есть два вида познания: одно с помощью чувств, другое посредством размышления. Из них познание посредством размышления он называет законнорождённым и приписывает ему достоверность в суждении об истине; познание же, полученное с помощью чувств, он называет незаконнорождённым и отрицает, что оно может дать устойчивую основу для распознания истины. Он говорит буквально следующее: «Есть два вида познания: одно законнорождённое, другое незаконнорождённое. К незаконнорождённому относится всё следующее: зрение, слух, обоняние, вкус, осязание. А к законнорождённому — скрытое от них». Далее, отдавая предпочтение законнорождённому перед незаконнорождённым, он прибавляет: «И незаконнорождённое не может при уменьшении ни видеть, ни слышать, ни обонять, ни вкушать, ни осязать, а ведь надо идти ко всё более тонкому».

Секст Эмпирик (VIII, 327) сообщает также, что Демокрит в своих *Канонах* решительно высказывался против аподиктического доказательства (по-гречески это одно слово ἀπόδειξις). Он же (VIII, 385) определяет аподейксис так:

[9] Обсуждение этой гипотезы см. Зубов (1951, 1965), Рожанский (1979, с. 314–329).

> Доказательство есть рассуждение ($\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$) по поводу связи, раскрывающей неявное через некоторые явления.

Если принять это определение буквально, то придётся заключить, что Демокрит должен был возражать уже против доказательств теоремы Пифагора или теоремы о равенстве вписанных углов (второй тип утверждений из §2). Но без таких доказательств геометрия в принципе была бы невозможной.

Впрочем, решительные возражения Демокрита могли относиться только к аподейксису в физике, а не в геометрии. Поэтому попробуем смягчить требование и допустим, что для Демокрита недопустимыми в геометрии были доказательства, вынуждающие признать истину, не показывая, почему она такова. Граница между «проясняющими» и «вынуждающими» доказательствами вряд ли может быть проведена отчётливо, но «вынуждающие» доказательства как тип вполне возможно выделить; к этому типу в первую очередь относятся доказательства от противного.

Против каких аподиктических доказательств мог возражать Демокрит? С одной стороны, это знаменитые апории Зенона, в которых отрицается множественность сущего. С другой стороны, это такие математические теоремы пифагорейцев, как «Сторона и диагональ квадрата несоизмеримы» и «Прямая касается круга в одной точке».

Надо заметить, что приведённое выше доказательство существования атомов, приписываемое Аристотелем Демокриту, тоже является аподиктическим. А. О. Маковельский (1946, с. 78) высказал на этот счёт мнение, что аподиктические доказательства существования атомов могли принадлежать Левкиппу, вышедшему из Элейской школы, а Демокрит заменил их «другими аргументами опытного характера». Правда, что это за аргументы, Маковельский не указывает. По-видимому, дело здесь не в аргументах (ведь они обязательно будут аподиктическими), а в некоторой «умственной зоркости», которую призывал развивать Демокрит, хваливший Анаксагора за фразу о том, что «явления суть зрение неявного».

Когда Демокрит говорит, с одной стороны, что «ощущения ложны», с другой — что «истинное и являющееся — одно и то же (τὸ ἀληθὲς καὶ τὸ φαινόμενον ταὐτόν ἐστι)» (DK 55 A 113), не надо ловить его на противоречии: ведь здесь речь идёт о том, что для «умственно незрячего» ощущения будут ложными, потому что он видит в них поверхностное, а «умственно прозревший»— это тот, для кого потаённое становится явным. Поэтому дело не в косвенных доказательствах, а в том, чтобы так посмотреть на явления «умственным взором» и увидеть «атомы и пустоту».

В связи с нашими штудиями значительный интерес представляет и ещё один принцип Демокрита, согласно которому всё происходящее имеет свою причину. Оборотная сторона этого принципа такова: где нет причины, там не может быть и явления. В античной космологии, основываясь на этом принципе, милетец Анаксимандр (DK 12 A26), а вслед за ним элеат Парменид и Демокрит (DK 28 A44) учили, что Земля пребывает в равновесии в центре космоса вследствие «одинакового расположения по отношению к краям (ὁμοίως πρὸς τὰ ἔσχατα)»: Земля не будет двигаться ни в одну сторону, так как нет никакой причины, выделяющей это направление среди прочих[10]. Если перенести этот принцип в геометрию, то его с равным успехом можно применять для дополнительного обоснования очевидных утверждений (первый тип из §2): углы

[10]См. Зубов (1962, с. 25), Щетников (1994, с. 27).

при основании равнобедренного треугольника равны, так как нет никакой причины им быть неравными. Мы не знаем, рассуждал ли так Демокрит; но, во всяком случае, это рассуждение было бы вполне в духе его представлений о познании.

Из математических открытий Демокрита нам определённо известно только одно, но зато очень важное. Архимед во введении к *Посланию к Эратосфену о механических теоремах* сообщает, что Демокрит первый высказал утверждение о том, что конус составляет третью часть цилиндра, а пирамида — третью часть призмы с тем же самым основанием и под той же высотой, но не доказал его; доказательство же нашёл Евдокс.

Можно предположить, что задача отыскания объёма пирамиды была поставлена в греческой науке кем-то из пифагорейцев. В пифагорейской космологии правильная четырёхгранная пирамида есть самое элементарное из всех тел, а потому вопрос о сравнении её объёма с объёмом какого-нибудь куба (например, вписанного с этой пирамидой в один шар) представлял для пифагорейцев особый интерес[11].

Из материала, содержащегося в сочинении Плутарха *Об общих понятиях* (1079d), можно заключить, что утверждение Демокрита «пирамида представляет собой третью часть призмы» было связано с разбиением пирамиды и конуса на тончайшие слои, параллельные основанию. С. Я. Лурье (1935) высказал предположение, что Демокрит разбивал конус и пирамиду на слои толщиной в одну амеру, а потом вычислял суммарный объём всех слоёв по формуле для суммы последовательных квадратов, которую он умел доказывать или по крайней мере выводить индуктивно. Можно предложить и другую гипотезу на этот счёт: для шести одинаковых пирамид, из которых складывается куб, результат очевиден, а на прочие пирамиды и конус он переносится с применением принципа Кавальери, когда сравниваемые тела рассекаются на тончайшие плоскости.

Среди сочинений Демокрита по математике Диоген Лаэрций называет два сочинения по геометрии (*Περὶ γεωμετρίης* и *Γεωμετρικῶν*), одно — о числах (*Ἀριθμοί*), несколько книг астрономического и картографического содержания, и ещё два трактата с интересными названиями: *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν* в 2 кн. и *Περὶ διαφορῆς γνώμης ἢ Περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης*.

Название первого из этих двух трактатов можно понимать по-разному. В первом варианте понимания слово *ἀλόγων* относится к обоим существительным: *Об иррациональных линиях и [иррациональных] телах.* Однако «тело» здесь — это отнюдь не обычное *τὸ σῶμα* и не геометрическое *τὸ στερεόν*, но специфическое *τὸ ναστόν*, «полнота». В связанных с Демокритом свидетельствах это слово встречается обычно в словосочетании «*τά ναστὰ καὶ τὸ κενόν*», синонимичном словосочетаниям «*τά ἄτομα καὶ τὸ κενόν*» (атомы и пустота), «*τὸ πλῆρες καὶ τὸ κενόν*» (полнота и пустота). Поэтому *τά ναστά* у Демокрита — это не просто «тела», а «плотные неделимые тела», «атомы». Но тогда прилагательное *ἀλόγων* относится лишь к первому существительному *γραμμῶν*, потому что неделимые тела, в отличие от линий, не могут быть «иррациональными» в математическом смысле. Поэтому название данного трактата можно истолковать как *Об иррациональных линиях и [неделимых] телах.*

[11] Правило для определения объёма усечённой пирамиды зафиксировано ещё в Московском папирусе. О реконструциях способов, которым египтяне могли к нему прийти, см. Лурье (1933), Bortolotti (1934–35), Нейгебауер (1937, с. 144–146), Раик (1958), Выгодский (1967, с. 66–72), Виленкин (1985). Надо думать, что если египтяне умели вычислять объём усечённой пирамиды, то и с обычной пирамидой они тоже умели справляться.

О чём писал ДЕМОКРИТ в трактате *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*, мы, к сожалению, ничего не знаем, и можем только строить предположения. Скорее всего, ДЕМОКРИТ учил, что никаких иррациональных линий нет, поскольку процесс бесконечного спуска, о котором говорят пифагорейцы, в действительности должен остановиться «у последнего предела». Тем самым для всяких двух линий их общей мерой окажется последнее неделимое, из которых все линии состоят, — а мы считаем эти линии несоизмеримыми по недоразумению, в силу того, что наше обыденное восприятие подсказывает нам, что деление всегда можно будет продолжить и дальше.

Такое представление об устройстве математических объектов должно было приводить ДЕМОКРИТА к весьма своеобразным выводам. А. О. МАКОВЕЛЬСКИЙ (1946, с. 87) описывает одну из реконструкций этого учения, согласно которой квадрат с равными сторонами существует лишь в мнении людей, в действительности же всякий квадрат является прямоугольником, у которого основание отличается от высоты на такую малую величину, которая не воспринимается нашим зрением и осязанием. Действительно, не существует таких пифагоровых троек $a^2 + b^2 = c^2$, в которых одно катетное число равно другому, и поэтому в «обычном» равно-равном квадрате диагональ не может быть соизмеримой со стороной. Но такие пифагоровы тройки, в которых одно катетное число отличается от другого на единицу, существуют (это тройки $\{3, 4, 5\}$, $\{20, 21, 29\}$, $\{119, 120, 169\}$ и т. д.), и потому могут существовать соответствующие «квадраты», в которых диагональ будет соизмерима со стороной. (Впрочем, эта конструкция сама по себе выглядит подозрительно: ведь непонятно, что мешает существовать квадрату с равными сторонами, пока в него ещё не вписана никакая диагональ.)

Ещё одна трактовка названия трактата *Περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν*, которую я могу предложить, основывается на фрагменте диалога ПЛАТОНА *Теэтет* (201ac), в котором СОКРАТ, не называя ДЕМОКРИТА по имени, но употребляя иносказания «я слышал от каких-то людей», «тот, кто это говорил» и т. п., излагает его учение:

> На самом деле ни один из элементов невозможно объяснить, поскольку им дано только называться, иметь какое-то имя. А вот состоящие из них вещи и сами словно сплетаются, и имена их, также сплетаясь, образуют объяснение, сущность которого заключается именно в сплетении имен. Таким образом, эти элементы необъяснимы (ἄλογα) и непознаваемы, они лишь ощутимы. Сложное же познаваемо, выразимо (ῥητάς) и доступно истинному мнению. Поэтому, если кто составляет себе истинное мнение о чем-то без объяснения, его душа владеет истиной об этом, но не познаёт; ведь кто не может дать или получить объяснение чего-то, тот этого не знает. Получивший же объяснение может все это познать и в итоге иметь это знание.

Употребляемые здесь по отношению к элементам слова ἄλογα и ῥητάς используются в X книге *Начал* ЕВКЛИДА в качестве терминов для обозначения иррационального и рационального отношений. Кажется, что в контексте рассказа СОКРАТА они полностью лишены этой терминологической окраски. (Хотя может быть и не лишены — ведь диалог *Теэтет* начинается именно с обсуждения проблемы классификации соизмеримых и несоизмеримых линий в геометрии.) С другой стороны, именно слово ἀλόγων ДЕМОКРИТ поставил в название своего трактата. Учитывая данное свидетельство ПЛАТОНА, название трактата Демокрита можно перевести и как *О не имеющих словесного объяснения линиях и [неделимых] телах*, и тем самым может оказаться, что этот трактат не имел никакого непосредственного отношения к проблеме соизмеримости, но в нём говорилось о том, что некоторые линии и неделимые тела являются первоэлементами, и потому им не может быть дано никакого словесного объяснения.

Второй интересующий нас трактат Демокрита носит двойное название *Περὶ διαφορῆς γνώ- μης ἢ Περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης*. Как это следует из второй половины названия, *О касании круга и сферы*[12], он имеет самое прямое отношение к нашей теме. Очень интересна первая половина названия: *Περὶ διαφορῆς γνώμης*, *О различии познания*. Это название отсылает нас к учению Демокрита о законнорождённом и незаконнорождённом познании, а также к спору Парменида с математиками.

Что мог написать Демокрит, будучи атомистом, по вопросу касания круга и прямой? Во всяком случае не то, что круг касается прямой в одной точке — ведь в его теории никаких точек нет, а существуют лишь «атомы и пустота». Как сообщает Аристотель в трактате *О небе* (307a2, a17), по Демокриту шар является «всюду углом» (*ὅλον ἐστὶ γωνία*). Иначе говоря, шар — это многогранник с очень большим числом мельчайших неделимых граней, и в любом его месте мы натыкаемся на вершину угла, правда — весьма тупого. То же самое и для круга: его надо мыслить как многоугольник с очень большим числом неделимых «сторон». Тем самым касание прямой и круга — это касание одного атома круга с одним либо двумя атомами прямой, или касание двух атомов круга с двумя или тремя атомами прямой, — как нам это больше нравится (рис. 3).

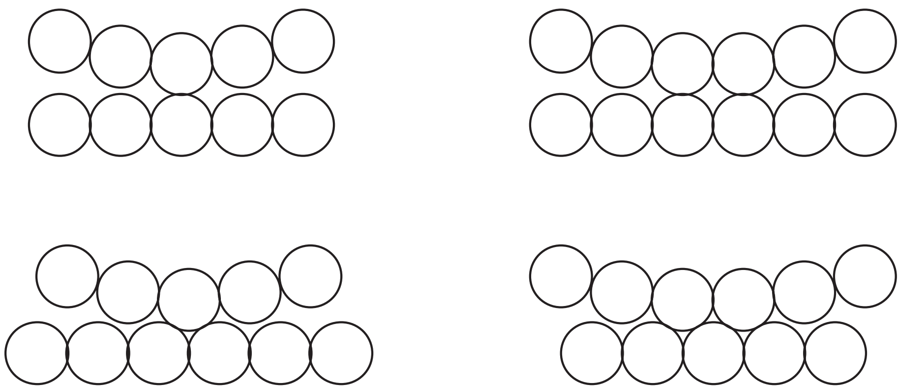


Рис. 3

Впрочем, при «многоугольной» укладке атомов по окружности оказывается непонятно, как они лежат внутри круга. Имеется один не очень внятный фрагмент в комментарии Фемистия к трактату Аристотеля *О небе*, сохранившийся только в еврейском переводе арабского перевода (см. Лурье 1970, фр. 123), из которого можно понять, что Демокрит мысленно выделял в неделимом атоме семь частей, соответствующих центру и трём парам взаимно ортогональных направлений, по которым и происходит соединение атомов в своего рода «кубическую решётку». Если этот так, то круг по

[12] Для касания Демокрит употребляет глагол *ψαύεσθαι* (буквально — «ощупывать», «осязать»), Евклид — глагол *ἐφάπτεσθαι* («достигать», «присоединять»).

Демокриту представлял собой нечто вроде изображения на экране монитора, составленного из пикселей, располагающихся в вершинах квадратной решётки (рис. 4).

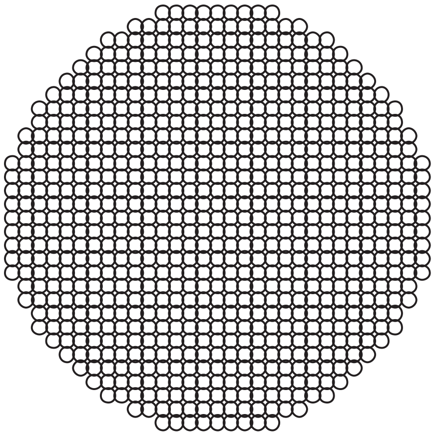


Рис. 4

Правда, углы у такого «круга» не распределены равномерно по периферии, — но зато его площадь можно измерять числом атомов, из которых он состоит[13].

§7. Вопрос о «различии познаний»

Обратимся теперь к «различию познаний», о котором говорит Демокрит в названии своей книги о касании, и попробуем понять, как это различие соотносится с возражением Протагора геометрам, учившим о касании в точке. Демокрит учить о касании в точке не мог, в его геометрии вообще нет никаких точек, — а вот пифагорейцы могли (согласно пифагорейцам, «точка — это единица, имеющая положение»), и Анаксагор, по-видимому, тоже мог, если он вообще занимался этим вопросом. Отсюда следует заключить, что Протагор возражал скорее всего пифагорейцам, а быть может, и Анаксагору. Рассмотренное в §4 гипотетическое первоначальное доказательство того, что круг и прямая касаются в точке, является по своему стилю подчёркнуто пифагорейским, поскольку оно опирается на принципиальную несовместимость прямого и кривого как двух полярных пифагорейских противоположностей.

Два познания у Демокрита, законное и незаконное, — это познание с помощью чувств и познание с помощью разума. Чувственное познание говорит нам, что прямая соприкасается с кругом на некотором протяжении, и следовательно, так оно и есть на самом деле — это позиция Протагора. Демокрит противопоставил чувственному познанию познание разумом, и это противопоставление привело его к выводу о существовании атомов. Согласно атомистической теории, прямая касается круга не в точке (ибо никаких точек, о которых говорят пифагорейцы, не существует), но в одном или нескольких атомах.

В отношении к вопросу о касании позиции Демокрита и Протагора странным образом смыкаются, несмотря на принципиальное различие их учений в целом. Протагор отрицает касание прямой и окружности в точке, исходя из непосредственной

---

[13]Так у «круга», изображённого на рис. 4, диаметр равен 31 атому, а состоит он из 757 атомов. Это даёт неплохое приближение для числа $\pi = 4S/d^2 = 3028 : 961 \approx 3,151...$ Обсуждение в этой связи так называемых «круглых чисел» см. Янков 2001.

видимости и здравого смысла. Демокрит тоже отрицает такое касание, но уже исходя из некоторой «умной видимости», предметом которой является «незримо малое».

Вернёмся к позиции Анаксагора и пифагорейцев, утверждавших бесконечную делимость сущего. Эта позиция оказалась более приемлемой для разворачивания математики, не зависящей от философских предпосылок и свободной от противоречий. В кругу математиков пифагорейской школы атомистическая концепция Демокрита и сенсуалистские возражения Протагора вряд ли воспринимались достаточно серьёзно. Бесконечная делимость пространства считалась доказанной, а тем самым доказательства несоизмеримости диагонали и стороны принимались как вполне «законнорождённые».

Следующий шаг в этом направлении сделал Феодор из Кирены, доказавший с помощью метода чётных и нечётных несоизмеримость сторон и диагоналей прямоугольников, стороны которых разнятся между собой в 3, 5, и т. д. раз — вплоть до числа 17, для которого метод Феодора не работает. Об этом доказательстве сообщает Платон в диалоге *Теэтет*, посвящённом выяснению того, что такое знание. Значительная часть этого диалога посвящена критике тезиса Протагора «знание есть ощущение» и еще одного тезиса «знание есть правильное мнение с объяснением», возможно, принадлежащего Демокриту. Интересно, что Феодор, будучи другом Протагора, в дискуссии не участвует, предоставив Сократу возможность вести беседу с Теэтетом, который учится у Феодора математике. О себе же Феодор говорит как о том, кто «отошёл от отвлечённых рассуждений (*ἐκ τῶν ψιλῶν λόγων*) и склонился к геометрии» (165a).

§8. Переход к «геометрической» теории касания

Для создания свободной от натурфилософских предпосылок математики следовало оторвать от философских рассуждений о сущем не только математические предметы, но также и сами доказательства. С этой точки зрения исходное пифагорейское доказательство теоремы о касании, которое мы рассмотрели в §4, содержало в себе логический круг: нам требуется доказать, что эта прямая не совпадает с этим кругом, а мы постулировали такое несовпадение изначально, для «прямого и круглого вообще»!

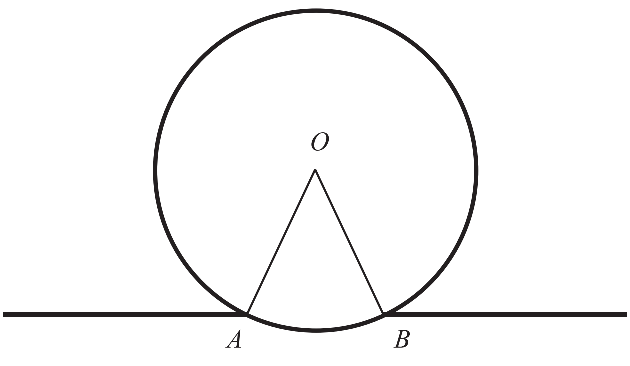


Рис. 5.

Кем и когда было построено то доказательство, которое приводится в предложении III.16 *Начал* Евклида, неизвестно. Самые ранние кандидатуры здесь — это уже упоминавшиеся выше Феодор из Кирены и Гиппократ из Хиоса, работавшие в конце V в.; но возможно, что это доказательство было построено во времена Платона или даже Аристотеля, в рамках программы выстраивания единой геометрической эпистемы.

Я уже говорил в §4, что все ранние версии доказательства должны были начинаться с допущения «пусть прямая касается круга своей протяжённой частью». Рассмотрим одну такую версию, несколько необычную на современный взгляд, но вполне возможную для греческой математики IV в., как это будет показано ниже. Проведём радиусы OA и OB и получим равнобедренный треугольник OAB (рис. 5). Но радиусы OA и OB перпендикулярны обводу круга. Следовательно, они перпендикулярны к прямой AB, поскольку эта прямая совпадает с обводом. Получился прямоугольник с двумя прямыми углами. Но таких прямоугольников не бывает: ведь две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются при их продолжении. В силу возникшего противоречия сделанное предположение неверно. Следовательно, прямая не может касаться круга своей протяжённой частью. Поэтому область касания прямой и круга не имеет протяжения, то есть является точкой.

Дальнейший логический анализ этого доказательства идёт по трём направлениям.

Во-первых, требуется обосновать утверждение о параллельности перпендикуляров. Евклид доказывает более общее предложение о параллельности двух прямых, образующих с третьей равные накрестлежащие углы, в предложении I.27, опираясь на предложение I.16 о том, что во всяком треугольнике внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного. Возможно, что раньше для доказательства того, что перпендикуляры при их продолжении не пересекаются, имелось какое-то специальное рассуждение; во всяком случае, когда Аристотель во *Второй Аналитике* (74a13–17) объясняет, что доказывать нужно общее, а не частное, он среди прочих приводит следующий пример:

> Если бы кто-либо захотел доказать, что перпендикуляры (*ὀρθαί*) не встречаются (*οὐ συμπίπτουσι*), он мог бы подумать, что доказательство этого возможно потому, что это свойство имеют все перпендикуляры. Но это не так, ведь не только такие равные (*ἴσαι*) [углы] производят это, но и другие равные тоже[14].

Отсюда можно сделать вывод, что сначала существовало отдельное доказательство для перпендикуляров, а во времена Аристотеля оно было заменено на более общее.

Во-вторых, нам следует объяснить «странное» с современной точки зрения образование угла непосредственно между радиусом и обводом круга, а не между радиусом и касательной к этому кругу. О том, что в геометрии IV в. такие углы действительно могли рассматриваться в доказательстве, свидетельствует отрывок из *Первой Аналитики* Аристотеля (41b14–22), в котором рассматривается весьма своеобразное доказательство теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Проведём окружность с центром в вершине треугольника, проходящую через концы основания, и продолжим боковые стороны треугольника за его вершину до пересечения с этой окружностью (рис. 6). Теперь принимаются равными (а) углы между радиусами и обводом круга, поскольку это углы в полукруге, (б) противолежащие углы в сегменте; но если от равных отнять равные, то и остатки будут равны, поэтому углы при основании равнобедренного треугольника равны.

[14]Восстановленный перпендикуляр Евклид называет «*πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμή*» (I.11), а опущенный перпендикуляр — «*κάθετος εὐθεῖα γραμμή*» (I.12). Точно так же и в этом отрывке из Аристотеля *ὀρθαί*: — это и «прямые, проведённые под прямыми углами», и сами «прямые углы». Поэтому можно называть их равными, не прибавляя слова «углы».

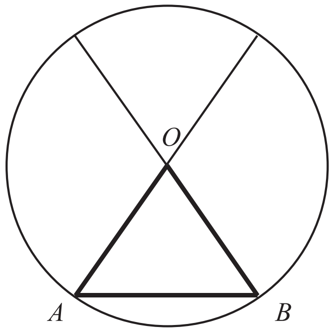


Рис. 6

В третьих, выше мы утверждали, что радиусы перпендикулярны обводу круга, — но вправе ли мы это делать? Ведь угол между радиусом и обводом не является прямолинейным! Не вернее ли будет сказать, что этот угол больше любого острого угла, но всё-таки меньше прямого угла? Это последнее утверждение представляет собой последнюю часть теоремы III.16 о касании; здесь мы наконец-то выходим из области гипотез и оказывается в области засвидетельствованных фактов. Однако входим мы в неё, обогащённые существенно более глубоким пониманием той истины, которая, как говорил Демокрит, скрыта от непосредственного человеческого взора.

Литература

[1] Аристотель. *Сочинения.* В 4 т. М., Мысль, 1976–81.

[2] Архимед. *Сочинения.* Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М., Физматгиз, 1962.

[3] Белозёров С. Е. *Пять знаменитых задач древности. История и современная теория.* Ростов на Дону, 1975.

[4] Виленкин Н. Я. О вычислении объёма усечённой пирамиды в Древнем Египте.

[5] *Историко-математические исследования*, **28**, 1985.

[6] Выгодский М. Я. *Арифметика и алгебра в Древнем мире.* М., Наука, 1967.

[7] Зубов В. П. К вопросу о математическом атомизме Демокрита. *Вестник древней истории*, 1951, №4, с. 204–208.

[8] Зубов В. П. У истоков механики. В кн.: Григорьян А. Т., Зубов В. П. *Очерки развития основных физических понятий.* М.: Изд. АН СССР, 1962, с. 3–173.

[9] Зубов В. П. *Развитие атомистических представлений до начала XIX века.* М.: Наука, 1965.

[10] Лакатос И. *Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы.* Пер. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967.

[11] Лурье С. Я. К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию. *Архив истории науки и техники*, сер. 1, вып. 1. 1933, с. 45–70.

[12] Лурье С. Я. *Теория бесконечно-малых у древних атомистов.* М.–Л., Изд. АН СССР, 1935.

[13] Лурье С. Я. *Демокрит: Тексты, перевод, исследования.* Л., Наука, 1970.

[14] Маковельский А. О. *Древнегреческие атомисты.* Баку: АН АзССР, 1946.

[15] Нейгебауер О. *Лекции по истории античных математических наук. Т. 1. Догреческая математика.* М.–Л., ОНТИ, 1937.

[16] Платон. *Собрание сочинений.* В 4 т. М., Мысль, 1990–94.

[17] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира.* М., Фазис, 1997.

[18] Раик А. Е. Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов. *ИМИ*, **11**, 1958, с. 171–184.

[19] Рожанский И. Д. *Анаксагор: У истоков античной науки.* М., Наука, 1972.

[20] Рожанский И. Д. *Развитие естествознания в эпоху античности: Ранняя греческая наука «о природе».* М., Наука, 1979.

[21] Секст Эмпирик. *Сочинения.* В 2 т. М., Мысль, 1976.

[22] Щетников А. И. *Мысленный эксперимент и рациональная наука.* М.: Аспект-пресс, 1994.

[23] Янков В. А. Становление доказательства в ранней греческой математике (гипотетическая реконструкция). *Историко-математические исследования*, **2(37)**, 1997, с. 200–236.

[24] Янков В. А. Геометрия Анаксагора. *Историко-математические исследования*, **8(43)**, 2003, с. 241–267.

[25] Bortolotti E. La scienza algebraica degli egiziani e dei babilonesi. *Memorie delle R. Accademia della szienze dell'Instituto di Bologna*, ser. IX, **2**, 1934–1935, p. 184–232, 390–452.

[26] Lloyd G. E. R. *Polarity and analogy: Two types of argumentation in early Greek thought.* Cambridge, 1966.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта “Школа Пифагора”,
Центр образовательных проектов “СИГМА”,
Новосибирск.
email: pythagor@ngs.ru

Эволюция простоты

А. А. Воронин

М. М. Постников в статье “Является ли математика наукой?” (“Математическое образование”, №2, 1997 г.) писал: “Человеку свойственно пытаться рассуждать о вещах, которые он еще не полностью понимает, но очень хочет их понять (а также ставить и обсуждать вопросы, в принципе не имеющие ответа; например, о смысле жизни). Рассуждать о не полностью понятых вещах — и даже не полностью осознанных — для многих страшно интересно, и попытки такого мудрствования — это и есть философия. После того, как в результате длительного обсуждения, что-нибудь четко выкристаллизовывается, то возникает уже четкая наука с четкими определениями, которая отпочковывается от философии. Вся история философии и состоит в том, что от нее постепенно отпочковываются те или иные науки. Например, в конце XIX века отпочковалась от философии психология, а на заре времен — математика.”

Предлагаемая статья очерчивает круг явлений из различных научных областей — от естественных до экономических наук, — связанных с неформальными понятиями простоты и сложности. Некоторые из этих областей уже превратились в развитые математические теории, такие как теория фракталов и теория сложности вычислений и алгоритмов. Для других методы математического моделирования еще предстоит разработать. Рекомендуем статью широкому кругу читателей, интересующихся математическими методами и возможными областями их приложения.

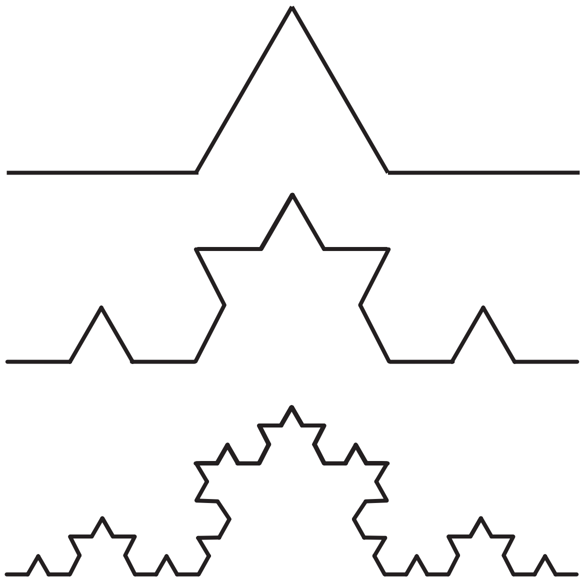
> “Есть вещи, которые можно спокойно объяснять два раза, не рискуя, что хоть кто-нибудь тебя поймет.”
>
> Сова
>
> (А. А. Милн. Винни-Пух и Все-Все-Все.)

Простота и сложность вызывают подчас противоречивые эмоции: от радостного удивления до досады и разочарования. “Все гениальное — просто”, “святая простота”, “простота хуже воровства”, “прост как правда” — эти выражения свидетельствуют о сложности и неоднозначности понятия и восприятия простоты. Нас часто восхищает совершенная простота природы, художественных произведений, инженерных и научных решений и отвращает тривиальная простота, разрушающая гармонию связей, отношений, событий. Мы пренебрежительно говорим о простой задаче и уважительно — об изящно-простом решении сложной задачи; опасаемся простых решений задач общественного развития. В характеристике человека простота выступает антиподом сложности, т.е. разнообразия его духовного мира, и хитрости, т.е. — сложности познания и предсказания стереотипов его поведения.

Простоте и сложности уделяют внимание все науки от философии и математики до педагогики и психологии, причем этим феноменам даются различные по форме, но близкие по сути определения. Мы, вслед за У. Росс Эшби (У. Росс Эшби, 1959), сложностью системы в самом общем виде будем называть число обнаруживаемых исследователем различий между ее элементами. Несколько иначе (но тождественно по сути) сложностью системы называют число шагов самых простых алгоритмов, решающих связанные с этой системой практически значимые задачи. Реальным системам, как правило, можно соотнести несколько мер сложности, характеризующих типичные задачи и алгоритмы их исследования. Слова Григория Сковороды о том, что все нужное — просто, а сложное — не нужно, как нельзя лучше передают деятельностную или алгоритмическую природу понятий простоты и сложности, абсолютность которых связана с единственностью измерительной "алгоритмической" шкалы и объективными системными свойствами, а относительность — с изменяющимися задачами и алгоритмами их решения.

Широко известный математический объект — фрактал — дает пример неразрывности простого и сложного[1]. Как известно, понятие фрактала было предложено Мандельбротом в 1975 г. для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Фрактальные объекты, согласно своему первоначальному определению, обладают размерностью, строго превышающей размерность элементов, из которых они построены. Заметим, что точного определения фрактала до сих пор не предложено. Одним из определяющих свойств фрактала является самоподобие. А именно, иерархический принцип организации фрактальных структур не претерпевает существенных изменений при рассмотрении их "через микроскоп" с различным увеличением. То есть в любом масштабе фрактальные структуры выглядят примерно одинаково. Приведем иллюстрирующий пример. Рассмотрим ряд областей, построенных следующим образом: пусть D_0 — область, ограниченная равносторонним треугольником. Делим стороны треугольника на три равные части и на средней части строим равносторонние треугольники, отбрасывая основания новых треугольников, получаем область D_1. Продолжая такое построение неограниченно, получаем области D_0, D_1, D_2, D_3, $\ldots$ Множество точек, принадлежащих всем этим областям, образует область D. Граница этой области есть кривая Коха, получаемая как предел построенных зубчатых линий. На рисунке приведены три первых приближения к этой кривой.

[1]Хорошим введением в математическую теорию фракталов может служить статья В. В. Жикова "Фракталы", Соросовский образовательный журнал, Математика, 1996 г. — *прим. ред.*



Заметим, что размерность кривой Коха равна $\frac{\lg 4}{\lg 3}$. Кроме того, отметим, что кривая Коха самоподобна (если угодно, устроена предельно просто): каждая часть является миниатюрной копией целого, и не имеет касательной ни в одной точке.

Свойство фрактальности или самоподобия присуще структурам многих биологических и социальных систем. Например, анализ видов и масштабов деятельности обнаруживает наличие ее структурных инвариантов, образующих “ядро развития” или систему шести факторов производства: природного, человеческого, технического, институционального, информационного, организационного (О. В. Иншаков, 2003). Воспроизводство сочетания этих факторов (образующих системное единство) в любом масштабе деятельностной структуры — от элементарного единичного акта до всей социально-экономической системы, в условиях непрерывного изменения ее элементов — результатов деятельности, определяет главные закономерности функционирования и развития социально-экономических систем любого вида и масштаба.

Другой пример неразрывности простого и сложного дает эволюция языков программирования. Известно, что первым программистом была женщина — леди Ада Лавлейс, дочь лорда Байрона. Она разрабатывала программы для одного из первых механических компьютеров, созданного в начале прошлого века английским ученым Чарльзом Беббиджом. Однако настоящее программирование в современном понимании началось с момента создания первой *электронной* вычислительной машины — с этого времени мы проведем указанный анализ.

Первые ЭВМ, созданные человеком, имели небольшой набор команд и встроенных типов данных, но позволяли выполнять программы на машинном языке. Машинный язык — единственный язык, понятный ЭВМ. Он реализуется аппаратно: каждую команду выполняет некоторое электронное устройство. Программа на машинном языке представляет собой последовательность команд и данных, заданных в цифровом виде. Например, команда вида **1A12** в 16-ричном виде или 0001101000010010 в двоичном виде означает операцию сложения (**1A**) содержимого регистров **1** и **2**. Очевидно, что кажущаяся простота каждой такой команды в отдельности приводит к тому, что для создания практически любой прикладной программы необходимо написать огромное множество таких простейших команд. С другой стороны, сложность разработки таких программ трудно переоценить: программисты обязаны были знать архитектуру машины досконально и при этом должны были стремиться к созданию программ, которые изначально не содержали бы ошибок, поскольку отладка программ непосредственно на машинном языке является труднореализуемой задачей. Вместе с тем такой способ разработки давал программисту просто невероятную власть над системой. Становилось возможным использование таких хитроумных алгоритмов и способов организации программ, какие и не снились современным разработчикам. Например, могла применяться (и применялась) такая возможность, как самомодифицирующийся код. Знание двоичного представления команд позволяло иногда не хранить некоторые данные отдельно, а встраивать их в код как команды. И это далеко не полный список приемов, владение хотя бы одним из которых сейчас сразу же продвигает программиста до уровня “гуру” экстра-класса. Но при этом нельзя не заметить, что общий результат, которого можно достичь, программируя в машинных кодах, современному пользователю показался бы весьма простой программой – и все только потому, что эволюция языков программирования изменила понятие простейшей единицы кода, сделала его более емким, что повлекло за собой возможность создания программ с более широкими возможностями.

Эволюция языков программирования пошла по пути облегчения создания и чтения программного кода, что изначально выразилось в замене числового кода команд на мнемонические обозначения (язык ассемблера), а впоследствии привело к созданию более абстрактных языков высокого уровня, которые оперировали с данными в виде переменных, а не ячеек памяти. Естественно, программы на этих языках уже не понятны исполняющей их машине, поэтому неотъемлемой частью всех языков программирования являются специальные программы, трансляторы или компиляторы, главной задачей которых является перевод программы в машинный код. И это сопровождается падением эффективности. Возникает вопрос: стоит ли этого абстракция? Стоит, так как повышение уровня абстракции влечет за собой повышение уровня надежности программирования — современные языки программирования позволяют обнаружить большинство ошибок в программе еще на этапе компилирования. С низкой эффективностью можно бороться путем создания более быстрых компьютеров. Если требования к памяти слишком высоки, можно увеличить ее объем. Это, конечно, требует времени и средств, но решаемо, и поэтому с этим можно смириться. С другой же стороны, увеличение абстракции ведет к приближению языков программирования к реальным языкам, что облегчает их освоение — ведь лексические единицы гораздо проще запоминаются, когда они близки к уже используемым аналогам. Естественно, то, что в языках программирования высокого уровня сейчас называют простейшим оператором, может занимать несколько строк машинного кода, написание которых еще полвека назад само по себе считалось довольно сложной задачей. Но эта сложность теперь спрятана от глаз разработчика, поэтому таковой не воспринимается. В результате мы получили, что современное понимание сложности программы связывается исключительно со сложностью решаемой задачи, а корреляция последней со сложностью создания программного кода постепенно исчезает и осуществляется только опосредованно через конечный результат.

Почти все широко используемые языки программирования к настоящему времени превращены в объектно-ориентированные: основным элементом программы в них является объект как некая сущность, объединяющая данные с обрабатывающими эти данные процедурами. При этом разработчики все чаще используют в своей работе так называемы CASE-системы, являющиеся, по сути, надстройками над языками программирования — средства визуального моделирования, позволяющие интерактивно разрабатывать архитектуру создаваемого приложения, генерировать его исходные тексты и параллельно работать над документированием разрабатываемой системы. Этот эволюционный процесс непрерывно усложняет понятие простейшего элемента программы, расширяет требования к конечному результату, постоянно увеличивая запрашиваемую сложность последнего. Появление многопроцессорных компьютеров и соответствующих параллельных вычислительных алгоритмов внесло существенные коррективы в понятие сложности, которая стала связываться с минимально необходимым числом последовательных шагов параллельного решающего алгоритма. Это существенно снизило сложность многих широко используемых алгоритмов. Заметим, однако, что при этом "старая" сложность новых параллельных алгоритмов (общее число операций) значительно превышает сложность последовательных.

Объективность алгоритмической сложности обусловлена лежащим в ее основании системным разнообразием — числом различных реализаций одного и того же системного свойства. В частности, число элементов может характеризовать сложность системы, если каждый из них обладает единственной актуальной (т.е. существенным образом определяющей сложность актуальной задачи) мерой. Если мера характеризует взаимодействие элементов, то сложность системы связывается с числом межэлементных связей. Если мера элементов или связей определяется некоторым внешним свойством (например, их принадлежностью к иерархическому уровню), то именно оно будет характеризовать сложность системы. Поскольку системные свойства, как известно, проявляют себя по-разному в различных взаимодействиях, сложность системы зависит и от внешних условий. Все это позволяет говорить о, возможно, неограниченном множестве потенциальных сложностей каждой системы и его конечном и изменчивом актуальном подмножестве[2].

Эти простые антагонистические или взаимоотрицающие (простота есть отсутствие сложности) отношения простоты и сложности кажутся на первый взгляд исчерпывающими. Однако множественность и взаимообусловленность качеств и шкал больших и даже не очень больших систем позволяют увидеть их взаимную обусловленность — причинно-следственную или взаимно дополнительную, источником которой являются межструктурные связи в больших системах, причем именно эти взаимоотношения порождают нелинейные динамические свойства, лежащие в основе их самоорганизации и

[2](*Прим. ред.*): Для ознакомления читателя с математической теорией сложности вычислений и алгоритмов рекомендуем следующую литературу:

Гэри, Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М.: "Мир", 1982.

Носов В.А. Основы теории алгоритмов и анализа их сложности. Курс лекций, Москва, 1992.

Разборов А.А. О сложности вычислений, *Математическое просвещение*, серия 3, вып. 3, 1999, с. 127-141.

Математическое просвещение, серия 3, вып. 4, 2000 (теория сложности алгоритмов и вычислений — основная тема номера).

развития.

Проиллюстрируем разнообразие этих связей тремя группами примеров. Первая проявляет себя в антагонистических отношениях системных структур в рамках сверхструктуры. В качестве хрестоматийного примера приведем простейшую двухкомпонентную замкнутую модель “хищник-жертва”, динамика которой описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений Вольтерра. Рост численности хищника, вызванный ростом численности жертвы, приводит к уменьшению последней, что в свою очередь уменьшает численность хищника, открывая возможность нового роста численности жертвы. Результатом этого антагонистического взаимодействия являются стационарные колебания сложности обеих компонент экосистемы, характеризующие ее устойчивую динамику.

Вторую группу примеров представляют отношения альтернативности, когда одна и та же функциональность реализуется альтернативными способами. В качестве примера можно привести взаимную дополнительность реализующих функцию управления организационной и институциональной структур и соответствующих факторов развития социально-экономических систем. Другим примером служит тенденция современной “информационной” экономики — упрощение организационной структуры предприятия по мере роста образования и квалификации работников и переходе на компьютерные технологии производства и управления. (Однако множественность мер сложности, как правило, не позволяет делать общие выводы о взаимозависимости сложностей структур социально-экономических систем. Например, усложнение техноструктуры может привести как к усложнению, так и к упрощению организационной структуры предприятия (Г. Минцберг, 2002).

Третья группа примеров проявляет себя в иерархических межструктурных отношениях “система-подсистема”: одна и та же функциональность может реализовываться на разных иерархических уровнях больших систем, перенося на них и соответствующую структурную сложность. В качестве примера можно привести прямую зависимость сложности организаций от простоты (институциональной, организационной, информационной структур) общества в целом. В частности, при низком уровне развития социально-экономической среды в России предприятия и организации обеспечивают устойчивость функционирования включением в свой состав множества дополнительных производств и функций. И наоборот, в современной высокоинформационной и высокоинституциональной экономике США происходит рост сверхмалых, сверхпростых и сверхспециализированных предприятий, осуществляющих свою деятельность через Интернет. Автору посчастливилось непосредственно ознакомиться с работой предприятий “универсальный офис-менеджер” и “универсальная бухгалтерия”, обслуживающих несколько малых и сверхмалых предприятий.

Обусловленность упрощения разнообразия некоторого структурного уровня иерархической системы наличием более высоких уровней является широко известным универсальным системным свойством. Атомы состоят из определенного количества элементарных частиц, молекулы — из определенного числа и вида атомов. Еще меньшее структурное разнообразие молекул совместимо с жизнью. Большая часть геометрически допустимых положений частей человеческого тела не может реализоваться из-за болевых ощущений, а оставшаяся часть уменьшается рамками целенаправленной деятельности, разнообразие которой в свою очередь ограничивают институциональные нормы общества.

Добавление нового иерархического структурного уровня, уменьшая разнообразие низших уровней, в целом увеличивает общую сложность системы за счет появления нового разнообразия межуровневых и межструктурных связей. Разнообразие высших уровней является наиболее существенным или "главным" системным разнообразием (ярким примером чего является существенное личностное и несущественное морфологическое разнообразие членов общества).

Наконец, взаимообусловленность простоты и сложности проявляет себя в структурно-функциональных отношениях. Например, простота поведения, т.е. устойчивое воспроизводство одних и тех же алгоритмов и стереотипов в изменчивой среде, как правило, свидетельствует о сложной морфологической структуре или интеллектуальной и духовной структуре личности. Примером этого является, с одной стороны, постоянство и относительная независимость от среды гомеостатических параметров высокоорганизованных живых организмов (в особенности — головного мозга). С другой стороны, уменьшение разнообразия поведенческих стереотипов человека часто является результатом воспитания и обучения, не обязательно связанного с собственно поведенческими реакциями. (Подтверждением стереотипности форм бытового поведения различных профессиональных и этнокультурных групп являются большое число письменных наблюдений от научных исследований до анекдотов.)

Приведенные примеры показывают, что простота и сложность есть не столько взаимоисключающие характеристики, сколько взаимная причинно-следственная функционально-морфологическая обусловленность частей неразрывного системного целого.

Является ли взаимная обусловленность простоты и сложности обязательной? Имеет ли понятие простоты какое-либо самостоятельное значение? Возможна ли содержательная "абсолютная" простота? Положительный в каком-либо нетривиальном смысле ответ на этот вопрос разрывает обязательную связь простоты и сложности — абсолютной сложности, очевидно, не бывает.

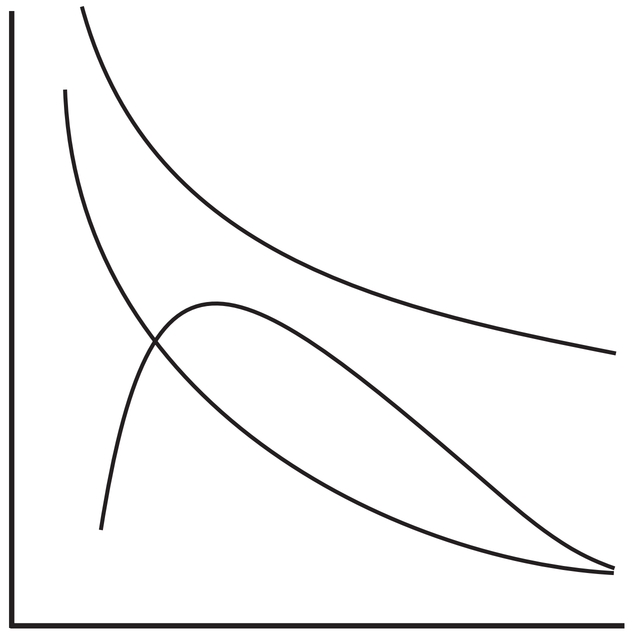
Нетривиальную абсолютную простоту являют нам экстремальные свойства природы и соответствующие им научные и практические задачи поиска условного экстремума. В терминах экстремальности формулируется большое число фундаментальных законов природы и общества. Это, прежде всего, лежащие в основе механики вариационные принципы, среди которых — принцип наименьшего действия Мопертюи-Лагранжа, говорящий о том, что реальное движение механических систем доставляет минимум функции действия, и его частные случаи — принцип Якоби, выделяющий отвечающие реальным движениям кратчайшие траектории в конфигурационном пространстве (геодезические), и принцип Ферма, гласящий, что форма лучей света (траекторий) в оптически неоднородной среде должна быть такой, чтобы время его распространения было наименьшим. На языке экстремальности естественно формулируется любая целевая задача (минимизировать отклонение от цели при заданных ограничениях), да и вся математическая теория управления. (Как известно, Мопертюи придавал открытому им принципу телеологический смысл, считая его проявлением целенаправленности природы.) Отметим здесь же широко известный принцип максимизации полезности, лежащий в основе экономической теории потребления и теории игр.

Однако, исходя из сказанного, на поставленные выше вопросы следует дать, скорее, отрицательный ответ, поскольку само понятие экстремальности, подразумевающее наличие рядоположенного или однотипного разнообразия, рост которого увеличивает сложность системы и в то же время (потенциально) уменьшает величину минимума, очевидно, связывает абсолютную простоту со сложностью.

Сложная взаимообусловленность простоты и сложности является не только результатом, но и механизмом системного развития. В основании эволюционной модели, как известно, лежит понятие эффективности, напрямую связанное с предметом нашего исследования. Действительно, нетривиальные простейшие состояния системной структуры отвечают максимальным значениям отношения “структура-функция”. Именно это отношение, формируя и существо оптимума, и ограничения в его достижении, дает объективную меру (и норму) относительной сложности и нетривиальной абсолютной простоты. Во многих случаях отношение мер функциональной и организационной сложностей дает меру системной эффективности: числитель этой дроби — функциональная сложность — как правило, характеризует цель, а знаменатель — структурная сложность — затраты, связанные с ее достижением. Поэтому, исходя из предмета нашего исследования, рассмотрим сложностные аспекты механизмов эволюционной динамики на примере одного из эволюционных циклов гипотетического вида (биологического или деятельности), имеющего некоторое исходное разноообразие, ареал (рынок) и среднюю (по индивидуальным представителям — организмам или организациям) эффективность.

Как известно (например, В. Грант, 1991), главными механизмами эволюции являются внутривидовая конкуренция (естественный отбор) и генетические мутации (в экономике — модернизации) в изменяющейся внешней среде. Внутривидовая конкуренция, вытесняющая наименее эффективные структурно-функциональные реализации, приводит к возрастанию средней эффективности за счет уменьшения внутривидового разнообразия, т.е. — к упрощению видовой системы. При этом наш гипотетический вид расширяет ареал и усиливает давление на внешнюю среду. Именно эти признаки первого этапа эволюционного цикла часто называют признаками развития.

В условиях коэволюции вида и среды, которая почти всегда имеет место при наличии в последней биотических или социальных элементов, влияние последней служит полноправным третьим активным механизмом эволюции, предмутационным — в биологических и предмодернизационным — в социальных сообществах. Действительно, внешняя среда, представляя собой живую систему, адаптирующуюся к существованию нашего вида, в результате аналогичных эволюционных процессов также повышает свою эффективность путем уменьшения своего (значительно большего) разнообразия и тем самым усиливает сопротивление экспансии нашего вида (см., например, Van Valen, 1973).



Верхняя нисходящая кривая — разнообразие внешней среды;
Средняя нисходящая кривая — разнообразие вида;
Нижняя кривая с пиком — общая эффективность вида;

Таким образом, два параллельных процесса упрощения, один из которых (внутри вида) увеличивает, а другой (во внешней среде) — уменьшает итоговую средневидовую эффективность, предопределяют неизбежный конец первого этапа, который завершается максимальными значениями ареала и относительной эффективности вида. С этого момента адаптивное упрощение (и, как следствие, рост эффективности сопротивления виду) среды в силу значительно ее большего адаптивного потенциала — исходного разнообразия — опережает постоянно замедляющееся упрощение (и соответствующий рост эффективности функционирования) вида, что дает начало второму, кризисному этапу его эволюционного цикла. На втором этапе относительная общая средневидовая эффективность и ареал уменьшаются в результате возрастающего сопротивления внешней среды и исчерпания приспособительного потенциала вида — внутривидового разнообразия, см. рисунок. В этот период вид существует в неблагоприятных и, в конечном счете, кризисных условиях, изменяющих привычные условия видового гомеостазиса и вследствие этого неизбежно ослабляющих устойчивость некоторых из его системных структур.

Третий, посткризисный этап эволюционного цикла существует в нескольких вариантах. Первый — мутационный или модернизационный – появление нового разнообразия путем расщепления "старых" состояний и резкий рост относительной эффективности (поскольку мощность нового "вертикального" разнообразия межструктурных связей значительно превышает мощность старых "горизонтальных" моноструктурных элементных разнообразий). Кроме того, расщепление наиболее высокой по иерархическому уровню подсистемы организма или вида (с наименьшим горизонтальным разнообразием), а особенно — добавление нового уровня — дают наибольшее "вертикальное" разнообразие (сложность), которое, как мы отмечали выше, потенциально позволяет достичь большего абсолютного минимума (простоты).

Поясним это рассуждение элементарным числовым примером. Рассмотрим трехуровневую систему, в которой на низшем уровне находится m, на среднем — n, на высшем — p элементов, причем выполнено неравенство $m > n > p$ (очевидное для организационных систем). Число вертикальных межуровневых одноэлементных связей равно произведению mnp. Добавление одного элемента на первом уровне дает приращение числа связей, равное np, на втором — mp, на третьем — mn. При этом, очевидно, $np < mp < mn$.

Косвенным подтверждением этому можно считать то, что внутривидовая конкуренция сильнее проявляется у более сложных животных (В. Грант, 1991) и в высокотехнологичных производствах, что приводит к относительно более простым минимальным структурам и, как следствие, более высоким скоростям эволюции. В качестве другого подтверждения можно привести превосходство совершенствования способов координации органов чувств в эволюции высших животных над совершенствованием отдельных из них (В. Грант, 1991).

Вторым, изоляционным вариантом третьего этапа эволюционного цикла является дальнейшее уменьшение ареала до достижения равновесия со средой в условиях равного разнообразия. Третий вариант — финальное упрощение и исчезновение.

Эволюция биологических видов и форм человеческой деятельности демонстрирует, как известно, все три варианта последнего этапа эволюционного цикла, в частности, потому, что неизбежные кризисы каждого нового уровня сложности вследствие вовлечения во взаимодействие все большего разнообразия внешней среды оказываются все более тяжелыми, что, в конце концов, ведет к исчерпанию модернизационного потенциала вида в конце эволюционного макроцикла и его финальному упрощению.

Помимо коэволюции механизмом эволюции служит неустойчивость оптимальной структуры вследствие открытости системы. Действительно, экстремальная простота структуры как высшая степень адаптации приводит системную структуру к границе, за которой начинается деградация — потеря части или всей совокупности "главных" функций. Выход за границу в условиях активного взаимодействия с изменяющейся внешней средой фактически неизбежен. Восстановление структурной устойчивости уже не может быть достигнуто тем же путем конкурентного отбора вследствие утери разнообразия. Альтернативой является возведение "барьера" на границе старой структуры путем увеличения ее размерности — созданием новой структуры и соответствующей функциональности (информационной, управленческой и др.). После появления первых образцов новой структуры и функций начинается рост их разнообразия посредством адаптации к разнообразным внешним условиям и последующее его уменьшение путем конкурентного отбора.

Удержание системной структуры в области максимальной эффективности приводит к постепенному отмиранию неиспользуемого множества менее эффективных структур, которое постепенно исчезает, уступая место нарождающемуся множеству структур нового типа. Результатом этого многовиткового процесса является рост структурной размерности, сопровождаемый упрощением внутреннего разнообразия каждой из них. Появляется иерархическая сверхструктура, элементами которой являются старые, теперь уже “элементарные”, структуры. Таким образом, обеспечение устойчивости максимально простой структуры приводит к усложнению структурно-функциональной размерности системы. Сложность моноструктурного разнообразия заменяется сложностью полиструктуры.

Эти простые рассуждения помогают понять, что реализующая сложные функции высокоэффективная простая структура, на самом деле всегда только ее часть, и чем меньше и проще видимая часть “структурного айсберга”, тем больше и сложнее часть невидимая, и простое совершенство творения — есть невидимая (часто спрятанная в творце) сложность.

Нарушения непрерывности эволюции приводят к дисгармоничным взаимоотношениям структуры и функции. Вынужденное изменение системных функций (вынужденная адаптация) вызывает быстрое рождение соответствующей структуры, встраиваемой в старую “насильственным” способом с образованием химерических связей.

Теперь — о когнитивной функции простоты. Как известно, явления сложны — сущности просты. Упрощение картины мира путем установления причинно-следственных связей или законов является главной задачей непрерывно усложняющей свои функции и временами упрощающей свою структуру науки. Одним из главных критериев совершенства научных теорий является, как известно, критерий экстремальной абсолютной простоты, т.е. наименее сложной структуры, обладающей необходимой функциональностью объяснения и предсказания.

Необходимым условием научного познания служит постоянство (самое простое поведение) законов природы, а более точно — непрерывность эволюции вселенной, дающей простор свободной адаптации самих законов природы и общества, упрощающих их форму при сохранении во многом неведомой нам функциональности. Еще относительно недавно казавшаяся совершенной линейная простота сейчас кажется вульгарно простой. Но утрата механистической линейной простоты картины мира — очевидно, лишь конец одного из эволюционных циклов науки, и сейчас еще несовершенная сложность нового нелинейного знания когда-то неизбежно примет форму совершенной нелинейной простоты, а затем с такой же неизбежностью станет раздражать примитивной вульгарностью.

И наконец — об этической функции простоты. Личностная эволюция, начинающаяся и заканчивающаяся простотой детского “рая”, почти всегда в той или иной степени разрывна в своей середине. Гармоничная в ограниченном жизненном пространстве простота, попадая в сложное окружение, некоторое время сохраняется, называясь святой, т.е. наивной, детской, не ведающей о сложности мира, затем — химеризуется и становится той, что хуже воровства. Удел большинства — полухимерическая простота и свойственные ей нереализованные возможности и несвершенные свершения. Достижение же совершенной простоты, гармоничной сложному окружению, есть результат подвижничества — упорного труда и самоограничения. В химерическом окружении она по праву называется гениальной, имеющей совершенство природы.

Суммируя сказанное, сделаем вывод, что с не меньшим основанием, чем красота, миром правит простота, являющая собой начало, конец, цель и механизм развития. В известном смысле эволюция природы и общества есть эволюция самой простоты: от тривиальной абсолютной простоты отсутствия какого-либо содержания к совершенной простоте каждого отдельного воплощения бесконечного универсума.

Литература

[1] О. В. Иншаков. “Ядро развития” в контексте новой теории факторов производства / Экономическая наука современной России, 2003, с. 11-25.

[2] У. Росс Эшби. Введение к кибернетику. Перевод с английского. М., 1959

[3] 2. Г. Минцберг. Структура в кулаке: создание эффективной организации/ пер. с англ. Под ред. Ю. Н. Каптуревского. – СПб.: “Питер”, 2002.

[4] 3. В. Грант, Эволюционный процесс, М. Мир, 1991

[5] 4. Van Valen, A new evolutionary Law Theory, 1, 1-30, 1973 .

Воронин Александр Александрович,
профессор, доктор физ.-мат. наук,
проректор Волгоградского
Государственного Университета.

Email: alexander.voronin@volsu.ru

Реализация принципов мыследеятельностной педагогики при построении курса геометрии для общеобразовательной школы

А. А. Устиловская

Одно из возможных направлений углубления и развития понятия “содержание образования” связано с концепцией *деятельностного содержания*, основанной на теории мышления и деятельности и реализуемой в рамках *мыследеятельностной педагогики*. Об этом направлении было рассказано в №№12, 20, 31, 33 нашего журнала в соответствующей рубрике. В настоящей статье автор конкретизирует принципы мыследеятельностной педагогики применительно к общеобразовательному курсу геометрии. Работа осуществлялась под руководством доктора психологических наук Ю.В.Громыко[1], апробация проводилась в нескольких московских школах и в школах Хантымансийского АО Тюменской области.

Вопрос реформирования преподавания математики стал обсуждаться среди математиков в связи с открытиями 18-ого и 19-ого веков. Французский математик Э. Борель, выступая в 1914 году на конференции по математическому образованию, предлагает рассматривать “точные знания не как самоцель, но как средство образования”. Формирование культурного человека предполагает ознакомление с современным уровнем развития науки и “математика не может поэтому оставаться единственной неизменной частью школы”. При этом Э. Борель отмечает необычный консерватизм двух групп: родителей и преподавателей математики[2]. В результате и на сегодняшний день поставленная век назад проблема не решена.

Многолетняя работа учителем математики в массовой школе дает основания согласиться с В. И. Арнольдом, отмечающим “повсеместно наблюдаемое отвращение к математике и стремление всех правителей отомстить за перенесенные в школе унижения ее уничижением”[3]. Причина такого положения в том, что стало системой “выхолощенное

[1]См. Громыко Ю.В. Мыследеятельностная педагогика (теоретико-практическое руководство по освоению высших образцов педагогического искусства). — Мн.: Технопринт, 2000. — 367 с.

[2]Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. В сб. “Математика в образовании и воспитании” — М., ФАЗИС, 2000 — 248 с. С. 23-37.

[3]Арнольд В.И. Математика и математическое образование в современном мире. В сб. “Математика в образовании и воспитании” — М., ФАЗИС, 2000 — 248 с. С. 195-205.

и формализованное преподавание математики"[4]. К сожалению, сложившееся положение приводит к необоснованному уменьшению доли и роли математики в общем образовании. При этом уникальные возможности геометрии в формировании и развитии воображения, мышления, продуктивного действия в традиционных курсах и существующих методиках преподавания не реализуются. Внедрение в практику школы новых подходов к изложению геометрии, реализованных в учебниках геометрии И. Ф. Шарыгина, а так же в учебнике В. Г. Болтянского и Г. Д. Глейзера, осложнено, наряду с выше отмеченным консерватизмом, недостаточной математической и философской подготовкой преподавателей. Методика преподавания геометрии (которая в большей степени представляет собой методические рекомендации по проведению уроков) хотя и описана как гарантирующая желаемый результат, не учитывает ни возрастные и индивидуальные особенности школьников, ни психологические закономерности процесса усвоения знаний и развития способностей.

Возникнув как практика, геометрия постепенно отделилась от опыта; при этом отделение от практики направлялось самой практикой. Формирование *идеального предмета* геометрии и ее *мыслительного метода* представляло единый процесс, в котором обе стороны как бы подталкивали друг друга в их движении к области абстрактного мышления. В школьном курсе этот процесс никак не представлен, а геометрические фигуры появляются на страницах учебников в виде хорошо знакомых изображений внешней формы реальных вещей. В какой момент учащиеся знакомятся с идеальными объектами? Считается, что мыслимые образы идеальных фигур формируются в сознании учащихся по мере разворачивания курса. Однако, практика обучения показывает, что справедливо это только для математически одаренных детей. У остальных происходит подмена идеальных геометрических фигур их знаковыми заместителями — чертежами и терминами, что отражает объективное диалектическое противоречие в сущности евклидовой геометрии: в ней непосредственно изучаются идеальные геометрические фигуры, которых нет в действительности, но ее выводы долгое время считались безусловно верными для реальных пространственных форм и отношений[5]. Правильнее сказать, что причина подмены идеальных фигур их изображениями заключается в отсутствии работы с этим неустранимым противоречием. А именно эта работа и определяет специфику мыслительной работы в геометрии. Отмеченное противоречие неизбежно отражается в школьном курсе геометрии. Две противоположности — реальность и наглядность, с одной стороны, и логическая строгость, соответствующая абстрактности, с другой стороны, на страницах учебников либо смешиваются, либо разрываются. В обоих случаях не может быть освоен предмет геометрии, как специфический идеальный объект. Формирование и совершенствование способов работы с диалектическим противоречием евклидовой геометрии составляет одно из направлений работы по развитию характерного для геометрии типа мышления, а так же мышления в целом.

Подготовка школьника к освоению столь сложного предмета, к работе с противоречием не проводится. В начальном образовании изображения геометрических фигур используются в качестве вспомогательного материала при выполнении различного рода заданий, и их введение никак не может быть связано с содержанием геометрических

[4]Там же.

[5]См. Александров А.Д. Диалектика геометрии. "Математика в школе", 1986, №1, с. 12-19.

понятий. Использование легко узнаваемых изображений в качестве наглядных опор при освоении счета и формировании графических навыков весьма эффективно, но имеет и негативные последствия — способствует восприятию геометрической фигуры как вещи, кем-то уже созданной, застывшей. Распознавание изображения как геометрической фигуры происходит только по внешним наблюдаемым признакам. Данные зрительного восприятия прямо и непосредственно переводятся в утверждение, что имеющееся изображение, именно в том виде, как оно дано, и есть геометрическая фигура, например, квадрат. Таким образом, геометрическая фигура лишается своего идеального содержания, ее графический знак натурализуется как иконическое изображение. Именно с таким натуральным пониманием геометрического объекта приступают учащиеся к изучению систематического курса геометрии, не подозревая о наличии особых смыслов, зафиксированных в этих графических знаках. Нередко учащиеся восьмого класса не осознают, что "квадрат", площадь которого они вычисляли в третьем классе, и квадрат как частный случай параллелограмма — это не одно и то же. Далее, если при рассмотрении формально-логического курса ребенку в качестве наглядности предлагается чертеж, у него актуализируется непосредственно зрительное восприятие чертежа как вещи, закрепленное в начальном обучении. И тогда не понятно, зачем доказывать равенство углов, если можно в нем убедиться на основе измерения. Отметим, что решение задач на вычисление (особенно с использованием стандартных единиц измерения) в начале изучения систематического курса, когда ученик только "обнаруживает" для себя идеальные фигуры, также возвращает его к фигурам-вещам. С другой стороны, если наглядности не достаточно, ребенок ничего не понимает, он только заучивает фразы, не понимая их смысл. Поэтому формулировку любой теоремы произнести может, повторить доказательство "как стихотворение" может, но задачи не решает.

Приступая к созданию новой концепции курса, в котором геометрия рассматривается как средство развития способностей учащихся, нужно ответить на целый ряд вопросов. Мы остановимся на нескольких. Первый: как устроено геометрическое знание? Или более узко: что представляет собой геометрическое понятие? Не в конкретном своем проявлении, а в отличие, например, от понятия числа, а также от понятий в других предметных областях: физике, экономике, лингвистике и т.д. Второй: в чем развивающий эффект геометрии? Третий вопрос: каким образом организовать преподавание, чтобы реализовывался развивающий эффект?

Рассмотрим некоторые важные в рамках ответа на поставленные вопросы моменты, не претендуя на развернутое изложение.

Специфика геометрии как системы знаний определяется не только идеальной природой геометрических объектов, но и высокой степенью разработанности знаковых средств. При этом систематический курс представляет собой особый (формально-логический) способ изложения *результатов*. Исключительная роль геометрии в системе школьных предметов определяется, на наш взгляд, не только совершенством формально-логического вывода, но и тем, что геометрия представляет собой своеобразную *систему соотнесений* идеальных и материальных объектов, идеального и реального миров.

"Чтобы отчетливо понять самые числа и фигуры и чтобы образовать науки о них, — отмечает Лейбниц, — нужно еще нечто, чего чувства не могут доставить, и что к ним прибавляет разум"[6]. Тем самым Лейбниц обращает внимание на невозможность сведения работы с геометрическим материалом к чувственному восприятию, чувственно-предметному действию, эмпирическому обобщению. "Мы не можем мыслить линию, — говорит Кант — не проводя ее мысленно, не можем мыслить окружность, не описывая ее"[7], акцентируя внимание на образном сопровождении мысленных действий, на наличии *процессуальности* в геометрической мысли. Это мысленное "проведение", отмечает П. Флоренский, "опирается на тот или другой конкретный опыт, либо в настоящем, ... либо — в прошлом", хотя мы "и мним иногда при этом, будто имеем дело с "чистою" интуициею, только потому, что воспоминания прошлых опытов бедны"[8], выделяя в качестве источника *визуальных образов*[9] опыт предметных действий с фигурами-вещами. Приведенные высказывания позволяют определить ценность геометрии как учебного предмета — это возможность раскрыть перед ребенком недоступный чувственному восприятию идеальный мир.

Геометрические объекты, как и другие объекты математики, являются идеальными объектами, или математическими абстракциями. Как отмечает В. С. Степин[10], среди идеальных объектов выделяют две основные разновидности — эмпирические и теоретические объекты. Эмпирические объекты фиксируют признаки реальных объектов опыта, являются определенными схематизациями фрагментов реального мира. Любой признак эмпирического объекта может быть найден у соответствующего реального предмета. Эмпирические объекты составляют смысл таких терминов, как "Земля", "провод с током", "расстояние между Землей и Луной" и т.д. Именно как эмпирические формируются геометрические понятия в наглядно-практических курсах. Теоретические, или абстрактные, объекты являются *идеализациями*, "логическими реконструкциями действительности". Они могут обладать признаками, которыми не обладает ни один реальный объект. Теоретические объекты составляют смысл таких терминов, как "точка", "идеальный газ", "абсолютно черное тело" и т.д. Как теоретические следует рассматривать и геометрические объекты.

Взгляд на геометрические объекты как на теоретические согласуется с подходом, принятым в философских основаниях математики. Мыслительный акт идеализации как одного из видов математического абстрагирования "состоит в том, что в некоторой ситуации наше воображение порождает некоторое понятие[11] , становящееся для нашего сознания предметом рассмотрения, причем это понятие наделяется нашим воображением не только такими свойствами, которые были выделены у исходных объектов в

[6]Лейбниц Г.В. Переписка с королевой Пруссии Софией-Шарлоттой и курфюрстиной Софией // Лейбниц Г.В. Собр. соч. в 4 т., М.: "Мысль", 1984 г., Т.3, стр. 373.

[7]Кант И. Критика чистого разума // Кант И. Собр. соч. в 8-ми томах, М.: Чоро, 1994 г., Т.3, с.527-537.

[8]Флоренский П.А. Анализ пространственности (и времени) в художественно-изобразительных произведениях // Флоренский П.А. Собр.соч., М.: "Мысль", 2000 — стр.83-84.

[9]Визуальный образ объекта — не образ памяти, не воспоминание ранее виденного, а "структурно ясная картинка" (Арнхейм Р. Визуальное мышление. // Зрительные образы: феноменология и эксперимент. Ч.1. — Душанбе, 1971. С. 263).

[10]Степин В.С. Теоретическое знание. — М.: "Прогресс-Традиция", 2000. — 744 с. С. 104-106.

[11]На наш взгляд, речь идет как раз об объекте. Понятие в большей степени фиксирует то, каким образом это порождение происходит.

результате “чистого” отвлечения, но и другими — воображаемыми — свойствами”[12].

Логико-психологический анализ знаковых средств геометрии, осуществленный В. М. Розиным[13], направлен на восстановление генезиса идеального предмета геометрии и ее мыслительного метода на основе изменения роли чертежа. В процессе становления геометрии были утрачены отдельные ступени в переходе от реальных вещей, фиксированных в чертеже, к геометрическим абстракциям. Это происходит в силу того, что обычно фиксируется *результат* познавательной деятельности, хотя наибольший интерес в плане восстановления генезиса знания представляет собой *процесс получения* результата — догадки, озарения, понимание неверности некоторого шага и т.д. И если мы хотим формировать способности, то исследование “поворотов” мысли, в том числе и неудачных, нужно сделать предметом исследования для учащихся.

Первоначально чертеж, дополненный числами и числовыми выражениями, играл главенствующую роль в передаче некоторого знания. Впоследствии все большую роль начинают играть термины, обозначающие отношения элементов чертежа и результаты сопоставления чертежей, а также суждения и умозаключения о взаимосвязях геометрических фактов. Фиксация отношения в термине приводит к его рассмотрению как самостоятельного геометрического объекта, при этом он наделяется характеристиками (допущениями), которыми не может обладать никакой реальный объект. Чертеж при этом становится средством фиксации и организации новых объектов (отношений, в том числе и не имеющих материальных аналогов) и их характеристик. То есть теперь чертеж “несет” на себе не только непосредственно наблюдаемые отношения элементов фигуры, но и “отношения отношений”, которые непосредственно в чертеже не представлены, и которые на основе чертежа не могут быть восстановлены.

Сказанное можно продемонстрировать следующим примером. Некто, изучая фигуру, выявил некоторые ее отношения, и далее — отношения отношений. Чертеж, с которым этот человек работал, несет на себе все полученные знания, их связи, а так же *способ* получения. Другой человек, смотрящий на чертеж, видит только то, что непосредственно наблюдаемо. Даже сопроводительный текст не гарантирует полноценное восстановление (понимание) того, что открыл для себя и фиксировал в чертеже и тексте автор. Второй сможет получить знания первого в том случае, когда ему скажут, что он должен проделать с фигурой, какие преобразования, какие сопоставления и т.д.

В педагогическом слое вопрос может быть поставлен следующим образом. В процессе изучения объекта (при формировании понятия о нем) некоторые ранее известные отношения (назовем их первичными), на основе которых были введены новые отношения (вторичные), “отмирают”. Первичные отношения перестают иметь самостоятельное значении, поскольку “содержатся” во вторичных. Но без первых невозможны вторые. Может ли ребенок понять второе отношение (а оно есть объект), если не знает о первом? На наш взгляд, — нет. Понимание сложного отношения предполагает осуществление деятельности, в процессе которой оно было открыто. Такое положение может быть проиллюстрировано на понятии “площадь”: каждый ученик знает формулу вычисления площади прямоугольника, но никакого понятия о площади как характеристике

[12]Математическая энциклопедия. Том 1. М.: “Советская энциклопедия”, 1977. С.43-44

[13]Розин В.М. Логико-семиотический анализ знаковых средств геометрии (к построению учебного предмета) // Педагогика и логика. “Касталь” М., 1993, с.203-305.

у него нет. Это проявляется в 9 классе при рассмотрении площадей прямоугольников, стороны которых выражены рациональными и иррациональными числами. Учащиеся не понимают зачем доказывать то, что давно известно и не вызывает сомнений. И в чем-то они правы. Действительно, при введении правила умножения обыкновенных дробей, исходно полагается, что формула верна для прямоугольника, стороны которого выражены рациональными числами.

Осуществляя реконструкцию процессов мышления, фиксированных в тексте геометрического доказательства, Г. П. Щедровицкий выделяет их *двухплоскостную структуру*[14]: плоскость чертежей-объектов (в ней происходят содержательные преобразования объектов) и плоскость знаковой формы (в ней преобразования фиксируются в виде символов, терминов и текстов). Движение в первом слое является весьма сложным, не однородным. На нем мы остановимся позже. Понимание доказательства при чтении текста происходит за счет мыслительных "движений", во-первых, по чертежу, а во-вторых, от чертежа к формальным словесно-алгебраическим и словесно-арифметическим соотношениям, в-третьих, осуществляется формальное движение в плоскости знаковой формы, в-четвертых, формально полученный результат может быть проинтерпретирован на чертеже. Единство всех этих движений задается *деятельностью* человека, исполняющего доказательство. Таким образом, понимание текста доказательства предполагает, наряду с освоением четырех выделенных типов "движений", осознанную их смену, направляемую познавательной деятельностью. Это один из моментов, определяющих развивающий эффект геометрии.

Описанные особенности геометрии как системы знаний позволяют сделать вывод о целесообразности различения в рамках методики преподавания *геометрического объекта* и понятия о геометрическом объекте, *геометрического понятия.*

Геометрический объект — это и точка, и фигура, и отношение элементов фигуры, и конструкция фигур, — то, на что направлено внимание в ходе решения задачи. Геометрический объект вначале создается в воображении, а затем становится объектом рассмотрения. Между этими двумя моментами необходим этап отстранения объекта, как бы его "вытаскивание" из области воображаемого, рефлексия, и дальнейшая фиксация в образе или знаке.

Геометрический объект задается совокупностью идеальных характеристик (отношений), обеспечивающих отличие определяемого объекта от любых других. В силу этой совокупности, говоря, например, о квадрате, мы говорим об одном и том же. Разные наборы характеристик задают разные объекты. Например, шар и сфера, чьи вещные модели не существуют раздельно, отличаются набором характеристик.

В отношении понятия мы придерживаемся толкования, предложенного В. В. Давыдовым[15], который рассматривает понятие как обобщенный способ решения класса задач или задачу, позволяющую проследить генезис понятия. Применяя такое *понятие о понятии* к геометрии, получаем: геометрическое понятие — это способ воссоздания идеального геометрического объекта, включающего выстраивание системы его связей

[14] Щедровицкий Г.П. Опыт логического анализа рассуждений ("Аристарх Самосский") // Щедровицкий Г.П. Философия, наука, методология. — М.: Школа культурной политики, 1997, — 656 с.

[15] Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: логико-психологические проблемы построения учебных предметов. М.: Педагогическое общество России, 2000. — 480 с.

с другими объектами и знаковую фиксацию.

Геометрическое понятие — знаково-символическая организованность, позволяющая сделать идеальный объект предметом коммуникации. Поскольку текст написан в рамках решения педагогической проблемы, мы рассматриваем геометрическое понятие в двух аспектах, как некоторый инвариант — нормативное понятие, и как индивидуальные варианты понимания — субъективное понятие. Нормативное понятие о геометрическом объекте имеет сложную структуру. Элементы этой структуры таковы: набор идеальных характеристик; материально-предметные интерпретации объекта в реальном мире; знаки, символы и построенные на их основе тексты-описания; действия и операции, позволяющие воссоздавать объект на основе различных видов фиксации, включать его в отношения, фиксировать новые объекты. Однако при формировании геометрических понятий мы не можем не учитывать субъективную сторону понятия, которая проявляется в наличие визуальных образов, гарантирующих отнесенность всех компонентов понятия к единому объекту. Освоенные учащимся мысленные действия по преобразованию геометрических объектов и формирующиеся на их основе специфические операции также имеют индивидуальные черты.

Таким образом, разные люди имеют об одном объекте различные понятия, в результате чего в мышлении ими восстанавливаются не тождественные объекты. Это явление имеет два основания. Во-первых, степень освоения нормативного понятия и логических операций; во-вторых, индивидуальные особенности работы с образом и сочетания образности и логичности. Проведенное нами исследование способов восприятия чертежа показывает, что уже здесь — на этапе понимания представленного объекта — учащиеся демонстрируют различные уровни интеллектуальной работы: от непосредственно зрительного восприятия чертежа как вещи (когда понимать нечего) до его всесторонней операциональной проработки (включающей, например, соотнесение пространств существования объекта и операциональной среды, в которой выполнен чертеж).

Формирование полноценных геометрических понятий, на наш взгляд, предполагает внимание педагога не только к освоению нормы, фиксированной в геометрическом тексте, но и к развитию воображения и рефлексии. Без субъективной составляющей нормативная превращается в формальность, ведет к вербализации знания.

В соответствии с методом В. В. Давыдова, освоение ребенком некоторого понятия предполагает прослеживание им генезиса понятия. Это не означает повторения ребенком исторического пути развития. Речь идет о генезисе понятия в мышлении. Генезис геометрического понятия включает понимание идеальных границ геометрического объекта, попытки материализовать выделяемые идеальные характеристики и превратить их в предмет преобразования, а, в случае невозможности материализации, закрепить такую характеристику посредством визуального образа, символа или слова. В свою очередь, понимание идеальных границ объекта предполагает, с одной стороны, работу воображения, с другой, — нормирование порождаемых образов на основе формализованного знания. Следует добавить, что работа с идеальными объектами определяет достаточно высокий уровень семиотических способностей — способностей работы с символом и знаком.

Геометрический чертеж, с которого начинается понимание объекта, является сложным семиотическим образованием, сочетая в себе знак-модель, допускающий предметную деятельность, и знак-символ, не предполагающий таковой. Отметим, что ребенок не имеет опыта работы с такими сложными знаками. Такой опыт он может приобрести при правильной постановке преподавания. Чертеж, с одной стороны, является натурализуемым предметом — *вещью*, с которой можно осуществлять чувственно-предметные действия — перегибать, накладывать на другую и т.д. С другой стороны, чертеж — это *схема* идеальных характеристик объекта, и с ней нельзя предметно действовать. Схему можно только понимать, включать понятое в мыслительный эксперимент. Поэтому необходима специальная педагогическая работа, направленная на раскрытие для ребенка некоторой новой функции изображения — символической. Фактически необходимо формирование понятия "геометрический чертеж" в отличие от других видов графических изображений.

При выполнении ребенком учебных действий с чертежом-вещью необходимо ставить перед ним вопросы, направленные на:

1) понимание связей осуществляемого действия и получаемого результата,
2) выделение закономерностей изменения фигуры,
3) их демонстрацию в действии с другими фигурами,
4) фиксацию понятого в различного рода знаках,
5) восстановление и выполнение действия на основе знака.

Такой подход к работе в слое наглядной геометрии, с одной стороны, готовит к изучению систематического курса, с другой, — позволяет формировать широкий круг способностей, например, способности конструирующего воображения, рефлексивного мышления, идеирования, знакового замещения, продуктивного действия.

Осуществляя многократно разнообразные предметно-чувственные действия с фигурой-вещью, ребенок понимает нечто о закономерностях изменения фигур. Понятое должно быть продемонстрировано ребенком в действиях с аналогичными фигурами, что позволяет педагогу установить правильность понимания и, если необходимо, осуществить корректировку. Так формируется у ребенка понимание некоторого геометрического отношения — некоторой характеристики. Но формирование "отдельных" характеристик не ведет само по себе к складыванию целостного объекта; понимание взаимосвязи характеристик объекта должно быть фиксировано в схеме. Таким образом, с одной стороны, в действиях с чертежом-вещью, возникает набор характеристик, устанавливаются их взаимосвязи, что фиксируется в чертеже-схеме; с другой стороны, понятые характеристики, сорганизованные в схему, а также результат их мысленного преобразования могут быть проиллюстрированы на чертеже-вещи. Можно сказать, что геометрический чертеж стоит на границе двух пространств — *действия и мышления*, обеспечивая их "состыковку". На разных этапах решения задачи реализуется одна из двух выделенных функций чертежа.

Предложенный В. В. Давыдовым метод формирования в процессе обучения теоретических понятий предполагает наряду с выделением содержания и структуры понятий, составляющих первооснову предметной действительности, вычленение исходного отношения всей понятийной системы — "клеточки", на которой формируется сам тип мышления, отличный от мышления в других областях. "Клеточка" — это отношение, которое может быть обнаружено у каждого понятия системы. Как только человек овладевает этим отношением, у него возникает сложная форма интуитивного понимания в соответствующей предметной области. В. В. Давыдов считает возможным построение всей системы понятий на основе "клеточки" как восхождение от абстрактного к конкретному[16].

Наша гипотеза, нуждающаяся в дополнительной проверке и обосновании, заключается в том, что основным отношением — "клеточкой" понятийной системы геометрии является возможность или невозможность характеристик идеальной фигуры быть материализованными. Под возможностью характеристики быть материализованной имеется в виду возможность получить удовлетворительную вещную модель, в которой эта характеристика наблюдается непосредственно. Каждый геометрический объект имеет как материализуемые, так и не материализуемые характеристики. В силу чего в чертеж не могут быть непосредственно представлены все характеристики. Как только ребенок начинает понимать в отношении чертежа, в чем момент его условности, он делает второй шаг в освоении понятия идеальной геометрической фигуры[17]. Формирование происходит не во всем объеме, не с точки зрения освоения геометрических систем или построения их интерпретаций в реальном пространстве, не с точки зрения способа геометрического моделирования, а с точки зрения понимания (мысленного построения) геометрического объекта, представленного в знаке. Сам тип отношения "материализуемо – не материализуемо" для характеристик геометрических объектов составляет основу специфических действий, которые дальше ведут к построению геометрических понятий и их развернутых систем.

Формирование выделенной "клеточки" — основного отношения, которым обладает любой геометрический объект, можно начать с попытки ответа на вопрос "Что такое точка?". Как известно, вопрос этот находится под строжайшим запретом методики, поскольку для математика "не важно, что это, — важно, что с этим можно делать". То есть в полном объеме реализуется движение от неопределяемых понятий. Притом, что сам Евклид этот вопрос рассматривал, и Пифагор рассматривал. Ребенку же предлагают работать с "пустым" объектом, единственной характеристикой которого является наличие. Но у ребенка за этим словом что-то "стоит", есть некая вещица. Вместо геометрической точки возникает "что-то" маленькое. Вместо идеи треугольника возникает вещь треугольной формы. Происходит *натурализация* геометрических объектов. И предполагаемое формирование идеальных объектов блокируется, поскольку их "место" уже занято.

На наш взгляд, именно с вопроса "Что такое точка?"[18] возможно вхождение ребенка в идеальную геометрическую действительность, и открывается возможность организации для учащихся ситуации, провоцирующей мышление. Эту особую идеальную действительность, конкретизированную как пространство евклидовой геометрии, нужно для ребенка вначале построить, а затем уже описывать и нормировать, описывать разными способами, в том числе и аксиоматически. Поиск ответа на вопрос "Что такое точка?" позволяет ребенку открыть то, с чем он ранее не встречался. А именно, *существование того, чего нет* для чувственного восприятия. Если ты ее (точку) видишь,

[16]Зиновьев А.А. Восхождение от абстрактного к конкретному (на материале "Капитала" К.Маркса). // Диссертация на соискание ученой степени кандидата философских наук. М., 1954.

[17]Первый шаг — освоение предметных действий с фигурами-вещами (конструирование, вычерчивание и др.).

[18]Семенов Е. Точка, прямая: что это такое. Журнал "Математика в школе", 1975, №11.

то есть воспринимаешь зрительно, то это не точка. Чтобы точка “появилась”, нужно “убрать” то, что видишь. Если же убрать то, что видишь, то нет ничего. Но именно в момент исчезновения изображения возникает “точка” как концентрация внимания, как фиксация того, что было, было в определенном месте. Возникает точка у субъекта, точка как мысль. Работать с ней, рассуждать по поводу нее, особенно, если ты не один, можно только восстановив изображение. Представленное рассуждение, однако, не для ученика, и не с этого нужно начинать, чтобы избежать вербализма. Недопустимо, чтобы ребенок стал повторять что-то про точку как стихотворение, но при этом не имел при этом идеализации “точка”. В результате рассмотрения вопроса о точке учащийся должен различить для себя точку и ее изображение, понимать, что это — разное. Далее полезно познакомить учащихся с культурными образцами толкования точки. Евклид понимает точку как тело на границе своего исчезновения. И совершенно иначе у Пифагора: единица, имеющая положение. Мы предлагаем учащимся определить, чье понимание им ближе, и на этой основе растолковать термины “точка схождения в перспективе”, “точка кипения”, “многоточие” и т.п. Демонстрация образцов различных толкований точки великими умами, толкований, которые, с одной стороны, взаимно исключают друг друга, с другой, — удивительным образом “перетекают” друг в друга, вызывает неподдельный интерес учащихся, инициирующий познавательную активность.

Работа по формированию идеальных понятий включает следующие этапы:

Во-первых, необходимо различить геометрические объекты и внешнюю форму вещей. Такое различение может быть сформировано в процессе решения задач на геометрическое моделирование. Задачи подбираются таким образом, чтобы возможно было продемонстрировать следующее: одна и та же вещь может быть модельно представлена различными геометрическими фигурами, и наоборот, одна фигура может быть моделью различных по внешней форме вещей.

Во-вторых, продемонстрировать роль геометрического объекта как модели при решении задач. Для точки нужно иметь в виду, что она фиксирует:

1) тело, размерами которого в условии задачи можно пренебречь;

2) отношение двух тел, одно из которых ничтожно мало по сравнению с другим;

3) расположение тел относительно друг друга.

В-третьих, различить объект и его изображение.

В-четвертых, выделить и фиксировать характеристики объекта, рассмотрев возможности их материализации.

Важным результатом такой работы для ребенка должны стать следующие фиксации, имеющие прямое отношение к пониманию символа:

1) в изображении может быть фиксировано то, что непосредственно зрительно не воспринимается (то, что не видно);

2) то, что непосредственно зрительно воспринимается в изображении, может не относиться к сути представленного в изображении.

Реализация описанной методики формирования понятий о геометрических объектах позволяет эффективно работать с разными категориями учащихся. В отношении одаренных учащихся это в первую очередь развитие рефлексивного мышления, позволяющего сделать процесс решения задач осознанным. Для учащихся с бедным воображением — опыт формирования образов. Предлагаемый подход в меньшей степени эффективен для учащихся с развитым воображением и слабо сформированными логическими операциями. Для этой группы результатом может быть формирование семиотических способностей — фиксации образов в знаке. Формирование логических операций у этих учащихся на наш взгляд нужно осуществлять не на геометрии, а на более простом материале.

Основываясь на вышеизложенном, мы пришли к выводу, что полный курс геометрии для общеобразовательной школы состоять из трех частей. Первая часть — это курс наглядно-практический, при прохождении которого необходимо формировать эмпирические понятия о внешней форме вещей, дающий ребенку опыт вычерчивания фигур и конструирования, завершающий формирование такой логической операции, как классификация. Эта часть курса рассматривается в 1 – 6 классах. Последняя часть — систематический курс элементарной геометрии, в большей или меньшей степени реализующий аксиоматический подход, решает задачу формирования навыков формального вывода и демонстрирует развитие теории. Ее изучение мы считаем целесообразным с 8 класса. Но между ними необходим развивающий курс, в ходе которого ребенок уясняет, что, работая в геометрии, он имеет дело не с вещами, а с объектами совершенно иной природы. Иными словами, должен быть простроен переход от наглядного курса геометрии к теоретическому, основой которого является “открытие” учащимся мира идеальных объектов. Основная задача, которая здесь должна решаться — построение идеализаций основных геометрических объектов, тех, которые в формально-логическом курсе являются неопределяемыми.

Устиловская Алла Алексеевна,
учитель математики ГОУ СОШ №1314 г. Москвы,
учитель высшей категории,
методист НИИ Инновационных стратегий
развития образования
Департамента образования Москвы.

Email: alla@ustilovskay.rmt.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2006 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2006 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

E. Grjibovskaya, V.Ivlev. Systems of Linear Differential Equations. Integrable Combinations. Part I **2**

For a linear system $dy/dx = Ay$ the scalar product (α, y), where α is an eigenvector or a root vector of the conjugate operator A^T, satisfies a linear equation of the first order. This observation provides a method of integrating the original system.

I. Kostenko. Problems of Manual Books for Higher Education. Origins, History, and the Contemporary State of the Problem **10**

The author analyzes the tendency that manual books on mathematics for higher education become less and less understandable. He analyzes the origins and the contemporary state of the problem and make some proposals how to solve it.

A. Schetnikov. Problem of Tangent Straight Line and Circumference as a Crucial Point of Development of the Ancient Greece Geometry in V – IV Ages B.C. **38**

The author analyzes different possible approaches (atomistic, sophistic etc.) to the problem of tangent straight line and circumference. The problem could be an important point of development of the ancient Greece geometry.

A. Voronin. Evolution of Simplicity **57**

The notions of simplicity and complexity are not completely formal but of a wide use in natural, economical sciences and in mathematics. The author discusses the evolution of the notions in a wide context.

A. Ustilovskaya. Principles of Thinking and Activities Theory Applied to a School Course of Geometry **69**

The mentioned theory demands to distinguish between sensitive and ideal fields of geometry and to form ideal objects of geometry while teaching.