Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год десятый

№2 (37)

апрель-июнь 2006 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Периодическое издание в области математического образования

Учредитель: Фонд математического образования и просвещения

№ 2 (37), 2006 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (37), апрель – июнь 2006 г.

Содержание

Учащимся и учителям средней школы

В. Б. Дроздов Шесть выводов формулы “сложного” радикала. 2

А. Мякишев. О некоторых прямых, связанных с четырехугольником 7

Студентам и преподавателям математических специальностей

С. И. Калинин. Об изложении основ дифференциального исчисления вещественнозначных функций одной и нескольких переменных в терминах понятия дифференцируемости функций по Каратеодори 18

А. Ф. Ляхов. Информационный анализ азартных игр 32

Содержание образования

А. Н. Митрохин. О математике размерностей (к вопросу о математике XXI века) 42

Лидер специализированного физико-математического образования

В. В. Вавилов. О научных исследованиях учащихся школы им. А. Н. Колмогорова 52

В. В. Вавилов, М. Е. Колоскова. Уроки в цветущем саду 63

В. В. Вавилов, А. А. Часовских. Школьные Колмогоровские чтения 70

Биографии выдающихся математиков

К 205-летию со дня рождения. Михаил Васильевич Остроградский 74

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2006 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ,
лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2006 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Шесть выводов формулы “сложного” радикала

В. Б. Дроздов

Предлагается несколько выводов — алгебраические, геометрические, тригонометрические — классической формулы сложного радикала. Статья может быть интересна учащимся и учителям классов с углубленным преподаванием математики, а также участникам математических кружков и факультативов.

В книге “Из истории алгебры XVI—XVII вв.”, автор — В.А.Никифоровский — на с. 182 пишет: “При преобразовании радикалов Ньютон привел формулу

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \tag{1}$$

вошедшую затем во все учебники алгебры. Здесь имеется в виду книга Ньютона “Всеобщая арифметика”. Действительно, формула (1) была и в учебнике А. П. Киселева с дореволюционных времен, и в школьном учебнике тридцатипятилетней давности, и есть в современных учебниках для спецшкол. Но везде она доказывается исходя из равенства квадратов двух ее неотрицательных частей.

Возникает естественный вопрос: а как появилась формула (1)? Ведь она совершенно не очевидна. Отметим, что формула (1) упрощает “сложный” радикал в случае, если $a^2 - b$ — точный квадрат целого или рационального числа. При этом a, b — рациональные числа, такие, что $a > 0$, $b > 0$, $a^2 > b$. Известно, что нетривиальные формулы, как правило, могут быть выведены, исходя из различных математических идей. К таковым относится и формула (1). Рассмотрим ниже шесть ее различных выводов.

I. **Алгебраический вывод (замена переменой)**

Положим $\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = m$ и $\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = n$. Тогда $m^2 = 2(a + \sqrt{a^2-b})$ и $n^2 = 2(a - \sqrt{a^2-b})$. Очевидно, что $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \frac{m+n}{2}$ и $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \frac{m-n}{2}$. Поскольку $m = 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$ и $n = 2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, то формула (1) доказана.

II. **Алгебраический вывод (теорема Виета)**

Рассмотрим следующий путь трансформации двух сопряженных иррациональных выражений: $x_1 = \sqrt{a+\sqrt{b}}$, $x_2 = \sqrt{a-\sqrt{b}}$. Так как их произведение $x_1x_2 = \sqrt{a^2-b}$, то в силу теоремы Виета x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$x^2 - \left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)x + \sqrt{a^2-b} = 0 \tag{2}$$

с положительным дискриминантом $D = 2(a - \sqrt{a^2-b})$. Больший положительный корень уравнения (2) равен

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \left(\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} + \sqrt{2(a - \sqrt{a^2-b})}\right)/2,$$

откуда

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b})}. \tag{3}$$

Если в формуле (3) заменить $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ на $\frac{\sqrt{a^2-b}}{x_1}$, то приходим к следующему квадратному уравнению относительно x_1:

$$x_1^2-\sqrt{2(a-\sqrt{a^2-b}}\,x_1-\sqrt{a^2-b}=0.$$

Поскольку $x_1>0$, то

$$x_1=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) получаем:

$$x_2=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) вместе образуют формулу (1).

III. **Алгебраический вывод (биквадратное уравнение)**

Решим двумя способами биквадратное уравнение

$$x^4-2ax^2+q=0 \tag{6}$$

и сравним его корни, расположенные в порядке возрастания. Последнее возможно при $a>0$, $q>0$, $a^2>q$. Положив $x^2=y$, приходим к квадратному уравнению $y^2-2ay+q=0$. Далее, получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\sqrt{a+\sqrt{a^2-q}},\\ x_2&=-\sqrt{a-\sqrt{a^2-q}},\\ x_3&=\sqrt{a-\sqrt{a^2-q}},\\ x_4&=\sqrt{a+\sqrt{a^2-q}}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Преобразуем левую часть уравнения (6):

$$x^4-2ax^2+q=(x^4+q)-2ax^2=(x^4+2\sqrt{q}x^2+q)-(2\sqrt{q}+2a)x^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{q})^2-(\sqrt{2(\sqrt{q}+a)}x)^2=(x^2+\sqrt{2(\sqrt{q}+a)}x+\sqrt{q})(x^2-\sqrt{2(\sqrt{q}+a)}x+\sqrt{q})$$

Запишем корни уравнения (6) в другом виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=-\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{q}}{2}}-\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{q}}{2}},\\ x_2&=-\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{q}}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{q}}{2}},\\ x_3&=\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{q}}{2}}-\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{q}}{2}},\\ x_4&=\sqrt{\tfrac{a+\sqrt{q}}{2}}+\sqrt{\tfrac{a-\sqrt{q}}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из формул (7) и (8) находим, что

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-q}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{q}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{q}}{2}}. \tag{9}$$

В формуле (9) обозначим $a^2-q=b \quad (b>0)$, тогда $q=a^2-b$, и мы приходим к формуле (1).

IV. **Тригонометрический вывод**

Предварительно выразим $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1+\sin\alpha$ и $\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$. Сразу ясно равенство $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha}$. Так как $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, то $\cos\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\alpha}{2}$, а значит $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin\alpha}$. Окончательно получаем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right). \tag{10}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right). \tag{11}$$

Преобразуем выражение $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ тригонометрической подстановкой $b=a^2\cos^2\alpha$, соответствующей условиям применимости формулы (1): $a>0$, $b>0$, $a^2>b$. Имеем: $\sqrt{a+\sqrt{b}}=$

$$\sqrt{a(1+\cos\alpha)}=\sqrt{2a}\cdot\cos\tfrac{\alpha}{2}.\ \text{Тогда}\ \sqrt{a+\sqrt{b}}=\tfrac{\sqrt{2a}}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right)=$$
$$\sqrt{\tfrac{a}{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-\cos^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{b}{a^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{b}{a^2}}}\right)=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Преобразование иррациональности $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ осуществляется аналогично с помощью формулы (11).

V. **Геометрический вывод (теоремы Пифагора и косинусов)**

Математики древнего мира считали доказательство алгебраической формулы вполне строгим, если оно исходило из геометрических идей. Несмотря на математическую наивность такой мысли античных ученых с современной точки зрения, небезынтересно вывести формулу (1), используя геометрические соображения.

Для этой цели рассмотрим треугольник MNP, оба угла которого N и M острые. Из вершины P опустим высоту PQ на основание MN, см. рис. 1. Выразим длину отрезка NM двояко.

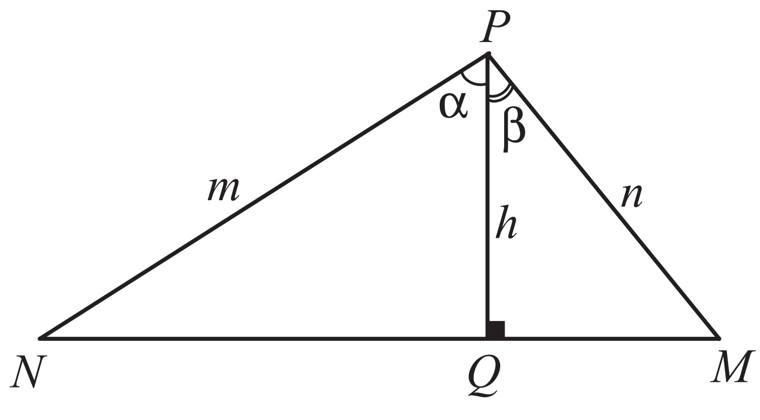

Рис. 1

С одной стороны,

$$NM=NQ+QM=\sqrt{m^2-h^2}+\sqrt{n^2-h^2}. \tag{13}$$

С другой стороны, по теореме косинусов имеем:

$$NM^2=m^2+n^2-2mn\cos(\alpha+\beta).$$

Учитывая очевидные равенства $\alpha = \arccos\frac{h}{m}$, $\beta = \arccos\frac{h}{n}$, $\cos(\arccos x) = x$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, после несложных выкладок получим:

$$NM = \sqrt{(m^2-h^2)+(n^2-h^2)+2\sqrt{(m^2-h^2)\,(n^2-h^2)}}. \tag{14}$$

(как бы не замечаем, что под корнем в формуле (14) стоит полный квадрат). Из сравнения формул (13) и (14) имеем:

$$\sqrt{\frac{(m^2-h^2)+(n^2-h^2)}{2}+\sqrt{(m^2-h^2)\,(n^2-h^2)}} = \sqrt{\frac{m^2-h^2}{2}}+\sqrt{\frac{n^2-h^2}{2}}. \tag{15}$$

Положив в формуле (15)

$$\begin{cases} \left(m^2-h^2\right)+\left(n^2-h^2\right) = 2a, \\ \left(m^2-h^2\right)\cdot\left(n^2-h^2\right) = b, \end{cases}$$

находим по теореме Виета, что величины m^2-h^2 и n^2-h^2 являются корнями квадратного уравнения $t^2-2at+b=0$. То есть $m^2-h^2 = a+\sqrt{a^2-b}$ и $m^2-h^2 = a-\sqrt{a^2-b}$. Следовательно, формула (15) трансформируется в формулу (1) для иррациональности $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Отметим, что преобразование иррациональности $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ получается аналогично из треугольника MNP, один из углов M и N которого — тупой.

VI. **Геометрический вывод (теоремы Птолемея и косинусов)**

На рис. 2 изображен вписанный в окружность радиуса R четырехугольник $MNPQ$, диагональ которого MP является диаметром, а $\angle QMP = \frac{\pi}{4}$. По теореме Птолемея $2R\cdot NQ = \sqrt{2}R(c+d)$, откуда

$$NQ = \frac{c+d}{\sqrt{2}}. \tag{16}$$

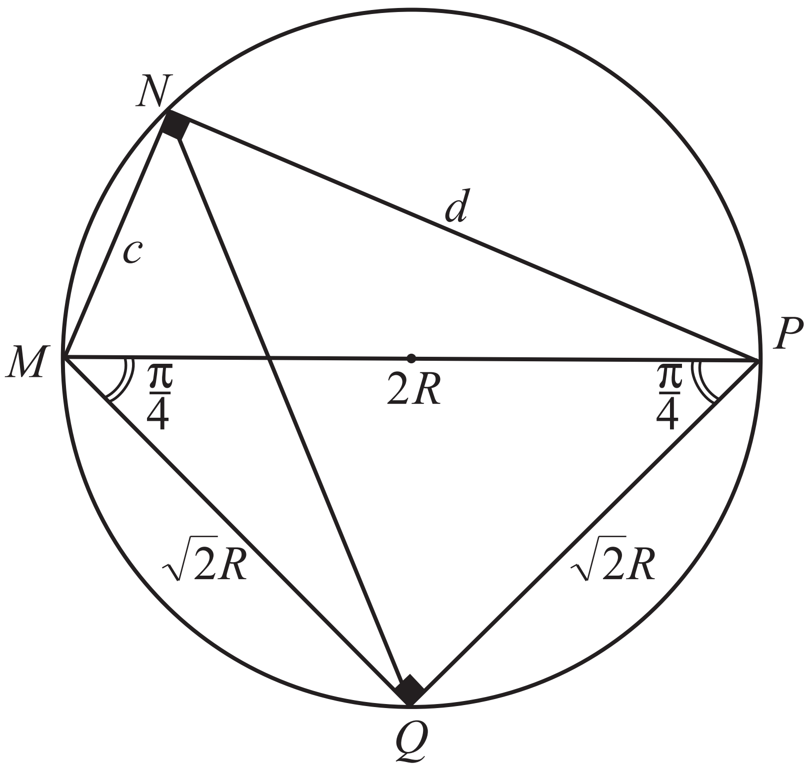

Рис. 2

По теореме косинусов, примененной к ΔMNP,

$$NQ^2 = c^2+2R^2-2\sqrt{2}cR\cos\left(\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{c}{2R}\right).$$

Раскрыв косинус суммы двух углов, после очевидных преобразований получим:

$$NQ = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{2} + c\sqrt{4R^2-c^2}}. \tag{17}$$

Формулы (16), (17) и теорема Пифагора, записанная для ΔMNP дают систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\frac{c^2+d^2}{2} + \sqrt{4R^2c^2-c^4}} = \frac{c+d}{\sqrt{2}}; \\ c^2+d^2 = 4R^2. \end{array} \right. \tag{18}$$

Обозначим $2R^2 = a$, $4R^2c^2 - c^4 = b$. Тогда легко находим: $c^2 = a \pm \sqrt{a^2-b}$, $d^2 = a \mp \sqrt{a^2-b}$. Следовательно, формула (18) преобразуется в формулу

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

А как быть с формулой преобразования иррациональности $\sqrt{a-\sqrt{b}}$? В данном случае ее придется проверить непосредственно.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

О некоторых прямых, связанных с четырехугольником

А. Г. Мякишев

В статье доказано существование прямых, проходящих через не менее трех некоторых замечательных точек четырехугольника. Полученные результаты можно рассматривать как обобщение соответствующих фактов, хорошо известных для случая треугольника.

1. Предварительные замечания: вспомним классику!

Каждому любителю элементарной геометрии наверняка известны две замечательные прямые в треугольнике: прямая *Эйлера* ([3]: 5.116, 5.117; [4]: 444) и прямая *Нагеля* ([2]; [3]: 5.79; [4]: 489). На всякий случай напомним, что на первой из них лежат точки H (ортоцентр треугольника), M (его центроид) и O (центр описанной окружности), причем $HM : MO = 2 : 1$, а также E — центр окружности, описанной около серединного треугольника (так называемой окружности *Эйлера* или 9 *точек*). Последняя точка является серединой отрезка HO.

На второй прямой расположены точки N (точка *Нагеля*: в этой точке пересекаются прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с противоположными сторонами; каждая из них делит периметр треугольника пополам), M (центроид треугольника) и I (центр вписанной окружности), так что $NM : MI = 2 : 1$, а также S — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Эту точку называют точкой *Шпикера* — она является серединой отрезка NI, и, кроме того, служит центром тяжести полого треугольника с проволочными ребрами.

И с четырехугольником связаны многие замечательные прямые. Пожалуй, возглавляет этот своеобразный «хит-парад» следующая тройка:

- прямая *Гаусса* ([3]: 4.55; [4]: 350), на которой расположены середины диагоналей четырехугольника, а также середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон (предполагаем, что противоположные стороны непараллельны);

- прямая *Ньютона* ([3]: 6.5; [4]: 541), содержащая в описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности (можно сказать, прямая Гаусса описанного четырехугольника — знаменательная перекличка славных имен!);

- прямая *Штейнера* ([3]: 6.36; [4]: 558), на которой лежат ортоцентры четырех треугольников, образованных прямыми, проходящими через противоположные стороны четырехугольника (опять же, считаем, что противоположные стороны пересекаются).

(И еще один факт из серии «и звезда с звездою говорит»: прямые Гаусса и Штейнера *перпендикулярны*).

Однако совсем мало известно об аналогах прямых Эйлера и Нагеля для четырехугольника. (Во всяком случае, автору этих строк удалось обнаружить в доступных ему источниках только один: *Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Таким же образом определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c, DH_d пересекаются в точке H, и M (центроид) является серединой OH, где O — центр описанной около четырехугольника окружности* — см. [5]).

Настоящая статья как раз и призвана в какой-то мере восполнить этот пробел.

2. Прямая Эйлера четырехугольника — аналогия первая

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M — точка пересечения прямых, соединяющих середины его противоположных сторон (центроид четырехугольника), O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям («квазицентр» описанной окружности[1]), H — точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BCP, APB и CPD («квазиортоцентр»). Тогда M — середина OH.

Доказательство: Пусть O_1 — середина AC, а O_2 — середина BD.

[1]Точнее было бы сказать, вероятно, «квазицентр квазиописанной окружности», но звучит это уж как-то слиш-

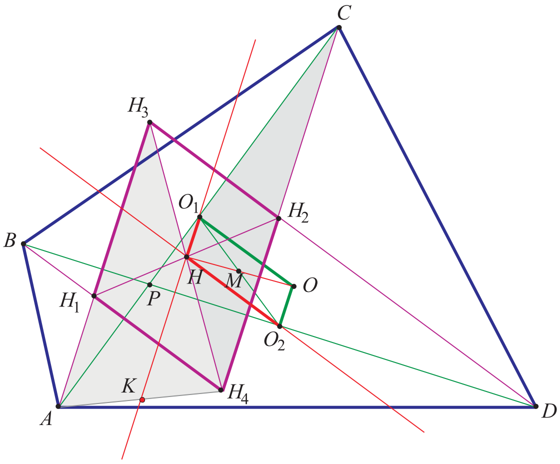

Рис. 1.

Несложно показать, что точка M — середина отрезка O_1O_2 (понятно, что M — центр масс системы $1A$, $1B$, $1C$, $1D$. Рассмотрим подсистемы $1A$, $1C$ и $1B$, $1D$, которые эквивалентны подсистемам $2O_1$, $2O_2$. *Все сведения по геометрии масс, необходимые для понимания этого и некоторых последующих утверждений, можно найти в* [1], [2], [3]: глава 14).

Очевидно, четырехугольник, образованный ортоцентрами, есть параллелограмм, стороны которого лежат на перпендикулярах, проведенных из вершин четырехугольника к соответствующим диагоналям. Поэтому H — точка пересечения диагоналей этого параллелограмма и делит их пополам.

Докажем, что прямая HO_1 параллельна OO_2, или, иначе говоря, перпендикулярна диагонали BD. Рассмотрим прямую, перпендикулярную этой диагонали и проходящую через H и покажем, что она проходит и через точку O_1. Пусть наша прямая пересекает отрезок AH_4 в точке K. Тогда она является средней линией в треугольнике AH_3H_4, и потому K — середина AH_4. А следовательно, наша прямая будет средней линией и в треугольнике AH_4C, и потому пройдет через O_1.

Рассуждая совершенно аналогично, убеждаемся в том, что прямая HO_2 параллельна OO_1, т.е. HO_1OO_2 — *параллелограмм*, причем M — точка пересечения его диагоналей. Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой, и $\frac{OM}{MH} = 1$.

Заметим, что задача допускает очевидное обобщение:

Пусть M — точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, O — точка пересечения некоторых двух прямых, проходящих через середины диагоналей, H — точка пересечения диагоналей параллелограмма, полученного при пересечении прямых, проходящих через вершины четырехугольника, и соответственно параллельных указанным двум «серединным» прямым. Тогда M — середина OH (рис. 2).

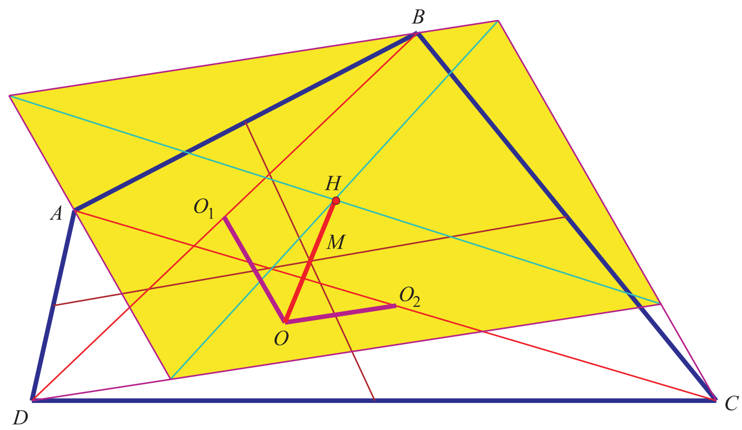

Рис. 2

Следующая прямая, являющаяся частным случаем только что построенной, была уже ранее известна ([5]).

Пусть четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность, и H_a — ортоцентр треугольника BCD. Аналогично определим точки H_b, H_c, H_d. Тогда прямые AH_a, BH_b, CH_c,

ком тяжеловесно. А вот английское словцо «quasi-circumcenter» явно уместнее. Замечу кстати, что геометрическая терминология (и, возможно, математическая вообще) английским языком описывается более лаконично, чем русским. Опять же, сравним: «Circumcenter» и «Центр описанной окружности».

DH_d пересекаются в точке H, и M (центроид) является серединой OH (O — центр описанной около четырехугольника окружности).

Доказательство: Если четырехугольник вписан в окружность, то O совпадает с центром этой окружности, которая также будет описана около каждого из четырех треугольников. Пусть, например, M_a — точка пересечения медиан треугольника BCD. Несложно показать, что точка M делит отрезок AM_a в отношении $3:1$ (рассмотрим подсистемы $1A$ и $1C$, $1B$, $1D$, которые эквивалентны подсистемам $1A$, $3M_a$). С другой стороны, точки H_a, M_a, O лежат на одной прямой (*прямой Эйлера* треугольника BCD), причем $\frac{H_aM_a}{OM_a}=\frac{2}{1}$. Отсюда немедленно следует (проще всего из геометрии масс), что прямая AH_a пересекает прямую OM в такой точке H', что $\frac{OM}{H'M}=1$. Из предыдущей теоремы теперь следует, что точки H' и H совпадают. Точно так же доказывается, что и три другие прямые пройдут через точку H.

Описанные в этом параграфе аналоги прямой Эйлера страдают одним недостатком, бросающимся в глаза: $\frac{OM}{MH}=1$ в четырехугольнике, а в треугольнике — $\frac{OM}{MH}=\frac{1}{2}$.

Следующие аналогии в этом смысле будут более удачными.

3. Прямые Эйлера и Нагеля четырехугольника — аналогия вторая

Как известно, в треугольнике центр единичных масс, помещенных в его вершины, и центр тяжести всего треугольника как однородной пластины совпадают.

В четырехугольнике это уже не так. Рассматривая центр тяжести четырехугольника как однородной пластины, автору удалось получить еще некоторые любопытные обобщения прямых Эйлера и Нагеля на четырехугольник.

Итак, рассмотрим $ABCD$ — выпуклый четырехугольник и точку G — его центр тяжести как однородной пластины (т. е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

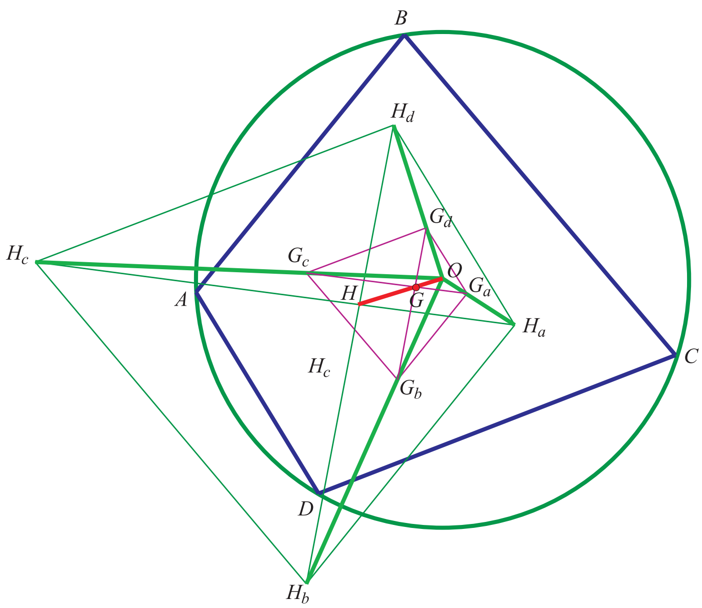

Рис. 3

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром в O. Точку H определим аналогично точке G, взяв вместо центроидов ортоцентры. Тогда точки H, G, O лежат на одной прямой и $HG:GO=2:1$.

б) Оказывается, предыдущее утверждение остается справедливым и в случае произвольного четырехугольника $ABCD$, если в качестве O взять «квазицентр» описанной окружности — точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.

в) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром в I. *Точкой Нагеля* N описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Тогда точки N, G, I лежат на одной прямой и $NG : GI = 2 : 1$.

Доказательство: а) Пусть G_a и H_a — соответственно центроид и ортоцентр треугольника BCD. Центроиды и ортоцентры остальных трех треугольников обозначим буквами G_b, H_b, G_c, H_c, G_d, H_d. Все треугольники имеют общую описанную окружность с центром в O. Рассмотрев прямые Эйлера этих треугольников, заметим, что четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ переходит в четырехугольник $H_aH_bH_cH_d$ при гомотетии с центром в O и коэффициентом 2. Соответственные элементы должны переходить в соответственные, в частности, точки пересечения диагоналей этих четырехугольников переходят друг в друга.

б) Конструкция, рассмотренная в предыдущем пункте, естественным образом обобщается на случай произвольного четырехугольника. Первым этот факт обнаружил[2], по-видимому, Ярослав Ганин[3].

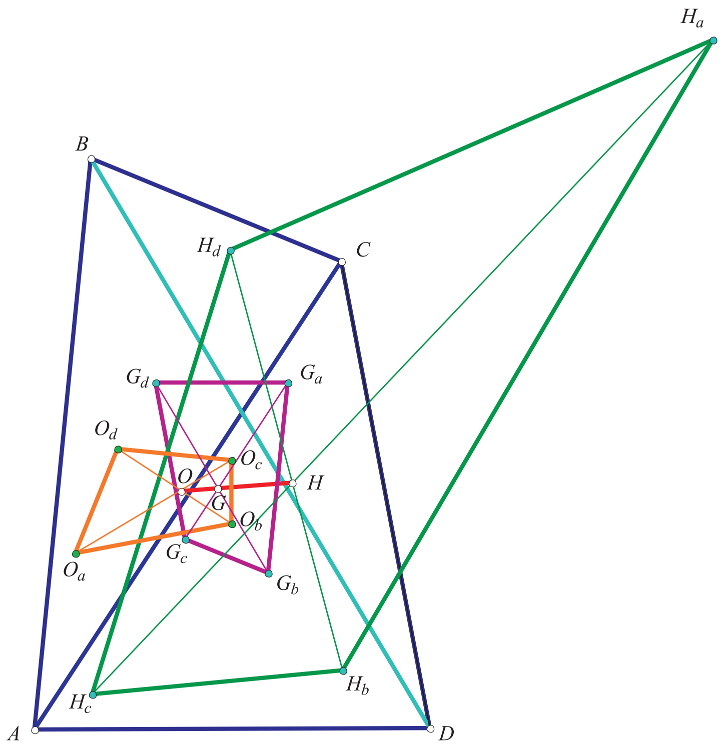

Рис. 4

Если ввести еще точки O_a, O_b, O_c, O_d (где O_a — центр окружности, описанной около треугольника BCD и т. д.), то O — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника $ABCD$ — очевидно, совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$ (например, O_a и O_c лежат на серединном перпендикуляре к BD и т. д.).

Поэтому задачу можно переформулировать так:

[2]Замечательные программы «The Geometer's Scetchpad» (Канада) и «Cabri Geometry» (Франция) позволяют проверять справедливость тех или иных геометрических гипотез непосредственно на компьютере. То есть, выдвинув какое-либо предположение, мы можем узнать, верно оно или нет, не затратив при этом никаких умственных усилий. Конечно, тем самым математические доказательства не отменяются (открытый на компьютере красивый факт неизбежно взывает, если не сказать вопиет, к душам Геометров: докажи меня! и докажи красиво!) — но в каком-то смысле все же отодвигаются на второй план. (Если факт имеет место, то, рано или поздно, доказательство будет найдено). Другое дело, что человек, привыкший работать с бумагой и ручкой и не спешащий засесть за компьютер для проверки плодотворной и содержательной идеи всякий раз, когда она ему приходит в голову, скорее всего, будет награжден бóльшим количеством таких идей. И то сказать, великое множество теорем (порой весьма замысловатых), вошедших в Золотой Фонд Геометрии, открыты были задолго до появления компьютеров. Остается только восхищаться величием Старых Мастеров.

[3]За эту работу он награжден дипломом II степени на шестых Школьных Колмогоровских Чтениях, см. стр. 70 настоящего выпуска журнала.

Рассмотрим произвольный четырехугольник $ABCD$ и еще три порожденных им четырехугольника: $O_aO_bO_cO_d$, $G_aG_bG_cG_d$, $H_aH_bH_cH_d$. Пусть точки пересечения диагоналей этих четырехугольников — O, G, H соответственно. Тогда эти точки коллинеарны, причем $HM : MO = 2 : 1$.

Ниже мы приведем изящное доказательство этой теоремы, идея которого принадлежит Francois Rideau (см. [6]). Итак, на языке векторов, нужно показать, что $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GH}$.

Сначала мы предъявим сразу всю цепочку утверждений, ведущих к достижению этой цели, а потом обсудим каждое звено в отдельности.

1^0. Рассмотрим три *аффинных* преобразования F_G, F_O и F_H, такие что F_G переводит треугольник ABC в треугольник $G_aG_bG_c$, F_O — треугольник ABC в $O_aO_bO_c$ и F_H — треугольник ABC в $H_aH_bH_c$.

2^0. Тогда для произвольной точки плоскости P справедливо равенство: $\overrightarrow{F_G(P)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$. Это равенство равносильно тому, что $2\overrightarrow{F_O(P)\,F_G(P)} = \overrightarrow{F_G(P)\,F_H(P)}$.

3^0. Исходный четырехугольник и порожденные им три четырехугольника *аффинно-эквивалентны*, т. е. $F_G(D) = G_d$, $F_O(D) = O_d$ и $F_H(D) = H_d$.

4^0. При аффинном преобразовании, переводящем четырехугольник в четырехугольник, точка пересечения диагоналей переходит в точку пересечения диагоналей.

Воспользуемся теперь 2^0, взяв в роли точки P точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Теорема доказана.

Перейдем теперь к деталям.

1^0. Напомним определение и некоторые свойства аффинных преобразований (подробности см. в [3], глава 29).

Аффинное преобразование плоскости — это такое преобразование, которое любую прямую переводит в прямую же. При этом, разумеется, точка пересечения прямых переходит в точку пересечения образов.

В частности, любое подобие есть аффинное преобразование. В сущности, аффинное преобразование есть параллельная проекция одной плоскости на другую (плоская фигура, освещенная параллельным потоком лучей, переходит в ее тень). Приведем некоторые свойства аффинных преобразований:

1^0.1 Сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой.

1^0.2 Сохраняется отношение площадей фигур.

1^0.3 Параллельные прямые переходят в параллельные.

1^0.4 Существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее произвольный треугольник ABC в произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. При этом любая точка P и ее образ P_1 имеют *одинаковые барицентрические координаты* (относительно треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно).

При аффинном отображении F треугольника в треугольник можно рассматривать вместо точек также векторы — под записью $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{F(P)}$ подразумеваем вектор $\overrightarrow{A_1P_1} = F\left(\overrightarrow{AP}\right)$. Треугольник ABC определяет аффинную систему координат, в которой координаты (β, γ) любой точки P (или соответствующего вектора с началом в A и с концом в P) определяются равенством $\overrightarrow{AP} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$. Образом точки P будет такая точка P_1, что $\overrightarrow{AP_1} = \beta\overrightarrow{A_1B_1} + \gamma\overrightarrow{A_1C_1}$ (т. е. имеющая *те же* самые аффинные координаты в базисе с началом в A_1 и векторами $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$).

Отсюда вытекает еще одно свойство аффинных преобразований — *линейность:*

$$\forall P, Q \qquad \overrightarrow{F(\beta P + \gamma Q)} = \beta\overrightarrow{F(P)} + \gamma\overrightarrow{F(Q)}.$$

1^0.5 Пусть имеется некоторый треугольник ABC и точка P. Рассмотрим *подерный* (или *педальный*) треугольник точки P — треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны исходного треугольника (так, A_1 — основание перпендикуляра на (BC) и т. д.) Пусть, далее, Q — точка, *изогонально сопряженная* точке P относительно треугольника ABC. (Проведем прямую через вершину A и точку P и рассмотрим прямую, симметричную проведенной относительно биссектрисы угла A. Поступим аналогично с другими вершинами. Новая тройка прямых пересечется в точке Q — см. [3]: 5.87). Тогда аффинное преобразование, переводящее ABC в $A_1B_1C_1$, отображает точку Q в точку P.

Докажем это свойство, ограничившись случаем внутренней точки P (для внешней доказательство аналогично). Нужно показать, что точка Q относительно треугольника ABC имеет такие же координаты, как и точка P относительно треугольника $A_1B_1C_1$. Введем обозначения: h_a, h_b, h_c — где, например, h_a — расстояние от точки P до отрезка BC (длину которого обозначим a) и т. д.

Тогда, как известно, барицентрические координаты точки P (относительно треугольника ABC) имеют вид: $P = (a \cdot h_a A, b \cdot h_b B, c \cdot h_c C)$, а точки, изогонально ей сопряженной — $Q = (\frac{a}{h_a}A, \frac{b}{h_b}B, \frac{c}{h_c}C)$.

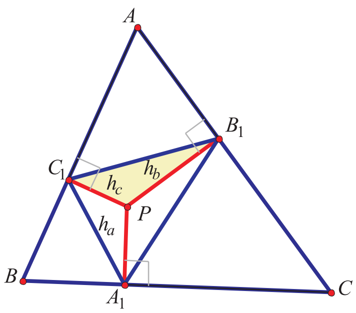

Рис. 5.

Относительно же треугольника $A_1B_1C_1$ координаты точки P выражаются через площади соответствующих треугольников:

$$P_{A_1B_1C_1} = (S_{PB_1C_1}A_1, S_{PC_1A_1}B_1, S_{PA_1B_1}C_1)\,.$$

Однако, $S_{PB_1C_1} = \frac{1}{2}h_bh_c\sin(\pi - \angle A) = (\frac{1}{4}\frac{h_ah_bh_c}{R}) \cdot \frac{a}{h_a}$ (мы воспользовались тем, что $\sin(\pi - \angle A) = \sin\angle A$, а также теоремой синусов: $a = 2R\sin\angle A$, где R — радиус описанной около ABC окружности). Аналогично выражаются и две другие координаты. После сокращения на общий множитель свойство доказано.

2^0. Сначала покажем, что

$$\overrightarrow{F_G(A)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(A)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(A)}, \quad \overrightarrow{F_G(B)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(B)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(B)},$$
$$\overrightarrow{F_G(C)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(C)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(C)}.$$

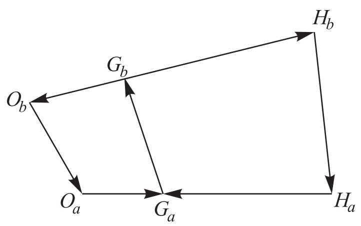

Рис. 6.

Например, рассмотрим второе из этих соотношений. Понятно, что оно эквивалентно равенству

$$\overrightarrow{G_aG_b} = \frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b}.$$

Имеем

$$\overrightarrow{G_aG_b} + \overrightarrow{G_bO_b} + \overrightarrow{O_bO_a} + \overrightarrow{O_aG_a} = \overrightarrow{0} \quad \text{и}$$
$$\overrightarrow{G_aG_b} + \overrightarrow{G_bH_b} + \overrightarrow{H_bH_a} + \overrightarrow{H_aG_a} = \overrightarrow{0}\,.$$

Отсюда

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{G_aG_b} + \overrightarrow{G_bO_b} + \overrightarrow{O_aG_a}\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{G_aG_b} + \overrightarrow{G_bH_b} + \overrightarrow{H_aG_a}\right).$$

Сложим эти два равенства:

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{O_aO_b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{H_aH_b} = \overrightarrow{G_aG_b} + \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{G_bO_b} + \overrightarrow{G_bH_b}\right) + \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{O_aG_a} + \overrightarrow{H_aG_a}\right).$$

Выражения в скобках равны нулевому вектору, в силу основного свойства прямой Эйлера.

Теперь равенство $\overrightarrow{F_G(P)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(P)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(P)}$ (для произвольной точки P) вытекает из того, что соответствующие вектора образуют базис и из линейности аффинного преобразования (1^0.4). То, что оно эквивалентно равенству $2\overrightarrow{F_O(P)\,F_G(P)} = \overrightarrow{F_G(P)\,F_H(P)}$, доказывается совершенно аналогично только что проведенному рассуждению.

Рассмотрим последовательно все части утверждения 3^0.

3^0.1 Аффинная эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $G_aG_bG_cG_d$ является следствием их *гомотетичности:* первый переходит во второй при гомотетии с центром в точке M пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон $ABCD$, и коэффициентом $-\frac{1}{3}$. (В самом деле, $M = 1A, 1B, 1C, 1D = 1A, 3G_a$ и т. д.).

Гомотетичность этих четырехугольников приводит к появлению еще одной интересной прямой:

Следствие 1. Пусть Q — точка пересечения диагоналей произвольного четырехугольника $ABCD$. Тогда точки Q, M, G лежат на одной прямой и $QM : MG = 3 : 1$.

3^0.2 Если удастся показать, что $F_O(D) = O_d$, то равенство $F_H(D) = H_d$ вытекает из соотношения $\overrightarrow{F_G(D)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{F_O(D)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{F_H(D)}$ (верного в силу 2^0: положим $P = D$) и из основного свойства прямой Эйлера.

Стало быть, чтобы «расставить все точки над I», нам остается доказать аффинную эквивалентность четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$.

3^0.3 Скажем, что треугольник ABC *ортологичен* треугольнику $A_1B_1C_1$ (будем обозначать это свойство как $\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$), если перпендикуляры из A на прямую B_1C_1, из B на A_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке (ортологический центр).

Верно следующее утверждение:

Если имеется некоторый треугольник ABC и точка P, а треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный треугольник этой точки, и Q — точка, изогонально сопряженная точке P относительно треугольника ABC (см. 1^0.5), то $\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$ с центром ортологии в Q.

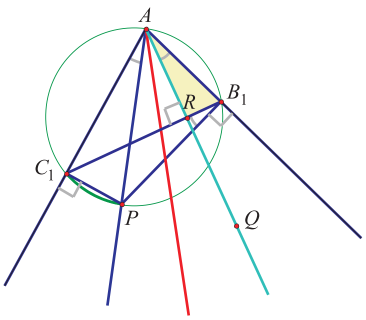

Рис. 7.

Это почти очевидно: рассмотрим прямую, изогональную прямой AP. (Опять же, не ограничивая общности, считаем точку P внутренней).

Имеем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, поэтому около четырехугольника AB_1PC_1 можно описать окружность. Пусть изогональ AQ пересекает B_1C_1 в точке R. Изогональные прямые образуют с соответствующими сторонами угла равные углы, и углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

Поэтому

$$\angle RB_1P = \angle C_1B_1P = \angle C_1AP = \angle QAB_1 = \angle RAB_1.$$

Но $\angle AB_1R + \angle RB_1P = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AB_1R + \angle RAB_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ треугольник ARB_1 — прямоугольный.

3^0.4. *Ключевое утверждение:*

Если $\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$ с центром ортологии в точке Q, $\Delta A_1B_1C_1 \perp \Delta ABC$ с центром ортологии в точке P и F — аффинное преобразование, отображающее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$, то $F(Q) = P$.

Проведем через A_1 прямую, параллельную BC, через B_1 — параллельную AC и через C_1 — параллельную AB. Точки пересечения этих прямых образуют треугольник $A'B'C'$, *подобный* (и даже гомотетичный) треугольнику ABC.

Треугольник $A_1B_1C_1$ — подерный относительно треугольника $A'B'C'$ и точки P. Q' — точка, изогонально сопряженная P (относительно треугольника $A'B'C'$). Согласно 3^0.3, $A'Q' \perp B_1C_1$, $B'Q' \perp A_1C_1$ и $C'Q' \perp B_1A_1$. Через точки A, B и C проведем прямые, соответственно параллельные прямым $A'Q'$, $B'Q'$ и $C'Q'$. Эти прямые также будут перпендикулярны соответствующим сторонам подерного треугольника. Значит, они пересекутся в точке Q — и точка эта (рассмотренная относительно треугольника ABC) соответствует точке Q' (относительно $A'B'C'$)[4].

[4]На самом деле, если исходные прямые пересекались в одной точке, то и соответственные им должны пересекаться в одной точке и мы попутно доказали *теорему Штейнера*: $\Delta A_1B_1C_1 \perp \Delta ABC \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$.

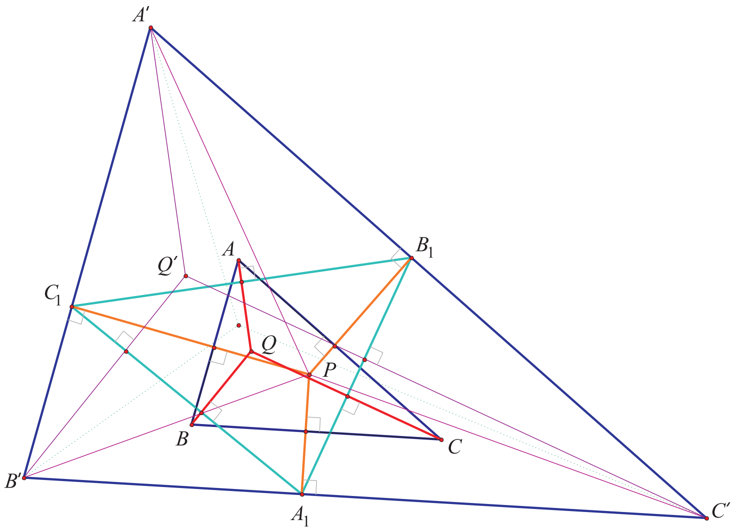

Рис. 8

Наше утверждение теперь следует из того, что в подобных треугольниках *соответственные точки имеют одинаковые барицентрические координаты* (каждая — в «своем» треугольнике), а также из свойства $1^0.5$.

$3^0.5$. Однако понятно (можно сказать, «бросается в глаза»), что $\Delta ABC \perp \Delta O_aO_bO_c$ с центром ортологии в D и $\Delta O_aO_bO_c \perp \Delta ABC$ с центром ортологии в O_d, т. е., в соответствии с $3^0.4$,

$$F_O(D) = O_d.$$

в) Отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны между собой.

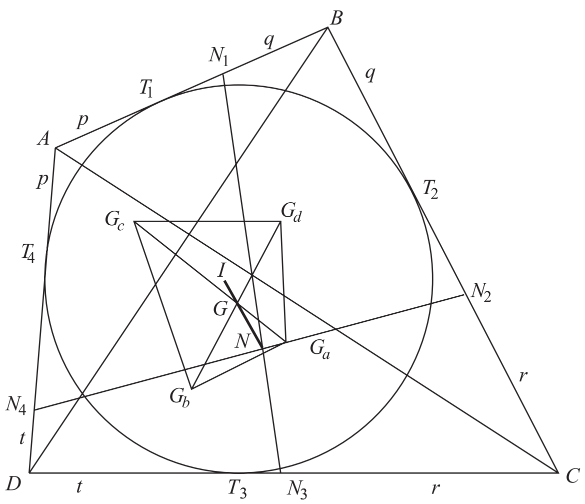

Рис. 9

Введем обозначения: $AT_1 = AT_4 = p$, $BT_1 = BT_2 = q$, $CT_3 = CT_2 = r$, $DT_3 = DT_4 = t$. Оказывается, точки N, I, G являются центрами масс следующих систем:

$$N = pA,\, qB,\, rC,\, tD; \quad I = (q+t)\,A,\, (p+r)\,B,\, (q+t)\,C,\, (p+r)\,D;$$
$$G = (p+q+t)\,A,\, (p+q+r)\,B,\, (q+r+t)\,C,\, (p+r+t)\,D,$$

причем первое из этих трех утверждений очевидно. Далее мы докажем справедливость остальных двух, а пока заметим, что из них сразу вытекает нужный нам факт. Действительно, рассмотрим систему

$$G = (p+q+t)A,\, (p+q+r)B,\, (q+r+t)C,\, (p+r+t)D.$$

Ее можно разбить на две подсистемы: $N = pA, qB, rC, tD$ с суммарной массой $s = p+q+r+t$ (полупериметр четырехугольника) и

$$I = (q+t)\,A,\ (p+r)\,B,\ (q+t)\,C,\ (p+r)\,D$$

с суммарной массой $2\,(p+q+r+t) = 2s$. Воспользовавшись правилом рычага, получим, что точки N, G, I лежат на одной прямой, причем $NG : GI = 2:1$.

Более того, если рассмотреть еще точку G_s — центр масс «проволочного» четырехугольника, то понятно, что $G_s = (2p+q+t)\,A,\ (2q+p+r)\,B,\ (2r+q+t)\,C,\ (2t+r+p)$ (нужно нагрузить середину каждой стороны длиной этой стороны, затем «растащить» эту массу по вершинам и т. д.). Отсюда следует, что G_s — середина отрезка NI, т. е. имеем полную аналогию с треугольником, где в роли G_s выступает точка Шпикера — центр окружности, вписанной в серединный треугольник.

Точку G_s можно построить следующим образом:

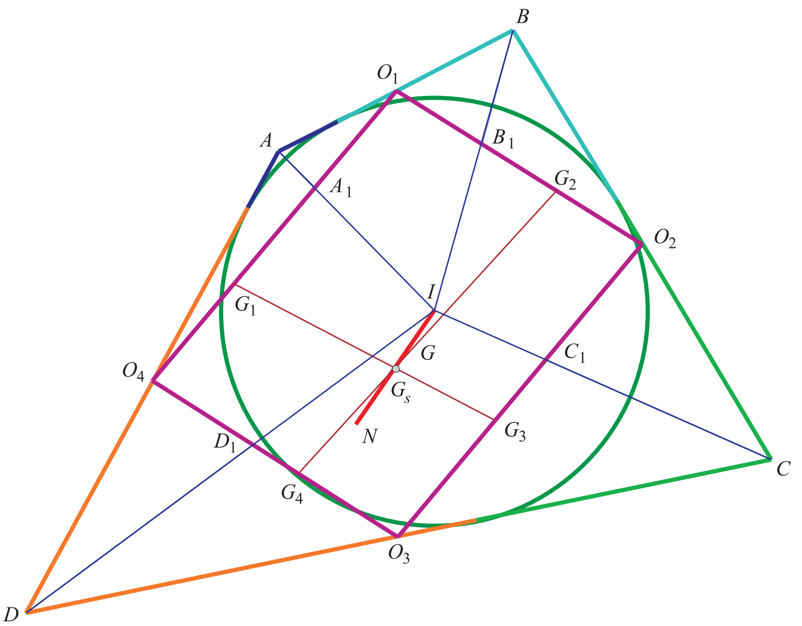

Рис. 10

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. A_1 — точка пересечения биссектрисы AI и отрезка O_1O_4, а G_1 — точка, симметричная A_1 относительно середины O_1O_4. Аналогично определим B_1 и G_2, C_1 и G_3, D_1 и G_4. Тогда G_s является точкой пересечения отрезков G_1G_3 и G_2G_4.

Лемма 1: $I = (q+t)\,A,\ (p+r)\,B,\ (q+t)\,C,\ (p+r)\,D$.

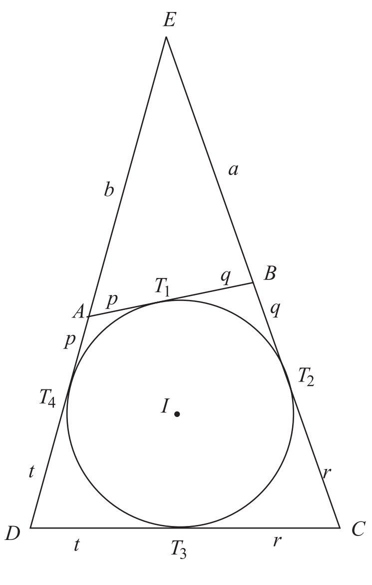

Рис. 11.

Предположим, что в нашем четырехугольнике найдется пара непараллельных противоположных сторон (иначе четырехугольник является ромбом и все три точки N, G, I совпадают с точкой пересечения диагоналей). Пусть это будут, например, стороны AD и BC, а их продолжения за точки A и B соответственно пересекутся в точке E. Пусть $a = EB$, $b = EA$. Тогда, с одной стороны, $I = (t+r)\,E,\ (a+q+r)\,D,\ (b+p+t)\,C$, как центр окружности, *вписанной* в треугольник EDC. С другой же стороны, $I = (p+q)\,E,\ -aA,\ -bB$ — как центр *вневписанной* в EAB окружности. Наконец, поскольку $\frac{EC}{EB} = \frac{a+q+r}{a}$ и $\frac{ED}{EA} = \frac{b+p+t}{b}$, то система $(p+q+r+t)E$ эквивалентна разбиению на подсистемы $(a+q+r)\,B,\ -aC,\ (b+p+t)\,A,\ -bD$. Таким образом,

$$I = (-a+b+p+t)\,A,\ (-b+a+q+r)\,B,\ (-a+b+p+t)\,C,\ (-b+a+q+r)\,D.$$

Осталось заметить, что $b+p=a+q$ (как отрезки касательных, проведенных из одной точки).

Следствие 2 — прямая Ньютона. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр и середины диагоналей лежат на одной прямой.

Следствие 3. В описанном четырехугольнике нагрузим каждую точку касания длиной стороны, содержащей эту точку. Центр масс такой системы есть центр вписанной окружности.

И правда,

$$I = (q+t)\,A,\ (p+r)\,B,\ (q+t)\,C,\ (p+r)\,D = T_1\,(p+q)\,,\ T_2\,(q+r)\,,\ T_3\,(r+t)\,,\ T_4\,(t+p)\,.$$

Действительно, так как $I = (q+t)\,A,\ (p+r)\,B,\ (q+t)\,C,\ (p+r)\,D,$ то подсистема $(q+t)\,A,$ $(q+t)\,C$ имеет центром масс середину AC, а подсистема $(p+r)\,B,\ (p+r)\,D$ — середину BD.

Лемма 2:

$$G = (p+q+t)\,A,\ (p+q+r)\,B,\ (q+r+t)\,C,\ (p+r+t)\,D.$$

Пусть P — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Отметим, что если в него можно вписать окружность, то $\frac{AP}{CP}=\frac{p}{r}$, $\frac{BP}{DP}=\frac{q}{t}$.

Действительно, как следует из теоремы Брианшона ([3]: 30.34, 30.36), прямые T_1T_3 и T_2T_4 также проходят через точку P, поэтому $P=\frac{1}{p}A,\ \frac{1}{q}B,\ \frac{1}{r}C,\ \frac{1}{t}D$, а значит, $P=\frac{1}{q}B,\ \frac{1}{t}D$ и $P=\frac{1}{p}A,\ \frac{1}{r}C$. (Отрезок P_1P_2 с концами на пересекающихся прямых должен проходить через точку пересечения этих прямых, т. е. концы отрезка совпадают с точкой пересечения).

Кроме того, четырехугольник $G_aG_bG_cG_d$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ (смотри 3^0.1).

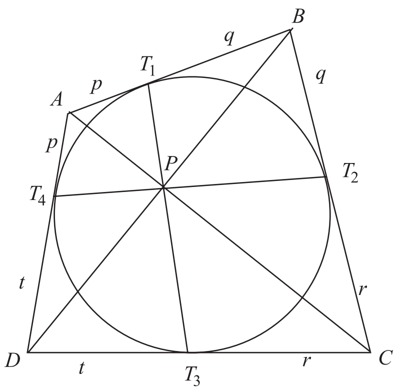

Рис. 12

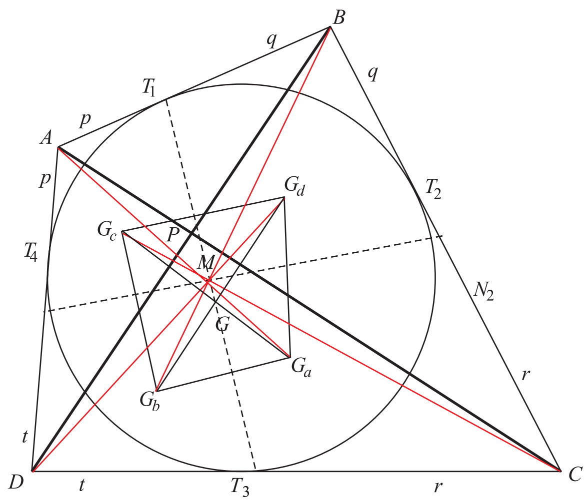

Рис. 13

Значит, $\frac{G_aG}{G_cG}=\frac{AP}{CP}=\frac{p}{r}$, $\frac{G_bG}{G_dG}=\frac{BP}{DP}=\frac{q}{t}$. Поэтому

$$G = rG_a,\ pG_c = pA,\ (r+p)\,B, rC, (r+p)\,D.$$

Аналогично, $G=tG_b,\ qG_d=(q+t)\,A,\ qB,\ (q+t)\,C,\ tD$. Сложив массы при одинаковых вершинах, завершим доказательство[5].

Другое доказательство этой теоремы (но также основанное на геометрии масс) было найдено Алексеем Заславским:

Очевидно, что G_s — центр тяжести четырех точек, помещенных в середины сторон четырехугольника с массами, пропорциональными их длинам, а G — центр тяжести четырех точек, помещенных в центрах тяжести треугольников IAB, IBC, ICD, IDA с массами, пропорциональными площадям этих треугольников. То есть обе системы, с точностью до пропорциональности, имеют одинаковые массы. Понятно, что эти две системы *гомотетичны* с центром

[5]Увы, найти аналог прямой Нагеля для произвольного четырехугольника автору не удалось. Во всяких схожих с б) конструкциях аффинной эквивалентности не возникает. Впрочем, судя по доказательству в), довольно содержательному и использующему важные свойства вписанной в четырехугольник окружности, усилить эту теорему будет нелегко.

в точке I и коэффициентом 2/3. Поэтому $IG : GG_s = 2 : 1$. Кроме того, мы знаем, что $I = (q+t)A, (p+r)B, (q+t)C, (p+r)D$. Тем самым, все доказано.

Литература

[1] М. Балк, В. Болтянский. Геометрия масс. (Библиотечка «Квант», выпуск 61). М., «Наука», 1987 г.

[2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. (Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 19). М., МЦНМО, 2002 г.

[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2001 г.

[4] И. Шарыгин. Геометрия 9–11. Задачник. М., «Дрофа», 1996 г.

[5] А. Богомольный. Remarkable Line in Cyclic Quadrilateral. На сайте: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/InscribedQuadri.shtml

[6] Hyacinthos messages №№ 12400, 12402 — 26.03.2006 На сайте: http://www.groups./ yahoo.com/group/Hyacinthos

Мякишев Алексей Геннадьевич,
Московский Химический Лицей.
Email: alex_geom@mtu-net.ru

Об изложении основ дифференциального исчисления вещественнозначных функций одной и нескольких переменных в терминах понятия дифференцируемости функций по Каратеодори

С. И. Калинин

В предлагаемой статье основные теоремы о дифференцируемости функций рассмотрены с точки зрения понятий дифференцируемости и производной по Каратеодори, что позволяет разработать новый методический подход к изучению этой темы.

Введение

В настоящей работе мы предполагаем обсудить подход к изучению раздела «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных» в рамках курса вещественного анализа для студентов математических специальностей, основанный не только на традиционном использовании понятия дифференцируемости (производной) функции в точке по Коши, но и на систематическом применении понятия дифференцируемости функции по Каратеодори. Упоминаемый подход при установлении основных теорем дифференциального исчисления, именуемых обычно правилами дифференцирования функций, а также ряда других утверждений классического анализа использует элементарно-алгебраические рассуждения, а не операцию предельного перехода. В этом отношении такой подход при изложении соответствующих вопросов «гладкого» анализа не является общепринятым, однако нам он представляется более экономичным и педагогически оправданным.

Рассмотрим по порядку основные моменты затрагиваемой темы.

1. Производная функции. Дифференцируемые функции

Раздел анализа «Дифференциальное исчисление функций одной вещественной переменной» всегда с первокурсниками начинают изучать с воспроизведения хорошо известного еще по школьному курсу математики определения производной функции в точке, введенного Огюстеном Луи Коши в 1823 году. Напомним его.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Составим разностное отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, где $x \in u(x_0)$, $x \neq x_0$. Если при $x \to x_0$ это разностное отношение имеет конечный предел, то последний называют *производной* функции f в точке x_0, обозначая ее символом $f'(x_0)$. Таким образом, по определению Коши,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Обозначение производной функции f в точке x_0 посредством символов $f'(x_0)$, f', y' предложено Лагранжем. Известно, что сам Коши производную обозначал символами $Df(x_0)$, Df, Dy, которые, однако, в математике не привились.

Определение производной (1) можно формулировать и в терминах приращений. Если в формуле (1) $x - x_0$ обозначить через Δx (приращение аргумента x_0), а $f(x) - f(x_0) =$

$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — через $\Delta f(x_0)$ (*приращение* функции fв точке x_0), то (1) можно переписать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Подчеркнем, именно соотношение (2) определяет производную в школьном курсе математики при знакомстве учащихся с соответствующим разделом начал анализа. Напомним также, что процедуру вычисления производной функции называют ее дифференцированием. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса изучения понятия дифференцируемости функции. Сформулируем сначала

Определение 1. Функция f, определенная в окрестности точки x_0, называется *дифференцируемой по Коши в* точке x_0, если в некоторой окрестности $u(x_0)$ этой точки имеет место представление

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \tag{3}$$

где $A = \mathrm{const}$, $\alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Определение 1 проиллюстрируем следующим примером. Покажем, что функция $y = x^2$ дифференцируема в каждой точке x_0 числовой прямой. Действительно, для приращения $x^2 - x_0^2$ рассматриваемой функции в точке x_0 имеем:

$$x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0) = (2x_0 + x - x_0)(x - x_0) = 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, форма (3) для представления разности $x^2 - x_0^2$ в окрестности x_0 соблюдена — в упомянутом представлении $A = 2x_0$, $\alpha(x) = x - x_0$ Дифференцируемость по Коши функции $y = x^2$ в точке x_0 показана.

Соотношение (3), очевидно, удобно записывать в виде

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{4}$$

т.е. в терминах приращений. В (4) величина $o(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, она имеет более высокий порядок малости, чем Δx.

Введем теперь в соответствии с работой [1]

Определение 2. Функцию f, определенную в окрестности $u(x_0)$ точки x_0, назовем *дифференцируемой по Каратеодори* в этой точке, если существует такая определенная в рассматриваемой окрестности и непрерывная в точке x_0 функция $\Phi(x)$, что в $u(x_0)$ будет иметь место представление

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0). \tag{5}$$

Для иллюстрации определения 2 возьмем ту же функцию, что и выше для иллюстрации определения 1. Установление дифференцируемости по Каратеодори функции $y = x^2$ в произвольной точке x_0 производится элементарно:

$$x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Форма (5) соблюдена, роль функции $\Phi(x)$, очевидно, выполняет функция $x + x_0$, определенная на $\mathbb{R}$ и непрерывная в точке x_0.

Для отработки определений 1 и 2 можно рассмотреть такие упражнения:

а) Докажите дифференцируемость по Коши в точке $x_0 = 1$ функции $y = x^3$;

б) Установите дифференцируемость по Каратеодори в точке $x_0 = 2$ функций $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$.

При осмыслении определений 1 и 2 стоит обратить внимание на то, что и условие дифференцируемости по Коши, и условие дифференцируемости по Каратеодори функции в точке влекут непрерывность функции в этой точке. Отмеченное легко усматривается из соотношений (3), (5). Таким образом, непрерывность функции в точке есть необходимое условие какой-либо ее дифференцируемости (по Коши или по Каратеодори) в этой точке. Однако важно подчеркнуть, что непрерывность функции в точке не является, вообще говоря, достаточным условием ее дифференцируемости. Сказанное можно подтвердить, например, рассмотрением функции $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$, но не является дифференцируемой ни по Коши, ни по Каратеодори в этой точке.

Введенные понятия дифференцируемости функции в точке по Коши или по Каратеодори позволяют характеризовать условия существования производной функции в точке. Опишем необходимые и достаточные условия наличия производной у функции посредством следующего критерия, формулируемого в терминах эквивалентности условий.

Теорема А. *Следующие три условия эквивалентны:*

A1. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную;

A2. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема по Коши;

A3. Функция $y = f(x)$ в точке x_0 дифференцируема по Каратеодори.

При выполнении любого из трех приводимых условий для производной $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 имеют место равенства

$$f'(x_0) = A = \Phi(x_0), \tag{6}$$

где A — константа, характеризующая условие дифференцируемости функции f в точке x_0 по Коши, а Φ — функция, характеризующая условие дифференцируемости данной функции в рассматриваемой точке по Каратеодори.

Сформулированную теорему мы условно назовем критерием Коши-Каратеодори существования производной функции в точке, отдавая дань памяти великим ученым.

Приведем **доказательство** теоремы А. Его осуществим по схеме: $\boxed{\text{A3} \to \text{A2} \to \to \text{A1} \to \text{A3}}$, т. е. покажем, что выполнение условия A3 влечет выполнение условия A2, выполнение A2 — выполнение A1 и, наконец, A1 влечет A3.

Итак, пусть выполняется условие A3, т. е. для функции f в окрестности $u(x_0)$ имеет место представление (5). По свойству непрерывной в точке функции в окрестности $u(x_0)$ функция $\Phi(x)$ представится так: $\Phi(x) = \Phi(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

что соответствует форме (3) с константой $A = \Phi(x_0)$.

Пусть теперь выполняется условие A2, т. е. для $f(x)$ в окрестности $u(x_0)$ выполняется представление (3). Тогда для $x \neq x_0$ имеем условие

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x) \underset{x\to x_0}{\to} A = f'(x_0)$$

(последнее равенство записывается на основании того, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$ и $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к константе A).

Если же выполняется условие A1, то введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0, \\ f'(x_0), & x = x_0, \end{cases}$$

определенную в окрестности $u(x_0)$ точки x_0. Она, очевидно, непрерывна в точке x_0. Легко видеть, что для нее будет выполняться условие

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0), \quad x \in u(x_0),$$

говорящее о дифференцируемости функции f в точке x_0 по Каратеодори.

Соотношения (6) были установлены по ходу проведенных рассуждений. Теорема полностью доказана.

В связи с установленной теоремой сделаем следующие замечания.

Замечание 1. Функцию, имеющую производную в точке, можно называть дифференцируемой (по Коши или по Каратеодори) в этой точке. Уместно подчеркнуть, что в школьном курсе математики это так и делается.

Замечание 2. Опираясь на теорему А, можно легко пояснить форму дифференциала $df(x_0)$ дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$. Напомним, главная, линейная относительно Δx часть приращения $\Delta f(x_0)$ в формуле (4), т. е. выражение $A\Delta x$, называется дифференциалом $df(x_0)$ функции f в точке x_0. В силу теоремы А, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Так как для функции $y = x$ $dx = \Delta x$, то имеем следующую форму дифференциала: $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$. Последняя дает представление производной как отношение дифференциалов: $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$, или, более кратко, $y' = \frac{dy}{dx}$. Последние соотношения есть обозначения производной функции, предложенные в свое время Лейбницем.

2. Понятие производной функции по Каратеодори

Введем это понятие, опираясь на определение 2 предыдущего пункта.

Пусть $f(x)$ — дифференцируемая в точке x_0 функция, т. е. для нее имеет место представление (5). Функцию $\Phi(x)$, участвующую в этом представлении, мы и называем *производной по Каратеодори* функции f в точке x_0. Эту производную обозначим символами $\hat{f}(x)$ или $\hat{f}_{x_0}(x)$ в зависимости от того, надо или нет подчеркнуть ее связь с точкой x_0. Мы особо отмечаем, что если производная (по Коши) $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 есть всегда число, то производная по Каратеодори $\hat{f}_{x_0}(x)$ этой функции в данной точке есть функция переменной x. Согласно теореме А значение производной Каратеодори $\hat{f}_{x_0}(x)$ при $x = x_0$ совпадает со значением обычной производной $f'(x_0)$, т. е. $f'(x_0) = \hat{f}_{x_0}(x_0)$.

Замечание 3. Понятие производной Каратеодори впервые было введено в 1954 г. в работе [1]. Цитируемая книга вышла в свет уже после смерти автора.

В качестве иллюстрации введенного понятия рассмотрим следующие примеры.

Так как $x^n - x_0^n = \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)(x - x_0)$, то производная Каратеодори функции $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ в точке x_0 есть функция

$$\hat{y} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Заметим, что для нее выполняется условие $\hat{y}(x_0) = nx_0^{n-1}$. Так как $\hat{y}(x_0) = y'(x_0)$, то имеем формулу для производной степенной функции с натуральным показателем: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Для целого отрицательного m и $x_0 \neq 0$ имеем:

$$x^m - x_0^m = \frac{1}{x^{-m}} - \frac{1}{x_0^{-m}} = -\frac{x^{-m} - x_0^{-m}}{x^{-m}x_0^{-m}} =$$
$$= -\frac{\left(x^{-m-1} + x^{-m-2}x_0 + \cdots + xx_0^{-m-2} + x_0^{-m-1}\right)(x - x_0)}{x^{-m}x_0^{-m}},$$

следовательно, производная Каратеодори функции $y = x^m$ $(m < 0,\ m \in \mathbb{Z})$ в точке x_0 $(x_0 \neq 0)$ есть функция $\hat{y} = -\frac{x^{-m-1}+x^{-m-2}+...+xx_0^{-m-2}+x_0^{-m-1}}{x^{-m}x_0^{-m}}$. В частности, $(\overset{\wedge}{x^{-2}})_{x_0} = -\frac{x+x_0}{x^2x_0^2}$, откуда имеем

$$(x^{-2})'\,|_{x=x_0} = -\frac{2}{x_0^3}.$$

3. Поскольку $\sqrt{x}-\sqrt{x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}(x-x_0)$, то $\underset{x_0}{(\overset{\wedge}{\sqrt{x}})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$, откуда следует, что $(\sqrt{x})'\,|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ $(x_0 \neq 0)$.

Еще пару заданий адресуем читателю для самостоятельного осмысления.

4. Найдите производную Каратеодори функции $y = \sqrt[3]{x}$ в произвольной точке $x_0 \neq 0$ и, используя ее, — обычную производную в точке $x_0 = -1$.

5. Покажите, что если $y(x) \equiv c$ $(c = \mathrm{const})$, то $\hat{y} = 0$.

Введенное понятие производной Каратеодори интерпретируем геометрически. Так как при $x \neq x_0$ справедливо соотношение

$$\hat{f}_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то $\hat{f}_{x_0}(x)$ есть значение углового коэффициента $k_{сек.}$ секущей графика Γ_f функции f, проходящей через точки $M_0\,(x_0; f(x_0))$ и $M\,(x; f(x))$ этого графика. Далее, в силу непрерывности $\hat{f}_{x_0}(x)$ в точке x_0, можно заключить, что $k_{сек.}$ при $x \to x_0$ имеет предельное значение k, равное $\hat{f}_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$. Следовательно, угол $\alpha = \operatorname{arctg} k_{сек.}$ есть угол наклона секущей к оси Ox, и при стремлении точки M к точке M_0 по графику Γ_f он будет стремиться к значению $\alpha_0 = \operatorname{arctg} k$ (стремление точки M к точке M_0, в силу непрерывности функции f в точке x_0, эквивалентно условию $x \to x_0$). Последнее означает, что секущая имеет предельное положение, которое, как известно, называется касательной к Γ_f в точке M_0.

Таким образом, дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ обладает следующим свойством: ее график в точке $M_0\,(x_0; f(x_0))$ имеет невертикальную касательную, угловой коэффициент k которой в точности равняется значению $f'(x_0)$. В результате мы получаем и геометрическую интерпретацию производной $f'(x_0)$.

3. Основные правила вычисления производных

Материал, отвечающий названию данного пункта, в дифференциальном исчислении функций одной переменной является наиболее важным. Мы рассмотрим доказательства теорем о производных функций, получаемых в результате применения к ним арифметических операций, а также доказательства теорем о производной композиции функций и обратной функции. Упоминаемые доказательства осуществим методами, базирующимися на использовании понятия дифференцируемой по Каратеодори функции и критерии Коши-Каратеодори существования производной функции в точке.

Теорема 1. *Пусть функции f и g определены в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемы в самой этой точке. Тогда в точке x_0 будет дифференцируема и сумма $f+g$ данных функций, при этом*

$$(f+g)'(x_0) = (f)'(x_0) + (g)'(x_0). \tag{7}$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функций f и g в точке x_0 и критерия Коши–Каратеодори (теоремы A), имеем представление

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = (f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)) = (\hat{f}(x) + \hat{g}(x))(x - x_0).$$

В этом представлении, заметим, $\hat{f}(x) + \hat{g}(x)$ — непрерывная в точке x_0 функция, следовательно, $\hat{f}(x) + \hat{g}(x) = (\widehat{f+g})(x)$. Дифференцируемость суммы $f+g$ в точке x_0 установлена. Вычислим производную $(f+g)'(x_0)$. Имеем:

$$(f+g)'(x_0) = (\widehat{f+g})(x_0) = \hat{f}(x_0) + \hat{g}(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

что доказывает (7).

Теорема 2. *Пусть функции f и g определены в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемы в самой этой точке. Тогда в точке x_0 будет дифференцируемо и произведение fg данных функций, при этом*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \tag{8}$$

Доказательство. Будем рассуждать по аналогии с доказательством теоремы 1. Для приращения произведения fg в точке x_0 имеем представление

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= g(x)\left(f(x) - f(x_0)\right) - f(x_0)\left(g(x) - g(x_0)\right).\end{aligned}$$

Так как $f(x) - f(x_0) = \hat{f}(x)(x - x_0)$, $g(x) - g(x_0) = \hat{g}(x)(x - x_0)$, то можем записать

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(x_0) &= g(x)\hat{f}(x)(x - x_0) + f(x_0)\hat{g}(x)(x - x_0) = \\ &= \Big(g(x)\hat{f}(x) + f(x_0)\hat{g}(x)\Big)(x - x_0).\end{aligned}$$

Легко видеть, что первый множитель последнего произведения есть непрерывная в точке x_0 функция, следовательно, этот множитель является производной Каратеодори функции fg в точке x_0, т. е.

$$\widehat{(fg)}(x) = g(x)\hat{f}(x) + f(x_0)\hat{g}(x).$$

Дифференцируемость произведения fg в точке x_0 установлена.

Покажем теперь справедливость формулы (8). Имеем:

$$(fg)'(x_0) = \widehat{(fg)}(x_0) = g(x_0)\hat{f}(x_0) + f(x_0)\hat{g}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Теорема доказана.

Теорема 2 имеет очевидное

Следствие. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то функция $cf(x)$ также дифференцируема в этой точке, при этом $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.*

Кроме того, теорема 1 и только что приведенное следствие позволяют сформулировать следующее

Предложение. *Если функции $f_1, \ldots, f_n$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемы в самой этой точке, то в ней будет дифференцируема и любая линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)$ данных функций, при этом*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k'(x_0).$$

Теорема 3. *Пусть функции f и g определены в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемы в самой этой точке, причем $g(x_0) \neq 0$. Тогда в точке x_0 будет дифференцируемо и частное $\frac{f}{g}$ данных функций, при этом*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{9}$$

Доказательство. В силу условий доказываемой теоремы и теоремы А для приращения частного $\frac{f}{g}$ в точке x_0 будет справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} =$$
$$= \frac{(f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)) - (f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0))}{g(x)g(x_0)} =$$
$$= \frac{g(x_0)\,(f(x) - f(x_0)) - f(x_0)\,(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)} = \frac{g(x_0)\hat{f}(x)(x - x_0) - f(x_0)\hat{g}(x)(x - x_0)}{g(x)g(x_0)} =$$
$$= \frac{g(x_0)\hat{f}(x) - f(x_0)\hat{g}(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0).$$

Таким образом, имеем представление

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\hat{f}(x) - f(x_0)\hat{g}(x)}{g(x)g(x_0)}(x - x_0). \tag{10}$$

Соотношение (10) выполняется на той части окрестности $u(x_0)$, где функция $g(x)$ не обращается в 0 (условие $g(x) \neq 0$ выполняется по крайней мере в некоторой окрестности $v(x_0)$ точки x_0, где функция $g(x)$, в силу непрерывности в точке x_0, сохраняет знак значения $g(x_0)$). Так как в (10) функция $\frac{g(x_0)\hat{f}(x) - f(x_0)\hat{g}(x)}{g(x)g(x_0)}$ непрерывна в точке x_0, то она является производной Каратеодори частного $\frac{f}{g}$. Дифференцируемость функции $\frac{f}{g}$ в точке x_0 показана.

Вычислим производную (Коши) этой функции в данной точке. Имеем:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)\hat{f}(x_0) - f(x_0)\hat{g}(x_0)}{g(x_0)g(x_0)} = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Формула (9) обоснована. Теорема полностью доказана.

Приведем теперь формулировку и вывод правила дифференцирования композиции функций (сложной функции).

Теорема 4. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0, а функция g — в некоторой окрестности $v(y_0)$ точки y_0 ($y_0 = f(x_0)$), при этом $f(u(x_0)) \subset v(y_0)$. Если функция f дифференцируема в точке x_0, а g — в точке y_0, то композиция $g \circ f$ функций f и g будет дифференцируема в точке x_0, при этом*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \tag{11}$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что, в силу условий теоремы, функция $g \circ f$ определена в окрестности $u(x_0)$. Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то при $x \in u(x_0)$ имеем

$$f(x) - f(x_0) = \hat{f}(x)(x - x_0).$$

Аналогично, в силу дифференцируемости функции g в точке y_0, в окрестности $v(y_0)$ будет иметь место представление $g(y) - g(y_0) = \hat{g}(y)(y - y_0)$. Подставив в него $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$, получим

$$g\left(f(x)\right) - g\left(f(x_0)\right) = \hat{g}\left(f(x)\right)\left(f(x) - f(x_0)\right).$$

Левая часть последнего равенства есть приращение $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)$ композиции $g \circ f$ в точке x_0, а его правая часть может быть переписана в виде $\hat{g}\left(f(x)\right)\hat{f}(x)(x - x_0)$. Заметим, по теореме о непрерывности композиции функций функция $\hat{g}\left(f(x)\right)\hat{f}(x)$ является непрерывной, следовательно, она есть функция $(\widehat{g \circ f})(x)$. Таким образом, имеем соотношение

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = (\widehat{g \circ f})(x)(x - x_0),$$

устанавливающее дифференцируемость композиции $g \circ f$ в точке x_0.

Вычислим производную Коши функции $g \circ f$ в точке x_0:

$$(g \circ f)'(x_0) = (\widehat{g \circ f})(x_0) = \hat{g}\left(f(x_0)\right)\hat{f}(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Формула (11) установлена.

Теорема 5. *(Правило дифференцирования обратной функции). Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и дифференцируема в самой этой точке, при этом $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке y_0 и ее производная может быть найдена по формуле*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{12}$$

Доказательство. Отметим, во-первых, что в силу условий, наложенных на функцию f, обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует, она будет определена, непрерывна и также строго монотонна на образе $f\left(u\left(x_0\right)\right)$ окрестности $u(x_0)$ относительно отображения f (см. теорему о существовании непрерывной обратной функции).

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то в окрестности $u(x_0)$ будет иметь место представление

$$y - y_0 = \hat{f}(x)(x - x_0), \tag{13}$$

где $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$. В этом представлении функция $\hat{f}(x)$ непрерывна в точке x_0 и отлична от нуля, следовательно, найдется такая окрестность $\tilde{u}(x_0)$ этой точки, что выполнится условие $\hat{f}(x) \neq 0 \quad (x \in \tilde{u}(x_0))$. В этой окрестности, в силу (13), будем иметь представление

$$x - x_0 = \frac{1}{\hat{f}(x)}(y - y_0). \tag{14}$$

Поскольку функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0, то функция $\hat{f}\left(f^{-1}(y)\right)$, определенная на множестве $f\left(\tilde{u}\left(x_0\right)\right)$, будет также непрерывна в точке y_0. Следовательно, из (14) имеем, что функция $\frac{1}{\hat{f}(f^{-1}(y))}$ есть производная Каратеодори функции $x = f^{-1}(y)$ в точке y_0. Дифференцируемость обратной функции в точке y_0 показана.

Установим формулу (12). Имеем:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{\hat{f}\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\hat{f}(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 4. Рассмотренный метод доказательства теорем 1–5 нами описан в работе [2], адресованной учителям и учащимся образовательных учреждений. Этот метод, естественно, может быть использован и будущими учителями математики в обучении учащихся началам математического анализа.

4. Производная Каратеодори в доказательстве теоремы Ферма

Упоминаемую теорему французского математика П. Ферма о среднем значении установим посредством использования понятия производной Каратеодори следующим образом.

Теорема 6. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 и в этой точке принимает наибольшее или наименьшее значение. Если в точке x_0 функция дифференцируема, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. В силу дифференцируемости функции f в точке x_0, в окрестности этой точки будет иметь место представление

$$f(x) - f(x_0) = \hat{f}(x)(x - x_0), \tag{15}$$

где $\hat{f}(x)$ — производная Каратеодори функции fв точке x_0. Пусть для определенности x_0 — точка, в которой функция принимает наибольшее значение. Тогда из (15) имеем: $\hat{f}(x) < 0$, если $x \in u(x_0)$, $x > x_0$, и $\hat{f}(x) > 0$, если $x \in u(x_0)$, $x < x_0$. Переходя в записанных соотношениях для $\hat{f}(x)$ к пределу при $x \to x_0$, получаем условие $0 \le \hat{f}(x_0) = f'(x_0) \le 0$, доказывающее теорему.

5. Необходимое условие монотонности дифференцируемой функции

В данном пункте мы покажем, как можно обосновать необходимое условие нестрогой монотонности дифференцируемой на промежутке функции, используя снова понятие производной Каратеодори.

Теорема Б. *Если дифференцируемая на промежутке l ($l \subset \mathbb{R}$) функция f не убывает, то ее производная удовлетворяет условию $f'(x) \ge 0, x \in l$. Если же на указанном промежутке функция f не возрастает, то ее производная удовлетворяет условию $f'(x) \le 0, x \in l$.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка промежутка l, покажем, что $f'(x_0) \ge 0$. Действительно, в силу дифференцируемости f в точке x_0, в некоторой окрестности $u(x_0)$ этой точки будет иметь место представление

$$f(x) - f(x_0) = \hat{f}_{x_0}(x)(x - x_0), \quad x \in u(x_0),$$

из которого следует, что

$$\hat{f}_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in u(x_0) \setminus \{x_0\}. \tag{16}$$

Так как правая часть (16), в силу неубывания f, неотрицательна, то

$$\hat{f}_{x_0}(x) \ge 0, \quad x \in u(x_0) \setminus \{x_0\}. \tag{17}$$

Переходя в (17) к пределу при $x \to x_0$, получаем условие

$$\lim_{x \to x_0} \hat{f}_{x_0}(x) = \hat{f}_{x_0}(x_0) = f'(x_0) \ge 0.$$

Требуемое показано.

Второе утверждение теоремы устанавливается аналогично.

Итак, мы рассмотрели часть основных положений дифференциального исчисления вещественнозначных функций одной вещественной переменной, доказательство которых можно строить на применении понятия дифференцируемости функции по Каратеодори. Поставим перед собой теперь задачу перенести данный метод на установление соответствующих теорем дифференциального исчисления действительных функций нескольких действительных переменных.

6. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Ниже из соображений простоты изложения вопроса условимся рассматривать лишь функции двух независимых переменных.

Пусть $z = f(x, y)$ — действительная функция независимых переменных x и y, определенная в некоторой окрестности

$$u(M_0) = \left\{(x; y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \ \delta > 0\right\}$$

точки $M_0(x_0; y_0)$. По аналогии с пунктом 1 введем понятия дифференцируемости функции f в точке M_0 по Коши и по Каратеодори.

Определение 3. Функция f *дифференцируема по Коши* в точке M_0, если в окрестности $u(M_0)$ этой точки имеет место представление

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0), \tag{18}$$

где A и B — некоторые числа, $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — бесконечно малые в точке M_0 функции.

Определение 4. Функцию f условимся называть дифференцируемой по Каратеодори в точке M_0, если существуют такие определенные в рассматриваемой окрестности $u(M_0)$ функции $\Phi(x,y)$ и $\Psi(x,y)$, непрерывные в самой точке M_0, что в $u(M_0)$ будет иметь место представление

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\Phi(x,y)(x-x_0)+\Psi(x,y)(y-y_0). \tag{19}$$

Справедлива следующая

Теорема В. *Понятия дифференцируемости функции f в точке M_0 по Коши и по Каратеодори — эквивалентные понятия, т.е. если функция f дифференцируема в точке M_0 по Коши, то она в этой точке дифференцируема и по Каратеодори, и наоборот.*

Доказательство. Пусть функция f в точке M_0 дифференцируема по Коши, т.е. выполняется (18). Тогда положим $\Phi(x,y)=A+\alpha(x,y)$, $\Psi(x,y)=B+\beta(x,y)$, при этом если функции α и β в точке M_0 не определены, то доопределим их по непрерывности значением 0. Функции Φ и Ψ будут непрерывными в точке M_0 и в самой этой точке будут принимать значения A и B соответственно. Представление (18) можно будет записать в виде (19), что означает дифференцируемость функции f в точке M_0 по Каратеодори.

Пусть теперь функция f дифференцируема в точке M_0 по Каратеодори, т.е. имеет место представление (19). В силу непрерывности функций Φ и Ψ в точке M_0 на окрестности $u(M_0)$ этой точки будут справедливы представления $\Phi(x,y)=\Phi(x_0,y_0)+\alpha(x,y)$, $\Psi(x,y)=\Psi(x_0,y_0)+\beta(x,y)$, где α и β — бесконечно малые в точке M_0 функции. Таким образом, (19) можно переписать так:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\Phi(x_0,y_0)(x-x_0)+\Psi(x_0,y_0)(y-y_0)+\alpha(x,y)(x-x_0)+\beta(x,y)(y-y_0).$$

Последнее представление имеет вид (18), дифференцируемость функции f в точке M_0 по Коши установлена. Теорема В доказана.

В силу рассмотренной теоремы тип дифференцируемости (по Коши или по Каратеодори) функции в точке можно не оговаривать.

7. Понятие частной производной Каратеодори

Напомним, дифференцируемость функции f в точке M_0 по Коши влечет ее непрерывность в этой точке, а также существование частных производных $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ функции f в точке M_0, при этом $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=A$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=B$, где A и B — константы в (18), характеризующие дифференцируемость функции f.

Пусть снова $z=f(x,y)$ — дифференцируемая в точке M_0 функция. Тогда для нее в окрестности M_0 будет выполняться представление (19). В этом представлении функцию $\Phi(x,y)$ условимся называть *частной производной Каратеодори* функции f в точке M_0 по первой переменной, а функцию $\Psi(x,y)$ — аналогичной производной по второй переменной. Введенные производные обозначим соответственно символами $\hat f_x$, $\hat z_x$, $\hat f_x(x,y)$, $\hat f_{x,M_0}(x,y)$ (если следует акцентировать внимание на точке, в которой вычисляется частная производная по первой переменной), $\hat f_y$, $\hat z_y$, $\hat f_y(x,y)$, $\hat f_{y,M_0}(x,y)$.

Нетрудно видеть, что для дифференцируемой в точке M_0 функции f справедливы равенства $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\hat f_{x,M_0}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\hat f_{y,M_0}(x_0,y_0)$. Ясно также, что полный дифференциал $df(M_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$ этой функции в точке M_0 может быть выражен через частные производные Каратеодори так: $df(M_0)=\hat f_{x,M_0}(x_0,y_0)dx+\hat f_{y,M_0}(x_0,y_0)dy$.

Попытаемся сформулировать геометрический смысл частных производных Каратеодори функции f.

Положим в (19) $y = y_0$. Тогда при $x \neq x_0$ будет справедливо соотношение $\hat{f}_{x,M_0}(x, y_0) = \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, которое позволяет заключить, что значение $\hat{f}_{x,M_0}(x, y_0) \quad (x \neq x_0)$ выражает тангенс угла наклона секущей кривой

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0, \end{cases}$$

проходящей через точки $(x_0, y_0, f(M_0))$ и $(x, y_0, f(x, y_0))$, к плоскости xOy.

Аналогично интерпретируется величина $\hat{f}_{y,M_0}(x_0, y) \quad (y \neq y_0)$. Она выражает тангенс угла наклона секущей кривой

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0, \end{cases}$$

проходящей через точки $(x_0, y_0, f(M_0))$ и $(x_0, y, f(x_0, y))$, к плоскости xOy.

8. Производная сложной функции одной переменной

Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены на интервале l числовой прямой Ot, а функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости переменных x, y, при этом для любого $t \in l$ выполняется условие $(x(t); y(t)) \in D$. Тогда определена сложная функция $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in l$. В отношении последней справедлива

Теорема 7. *Пусть функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы в точке $t_0, t_0 \in l$, а функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ дифференцируема в точке t_0, при этом*

$$\frac{dz(t_0)}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{d\varphi(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{d\psi(t_0)}{dt}. \tag{20}$$

Доказательство. Для $t \in l$ рассмотрим разность

$$z(t) - z(t_0) = f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)).$$

В силу дифференцируемости функции $f(x, y)$ в точке M_0 ее в некоторой окрестности $u(t_0) \subset l$ можно представить так:

$$z(t) - z(t_0) = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(t), \psi(t))(\varphi(t) - \varphi(t_0)) + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(t), \psi(t))(\psi(t) - \psi(t_0)).$$

Так как функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы в точке t_0, то

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \hat{\varphi}_{t_0}(t)(t - t_0), \quad \psi(t) - \psi(t_0) = \hat{\psi}_{t_0}(t)(t - t_0), \quad t \in u(t_0).$$

Следовательно, имеем представление

$$z(t) - z(t_0) = \left(\hat{f}_{x,M_0}(\varphi(t), \psi(t))\,\hat{\varphi}_{t_0}(t) + \hat{f}_{y.M_0}(\varphi(t), \psi(t))\,\hat{\psi}_{t_0}(t)\right)(t - t_0), \quad t \in u(t_0).$$

В этом представлении, заметим, функция

$$g(t) = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(t), \psi(t))\,\hat{\varphi}_{t_0}(t) + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(t), \psi(t))\,\hat{\psi}_{t_0}(t)$$

есть непрерывная в точке t_0 функция, ибо $\hat{\varphi}_{t_0}(t)$, $\hat{\psi}_{t_0}(t)$ непрерывны как производные Каратеодори, а $\hat{f}_{x,M_0}(\varphi(t), \psi(t))$, $\hat{f}_{y,M_0}(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывны по теореме о непрерывности сложной функции и по причине непрерывности частных производных Каратеодори $\hat{f}_{x,M_0}(x, y)$, $\hat{f}_{y,M_0}(x, y)$ в точке M_0. Значит, $g(t) = \hat{z}_{t_0}(t)$. Последнее говорит о дифференцируемости функции $z(t)$ в точке t_0.

Установим теперь формулу (20). Имеем:

$$\frac{dz(t_0)}{dt} = \hat{z}_{t_0}(t_0) = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(t_0), \psi(t_0))\,\hat{\varphi}_{t_0}(t_0) + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(t_0), \psi(t_0))\,\hat{\psi}_{t_0}(t_0) = \\ = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{d\varphi(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{d\psi(t_0)}{dt}.$$

Теорема доказана.

9. Частные производные сложной функции нескольких переменных

Рассмотрим следующий случай такой функции. Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ определены в некоторой области G плоскости переменных u, v, а функция $z = f(x, y)$ — в области D изменения переменных x, y, при этом для любой точки $(u, v) \in G$ выполняется условие: точка $(\varphi(u, v); \psi(u, v))$ принадлежит D. Тогда на области G будет определена сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Справедлива

Теорема 8. *Пусть функции φ и ψ в точке $P_0(u_0, v_0)$ обладают частными производными $\frac{\partial\varphi(u_0,v_0)}{\partial u}$, $\frac{\partial\varphi(u_0,v_0)}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi(u_0,v_0)}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi(u_0,v_0)}{\partial v}$, а функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Тогда сложная функция $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ в точке $P_0(u_0, v_0)$ также имеет частные производные, которые могут быть вычислены по формулам*

$$\frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(u_0, v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\partial\psi(u_0, v_0)}{\partial u}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial v} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(u_0, v_0)}{\partial v} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\partial\psi(u_0, v_0)}{\partial v}. \tag{22}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение разность

$$z(u, v_0) - z(u_0, v_0) = f(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0)) - f(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)), \quad (u, v_0) \in G.$$

Ее, в силу дифференцируемости функции f в точке M_0, на некотором интервале $(u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon)$ можно представить так:

$$z(u, v_0) - z(u_0, v_0) = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))(\varphi(u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)) + \\ + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))(\psi(u, v_0) - \psi(u_0, v_0)). \tag{23}$$

Представление (23) порождает соотношение

$$\frac{z(u, v_0) - z(u_0, v_0)}{u - u_0} = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))\frac{\varphi(u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{u - u_0} + \\ + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0))\frac{\psi(u, v_0) - \psi(u_0, v_0)}{u - u_0}. \tag{24}$$

В (24) перейдем к пределу при $u \to u_0$, будем иметь:

$$\lim_{u \to u_0}\frac{z(u, v_0) - z(u_0, v_0)}{u - u_0} = \\ = \lim_{u \to u_0}\hat{f}_{x,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0)) \cdot \lim_{u \to u_0}\frac{\varphi(u, v_0) - \varphi(u_0, v_0)}{u - u_0} + \\ + \lim_{u \to u_0}\hat{f}_{y,M_0}(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0)) \cdot \lim_{u \to u_0}\frac{\psi(u, v_0) - \psi(u_0, v_0)}{u - u_0} = \\ = \hat{f}_{x,M_0}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{\partial\varphi(u_0, v_0)}{\partial u} + \hat{f}_{y,M_0}(\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))\frac{\partial\psi(u_0, v_0)}{\partial u} = \\ = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(u_0, v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{\partial\psi(u_0, v_0)}{\partial u} = \frac{\partial z(u_0, v_0)}{\partial u}$$

(при вычислении соответствующих пределов мы воспользовались условием существования в точке P_0 частных производных $\frac{\partial\varphi(u_0,v_0)}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi(u_0,v_0)}{\partial u}$ функций φ и ψ и непрерывностью производных Каратеодори $\hat{f}_{x,M_0}$, $\hat{f}_{y,M_0}$ в точке M_0). Формула (21) установлена, (22) доказывается аналогично. Теорема доказана.

10. Достаточные условия существования производной по направлению

Справедлива следующая

Теорема 8. *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D плоскости xOy и дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ этой области. Тогда существует производная $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$ по любому направлению, при этом последняя может быть вычислена по формуле*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\cos\beta, \tag{25}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ — направляющие косинусы направляющего вектора прямой l.

Доказательство. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка области D, принадлежащая l. Рассмотрим разность $\Delta_l f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ — приращение функции f в точке $M_0(x_0; y_0)$ вдоль l. В силу дифференцируемости f в точке $M_0(x_0; y_0)$ она для точек $M(x; y)$, достаточно близких к $M_0(x_0; y_0)$, может быть представлена в виде

$$\Delta_l f(x_0, y_0) = \hat{f}_{x,M_0}(x, y))\,(x - x_0) + \hat{f}_{y,M_0}(x, y))\,(y - y_0), \quad (x; y) \in l. \tag{26}$$

Обе части (26) поделим на алгебраическую проекцию $pr_l\overrightarrow{M_0M}$ вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на направление прямой l, будем иметь:

$$\frac{\Delta_l f(x_0, y_0)}{pr_l\overrightarrow{M_0M}} = \hat{f}_{x,M_0}(x, y))\,\frac{x - x_0}{pr_l\overrightarrow{M_0M}} + \hat{f}_{y,M_0}(x, y))\,\frac{y - y_0}{pr_l\overrightarrow{M_0M}}. \tag{27}$$

Заметим, $\frac{x-x_0}{pr_l\overrightarrow{M_0M}} = \cos\alpha$, $\frac{y-y_0}{pr_l\overrightarrow{M_0M}} = \cos\beta$, следовательно, (27) можно переписать в виде

$$\frac{\Delta_l f(x_0, y_0)}{pr_l\overrightarrow{M_0M}} = \hat{f}_{x,M_0}(x, y))\cos\alpha + \hat{f}_{y,M_0}(x, y))\cos\beta. \tag{28}$$

В (28) перейдем к пределу при $M \to M_0$. Предельный переход обеспечивает и существование производной $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$, и справедливость формулы (25). Теорема доказана.

11. Вывод уравнения касательной плоскости к гладкой поверхности

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$. Обоснование того, что касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \tag{29}$$

сводится (см., напр., [3, С. 173], [4, С. 385]) к доказательству соотношения

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x, y)(x - x_0) - f'_y(x, y)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0. \tag{30}$$

Установим его таким образом. Учитывая дифференцируемость функции f в точке $M_0(x_0; y_0)$ по Каратеодори, выражение под знаком предела в (30) можно переписать так:

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x(x, y)(x - x_0) - f'_y(x, y)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} =$$

$$= \frac{\Big(\hat{f}_{x,M_0}(x, y) - f'_x(x_0, y_0)\Big)(x - x_0) - \Big(\hat{f}_{y,M_0}(x, y) - f'_y(x_0, y_0)\Big)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

Поскольку величины $\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$, $\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ ограничены, а

$$\hat{f}_{x,M_0}(x, y) \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\longrightarrow} f'_x(x_0, y_0), \qquad \hat{f}_{y,M_0}(x, y) \underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{\longrightarrow} f'_y(x_0, y_0),$$

то полученная дробь стремится к нулю при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Это доказывает (30), а следовательно, (29) действительно есть уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке P_0.

Заключение

Итак, мы рассмотрели достаточно большое количество утверждений дифференциального исчисления действительных функций одной и нескольких переменных, доказательство которых можно строить на использовании понятия дифференцируемости функции по Каратеодори. Описанный метод можно применить и при доказательстве некоторых других утверждений, здесь не рассмотренных. Кроме того, в терминах производной Каратеодори устанавливаются и соответствующие теоремы дифференциального исчисления функций комплексной переменной. Однако ради экономии места в данной работе упоминаемый материал мы не рассматриваем. Предоставим возможность попытаться сделать это читателю.

Литература

[1] Constantin Carathéodory. Theory of Functions of a Complex Variable. Vol. 1. — Chelsea, New York, 1954.

[2] Калинин С. И. К вопросу об изучении темы «Производная» // Математика в школе. — 1994. — № 4. — С. 59–62.

[3] Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа. Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Т.II. — М.: Просвещение, 1976.

[4] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.I. — М.: Наука, 1966.

Калинин Сергей Иванович,
доцент кафедры прикладной математики
Вятского государственного гуманитарного университета,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: kpm@vshu.kirov.ru

Информационный анализ азартных игр

А. Ф. Ляхов

В статье, на примере карточной игры в дурака, для многошаговой антагонистической игры с неполной информацией рассматриваются методы количественного анализа неопределенности и информации у игроков на каждом шаге игры. Эти методы основаны на теоретико-вероятностных понятиях энтропии и информации.

В статье приводится информационный анализ многошаговой антагонистической игры с неполной информацией — игры в «дурака». Развиваемый в работе информационный подход позволил поставить задачу о рефлексивном управлении противником. Впервые в качестве количественной оценки качества рефлексивного управления используются энтропия и информация. Развиваемые в работе идеи, методы и подходы могут быть использованы при изучении курсов дискретной математики, теории игр, а также при внеклассной работе со школьниками.

Известно, что практически все настольные игры используются при изучении моделей теории игр и при моделировании проблем, связанных с исследованием искусственного интеллекта. Среди этого множества игр особое место занимают так называемые азартные игры. В переводе на русский язык слово «азартные» означает «трудные». Примером азартных игр могут служить различные карточные игры, лотереи, рулетки и т. д. Трудность этих игр связана с принципиальным присутствием случайных элементов в правилах игр. При анализе игр с помощью математических теорий обычно говорят о цене игры и соответствующем выборе стратегий игры, вопросы же о степени трудности игры, т. е. о степени ее неопределенности остаются открытыми.

В настоящей работе с помощью понятия энтропии и информации [1, 2] проводится информационный анализ азартной карточной игры в «дурака». Этот анализ позволяет перейти к более сложной задаче о рефлексивном управлении партнером по игре [3][1].

При создании теории рефлексивного управления В. А. Лефевр ввёл некоторые символьные обозначения. Вопрос о количественных оценках этого управления оставался открытым. В работе впервые показана возможность использования в качестве такой количественной меры информационной энтропии и информации.

Для изучения процесса игры в работе была введена шкала ценности карт и определена энтропия, связанная с неопределенностью карт противника и расположением карт в колоде. Информационный анализ локальной партии показал, как меняется информация игроков во время игры, что позволило определить понятие информационного выигрыша. Поскольку при игре используется конечный набор карт, то для определения вероятности того или иного сочетания карт используются комбинаторные методы.

Введение ценностной шкалы карт позволило также ввести понятие «плохой расклад карт», «средний расклад карт» и «хороший расклад карт». Зная свои карты и карты, вышедшие из игры, игрок может оценить вероятность того или иного расклада карт противника, степень неопределенности и математическое ожидание карты, которая придет из колоды[2].

Предложенный информационный анализ позволяет осуществлять рефлексивное управление противником. В настоящее время большинство игровых программ (шашки, шахматы и т. д.) создаются для игры с «идеальным» игроком, тогда как реальный игрок всегда ограничен по своим возможностям. Целевая функция игрока, которая лежит в основе принятия им решения, может очень существенно отличаться от идеальной функции. Знание целевой функции противника позволяет выбрать наиболее оптимальный путь к выигрышу. Но существует еще одна возможность, позволяющая получить игровое преимущество, и не учитываемая игровыми программами, а именно, формирование заданной целевой функции противника.

[1]Книгу Лефевр В. А. «Конфликтующие структуры» можно найти в Интернете

[2]Заметим, что введение лингвистических терминов «плохой», «средний», «хороший» расклад открывают возможность для анализа игры с помощью методов нечеткой логики.

Рефлексивное управление в рассматриваемой игре может осуществляться передачей противнику ложной информации об имеющемся раскладе карт. Например, игрок A открывает «случайно» одну свою карту, чтобы создать у противника представление о том, что у него хороший расклад карт. В зависимости от подверженности внешнему влиянию игрок B может просто учесть полученную дополнительную информацию, а может, поверив в «случайный» характер открытой карты, сделать заключения о качестве карт игрока A. Введенные в работе количественные характеристики позволяют оценить степень риска игрока A и возможный информационный выигрыш.

Основные понятия теории вероятностей и теории информации

В дальнейшем будем использовать классическое определение вероятности. В качестве пространства равновозможных элементарных событий будем рассматривать различные наборы карт, а под случайным событием будем понимать появления некоторого ожидаемого набора карт у игрока.

Вероятностью случайного события A называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу всех равновозможных элементарных событий пространства Ω, определяемого данным испытанием,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число равновозможных элементарных событий, которые благоприятствуют событию A, n — число всех равновозможных элементарных событий, вытекающих из условий данного испытания [1].

Каждый игрок принимает решение о выборе игрового хода, исходя из знания своих карт, вышедших карт и карт, открытых во время розыгрыша локальной партии, а также из оценок вероятности ожидаемых карт у противника и в колоде. Неопределенность принятия решения игроком связана как с неопределенностью карт игрока противника, так и с неопределенностью ожидаемого хода. В соответствии с теорией информации, в качестве меры априорной неопределенности системы используется специальная характеристика, называемая энтропией [1].

Энтропией системы называется сумма произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятая с обратным знаком:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i,$$

где X — система, могущая находится в n различных состояниях с вероятностями p_i.

Пусть в некоторый начальный момент времени неопределенность состояния системы X описывается энтропией H_0, затем было получено некоторое сообщение, уточняющее состояние системы, и было определено новое значение энтропии H_1. Тогда в качестве меры количества информации, содержащейся в сообщении, может быть взята величина

$$I = H_0 - H_1.$$

Модель игры

В качестве модели исследуемой азартной игры выберем классическую игру в «дурака». Приведем основные правила игры. В игре участвует колода из 36 карт, игрокам раздается по 6 карт, одна карта открывается и она определяет козырную масть, эта карта кладется под колоду. Игра состоит из локальных партий (один игрок ходит, другой отвечает). После розыгрыша локальной партии игроки дополняют свои наборы карт до шести карт из колоды. Побеждает тот игрок, у которого в конце последней локальной партии не остается карт. Элемент случайности этой игры связан с раскладом карт и ошибками игроков. Во время игры для того, чтобы совершать правильные ходы и в конце игры знать карты противника, игроки должны отслеживать карты, выходящие из игры.

Рассмотрим игру двух игроков. Чтобы устранить случайности, связанные с человеческим фактором, будем полагать, что игроки идеальные:

1) они не совершают ошибок,

2) они играют правильно, то есть, зная расклад карт, они могут просчитывать все ходы до конца,

3) каждый из игроков хочет выиграть.

Исследуемую игру можно классифицировать как антагонистическую многошаговую игру с нулевой суммой, с неполной информацией. Анализ игры будем проводить в развернутой форме.

Информационный анализ игры

Анализ игры начнем с определения глобальной неопределенности игры, связанной со случайным раскладом карт. Очевидно, что число различных распределений карт $N_0 = 36!$. Однако при игре, при получении карт на руки, для игрока не имеет значения порядок шести полученных карт, как своих, так и карт противника, следовательно, общее число различных распределений карт $\tilde{N}_0 = \frac{36!}{6!6!}$.

Обозначим первого игрока — A, а второго — B. После раздачи карт каждый игрок знает 6 своих карт и козырь, ему неизвестно 29 карт. Следовательно, степень неопределенности у каждого игрока определяется числом неизвестных наборов карт у противника: $N = C_{29}^6$. Вероятность реализации одного из наборов $p_i = \frac{1}{C_{29}^6}$, причем все p_i равны. Степень неопределенности каждого игрока будет характеризоваться энтропией

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot \log_2 p_i.$$

В начале игры энтропии первого и второго игрока равны $H_{OA} = H_{OB} = \log_2 C_{29}^6$.

Поскольку игра носит характер последовательного разыгрывания локальных партий, то теоретически может быть построен граф развития этой игры. Но из-за большого числа исходов в каждой локальной партии дерево графа практически изобразить не удается. Приведем описание разветвления графа игры после первого хода игрока A.

Игрок A начинает игру, делает ход и после этого возможны различные варианты игры.

Игрок A ходит одной картой.

Игрок B берет карту.

Игрок B бьет карту.

Игрок A ходит двумя картами.

Игрок B берет две карты.

Игрок B кроет одну карту, а вторую покрыть не может и берет две карты.

Игрок B кроет обе карты.

Аналогично можно расписать остальные исходы первой партии.

Игрок A ходит тремя картами.

Игрок A ходит четырьмя картами.

Игрок A ходит пятью картами.

Игрок A ходит шестью картами.

Заметим, что последние исходы встречаются достаточно редко. В течение игры меняется энтропия и количество информации, которое получают игроки.

Рассмотрим первую локальную игру. Игрок A сделал первый ход одной картой. После хода игрока A игрок B знает на одну карту больше чем игрок A, т. е. его состояние неопределенности будет меньше. Энтропия игрока B будет равна $H_{1B}^p = \log_2 C_{28}^5$. Следовательно второй игрок получил информацию $I = H_{0B} - H_{1B}^p = \log_2 \frac{29}{6} = 2{,}2703$. *Игрок B берет карту.* При этом он проигрывает в информации, т. к. игрок A берет карту из колоды и энтропии обоих игроков уравниваются

$$H_{1A} = H_{1B} = \log_2 C_{28}^6.$$

Оба игрока после розыгрыша партии получили дополнительную информацию

$$I = H_{0B} - H_{1B} = \log_2 \frac{29}{23} = 0{,}3344.$$

Рассмотрим другой исход партии, *игрок B бьет карту.* В этом случае оба игрока берут карты из колоды и их энтропии будут равны

$$H_{1A} = H_{1B} = \log_2 C_{27}^6.$$

Полученная игроками информация $I = H_{0B} - H_{1B} = \log_2 \frac{29\cdot 28}{23\cdot 22} \approx 0{,}6846.$

Если все локальные партии развиваются по такому сюжету, то энтропия на каждом шаге будет уменьшаться $I_i = \log_2 \frac{C_{29-2(i-1)}^6}{C_{29-2i}^5}$.

Рассмотрим вторую ветвь графа игры. *Игрок A ходит двумя картами. Игрок B берет две карты.* В этом случае степень неопределенности равна

$$H_{1A} = H_{1B} = \log_2 C_{27}^6.$$

Рассмотрим второй исход игры. *Игрок B кроет одну карту, а вторую карту покрыть не может и берет две карты.*

В этом случае первый игрок получает информационное преимущество, он не знает у второго игрока пять карт, а второй игрок не знает все шесть карт $H_{1A} = \log_2 C_{27}^5$, $H_{1B} = \log_2 C_{27}^6$. Коэффициент информационного преимущества $\chi = \frac{H_{1B}}{H_{1A}} = 1{,}1150$.

Игрок B кроет обе карты. Оба игрока берут карты из колоды и степень неопределенности обоих игроков будет одинаковой,

$$H_{1A} = H_{1B} = \log_2 C_{25}^6.$$

Нетрудно заметить, что максимально возможный информационный проигрыш у игрока B будет в случае, когда он сумел покрыть пять карт, но не покрыл шестую карту

$$H_{1B} = \log_2 C_{23}^6, \qquad H_{1A} = \log_2 C_{17}^1.$$

Коэффициент информационного преимущества $\chi = \frac{H_{1B}}{H_{1A}} = 4{,}0669$.

Аналогично можно рассмотреть и более сложные партии.

Количественные характеристики игры

Для дальнейшего анализа игры и построения оценочной функции введем количественную шкалу оценки карт.

Для карт простой масти

Карта	шестерка	семерка	восьмерка	девятка	десятка	валет	дама	король	туз
Цена	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Для карт козырной масти

Карта	шестерка	семерка	восьмерка	девятка	десятка	валет	дама	король	туз
Цена	11	12	13	14	15	16	17	18	19

В соответствии с приведенной шкалой может быть введена средняя ценность одной карты на руках игрока

$$m = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i,$$

k — число карт у игрока, r_i — ценность карты в соответствии с введенной шкалой.

При игре игроки, как правило, явно или не явно пользуются качественной оценкой своих карт и карт противника. Построим некоторые качественные оценки.

Будем считать плохими карты 6, 7, 8, 9 некозырных мастей, всего 12 карт, остальные 24 карты хорошие.

Рассмотрим начальный этап игры, когда у каждого игрока по 6 карт. Будем считать расклад плохим, если плохих карт больше трех. В этом случае средняя ценность карт игрока будет лежать в диапазоне $1{,}5 \leq m \leq 7{,}67$.

Если плохих карт ровно три, то это средний расклад, $3{,}5 \leq m \leq 11{,}5$.

Если плохих карт меньше трех, то это хороший расклад, $4{,}5 \leq m \leq 16{,}5$.

Приведем график изменения ценности карт игроков в некоторых партиях (рис. 1).

Из приведенных графиков можно видеть, что при правильной игре, приводящей к выигрышу, ценность карт возрастает в течение игры.

Оценка вероятности получения одного из раскладов карт

Определим оценку вероятности получения плохого расклада карт одним из игроков. Это событие будет состоять из следующих событий:

1) 6 карт выбираются только из плохих карт C_{12}^6,

2) 5 карт выбирается из плохих карт, а последняя карта выбирается из 23 карт (всего хороших карт 24, но одна козырная открыта) $C_{12}^5 \cdot C_{23}^1$,

3) 4 карты выбираются из плохих карт, а две из хороших $C_{12}^4 C_{23}^2$.

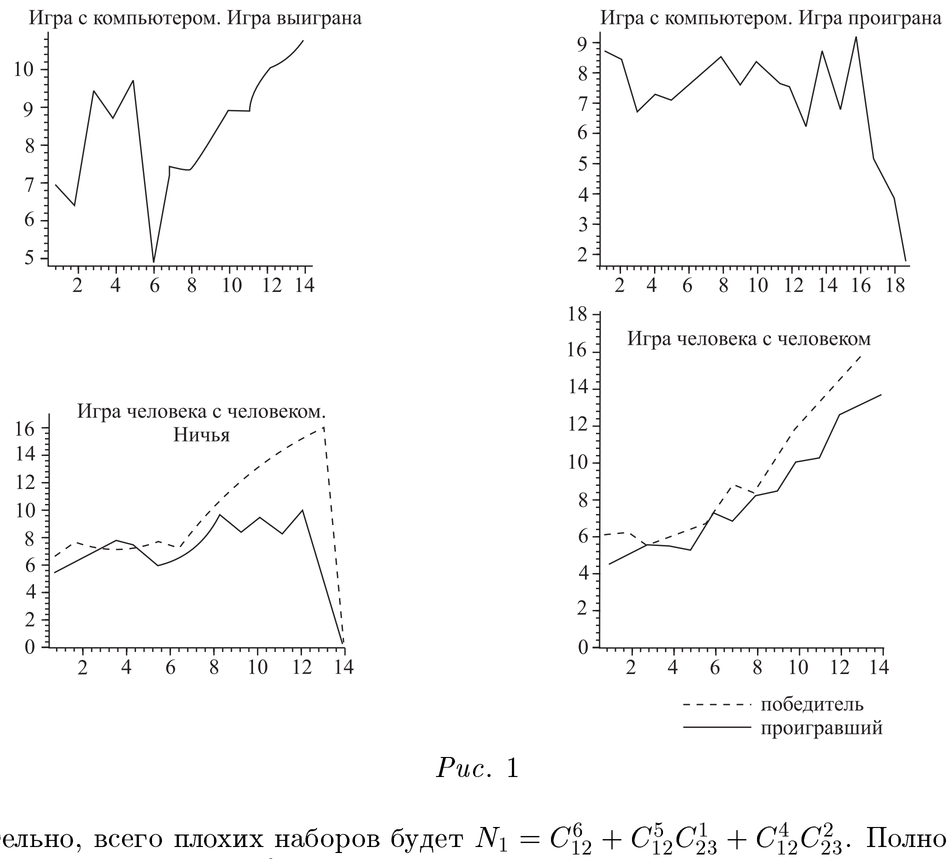

Рис. 1

Следовательно, всего плохих наборов будет $N_1 = C_{12}^6 + C_{12}^5 C_{23}^1 + C_{12}^4 C_{23}^2$. Полное количество всевозможных наборов $N_0 = C_{35}^6$. Вероятность получить плохой набор карт $p_1 = \frac{N_1}{N_0} = 0{,}09$. Аналогично получим количество наборов средних карт $N_2 = C_{12}^3 C_{23}^3$, и количество наборов хороших карт $N_3 = C_{23}^6 + C_{23}^5 C_{12}^1 + C_{23}^4 C_{12}^2$. Вероятность получить средний набор карт $p_2 = \frac{N_2}{N_0} = 0{,}24$, вероятность получить хороший набор карт $p_3 = \frac{N_3}{N_0} = 0{,}67$.

Состояние неопределенности, связанное с неопределенностью того или иного набора карт перед игрой, будет определяться энтропией

$$H_0 = -0{,}09 \log_2 0{,}09 - 0{,}64 \log_2 0{,}64 - 0{,}24 \log_2 0{,}24 = 1{,}2.$$

Заметим, что максимальное значение энтропии было бы при равенстве всех вероятностей ($p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$): $\quad H_{\max} = 1{,}58$.

В процессе игры каждый из игроков пытается оценить карты противника. Получим вероятностную оценку игроком $\boldsymbol{A}$ карт игрока $\boldsymbol{B}$, при условии, что игрок $\boldsymbol{A}$ имеет плохие карты.

Пусть у игрока $\boldsymbol{A}$ есть 6 плохих карт, тогда количество наборов плохих карт у игрока $\boldsymbol{B}$ будет определятся выражением $N_1 = C_6^6 + C_6^5 C_{23}^1 + C_6^4 C_{23}^2$, количество наборов средних карт $N_2 = C_6^3 C_{23}^3$, количество наборов хороших карт $N_3 = C_{23}^6 + C_{23}^5 C_6^1 + C_{23}^4 C_6^2$, всего наборов $N_0 = C_{29}^6$. Следовательно можно вычислить вероятности всех наборов $p_1 = 0{,}0083$, $p_2 = 0{,}0746$, $p_3 = 0{,}9171$ и соответственно энтропию знаний игрока $\boldsymbol{A}$ относительно карт игрока $\boldsymbol{B}$: $H_{AB} = 0{,}4510$. Следовательно, если у игрока $\boldsymbol{A}$ шесть плохих карт, то вероятность того, что у игрока $\boldsymbol{B}$ хорошие карты, очень высока и при этом степень неопределенности мала.

Если у игрока $\boldsymbol{A}$ одна хорошая карта, то у игрока $\boldsymbol{B}$ будут следующие количества наборов карт $N_1 = C_7^6 + C_7^5 C_{22}^1 + C_7^4 C_{22}^2$, $N_2 = C_7^3 C_{22}^3$, $N_3 = C_{22}^6 + C_{22}^5 C_7^1 + C_{22}^4 C_7^2$. Этим значениям будут соответствовать следующие вероятности: $p_1 = 0,0180$, $p_2 = 0,1135$, $p_3 = 0,8685$ и энтропия $H_{AB} = 0,6372$.

В последнем случае у игрока $\boldsymbol{A}$ две хорошие карты, а остальные плохие. У игрока $\boldsymbol{B}$ могут быть следующие количества наборов карт $N_1 = C_8^6 + C_8^5 C_{21}^1 + C_8^4 C_{21}^2$, $N_2 = C_8^3 C_{21}^3$, $N_3 = C_{21}^6 + C_{21}^5 C_8^1 + C_{21}^4 C_8^2$ или вероятности $p_1 = 0{,}0335$, $p_2 = 0{,}1568$, $p_3 = 0{,}8097$ и энтропия $H_{AB} = 0{,}8297$.

Аналогичным образом можно рассмотреть остальные возможные расклады карт у игрока $\boldsymbol{A}$. Приведем значение энтропии для случая, когда у игрока $\boldsymbol{A}$ шесть хороших карт. У игрока $\boldsymbol{B}$ возможны следующие количества наборов карт $N_1 = C_{12}^6 + C_{12}^5 C_{17}^1 + C_{12}^4 C_{17}^2$, $N_2 = C_{12}^3 C_{17}^3$, $N_3 = C_{17}^6 + C_{17}^5 C_{12}^1 + C_{17}^4 C_{12}^2$, вероятности при этом имеют следующие значения $p_1 = 0,1720$, $p_2 = 0,3149$, $p_3 = 0,5130$, а энтропия $H_{AB} = 1,456$.

Значения вероятностей и энтропии для всех возможных раскладов приведены в таблице 1 (a — количество плохих карт у игрока $\boldsymbol{A}$)

Таблица 1.

a	p_1	p_2	p_3	H_{AB}
6	0,0083	0,0746	0,9171	0,4510
5	0,0180	0,1135	0,8685	0,6372
4	0,0335	0,1568	0,8097	0,8297
3	0,0559	0,2016	0,7425	1,017
2	0,0861	0,2448	0,6691	1,190
1	0,1248	0,2834	0,5918	1,338
0	0.1720	0,3149	0,5130	1,456

На рис. 2 приведен график зависимости энтропии от количества плохих карт у игрока $\boldsymbol{A}$

Можно видеть, что при усложнении расклада карт у игрока $\boldsymbol{A}$ степень неопределенности относительно карт игрока $\boldsymbol{B}$ возрастает.

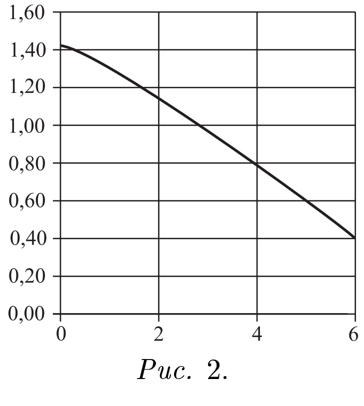

Рис. 2.

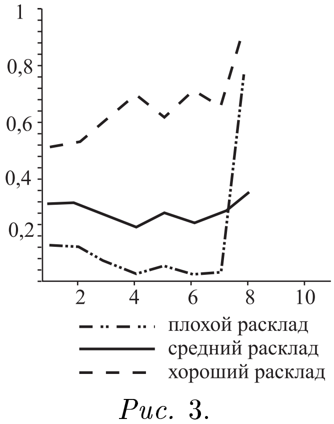

Рис. 3.

На основе проведенного анализа можно сделать следующие содержательные выводы:

- если у игрока $\boldsymbol{A}$ плохие карты, то с большой степенью вероятности у игрока $\boldsymbol{B}$ хорошие карты;
- если у игрока $\boldsymbol{A}$ хорошие карты, то вероятность, что у игрока $\boldsymbol{B}$ хорошие карты, больше вероятности того, что у него плохие карты.

График изменения вероятности расклада карт противника в течении одной реальной игры изображен на рис. 3.

Рефлексивное управление

При игре в карты большое влияние имеет человеческий фактор. Каждый игрок перед принятием решения пытается получить дополнительную информацию о картах противника, о его стратегии, и дезинформировать его о своих картах и своей стратегии. Для этого он должен представить себя на стороне противника и попытаться взглянуть на свои действия его глазами. Целенаправленно передавая противнику информацию о себе, игрок пытается управлять действиями противника. Такое управление, связанное с передачей человеку информации, подталкивающей его к решению, нужному лицу, осуществляющему управление, называется рефлексивным управлением [3].

При создании теории рефлексивного управления В. А. Лефевр ввёл символьные обозначения, позволяющие делать некоторые качественные оценки процесса управления, но вопрос о количественных оценках этого управления оставался открытым. Покажем, что в качестве такой количественной меры может быть использована информационная энтропия и информация.

Мы не будем рассматривать чисто жульнические, шулерские приемы игры. Остановимся на одном легальном приеме, применяемом, например, игроком $\boldsymbol{A}$, и позволяющим изменить информационные оценки игрока $\boldsymbol{B}$. Надо заметить, что при этом меняются информационные оценки игрока $\boldsymbol{A}$ относительно того, как он представляет игрока $\boldsymbol{B}$.

Пусть игрок $\boldsymbol{A}$ пытается убедить игрока $\boldsymbol{B}$ в том, что у него (у игрока $\boldsymbol{A}$) хорошие карты. Для этого он демонстрирует одну свою хорошую карту, утверждая, что карта открылась случайным образом.

Всех игроков по их поведению в игре можно разделить на три группы. Игроки первой группы не поддаются психологическому давлению противника. Они играют, учитывая только реальную информацию о своих картах и картах противника (объективисты). Игроки второй группы воспринимают всю информацию, которую им предлагает противник, как достоверную. Игроки третьей группы учитывают предоставляемую информацию противником, полагая ее достоверной с некоторой вероятностью.

Пусть игрок $\boldsymbol{B}$ имеет шесть плохих карт. Рассмотрим оценку карт игрока $\boldsymbol{A}$ игроком $\boldsymbol{B}$, принадлежащим к первой группе (группе объективистов). Игрок $\boldsymbol{B}$ знает свои шесть плохих карт, козырную карту и одну хорошую карту игрока $\boldsymbol{A}$. Следовательно, как и в предыдущем случае, мы можем вычислить вероятности наборов карт игрока $\boldsymbol{A}$ с точки зрения игрока $\boldsymbol{B}$. Если у игрока $\boldsymbol{B}$ шесть плохих карт, то вероятности соответствующих наборов карт у игрока $\boldsymbol{A}$ будут равны $p_1 = 0{,}0034$, $p_2 = 0{,}0470$, $p_3 = 0{,}9496$, а энтропия будет равна $H_{BA} = 0{,}3062$. Если у игрока $\boldsymbol{B}$ одна хорошая карта, то $p_1 = 0{,}077$, $p_2 = 0{,}0748$, $p_3 = 0{,}9175$, $H_{BA} = 0{,}4477$. Если у игрока $\boldsymbol{B}$ две хорошие карты, то $p_1 = 0{,}0148$, $p_2 = 0{,}1083$, $p_3 = 0{,}8769$, $H_{BA} = 0{,}6034$ и т. д. Значения вероятностей и энтропии для остальных случаев приведены в таблице 2 (a — количество плохих карт у игрока $\boldsymbol{B}$).

На основе проведенных вычислений можно сделать следующий содержательный вывод. Если игрок $\boldsymbol{B}$ увидел одну хорошую карту у игрока $\boldsymbol{A}$, то для него степень неопределенности расклада карт у игрока $\boldsymbol{A}$ уменьшится.

Рассмотрим игрока $\boldsymbol{B}$, полностью доверяющего игроку $\boldsymbol{A}$. Игрок $\boldsymbol{B}$ считает, что карта открылась случайным образом. В этом случае, применяя формулу Бейеса для гипотез, можно оценить вероятность хорошего расклада карт игрока $\boldsymbol{A}$.

Выше были приведены вероятности хорошего, среднего и плохого раскладов $(K_1,\ K_2,\ K_3)$, (см. таблицу 1) при отсутствии информации о картах игрока $\boldsymbol{A}$

$$p_1(K_1) = 0{,}0083, \qquad p_2(K_2) = 0{,}0746, \qquad p_3(K_3) = 0{,}9171.$$

Таблица 2.

a	p_1	p_2	p_3	H_{BA}
6	0,0034	0,0470	0,9496	0,3062
5	0,0077	0,0748	0,9175	0,4477
4	0,0148	0,1083	0,8769	0,6034
3	0,0256	0,1462	0,8282	0,7662
2	0,0410	0,1868	0,7722	0,9292
1	0,0618	0,2283	0,7099	1,086
0	0,0886	0,2686	0,6427	1,229

Для того, чтобы применить формулу Бейеса, необходимо вычислить условные вероятности открытия хорошей карты при условии, что у игрока $\boldsymbol{A}$ плохие карты, средние карты и хорошие карты. Сложное событие «случайное открытие хорошей карты при плохих картах у игрока $\boldsymbol{A}$» будет происходить при следующих наборах карт: либо у игрока $\boldsymbol{A}$ пять плохих карт и одна хорошая, либо у игрока $\boldsymbol{A}$ четыре карты плохих и две хороших. Напомним, что всего возможных раскладов $N_0 = C_{29}^6$. В этом случае вероятность открытия случайно хорошей карты будет равна $P_1 = \frac{C_6^5 C_{23}^1}{C_{29}^6}\frac{1}{6} + \frac{C_6^4 C_{23}^2}{C_{29}^6}\frac{1}{3} = 0{,}003$. Вероятность показать случайно хорошую карту при средних картах $P_2 = \frac{C_6^3 C_{23}^3}{C_{29}^6}\frac{1}{2} = 0{,}004$, вероятность показать хорошую карту при хороших картах равна $P_3 = \frac{C_{23}^6}{C_{29}^6} + \frac{C_{23}^5 C_6^1}{C_{29}^6}\frac{5}{6} + \frac{C_{23}^4 C_6^2}{C_{29}^6}\frac{2}{3} = 0{,}993$.

Условная вероятность гипотезы о том, что у игрока $\boldsymbol{A}$ плохие карты в соответствии с формулой Бейеса будет вычисляться по формуле

$$p_{K1} = \frac{p_1(K_1)P_1}{p_1(K_1)P_1 + p_2(K_2)P_2 + p_3(K_3)P_3} \approx 0{,}00003.$$

Условная вероятность гипотезы о том, что у игрока $\boldsymbol{A}$ средние карты

$$p_{K2} = \frac{p_2(K_2)P_2}{p_1(K_1)P_1 + p_2(K_2)P_2 + p_3(K_3)P_3} \approx 0{,}00003.$$

Условная вероятность гипотезы о том, что у игрока $\boldsymbol{A}$ хорошие карты

$$p_{K3} = \frac{p_3(K_3)P_3}{p_1(K_1)P_1 + p_2(K_2)P_2 + p_3(K_3)P_3} \approx 0{,}99994.$$

Можно видеть, что вероятность того, что у игрока $\boldsymbol{A}$ хорошие карты, возросла, а энтропия новой оценки игроком $\boldsymbol{B}$ карт игрока $\boldsymbol{A}$ уменьшилась $H_{BA} = 0{,}0000987$.

Из проведенных вычислений можно сделать следующий содержательный вывод. Игроку $\boldsymbol{A}$ удается эффективно влиять на информацию игрока $\boldsymbol{B}$, т.е. игрок $\boldsymbol{A}$ может ввести игрока $\boldsymbol{B}$ в заблуждение о том, какие у него карты.

Оценка эффективности рефлексивного управления

Принимая решение открыть карту, игрок $\boldsymbol{A}$ пытается встать на позицию игрока $\boldsymbol{B}$ и оценить неопределенность видения игроком $\boldsymbol{B}$ карт игрока $\boldsymbol{A}$. Ему необходимо оценить влияние открытия карты на игрока $\boldsymbol{B}$.

Пусть у игрока $\boldsymbol{A}$ пять плохих карт. В этом случае можно указать вероятности любых раскладов карт у игрока $\boldsymbol{B}$. При этом в оценке участвует 29 неизвестных карт, т.к. известны 6 своих карт и одна козырная карта. Среди 29 неизвестных карт 7 плохих и 22 хорошие карты (на руках у игрока $\boldsymbol{A}$ 5 плохих карт). Вероятность того или иного набора карт у игрока $\boldsymbol{B}$ будет определятся выражением $p^{(a)} = \frac{C_7^a C_{22}^{6-a}}{C_{29}^6}$. Значения вероятностей приведены в таблице 3 (a — количество плохих карт у игрока $\boldsymbol{B}$).

Таблица 3.

a	C_7^a	C_{22}^{6-a}	$p^{(a)}$
6	7	1	$1\cdot 10^{-5}$
5	21	22	0,0009
4	35	231	0,0170
3	35	1540	0,1135
2	21	7315	0,3234
1	7	26334	0,3881
0	1	74613	0,1571

Имея вышеприведенные значения, игрок $\boldsymbol{A}$ может оценить степень неопределенности видения игроком $\boldsymbol{B}$ его самого (игрока $\boldsymbol{A}$) по формуле

$$H_{ABA}=\sum_{a=0}^{6} p^{(a)}H_{BA}^a,$$

где H_{BA}^a — энтропия игрока $\boldsymbol{B}$ при условии, что у игрока $\boldsymbol{A}$ a плохих карт. Это значение до открытия карты игроком $\boldsymbol{A}$ будет определяться с помощью таблицы 1

$$H_{ABA}^1=0{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}4510+0{,}0009\cdot 0{,}6372+0{,}0170\cdot 0{,}8297+0{,}1135\cdot 1{,}017+\\+0{,}3234\cdot 1{,}190+0{,}3881\cdot 1{,}338+0{,}1571\cdot 1{,}456=1{,}2630$$

Если игрок $\boldsymbol{B}$ не верит, что карта игроком $\boldsymbol{A}$ открыта случайно, то новая степень неопределенности его видения с точки зрения игрока А может быть вычислена с помощью таблицы 2.

$$H_{ABA}^2=0{,}1\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}3062+0{,}0009\cdot 0{,}4477+0{,}0170\cdot 0{,}6034+0{,}1135\cdot 0{,}7662+\\+0{,}3234\cdot 0{,}9292+0{,}3881\cdot 1{,}086+0{,}1571\cdot 1{,}229=1{,}0137$$

Следовательно, информационный проигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ в этом случае по его собственной оценке будет равен

$$I_1=H_{ABA}^1-H_{ABA}^2=0{,}2493.$$

Если игрок $\boldsymbol{B}$ полностью доверяет игроку $\boldsymbol{A}$, то, используя выражения для вероятности гипотезы по формуле Бейеса, получим значения вероятностей и энтропии, которые занесены в таблицу 4 (a — количество плохих карт у игрока $\boldsymbol{B}$).

Таблица 4.

a	p_1	p_2	p_3	H_{BA}
6	0,0001	0,0021	0,9978	0,0236
5	0,0003	0,0035	0,9962	0,0371
4	0,0005	0,0053	0,9942	0,0542
3	0,0010	0,0075	0,9915	0,0752
2	0,0017	0,0103	0,9880	0,1006
1	0,0028	0,0136	0,9836	0,1312
0	0,0044	0,0176	0,9781	0,1679

Игрок $\boldsymbol{A}$ оценит степень неопределенности видения его карт доверчивым игроком $\boldsymbol{B}$ следующей энтропией

$$H_{ABA}^3=1\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}0236+0{,}0009\cdot 0{,}0371+0{,}017\cdot 0{,}0542+0{,}1135\cdot 0{,}0752+\\+0{,}3234\cdot 0{,}1006+0{,}3881\cdot 0{,}1312+0{,}1571\cdot 0{,}1679=0{,}1193$$

В этом случае информационный выигрыш игрока $\boldsymbol{A}$ определится величиной

$$I_2=H_{ABA}^1-H_{ABA}^3=1{,}1437.$$

Можно видеть, что рефлексивное управление привело к уменьшению энтропии противника. Однако следует заметить, что в первом случае информация проиграна, а во втором случае это выигранная информация.

Проведенное исследование задает только границы информационного выигрыша или проигрыша игрока $\boldsymbol{A}$. На практике игрок $\boldsymbol{B}$ в зависимости от того, насколько он знает игрока $\boldsymbol{A}$, насколько артистично была продемонстрирована «случайно» открытая карта, поверит игроку $\boldsymbol{A}$ с некоторой вероятностью. При своей оценке информационного выигрыша игрок $\boldsymbol{A}$ должен оценить эту вероятность доверия.

Пусть игрок $\boldsymbol{B}$ с вероятностью P_0 верит игроку $\boldsymbol{A}$ и соответственно с вероятностью $1-P_0$ — не верит. Математическое ожидание информационного выигрыша запишется в виде

$$M_{\textit{выигр.}} = P_0 I_2 - (1 - P_0) I_1 = H^1_{ABA} - H^2_{ABA} - P_0(H^3_{ABA} - H^2_{ABA}).$$

В заключение заметим, что приведённый подход допускает построение рефлексий более высокого порядка.

В классической теории игр показано [4], что в иерархических играх, начиная со второго шага рефлексии, игроки при анализе не получают новой информации. Однако, на практике человек при принятии решения часто рассматривает рефлексии более высокого порядка. Это говорит об ограниченности моделей рефлексии, применяемых в теории игр.

Работа была выполнена в течении двух лет в Нижегородском Научном обществе учащихся «Эврика». Большая часть вычислений и практических исследований, выполнены Цветковой Мариной, ученицей вначале 10, а затем 11 класса школы № 37. Результаты работы докладывались на Нижегородском семинаре «Нижегородского математического общества», и отмечены дипломом на конференции «Юниор-2005».

Литература

[1] Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973. 315 С.

[2] Вентцель Е. С. Теория Вероятностей. — М.: Высшая Школа, 2002. 575 С.

[3] Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. — М.: Советское радио, 1973. 158 С.

[4] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. — М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. 304 С.

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского.
Email: Lyakhov@mm.unn.ac.ru

О математике размерностей (к вопросу о математике XXI века). Часть I

А. Н. Митрохин

Автор критикует сложившуюся в современном математическом образовании практику оторванности математических понятий от важного для приложений мира именованных чисел, или, более общо, скалярных величин. Первая часть статьи носит общекритический характер. Во второй части предполагается на конкретных примерах показать, как несогласованность математического аппарата с соответствующей размерностной составляющей препятствует пониманию и усвоению материала.

Они из чисел делают физические тела,
у которых есть тяжесть и легкость.

Аристотель [Метафизика]

Математика для инженера есть инструмент такой же,
как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря.

Академик А. Н. Крылов [Собрание сочинений, т.2]

Значительную часть времени человек в своей познавательно-практической деятельности занят поиском ответов в первую очередь на следующие два простых вопроса; **что (кто) это?** и **сколько этого?** Первым вопросом определяется то, что сейчас называется качественной категорией (Аристотелева **сущность**), устанавливающей различия между неподобными друг другу предметами, явлениями, вещами и т.п., с которыми человеку приходится соприкасаться в окружающем его мире. Второй вопрос соотносится с количественной категорией, устанавливающей различия между предметами подобными [1]. Без сомнения, главенствующим, и по порядку следования и по значимости, является первый вопрос, поскольку количественная категория, сопровождаемая вопросом "**сколько**?", приложима только к качественной категории. Если ее нет, то бессмысленно ставить второй вопрос, он повисает в воздухе[1]. С этой нехитрой и в то же время архиважной посылки и следует определять, на мой взгляд, в иерархии наук положение математики — специфичной и необходимой области человеческой деятельности, связанной с количественной категорией, закономерности которой она изучает. Нет смысла подвергать сомнению также тот неоспоримый факт, что математика зародилась на заре человечества из потребностей практики. Постепенно, накапливая опыт в процессе многовекового развития, математика, в силу своей универсальности, по праву стала считаться родоначальницей точных наук — "царицей" наук по определению К. Ф. Гаусса. О математике существует много разных лестных отзывов от представителей самых разных профессий; так в свое время И. Кант утверждал: "В *каждой естественной науке заключено столько истины, сколько в ней есть математики"*. Великих имен, как мы знаем, в математике предостаточно.

[1]Яркий представитель отечественной философской школы А. Ф. Лосев в своем исследовании, посвященном анализу трактата древнегреческого философа Плотина "О числах", приводит следующее рассуждение [2, с. 40]: *"Понятнее всего кажется нефилософски рассуждать так. Существуют вещи, которые я могу сосчитать. Если я их считаю, я употребляю понятие числа и количества. Если я их не считаю, то* **где** *находятся числа? Их нет. Отнимите вещи — исчезнет и число, начните считать, — и число оказывается в наличности. Нет, значит, никакого числа без вещей"*.

Согласно современным представлениям, математика как научная дисциплина является **наукой, изучающей количественные отношения и пространственные формы** [3, т. 15; 4, т.3; 5]. Из этого классического определения следует, что математикой не рассматриваются в совокупности с количественными отношениями взаимодействия размерностей[2], несущих в себе качественную часть математических величин. Подразумевается, что математические символы в виде цифровых, буквенных или других знаковых обозначений содержат только количественную составляющую, а математические действия (счет, сложение, вычитание, умножение, деление, вычисление тригонометрических функций, дифференцирование и др.), совершаемые над этими обозначениями-символами, являются сугубо количественными процедурами, т.е. действиями над числами. При этом принято считать, что количественные отношения над числами путем абстрагирования от качественной категории могут рассматриваться самостоятельно, вне всякой связи с взаимодействием размерностей, но затем могут быть, по мере необходимости, приложены ко всему многообразию качественных понятий [7, с.9; 8, с.7]. История развития математики показывает, что такой взгляд утвердился со времен античной философии под влиянием пифагорейской школы, существовавшей около 2500 лет назад, где считалось, что число — основа всего сущего [9, с.75]. Однако весьма трудно усомниться в том, что весь смысл изучения количественных отношений, на какую бы сложную теоретическую базу они ни опирались, сводится к тому, чтобы эти отношения могли быть использованы для определения количественного содержания или установления взаимодействий и взаимосвязей между конкретными качественными понятиями, Аристотелевыми **сущностями.**

Остановимся подробнее на истории этого вопроса. Здесь нам помогут очень важные наблюдения, содержащиеся в работе А. Н. Чанышева [10], посвященной изучению наследия Аристотеля. Так, на стр. 91 автор [10] пишет; "*Аристотель говорит, что предметы математики нельзя отделять от чувственных вещей, как это утверждают некоторые, и что начало вещей не в них".* Далее А. Н. Чанышев продолжает; "*Впервые отделили числа от вещей Платон и его последователи — "академики" Спевсипп, Ксенократ и другие. Они превратили числа в самостоятельные сущности, первичные по отношению к вещам. Аристотель же вернул числа в вещи, но не по-пифагорейски, не путем наивного отождествления того и другого: в вещах находятся не сами числа, а такие их свойства, которые путем абстрагирующей работы мышления становятся в человеческом сознании числами".*

Как известно, Аристотель является одним из основоположников разработки философских категорий, которых он выделяет десять. И на первое место он ставит ***сущность.*** А. Н. Чанышев, рассуждая о подчиненности категорий, пишет по этому поводу [10, с.64]: "*Все, что подпадает под вторую – десятую категории, не существует отдельно. Категория **сущности** сама носитель всех признаков".* Таким образом, из приведенного исторического экскурса можно предположить, что основания математики в глубокой древности могли основываться или на воззрениях пифагорейцев, где первенствует число, или на взглядах их критика Аристотеля, где первенствует **сущность.** Однако следует принять во внимание, что пифагорейское учение, появившееся на столетие раньше, не могло не завоевать определенных позиций не в пример взглядам Аристотеля, которые были высказаны позже.

В связи с изложенным небезынтересно выяснить, а на каких же позициях стоит современная математика, какие воззрения ей ближе — пифагорейской школы, в основе учения которой лежит число, или Аристотеля, осуждающего пифагореизм и отводящего количественной категории вторичную подчиненную роль. Судя по вышеприведенному определению математики как науки, можно сделать предварительное заключение, что для отечественной математики позиции пифагорейцев ближе. По крайней мере в школьном ее курсе подтверждение тому можно найти уже в начальных классах, когда математика, в образе учителя математики, начинает

[2]Важно отметить, что математические операции (сложение, умножение, деление и др.) в привычном для нас приложении к числам плохо подходят к тому, что происходит в этом случае с размерностями (речь в статье идет о физических размерностях). У них своя алгебра. Например, при делении математических величин никакого деления размерностей не наблюдается, скорее это можно назвать взаимодействием в математическом смысле (подобно тому, как, например, в химических реакциях происходит слияние или разделение атомов и молекул, в результате чего возникают новые свойства веществ) и поэтому автор статьи не смог подобрать лучшего термина для выражения этих отношений, что нашло отражение в названии [6].

приучать к мысли, что математические действия (сложение, вычитание, умножение, деление) являются операциями над числами[3]. В математической науке принято считать (автор статьи исследует проблему в первую очередь на примерах отечественной математики), что математические величины — суть действительные числа[4] [3, т.4; 4, т.1; 17, с. 112] и поэтому математика предпочитает заниматься только числами. Анализ размерностей при этом отделен от математики, и, по мнению математиков, а точнее "чистых" математиков, это дело физики, метрологии или какой-либо другой ветви науки. Правильна ли такая постановка вопроса? Ведь всем нам хорошо известно, что при решении прикладных математических задач (бытовых, инженерных, научных), а именно для этого мы в первую очередь обучаемся математике, необходимо осуществлять в неразрывном единстве два параллельных математических действия — операции над числами и операции с размерностями. При этом, например, при делении математических величин деление чисел осуществляется по своим правилам, а деление (взаимодействие) размерностей по другим математическим правилам, которыми пользуются в анализе размерностей [18, 19, 20, 21, 22]. В случае неоднородности единиц измерения числителя и знаменателя происходит своеобразное сращивание размерностей, объединяемых знаком деления. В результате этого математического сращивания возникают новые размерности, новые понятия, что хорошо видно на примере образования единиц измерения скорости движения. В случае однородности (одинаковости) единиц измерения происходит их сокращение и в результате образуется число, ассоциируемое в прикладных науках с *безразмерной величиной* [19, 20, 21, 22]. Заметим сразу же, что отношение к этому термину в науке неоднозначно [22, с. 13], например, со стороны преподавательского состава высшей школы высказывается явное недовольство существующим положением из-за смысловой нерасшифрованности *безразмерной величины* [23, 24], с чем полностью согласен автор настоящей статьи.

Для пояснения проблемы "безразмерности" рассмотрим две простые арифметические задачи. В первом случае разделим число 100 на число 10, в результате получим: 100 : 10 = 10. Во втором случае, отвечая на вопрос — сколько дециметров содержится в отрезке длиной 100 см? — выполним операцию деления над двумя однородными физическими величинами. В результате, поделив числа и сократив размерности, получим: 100 см : 10 см = 10. Из упражнений следует, что результаты деления по форме в обоих случаях совпадают. Однако из сопоставления решений можно сделать очень интересное наблюдение: оказывается, деление чисел и деление математических величин, состоящих из числа и размерности, — это различные процедуры. Во втором примере в ответе присутствует не только числовое значение, но будет подразумеваться и смысловое содержание, хотя в обоих примерах математика выдает нам, казалось бы, одинаковый результат. Несмотря на схожесть формы, содержание ответов будет разное. Во втором случае полный ответ будет означать, что в 100 сантиметрах содержится 10 дециметров и мы можем записать последнее математическое равенство следующим образом: 100 см : 10 см = 10 = 10 дециметров[5]. Такая форма представления результатов не вызовет возражений, она вытекает из условий задачи, т.к. ответ в виде числа 10 нас не устроит, он неполон и не дает ответа на поставленный вопрос. Следовательно, число 10 в решении второй задачи — это не совсем число, а нечто иное, очень похожее на упомянутую выше *безразмерную величину.*

Рассмотрим далее современное состояние математики в контексте развития всей науки. В

[3]В толковом математическом словаре [11] говорится, что арифметика, являющаяся основанием математики — это часть математики, изучающая числа и простейшие действия над ними (заметим, кстати, что если дословно перевести слово "арифметика" с греческого языка на русский, то оно будет звучать как "числика"). Такое же определение содержится в учебнике первого класса начальной школы, при пользовании которым ученику прививается мысль, что арифметика изучает числа и простейшие действия над ними [12]. Такой числовой подход, по всей видимости, общепринят сейчас в педагогической среде [13, 14].

[4]Имеющееся определение математической величины находится в противоречии с определением понятия величины в Международной системе единиц измерения (СИ). Например, в изданиях, интерпретирующих основные положения СИ [15, с.7; 16, с.9], указывается, что "*... не рекомендуется применять термин* ***величина*** *для выражения только количественной стороны рассматриваемого свойства*". Приняв сторону Аристотеля в отношении вторичности и подчиненности количественной категории, мною в работе [6] предложено следующее определение: **математическая величина — понятие, состоящее из количественной и качественной частей.**

[5]Полученное равенство соответствует логике международного стандарта [25], где, например, записано: 1 метр/1 метр=1= 1 радиан.

этой связи следует отметить, что наше время характеризуется появлением научной литературы, где ряд специалистов различных научных направлений высказывают свое разочарование результатами развития некоторых, главным образом технических, областей науки, в которых, заметим, очень велика роль математики, [26, 27, 28]. И такому минорному настрою есть достаточные основания. Мы, современники, являемся прямыми свидетелями причин возникновения недовольства последствиями научно-технического прогресса, особенно ощутимо себя проявившего в последние 100 лет. Общеизвестно, что практические результаты использования достижений науки наряду с массой полезных нововведений привели к экологическим проблемам, глобальному изменению климата на планете, техногенным катастрофам, и среди них необходимо особо выделить Чернобыльскую трагедию. Парадоксально, но это факт, что человечество, используя достижения науки, в том числе математики, применяя, как правило, самые передовые технологии, накопило горы совершеннейшего (здесь надо поставить большой знак минус перед словом "совершенство", т.к. оно направлено совсем не в ту сторону) по всем параметрам оружия (обычного, ядерного, химического, бактериологического и других видов), способного за считанные минуты уничтожить все живое на планете Земля. К "заслугам" науки (социального ее раздела) следует отнести и нерешенность межнациональных и религиозных отношений. Поэтому в отношении науки сложилась неоднозначная ситуация; создается впечатление, что в погоне за химерами прогресса наука, нацеленная на совершение казалось бы благих дел, неожиданным для себя образом открыла "ящик Пандоры", из которого на человечество посыпался град неприятностей, хотя, согласно древнегреческой мифологии, на дне этого "ящика" все же сохранена Надежда.

Критика, разумеется, не обошла и "царицу" наук — математику [29, 30, 31, 32, 33, 34]. Несмотря на ее универсальность, математика, оказывается, вовсе не обладает свойством "золотого ключика", используя который можно правильно решить возникшую проблему или предотвратить нежелательный ход событий. В отношении возможностей математики творец теории относительности А. Эйнштейн шутил: "*... математика — это единственный совершенный метод водить самого себя за нос*"[6] [30, с. 344]. По свидетельству В. В. Налимова, специалиста в области теории планирования эксперимента, ситуация в науке характерна тем, что "*... наряду с математизацией знаний происходит и математизация глупостей; язык математики, как это ни странно, оказывается пригодным для выполнения любой из поставленных задач*" [31, с. 176]. С ним солидарна И. Грекова, которая предлагает проверять математические расчеты на здравый смысл [32, с.112], предпочтение здравому смыслу отдают и зарубежные авторы [35, с.15]. Нобелевский лауреат по физике Э. П. Вигнер так определяет свое отношение к математике [33, с. 183]: "*...я бы мог определить математику как науку о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями*". Представитель современной отечественной математической школы В. И. Арнольд в своей книге [34], рассуждая о приоритетах математики, полемизирует с рядом специалистов, которые считают, что "*...основным достоинством математики является ее полная бесполезность*".

Возникает естественное желание понять, почему появляются негативные суждения о математике, науке несомненно полезной и нужной во всех отношениях. Может быть это вызвано тем, что математика излишне абстрагирована от практики, опирается в некоторых случаях на неверные положения и, отрывая число от размерности, становится схоластикой, а не наукой? Если это так, если в математику встроены некие ошибочные постулаты (своеобразная ложка дегтя в бочке меда), то мы непременно должны встретится с противоречиями и неувязками. В этом случае становятся отчасти понятными причины критического отношения к математике.

Как уже заметил читатель, автор статьи, обсуждая содержание математики, постоянно вплетает в математический аппарат размерностную составляющую[7]. В самом деле, так ли уж ма-

[6]Как известно, в каждой шутке всегда присутствует доля истины. Конечно, А. Эйнштейн понимал роль математики и неоднократно подчеркивал [30], что "*...доступ к более глубоким принципиальным проблемам в физике требует тончайших математических методов*". Но опять же в шутливой форме А. Эйнштейн отмечал: "*С тех пор, как на теорию относительности навалились математики, я сам перестал ее понимать*".

[7]Автор статьи не одинок в своем стремлении рассматривать в математике единство числа и размерности. В начале XX столетия Н. А. Морозовым [35] сформулирован даже закон изотезичности математических равенств, звучащий следующим образом: *всякое математическое равенство заключает в себе полный и законченный*

тематика свободна от мира размерностей?

Рассмотрим результаты “числового” подхода на примерах, взятых из преподавательской практики в школе и вузе. Например, в статье [36] Н. П. Четверякова рассказывает о своем первом опыте преподавания. Придя в первый класс на смену другой учительнице, которая по каким-то причинам оставила класс, она обнаруживает, что “...малыши этого класса страшно запуганы”. Дети не понимали простейших математических операций, они просто пытались угадывать результат сложения или вычитания. В чем причина? Скорее всего в том, что прежняя учительница строго придерживалась современных методик обучения математике в начальных классах, согласно которым операции сложения и вычитания осуществляются над числами, а не над математическими величинами (именованными числами). Дети же, никогда не видевшие в своей жизни чисел (а чисел, кроме как в виде письменных знаков, никто никогда не видел и не увидит, их не обнаружит ни один измерительный прибор) естественно не могли понять, что же нужно складывать или вычитать, такое задание для них равносильно задаче из русской народной сказки — *пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что*[8]. И только когда новая учительница внесла предметность (Аристотелеву сущность) в обучение, принеся в класс оловянных солдатиков и введя дополнительно элемент игры в обучение, то все стало на свои места. Через некоторое время те же первоклассники, получавшие двойки у прежней учительницы, стали все прекрасно понимать. Приехавшая впоследствии в школу с проверкой авторитетная комиссия посчитала, что в классе Н. П. Четверяковой собраны лучшие ученики. Второй пример — в книге [37] преподаватель математики МГУ им. М. В. Ломоносова делится своими впечатлениями: “*...Читая много лет лекции студентам механико-математического факультета МГУ, я все время удивлялся их испуганному взгляду на математику как на собрание патологических случаев, исключений из правил”.* Кто же или что “пугает” школьников и студентов? Скорее всего у истоков этой “испуганности” лежит оторванность математики от мира размерностей. Этим пугалом является пифагореизм, который справедливо осуждался уже Аристотелем. Он осуждается и сейчас [38], но, тем не менее, почему-то преспокойно поживает в современной упаковке в школьных учебниках и методиках преподавания математики, что особенно бросается в глаза в начальной школе. В детских головках изначально никакого пифагореизма, конечно, не существует. Однако отдельные взрослые дяди и тети пытаются навсегда поселить его в их умах, хотя повседневная практика постоянно вносит полезные коррективы и отвергает ошибочные догмы.

Приведенные примеры из преподавательской практики в какой-то мере являются следствием реформы математического образования конца 1960-х – начала 70-х годов и они определенно подтверждают ее ошибочность, о чем сейчас говорит учительский корпус [39, 40, 41]. Идеологи реформы упразднили курс арифметики, в которой, кстати, изучались не просто числа, а именованные числа, т.е. математические величины, содержащие в единстве количественную составляющую (число) и качественную составляющую (размерность). На первое место реформаторами выдвигалось, как пишет А. В. Шевкин [39], изучение понятий “множество”[9] и “соотношение”. Одним из идеологов преобразований считается академик А. Н. Колмогоров. Однако изучение его работ, касающихся школьной реформы, заставляет по иному взглянуть на роль академика. Примечательны в этом отношении следующие строки [42, с. 11]: “...В *виде примера рассмотрим взаимоотношение между понятием числа и скалярной величины. Второе из этих понятий обычно вообще не появляется в ясном виде в курсе математики, но играет основную роль в представлении физиков. Математики могут построить полную систему действительных чисел путем последовательного расширения первоначального запаса натуральных чисел и*

логический смысл только в том случае, когда обе его части изотезичны, т.е. представляют те же самые тезисы, состоящие из одноименных величин.

[8]Чтобы научить ребенка плавать его, как утверждают, надо бросить в воду. В данном случае некоторые педагоги пытаются использовать ледяную воду.

[9]“Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?
— Множество чего? — спросила Алиса.
— Ничего, — ответила Соня, — Просто множество.
— Не знаю, — начала Алиса ...”.
(Льюис Кэрролл. Приключения Алисы в стране чудес).

объяснить естественность такого расширения, исходя из "внутренних потребностей математической теории". Но в реальной жизни действительные числа служат для выражения скалярных величин (площадей, объемов, масс, скоростей и т.п.). Старая система изучения скалярных величин под названием "именованных чисел" изживает себя и справедливо не нравится современно настроенным математикам. Но новой системы еще не создано. Вместо этого усилия математиков часто оказываются направленными на то, чтобы по возможности поскорее избавиться от докучливых вопросов, объявив, например, в геометрии сразу (уже при формулировке аксиом) расстояние или меру угла числом.

В соответствии с этим из курсов геометрии исчезает тема "Однородность геометрических формул", которая, наоборот, должна была бы быть усилена и служить введением в столь важную в применениях теорию размерности величин".

Статья [42], выдержка из которой приведена выше, опубликована в 1971 году, и из ее содержания становится непонятным, почему А. Н. Колмогоров зачислен в ряд главных реформаторов школьного курса математики. Здесь перед нами предстает совсем другой А. Н. Колмогоров — консерватор и антиреформатор, который убежден в необходимости сохранения единства математики и размерностного анализа, последние три строки из [42, с. 11] — красноречивое тому свидетельство. Вместо этого наиважнейший раздел, соединяющий математику с физикой и реальным миром, вообще исчезает из школьных учебников. Выходит, реформирование в важнейшем вопросе шло вопреки воле А. Н. Колмогорова, и реформаторы, т.е. те, кто хотел "*...избавиться от докучливых вопросов, объявив в геометрии расстояние или меру угла числом"*, вместе с водой выплеснули и ребенка.

В запуске процесса реформирования определяющую роль сыграли, конечно, теоретики (аксиомофилы по В. И. Арнольду [34]), в данном случае взявшие верх над прикладниками (естествоиспытателями). А приверженцы теоретического направления, надо заметить, почему-то с чувством превосходства относятся к прикладникам. В подтверждение приведем следующую выдержку из неординарной книги [43], в которой на богатом фактическом материале анализируются теретические и прикладные аспекты математики [43, с. 33]: "*Прежде всего с огорчением отметим, что, по мнению некоторых математиков, заниматься приложениями вообще зазорно";* далее содержится упоминание о математиках, которые даже расстраиваются, если узнают, что их результаты могут быть использованы прикладниками. Поэтому не стоит удивляться ответной реакции, когда другая сторона заявляет о полной бесполезности математики [34]. Из вышеизложенного недвусмысленно следует, что в "большой" науке существует определенный антагонизм между математикой теоретической и прикладной. На мой взгляд, это ключевой вопрос. Замыкаясь в чисто количественных проблемах, не желая замечать мира размерностей, теоретическая математика грешит снобизмом, тем самым приобретая сложный синдром пифагореизма и Пигмалиона одновременно.

Негативные последствия имеющейся размежеванности, конечно, дают себя знать в школьной математике. Здесь позицию изолированности от предметного мира отражают те математики, которые хотели бы "*...избавиться от докучливых вопросов, объявив в геометрии расстояние или меру угла числом"*. Именно такая математика частично внедрена в результате реформы. Результаты ее, как показало время, оказались неутешительными. За примерами далеко ходить не надо — параллельно с феноменом "испуганности" возникли трудности при изучении темы "масштаб" [44], школьникам сложнее дается изучение геометрии [45]. Из-за излишней абстрактности математики имеются затруднения при изучении в высшей школе физических понятий, определяемых отношением физических величин [46, с. 73]: "В *математике, которая абстрагируется от реального содержания величин, отношение есть число. ...Смысл физической величины, определяемой через отношение двух других, от учащихся скрыт. Даже те, кто знает, что отношение означает операцию деления, не видят в ней физического содержания"*. Невооруженным глазом видно, что трудности возникают там, где математике приходится соприкасаться, а это неизбежно, с конкретным материалом, в котором так или иначе проявляет себя размерностная составляющая.

Какую же математику нужно изучать в современной школе? Мой собственный практический опыт подсказывает, что приоритетным должно быть прикладное образование, предполагающее обучение прежде всего практической математике. В подтверждение сошлюсь вновь на авторов своевременной и полезной книги [43, с. 310]: "*...вряд ли можно указать школьную дисциплину помимо математики, которая бы примерно для половины обучающихся приносила столь мало пользы — и это при такой затрате времени! У десятков миллионов людей через несколько лет после окончания школы остаются в памяти только арифметические действия, простейшие геометрические представления да смутные воспоминания о рассуждениях, которые полностью отличаются от применяемых в жизни и ни к чему остальному решительно не пригодны*". В результате авторы [43] делают вывод: "*Главная цель изучения математики широкими слоями учащихся состоит в том, чтобы математику можно было применять*". А вот мнение на этот счет французского математика Ж. А. Дьедонне [47, с. 20]: "*... для 90% нынешних школьников значение математики, выходящей за границы арифметики, в их будущей деятельности практически равно нулю*". Хотя статья [47] опубликована более 30 лет назад, вряд ли приведенное процентное соотношение, в том числе в нашей стране, сейчас будет другим.

Конечно, математика должна быть очищена от недостатков, имеющихся в ее понятийном аппарате. Ведь сейчас в точных науках, включая математику, имеется большой "букет" противоречий и неувязок [6]. Поразительно, например, но в математике, насчитывающей более двух тысячелетий своего существования как науки, до настоящего времени не выработано четкого определения понятия угла, о чем, кстати, упоминает А. Н. Колмогоров [48, с. 9]; определение понятия величины расходится с определением, имеющемся в международных и отечественных метрологических стандартах; отсутствует однозначное определение функции и т.д. В целом же обнаруживается какая-то удивительная неподготовленность понятийного аппарата к адекватному восприятию и усвоению математических знаний и стыковке их с прикладными науками, где обязательно присутствуют операции с размерностями. По моему мнению, решению этих вопросов и нужно уделить первоочередное внимание, начиная со школьной математики.

Объективный анализ показывает, что математика, конечно, является наукой не только о числах и количественных отношениях, она шире и глубже, область ее деятельности — сфера количественно-качественных отношений, иначе чем объяснить ее успехи в решении прикладных задач, где обязательно присутствуют размерности[10]. Поэтому, признавая вторичность и подчиненность количественной категории, необходимо "*вернуть числа в вещи*", как это сделал Аристотель. Язык математики — это язык математических величин (именованных чисел), содержащих в единстве число и размерность. Самостоятельность числа, которую пытаются отстаивать служители теоретической математики, в чем-то напоминает фантасмагорический нос из одноименного рассказа Н. В. Гоголя, который, отделившись от лица майора Платона Кузьмича Ковалева, начал независимое существование[11]. С самостоятельностью числа как письменного знака можно согласиться разве что в таком разделе науки, как семантика, но не в математике.

В заключение следует сказать, что, по мнению автора статьи, размерностный анализ должен стать неотъемлемой частью математического образования — это основная мысль, развиваемая в [6], которая хорошо согласуется с мнением академика А. Н. Колмогорова [42, с. 11]. Собственно, это то самое, чем сейчас реально руководствуются в своей деятельности такие педагоги, как Н. П. Четверякова [36], вносящая предметность при изучении математики, И. П. Костенко и Н. И. Захарова [40], остро критикующие современные методы преподавания математики, С. Е. Царева [50], придумывающая удобные единицы измерения при решении задач, А. В. Шевкин [39], создавший книгу для учителя, которая возвращает к лучшим традициям старой русской школы обучения математике, и многие другие. Математика, изучающая размерности, несмотря на дополнительную нагрузку, вряд ли станет сложнее, но то, что она станет понятнее, не подлежит сомнению. Большим подспорьем в наглядном представлении математических образов может стать компьютерная техника, развивающаяся в последние годы бурными темпами, возможности которой в этом направлении чрезвычайно велики.

[10] Шарль Эрмит считал, что "*...числа и функции анализа не являются произвольным продуктом человеческого разума. Я вижу в изучении функций — изучение объективной реальности, а в законах, относящихся к функциям, — отражение физических законов*" [49, с. 35].

[11] "Нос посмотрел на майора, и брови его несколько нахмурились. — Вы ошибаетесь милостивый государь. Я сам по себе. Притом меж нами не может быть никаких отношений. Судя по пуговицам вашего вицмундира, вы должны служить по другому ведомству". (Н. В. Гоголь. Повести).

И последнее, в качестве замечания — несмотря на неоспоримые достоинства и универсальность математики, ей все же больше подходит должность не “царицы” наук, а расторопной служанки.

Литература

[1] Философский энциклопедический словарь. — М.: ИНФРА, 2000 — 576 с.

[2] Лосев А.Ф. Диалектика числа у Плотина (Перевод и комментарий трактата Плотина “О числах”). — М.: автор, тип. Иванова в Сергиеве. 1928. — 195 с.

[3] Большая Советская Энциклопедия (В 30 томах). Гл. ред. А. М. Прохоров. Изд. 3-е. М.: “Советская Энциклопедия”. 1970 – 1981.

[4] Математическая энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов. В 5-и томах. М.: “Советская энциклопедия”. 1977 – 1984.

[5] Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. Ред. кол. Д. М. Алексеев, А. М. Бонч-Бруевич, А. С. Боровик-Романов и др. М.: Сов. энциклопедия, 1983. — 928 с.

[6] Митрохин А.Н. О взаимодействии размерностей в математических преобразованиях. — М.Транспорт, 1996. — 102 с.

[7] Рузавин Г.И. О природе математического знания (Очерки по методологии математики). М.: Мысль, 1968. — 302 с.

[8] Философский словарь / Под ред. И. Т. Фролова. — 6-е изд., перераб. и доп.— М.: Политиздат, 1991. — 560 с.

[9] Аристотель. Сочинения в четырех томах. Т.1. Метафизика. /Ред. В. Ф. Асмус. М.: Мысль. — 1976. — 550 с.

[10] Чанышев А.Н. Аристотель. — 2-ое доп. изд. — М.: Мысль, 1987. — 221 с. — (Сер. “Мыслители прошлого”).

[11] Микиша А.М. и Орлов В.Б. Толковый математический словарь. Основные термины: около 2500 терминов. — М.: Рус. яз.,1989. — 244 с.

[12] Моро М.И. и др. Математика: Учеб. для 1 кл. трехлет. нач. шк. /М. И. Моро, М. А. Бантова, Г. В. Бельтюкова. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 1992. — 175 с.

[13] Петерсон И.Г. Математика. 1 класс. Методические рекомендации. Пособие для учителей. — М.: “Баласс”, “С-ИНФО”, 1996. — 224 с.

[14] Истомина Н.Б. Математика. 1 класс: Учебник для четырехлетней начальной школы. — Смоленск: “Ассоциация XXI век”.2000. — 176 с.

[15] Основные термины в области метрологии: Словарь-справочник /М. Ф. Юдин, М. Н. Селиванов, О. Ф. Тищенко, А. И. Скороходов; Под ред. Ю. В. Тарбеева. — М.: Издательство стандартов, 1989. — 113 с.

[16] Чертов А.Г. Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы): Справ, пособие. — М.: Высш. шк., 1990. — 335 с.

[17] Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю. В. Прохоров; Ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич. — М.: Советская Энциклопедия, 1988. — 847 с.

[18] Бриджмен П.В. Анализ размерностей. / Пер. со второго англ. изд. под ред. акад. С. И. Вавилова. Л.-М.: ОНТИ. Гос. технико-теорет. изд. 1934. — 120 с.

[19] Веников В.А. Применение теории подобия и физического моделирования в электротехнике. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1949. — 168 с.

[20] Кирпичев М.В. Теория подобия. М.: Изд-во АН СССР, 1953. — 96 с.

[21] Гухман А.А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. М.: Высшая школа, 1967. — 304 с.

[22] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — 8-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 440 с.

[23] Коган И.Ш. К вопросу о размерности и единицах измерений безразмерных физических величин//Законодательная и прикладная метрология. — 1998. — №4. — С.55-57.

[24] Дайнеко В.И. Памятка для решения расчетных задач по химии (школьникам, учителям, абитуриентам) /В. И. Дайнеко, С. Т. Жуков, Л. В. Денисова, Н. М. Дергунова, А. И. Лебедев, Т. Г. Холина, Г. М. Черногорова, О. Г. Шифрина.— М.:Интеллект, 1997. — 49 с.

[25] Quantities and Units - Part 0: General principles. International Standard ISO 31-0: 1992 (E). Third edition 1992-08-01. Switzerland. — 1992. — 21 p.

[26] Моисеев Н.Н. Универсум. Информация. Общество. — М.: Устойчивый мир, 2001. — 200 с.

[27] Галицкий И.М. Будущее физики, математики, науки. — Вып.4.— г.Гомель: изд-во клуба ФЕНИД. — 1992. — 134 с.

[28] Кравец А.С. Идеалы и идолы науки. — г.Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1992. — 220 с.

[29] Клайн М. Математика. Утрата определенности: Пер. с англ. /Под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1984. — 434 с.

[30] Эйнштейн А. Физика и реальность /Сб. статей; сост. У. И. Франкфурт. М.: Наука, АН СССР, 1965. — 360 с.

[31] Налимов В.В. Вероятностная модель языка: О соотношении естественных и искусственных языков. 2-е изд. — М.: Наука, 1979. — 304 с.

[32] Грекова И. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития //Вопросы философии. — 1976. — №6. — С.104-114.

[33] Вигнер Э.П. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии: Пер. с англ. Под ред. Я. А. Смородинского. Изд. 2-ое, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 320 с. (Классики науки).

[34] Арнольд В.И. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2002. — 104 с.

[35] Морозов Н.А. Основы качественного физико-математического анализа и новые физические факторы, обнаруживаемые им в различных явлениях природы. — М.: типография товарищества И. Д. Сытина. 1908. — 404 с.

[36] Валькова Е. Оловянные солдатики “изучают” математику (интервью с учительницей начальной школы Н. П. Четверяковой) //Учительская газета, №15 от 19.04.94 г. — С.7.

[37] Дьяченко В.Ф. Десять лекций по физической математике. — М.: “Факториал” 1997 — 64 с.

[38] Аронов Р.А. Пифагорейский синдром в науке и философии //Вопросы философии. — 1996. — №4. — С.134-146.

[39] Шевкин А.В. Наступим ли еще раз на грабли, реформируя школу? //Математика в школе. — 2000. — №9. — С.2-5.

[40] Костенко И.П., Захарова Н.И. Причины деградации математических умений и пути ее преодоления //Математика в школе. — 2001. — №9. — С.33-35.

[41] Канин Е.С., Малых Е.В. Еще раз о причинах деградации математических умений //Математика в школе. — 2002. — №4. — С.50-51.

[42] Колмогоров А.Н. Современная математика и математика в современной школе //Математика в школе. — 2003. — №3. — С.10-11.

[43] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. — 360 стр.

[44] Чехова В.Н. Тема "масштаб" в VI классе //Математика в школе. — 1999. — №2. — С.7-8.

[45] Белошистая А.В. Почему школьникам так трудно дается геометрия? //Математика в школе. — 1999. — №6. — С.14-19.

[46] Свитков Л.П. К изучению физических понятий, определяемых формулой $c = a/b$ //Физика в школе. — 2002. — №7. — С.71-74.

[47] Дьедонне Ж.А. Надо ли учить "современной" математике? //Математика в школе. — 2003. — №3. — С.17-22.

[48] Колмогоров А.Н. Новое в школьной математике //Математика в школе. — 2003. — №3. — С.7-10.

[49] Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. 1822 – 1901. — Л.: Наука, 1982. — 288 с.

[50] Царева С.Е. Введение удобных единиц измерения как метод решения текстовых задач //Математика в школе. — 1997. — №6. — С.58-61.

Митрохин Аркадий Николаевич,
ведущий научный сотрудник
Всероссийского НИИ железнодорожного транспорта,
кандидат технических наук.
129851 Москва, ул. 3-я Мытищинская, 10 (отделение П).

О научных исследованиях учащихся школы имени А. Н. Колмогорова

В. В. Вавилов

В статье рассказано о задачах исследовательского характера, предлагаемых для самостоятельной работы учащимся школы имени А. Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ).

Вся система преподавания математических дисциплин в нашей школе (о школе, истории ее создания и становления см. [1,2]) нацелена на развитие способностей и умений учащихся решать задачи, ставить новые задачи и на формирование у них исследовательских навыков. Исследовательские темы и новые постановки задач у учащихся, в основном, появляются во время участия их в работе одного из специальных (факультативных) курсов, семинаров, кружков. Иногда они возникают из естественного желания более глубоко разобраться в темах, изучаемых непосредственно на классных уроках. В первую очередь здесь нужны постановки новых, разумных и посильных задач для исследований, а это работа "штучная" и индивидуальная. Такие исследовательские темы может поставить и сформулировать только тот, кто сам активно работает в той или иной научной области или, по крайней мере, следит за научной периодикой (см.[3,4]). В нашей школе многие из преподавателей математики "сидят на двух стульях", работая, по основному месту работы, на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, имеют свои собственные научные интересы и руководят работой студентов и аспирантов.

В качестве примеров приведу несколько тем исследований и докладов на конференциях бывших и сегодняшних учащихся школы, выполненных под моим научным руководством в последние годы (подробнее см. в [5,6,7]).

1. ***Т. Лепский*** изучал ряд неожиданных свойств известных трансцендентных чисел. Он уточнил расположение числа e на интервале $((1+1/n)^n;\ (1+1/n)^{n+1})$ и показал, на основе некоторых элементарных и новых наблюдений, в частности, что при любом n число e расположено во второй четверти интервала

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Попытки уточнить расположение числа e во второй четверти указанного интервала при всех n к успеху не привели, но дали хорошие асимптотические (и быстро сходящиеся) формулы для вычисления числа e.

Эта задача появилась вместе с целым рядом других. Так например, изучался вопрос о расположении числа π в интервале (p_n, q_n), где p_n и q_n — периметры правильных вписанных и описанных многоугольников в окружность радиуса $1/2$. По теореме Гюйгенса, число π при любом $n \geq 3$ находится в первой трети этого интервала; автором были установлены и более точные характеристики расположения числа π внутри указанного интервала, но уже при достаточно больших n.

Было показано также, что

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n+\frac{1}{2}) - \gamma < \frac{1}{24n^2},$$

где γ — постоянная Эйлера, и сделана попытка уточнить расположение числа γ на возникающем интервале. Существенных интересных результатов здесь пока не обнаружено.

2. ***Д. Туляков*** исследовал конфигурации из 60 паскалевых прямых шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, получив целый ряд совершенно неожиданных и новых результатов. Были изучены и описаны типы таких конфигураций, их свойства проективного характера. Для их изучения автором были привлечены также конфигурации, двойственные к рассматриваемым. Все начиналось в этом исследовании с занятий на уроках геометрии, где доказывалась теорема о "мистическом шестиугольнике", а в домашней стадии изучения темы некоторыми школьниками были изготовлены на ватманских листах три соответствующих чертежа (для эллипса, параболы и гиперболы). Затем были написаны программы и такие "картинки" уже рисовал компьютер. "Проанализировав и покрутив" на компьютере, выдвинули целый ряд правдоподобных гипотез, некоторые из которых удалось доказать. Позднее выяснилось, что подобными вопросами занимались Штейнер и Киркман, которые установили, в частности, что:

а) Теорема Штейнера. *Пусть точки A, B, C, D, E, F расположены на окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABCDEFA$, $ADEBCFA$, $ADCFEBA$ пересекаются в одной точке.*

б) Теорема Киркмана. *Пусть точки A, B, C, D, E, F расположены на окружности. Тогда прямые Паскаля шестиугольников $ABFDCEA$, $AEFBDCA$, $ABDFECA$ пересекаются в одной точке.*

Этими же авторами было установлено, что эти прямые пересекаются по три в 20 точках типа точек Штейнера и 40 точках типа точек Киркмана.

Автором были разработаны собственные алгоритм и программы по поиску троек Штейнера и Киркмана (что само по себе не является простым упражнением). Довольно сильное впечатление произвел полученный здесь пример тройки шестиугольников и их прямых Паскаля, которые пересекаются в одной точке, а сама эта точка не принадлежала к множеству точек типов Штейнера и Киркмана: такими являются, например, шестиугольники $ABEDFCA$, $ACBEFD$, $ABCDFED$.

3. ***Ю. Гиматов*** успешно справился с одной трудной логической задачей П. Эрдеша. С этой задачей автора (и всех других членов кафедры математики школы) познакомил Ю. В. Нестеренко, вернувшись с математического конгресса во Франции. Долгое время эта задача "блуждала" между школьниками и преподавателями, пока не была не только решена, но и обобщена; был рассмотрен и целый ряд модификаций этой задачи. Здесь предварительно также проводились многочисленные компьютерные эксперименты.

Исходная задача была такова: Математик R сказал математикам P и S: "Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше 100. Математику P я сейчас сообщу — по секрету от S — произведение этих чисел, а математику S я сообщу — по секрету от P — их сумму". Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S — буквой σ):

— Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. ($\pi 1$)
— Я заранее знал, что Вы этого не сможете. ($\sigma 1$)
— А ведь тогда я их знаю. ($\pi 2$)
— А тогда и я их знаю. ($\sigma 2$)

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

4. ***Ю. Хашин*** исследовал итерационный метод секущих и касательных Ньютона для алгебраических уравнений и получил любопытные дополнения к известной теореме Шарковского. В частности, для уравнений третьей степени, им было установлено, что если в методе Ньютона итерационная последовательность X_n, при некотором выборе начального приближения $X_0 = a$, конечна и имеет длину p, то для любого $k > p$ существуют такие значения начальных приближений $X_0 = a$, для которых эта последовательность будет иметь длину k.

Изучались также структура и характеристика аттракторов (и возникающие здесь фрактальные множества) для всех корней произвольного алгебраического уравнения и не ограничиваясь при этом только действительными значениями параметра $X_0 = a$.

5. ***А. Хоренко*** в работе "Касательные у параболе" получил конструктивно-новое элементарное доказательство классической теоремы о том, что существует единственная парабола,

которая касается сторон четырехугольника или их продолжений.

В другой своей работе он досконально исследовал свойства площадей клеток “косоугольной шахматной доски”, установив взаимосвязи с дискретными гармоническими функциями на плоскости (см. определение ниже в работе Д. Веселина). В частности, им было показано, что “клеточки” с наибольшей и наименьшей площадями находятся в противоположных углах такой “шахматной доски”. Кроме этого, им были получены интересные пространственные аналоги полученных результатов для призм и пирамид.

В исследовании “Об одном уравнении Эйлера” изучались уравнения вида

$$x^y = y^x, \quad x^{y^x} = y^{x^y}$$

и их естественные обобщения над множеством натуральных чисел. Первое из этих уравнений встречается в записных книжках Л. Эйлера. Показано, в частности, что при $x \neq y$ уравнения такого вида (в том числе, когда справа стоит “башня” из m этажей, а слева — из n этажей) решений в натуральных числах не имеют; исключение составляет уравнение Эйлера, для которого пары (2;4) и (4;2) являются его полным множеством решений среди натуральных чисел. Эта тематика получила свое продолжение в работе *“Об итерации экспонент”,* в которой было показано, что если

$$\frac{1}{e^e} \leq a_n \leq e^{\frac{1}{e}}, \quad n \in N,$$

то последовательность

$$b_n = a_0^{a_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}$$

сходится. В основе доказательства теоремы лежит установленное им (и довольно трудно доказываемое) свойство равномерной сходимости на отрезке $[0;\ e]$ итераций экспоненциальных функций $y = a_n^x$.

6. ***Д. Веселин*** исследовал свойства дискретных гармонических функций и не только получил ряд аналогов из классической теории потенциала, но и обнаружил эффекты, которых там нет.

В каждый узел бесконечного листа клетчатой бумаги поместим действительное число так, чтобы любое число было бы равно среднему арифметическому чисел, стоящих в четырех соседних узлах бумаги. Другими словами, рассмотрим функцию двух переменных $H = H(x,y)$, которая определена на множестве всех целочисленных точек (x, y) и такую, что

$$4H(x, y) = H(x-1, y) + H(x+1, y) + H(x, y-1) + H(x, y+1)$$

для любых целых значений x и y. Такие функции называются *дискретными гармоническими функциями на целочисленной решетке* Z^2. Ряд задач о таких функциях встречался на математических и физических олимпиадах школьников.

Дискретные функции, которые обладают указанным выше свойством среднего значения в каждом внутреннем узле некоторого множества M (с некоторыми заданными значениями в граничных узлах этого множества), называются гармоническими *внутри* множества M (само множество M при этом состоит только из целочисленных точек, а его внутренние и граничные точки определяются естественным образом).

В работе для таких функций *установлены теорема Лиувилля и принцип максимума для неограниченных областей* (который отсутствует в “непрерывной теории”). Для доказательства этого принципа пришлось установить сначала аналог принципа Дирихле для дискретных гармонических функций.

7. ***Е. Мычка и И. Седошкин*** в работе *“Правильные многоугольники на мозаиках”* продолжили тему, которая была впервые рассмотрена на одном из геометрических кружков, которым

руководил А. Н. Колмогоров в 1972 году. Там изучался, в частности, вопрос о числе паркетов из правильных многоугольников.

Паркетом называется полное покрытие (без наложений) плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника из покрытия либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо совсем не имеют общих точек. При этом паркет называется *мозаикой*, если любые два его узла устроены одинаково, то есть все фигуры, образованные сторонами многоугольников, содержащих узел паркета, являются равными для всех узлов паркета. При заданной длине сторон всех правильных многоугольников существует ровно 11 различных мозаик.

Известно, что не существует ни одного правильного n-угольника, $n \neq 4$, все вершины которого имеют рациональные координаты. Отсюда, в частности, следует, что не существует решетки на плоскости, на которой можно разместить (т.е. с вершинами в узлах решетки) правильный пятиугольник и любой правильный n-угольник при $n > 6$. Однако, решетка, фундаментальным параллелограммом которой является ромб с острым углом в 60^0 (и составлена, тем самым, из правильных треугольников), содержит, конечно, правильные треугольник и шестиугольник, но не содержит квадрата.

Вопрос, который изучался авторами, состоял в том, чтобы выяснить, какие из правильных многоугольников можно расположить на мозаике так, чтобы все вершины многоугольника находились в узлах некоторой мозаики. Ответом на вопрос, выражаясь свободным языком, является следующая теорема: *На каждой из мозаик можно расположить только те правильные многоугольники, которые видны "невооруженным взглядом".*

8. ***Н. Однобоков*** в работе *"Пифагоровы штаны"* исследовал одно, сегодня довольно забытое, доказательство теоремы Пифагора о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника. В этом доказательстве Евклид в своей знаменитой книге "Начала" использовал конструкцию, которая известна как "Пифагоровы штаны" (квадраты, построенные на сторонах треугольника). Автором *для произвольного треугольника* изучается эта конструкция с целью установления широкого спектра ее геометрических свойств и получения для нее самых различных формул и соотношений. В частности, интересной является полученная геометрическая интерпретация величины, *равной разности квадратов катетов прямоугольного треугольника.*

Другая работа Н. Однобокова *"Окружности и паркеты"* была посвящена изучению вопроса о возможности так расположить окружность на одном из одиннадцати правильных паркетов (мозаик), чтобы она содержала заданное число узлов паркета. Им было установлено, что *для каждого из таких паркетов, кроме паркета $4^2 3^3$ (к каждому узлу которого примыкают два квадрата и три треугольника) и заданного натурального числа n существуют открытые круги и окружности, содержашие ровно n узлов паркета.* Это исследование потребовало глубокого изучения теории решений уравнений в целых числах второй степени и умения описывать множества всех целочисленных решений таких уравнений.

9. ***А. Колчин*** в довольно общей ситуации, близкой к реальной, в работе *"Нетипичные тройки игроков в турнирах"* проанализировал возможное число таких троек игроков в теннисных турнирах в достаточно широких предположениях об его итогах. При этом тройка игроков i, j, l называется нетипичной, если игрок i выиграл у игрока j, игрок j выиграл у игрока l, а игрок l выиграл у игрока i. Относительно итоговой турнирной таблицы предполагается, что, если игрок i выиграл у игрока j, то

$$g(j) \geq g(i) - 1,$$

где $g(\alpha)$ — количество партий, которые выиграл игрок α в этом турнире. Доказано, что число нетипичных троек в таком турнире из k участников равно

$$k(k-2)(k+2)/24 \ \text{(для четных } k)$$

и

$$(k(k-1)(k+1)/24) \ — \ s/2 \ \text{(для нечетных k)},$$

где s — некоторое натуральное число.

В основе проведенных исследований лежит описание итогов турнира в виде полного ориентированного графа, вершины которого соответствуют игрокам, а направленные ребра — результатам игр. Число s в приведенной выше формуле равно количеству вершин графа, для которых разность между числом выходящих и входящих ребер равна 2.

10. ***А. Бекларян*** в работе "*Красивая жизнь замечательных точек треугольника*" изучил возможные траектории движения замечательных точек треугольника, вершины которого перемещаются по двум пересекающимся окружностям (конструкция однозначно определяется окружностями и выбором одной вершины). Показано, что при перемещении одной вершины такого треугольника по окружности точки пересечения его медиан, высот, серединных перпендикуляров, биссектрис описывают также окружности, а прямая Эйлера имеет центр вращения. Описываемые траектории упомянутых и ряда других точек наглядно демонстрируются в рамках математической компьютерной среды Geometer's Sketchpad (Живая Геометрия). В этой же среде красиво демонстрируются и траектории движения замечательных точек переменного треугольника, одна из вершин которого осуществляет движение по эллипсу, параболе или гиперболе. Эти графические иллюстрации и доказанные теоремы позволяют высказать целый ряд новых задач для проведения дальнейших исследований.

В другой своей прекрасной работе *"Сравнение площадей четырехугольников"* А. Бекларян решил одну довольно старую геометрическую задачу о площади "медианного четырехугольника" произвольного выпуклого четырехугольника и затем значительно обобщил полученный результат. Отправной точкой исследований послужила одна древнегреческая задача (так называемый "латинский крест") о том, что отношение площади *медианного* квадрата к площади исходного квадрата равна $1/5$. Напомним, что для выпуклого четырехугольника его α-*медианный* четырехугольник получается после соединения всех вершин исходного четырехугольника с некоторыми точками его сторон следующим образом. Пусть A', B', C', D' обозначают такие точки на сторонах CD, DA, AB, BD (соответственно) выпуклого четырехугольника $ABCD$, что $CA' : CD = DB' : DA = AC' : AB = BD' : DC = \alpha$. Прямые AA', DD', CC', DD' разбивают исходный четырехугольник на пять четырехугольников и четыре треугольника. Тот из полученных четырехугольников, который расположен строго внутри $ABCD$ и называется его α-*медианным* четырехугольником (при $\alpha = 1/2$ — просто медианным). Основным содержанием работы является следующая

Теорема. *Пусть S и $S(\alpha)$ обозначают площадь выпуклого четырехугольника и площадь его α-медианного четырехугольника. Тогда*

$$\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha^2-\alpha+1} < \frac{S(\alpha)}{S} \leq \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2}$$

и оба неравенства являются точными.

Следствие. *Отношение площадей медианного и исходного четырехугольников содержится в полуинтервале* $(1/6; 1/5]$.

11. ***А. Драль*** изучал вопросы, связанные с оценками высоты цепной дроби рационального числа. Рассмотрим множество чисел вида

$$R_m = \left\{ \frac{p_k}{q_k} : 1 \leq p_k < q_k \leq m, (p_k, q_k) = 1, k = 1, 2, ..., n \right\},$$

где $n = (m^2 - m)/2$, и рациональные числа p_k/q_k перенумерованы каким-либо способом. Пусть α_k обозначает высоту (число этажей) цепной дроби для числа $p_k/q_k \in R_m$ и

$$T(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Теорема. *Имеет место следующее неравенство $T(m) < S_m - 3/2$, где $S_m = max\{s : F_s \leq m\}$ и $\{F_s\}$ — последовательность чисел Фибоначчи.*

Продолжением этих исследований послужили числовые эксперименты. Каждое действительное число α единственным образом разлагается в цепную дробь $\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots]$; каждый элемент a_n поэтому однозначно определяется заданием числа α, то есть является однозначной функцией от α: $a_n = a_n(\alpha)$. В рамках метрической теории цепных дробей одним из первых шагов является изучение природы этих функций $a_n(\alpha)$. Для рациональных чисел α цепная дробь конечна $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ и число ее неполных частных k также однозначно определяется по α, т.е. $k = k(\alpha)$. В работе предпринята попытка статистического изучения поведения функции $k(\alpha)$, и для множества рациональных чисел p/q, $(p,q) = 1$, $1 \le p < q \le n$, составлены таблицы средних значений этой функции при $n = 2, 3, 4, \ldots, 1000$. Для проведения вычислений и обработки их результатов были составлены соответствующие компьютерные программы. Полученные числовые данные позволяют сформулировать ряд интересных правдоподобных новых гипотез.

12. ***Е. Осаковская и Е. Филоненко*** в работе "*Правильные многоугольники на решетках*" построили и обосновали алгоритмы нахождения правильных многоугольников с вершинами в заданных окрестностях узлов клетчатой бумаги.

Известно, что никакой правильный многоугольник (кроме квадрата) нельзя расположить на целочисленной решетке Z^2 так, чтобы его вершины являлись узлами этой решетки. С другой стороны, если окружить каждый узел целочисленной решетки кружком сколь угодно малого радиуса, то уже найдутся любые правильные многоугольники, все вершины которых расположены в этих малых окрестностях узлов.

Работа посвящена поиску конкретных алгоритмов, которые позволили бы по заданному радиусу указанных кружков построить данный правильный многоугольник. В случае правильного треугольника рассматриваются два алгоритма. Первый из них основан на применении одной теоремы Кронекера и на свойствах цепных дробей, а второй — на свойствах рекуррентных целочисленных последовательностей, тесно связанных с решениями некоторых диофантовых уравнений.

13. ***Е. Падюкова и И. Субботин*** получили довольно неожиданные характеристические свойства медиан и средних линий треугольника в своей работе *"О серединах сторон треугольника"*.

Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников, а три средние линии — на четыре равных (и равновеликих) треугольника. *А какие из этих свойств являются характеристическими?* Другими словами, верно ли, что если три чевианы треугольника конкурентны (т.е. пересекаются в одной точке) и делят его на шесть (пять, четыре, три) равновеликих треугольников, то эти чевианы являются медианами (рис. 1)? Верно ли, что если для трех точек, выбранных на сторонах треугольника, соединяющие их отрезки делят его на четыре равновеликих треугольника, то эти точки являются серединами сторон треугольника (рис. 2)?

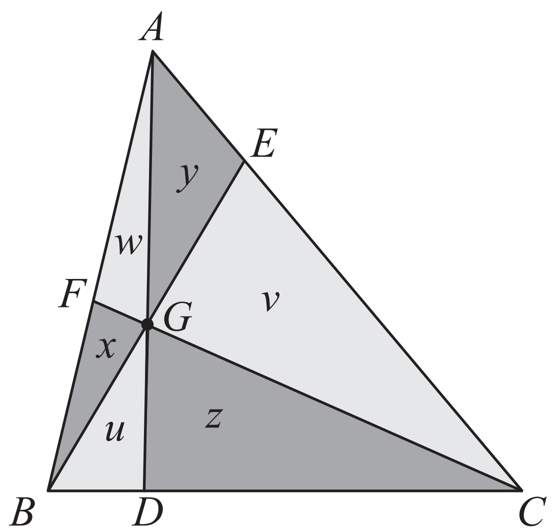

Рис. 1

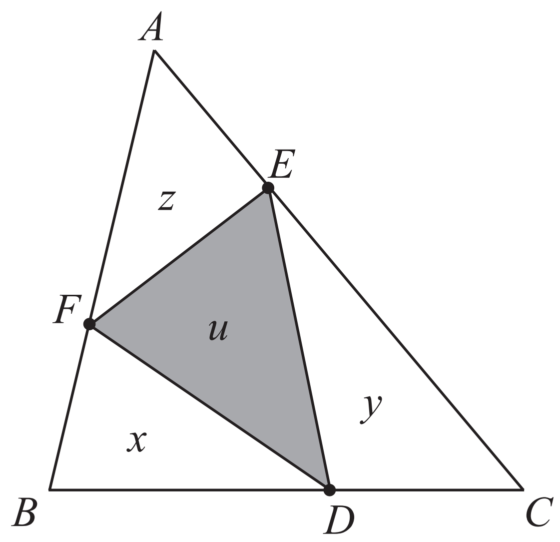

Рис. 2

Теорема 1. *Имеют место следующие два утверждения:*

1^0. *Если площади любых трех треугольников равны, то точка G — центр тяжести треугольника ABC.*

2^0. *Если площади двух треугольников (рис. 1) из разных "трилистников" равны (один "трилистник" состоит из треугольников с площадями x, y, z, а другой — из трех оставшихся треугольников), то по крайней мере одна из трех чевиан является медианой треугольника ABC.*

Теорема 2. *Если все четыре треугольника на рис. 2 равновелики ($x = y = z = u$), то точки E, F, G являются серединами сторон треугольника ABC. При этом из равенства площадей только трех треугольников, вообще говоря, не следует, что среди отрезков EF, FD, ED имеется по крайней мере одна средняя линия треугольника ABC.*

14. ***С. Воинов и А. Горяева*** в трудоемкой работе *"Правильные паркеты на сфере"* показали, что на сфере существует ровно 18 различных правильных паркетов (футбольных мячей). Известно, что существует ровно 11 различных разбиений плоскости на правильные многоугольники (*правильных паркетов*) и таких, чтобы около каждого узла паркета было одно и то же расположение многоугольников и любые два многоугольника такого разбиения или имеют общую сторону, или имеют только одну общую вершину, или вообще не пересекаются. *А как обстоит дело на сфере?* Имеет место

Теорема. *На сфере существует 18 различных правильных паркетов.*
Основную роль в доказательстве теоремы играет соотношение

$$\sum \alpha_k = 2\pi(1 - \frac{2}{B}),$$

где B — число узлов паркета (точек, вокруг которых расположены сферические многоугольники) и слева в этом равенстве стоит сумма плоских углов при вершине многогранника, образованного заменой сферических многоугольников плоскими.

При доказательстве последовательно разбираются возможные устройства узлов паркета (три, четыре, пять многоугольников в узле); перебор возможностей, в каждом из этих случаев, проводится при помощи формулы Эйлера для выпуклых многогранников. Интересно отметить, что по итогом такого перебора возникает 26 различных наборов значений нужных величин и, как показано, только 18 из них действительно приводят к правильному паркету на сфере.

Приведем здесь итоги работы в виде таблицы (в ней формула $p_k q_l r_m$ означает, что в узле паркета сходится k правильных p — угольников, l правильных q-угольников, m правильных r-угольников), в которой также указано, какому из выпуклых однородных многогранников отвечает тот или иной паркет.

1.	3_3	Тетраэдр
2.	4_3	Гексаэдр (Куб)
3.	5_3	Додекаэдр
4.	$3_1 6_2$	Усеченный тетраэдр
5.	$4_1 6_2$	Усеченный октаэдр
6.	$3_1 8_2$	Усеченный гексаэдр
7.	$5_1 6_2$	Усеченный икосаэдр
8.	$3_1 10_2$	Усеченный додекаэдр
9.	$4_1 6_1 8_1$	Ромбоусеченный кубооктаэдр
10.	$4_1 6_1 10_1$	Ромбоусеченный икосододекаэдр (усеченный додекаэдр)
11.	3_4	Октаэдр
12.	$3_2 4_2$	Кубооктаэдр
13.	$3_2 5_2$	Икосододекаэдр
14.	$3_1 4_3$	Ромбокубооктаэдр
15.	$3_1 4_2 5_1$	Ромбоикосододекаэдр
16.	3_5	Икосаэдр
17.	$3_4 4_1$	Курносый куб
18.	$3_4 5_1$	Курносый додекаэдр

15. ***Е. Падюкова*** сравнила три классических результата в своей работе *"Об эффективности формул Архимеда, Гюйгенса и Чебышева для приближенного вычисления длины окружности"*.

Архимед (287 – 212 до н.э.) в своей работе "Об измерении круга" для приближенного вычисления числа π использовал приближенные формулы

$$\pi \approx p_n, \quad \pi \approx q_n,$$

где p_n, q_n обозначают периметры правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса $1/2$ и описанных около нее, соответственно; $n = 3, 4, \ldots$ Используя эти формулы (см. [1]) для правильных 96-угольников он доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Х. Гюйгенс (1629 – 1695) в 25-летнем возрасте в работе "О величине круга" получил совершенно неожиданный результат: приближение, найденное Архимедом для числа π, можно получить из рассмотрения периметров (или площадей) только правильных 12-угольников. Он использовал приближенную формулу

$$\pi \approx \gamma_n, \ \gamma_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n.$$

В основу доказательства этих формул им были положены элегантные соображения геометрического характера, дополняющие соображения Архимеда (см. [1,2]).

П. Л. Чебышев (1821 – 1894), изучая траектории движения точек, тесно связанных с шарнирными механизмами (так называемыми кривыми Уатта) в своем широко известном мемуаре 1853 года "Теория механизмов, известных под именем параллелограммов" (см. [3]) получил, в частности, следующую приближенную формулу

$$\pi \approx h_n, \ h_n^2 = 5p_{2n}^2 + \frac{1}{3}(p_{2n}^2 - p_n^2),$$

аналогичную по своей структуре приближенной формуле

$$\pi \approx \chi_n, \ \chi_n = \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

которая может быть получена на основе дальнейшего развития геометрических соображений из работы Гюйгенса.

Теорема. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\pi - p_n) = C_1, \quad \lim_{n\to\infty} n^4(\gamma_n - \pi) = C_2, \quad \lim_{n\to\infty} n^4(\pi - \chi_n) = C_3, \quad \lim_{n\to\infty} n^5(\pi - h_n) = C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — положительные постоянные и в совокупности не превосходят 3.

16. ***К. Джигарджян*** (Лицей информационных технологий №1533) в работе *"О распределении корней многочленов"* активно использовал компьютерные программы, которые сам и разрабатывал. Пусть

$$M_{s+1} = \{z : 1 + z^{k_1} + z^{k_2} + ... + z^{k_s} = 0, \ 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s\}, \ s = 1, 2, \ldots$$

обозначает множество нулей всех многочленов указанного вида (при произвольном выборе степеней k_i и фиксированном s). Основной целью работы является изучение множества нулей всех таких многочленов, а именно, множества

$$M = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_{s+1}.$$

Другими словами, в работе изучаются свойства множества нулей всех конечных подсумм (начинающихся с 1) степенного ряда

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

Для вычисления нулей многочленов было отдано предпочтение приближенному методу Лагерра и методу обратных матриц (обычно применяемому для вычисления собственных значений линейных операторов). При этом в разработанной программе используются оба метода. Первый из них достаточно быстро сходится и дает требуемые результаты (даже в случае наличия у многочленов корней, равных по модулю), но скорость вычислений заметно падает с ростом степени многочлена. При высоких степенях многочлена мы используем второй из указанных методов. Созданная программа позволяет:

- Находить корни многочленов с занесением их в базу данных.
- Рисовать полученные множества нулей многочленов и проводить их исследование (как чисто графическое, так и изучать их аналитические свойства).
- Использовать программу для постановки новых математических экспериментов. (Изучение фрактальных множеств, состоящих из значений всех многочленов из M_{s+1} при фиксированном z. Анализ многоугольников Ньютона для корней многочленов из M_{s+1} и, тем самым, изучение расположения корней производных многочленов).
- Ставить ряд новых вопросов исследовательского характера (и формулировать гипотезы) в теории распределения корней алгебраических уравнений.

При разработке программы для ПК были использованы такие известные программные продукты как MATLAB 7.0, Visual Studio 8.0, Microsoft Access 2003. Основная часть программы написана на языке C# 2.0, но вычислительный блок (DLL-модуль) реализован на языке Visual C++ 8.0. В результате работы программы формируется база данных (большого объема), куда заносятся корни многочленов и которая может быть проанализирована и обработана разнообразными способами, в зависимости от поставленных задач.

Качественный анализ созданный базы данных для множеств M_{s+1} позволил высказать ряд гипотез теоретического характера в теории распределения корней многочленов. Некоторые из них получили свое подтверждение. В частности, имеет место следующая

Теорема. *Множество M всюду плотно в кольце $K = \{z : 1/2 <| z |< 2\}$.*

17. ***Ю. Демидова*** изучала расположение нулей производных аналитических в области функций.

Теорема Гаусса утверждает, что корни производной многочлена лежат внутри или на границе многоугольника Ньютона — минимального замкнутого выпуклого многоугольника, содержащего все корни многочлена.

Основной целью работы *“Многоугольник Ньютона и теорема Гаусса”* является распространение этой классической теоремы Гаусса на произвольные области и функции с постоянным модулем на границе этой области. Одним из примеров может служить функция, аналитическая внутри единичного круга и заданная равенством

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}.$$

Под конформной прямой в области G понимаются те кривые, которые при конформном отображении области G на произвольный круг переходят в дуги окружностей, ортогональных к границе этого круга. При этом через всякие две точки области G проходит ровно одна прямая, а также — через точку области проходит ровно одна прямая по заданному направлению. Множество M из области G называется конформно-выпуклым относительно данной области, если отрезок конформной прямой, соединяющий две точки множества М, целиком принадлежит множеству М. Многоугольником Ньютона функции $f(z)$, ассоциированным с областью G, назовем наименьший конформно-выпуклый многоугольник (сторонами которого являются отрезки конформных прямых), содержащий все нули функции $f(z)$. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри области G и на ее границе ∂G. Тогда, если на границе ∂G функция $f(z)$ принимает значения, постоянные по модулю, то все нули* *производной $f'(z)$ содержатся в многоугольнике Ньютона этой функции, ассоциированном с областью G.*

18. ***А. Паунов и В. Петкиева*** нашли множество точек плоскости (пространства), где могут находиться вершины треугольника (ортоцентрического тетраэдра) при заданном ортоцентре и центре описанной окружности (сферы).

Пусть в плоскости π даны две точки O и H, и Δ обозначает любой треугольник, для которого точка O является центром его описанной окружности, а точка H — его ортоцентром; через T обозначим ортоцентрический тетраэдр, для которого точка O является центром описанной сферы, а точка H — его ортоцентром.

В их работе "*Из жизни двух замечательных точек треугольника и тетраэдра*" изучаются множества точек на плоскости и в пространстве, где могут находится вершины треугольников Δ и тетраэдров T.

Теорема 1. *Множество всех точек плоскости π, где могут находится вершины треугольников Δ (рис. 3), представляет из себя плоскость, из которой удалены окружность Γ_1 с диаметром HG и внутренность круга, ограниченного окружностью Γ_2 с диаметром GH', где G — такая точка отрезка HO, для которой $HG = 2GO$ (центр тяжести треугольника Δ), а H' — точка, симметричная точке H относительно точки O. (При этом A — одна из вершин треугольника Δ, Γ_3 — окружность с диаметром HH'),*

1^0. если $A \in \Gamma_3$, то Δ — прямоугольный треугольник;

2^0. если вершина A расположена внутри Γ_3, но вне Γ_1, то Δ — тупоугольный треугольник и угол A — острый;

3^0. если вершина A расположена внутри Γ_1, то Δ — тупоугольный треугольник и угол A — тупой.

4^0. если вершина A расположена вне Γ_3, то Δ — остроугольный треугольник.

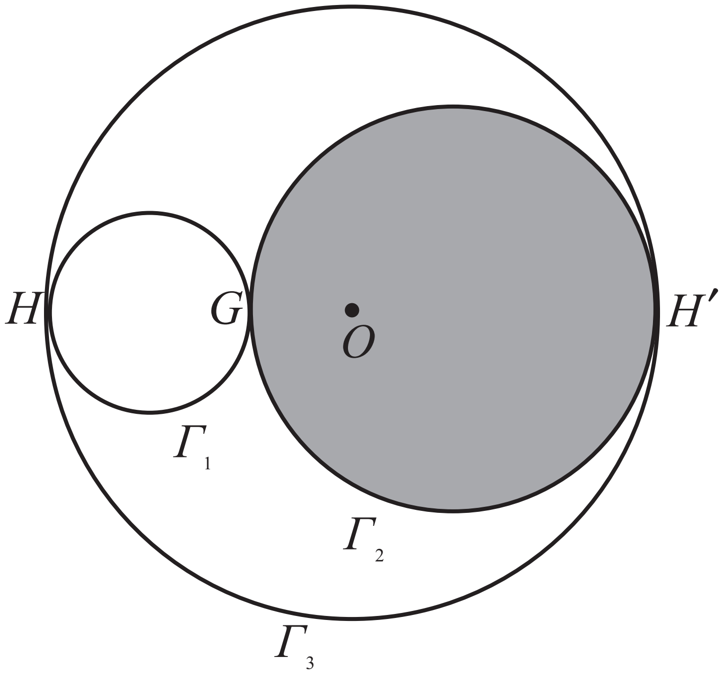

Рис. 3

Теорема 2. *Пусть Γ_4 — окружность с центром $X \in GO$, $GX < XO$ и радиусом OX. Тогда множество всех точек, где могут лежать центры I вписанных окружностей треугольников Δ, представляет из себя плоскость, из которой удалены точки H, G. Причем:*

1^0. если $I \in \Gamma_4$, то Δ — прямоугольный треугольник;

2^0. если вершина I расположена внутри Γ_4 то Δ — тупоугольный треугольник;

3^0. если вершина I расположена вне Γ_4, то Δ — остроугольный треугольник.

Теорема 3. *Множество всех точек пространства, где могут быть расположены вершины тетраэдров T с заданным центром описанной сферы O и заданным центром тяжести G,* *состоит из всех точек пространства, расположенных вне сферы $\sum_1$, за исключением точки сферы $\sum_2$. Здесь $\sum_1$ имеет диаметр GH' (G — середина отрезка OH и центр тяжести тетраэдра T, H' — точка, симметричная H относительно точки O), а $\sum_2$ имеет диаметр GH (центры обеих сфер принадлежат прямой OH).*

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, В. В. Вавилов, И. Т. Тропин, Физико-математическая школа при МГУ. — М.: Знание, 1981. (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика и кибернетика, №5).

[2] В. В. Вавилов, Школа математического творчества. — М. РОХОС, 2004.

[3] В. В. Вавилов, Математических и специальных наук школа. — Журнал "Математическое образование", №3(34), 2005.

[4] В. В. Вавилов, Математическая биобиблиография школы им. А. Н. Колмогорова. — Журнал "Математическое образование", №4(35), 2005.

[5] В. В. Вавилов, Задачный калейдоскоп (конкурс решения задач памяти А.Н. Колмогорова). — Журнал "Математическое образование", №4(35), 2005.

[6] В. В. Вавилов, И. Ю. Селиванова, Школьные Харитоновские чтения. — Учебно-методическая газета "Математика. Первое сентября", 8(2006).

[7] В. В. Вавилов, А. А. Часовских, Школьные Колмогоровские чтения. — Учебно-методическая газета "Математика. Первое сентября", 15(2006), в печати.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: vvavilov@mtu-net.ru; vvavilov@tochka.ru

Уроки в цветущем саду

В. В. Вавилов, М. Е. Колоскова

Рассказано об оригинальных уроках на свежем воздухе, посвященных освоению теорем Дезарга и Паппа проективной геометрии, а также измерениям на местности. Уроки проводились в школе имени А. Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ).

Заключительная геометрическая лекция для десятиклассников в конце мая этого учебного года (как и два года назад) была посвящена аксиоматике аффинной плоскости и, в частности, примеру Гильберта такой плоскости. Было установлено, что ни теорема Дезарга, ни теорема Паппа в этой плоскости доказаны быть не могут.

Лекция длилась один час, а после ее окончания занятия продолжились в школьном саду. Наш сад в это время года всегда выглядит очень живописно: цветут каштаны, расцветают многочисленные яблони и кусты сирени, в их тени расстилается ковёр полевых цветов, а на солнечных полянах зеленеет аккуратно подстриженная газонная травка. Сам сад довольно старый и большой, но ухоженный; дело в том, что школа-интернат №18 при МГУ (ныне школа им. А. Н. Колмогорова) размещена на территории, где раньше находилась деревня Давыдково, и садовые деревья остались от бывших частных владений. Весеннее настроение учащихся, пышная зелень, цветы, щебетание птиц и необычность самих уроков “на природе” создают радостную атмосферу деятельности и совместного общения.

Расскажем о двух таких занятиях в расцветающем яблоневом саду; точнее на его “опушке”, где находится школьный стадион. Первое было посвящено экспериментальной математике, на котором проверялись две фундаментальные теоремы. Второе — некоторым задачам практической геодезии (что подчеркнуло тем самым возникновение самого слова “геометрия”), с целью развития навыков и умений правильно оценивать полученные результаты измерений и вычислений.

1. Два года назад мы занимались “постановкой” и проверкой теорем Дезарга и Паппа-Паскаля. Обе эти теоремы носят проективный характер, то есть в них речь идет только о свойствах точек, прямых и их взаимном расположении.

Теорема Дезарга[1] утверждает, что если на каждой из трех различных прямых, проходящих через одну точку O, выбраны произвольным образом по две точки (A и A', B и B', C и C'; рис. 1), то три точки P, Q, R пересечения соответствующих сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ лежат на одной (дезарговой) прямой. Верно и обратное: если точки P, Q, R лежат на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. Мы ограничиваемся здесь случаем, когда все интересующие нас точки расположены в конечной плоскости.

[1] Жирар Дезарг (1591—1661) — французский архитектор и военный инженер. Полученная им теорема является одной из основных теорем проективной геометрии и дает возможность выполнять проективные построения в одной плоскости.

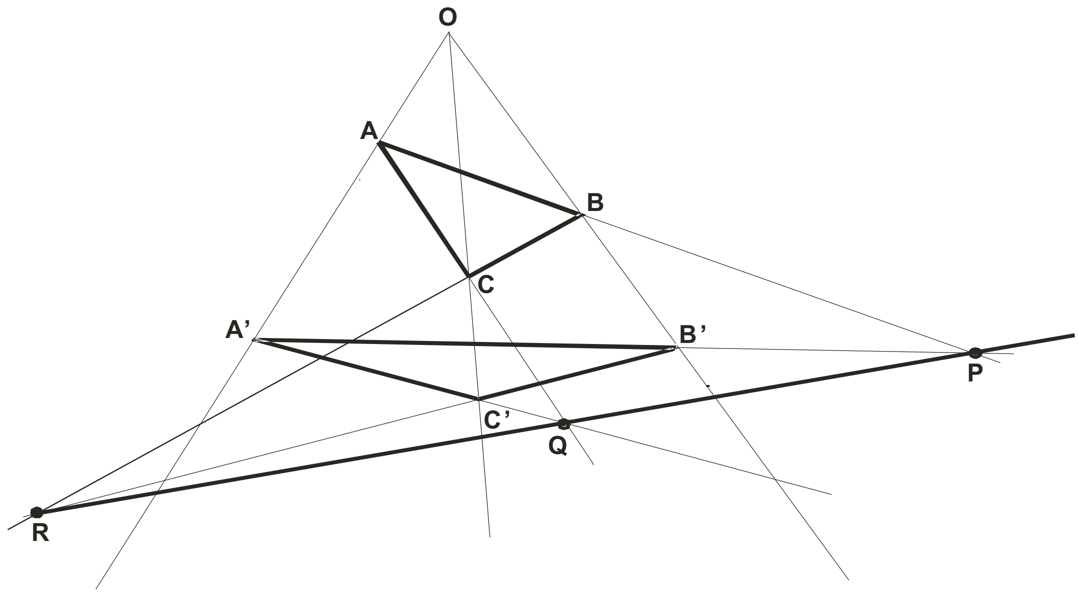

Рис. 1

Теорема Паппа[2] (и Б. Паскаля) утверждает, что если четырехугольник $ABCDEF$ “вписан” в пару прямых, то точки пересечения пар его противоположных сторон (AB и DE, BC и EF, CD и FA) лежат на одной (паскале) прямой (рис. 2).

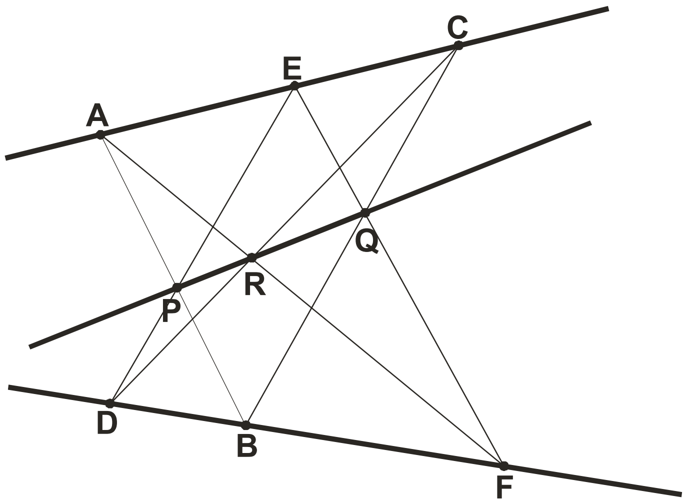

Рис. 2

Теорема Паппа, в частности, отвечает на такой вопрос: *Можно ли посадить 9 деревьев в 9 рядов так, чтобы в каждом ряду было три дерева?.* Теорема Дезарга дает рецепт посадки 10 деревьев в десять рядов так, чтобы в каждом из них было по три дерева.

Блез Паскаль (1623—1662) — французский математик, физик и философ. В шестнадцатилетнем возрасте установил теорему о “мистическом” шестиугольнике, которая сильно обобщает теорему Паппа: точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка (эллипс, парабола, гипербола, пара прямых), лежат на одной прямой. Интересна история публикации этой работы. Он изготовил 50 экземпляров плакатов с формулировкой теоремы и ясными пояснениями к ее доказательству, а затем разместил их на перекрестках улиц в Париже (так делал и Дезарг).

На школьном стадионе предлагалось проверить эти теоремы чисто практически, когда ученики “играют” роль точек, а прямые “виртуально провешиваются”. Для этого были выделены

[2]Папп Александрийский (вторая полвина 3-го века) — древнегреческий математик, который, вероятно, работал в Александрии.

две группы учащихся — по одной на каждую конфигурацию. Как это ни странно, но построение фигуры *разумных* размеров (не маленькая, но и не огромная) требует значительного времени: объясняется это, во-первых, тем, что участников больше трех, а во-вторых — тем, что одна из точек P, Q, R зачастую далеко "убегает" и приходится переговариваться на больших расстояниях. Советов зрителей участникам построений в "нужные шеренги" и смеха было предостаточно, и возгласы типа: "Ну ты — Дезарг!", "Ты не Папп — ты Мамм", "У вас прямая — кривая!" и т.д. были слышны даже тем, кто с большим любопытством смотрел на все это действо из окон общежития, не понимая, чем это там народ занимается. После того, как обе конфигурации построены и точки P, Q, R "отмечены одним цветом" (их роль, играли девушки; все остальные точки — юноши) начинаются "танцы". Для этой, уже стоящей позиции, строится прямая Дезарга в случае, когда исходными треугольниками считаются треугольники $A'BC$ и $AB'C'$ (для чего нужны еще две девушки и некоторое время); см. рис. 3. Другая группа школьников "танцует" около прямой Паппа: здесь точки A, B, C, D, E, F остаются на месте, но рассматривается уже другой шестиугольник, а именно — $ABCFEDA$; прямая Паппа становится уже другой (рис. 4). После таких "танцулек" для многих их участников становятся более ясными и сами теоремы, и их проективный характер.

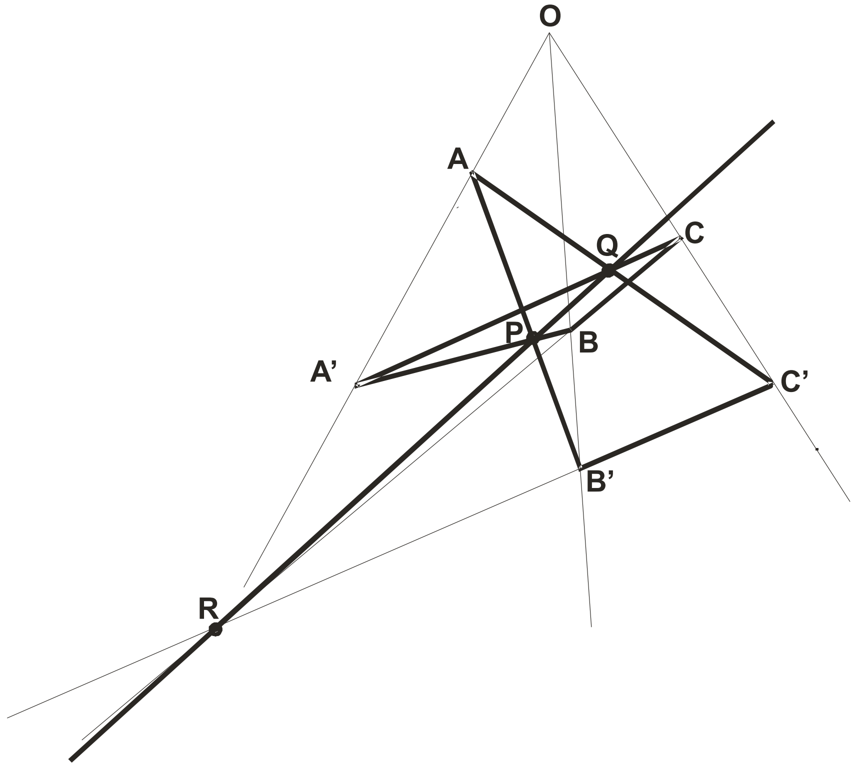

Рис. 3

Отмечу, что у нас были также "постановки теоремы Паскаля" для шестиугольника, вписанного в окружность (точки на окружности выбирались при помощи десятиметровой рулетки). Однако, теорема Паппа для построений на земле подходит лучше.

Примечание. Для заинтересовавшегося читателя расскажем немного о цели лекции и о плоскости Гильберта. В этой плоскости точками являются точки обычной плоскости. Множество же прямых (которое мы постулируем) состоит из прямых четырех типов. В него входят все вертикальные прямые $x = a$, все горизонтальные прямые $y = b$ и все прямые с уравнением $y = kx + b$, $k < 0$. Кроме этих семейств, имеется семейство ломаных (рис. 5) с изломом на оси Ox, причем $\mathrm{tg}\,\beta/tg\alpha = 2$ и $0 < \alpha < \pi/2$; в верхней половине плоскости прямая имеет уравнение $y = kx + b$, но при $k > 0$.

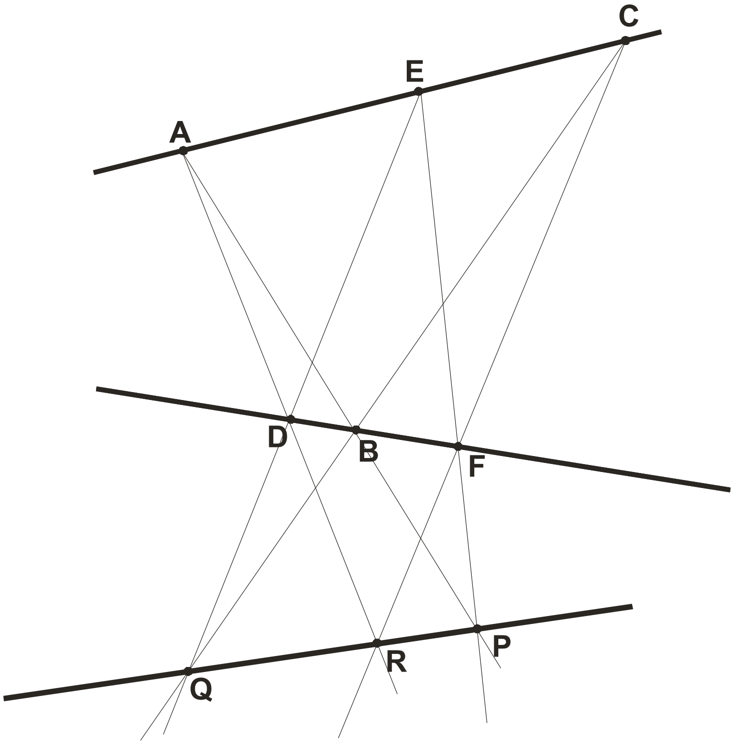

Рис. 4

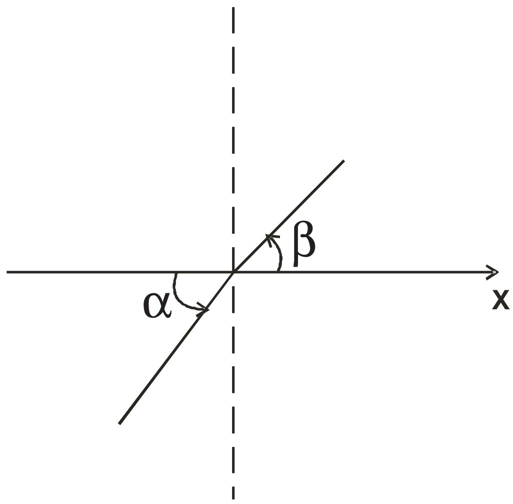

Рис. 5

Легко проверить, что для такой пары множеств $< \Pi, L >$, первое из которых состоит из точек, а второе множество состоит из определенных выше прямых, выполнены следующие три аксиомы:

A1. Через каждую пару различных точек проходит ровно одна прямая;

A2. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой;

A3. Через каждую точку, расположенную вне данной прямой, проходит ровно одна прямая ей параллельная.

Плоскости, удовлетворяющие этим трем аксиомам, называются аффинными плоскостями. Пример Гильберта аффинной плоскости показывает, что в рамках только такой аксиоматики теоремы Паппа и Дезарга доказаны быть не могут (попробуйте самостоятельно построить соответствующие примеры). Тем самым, мы имеем пример так называемой недезарговой плоскости. Тематику, связанную с аффинными плоскостями, впервые ввел в нашу школу А. Н. Колмогоров, который в своих лекциях доходил до довольно тонких и трудных вопросов аксиоматического построения геометрии.

2. Второй урок на стадионе около цветущего сада в ясный солнечный день был посвящен довольно простой задаче: измерить “при помощи десятиметровой рулетки” расстояние от школы им. А. Н. Колмогорова до здания Московского университета, шпиль которого виден со стадиона. Для учеников это было символично, так как через год многим из них придется поступать в университет (все наши выпускники, за крайне редким исключением, становятся студентами вузов, а большинство из них — студентами МГУ). Школьники хорошо подготовились к занятиям: переоделись “в летнее” и взяли фотоаппараты.

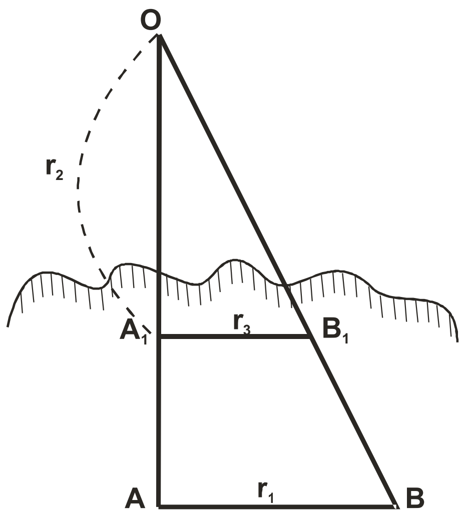

Рис. 6

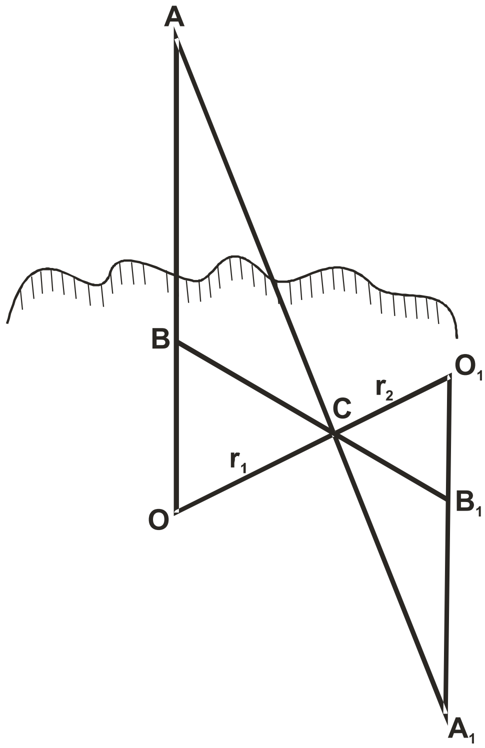

Рис. 7

Для того, чтобы выполнить задание (ответить на вопрос: “Как далеко мы от МГУ?”), учащиеся двух классов были разбиты на 7 групп. Рецептура измерения учащимся не предлагалась, и ее нужно было придумать самостоятельно каждой группе. Сразу же посыпались вопросы “умников и умниц”: “А высота здания МГУ известна?, А можно измерять углы?, С какой точностью нужен результат?” и т.п. Было сказано, что имеется только рулетка, а точность измерения (для начала) — 1 километр. Решив, что получение ответа к этой задаче не займет много времени, школьники сделали множество самых разнообразных фотографий, немного погуляли и подышали свежим от недавно скошенной травы воздухом, а только потом уже собрались в кружки и стали придумывать способы измерения интересующего расстояния. Преподаватели сначала играли роль “фотомоделей” и статистов. Первая группа пришла с “квадратными” глазами — “...мы поделили ...и получили ответ: 72 метра”. Не вступая в дискуссию и проверку вычислений, школьники были “посланы в МГУ за пепсиколой — рядом же”. Заметим, что эта же группа подходила потом и второй раз с результатом на 5 метров лучше предыдущего, но ... Примерно через час после начала “трудовой” деятельности учащиеся стали серьезно задумываться; при этом только у одной группы к этому времени был получен численный результат (известный только учителям), который соответствовал действительности. Но и этот результат они не смогли обосновать, так как, с одной стороны, ни в какой другой группе близких результатов не было, а с другой стороны, априорных оценок для приближенных вычислений ими не приводилось. Отметим, что ни один из наших “вундеркиндов” не сообразил сбегать в школу, напичканную компьютерами, “спросить нужное расстояние”, а затем уж хотя бы “подогнать” вычисления. Скажем также, что ни одна группа “нужного числа” за отведенное время не выдала. Помешала немного еще и затянувшаяся школьная линейка, которая пересеклась с нашими занятиями. Тем не менее “рассерчавшие” учителя, желая все-таки добиться результата, устроили для школьников “входной” билет на экзамен (по принципу: “не пожелал — на экзамен не попал"), который им предстоял через две недели: нужно было при входе предъявить "километры". В этой статье мы также специально не скажем точного ответа (имея в виду будущие задачи на нашей территории); отметим только, что искомое расстояние находится между 6-ю и 7-ю километрами.

Были использованы две схемы для вычисления нужного расстояния, которые вполне ясны из рисунков 6 и 7.

Так, на рис. 6 из пропорции $OA/AB = OA_1/A_1B_1$ найдем искомое расстояние OA, измерив и вычислив остальные расстояния, в ней участвующие (для вычисления OA_1 пришлось подключить угол; прямой угол строился при помощи египетского прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5). На рис. 7 (на котором, строятся сначала подобные треугольники OBC и O_1B_1C с известным коэффициентом) из подобия треугольников AOC и CO_1A_1 найдем $OA/OC = O_1A_1/O_1C$.

Отметим следующее обстоятельство, связанное с точностью полученных результатов (подобные вопросы всерьез приходили в голову учащимся только после их неудачных попыток измерений и вычислений). Так например, если обозначить относительные ошибки измерения расстояний $r_1 = AB$, $r_2 = OA_1$, $r_3 = A_1B_1$ через δ_1, δ_2, δ_3, из указанной пропорции для истинного значения найдем величину

$$r(1+\delta) = \frac{r_1r_2(1+\delta_1)(1+\delta_2)}{1+\delta_3}.$$

Так как при малых δ_3 из формулы для суммы геометрической прогрессии получаем приближенное равенство

$$\frac{1}{1+\delta_3} \approx 1-\delta_3,$$

то, тем самым,

$$1+\delta \approx (1+\delta_1)(1+\delta_2)(1-\delta_3).$$

Отбрасывая здесь члены второго и третьего порядков, получим, что

$$\delta \approx \delta_1 + \delta_2 - \delta_3.$$

Аналогичное приближенное равенство возникает и при втором способе измерения.

Учащиеся также быстро понимают трудности, связанные с точностью определения положения точки пересечения двух прямых, пересекающихся под малым углом. Одну из простых оценок, которая здесь имеет место, получить не трудно. Пусть в треугольнике ABC задана сторона $AB = 1$ (базис), а углы α и β определены с абсолютной ошибкой, не превосходящей Δ. Если по стороне AB и углам α' и β' построить треугольник ABC' такой, что

$$|\,\alpha-\alpha'\,| < \Delta, \qquad |\,\beta-\beta'\,| < \Delta,$$

то расстояние CC' оценивается (по Δ) при пренебрежении членами порядка выше первого неравенством

$$CC' \leq \frac{2l}{\sin^2\gamma}\cdot\Delta, \qquad \alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

Это неравенство показывает, в какой мере опасны углы γ, близкие к нулю или развернутому.

Уроки в саду и детям, и учителям очень понравились.

Упражнения

Здесь мы помещаем задачи, которые можно с успехом решать в пеших и байдарочных походах, в окрестностях дач и вообще "на природе". Первая группа задач связана со свойствами подобных треугольников, а во второй уже требуется понимание теорем Дезарга и Паппа.

1. Докажите оценку для отрезка CC', указанную в конце статьи. Найдите множество точек C, для которых

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma} \le 2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin^2 \gamma} \le 5.$$

2. Как при помощи рулетки измерить: а) глубину котлована, б) высоту дерева, в) ширину озера?

4. Две данные прямые, пересекаясь, образуют угол, вершина которого находится за пределами листа бумаги. С помощью одной линейки через эту вершину и данную точку проведите на бумаге прямую.

5. Проведите прямую через две точки, между которыми расстояние больше, чем длина линейки.

6. На бумаге нарисован отрезок прямой, которую вы хотите продолжить в определенную сторону с помощью линейки. Однако на вашем пути имеется клякса, не позволяющая непосредственно провести прямую, не испачкав при этом линейку. Как можно "обогнуть" кляксу и построить нужный участок прямой?

Исследовательский проект

Задача исследовательского типа, которую можно положить в основу, например, доклада на одной из школьных научных конференций, состоит в том, чтобы разобраться с точностями построений прямых Дезарга и Паскаля. Другими словами выяснить, как сильно отличается от прямой реально возникающая "ломаная PQR", если положение других точек конфигураций известны лишь с данными абсолютными ошибками? Здесь много вариантов задач; начать можно со случая, когда исходные точки конфигураций расположены в окрестностях данных точек, но расположены на "идеальных прямых", а сами построения проводятся уже с заданными погрешностями.

Литература

[1] Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981.

[2] Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.

[3] П. В. Маковецкий, Смотри в корень. — М.: Наука, 1976.

[4] И. Н. Сергеев, С. Н. Олехник, С. Б. Гашков, Примени математику. — М.: Наука, 1989.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: vvavilov@mtu-net.ru; vvavilov@tochka.ru

Колоскова Мария Евгеньевна,
ассистент кафедры математики
школы имени А. Н. Колмогорова,
аспирантка механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова.

Школьные Колмогоровские чтения

В. В. Вавилов, А. А. Часовских

В заметке рассказано о ставших уже традиционными международных научных чтениях школьников, проходивших на базе школы имени А. Н. Колмогорова.

Вот уже шестой раз на базе Специализированного учебно-научного центра МГУ им. М. В. Ломоносова при участии Российской академии наук и Российской академии образования проходят Международные Школьные Колмогоровские Чтения. В этом году они прошли с 4 по 8 мая. Работа была организована по шести школьным секциям: математики (36 докладов), информатики (22 доклада), физики (25 докладов), химии (10 докладов), биологии (12 докладов). Именно такие специализации обучения имеет школа имени А. Н. Колмогорова, в стенах которой и возникла идея о проведении чтений. В конференции приняли участие 124 учащихся из Москвы, С.-Петербурга, Алматы, Бреста, Владикавказа, Воронежа, Долгопрудного, Донецка, Екатеринбурга, Иркутска, Красноярска, Казани, Коврова, Косой горы (Тульская обл.), Нижнекамска, Орла, Рыбинска, Рудаково (Тульская обл.), Сарова, Серпухова, Ставрополя, Томска, Тулы, Уральска, Чебоксар, Черноголовки, Эртиля (Воронежская обл.), Ярославля.

В программу конференции входили посещение музея МГУ имени М. В. Ломоносова, музея "Коломенское", Третьяковской галереи, экскурсия по Москве. Для участников чтений были организованы научно-популярные лекции, встреча с представителями факультетов МГУ, желающим была предоставлена возможность принять участие в математической олимпиаде "Ломоносов", проводимой естественно-научными факультетами МГУ; кроме того, было организовано собеседование с теми, кто выразил желание поступить на обучение в СУНЦ МГУ. Не забытыми остались, конечно, спортивные игры и вечера отдыха с дискотеками; с большим успехом прошел школьный концерт.

Нас радует, вдохновляет на работу в будущем и обнадеживает то, что научный уровень докладов заметно вырос, а число участников конференции значительно увеличилось. Победители конференции показали себя настоящими молодыми исследователями, могущими решать серьезные проблемы как теоретического, так и прикладного характера. Качество задач и их научный уровень, учитывающий возрастные и образовательные возможности, — это заслуга, в первую очередь, школьных учителей, привлеченных в школу ученых и преподавателей различных вузов, которые сумели не только правильно поставить задачи, но и оказать в течение значительного времени поддержку в работе и обеспечить надлежащую консультационную помощь.

Победителями конференции стали:

Математика

Вероника Столбова, ученица 11 класса СУНЦ МГУ (научный руководитель — доцент Русаков А.А.). Доклад "Новый метод контроля над сердечным ритмом", диплом I степени.

Фаизов Ильдар, ученик 11 класса лицея №533 г. Санкт-Петербурга (научный руководитель — доцент Пименов К.И.). Доклад "Делимость сумм Мебиуса", диплом I степени.

Ганин Ярослав, ученик 11 класса ФМЛ №1511 при МИФИ г. Москвы (научный руководитель — Мякишев А.Г.). Доклад "О некоторых прямых, связанных с четырехугольником", диплом II степени.

Москал Анна, ученица 9 класса лицея "Вторая школа" г. Москвы (научный руководитель — Шафаревич А.И.). Доклад "Инверсоры и многочлены", диплом II степени.

Иванов Илья, ученик 11 класса СУНЦ МГУ (научный руководитель — ассистент Степанов А.А.). Доклад "К 17-й проблеме Гильберта", диплом III степени.

Севастьянов Антон, ученик 11 класса СУНЦ МГУ (научный руководитель — доцент Русаков А.А.). Доклад "О принципах построения греко-латинских квадратов. Решение задачи Л. Эйлера для некоторых n", диплом III степени.

Черныш Ксения, ученица 11 класса лицея №533 г. Санкт-Петербурга (научный руководитель — Порецкий А.М.). Доклад "Разбиение последовательностей n-х степеней на группы с равной суммой", диплом III степени.

Информатика

Склипус Дмитрий, лицей №1 г. Бреста, Беларусь (научный руководитель — кандидат педагогических наук Козинский А.А.). Доклад "Микроконтроллерная лаборатория", диплом I степени.

Жорин Артем и Рязанцев Сергей, ученики 9 класса лицея №15 г. Сарова (научные руководители — Мешков Е.Е., Циберев К.В.). Доклад "Компьютерная коррекция искажений изображения, вносимых цилиндрической линзой", диплом II степени.

Пронин Филипп, ученик 11 класса лицея №1 г. Бреста, Беларусь (научный руководитель — кандидат педагогических наук Козинский А.А.). Доклад "Обучение программированию при помощи комплекса программ ROBOT WAR", диплом II степени.

Игнатьев Илья, ученик 11 класса лицея №2 г. Рыбинска (научный руководитель — Аргов Д.И.). Доклад "Организация удаленного доступа управления компьютерами локальной сети", диплом III степени.

Кузнецов Илья, ученик 11 класса лицея №2 г. Рыбинска (научный руководитель — Аргов Д.И.). Доклад "Использование продвинутой анимации в игровых программах и создание 3D движка", диплом III степени.

Джигарджян Константин, ученик 11 класса лицея №1533 г.Москвы (научные руководители — профессор Огиевецкий О.В. и доцент Вавилов В.В.). Доклад "О распределении корней многочленов", диплом III степени.

Физика

Бирало Галина и Сеплярская Анна, ученицы 10 класса школы №82 г. Черноголовка Московской области (научный руководитель — научный сотрудник Любимова Г.В.). Доклад "Как обнаружить продукты распада радиоактивного газа радона в окружающем нас воздухе?", диплом I степени.

Волошин Андрей, ученик 11 класса СУНЦ МГУ (научный руководитель — Могилевский Е.И.). Доклад "Тень в волновой оптике", диплом I степени.

Волкова Анастасия, ученица 11 класса общеобразовательного специализированного санаторно-интернатного учреждения для одаренных детей "Эрудит" г. Донецка (научный руководитель — доктор технических наук, профессор Гольцов В.А.). Доклад "Кинетика фазовых превращений, индуцированных водородом в сплаве $ND_2FE_{14}B$", диплом II степени.

Чертоляц Игорь, ученик 11 класса МОУ лицея при ТПУ г. Томска. Доклад "Нановолкнистый наполнитель для фильтров", диплом II степени.

Герасимов Олег и Шорников Алексей, ученики 10 класса ГОУ "Республиканский лицей-интернат" г. Чебоксары (научный руководитель — Аджет Ахмет). Доклад "Исследование влияния излучения сотовых телефонов на человека и простые способы защиты", диплом III степени.

Карпов Дмитрий, ученик 11 класса СУНЦ УрГУ г. Екатеринбурга. Доклад "Нарушается ли второй закон термодинамики в процессе нагревания раствора соли паром?", диплом III степени.

Прокопьев Дмитрий, ученик 10 класса МОУ лицей при ТПУ г. Томска (научный руководитель — аспирант ТГУ Лелеков М.А.). Доклад "Разработка рентгеновского детектора на арсениде галлия для цифровых аппаратов", диплом III степени.

Химия

Хусаинов Наиль, ученик 9 класса технического лицея №5 г. Нижнекамска (научный руководитель Хусаинова Р.М.). Доклад "Утилизация отработанного хромоксидного катализатора", диплом I стпени.

Куликов Николай, ученик 11 класса МОУ лицея при ТПУ г. Томска (научный руководитель — аспирант Яновский В.А.). Доклад "Новые методы синтеза имидов дифеновой кислоты", диплом II степени.

Демкович Иван, ученик 11 класса СУНЦ УрГУ г. Екатеринбурга. Доклад "Синтез и некоторые реакции 3-полифторацилхромона", диплом III степени.

Биология

Кузьминых Анастасия, ученица 10 класса лицея №1553 "На Донской" г. Москвы (научный руководитель — Калачихина О.Д.). Доклад "Генетическая составляющая в учащении случаев бронхиальной астмы у больных муковицидом", диплом I степени.

Антонова Полина, гимназия №1 г. Тулы (научные руководители — Муравская Л.А., Буколова Т.П.). Доклад "Антоцианы листьев клена остролистного", диплом II степени.

Аржаник Владимир, СУНЦ МГУ (научный руководитель — доцент Колясников О.В.). Доклад "Анализ участка узнающей области антител, соответствующего TYR H95", диплом III степени.

Отличительной особенностью конференции в этом году явилась организация работы секции *по методике профильного преподавания* для учителей и руководителей делегаций, приехавших вместе с учащимися. Цель ее работы состояла, в частности, в обмене мнениями по совершенствованию и повышению уровня научно-исследовательской деятельности учащихся именно с теми преподавателями, которые уже руководят научной работой школьников. Она была многопредметной и на ней было сделано 9 полноценных докладов: 1 по математике (В. Н. Дубровский — СУНЦ МГУ), 2 по химии (В. В. Загорский — СУНЦ МГУ, И. А. Черемичкина — СУНЦ УрГУ), 2 по биологии (Е. П. Незнамова — Воронеж, Дворец творчества; Н. М. Рыжова — г. Ковров), 2 по физике (В. И. Лобышев — СУНЦ МГУ; Л. Х. Казанцева — г. Томск, лицей при ТПУ), 1 по информатике (И. Н. Фалина — СУНЦ МГУ), 1 по истории (Д. Е. Рудой, СУНЦ МГУ). По мнению ее восемнадцати участников, работа секции была организована своевременно, а сами доклады вызвали несомненный интерес у ее участников. С приветствиями и короткими сообщениями перед началом работы секции выступили выпускники физико-математической школы-интерната при МГУ (так раньше называлась школа имени А. Н. Колмогорова) А. М. Абрамов (самый первый выпуск, член-корреспондент РАО), Д. Л. Абраров (выпускник и бывший директор школы), В. М. Имайкин (выпускник 1978 года, главный редактор журнала "Математическое образование").

Постоянно действующий оргкомитет конференции "Школьные Колмогоровские чтения" планирует и в будущем организацию работы подобной преподавательской секции. Для более содержательной ее подготовки целесообразно предварительно обменяться мнениями и соображениями о тематике возможных докладов и некоторых возможных формах ее работы. Это лучше всего (и эффективнее) сделать предварительно в электронном режиме: reading@aesc.msu.ru, vvavilov@tochka.ru Все предложения и соображения будут встречены с большой благодарностью.

Начиная с юбилея 100-летия со дня рождения академика А. Н. Колмогорова (2003 год), на родине великого ученого XX столетия, в Ярославле, проводятся научные Колмогоровские чтения. Этот статус получила работавшая на постоянной основе школа-семинар в Ярославле по исследованию проблем профессиональной подготовки учителя математики. Основными организаторами этих чтений были ректор Ярославского государственного педагогического университета В. В. Афанасьев и ученики А. Н. Колмогорова: член-корр. РАН А. Н. Ширяев, профессор В. М. Тихомиров, член-корр. РАО Н. Х. Розов, академик РАН Аносов, член-корр. РАО А. М. Абрамов, С. С. Демидов, Е. И. Смирнов и многие другие. Эта конференция (и сборники ее трудов) так или иначе отражает и продолжает те исследования, который проводил А. Н. Колмогоров во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Во многих докладах учеников и коллег А. Н. Колмогорова содержались новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого. Намеченная оргкомитетом этих чтений широкая исследовательская программа по восстановлению, изучению и публикации педагогического наследия А. Н. Колмогорова дает значимые ориентиры для будущих участников чтений. Программы всех прошедших чтений неизменно включали тематику, связанную с деятельностью СУНЦ МГУ — школы имени

А. Н. Колмогорова — и истории ее развития, с научно-методическими вопросами преподавания математики в этой школе. На чтениях с пленарными и секционными докладами выступали многие из ее бывших учеников и преподавателей: А. М. Абрамов, В. Б. Алексеев, С. А. Богатый, В. А. Гусев, В. В. Дубровский, В. Л. Натяганов, О. С. Ивашев-Мусатов, Е. В. Шивринская и др.

Школьные Колмогоровские чтения в Москве и научные Колмогоровские чтения в Ярославле, их содержательная работа и популярность отражают важные и огромные этапы жизни и творческой деятельности Андрея Николаевича Колмогорова.

Вавилов Валерий Васильевич,
доцент СУНЦ МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: vvavilov@mtu-net.ru; vvavilov@tochka.ru

Часовских Анатолий Александрович,
директор СУНЦ МГУ,
профессор кафедры математики
школы имени А. Н. Колмогорова,
кандидат физ.-мат. наук.

Михаил Васильевич Остроградский

К 205-летию со дня рождения

Биографические данные о жизни выдающегося русского математика М. В. Остроградского приводятся по материалам web-страницы www.c-cafe.ru

Михаил Васильевич Остроградский родился 24 сентября 1801 года в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии, в имении своего отца.

До 18 лет мальчик жил в деревне с родителями, двумя братьями (Осипом и Андреем) и двумя сестрами (Еленой и Марией).

Уже в раннем детстве Михаил Васильевич проявлял редкую наблюдательность и подвижность. Он любил измерять размеры игрушек и других предметов, глубину ям и колодцев. С этой целью у него в кармане постоянно был шнурок с привязанным камнем. Особый интерес представляли для него мельницы, и он мог долгое время наблюдать за движением крыльев мельницы или водяного колеса, следить за работой жерновов и за падением воды.

Спустя много лет, когда Остроградский стал знаменитым ученым, близкие вспоминали о его настойчивой любознательности уже в первые годы жизни и видели в этом ранние проявления его талантливости. В 1809 году Остроградского отдали в Полтавскую гимназию, поместив его в существовавший в ней пансион, называвшийся “Домом воспитания бедных дворян”. Одновременно с определением в гимназию, по старому обычаю русских дворян, Остроградский был записан на государственную службу в канцелярию полтавского губернатора.

Конечно, никаких обязанностей по службе Остроградский не нес; он, так сказать, “числился в отпуску до окончания наук” и о службе даже не помышлял.

Вскоре после начала занятий Остроградский вместе со своим старшим братом Осипом поселился на частной квартире у А. И. Ротмистрова и продолжал посещать гимназию.

Он учился в гимназии посредственно. Недостаточная работа над собой, конечно, сказалась на знаниях гимназиста. В результате экзаменов 1814 года его знания при 9-бальной системе были оценены так: по математике — 5; по истории и географии — 6; по метафизике и нравственной философии — 6; по французскому и немецкому языкам — 1. Уроки латинского Остроградский попросту перестал посещать. О нем даже было сказано в конце года: “препятствует к продолжению успехов всего класса”.

Вполне возможно, что именно такое отношение к занятиям привело отца Остроградского к решению взять сына из гимназии, не дав ему закончить ее, и определить в один из гвардейских полков. Такое решение было исполнением одного из самых страстных желаний Остроградского. В 1816 году отец повез Михаила Васильевича в Петербург для определения в гвардию, но не довез его туда, круто изменив решение по совету П. А. Устимовича (дяди Михаила Васильевича), горячо настаивавшего на определении юноши в Харьковский университет. Для подготовки к поступлению в университет Михаила Васильевича поместили на квартиру к адъюнкту университета, преподавателю военных наук М. К. Робушу.

В течении года Остроградский приобрел весьма хорошие успехи в науках, и в августе был зачислен в студенты университета.

Остроградский еще долго мечтал о военной службе, не сочувствовал своей гражданской карьере и учился без увлечения. Он был готов расстаться с мыслью о блестящем мундире гвардейца и помириться с положением гусара или артиллериста, но отец был непреклонен. Тогда юноша стал просить родителей об определении его в кременчугский пехотный полк, но и на эту просьбу последовал категорический отказ. Пришлось продолжать университетское образование.

Нельзя сказать, что первые полтора года университетских занятий прошли для Остроградского с большой пользой. Посещая университет с 21 августа 1816 года в качестве вольнослушателя и с 27 августа 1817 года в качестве студента, он первые полтора года занимался недостаточно. Резкая перемена наступила в начале 1818 года, когда Остроградский перешел жить на квартиру преподавателя математики университета Андрея Федоровича Павловского, который оказал огромное влияние на Остроградского, на все дальнейшее направление его интересов.

Заметив математические способности Остроградского, Павловский своими дружескими беседами сумел пробудить любовь юноши к науке. С жаром принявшись за учение, Остроградский уже через два месяца поражал своего воспитателя математическими успехами.

Другим учителем Остроградского был ректор и профессор математики Харьковского университета Т. Ф. Осиповский. Он оказал решающее влияние на формирование научных интересов и мировоззрения Остроградского.

Увлечение занятиями не замедлило сказаться: в 1818 году Остроградский сдал экзамены за трехлетний курс университета и получил аттестат об его окончании.

Затем Остроградский пробыл в деревне у отца. После этого заслуженного отдыха желание усовершенствоваться в математике у него только возросло, и он решил вернуться в родной университет для "усовершенствования себя по части наук, относящихся к прикладной математике". Но общая обстановка, сложившаяся к тому времени в Харьковском университете, оказалась крайне неблагоприятной для Остроградского.

Немедленно после приезда в Харьков, 25 января 1819 года, новый попечитель З. Я. Карнеев дал университетской типографии распоряжение отпечатать циркуляр, относительно того, что "Священное писание должно служить основой при преподавании". Вскоре он обратился в совет университета с директивным указанием, что чтение Священного писания и Закона божия "могут наполнить умы юношей живой верой к Богу, просветить их духом господним, разогнать мрак заблуждений философских, утвержденных кичливостью разума, и посеять в сердцах христианские добродетели". В ответ на это обращение совет постановил приобрести несколько экземпляров библии на разных языках для казенных воспитанников.

В подобных условиях не мог остаться без последствий донос, поданный Карнееву на ненавистного ему ректора Харьковского Университета Т. Ф. Осиповского, свободомыслие которого в значительной мере противостояло усилиям Карнеева по изгнанию материалистического духа из университета. Донос был сделан профессором Дудровичем 24 октября 1820 года.

Такова была духовная атмосфера в Харьковском университете, таков был моральный облик профессора Дудровича, с которым пришлось столкнуться Остроградскому и который сделал все, чтобы лишить юношу диплома об окончании университета и кандидатской стипендии.

Проучившись год, Остроградский в 1820 году экзаменовался вместе со студентами, чтобы получить возможность претендовать на степень кандидата. Экзамены он сдал блестяще, и ректор университета Т. Ф. Осиповский, видя успехи Остроградского, решил присудить ему ученую премию кандидата, руководствуясь появившимся в 1819 году положением о производстве в ученые степени.

Однако физико-математическое отделение университета нашло, что Остроградский не подходит под это правило, так как студенческий аттестат он получил до того, как это положение вошло в силу. Остроградского подвергли новым испытаниям, которые он выдержал удовлетворительно; ему оставался только экзамен по философии. Экзаменовать его должен был профессор Дудрович, но принять экзамен он категорически отказался, мотивируя это тем, что Остроградский не посещал лекции по философии, которые были обязательными.

В поступках Дудровича проявилась ожесточенная борьба реакционной части профессуры Харьковского университета против передовых и материалистических взглядов Осиповского, его учеников и последователей, к числу которых принадлежал и Михаил Васильевич Остроградский.

Осиповский как ректор настаивал на производстве экзамена, но Дудрович не только отказался экзаменовать, но еще подал в совет университета докладную записку с особым мнением, обвиняя физико-математическое отделение и ректора в противозаконных действиях.

Совет университета потребовал от Остроградского письменного объяснения. Это объяснение было достаточным, и Остроградского допустили к экзамену по философии, который был сдан благополучно, и Совет (30 апреля 1821 года) признал Остроградского достойным степени кандидата.

Дело о выдаче диплома Остроградскому было передано на утверждение к попечителю, а к делу приложили особое мнение профессора Дудровича.

В конечном итоге, Остроградского обвинили в вольнодумстве, во введении университетского начальства в заблуждение, и Остроградского решили наказать не только не дав ему аттестата на звание кандидата, но и анулировать студенческий аттестат, выданный в 1818 году.

После четырех лет, проведенных в университете, Остроградский остался без документов об его окончании, несмотря на трехкратную удачную сдачу всех требующихся для этого экзаменов. Лишение аттестата и незаслуженное глумление, которое испытал Остроградский при этом, не сломили его воли, а скорее побудили к дальнейшей, более настойчивой работе.

В 1822 году Остроградский уехал во Францию, где в то время работали замечательные ученые — Лаплас, Пуассон, Коши, Фурье и другие. Остроградский посещал лекции знаменитых математиков, а затем попытался самостоятельно решать стоящие перед наукой вопросы. В ноябре 1826 года он представил Парижской Академии свою первую самостоятельную работу “Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне”, которая была рекомендована к печати, и напечатана в трудах Академии в 1832 году.

Пребывая в Париже, Остроградский занимал должность преподавателя математики в одном из колледжей, зарабатывая тем самым средства на существование.

В конце 1827 года Остроградский покинул Париж, и с этого момента началась его интенсивная научная и педагогическая деятельность во многих учебных заведениях Петербурга. Так как он не имел диплома об окончании университета, то у него были затруднения при получении права на жительство в Петербурге. В это время и пригодился документ о присвоении ему чина коллежского регистратора.

Ряд прекрасных работ, представленных Академии наук в Петербурге в течение 1828 года, и репутация талантливого ученого, приобретенная Остроградским в Париже и быстро донесшаяся до России, принесли ему заслуженную известность. 17 декабря 1828 года Остроградский был избран адъюнктом Академии наук. К этому времени в изданиях Академии были уже напечатаны три его статьи, относящиеся к задачам математической физики и математического анализа. В следующем году он снова напечатал в изданиях Анкадемии три работы - по механике, теории теплоты и об интегрировании уравнений теории упругости. В том же году он начал чтение в Академии курса небесной механики. Лекции продолжались с ноября 1829 года по март 1839 года и собрали невиданное по тому времени число слушателей — до 30.

19 августа 1830 года произошло радостное для Остроградского событие — он был избран экстраординарным академиком. Через год — 21 декабря 1831 года его избрали ординарным академиком по прикладной матаматике.

В жизни академии наук Остроградский принял самое деятельное и разносторонее участие: он давал отзывы на представлявшиеся в Академию исследования, участвовал в работах разнообразных комиссий, выступал на конференциях Академии с многочисленными научными докладами.

Многие учебные заведения Петербурга стремились иметь Остроградского своим профессором. 1 октября 1828 года началась педагогическая деятельность Михаила Васильевича Остроградского. Несомненно, что перегрузка педагогической деятельностью, необходимость читать много лекций ради заработка отвлекали Остроградского от серьезной научной работы. И нет сомнений в том, что будь Остроградский лучше материально обеспечен, он дал бы науке несравненно больше.

Имеются сведения, что Остроградский на свои средства издавал работы знаменитых математиков Эйлера, Гаусса и других. При этих условиях получаемых Остроградским средств было далеко недостаточно и он постоянно испытывал нужду в деньгах.

В 1834 году Остроградский был избран членом Американской Академии наук, в 1841 году — членом Туринской Академии, в 1853 году — членом Римской Академии Линчей и в 1856 году — членом-корреспондентом Парижской Академии.

Омский государственный университет.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью обеспечения условий, способствующих сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения лучших традиций и высокого качества математического образования в России. Фонд поддерживает образовательные инициативы, способствующие поставленной цели. Особое внимание оказывает образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд издает научную, учебную и методическую литературу в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2006 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2006 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810138120100114 в Московском банке СБ РФ, Лефортовском отделении №6901/019 г. Москвы, к/с 30101810400000000225, БИК 044525225

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

V. Drozdov. 6 Ways to Derive a Formula of Complex Radical **2**

A classical formula of complex radical introduced by Newton is derived in different ways, algebraic, geometric, trigonometric.

A. Myakishev. On Some Straight Lines in a Quadrilateral **7**

Some straight lines in a quadrilateral are considered similar to the well-known remarkable lines in a triangle.

S. Kalinin. On Caratheodory Differentiability **18**

The basic notions and properties of differentiability in terms of Caratheodory differentiability are considered.

A. Lyakhov. Informational Analysis of Gambling **32**

A well-known card play is analyzed from the viewpoint of the theory of probability and information.

A. Mitrokhin. On Mathematics of Scalar Magnitudes **42**

A critical survey of contemporary teaching of mathematics which exclude scalar magnitudes, important to technical and metrology applications, from teaching.

V. Vavilov. On Scientific Research of the Students of Kolmogorov School **52**

Some examples of research problems and achievements of the students of Kolmogorov school in problem solving are considered.

V. Vavilov, M. Koloskova. Lessons in a Flowering Garden **63**

About lessons on geometry held in open air in the Kolmogorov school.

V. Vavilov, A. Chasovskih. Kolmogorov School Readings **70**

About the 6-th Kolmogorov School Readings held in May, 2006.

On the 205-th Anniversary of M. Ostrogradsky **74**

A short biography of the outstanding Russian Mathematician.