ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двенадцатый

№ 3 (47)

июль – сентябрь 2008 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3 (47), 2008 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2008 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2008 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 3,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (47), июль – сентябрь 2008 г.

Содержание

Из воспоминаний о Льве Семеновиче Понтрягине

А. И. Понтрягина

3 сентября 2008 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося русского советского математика, академика Льва Семеновича Понтрягина. Этому событию была посвящена представительная международная математическая конференция, охватившая те разделы математики, в которые он внес значительный вклад. Материалы конференции можно найти по адресу http://pont2008.cs.msu.ru

Мы публикуем часть воспоминаний вдовы Л.С.Понтрягина Александры Игнатьевны Понтрягиной, относящуюся непосредственно к жизни и деятельности Льва Семеновича. Приводим также список публикаций о Л.С.Понтрягине в журнале “Математическое образование”.

Не вокруг творцов нового шума —
вокруг творцов новых ценностей
вращается мир; он вращается неслышно.

Ницше

Мой муж, известный в мире математик, Лауреат Сталинской премии, Лауреат Ленинской премии, Лауреат Государственных премий, Международной премии имени Лобачевского, кавалер 4-х орденов Ленина, Ордена Октябрьской Революции, Ордена Трудового Красного Знамени, Герой Социалистического Труда, академик Академии Наук Советского Союза, почетный член Международной ассоциации Астронавтов и некоторых других зарубежных Академий.

Я не стала бы столь нескромно начинать свои воспоминания о дорогом мне человеке, не будь на то особые, я бы сказала, чрезвычайные, обстоятельства.

Лев Семенович Понтрягин родился 3 сентября 1908 г. в Москве. Родители его принадлежали к мещанскому сословию. Отец — Семен Акимович — работал счетоводом на заводе Гужона, который после революции стал называться заводом “Серп и молот”. Мать Татьяна Андреевна — портниха высокого класса. Она обслуживала московскую интеллигенцию у них на дому. Оба они из крестьян: Семен Акимович — Орловской губернии, Татьяна Андреевна — Ярославской. Он у них был единственный сын. Отец Льва Семеновича по убеждению был толстовец. В 1908 г., когда чуть ли не весь мир отмечал восьмидесятилетие Льва Николаевича Толстого, у них родился сын. Вот сына своего Семен Акимович и назвал в честь своего кумира — Львом. Мальчику не было еще 6-и лет, когда отца забрали на войну в 1914 г. с первых дней начала ее. И в первые же дни, армия генерала Самсонова была разгромлена, он попал в плен к немцам, где провел 4 года. Из плена отец вернулся больным — после ранения в голову он страдал травматической эпилепсией.

И вот среди голода, разрухи, кровавой Революции и последующей Гражданской войны на семью Понтрягиных обрушилось страшное несчастье. Сын, единственный сын, потерял зрение!... Полностью. Навсегда. Казалось, гибнет Россия; гибнет мечта дать сыну высшее образование.

Способный к всяким техническим поделкам, Лева взялся починить примус в присутствии матери. Судьба вмиг изменила все! Взрыв и колоссальные ожоги груди, левой руки, обгорели брови. Лицо не пострадало. Полгода в больнице... Врачи боролись за жизнь. На глаза не обратили должного внимания.

Перед мальчиком встали тысячи роковых вопросов, тысячи задач сиюминутных, мелких и больших: как жить, что делать, какую профессию выбрать, как преодолеть то страшное, что его постигло. Надо принять решение, сделать выбор: школа, которую он любил и был лучшим учеником, где его друзья, товарищи, его учителя, или жизнь слепого с его жалкой участью... А мечта о высшем образовании?! После 2-х недель в школе для слепых он сказал родителям: "Здесь я не останусь! Пойду в свою школу, в свой класс!"

И пошел. Заново завоевал свое место. До этого он 5 лет проучился здоровым мальчиком, был всегда вожаком и кумиром среди товарищей и лучшим учеником в классе. Однажды учитель по математике Горохов А.А. поставил ему пятерку с крестом, причем крест красиво нарисовал в виде Георгиевского креста.

Отчетливо проявлялись и другие черты у этого мальчика.

Как-то на прогулке в Коктебеле в 70-х годах Лева рассказал мне эпизод из своего детства. В школе (до Рокового часа) он слыл атаманом среди ребят. И "в сражениях" всегда побеждал. Это ему нравилось. Противники всегда были биты. Он всех держал в страхе. Я спросила:

— Долго ли это продолжалось?

Он подумав, сказал:

— Года два, может быть дольше.

— А потом?

— Потом ребята собрались все вместе и здорово меня отколотили.

— Ну а дальше?

— Дальше все мы стали на равных.

Помню, я ему тогда сказала: "Когда-нибудь теперь тебя тоже отколотят. Соберутся вместе и отколотят!" Так оно и произошло...

Осенью 3 сентября 1921 г. ему исполнилось только что 13 лет, он перешел в 6-й класс. А судьба его уже отметила своим страшным перстом. Когда это произошло? в каком году? — Ни он, ни его матушка Татьяна Андреевна не могли назвать не только день, даже год! Все вышибло! Осталась тьма, которая заслонила собою все. Остался хаос. (Уже после смерти Льва Семеновича путем сопоставления разных фактов его жизни и некоторых его воспоминаний я пришла к мысли, что трагедия пришла осенью 1921 года).

И школа Левочку приняла. Он вернулся к своим друзьям, к своим учителям (дай Бог им Царствие Небесное). Он догнал школьную программу, вскоре опередил ее. Снова стал лучшим учеником уже не только по своему классу, но по всему выпуску девятилетки за 1925 год. В том году Районным Отделом школьного образования было выделено 2 путевки на весь выпуск школы. Эти путевки давали возможность держать вступительные экзамены поступающим в ВУЗы. Путевки эти доставались лучшим ученикам. Такими лучшими в этом выпуске были Лева Понтрягин и его друг Коля Карилов. И так Л.Понтрягин стал студентом мехмата Московского университета. В своем "Жизнеописании"[1] Лев Семенович подробно описал свое детство, учебу в школе, вступительные экзамены на мехмат и всю свою жизнь.

Воспоминания Льва Семеновича Понтрягина — книга о себе, о "мелочах" своей жизни, и не только о себе. Мне кажется, здесь хорошо отражено время. Документами Л.С. не пользовался. Дневников, конечно, он не вел. Не до дневников было. Полагался только на свою цепкую память, не имеющую аналогов. Этот дар природы он использовал в своей жизни наилучшим образом — отдал его математике.

Писал он свое "Жизнеописание" зимой 1982-1983 гг. после очень тяжелой операции, произведенной в марте 1982 г. Чудом тогда мне удалось спасти ему жизнь. События описаны ярко, как будто только что происходили. Обычно возрасту свойственны переоценка событий, фактов, но у Л.С.Понтрягина этого не замечаешь — Время не перепутано... Отношение автора к событиям

[1]Здесь и далее идет речь о полном варианте "Жизнеописания" в отличие от сокращенного варианта, опубликованного в журнале "Успехи математических наук", т.33, вып.6 (204), 1978 г.

такое же, каким оно было в те далекие времена. Никакой корректировки своего отношения к людям, событиям; Лев Семенович в своих записках так же, как в жизни талантлив, правдив, честен и открыт.

Он достиг профессиональных высот, которые трудно себе представить здоровому человеку. Достиг это благодаря своему **подвижническому** образу жизни на протяжении 67 лет! Он прожил 80 лет (зрение потерял в 13 лет), совершая постоянный, упорный, труд, который был для него и мукой и радостью.

Он достиг высшей степени духовного развития, т.е. достиг **смирения**, христианского смирения путем упорной самодисциплины. Его смирение — это труд каторжный, но светлый, нужный не только ему, чтобы как-то заработать на жизнь, а нужный народу, Родине. Он был щедрым человеком; его суть: быть полезным другому.

"Жизнь была наполнена трудом,
страстью, мыслью, волей, кровью,
сердцем, огнем, мукой, совестью и
каким-то роком пламенным".

Я не могу вспомнить, кому принадлежат эти строки, но они хорошо отражают суть натуры Л.С.Понтрягина. Он всю жизнь жил с открытой раной, и она его не покидала ни на одно мгновение. Это был труженик и страдалец. Любовь к жизни, к людям, к радостям земным на какие-то мгновения возможно заслоняли душевную боль и страдания, как бы уходили прочь от него. Надолго ли? Людям этого не понять. Они видели в нем труженика, борца за справедливость, видели ученого, замечательного математика и т.п. И, по моему наблюдению, не видели его страданий. В этом его счастье. В этом его заслуга. Он победил болезнь, в конце концов она добавила ему мужества, твердости характера, философского ума, мудрости!

И свою жизнь горькую, темную, страшную, одинокую надо было претворить в гармонию. И он это сделал. Он обрел духовное равновесие. Его душа была горячая, нежная, деятельная, крепко любящая дело, в быту Лев Семенович готов был многое терпеть. После заседаний, собраний иногда врывался в дом чрезвычайно возбужденным, бледным от эмоций и усталости; тут же в прихожей, как только уйдет водитель, который всегда сопровождал Льва Семеновича до квартиры (если не было меня рядом), — начинал рассказывать мне, что там у них было на Ученом Совете, или на заседании Отделения математики, или какой-нибудь Комиссии редколлегии и т.п., сбрасывал пальто на вешалку, пиджак, уличную обувь, мыл руки, при этом быстро бегал по квартире, рассказывал. Я внимательно слушала; и обсуждение проведенного дня продолжалось. При этом я незаметно увлекала мужа в его комнату, усаживались на диван. Эмоции стихали довольно быстро. Я уходила накрывать на стол. А он включал музыку, или слушал стихи в записях на пленках, кассетах, пластинках, кстати — записывал он сам на магнитофон, кассетник с радио, тогда много передавалось хорошей симфонической музыки, стихов, спектаклей по радио.

За столом мы были уже другими. Смеялись над тем (или кем), что только что было невыносимо. Ели с удовольствием. У Льва Семеновича всегда был великолепный аппетит. И в еде он не был привередлив. Любимым его ругательством было "прохвост". Прохвост (такой-то академик, или кто другой) протаскивает недостойную личность в академики или членкоры. Другой "прохвост" или тот же самый — что бывает чаще — поддерживает плохую книгу или плохой учебник по математике, либо поддерживает "переброску рек". Да мало ли что бывает в жизни любого общества. Льва Семеновича жизнь его института, где он проработал 54 года подряд, интересовала в полном ее объеме. Членом АН СССР он состоял без одного года 50 лет. Главное, что его приводило в состояние раздражения, гнева и даже ярости — бессовестность отдельных лиц, отсутствие долга, чести, отсутствие ответственности.

Предостаточно было личных переживаний и огорчений у Льва Семеновича. Но пройти мимо проблем государственного значения он не мог! Общественные интересы он ставил на первое место, на второе — свои личные. Он страдал душой, ночами не спал, обдумывая, как исправить дело, кого привлечь к этому, какое начальство поймет пагубность вздорных идей. И опять бессонница, бессонница...

Богу угодно было, чтобы я стала женой этого человека. Однажды, в самом начале моего замужества, жена академика Скрябина Константина Ивановича, очень старая женщина, спросила меня: достаточно ли у меня сил нести эту столь великую честь, как и тяжелую обязанность и ответственность — быть женой Понтрягина? Слова эти, сказанные 40 лет тому назад, я помню до сих пор. Смутно тогда я это все понимала. "Великая честь, тяжелая обязанность..." Но уже тогда я знала, вернее, чувствовала, что моя глубокая, сокрытая от всех мечта женщины — встретить и посвятить себя человеку достойному — в конце концов осуществилась. Никогда бы я не поверила ни астрологам, никаким гадалкам, что стану женой и глубоко полюблю слепого человека. Я также не поверила бы, что я стану женой великого ученого, академика. А уж сочетание того и другого в одном человеке — просто невероятно, фантастика! Жизнь готовила меня к другому, прежде всего к умению трудиться и быть терпеливой. По-видимому, это разглядел во мне своим внутренним оком Лев Семенович, этот величайший на земле труженик.

Я любила свою профессию, у меня прекрасное (завидное для многих) место работы, готовила кандидатскую диссертацию и вот ... все перевернулось.

"Есть любовь — милосердие, есть любовь — восхищение" — как говорил русский философ Константин Леонов. Моя любовь к моему мужу — восхищение, не померкнувшее до конца его жизни и после нее. Она у меня единственная, от моей натуры, которая дана мне Творцом. Его ясный, острый ум, вера в то, что он делает, в то, что он может сделать, смелость, четкость мысли, его всегда теплые необыкновенно добрые и сильные, какие-то ласковые руки постоянно восхищали меня. Привлекателен и нравственный облик Льва Семеновича. Его честность, правдивость обезоруживали, а порой пугали людей. Если внимательно прочесть "Жизнеописание" — можно понять, чего пугаться. Иногда я наблюдала в нем нечто почти демоническое: наряду с прекрасным, справедливым, христианским милосердием могло произойти вот-вот что-то страшное, с моей точки зрения недопустимое, что могло бы заставить меня разочароваться в нем (это меня пугало больше всего!), но проходят минуты, иногда часы, и даже мучительные дни... и этого не происходит, куда-то все черное уходило. Моему сердцу опять легко, легко. Я рада прильнуть к нему, все простить и забыть.

Следует заметить — гнев его вспыхивал только по отношению к тому или тому лицу или группе людей, действия которых действительно заслуживали наказания или, по крайне мере, осуждения. Гнев Понтрягина был страшен, но справедлив. И люди, которым приходилось испытывать гнев Понтрягина на себе, трепетали, но понимали, что он прав! Это вызывало уважение, окружало имя его тайной и безупречным авторитетом. Воля духа на протяжении всей его долгой жизни переступала пределы возможного, пределы человеческого. Его обожали, ненавидели и боялись. Его имя, вот прошло уже 10 лет со дня его смерти, до сих пор некоторым людям не дает покоя.

"Можно было бы так нагло не лгать" — часто слышала я эти слова в адрес тому, что говорилось по радио, телевидению, писалось в газетах по поводу наших достижений и проч. Эти слова Льва Семеновича я хотела бы теперь адресовать тем авторам статей с небылицами в адрес Понтрягина.

Лев Семенович ценил свободу. Он ценил, гордился своим институтом, ценил его администрацию за то, что в институте можно было свободно располагать своим временем, заниматься математикой в любое время, когда он захочет и когда может. Для творческого работника "иметь свободный досуг", как он говорил, не роскошь, а необходимость. Однако его внутренняя дисциплина духа, его внутренняя свобода с гневом осудили бы ту теперешнею свободу, которая отрицает совесть, законы, обязанности человека (о правах человека теперь говорят много, часто и даже слишком часто, забывая упомянуть об обязанностях человека). Осудил бы с гневом свободу, отрицающую авторитеты, иерархию, свободу, ведущую к убийствам и насилию.

Более 50 лет математическим институтом им. Стеклова АН СССР руководил академик Иван Матвеевич Виноградов. Он пользовался безупречным авторитетом. Сильный, властный, не имеющий других интересов, кроме как интересы института, интересы Академии (он не имел семьи, не был женат), Иван Матвеевич собрал в свой институт лучшие силы. Следует отметить, что "Стекловка", как обычно называют свой институт математики (Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР) был в то время и остается теперь самым малочисленным по кадровому составу в системе Академии наук.

Лев Семенович и Иван Матвеевич — два эти человека играли огромную роль в математической жизни страны и в судьбах некоторых людей. Особенно Иван Матвеевич.

Академик И.М.Виноградов — легендарная личность. Прожил большую жизнь. Оставил глубокий след в науке, не меньший — в культурной и общественной жизни математиков. Его знал весь математический мир. Его хорошо знали наши верховные власти. Они к нему прислушивались и порой даже слушались. С ним считались. Слово Виноградова было весомо. Он любил почести. Он желал, чтобы его называли первым математиком. И его называли так. И писали о нем так, как он хотел. Он прожил более 90 лет. Обладал отменным здоровьем. Только последние год-два стал сдавать. На его родине в городе Великие Луки Тверской губернии открыт музей И.М.Виноградова.

С Иваном Матвеевичем, так же как и с Львом Семеновичем, я познакомилась в 1958 году. День знакомства с Львом Семеновичем помню хорошо — 15 июня! Сразу он мне показался интересным человеком, хотя выглядел бледным, нездоровым, в этом 58 году ему должно было исполниться 50 лет. Это я знала по истории болезни, с которой я познакомилась заранее, готовясь поехать в Абрамцево на один месяц — июнь. С некоторыми обитателями этого поселка я заранее знакомилась таким образом, чтобы не оказаться беспомощной в каких-либо сложных ситуациях. Чем больше врач знает о больном, тем больше шансов у врача помочь больному.

Поселок для меня в ту пору казался загадочным и привлекательным уже по тому только, что он был "академическим" да еще "Абрамцево". Больше, конечно, меня интересовало "Абрамцево" — это поэтическое гнездо русской культуры 19 века. А цель поездки в академический дачный поселок Абрамцево весьма прозаична. Тогда врачи мало зарабатывали. Работая в терапевтической клинике научно-исследовательского института им. Склифосовского, я использовала свой отпуск — июнь месяц — для подработки. Так поступали многие врачи.

Везла меня туда академическая "Волга" в чудесный теплый солнечный день — 31 мая. Ехали "с ветерком", быстро; меня сопровождала старшая сестра (кстати скажу — полновластная хозяйка!) спецполиклиники Любовь Даниловна, чтобы устроить меня, кое-что показать, рассказать, так как я не была знакома ни с одним академиком, ни с одним членкором. Хотя я уже работала по совместительству более 4-х лет в этой поликлинике, обслуживая докторов наук. Ранги в АН СССР соблюдались строго. Хозяйственного устройства спец. поликлиники я не знала. Лечила всех больных подряд и все.

На душе было радостно, спокойно. Поселок чистый, весь в зелени, дорожки бетонированы, обочины покрыты чудесным травяным ковром, не то, что моя улица Петровка, где я тогда жила. Птиц уйма, комаров тоже. Домик для медиков оказался очаровательным. С двумя крыльцами — на улицу и в лес. Никаких заборов, прямо в лес. В доме погреб глубиной более 3 метров доверху заполнен водой. Сыро. Но меня это не смущало. Можно было потопить печь. Лес рядом. Дрова могу добыть.

На второй день моего приезда к нам (я жила с медсестрой Ирой) пришли два весьма поразившие меня человека: один высокий, сильный пожилой мужчина, другой низкий, плотный, с широкими крутыми плечами, сутулый, с большой круглой, как шар, и абсолютно лысой головой — ни единого волоска, с проницательными глубоко сидящими, сверлящими собеседника серыми глазами. Тоже весьма пожилой. Одеты почти одинаково: по-деревенски — резиновые сапоги, телогрейки. Попытка понять, кто эти люди, была тщетна. Зачем они пожаловали в медпункт? Ясно, что не за медицинской помощью. Это я поняла сразу. Дело было к вечеру. Погода изменилась. Надвигался дождь и эти двое... Тревожно...

— Здравствуйте!

— Здравствуйте, — говорю.

— Вы врач?

— Да, я врач.

— Как Вы устроились?

— Хорошо.

— Дрова есть?

— Дров нет.

Маленький говорит большому: завезти дров врачу. Завтра же!

— Ну, а вода в погребе есть?

— Да, есть. Вода глубокая.

Погреб я уже успела обследовать, хотела им воспользоваться. Холодильников у нас в ту пору не было.

Он приказал выкачать воду завтра же! Я никак не могла понять, кто эти люди и почему они так странно со мной шутят. Тем более, что тут же они между собой стали бороться. Низкий, плотный сразу же скрутил и уложил большого на пол, прижал его коленкой. Я немного растерялась. На моем лице, по-видимому, что-то отразилось, и Ира, заметив это, шепнула мне: “Это академик Виноградов и управляющий поселком. Не бойтесь”.

Таково было мое первое знакомство с академиком Иваном Матвеевичем Виноградовым.

Недели через две я должна была измерить ему кровяное давление. Пришла к нему на дачу, а он, ничего мне не говоря, к моему изумлению и страху даже, вышел на двор, где стоял автомобиль “Волга”, взял и поднял его за передний бампер!

— Вот я каков!

Тут же рассказал мне, как он, когда был помоложе, поднимал рояль на спине. А у себя в комнате, когда я пришла, перед тем как поднять автомобиль, Иван Матвеевич сидел старееньким, маленьким старичком, закутанным старым ватным одеялом. И такая силища! И такое нежелание принять старость и болезни восхитили меня. Но свободно, непринужденно я с ним не чувствовала себя (не то, что с Львом Семеновичем). Эти проницательные, колющие глаза, почти не мигающие. Он немногословен. В разговоре он неожиданно, что-нибудь такое скажет — как бы невпопад. Это изумляло, ошеломляло собеседника. Я его побаивалась, думаю, не я одна.

Несмотря на свою богатырскую силу, все же он однажды жаловался Льву Семеновичу, что в академическом ателье сшили ему пальто весом в 8 кг! Иван Матвеевич мог в нем только стоять, что он и делал, отдыхая зимой в Узком. Постарались для академика.

Прием “укладывания” человека на пол или на диван и придавливания его коленкой Иван Матвеевич использовал не только в дружеской борьбе, но и тогда, когда собеседник не соглашался принять указания его по очень серьезным вопросам. Причем шли в ход не только коленки, но и кулаки. Об этом (с названием “пострадавшего”) нам с Львом Семеновичем рассказал академик Михаил Алексеевич Лаврентьев, когда мы вместе летели в самолете из Ванкувера в Москву, где в 1974 году был очередной международный Конгресс математиков. По словам Михаила Алексеевича, этот метод давления применялся к некоторым весьма почтенным и по возрасту, и по положению людям и даже академикам.

Прошло 14 лет. Однажды Лев Семенович пришел из института, и торжественно в шутку объявил, что он принес мне подарок. Подарки я от него получала редко, в силу обстоятельств, поэтому я с любопытством ждала, что же это за подарок, тем более неожиданный?. Он вынимает из бокового кармана пиджака книжечку, — говорит — это от Ивана Матвеевича “Метод тригонометрических сумм в теории чисел”(!) с надписью

Глубокоуважаемой
Александре Игнатьевне
Понтрягиной
от автора
16, III, 1972.
И.М.Виноградов.

Надпись, старательно выведенная детским крупным почерком, и подпись фамилии совершенно детская с завитушками смутили меня. Я сказала мужу — не шутка ли это, кто сделал надпись? Он сказал — нет! Эта надпись действительно сделана самим Виноградовым.

Итак, 1958 год стал переломом великим в моей жизни, о чем я тогда и не подозревала. Этим я обязана своей профессии. Врач, общаясь с людьми, учится у них многому, а также совершенствует свои знания; учится у них жизни, пониманию людей. Учится читать души, помыслы, оценивать поступки людей, ситуации. Как правило, люди идут к врачу с открытым сердцем и чистой душой. Это большая жизненная школа. Боль, обиду, тоску, опасение не только за свое здоровье, но за близких ему людей — все это изливают врачу.

С некоторым жизненным багажом я пришла совершенно из другой жизни сразу в большое общество математиков. Людей своеобразно мыслящих, порой очень темпераментных, даже резких. Я смотрела на них широко открытыми глазами и с большим интересом. На каждого, ибо каждый из них — это тип. Это личность, великая или поменьше. Все последующие 40 лет я жила и живу теперь в среде математиков. И давно пришла к мысли, что это лучшее профессиональное сообщество. Я счастливый человек, получивший такой жребий в жизни.

Большой милостью судьбы, выпавшей мне на долю, оказалось также знакомство с Львом Семеновичем, перешедшее в дружбу, а затем в крепкую любовь и преданность друг другу.

Мне пришлось встречаться и, в той или иной степени, общаться с замечательными людьми. В моей роли я испытывала большие трудности при общении, но как-то справлялась. Мстислав Всеволодович Келдыш. Михаил Алексеевич Лаврентьев, Игорь Ростиславович Шафаревич, Николай Николаевич Боголюбов, Андрей Николаевич Тихонов, Андрей Николаевич Колмогоров, Павел Сергеевич Александров — какие имена! Какие люди! Они любили свое дело, любили Родину, служили ей. Гордость и слава русской математики. Гордость и слава русской культуры. И все это было недавно. Была Великая Наука, Великая страна...

В заграничных поездках с Львом Семеновичем на протяжении 20 лет в разных странах Европы и Америки я часто могла слышать такие слова: “Русская математика — лучшая математика в мире!” Говорили это не только друзья, но и политические противники Советских математиков. Например, профессор Липман Берс и др.

О том, что русская математическая школа высоко ценится в мире, я убедилась не только слыша лестные слова зарубежных математиков. Прием моего мужа в США в 1964 и 1969 гг. я бы назвала (прошу прощения за высокое слово) триумфальным. В аэропорту нас встречал кто-нибудь обычно у трапа. Не помню, в каком году, мы прилетели в Нью-Йорк, и профессор Ласаль тут же сразу нас повез (самолетом) в Детройт, где в аэропорту нас радостно встретила сразу целая группа математиков и какие-то другие лица с поцелуями, цветами и пр. и на нескольких автомобилях все мы эскортом отправились в небольшой городок Эн-Арбор на конференцию. Для меня особенно было радостно то, что Евгения Фроловича Мищенко и Реваза Валериановича Гамкрелидзе я увидела среди встречающих нас. Они были уже там, конференция уже началась до нашего приезда.

Приглашений на доклады в различные научные центры, университеты было так много, что невозможно было физически всех удовлетворить. Особенно непривычны и утомительны для нас были ежедневные, а то и два раза в день приглашения на обеды, парти и т.д. На несколько дней (2-3) отдохнуть от столь непривычного темпа жизни мы были приглашены в Рокфеллер-Центр, где я была потрясена роскошью апартаментов и всего интерьера, где нам удалось побывать.

Отказаться от приглашений посетить дом профессора Морса, профессора Лефшеца, профессора Куранта было невозможно. Морс и Лефшец жили в Принстоне. У профессора Морса большой хороший дом, садик, большая семья, много детей, все они взрослые. Сам Морс был уже глубоко в преклонном возрасте, однако подвижен и очень был любезен. Жена намного моложе его. Меня в доме Морса постигли две неудачи. Главная — кто-то из гостей нечаянно сломал мои очки, которые я по небрежности положила на стул. Эта беда была быстро исправлена. Сам Морс на своем автомобиле отвез меня в аптеку, где я купила новые очки. А вторая — после обеда в русском стиле (как нам специально было подчеркнуто) был подан кофе в гостиную, и профессор Морс, подавая мне чашку кофе со сливками нетвердой рукой пролил его на мой единственный выходной костюм (причем очень хороший). Американская химчистка на следующий день все исправила. Все эти мелочи были ничто — они только развлекли нас — по сравнению с тем теплом, которое было проявлено к нам в доме Морса. На этот обед, данный в нашу честь, были приглашены ученики Льва Семеновича Р.В.Гамкрелидзе и Е.Ф.Мищенко, а также профессор С.А.Лефшец с женой. Насколько мы могли понять, у Морса с Лефшецем были сложные отношения. И появление Лефшеца в доме Морса было возможно только благодаря присутствию Льва Семеновича.

У Понтрягина с Лефшецем была старинная дружба с начала 30-х годов, с первого приезда Лефшеца в Москву. Тогда Лев Семенович был еще аспирантом, а Соломон Александрович Лефшец — известным математиком. Однако работы Понтрягина он уже знал и высоко ценил. Он ровно на 20 лет старше Льва Семеновича. У них даже дни рождения совпадали — 3 сентября. Лефшец несколько раз приезжал в Москву и всякий раз тепло встречался с Львом Семеновичем. Он хорошо говорил по-русски. Он родился в России; его родители покинули Россию, когда он был грудным ребенком, а потому русский язык он изучал, как иностранный. Лефшец тоже в жизни пережил большую трагедию. Он по образованию инженер. На заводе ему в аварии оторвало обе кисти рук. Он пользовался протезами весьма успешно; мог писать. Всегда носил перчатки. У меня хранится конверт с нашим московским адресом, написанный рукой Лефшеца. Математикой стал заниматься после этого несчастья. Встречи с С.А.Левшецом при поездках в США очень согревали душу Льва Семеновича. Однажды в отеле на 5-ой Авеню, где мы жили в Нью-Йорке, он увидел в моей сумочке 100 долларов и с ужасом сказал:

— Шурочка, этого делать нельзя! Вы не в России. Вас могут убить. — Мы с мужем были удивлены.

— Как же мне быть? — спросила я.

— Надо открыть счет в банке и расплачиваться чеками. С собой носить только несколько долларов на обед, продукты и т.д.

Что поделаешь — Америка! Счет был открыт. Однажды я брала в банке очередную порцию денег, и очень старый человек с красивой сединой, высоко роста, крепкого сложения — типичный аристократ — обратился ко мне с особым чувством почтения и интереса, сказал по-русски:

— У Вас Советский паспорт! Разрешите мне хотя бы подержать в руках русский паспорт. Я никогда его не видел.

И он трепетно взял в свои руки мой паспорт. Оказалось, он русский эмигрант первой волны. Мне трудно передать его чувства, но они были очень сильные и доброжелательные ко мне. Беседа была краткой. Я спешила домой. На прощание он крепко пожал мою руку. Встреча эта была в Пало-Алто, штат Калифорния, где Лев Семенович читал лекции в течение 2-х месяцев в Стэнфордском университете.

Запомнился мне день с ночевкой, проведенной на даче у профессора Куранта. Там у него тоже большой дом. Из Нью-Йорка к Куранту вез нас его зять — профессор Мозер; ехали мы мучительно долго, скорость не превышала 15-20 км/час, через весь город, где были страшные пробки.

Вечером Куранты пригласили музыкантов, был устроен небольшой концерт. Ужином их не угощали. Ужин подавала миссис Курант, дама преклонного возраста. Курант тоже мне казался тогда очень старым. Стоя на верхней площадке лестницы, я с тревогой смотрела, как он, старался помочь Льву Семеновичу поднять по узкой лестнице на 2-й этаж магнитофон (только что купленный Понтрягиным "Грюндик"): как бы они все вместе не покатились вниз... Тут все обошлось благополучно.

Гостеприимство американцев необыкновенное. Его можно сравнить с русским и отчасти с грузинским (там оно еще большее).

Так как Понтрягин думал, прежде всего, чтобы хорошо прочесть лекцию и быть в должной форме не на приеме, а на лекции или докладе, то он стал отказываться от приглашений. Меня приемы и обеды тоже чрезвычайно утомляли. Однажды я Лефшецу сказала: "Я не могу идти на обед, у меня больше нет сил!" — Он говорит: "Шура, в вашу честь устраивается прием у профессора такого-то и такого-то, как же можно отказаться?" Соломон Александрович рассказывал нам, что американские математики ссорились между собой, у кого же в тот или иной день будет обедать Л.С.Понтрягин.

Много общались с профессором Липманом Берсом. Он и его жена хорошо говорят по-русски. Они приехали в США из Прибалтики в 1939 г. С ним всегда было интересно. Он хорошо знал русскую классическую литературу. В 70-х годах Берс стал раздражителен. Его беспокоили наши диссиденты. Он злился на Льва Семеновича, что тот не подписывает писем в защиту бунтарей, и вообще Берс с семидесятых годов затаил недобрые чувства к Понтрягину. Разные у них были жизненные позиции. Понтрягина тоже раздражало вмешательство Берса и некоторых других математиков в наши российские дела. Свою точку зрения, как всегда и во всем, Л.С.Понтрягин излагал им четко и ясно. Последняя наша встреча с Липманом Берсом была в 1978 г. в Хельсинки на Конгрессе. Здесь в нашем номере отеля их беседа носила крайне острый характер, так что пришлось вмешаться мне во избежание худшего... Позиция Берса — разрушить нашу государственную систему и строить все заново на основе свобод. Лев Семенович думал иначе: надо улучшать имеющуюся систему путем постепенного последовательного пересмотра каждого из ее звеньев.

— Россия не должна еще раз пережить 17-й год!

— Надо добиваться от людей добросовестного отношения к труду. Труд должен приносить радость. Хороший труд, хорошая оплата его и т.д.

Еще задолго до этих раздоров с Берсом Льва Семеновича смущали неправдоподобно низкие цены на предметы домашнего обихода, низкая оплата труда, цены за коммунальные услуги, квартиру и т.д. У него даже была заветная мечта — построить математическую теорию, подобно принципу максимума, которая помогла бы пересмотреть систему ценообразования в нашем государстве. Возраст, состояние здоровья, отсутствие интереса к данной теме со стороны более молодых математиков, оставили эту мечту неосуществленной. Кроме того, накатилось горячее желание улучшить школьное образование, а тут еще появилась проблема "переброски рек", которая окончательно поставила точку на этой задаче.

Каждый раз, когда я покупала какой-нибудь молоток, плоскогубцы и т.д. он обязательно спросит — сколько стоит эта вещь и, услышав ответ, недоуменно мотал головой: почему такая дешевизна? Как Герой Социалистического Труда он имел льготы на оплату квартиры, но никогда ими не пользовался из чисто моральных соображений ...

* * *

Труды Л.С.Понтрягина опередили свое время как минимум на полвека. Это видно из того, как лавинообразно нарастает количество работ, посвященных изучению математических объектов, введенных в работах Л.С.Понтрягина. Существует график, использующий анализ рефератов, помещенных в журнале "Mathematical Rewiev" за 1940-1997 гг.[2] Из этого графика видно, что количество публикаций, использующих идеи и математические конструкции Понтрягина, сначала росло не слишком быстро и составляло несколько десятков за пятилетие. И вдруг, начиная с 80-х годов, происходит взрывное увеличение числа таких работ, достигая пятисот работ за пятилетие. Этот рост продолжается до сих пор. Следует отметить, что Понтрягин уже в 1940 году получил Сталинскую премию за работу в области топологии.

Я не касаюсь научной биографии моего мужа. Отмечу лишь, деятельность Л.С.Понтрягина исключительна по разнообразию и широте охвата проблем, по силе полученных результатов, по влиянию, которое она оказала на развитие математики, создание ее новых разделов. Это привело к тому, что число учеников Понтрягина общепринятыми мерками не подлежит учету.

А.Солженицын в молодости был преподавателем математики в школе. И в каком-то своем литературном произведении назвал топологию "худосочной наукой". А известный русский математик Лузин говорил, что топология — это же не математика, это ботаника. Льва Семеновича эти суждения о топологии забавляли, и он искренне смеялся, когда не раз рассказывал мне об этом. Примечательно, что даже такой крупный математик и проницательный ученый, как Николай Николаевич Лузин, не смог увидеть и оценить начало процесса, происходившего на его глазах, — процесса превращения топологии из науки описательной ("ботаники", по пренебрежительному выражению Н.Н.Лузина) в современные математические дисциплины — алгебраическую и дифференциальную топологию. Работы Л.С.Понтрягина заложили основу этих разделов математики.

Интерес к личности Понтрягина проявляли во всем математическом мире, не только в Америке. Где бы мы ни были, математики смотрели на него, как на живого классика. Однажды на улице Стокгольма к нам подошел незнакомый человек и с почтением, обращаясь ко Льву Семеновичу, сказал на ломаном русском языке: "Я ваш ученик. Для меня Ваша книга "Непрерывные группы" является настольной книгой". Судя по всему, топология Понтрягина не ботаника и не худосочная наука. Хотя Понтрягин считал, что есть работы некоторых ученых, о которых можно и так сказать.

* * *

Лев Семенович считал своей обязанностью, именно обязанностью ходить на Общие собрания АН, хотя там не всегда для него было интересно. Он был полностью согласен с президентом Академии Наук СССР М.С.Келдышем, который говорил, когда на Общем собрании не было кворума: "Товарищи, академия — это не клуб знаменитых капитанов, куда можно ходить и не ходить по желанию. Академия — это государственное учреждение. Хотим мы этого или не хотим, но мы еще и государственные работники, государство нам платит деньги, поэтому прошу всех явиться на вечернее заседание, где необходим кворум".

Я всегда ходила с моим мужем на эти собрания. Он иногда спал на них. У него с юности был жестоко расстроен сон. Время от времени просыпаясь, спрашивал: ну что тут происходит? Я тихонечко говорила ему, что тут происходило, пока он спал. Мне почти всегда были интересны эти собрания. Я шла на них как на лучшую пьесу в театр. Политика, страсти, лесть, групповщина, сговоры, конечно, забота о науках — все человеческое не чуждо ученым. Причем, не только нашим, русским. Я лет 20 ездила с Л.С. по разным странам — и везде то же.

* * *

[2] Данные до 1940 г. в реферативном журнале "Mathematical Rewiev" отсутствуют.

Л.С.Понтрягину были очень близки слова: “Я убежденный пацифист, но я люблю Армию; даже если бы на свете уже не было войн, не станут лишними две основные воинские добродетели любого мужчины: дисциплина и мужество. И если я желаю мира, это не значит, что я, не обороняясь, сдаюсь; как раз наоборот... чтобы удержать мир, я употреблю всю мощь сообразительности и любви к народу, к человечеству, а если необходимо — всю мощь защиты. Поэтому необходимо быть безбоязненным, мужественным, самым что ни на есть сильным! Нет и никогда не было ни малейшего противоречия между моим гуманизмом и моими усилиями крепить мощь и оборону страны... Армия, хотя и в измененной форме, наверное, будет всегда, наверняка еще очень долго; я хочу сказать: народ требует обученных и готовых к обороне молодых, дельных, закаленных людей, которые в любой момент могут быть направлены на работу во время грозных катастроф и, конечно, — на защиту страны”. (К.Чапек, Беседы с Т.Г.Масариком)

Эту выписку Лев Семенович попросил меня сделать, и я ее помещаю здесь.

Сила, мужество, дисциплина — эти прекрасные качества мужчины — мало кому присущи в той степени, в которой ими обладал Л.С.Понтрягин.

По своим политическим взглядам и убеждениям Лев Семенович был консерватором, резким противником всяких революций, которые всегда несут кровь и разруху. Он оставался сторонником постепенных, медлительных перемен общественной жизни, страшился переворотов. Он всем сердцем любил Россию. Своим поведением, своими достижениями он старался возвысить свою страну, защитить ее, показать ее с лучшей стороны, хотя это порой было не легко. Он страдал не только нравственно, но физически, когда были нападки на наше государственное устройство со стороны западных ученых при поездках за границу во время его работы в Международном Союзе Математиков. Помню, кажется в Париже, он чуть ли не с криком сказал им: “Я не хочу больше 17 года!” Он видел всю гниль, застой, болото, в котором живет Россия и все же ему казалось, что устойчивость государственного устройства гораздо ценнее, чем свобода, которой хотят от нас западники. Свобода опасный спутник всякой устойчивости.

Лев Семенович не любил и почти не общался с корреспондентами газет, радио и т.д. Однажды все же корреспонденту по фамилии Балагур на его вопрос, каково кредо Понтрягина на государственную политику, Лев Семенович сказал, цитирую по памяти: “Только мощное, сильное в военном отношении государство может быть независимым в политическом отношении и устойчивым в экономическом”.

Он ненавидел лень, разгильдяйство. Труд, только труд приносит и радость, и благосостояние.

* * *

В 70-е годы мы много жили в санатории “Узкое”, где в длинные, зимние вечера говорили о многом — о политике, о прочитанных книгах, читали стихи, но всегда возвращались к математике. Он говорил: “Математика — это страсть, мучительная, но страсть!”

Или еще: “Приятно вспомнить геометрическую картинку (образное восприятие сделанной математической задачи) даже ночью, когда проснешься, посмотришь ее и так, и так ... со всех сторон”. В математике он видел свою красоту, как в живописи, в поэзии.

Мне интересно было слушать его. Он читал стихи Пушкина, Лермонтова, Блока, Тютчева, Есенина. Ему нравилась мысль Гильберта (выдающегося немецкого математика второй половины 19 и начала 20 веков): “Великое открытие рождается парадоксом, умирает тривиальностью”, он приводил какие-то примеры из истории математики, кажется, это относится к открытию “нуля” математиками древности. Мне в голову никогда бы не могло прийти, что “нуль” оказывается у математиков великим открытием!

В конце 1969 г. М.В.Келдыш предложил Л.С.Понтрягину занять пост вице-президента Международного Математического Союза, вместо М.А.Лаврентьева; срок полномочия по уставу для Михаила Алексеевича истек. Согласиться на это предложение для Льва Семеновича было не просто. Он спросил у своего предшественника, в чем состоит работа в ММС. М.А.Лаврентьев ответил просто: “Быть при сем!” Это смутило Л.С.Понтрягина. Быть при сем (при чем бы то ни было!) — это не для Понтрягина. Он пытался даже отказаться, но Келдыш настаивал. В конце концов, Л.С. согласился.

Раздумывая над этой новой проблемой, в эти дни он говорил: “Если бы я придерживался общепринятых норм поведения, я не катался бы на лыжах, на коньках. Я многое бы не имел. Меня не хотели пускать за границу. Мне приходилось и приходится всегда многое преодолевать. Я не такой как все! Надеюсь справиться с работой в Международном Математическом Союзе”.

В 1952 г. Лев Семенович плохо себя чувствовал, была вспышка туберкулеза, затем начались головокружения, и все же в это время он со своими учениками — Болтянским, Гамкрелидзе, Мищенко решил заниматься совершенно новой тематикой — оптимизацией. Он говорит, что он думал (и даже советовался с врачами), что не сможет больше заниматься математикой. Однако прошло время, и были получены блестящие результаты, которые быстро нашли признание и применение в технике. Большую радость принес Льву Семеновичу его пленарный доклад на Международном математическом Конгрессе в Эдинбурге в 1958 г., где он изложил свой “Принцип максимума”, принесший ему широкую известность и славу не только в математических кругах. Когда он вспоминал этот доклад на Конгрессе, лицо его светлело. Поездка была необычайно тяжелой. Рядом не было близкого человека. Боже! Как надо было страдать от сознания полного лишения своей независимости! Воистину, над ним была Благодать Господня!... Она сопутствовала всей его жизни и помогала во всем!

Лев Семенович умел дружить и ценить дружбу. Мне кажется, здесь работали голова и сердце вместе. С чувством благодарности он рассказывал, как зимой 1950 г. Е.Ф.Мищенко научил его кататься на лыжах, на коньках. С тех пор он каждую зиму с кем-нибудь катался регулярно 2-3 раза в неделю. Катались по 5-6 часов, одновременно могли заниматься математикой. “Первый раз я пошел на каток на Петровку. Было 17 мороза. Пытались научить кататься на коньках Реваза, но он слишком большой, все время хлопался. На лыжах Реваз научился быстро и со второго раза он уже шел хорошо. Но не заинтересовался этим видом спорта, а вот плавать научился быстро и плавал хорошо”.

“Старость — особое состояние души, не только тела. Обычно думают, что в старости жизнь не интересна. Это не так. Конечно, это не жизнь 17-и летнего человека. У них особый мир. Однако, юность и молодость далеко еще не всегда только счастье. Я помню свою молодость, когда я был глубоко несчастлив. Думаю, что так бывало не только у меня”.

На телефонный звонок 31.12.76 г. своей старинной знакомой Кати Т. он сказал: “Вот что положительного в моей жизни — это то, что я не живу воспоминаниями. Я живу так интересно и так разнообразны мои интересы, что прошлое для меня почти ничего не значит”.

* * *

Лев Семенович был равнодушен к суетным земным благам. Жизнь воспринимал просто и естественно, особых претензий к жизни не имел. Он вполне был удовлетворен своим материальным положением, хотя постоянно улучшал его. Это ему доставляло радость. Особенно радовался приобретению домашних кухонных машин, чтобы облегчить мне кухонный труд.

К математической славе он относился спокойно, порой казалось это его не интересует. Но цену себе знал. При случае употреблял славу для того, чтобы сделать что-нибудь полезное для дела. Больше всего мне в нем нравилось отсутствие респектабельности, но огромное чувство собственного достоинства всегда было при нем.

Совсем по-другому Л.С.Понтрягин относился к профессиональной деятельности. Он всегда работал до тех пор, пока не удавалось чего-нибудь добиться, и позволял себе передышку, когда уже знал, что тупика нет, путь к дальнейшим занятиям очищен.

— Тупики — самое страшное!

Жизнь останавливается. Все силы физические и нравственные устремляются на ликвидацию тупика. Потеря сна, интереса к чему бы то ни было и... страх! Вдруг не получится... мучительное состояние! Иногда это длилось несколько часов, а иногда дни и даже недели. Страх... хватит ли сил преодолеть? Тот ли выбран путь к решению задачи? Занятия математикой доводили его до изнеможения.

На даче он мог заниматься, гуляя по бетонным дорожкам около дома. Однажды, 16 марта 1970 г. с такой “прогулки” Лев Семенович пришел весь бледный, ни кровинки в лице, губы дрожат, растерян. Сам на себя не похожий. Когда я замечала что-нибудь подобное, я уже знала, что-то случилось с математикой.

— Что случилось? — кинулась я к нему. На сей раз действительно большое горе.

— Ошибка! — Обнаружил ошибку в материале, который он излагал в своих лекциях прошлой осенью в Стэнфордском университете (Штат Калифорния). Он находился в состоянии крайнего отчаяния. Страшно сказать, он был близок... Бог знает к чему... Ошибка не поддавалась исправлению удивительно долго; кончился март, апрель, май, весна на дворе, все ожило кругом, а у нас в доме как будто покойник.

Осенью этого, 1970 г. будет Всемирный конгресс математиков в Ницце, Л.С.Понтрягин приглашен от СССР на пленарный часовой доклад. Делать часовой доклад на конгрессе — большая честь для ученого. Этой чести математик Л.С.Понтрягин удостаивался дважды за свою жизнь. В истории Советской математики это, кажется, единственный случай. Материалом для этого доклада должны быть лекции, прочитанные в Стэнфорде. Но ликвидировать ошибку пока не удается! Подолгу и часто мы говорили об этом. Говорили каждый день везде: за едой, на прогулках, даже ночью иногда Лев Семенович приходил ко мне в своем горе. Как быть? У него уже промелькнула мысль отказаться от доклада. Это было бы равносильно смерти. Этого делать нельзя! И он все занимался и занимался.

Спас его Реваз Валерианович Гамкрелидэе. Бесконечные, с утра до ночи беседы с Р.В.Гамкрелидзе помогли Льву Семеновичу справиться с этой бедой. Л.С.Понтрягину всегда было интересно говорить о математике с Гамкрелидзе. И тут он обратился к нему, хотя Реваз Валерианович в ту пору не занимался дифференциальными играми. А выслушать и “понять чужую работу — это значит ощутить ее, как бы сделанную самим” — Анри Пуанкаре, и Реваз Валерианович взял на себя такой огромный труд.

Евгений Фролович занимался, но уже несколько лет как бросил эту тему. То, что Лев Семенович много лет занимался по существу один (Р.В.Гамкрелидзе не интересовался, а Е.Ф.Мищенко бросил), это обстоятельство тревожило меня. Иногда мне думалось: может быть тема дифференциальных игр не интересна, не актуальна? Конечно, ответа не могло быть, задавать вопрос мужу я не имела права. Поэтому разговорам с Ревазом Валериановичем я страшно обрадовалась. Чувствовалось, что он начинает “врастать” в задачу, “вживаться” в нее. Это придавало нам бодрость. Левочка мой стал жизнерадостнее. Жить стало легче. Однажды я осторожно спросила — не собирается ли Реваз заниматься играми? Лев Семенович ответил: “Реваз знакомится с материалом, возможно, если ему понравится, он будет заниматься играми”.

Какая радость! Лев Семенович постоянно подчеркивал, что разговаривать на математические темы с Ревазом ему всегда интересно. “В этих разговорах всегда был толк, он имеет отличный математический вкус, отличное математическое образование”. Примечательно, что когда Реваз проделывал весь путь решения этой задачи, он делал ту же самую ошибку, что и Лев Семенович.

В середине мая мы с мужем, как всегда, уехали в Коктебель. Уезжая, я уже знала, — Реваз занимается неотступно. Так же неотступно занимается Лев Семенович! И вот в конце мая Лев Семенович нашел правильное решения этой каверзной задачи! Сделал это он сам, но, безусловно, помогли ему разговоры с Ревазом Валериановичем. Пришло, наконец, удовлетворение; конец титаническому труду... и, выражаясь обыденным математическим языком: “получен результат!” Не бросил своего учителя, не покинул его в тяжелое время Р.В.Гамкрелидзе.

В сентябре 1970 г. в Ницце во дворце спорта, более пяти тысяч математиков со всего мира (думается, были здесь не только математики), собрались посмотреть и послушать знаменитого Понтрягина. Когда он появился на трибуне, зал встал и длительными аплодисментами приветствовал ученого. Это был настоящий триумф! И хотя, казалось бы, шло обычное заседание, в зале витала какая-то особая атмосфера торжественности и праздника. Так что Лев Семенович Понтрягин был вполне вознагражден за свой труд. Доклад был сделан блестяще!

Реваз Валерианович не разделял (что вполне естественно) некоторые взгляды Льва Семеновича, но он был чуток к своему учителю, любил его по настоящему и много сделал по освещению в печати научной биографии Л.С.Понтрягина. Этот большой труд брал на себя Реваз Валерианович по собственной инициативе.

Он всегда был отзывчив на всякие беды и радости Л.С, был рядом с ним. В 1988 году, еще при жизни Льва Семеновича, издательство "Гордон и Бридж" выпустило в свет в 4-х томах собрание сочинений Л.С.Понтрягина на английском языке под рубрикой "Классики Советской математики". Вся договорная работа, отбор материала, редактирование — все было сделано Ревазом Валериановичем. Труд огромный, причем это было время разгара травли и оскорблений за рубежом его учителя.

* * *

Занятия математикой, как всякая умственная работа, истощает мозг. У некоторых людей приводит к депрессии, нервным срывам, бессоннице и другим нервно-психическим расстройствам. Эта наука требует постоянного неотрывного внимания к себе. "Урывками заниматься математикой нельзя" — так считал Лев Семенович. У математиков хрупкое душевное устройство. Они легко ранимы, как артисты, художники. Они нуждаются в защите, внимании больше, чем люди других профессий. В их поведении можно нередко замечать странности; человек беседует с вами и как будто ему все, что Вы говорите интересно, но вдруг, Вы ощущаете, что Ваш собеседник как бы отключился...

Математик обязательно должен рассказать о своих результатах другому математику. И будет счастлив рассказать видному авторитету, или на семинаре сделать доклад и т.д. Выслушать работу другого математика и понять ее — это не то, что послушать хорошо исполненный романс и получить удовольствие. Требуется затрата сил, требуется работа мозга, не только затрата времени. Льву Семеновичу часто приходилось слушать молодых математиков. При этом он хотел иметь какую-то пользу для себя: он приглашал их погулять, или покататься на лыжах и там заодно выслушать его работу. Для него действительно "Спасение в движении, неподвижность — гибель". Но не каждый мог это понять должным образом. Иногда человек упирался и не хотел гулять. И тогда Лев Семенович отказывался его слушать!

Осенью 1969 г. Лев Семенович был приглашен профессором Калманом на 2 месяца прочесть курс лекций по оптимизации в Стэнфордском Университете. Полетели мы с ним вдвоем. Калман обещал переводчика. До этого Лев Семенович неоднократно читал свои доклады на английском языке. Но целый курс он боялся не одолеть. Когда он познакомился с этим переводчиком, то сразу же понял, что это гибель, а не переводчик. (Его блистательный доклад в Эдинбурге переводил с русского на английский профессор Липман Берс — известный математик, а формулы на доске писал Е.Ф.Мищенко).

— Что же делать?! — Выхода нет! ... И он тяжело заболел. Объявил мне, что у него инфаркт миокарда, болит сердце. Пульс все время 100 ударов в минуту. Повышенная температура. Лежит в постели пластом. Бледный. У меня с собой были кое-какие медикаменты, но ему ничего не помогает. Лежит день, другой. Я думала, пройдет акклиматизация, все будет в порядке. Но проходит неделя ... Состояние не улучшается. Вся ответственность лежит на мне, я врач, жена, единственный близкий ему человек здесь. Снять бы электрокардиограмму! Но у нас нет денег. На еду нам дал взаймы Калман до получки. Фаня Шифер — жена профессора Шифера, говорит, что ЭКГ ужасно дорого стоит! ..., причем сказано это было с таким видом, что я поняла — нам это не доступно. И я приняла решение: поднять его с постели и заставить начать работать! Боже, чего мне это стоило?!... Во мне еще не угасла хватка врача Института скорой помощи им.

Склифосовского, когда надо было срочно принять решение. Это решение могло стоить больному жизни. И я после внимательного осмотра и прослушивания твердо сказала своему мужу:

— У тебя инфаркта нет! Ты боишься читать лекции по-английски. Пора вставать и готовить лекции.

Сработало! На десятый день нашего приезда Льва Семеновича повезли в университет; возвратился оттуда весь сияющий, здоровый. Целует меня, и все хорошо, и весь курс прочел на английском языке сам, без переводчика. Помощник писал формулы на доске и только.

* * *

Мои все помыслы и возможности были совершенно сознательно и бессознательно направлены на то, чтобы он жил ПОЛНОЦЕННО! Моя жизнь стала частью его жизни во всем, а его жизнь — частью моей. Даже по таким вопросам, в какой математический журнал поместить свою статью, Л.С. советовался со мной. Даже если допустить мысль, что это простая житейская мудрость — включить жену в интересы мужа, — все равно она похвальна. Известно, что общие интересы супругов укрепляют брак, укрепляют дружбу и делают брак нетривиальным, интересным. Когда он приступил к написанию книжек для школьников, интересующихся математикой, он как-то не мог придумать общего заглавия этой серии. На прогулке я сказала: “Не подойдет ли такое: “Знакомство с высшей математикой”. Он с радостью и благодарностью принял такое название. Тут же поцеловал мне обе руки и как-то облегченно вздохнул. Я тоже счастлива. Всего пережитого передать невозможно. Слишком много было ежедневных переживаний, страхов, мук, радостей.

* * *

Особенно тягостны были выборы в АН СССР. Телефонные звонки беспрерывные, от них невозможно было отбиться. Встречи, встречи, обсуждения кандидатов, прикидка кто пройдет, кто не пройдет: списки желающих быть членом Академии огромные. Так сложилось, что я должна была во всем этом участвовать. Оставаясь один, Лев Семенович потом еще раз обсуждал со мной каждого, кого он хотел поддержать или провалить. Хотел моего мнения, чтобы узнать искренность академиков, с кем все это обсуждалось. Попытки обмануть моего мужа бывали. Поддержка академика Понтрягина слишком много значила на выборах! Это знали и те, кого выбирали, и те, кто выбирал. Так что мне всегда тоже надо было быть в курсе дела.

По-видимому, для некоторых мужчин “есть упоение в бою”. Для моего мужа — точно! Не зря он часто читал мне это стихотворение (среди многих других, он очень любил поэзию). Бой же для меня — мука.

К этой строке А.С.Пушкина необходимо пояснение.

Бои, которые давал и одерживал победу академик Л.С.Понтрягин, — не бессмысленные, не клеветнические. Они не питались беспочвенной злобой, вроде того, что “вот я все же найду ошибку в работах Понтрягина”. Такую “государственную” задачу, говорят, поставил один математик, академик.

Стараясь поднять на должную высоту вычислительную технику, понимая всю важность этого вопроса для страны, Лев Семенович действительно дал настоящий бой Президенту Александрову А.П. и всему Президиуму АН СССР. Это подробно он описал в своем “жизнеописании” (см. расширенный вариант).

Последние свои силы отдал делу улучшения преподавания в школе. Яростно боролся против безумия века — переброски рек с севера на юг. Это и многое, многое другое он делал уже в возрасте далеко после 70 при плохом состоянии здоровья.

Мне никогда не удавалось понять, как в самый момент голосования можно просчитать расклад голосов. В это дело я не вникала. Бесполезно. А Лев Семенович (видимо, другие тоже) мог.

Вдруг во время голосования от одного тура к другому (а их, по обыкновению, три) он круто менял мнение. Я шепотом спрашиваю: "Почему?" Ответ: "Он все равно не пройдет". Это могло относиться даже к желаемому и очень желаемому кандидату. Это одна причина.

Вторая: Лев Семенович четко следил за тем, чтобы выборы у математиков состоялись. Провал выборов он считал позором для математиков. Пусть проходит даже не совсем достойный (достоинства могут быть разного характера), по его мнению, кандидат. Это лучше, чем то обстоятельство, что не заполненное место Президентом А.П.Александровым будет отдано физикам. Там голосование всегда проходило дружно. В результате Физические Отделения разрастались. Все это требовало большого напряжения, траты времени и сил и бессонных ночей в предвыборный, столь ответственный период. С физиками у математиков дружбы не было, пожалуй, еще с тех времен, когда было одно общее Отделение физико-математических наук. Разделение произошло, кажется, при Президенте Несмеянове, или чуть позже — при Келдыше.

Описанный выше случай выборов в Академию есть только маленький пример того, что происходит **во время** выборов. Но есть еще период предвыборный и послевыборный. В предвыборную кампанию задолго включаются не только члены Академии. Общественность, пресса, академические чиновники особенно зорко следят, работники Отдела Науки ЦК КПСС. Мобилизуются медики, работы у них заметно прибавляется. Эмоции перед выборами и длительный след их после (обиды, обиды, затаенная боль ...) — забирают много рабочего времени, внимания и здоровья у людей. Нормальной работы нет! И так каждые два года повторяется эта изнуряющая процедура. Такой цикл Льву Семеновичу казался вредным.

Когда же ученым работать? Раньше АН СССР не имела такого четкого графика. Выборы **назначались** Президиумом АН время от времени через 3-5 лет. Разумно. Ученые за такой срок могли получить, опубликовать и осмыслить свои результаты и ознакомиться с работами своих коллег. А справочник (для служебного пользования) АН СССР еще в 1964 г. был тоненькой, карманного размера, книжечкой. Теперь — это уже туго набитые два тома!

И Лев Семенович внес в Президиум предложение: проводить выборы **не чаще,** чем через 3 года. Президиум одобрил и внес изменение в Устав Академии, а Общее собрание это положение утвердило. Это произошло после выборов 1976 года. И следующие выборы состоялись уже через три года — в 1979 г.

В 1979 году снова были выборы и снова горячее сражение, но носило оно другой характер.

Единственные выборы — 1979 г. — когда Лев Семенович был более чем равнодушен к судьбе Отделения и выборы эти практически провалились. Слишком близок был 1978 г., — Конгресс в Хельсинки — и примыкающие к нему события...

А уже следующим выборам в 1981 г. академик Понтрягин снова отдал все свои силы, свое умение и страстное желание укрепить хорошими математиками Отделение Математики.

А все дело в следующем. В Советском Союзе академик мог заниматься не только наукой. Он получал большие возможности занимать государственные посты и тем самым влиять на большие и даже государственные дела. Здесь важно не только профессиональное мастерство. Не каждый академик способен быть, скажем, ректором Московского Государственного Университета, или Президентом АН СССР, даже директором Научно-исследовательского института. Тут нужен особый дар. Подобного рода соображения Лев Семенович учитывал при выборах. Он говорил иногда — академик "может много дров наломать".

Я никогда не интересовалась математической тематикой С.П.Новикова. Он не был непосредственным учеником Льва Семеновича. Совсем на днях мне попался Отзыв на цикл работ Л.С.Понтрягина, представленный на соискание международной премии им. Лобачевского. Там я читаю в конце 6-ой страницы: "Работы Понтрягина, понимавшиеся тогда лишь выдающимися топологами, входят теперь в обязательный минимум знаний довольно широкого круга математиков". Подписано член-корреспондентом АН СССР С.П.Новиковым. И в той же папочке рядом с Отзывом лежала другая бумага. Член-корреспондент АН СССР С.П.Новиков “О проблеме Понтрягина”. Это научное сообщение на заседании Президиума АН СССР 17 января 1969 г. Новиков доложил членам Президиума о своих исследованиях “проблемы Понтрягина”, употребляя термины “характеристические классы Понтрягина”, “вектор Понтрягина”, и т.д. Доклад этот изложен С.П.Новиковым на 20 страницах машинописи. Содержание обнаруженного материала меня не удивило. Понтрягин снабдил математической тематикой не только топологов. Его работы по алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям также основательны и имеют много последователей.

Я уже не говорю о работах по оптимизации и дифференциальным играм. Открытый им знаменитый “Принцип максимума Понтрягина” с 1958 г. является до сих пор кладом, и не только для математиков и инженеров. По сведениям, имеющимся у меня от ученых, “Принцип максимума Понтрягина” применяется в аэродинамике, астронавтике, механике, физике, химии, космонавтике, управлении химическими и ядерными реакторами, их проектировании, вычислительной технике, даже биологии и медицине. Экономика и экология, как выясняется, также не обходится без применения принципа максимума.

Центральный Аэрогидродинамический институт имени профессоре Н.Е.Жуковского — ЦАГИ (город Жуковский Московской области) — дает Президиуму Академии наук СССР следующую справку (№10-4-339 от 27.09.79 г.) о применении принципа максимума Понтрягина и его теории дифференциальных игр в исследованиях, проведенных в ЦАГИ в области механики и процессов управления полетом летательных аппаратов. Перечисление занимает три страницы, подписано заместителем начальника ЦАГИ членом-корреспондентом АН СССР Г.С.Бюшгенсом.

Приведем здесь эту справку полностью:

“ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА И ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР В СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКЕ ПОЛЕТА”

Принцип максимума и теория дифференциальных игр Л.С.Понтрягина нашли широкое и важное применение в следующих работах, проведенных в ЦАГИ:

1. Исследование и выбор оптимальных траекторий, оптимальных параметров и разработка методов оптимизации характеристик летательных аппаратов (ЛА) различного назначения:

— оптимальное пространственное выведение;

— оптимальное выведение на орбиту искусственных спутников Земли, Луны и планет;

— оптимальное маневрирование ЛА, в том числе, их стыковка;

— стабилизация и оптимальное управление ориентацией ЛА;

— оптимальные межпланетные перелеты, в том числе, с двигателями малой тяги.

2. Решение задач динамики полета и управления входом в атмосферу:

— исследование возможности полета ЛА со скоростями входа, превышающими вторую космическую (обеспечение коридора входа, выдерживание ограничений по перегрузке, тепловым и температурным режимам);

— оптимальное выведение на орбиту искусственного спутника планеты (в том числе, Марса) с использованием аэродинамического торможения в атмосфере;

— оптимальное управление боковой дальностью;

— построение зон достижимости и оптимальное пространственное движение в заданную точку земной поверхности.

3. Исследование оптимальных траекторий и оптимальных режимов полета самолета:

— построение оптимальных траекторий и режимов набора высоты, в том числе, для рекордных полетов по высоте и скороподъемности;

— исследование оптимальных пространственных траекторий высоко маневренных самолетов;

— исследование оптимальных взлетно-посадочных режимов, в том числе, с минимизацией шума, создаваемого самолетом на местности.

4. Разработка методов исследования игровых задач механики полета самолетов:

— игровые задачи преследования-уклонения;

— задачи управления в условиях неполной информации;

— задачи идентификации и наблюдения в механике полета на основе минимаксных критериев точности.

Кроме того, идеи принципа максимума проникли в ряд нетрадиционных областей управления и стимулировали развитие следующих научно-технических направлений:

— численные методы оптимизации (методы поиска экстремума функции многих переменных на основе различной информации о функции);

— методы аппроксимации, интерполяции и сглаживания функции и их приложения к задачам аналитического описания геометрии внешних форм летательных аппаратов, автоматизации изготовления аэродинамических моделей на станках с ЧПУ (числовым программным управлением) и др. актуальным и перспективным задачам разработки систем автоматизации проектирования летательных аппаратов (САПР ЛА);

— разработка методов построения законов и систем управления, позволяющих реализовать преимущества оптимальных режимов и оптимальных траекторий;

— методы оптимального управления аэродинамическими трубами и др.

Многие из рассмотренных выше вопросов входят в программы спецкурсов, читаемых на кафедре механики полета в МФТИ.

Заместитель начальника ЦАГИ

член-корреспондент АН СССР Г.С.Бюшгенс”

* * *

У Льва Семеновича была удивительная математическая интуиция. Он никогда не пользовался в своих работах библиотекой. У нас в доме книг по математике, журналов нет и никогда не было, кроме тех, которые дарили ему авторы. Их немного. Одна-две полки. Интуиция его не подводила. Работы всегда свежи, оригинальны.

Пожалуй, не единственный ли случай, когда эта пламенная душа не могла не вмешаться в нематематическую тематику — это переброска рек с севера на юг. Впервые о переброске рек мы услышали от А.Б.Жижченко. Сама идея столь вздорная, что Лев Семенович сначала не поверил в такое. В дальнейшем жизнь показала — работа уже развернута во всю мощь и основательно финансируется созданным Министерством Водного хозяйства. И мужу стало страшно. Он не знал, что можно сделать. К тому же здоровья нет. Но когда ему позвонил Игорь Ростиславович Шафаревич, подробно описал, что делается, и просил принять участие в борьбе против этого гнусного дела, Лев Семенович не мог остаться безучастным. Я до сих пор помню его горестный тон и с какой грустью в голосе он сказал ему:

— Я ведь нездоров и сил у меня уже мало.

— Левочка, может быть, для пользы дела достаточно будет хотя бы твоего имени? — осторожно сказала я. Я знала — это не для Понтрягина, а все же сказала.

— Разоряется Русская Земля, а ты мне говоришь, достаточно твоего имени! — ответил он мне.

И вот начинается работа упорная, изнуряющая. Лев Семенович организует в Стекловке серию семинаров с подробным разбором водного вопроса. Приглашаются специалисты. Первым очень интересным был доклад профессора Сергея Николаевича Чернышова. В семинаре также активно участвовал академик Ю.В.Прохоров, профессора М.И.Зеликин, А.С.Мищенко, а также Л.Ф.Зеликина. Это были 1982-1987 гг.

Как всякая новая “перспективная” тема, водная проблема породила кучу диссертаций. Она обильно финансировалась Министерством Водного Хозяйства. Все это шло на высоком государственном уровне. За всем этим стояли люди и деньги. Президент АН СССР А.П.Александров был за переброску. Дирекция и партком МИАНа настороженно отнеслась к деятельности Понтрягина. Помнится, когда мы с мужем шли на семинар по длинному полутемному коридору института, начальство, завидя “эту парочку”, пряталось в первую попавшуюся дверь, дабы не встретиться с мятежным Понтрягиным.

Самое трудное — изучение диссертации. Об одной такой диссертации (автором ее был тогда директор водного института Академии Сельхоз. наук СССР) Лев Семенович сказал мне: “В этой диссертации нет никакой науки, ни математической, ни технической, ни водной. Есть какая-то муть, которую некоторые люди — в первую очередь академик Н.М. — разводят для того, чтобы найти себе пристанище в науке. Однако идти в ВАК и доказывать это придется”.

В отзыве на диссертацию “Прикладной анализ и синтез иерархических систем”, представленную на соискание степени доктора физико-математических наук, Лев Семенович коротко и четко написал: “С моей точки зрения эта часть (имеется в виду математическая) диссертации не может рассматриваться как пригодная для присуждения какой бы то ни было степени — кандидатской или докторской”. И далее заключение: “В целом работа не может рассматриваться как докторская диссертация. Ее автору не может быть присуждена докторская степень”. Л.Понтрягин. 22 октября 1985 г.

Упомянутый академик Н.М. настойчиво поддерживал эту диссертацию, и на ученом совете Вычислительного центра Академии, членом которого он являлся, соискателю была присуждена докторская степень.

На основании отзыва Л.С.Понтрягина ВАКом диссертация не была утверждена. Вскоре автор ее был снят с поста директора. В последнем сыграла роль не только неудачная попытка защитить докторскую, но и другая его “деятельность”. А стань он доктором физ-мат наук, он, конечно, остался бы на посту директора и “перебрасывал бы реки” с севера на юг и обратно, — с юга на север!...

Организаторами и душой борьбы против переброски в системе Академии были супружеская чета Зеликиных — профессор, ученик Л.С.Понтрягина Михаил Ильич, и его жена Людмила Филипповна — кандидат физико-математических наук, а также Наталья Петровна Юрина, тоже кандидат наук. С особым усердием трудились эти русские женщины в организации связи математиков с другими русскими патриотами: литераторами, художниками. В эту группу был втянут академик А.Л.Яншин; я думаю, в этом сыграла решающую роль Наташа Юрина, она была у него тогда секретарем. Яншин в то время был одним из вице-президентов Президиума АН СССР. Академик Георгий Иванович Петров — наш сосед по даче — тоже активно участвовал в этом святом деле. В журнале “Новый мир” появилась талантливая статья С.П.Залыгина.

В конце концов, общими усилиями добились, достучались: 24 февраля 1983 г. в Отделе Сельского хозяйства ЦК партии было созвано специальное совещание, посвященное этому вопросу. Приглашен был Лев Семенович и еще человек десять. Мне было интересно среди приглашенных видеть нашего великого русского композитора Георгия Васильевича Свиридова и легендарного певца Ивана Семеновича Козловского.

Но до результатов — прекращения финансирования — было еще далеко. Академия Наук и Академия сельскохозяйственных Наук не реагировали на протесты ученых и общественности.

В декабре 1985 г. Л.С.Понтрягин посылает письмо Генеральному секретарю ЦК КПСС М.С.Горбачеву. Это был замечательный шаг. И вот произошло чудо! Сразу завертелось в другом темпе. Сработало необыкновенно быстро: в начале февраля 1986 г. пришло письмо в Президиум Академии наук о необходимости внимательнее рассмотреть вопрос переброски и т.д. и т.п. Основание — тревожное письмо академика Л.С.Понтрягина. Людочка Зеликина по телефону чуть ли не “ура!” кричала, так была рада — лед тронулся! Сразу присоединилось много людей в борьбе против чудовищного плана разорения Европейской части России.

Однако все не просто. Президент АН СССР академик А.П.Александров ждал своего переизбрания в этом 86 году. "Гусей дразнить опасно!"... финансирование научных работ по переброске рек продолжалось, хотя сам пункт переброски был выброшен из проекта Основных направлений развития народного хозяйства СССР. 25 февраля 1986 г. открылся очередной XXVII Съезд Компартии Союза. Л.С.Понтрягин, Г.И.Петров, Д.С.Лихачев и В.Л.Янин послали в Президиум Съезда телеграмму с просьбой прекратить финансирование научных (вредных) разработок по переброске.

16 октября 1986 г. был избран уже другой Президент Академии — Гурий Иванович Марчук. Надежды увеличились.

Переброска многострадальными усилиями была окончательно приостановлена только в 1987 году! Победа над переброcчиками нам доставила огромную радость!

Такая же напряженная и изнурительная многолетняя работа шла по улучшению школьных программ по математике. Началась она раньше переброски. А еще раньше — улучшение издательской работы по математике в системе Академии. И везде должны были быть надежные люди, душой болеющие так же горячо, как Лев Семенович. И такие люди были. По издательским делам — профессор, старший научный сотрудник МИАН'а Виктор Иванович Благодатских. По школьным программам профессор мех-мата МГУ, лауреат Государственной премии Александр Сергеевич Мищенко. По переброске, я уже сказала — профессор мех-мата Михаил Ильич Зеликин и его супруга Людмила Филипповна. Низкий поклон им и огромная благодарность! Без этих людей Льву Семеновичу не удалось бы так много сделать в важных государственных делах.

* * *

За 1985 год Лев Семенович написал две последние книжки из серии "Знакомство с высшей математикой": "Алгебру" и "Дифференциальные уравнения". Мы думали, волновались, как-то они, удадутся ли? Упомянутые заботы, хлопоты чередовались с нездоровьем. Но без математики он не мог жить. Он с удовольствием писал эти книжки.

Алгебру попросили отдать на рецензию Игорю Ростиславичу Шафаревичу — самому строгому рецензенту. Я с тревогой и мукой ждала его слова... И вот звонит Нина Ивановна — жена Игоря Ростиславича — и говорит, что Игорь Ростиславич закончил чтение "Алгебры" и сказал так: "Гениальный человек до конца жизни останется гениальным"! Я так обрадовалась, растрогалась, расцеловала своего мужа и передала ему слова Шафаревича, и мы оба расплакались...

Более шестидесяти лет он страдает жестокой, мучительной бессонницей. Вынужден принимать снотворные. Периодами совсем не спит и мы оба мучаемся. Мозг истощается. С болью в душе смотрю я на него в такие дни. Как, чем помочь?! Диета, прогулки, тащу иногда через силу на прогулку, на дачу. Он всегда любил прогулки, дачу, а теперь периодами упирается, не хочет. Сил мало. Сам же говорил постоянно мне: "Спасение в движении, неподвижность — гибель". Эта мудрая арабская поговорка была в ходу у нас. Особенно к старости. Старость — тоже пустыня, где надо искать и искать живительный ручеек, не найдешь — погибнешь.

От бесконечных нечеловеческих нагрузок, которые он брал на себя, а, став его женой, и я вместе с ним, мы много и часто болели. До замужества я была здоровым человеком. Болезни свои Лев Семенович переносил на редкость (для мужчин особенно) стойко, безропотно, послушно выполняя все мои рекомендации. Болезни одолевали нас. Жить так стало невозможно. В конце 1979 г. мне посчастливилось познакомиться с литературой врачей, которые рекомендуют оздоровление всего организма за счет правильного питания натуральными продуктами и полного отказа от всяких таблеток. Это направление в медицине, вернее, в жизни, оказалось необычайно созвучно моим взглядам, поискам, моим потребностям, но я не знала, с чего и как начать. Помнится, когда мы прочли вместе с Львом Семеновичем журнальную статью Г.С.Шаталовой, я сказала своему мужу:

— Это для меня!

Он сказал:

— Тебе будет трудно готовить для меня отдельно, поэтому я уж присоединюсь к тебе.

Через месяц-другой я обрела другую жизнь... Появилась сила, энергия, уверенность в себе. Другое, совсем другое восприятие жизни! Мне казалось — наконец-то я прикоснулась к истине. Первое что я сделала — с благодарностью избавилась от кабалы помощниц, которые помогали нам хоть как-то существовать. Все хозяйство взяла в свои руки. Здоровье Льва Семеновича тоже улучшилось. Но он очень любил кофе, особенно растворимый. Прелесть состояла еще и в том, что он мог сам себе приготовить. Эта кофейная любовь привела к возникновению язвы 12-перстной кишки осенью 1980 г. Как лечить? — Больница на 30-40 дней... неприемлемо. К этому времени мой небольшой опыт оздоровления организма без лекарств позволил мне предложить Льву Семеновичу попробовать провести 7-ми дневное голодание. Сама я никогда более 2-3 суток не голодала. Страшно было ужасно. Ночи не спала, все прислушивалась, как он дышит, смотрела, как он выглядит. Опыта никакого, посоветоваться не с кем. Да и каждый врач осудил бы меня за такой эксперимент в то время. И вот взялась лечить самого дорогого мне человека голоданием. Это далось мне нелегко. Зато результат блестящий! А он, как ребенок, послушен, доверчив, трогателен, что накладывало на меня еще большую ответственность и тревогу. Лев Семенович еще не совсем вышел из стадии голодания, когда нам позвонил и пришел познакомиться с Львом Семеновичем замечательный русский писатель, энциклопедист Вадим Валерианович Кожинов. К этому интересному знакомству нас привела статья Понтрягина в журнале "Коммунист" о преподавании математики в школе.

Лев Семенович, случайно познакомившись со школьными учебниками по математике, был поражен тем, что сделали с хорошими учебниками, которые служили школе десятилетия. Школьники, ничего не понимая, обращались к родителям. Те тоже не могли разобраться, что предлагается усвоить их детям. Даже Лев Семенович не мог понять, что хотят от ученика 3 класса начальной школы. Оставить все как есть? Невозможно! И снова и снова началась мучительная, упорная борьба с очередным безобразием. Подробно он описал эту многолетнюю борьбу в своем "Жизнеописании".

Нужно было все довести до сведения общественности страны. Но зажатость ртов была столь велика, что даже математики не все считали нужным сказать об этом публично и тем более начальству.

Я не помню, как у нас в доме появился сотрудник журнала "Коммунист" — Леонид Витальевич Голованов. Он отлично понимал значение проблемы и главный редактор этого журнала Косолапов тоже. Они дали согласие изложить взгляды Понтрягина в своем журнале. Но отдать дань похвалы партии и правительству первым условием было. Лев Семенович категорически отказался от этого. Препирательство между ними шло недели две. В конце концов, Лев Семенович согласился, но сам писать наотрез отказался. Эту часть статьи написал (как положено по канону), Леонид Витальевич Голованов, 16 месяцев ждали появления этой статьи в печати! В течение этого периода Леонид Витальевич временами звонил Льву Семеновичу, и в его словах теплилась надежда, что статья все же выйдет в свет, и что он ходит на цыпочках и говорит шепотом, как бы кого-нибудь не вспугнуть, не потревожить...

И вот, наконец, произошел прорыв бетонного молчания. Оказалось, о наших бедах можно говорить вслух и быть услышанным. Такой труд был под силу только Л.Понтрягину. Откликов на эту статью было много разных.

Уродливые новшества к тому времени затронули не только школьные программы и школьные учебники по математике в СССР. С болью в сердце говорил в беседах с Львом Семеновичем дирижер Большого Театра Альгис Жюрайтис, всему миру известная певица Елена Образцова о подобном явлении в театре. Даже в Академии Художеств СССР на партийном активе обсуждалась эта статья, и там люди выражали тревогу по вопросам преподавания в области искусства.

Статья затронула интересы не только патриотов. Школьные учебники ежегодно выходили миллионными тиражами. Авторы их получили за них гонорары. Они почувствовали угрозу своему благополучию. И вскоре после выхода статьи я дважды по телефону слышали угрозы "разделаться с Понтрягиным", если он не прекратит своей деятельности.

* * *

Какие б чувства не таились
Тогда во мне — теперь их нет:
Они прошли иль изменились.
Мир Вам, тревоги прошлых лет!

А.С.Пушкин

С 1970 по 1978 гг. Лев Семенович был представителем от Советского Союза в Исполкоме Международного Союза математиков. Первые четыре года в качестве вице-президента этого учреждения, последующие четыре года (согласно уставу) — членом Исполкома.

С самого начала работа Льва Семеновича в Международном Союзе Математиков была направлена на защиту интересов России. Американскому представителю проф. Джекобсону (и некоторым другим) не нравилась такая позиция советского представителя. Один из пунктов такого противостояния изложен в письме академика Понтрягина от 21 ноября 1973 г. членам Исполкома МСМ: "Я не могу согласиться с тем, что следует увеличить членские взносы.

Предложение проф. Джекобсона создать новую шестую группу очень типично для США. США пытаются купить на доллары влияние во всех Международных научных организациях, и существует мнение, что поток долларов, который затопляет весь мир, является истинной причиной настоящего тяжелого финансового положения. Я не могу поддерживать этого стремления США купить весь мир за доллары. Влияние в нашем Союзе не должно продаваться за деньги. Я против создания новой шестой категории. С уважением, Л.Понтрягин".

Взносы в этот Союз уже тогда были накладны для Академии наук СССР. Увеличения взносов Лев Семенович так и не допустил!

Столкновения с проф. Джекобсоном продолжались. Этот господин явно не сочувствовал патриотическим взглядам Льва Семеновича, которые проявлялись при любых обсуждаемых там вопросах.

Кроме того, он хотел стать президентом Международного Союза Математиков, что категорически не устраивало Льва Семеновича. Президентом Джекобсон не стал! Лев Семенович поддержал другого американца, более достойного математика — проф. Монтгомери.

Тут же в западной прессе была объявлена информационная блокада имени Понтрягина в научных публикациях. Такой запрет существует до сих пор и выполняется некоторыми математиками не только на западе, но и у нас.

Непростая ситуация сложилась для Л.С.Понтрягина к этому времени в Советской Академии наук. Уж слишком много доставлял он начальству хлопот. И слишком был независим. Такие люди, как академики Н.Н.Боголюбов, А.П.Александров, имевшие вес не только в системе Академии (они были депутатами Верховного Совета СССР), привыкшие к чинопочитанию, беспрестанному их восхвалению, не могли смириться с таким независимым поведением академика Л.С.Понтрягина. У Понтрягина же по любому вопросу, к которому он приложил руку, был свой подход. Его девиз: "Польза дела!" в том ракурсе, в котором он считал правильным.

Лев Семенович очень любил, ценил и много раз перечитывал писателя-фантаста Ивана Ефремова и цитировал его строки в разговорах на подобные темы:

"Нет яда более страшного, даже для человека очень сильного и умного, чем беспрестанное восхваление его самого и его деяний". — Эти строки справедливы не только касательно одной личности, но и целого народа. Сам Лев Семенович был начисто лишен зависти, лести и мести. Кстати, он не был хорошим дипломатом. Отсутствие в должной мере дипломатических способностей, полное отсутствие умения льстить академическому начальству, привыкшему к этому, и другим чиновникам часто приводило к конфликтным ситуациям.

Бессменный директор МИАНа на протяжении десятилетий, академик АН СССР с 1929 г, дважды Герой Социалистического Труда И.М.Виноградов естественно привык к восхвалениям его самого и его действий. При всем уважении к Виноградову Лев Семенович не мог быть всегда согласным с ним. Так он неоднократно поднимал вопрос о несправедливом исключении из состава Ученого совета Института талантливейшего математика И.Р.Шафаревича. Это злило и Виноградова, и Боголюбова — академика-секретаря Отделения математики. Тема эта возникала как в частных разговорах, так и на заседаниях Ученого совета Института, заседаниях Бюро Отделения математики. Начальству (большому и поменьше) проще работать с покорными, во всем согласными с ним людьми. Яркая индивидуальность, наличие собственного мнения, яростные чувства при отстаивании своей позиции делали Л.С.Понтрягина неудобным. Особенно это выявилось при президенте Академии наук А.П.Александрове. М.В.Келдыш в годы своего правления Академией поддерживал Льва Семеновича и умело защищал от нападок на него.

Степень раздражения Президента АН СССР и академика-секретаря Отделения математики нарастала. Была предпринята попытка сорвать работу Понтрягина как руководителя делегации советских математиков для участия в Международном Математическом Конгрессе в 1978 г. в Хельсинки. В этом приняли участие ОМ и Стекловский институт. Ничего из этой попытки не получилось. Понтрягин выстоял. Но здоровья Лев Семенович потратил много, очень много.

Только что закончился Конгресс. В 1978 г. Понтрягину исполнилось 70 лет. Он написал свою краткую автобиографию и предложил свое “Краткое жизнеописание Л.С.Понтрягина, составленное им самим (рождения 1908 г. Москва)” журналу “Успехи математических наук”. Редакция приняла к печати эту статью. Против публикации были только два человека — О.А.Олейник и С.Л.Соболев.

В примечании редакция сделала сноску: “Публикуя эту статью, редакция осуществляет возможность ознакомить читателя не только с представляющей большой интерес научной биографией выдающегося математика, но и с некоторыми его личными взглядами и оценками, касающимися различных сторон научной жизни в нашей стране”.

По имеющимся у нас данным, Президент Академии А.П.Александров прочел ее еще в сентябре месяце 1978 г. и дал свое согласие к печати. Казалось, все в порядке. Были набраны 3100 экземпляров “Успехов”. В декабре они должны были поступить в продажу. И вдруг издательству дана команда: задержать распространение, а затем вскоре и вовсе рассыпать тираж! до внесения изменений автором.

За время подготовки к печати рукопись “удостоил внимания” главный цензор СССР — Зорин. Он тоже дал свое согласие, так как не нашел ничего антисоветского. Секретных данных в статье тоже нет.

Далее, почему-то заинтересовался “Жизнеописанием” Понтрягина Отдел пропаганды и печати при ЦК партии.

Итак, рукопись ходила, ходила по рукам и кто-то “влепил” в нее незаметную на первый взгляд коротенькую фразу, которая должна была страшно не понравиться Президенту Академии и настроить его еще больше против Л.С.Понтрягина. Президенту разъяснили, что он мог не заметить этой злополучной фразы при первом чтении, а теперь ему специально на нее указали. И он отдает приказ рассыпать 3100 экземпляров журнала и заново набрать после правки автором статьи. Эта операция обошлась в 1000 рублей Академии. Сумма по тем временам не малая. Понтрягину обошлось значительно дороже. Вся эта возня вокруг автобиографии расползлась не только по Москве, значительно шире. И обросла, конечно, всякими небылицами и легендами.

В те времена Правительство Советского Союза в юбилейные даты выдающихся ученых и других деятелей отмечало их наградами различной степени. Высшей награды — Герой Социалистического Труда — удостаивались не многие ученые. К 70-летию Л.С.Понтрягина он уже имел Золотую Звезду Героя. Процедура награждения обычно проходила в следующем порядке. Хлопоты о награждении тем или иным орденом начинал институт, затем это согласовывалось с Отделением Математики, точнее, с академиком-секретарем Отделения, а затем уже Президент отправлял документы в Отдел науки ЦК партии; как шло дальше — мне не известно. В 1978 г. ни И.М.Виноградов, ни Н.Н.Боголюбов, ни А.П.Александров не проявили внимания к юбилейной дате академика Л.С.Понтрягина.

И вдруг! ...3 сентября мы на даче вдвоем отмечаем день рождения моего мужа; я открываю газету "Известия" и вижу указ о награждении Льва Семеновича орденом Ленина! Мой муж к наградам обычно относился спокойно. Но тут он очень обрадовался. Уж очень много было трудностей и неприятностей за последнее время и с Конгрессом, и со статьей в "Успехах", и пр... Много развелось недоброжелателей.

Получить столь высокую награду непосредственно от Правительства СССР вопреки козням академического начальства Льву Семеновичу было приятно. Тем более, что академические деятели были поставлены перед свершившимся фактом. В то время это был заметный штрих.

* * *

Некоторые, наиболее выдающиеся ученые, изредка получали приглашение от Президента Академии сделать доклад на расширенном заседании Президиума. Считалось большой честью для ученого получить такое приглашение. Его мог получить далеко не каждый академик. Вероятно, никому в голову не приходило отказаться без веской причины. Однако Л.С.Понтрягин согласился сделать доклад только после третьего приглашения, когда я уже была вынуждена ему сказать, что дальше отказываться неприлично. В конце концов Президиум АН может знать (а может быть, должен знать!), чем занимаются ученые Академии.

Президиум Академии наук представлен учеными разных специальностей, там и физики, и химики, и техники, историки, философы, биологии и т.д. "Ну, кому там делать доклад по математике? Ты настаиваешь. Ладно. Я согласен. Но пусть этот доклад будет тебе подарком ко дню твоего рождения."

И так получилось, что заседание Президиума, на котором Л.С. сделал доклад, в точности совпало с моим днем рождения.

Дав свое согласие на доклад, Лев Семенович стал тщательно обдумывать, как сделать так, чтобы оптимизация и дифференциальные игры хоть в какой-то степени были понятны этим людям.

Кажется, это ему удалось. На следующий день после доклада Льву Семеновичу звонил домой вице-президент П.Н.Федосеев — философ и благодарил за интересный, не скучный доклад, хотя это математика, и сообщил, что президент А.П.Александров, который всегда в подобных случаях вел заседание, поручил вести заседание кому-то другому, а сам внимательно слушал доклад Понтрягина.

Через некоторое время Б.Н.Делоне познакомился с этим научным сообщением Понтрягина и сказал Льву Семеновичу: "Это же прелесть! Позвольте нам напечатать его в журнале "Природа", членом редколлегии которой я являюсь." В результате доклад был напечатан в журнале "Природа", 1979 г., №1.

Этический уровень ученого всегда волновал Льва Семеновича, В своей статье "Об этике ученого" в журнале "Наш Современник" Л.С.Понтрягин писал: "Не сомневаясь в том, что переброска рек могла бы принести только вред стране, подумаем о том, какими же побуждениями руководствуются сторонники переброски. Являются ли эти побуждения вполне бескорыстным результатом заблуждения или они вызваны корыстным интересом". И далее: "...От ученых, особенно теперь, требуется высокий моральный уровень и чувство ответственности за совершаемые действия. Безответственные действия, прикрывающиеся наукой, могут принести и уже приносят нашей стране огромный вред. Люди, использующие науку в корыстных целях, должны быть морально осуждены".

Публикации о Л.С.Понтрягине в журнале “Математическое образование”

№2(5), 1998 г.

С.М.Никольский. Памяти Л.С.Понтрягина.
А.И.Понтрягина. Из воспоминаний.
Е.Дугин, Г.Карапетян. Интервью академика Понтрягина.
Л.С.Понтрягин. Этика и арифметика.
Л.С.Понтрягин. Мое признание истории математики.

№3(26), 2003 г.

А.И.Понтрягина. Предисловие (или послесловие).

№3(47), 2008 г.

А.И.Понтрягина. Из воспоминаний о Льве Семеновиче Понтрягине.

О параметрическом резонансе, или почему раскачиваются качели, или почему полезно решать дифференциальные уравнения

С. В. Дворянинов

В статье методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений изучается движение математического маятника переменной длины. Эта математическая модель описывает, в частности, раскачивание известных всем с детства качелей.

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами объясняет, как надо раскачиваться на качелях...

В.И.Арнольд

Парадокс, к которому привыкли

Не найти, пожалуй, человека, который ни разу в своей жизни не качался бы на качелях. На тех качелях, с закрывающимися со всех сторон сиденьем, на которые можно без опаски усадить двухлетнего малыша. Или на таких, какие стоят (или по крайней мере стояли раньше) во всех парках культуры и отдыха, — высокие, с лодочками на двоих, на прочных железных тросах. Или совсем простых — два каната, а внизу дощечка. Почему же они раскачиваются? С детскими качелями все ясно: мы толкаем их рукой, выводим из состояния устойчивого равновесия, а потом снова и снова прикладываем силу *по направлению* их движения, подталкиваем качели именно в этом направлении.

А как обстоит дело с большими качелями? Совсем по-другому. Вспомним: мы выводим дощечку (то есть качели) из состояния равновесия на максимально возможное расстояние, запрыгиваем на дощечку и...

О том, что происходит потом, как меняются параметры этой механической системы, в частности, как меняется наибольший угол отклонения качелей от вертикали, и пойдет речь. Напомним только, что находясь на качелях, мы периодически сгибаем и разгибаем ноги в коленях, то поднимаясь, то опускаясь по отношению к дощечке. Тем самым мы перемещаем центр тяжести системы. Фактически это означает, что мы меняем длину качелей (или маятника). А теперь – математическая модель.

Появляются дифференциальные уравнения

Качели – это пример маятника. Математическим маятником (Рис. 1) называется идеальная модель, которая представляет собой материальную точку M массы m, подвешенную на невесомом абсолютно твердом стержне длины L, и которая может совершать колебания только в одной вертикальной плоскости. При этом точка M движется по окружности. Пусть $x(t)$ – угол отклонения маятника от вертикали. Этот угол измеряется в радианах. Условимся считать, что если маятник отклонился вправо, против часовой стрелки, то $x > 0$. На точку M действует сила тяжести $P = mg$, направленная вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по касательной к окружности в точке M, равна $-mg\sin x$ (здесь присутствует знак минус, так как за положительное направление вдоль касательной принято направление, соответствующее возрастанию угла $x(t)$, а эта сила имеет противоположное направление).

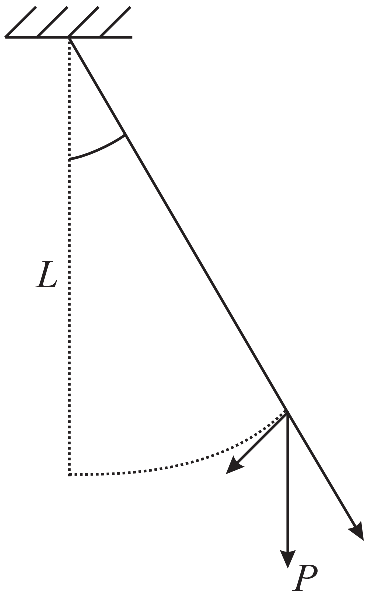


Рис.1.

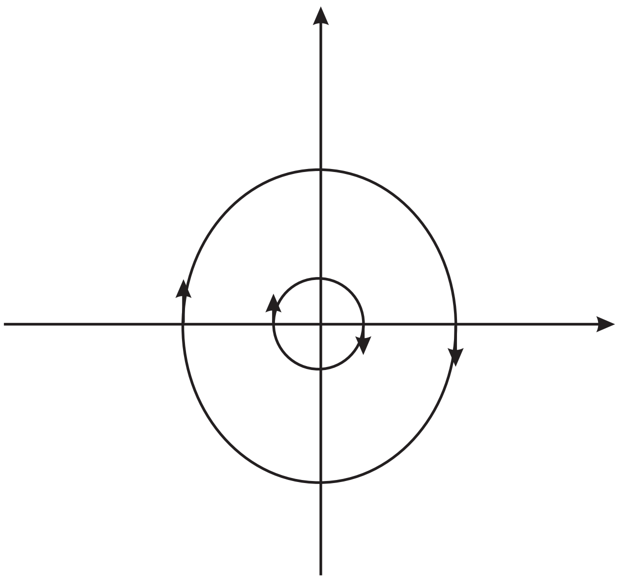


Рис.2.

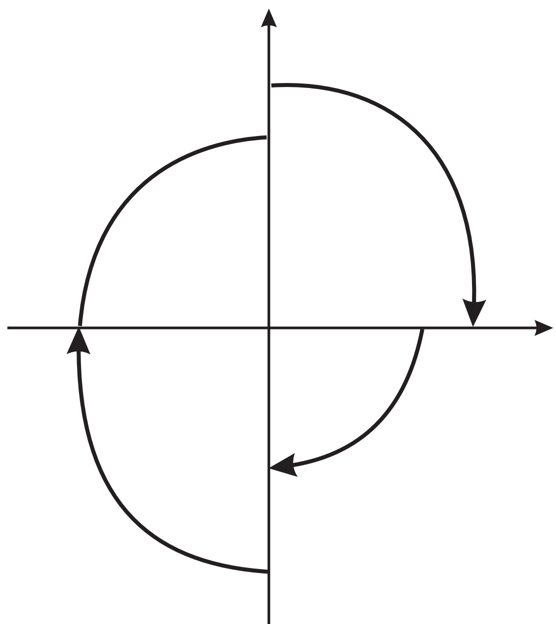


Рис.3.
Часть фазовой траектории, образованная дугами эллипсов и отрезками прямых.

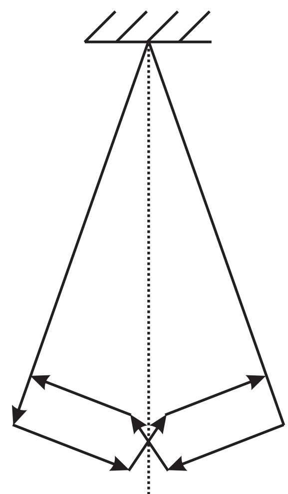


Рис.4.
Зависимость длинны маятника от направления его движения вверх-вниз.

Линейная скорость движения точки вдоль касательной равна $Lx'(t)$ — это производная от пути, равного $Lx(t)$. Следовательно, ускорение равно $Lx''(t)$. Согласно закону Ньютона, уравнение движения точки M имеет вид:

$$Lx'' = \frac{-mg\sin x}{m}$$

или, иначе,

$$x'' = \frac{-g\sin x}{L}.$$

Уравнение это нелинейное ($\sin x$ — нелинейная функция) , и его решение представляет трудности. Для упрощения математической модели предположим, что координата x точки M в процессе движения мало отклоняется от нуля (это соответствует малым колебаниям маятника). Тогда в уравнении можно заменить $\sin x$ на x и получить "приближенное" уравнение маятника

$$x'' = -\omega^2 x, \tag{1}$$

где единственный определяющий это дифференциальное уравнение параметр $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Об этом уравнении, которое называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний, говорится во всех школьных учебниках по алгебре и началам анализа для X-XI классов. В учебнике [1] на с.254 это уравнение (1) описывает движение шарика массой m, к которому прикреплена расположенная горизонтально пружина, другой конец которой закреплен и неподвижен. В состоянии равновесия координата x центра шарика равна нулю. Решение уравнения (1) — функция $x = x(t)$ — описывает зависимость координаты шарика от времени. Итак, одно и то же уравнение (1) описывает два различных колебательных процесса. Это одно из многих свидетельств универсальности математических моделей.

В [1] приведена формула *общего решения* уравнения (1)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

В этой формуле A и φ — произвольные постоянные. Величину A называют амплитудой колебаний, она равна наибольшему углу отклонения маятника от вертикали. Величину φ называют фазой колебаний. Пользуясь формулой для производной сложной формулы, получим формулу для скорости изменения угла отклонения маятника от вертикали:

$$x'(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Каждая из двух функций является периодической функцией времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Обозначим $x'(t) = y(t)$. Если воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, то легко получить такое следствие:

$$\frac{(x'(t))^2}{A^2\omega^2} + \frac{x^2(t)}{A^2} = 1,$$

которое запишем в виде

$$\frac{m(Lx')^2}{2} + \frac{mgLx^2}{2} = \frac{mgLA^2}{2} \tag{2}$$

Первое слагаемое $\frac{m(Lx')^2}{2}$ в левой части (2) представляет, очевидно, кинетическую энергию точки M, линейная скорость которой равна $Lx'(t)$. Выясним механический смысл второго слагаемого. При отклонении маятника от вертикали на угол x точка M поднимается вверх по вертикали на высоту

$$h = L - L\cos x = 2L\sin^2\frac{x}{2} \approx 2L\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{Lx^2}{2},$$

и поэтому второе слагаемое в левой части формулы (2) представляет потенциальную энергию mgh точки M. Следовательно, равенство (2) показывает, что при движении маятника его полная энергия остается неизменной и равной $\frac{mgLA^2}{2}$. Равенство (2) выражает в данном случае закон сохранения энергии.

Из (2) следует, что в крайнее нижнее положение (в котором $x = 0$) маятник приходит с наибольшей угловой скоростью равной

$$|x_1'| = A\sqrt{\frac{g}{L}} = A\omega.$$

Равенство (2) имеет замечательную геометрическую интерпретацию. Напомним, что уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ задает на декартовой плоскости $(x; y)$ окружность радиуса R с центром в начале координат, а уравнение $a^2x^2 + b^2y^2 = R^2$ — эллипс, который получается из окружности сжатием или растяжением вдоль координатных осей. При положительных параметрах a и b полуоси эллипса имеют длину $\frac{R}{a}$ и $\frac{R}{b}$. Рассмотрим теперь плоскость с декартовыми координатами $(x; x')$, которую называют *фазовой плоскостью*. На этой плоскости уравнение (2) задает эллипс, полуоси которого таковы:

— по горизонтальной оси Ox это A, что соответствует наибольшему углу отклонения от вертикали,

— по вертикальной оси Ox' это $A\sqrt{\frac{g}{L}} = A\omega$, что соответствует наибольшей угловой скорости.

Если рассмотреть некоторое решение (как говорят, *частное решение*) уравнения (1) при фиксированных параметрах A и φ, то координаты точки $(x(t); y(t))$ (эту точку называют *фазовой точкой*) при всех значениях времени t удовлетворяют уравнению (1), а точка $(x(t); y(t))$ при изменении времени движется по эллипсу (рис. 2) по часовой стрелке. Полный оборот по каждому эллипсу осуществляется за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Период колебаний не зависит от амплитуды колебаний A. Такие колебания называют изохронными.

Выбор параметра A означает выбор определенного эллипса из семейства (2), выбор параметра φ означает выбор начальной точки на этом эллипсе.

Двигаясь вдоль эллипса, легко увидеть, что при увеличении угла отклонения $|x|$ угловая скорость уменьшается, и наоборот. При этом кинетическая энергия перетекает в потенциальную, и обратно. Интересно и полезно проследить за этим, совершив несколько оборотов по эллипсу.

Пусть фазовая точка в начальный момент времени $t = 0$ имеет координаты $(A; 0)$. Это означает, что маятник отклонился от вертикали вправо на максимальный угол и его угловая скорость равна нулю. Соответствующее частное решение таково

$$x(t) = A\cos\omega t, \quad x'(t) = -A\omega\sin\omega t$$

Тогда в крайнем нижнем положении (когда $\omega t = \frac{\pi}{2}$) угол отклонения равен нулю, а скорость x' при этом максимальна, и ее абсолютное значение равно $A\omega$.

А теперь - самое важное и интересное. Пусть в момент прохождения маятником крайнего нижнего положения его длина мгновенно уменьшилась и стала равной l. При этом параметр уравнения (1) увеличивается и становится равным

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

На практике это означает, что стоящий на качелях человек выпрямился, встал в полный рост.

На время прервем наше формально-математическое исследование маятника и вспомним, как это распрямление в полный рост происходит. Происходит оно не очень легко. Даже в неподвижном состоянии выпрямление коленей требует усилий. В результате такого подъема увеличивается потенциальная энергия. А выпрямление ног на качелях требует гораздо больших усилий (это естественно – на качелях кроме силы тяжести дополнительно приходится преодолевать центробежную силу). Стало быть, работа, производимая при выпрямлении ног, переходит не только в потенциальную энергию. Имеется некоторый избыток, который переходит в... — ? Переходит, разумеется, в энергию кинетическую, ибо больше переходить не во что. Следовательно, точка M продолжает движение по окружности радиуса l меньшего, чем раньше, и с большей линейной скоростью. Какова теперь величина полной механической энергии системы? При этом в расчетах нельзя использовать закон сохранения энергии – суммарная энергия точки M увеличивается.

К счастью, закон сохранения энергии – это лишь один из законов сохранения. Помимо энергии, есть и другие величины – функции состояния системы – которые обладают важным и замечательным свойством сохраняться во времени. Помимо энергии среди этих сохраняющихся величин наиболее важную роль играют импульс (или количество движения), о котором часто говорят в школе, и момент импульса (или момент количества движения, вращательный момент, угловой момент или просто момент), о котором в школе говорят не очень часто.

Мы не будем сейчас излагать полную теорию момента импульса. Ограничимся лишь важным частным случаем – равномерным движением материальной точки по окружности. Рассмотрим шар, который связан с точкой O нитью и который движется по гладкой горизонтальной плоскости по окружности с постоянной угловой (и линейной) скоростью. Что произойдет с угловой скоростью, если длину нити уменьшить и подтянуть шар к точке O? Результат известен из опыта, этот эффект широко используют фигуристы на льду и гимнасты: угловая скорость увеличится. Установим зависимость угловой скорости λ от радиуса r окружности, по которой движется точка. Пусть $\lambda = \lambda(r)$, и тогда кинетическая энергия шара равна $W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\lambda^2 r^2}{2}$ (здесь v — это линейная скорость). Пусть радиус уменьшился от a до b. Этому изменению радиуса отвечает приращение кинетической энергии шара $\Delta W = \frac{m\lambda^2(b)b^2}{2} - \frac{m\lambda^2(a)a^2}{2}$. Кинетическая энергия увеличилась за счет работы переменной силы, направленной против центробежной силы, которая равна $F = \frac{mv^2}{r} = m\lambda^2(r)r$. Работа этой силы на отрезке $b \le r \le a$ выражается интегралом $\int\limits_b^a m\lambda^2(r)rdr$ (о работе переменной силы см. учебник [1] стр.190-191). Следовательно,

$$\frac{m\lambda^2(b)b^2}{2} - \frac{m\lambda^2(a)a^2}{2} = \int\limits_b^a m\gamma^2(r)rdr,$$

или (сокращая на m)

$$\frac{\lambda^2(b)b^2}{2} - \frac{\lambda^2(a)a^2}{2} = \int\limits_b^a \lambda^2(r)rdr. \tag{3}$$

Уравнение (3) содержит неизвестную функцию $\lambda = \lambda(r)$ под знаком интеграла. Подобные уравнения называют интегральными. Легко проверить, что решением уравнения (4) является функция $\lambda(r) = \frac{c}{r^2}$, где c – произвольная постоянная.

Для решения (3) сделаем замену $\lambda^2(r) = y(r)$ и продифференцируем обе части уравнения (4) по a. Получим, что

$$-\frac{y'(a)a^2}{2} - y(a)a = y(a)a,$$

или

$$\frac{dy}{da} = -\frac{4y}{a}.$$

Решая это дифференциальное уравнение разделением переменных, найдем, как и утверждалось выше, $y(a) = \frac{c}{a^4}$.

Итак, зависимость между радиусом и угловой скоростью установлена:

$$\lambda(r)r^2 = C. \tag{4}$$

Равенство (4) выражает еще один закон сохранения – а именно закон сохранения импульса применительно к нашему маятнику.

Вернемся к маятнику, достигшему крайнего нижнего положения. В этот момент, разделяющий две фазы движения качелей вниз и вверх, происходит мгновенный подъем центра тяжести качелей, то есть точки M. Длина маятника уменьшается от L до l. Маятник же продолжает движение с новой угловой скоростью $\lambda_{нов}$, и при этом, согласно (4), выполняется равенство

$$\lambda_{стар}(L)L^2 = \quad \lambda_{нов}(l)l^2.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям угловой скорости маятника, получим такое равенство

$$x'_{стар} \cdot L^2 = x'_{нов} \cdot l^2.$$

Отсюда находим, что маятник из крайнего нижнего положения $x = 0$ продолжает движение с новой, а именно с бо́льшей, чем ранее, угловой скоростью

$$x'_{нов} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 x'_{стар} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 A\omega.$$

На фазовой плоскости фазовая точка совершает в этот момент мгновенный перескок из точки $(0; x'_{стар})$ в точку $(0; x'_{нов})$ (рис. 3).

Закон движения маятника остается неизменным, и теперь следует рассмотреть уравнение (2), относящееся к стадии подъема маятника из крайнего нижнего положения в крайнее верхнее, при этом в уравнении (2) L следует заменить на l:

$$\frac{m(lx')^2}{2} + \frac{mglx^2}{2} = \frac{mglA^2_{нов}}{2}. \tag{5}$$

Осталось теперь определить новое значение параметра $A_{нов}$. Это значение находится из того условия, что эллипс (4) на фазовой плоскости $(x; x')$ проходит через точку с координатами $(0; x'_{нов})$. Подставляя в (4) значение угла $x = 0$ и значение скорости $x' = x'_{нов} = \left(\frac{L}{l}\right)^2 A\omega$, найдем

$$A_{нов} = \left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{3}{2}} A.$$

Вспоминая геометрический смысл параметра $A_{нов}$, заключаем, что в крайнем левом положении маятника угол его отклонения от вертикали — наибольший угол отклонения — больше первоначального в $\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$ раз, поскольку $l < L$.

Итак, маятник при таком изменении длины раскачивается. В крайнем верхнем левом положении качелей (или маятника) человек, находящийся на качелях, должен мгновенно присесть (рис. 4). Поскольку в этот момент мгновенная угловая скорость качелей равна нулю, то она останется такой и после увеличения длины маятника. К новой фазе движения маятника относятся проведенные выше рассуждения, и за вторую половину периода максимальный угол отклонения снова увеличится в $\left(\frac{L}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$ раз. Ясно, что наибольший угол отклонения маятника от вертикали, то есть амплитуда колебаний, возрастает в геометрической прогрессии.

Мы наблюдаем интересное явление. Свободные колебания маятника постоянной длины продолжаются неограниченно во времени и являются периодическими. Мы считаем, что трение в точке подвеса и сопротивление воздуха отсутствуют, — в реальной ситуации колебания, конечно, затухают, и маятник оказывается в крайнем нижнем положении. Но в идеальной ситуации на фазовой плоскости каждая траектория оказывается замкнутой кривой (эллипсом). Все эти траектории на фазовой плоскости образуют фазовый портрет, который еще называют фазовым потоком (рис. 2).

Траектории маятника переменной длины устроены сложнее. В первой и третьей четвертях фазовой плоскости (там, где длина маятника равна L) они представлены дугами эллипсов одного семейства, во второй и четвертой четвертях — дугами эллипсов другого семейства. Длина маятника скачкообразно меняется в моменты изменения направления движения маятника и в моменты прохождения маятника крайнего нижнего положения (рис. 4). В результате склейки дуг эллипсов на фазовой плоскости получится раскручивающаяся спираль (один виток этой спирали представлен на рис. 3). В целом спираль описывает движение маятника, длина которого периодически меняется.

Следовательно, чтобы раскачаться на качелях, следует отклонить их на некоторый угол и, запрыгнув на них, согнуть ноги в коленях. Далее управление длиной качелей осуществляется в зависимости от текущего состояния качелей (или, другими словами, в зависимости от фазовых координат — от угла отклонения от вертикали и скорости его изменения). Оказавшись в крайнем нижнем положении, следует встать в полный рост, распрямив ноги в коленях. При этом центр тяжести сместится вверх, и тем самым длина качелей (или длина маятника) уменьшится. В крайнем верхнем положении вновь следует согнуть ноги в коленях и присесть. Впрочем, все это хорошо известно даже пятилетним малышам из практики...

Из нашего анализа следует, что даже при сколь угодно малом периодическом изменении длины качели раскачиваются. Для этого достаточно качели чуть отклонить от положения равновесия или придать малый импульс. Такое явление называют параметрическим резонансом. Так называют ситуацию, когда период изменения параметров (в нашем случае период изменения длины маятника) близок к периоду собственных колебаний.

Собственные колебания, описываемые уравнением (1), имеют постоянную амплитуду. При параметрическом резонансе амплитуда колебаний возрастает после любого начального возмущения состояния равновесия.

В одной из своих книг академик В. И. Арнольд пишет: “Основное открытие Ньютона, то, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: “*Data aequotione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*”. В переводе на современный математический язык это означает: “Полезно решать дифференциальные уравнения”.

Мы надеемся, что наша статья поможет вам в какой-то мере продвинуться в понимании этого высказывания.

Литература

1. Алгебра и начала анализа. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1990.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
4. Магнус К. Колебания. М.: Мир, 1982.
5. Иродов И.Е. Основные законы механики. М.: Высшая школа, 1978.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент кафедры прикладной математики
Самарского государственного аэрокосмического
университета имени академика С. П. Королева,
доцент кафедры естественно-математического
образования Самарского института
повышения квалификации работников образования,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvoryan@yandex.ru

Средняя линия прямоугольного треугольника и его точки Фейербаха

Е. Д. Куланин

Автор продолжает серию статей о взаимном расположении замечательных точек и линий, связанных с треугольником. Рассматривается случай прямоугольного треугольника.

Лемма 1. Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, I – центр его вписанной окружности радиуса r, $AB = c$, $BC = a < AC$, K — точка пересечения прямых MI и AC. Тогда $AK = cr/(a - 2r)$.

□ Обозначим через M_b и B_I проекции точек M и I на катет AC длины b, а длину отрезка M_bK — через x (рис. 1).

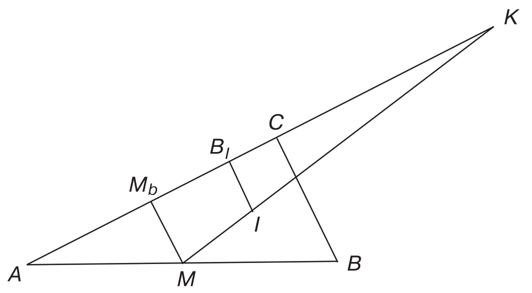


Рис. 1.

Тогда из подобия прямоугольных треугольников MM_bK и IB_IK находим

$$MM_b/IB_I = M_bK/B_IK. \tag{1}$$

Но $MM_b = 1/2BC = a/2$ как средняя линия треугольника ABC, а $B_IK = M_bK - M_bB_I = M_bK - (M_bC - B_IC) = x - (b/2 - r) = x + r - b/2$.

Теперь равенство ((1)) можно переписать в следующем виде: $a/2r = x/(x + r - b/2)$, откуда $x = a/2(b/2 - r)/(a/2 - r)$ и

$$\begin{aligned}AK = AM_b + M_bK = b/2 + x = a/2(b/2 - r)/(a/2 - r) + b/2 =\\ = (ab/4 - ar/2 + ab/4 - br/2)/(a/2 - r) = (ab/2 - r/2(a + b))/(a/2 - r) =\\ = (ab - r(a + b))/(a - 2r) = (2pr - r(a + b))/(a - 2r) = r(2p - a - b)/(a - 2r) =\\ = r(a + b + c - a - b)/(a - 2r) = rc/(a - 2r) = cr/(a - 2r).\end{aligned}$$

□

Лемма 2. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, r — радиус его вписанной окружности. Тогда $ar = (a - 2r)(b - r)$.

□ Запишем очевидное равенство $4pr = 4S$, где $S = \frac{1}{2}ab$ — площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b. Так как в прямоугольном треугольнике $r = p - c$, то

$$c = p - ru2(a + b + c)r = 2(a + b + p - r)r = 4S$$

или

$$2ar + 2br + 2pr - 2r^2 = 4S, \quad 2ar = 4S - 2pr - 2br + 2r^2 = 2S - 2br + 2r^2,$$

$$ar = ab - 2br + 2r^2 - ar = b(a - 2r) - r(a - 2r) = \; = (a - 2r)(b - r).$$

□

Лемма 3. Пусть H_b — ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$ с вершинами в точках касания вневписанной окружности I_b прямоугольного треугольника ABC с продолжением катета BC, катетом AC и продолжением гипотенузы AB. Тогда $CH_b = CB_b = b - r$, где $b = AC$, r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

□ Согласно предложению 1 из [1], точка H_b лежит на отрезке B_bA_c, где A_c — точка касания вневписанной окружности I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжением катета BC (рис. 2), но $\angle B_bA_cC = 1/2\angle ABC = \beta/2$ (см. теорему 1 из [2]), поэтому

$$\angle A_cB_bC = 90^\circ - \angle B_bA_cC = 90^\circ - \beta/2 = \alpha + \beta - \beta/2 = \alpha + \beta/2.$$

Учитывая то, что угол B_bH_bC — внешний угол треугольника A_cH_bC, получим:

$$\angle B_bH_bC = \angle H_bCA_c + \angle H_bA_cC = \alpha + \beta/2 = \angle A_cB_bC u CH_b = CB_b = CA - AB_b = b - r.$$

□

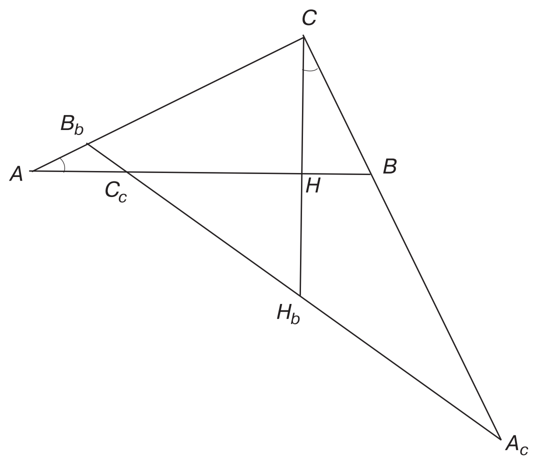


Рис. 2

Предложение 1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH, M_a — середина катета BC, I_2 — центр вписанной окружности треугольника BCH, H_b — ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$ с вершинами в точках касания вневписанной окружности I_b прямоугольного треугольника ABC с его стороной и продолжениями сторон. Тогда точки M_a, I_2, H_b лежат на одной прямой.

□ Треугольник BCH подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = BC/AB = a/c$, поэтому по лемме 1 длина отрезка CP, где P — точка пересечения прямых M_aI_2 и CH (рис. 3), равна $k \cdot AK = (a/c) \cdot c \cdot r/(a - 2r) = a \cdot r/(a - 2r)$.

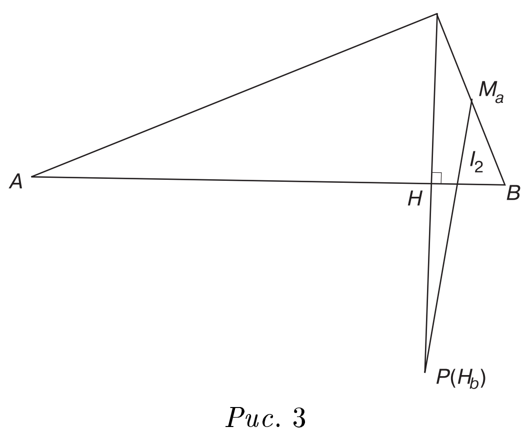


Рис. 3

Но по лемме 2 $ar = (a-2r)(b-r)$ и $CP = ar/(a-2r) = (a-2r)(b-r)/(a-2r) = b-r$. По лемме 3 $CH_b = b - r = CP$. Равенство $CH_b = CP$ означает, что точки P и H_b совпадают, но P — точка, в которой прямая M_aI_2 пересекает прямую CH.

Отсюда следует, что точки M_a, I_2, H_b лежат на одной прямой. □

Теорема 1. Вписанная окружность I и три вневписанные окружности I_a, I_b, I_c прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) касаются прямых BC, CA, AB соответственно в точках A_I, B_I, C_I; A_a, B_a, C_a; A_b, B_b, C_b; A_c, B_c, C_c; H_I, H_a, H_b, H_c — ортоцентры треугольников $A_IB_IC_I$, $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$ соответственно, M_a и M_b — середины катетов BC и AC.

Тогда прямые M_aH_b и M_bH_a пересекаются в точке Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC, а прямые M_bH_a и M_aH_b — в точке Фейербаха F_c, причем точки Фейербаха F и F_c совпадают с основаниями высот треугольника $M_aM_bH_b$, проведенных соответственно из вершин M_b и M_a, а точка H_a — с ортоцентром треугольника $M_aM_bH_b$.

Аналогично, прямые M_aH_I и M_bH_c пересекаются в точке Фейербаха F_b прямоугольного треугольника ABC, а прямые M_bH_I и M_aH_c — в точке Фейербаха F_a, причем точки Фейербаха F_a и F_b совпадают с основаниями высот треугольника $M_aM_bH_c$, проведенных из вершин M_b и M_a, а точка H_I — с ортоцентром треугольника $M_aM_bH_c$.

□ Соединим точки M_a и H_b отрезком прямой (рис. 4). Из предложения 1 следует, что центр I_2 вписанной окружности треугольника BCH, где H — основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C на гипотенузу AB, лежит на отрезке M_aH_b.

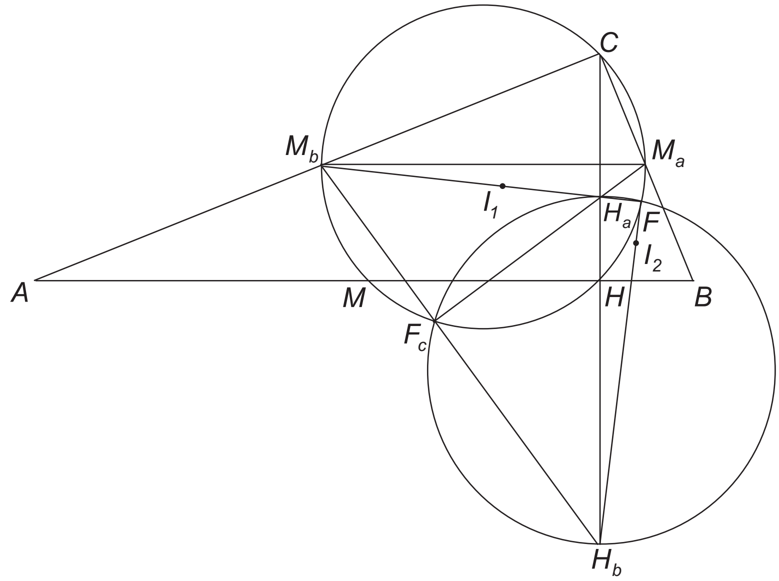


Рис. 4

Но M_a — центр описанной окружности прямоугольного треугольника BCH, поэтому прямая M_aH_b проходит через внутреннюю точку Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC (см. следствие 3 и задачу 3 из [3]).

Итак, точки M_a, F, H_b лежат на одной прямой. Поскольку M_aM_b — диаметр окружности Эйлера треугольника ABC, то

$$\angle M_aFM_b = 90^\circ u \angle M_bFH_b = 180^\circ - \angle M_bFM_a = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Так как H_aH_b — диаметр окружности шести точек S'_c, проходящей через точку F, то $\angle H_aFH_b = 90^\circ = \angle M_bFH_b$. Последнее равенство означает, что точки M_b, H_a и F лежат на одной прямой.

Пусть L — середина CH. Поскольку H_bL и M_bF — высоты треугольника $M_aM_bH_b$, пересекающиеся в точке H_a, то прямая M_aH_a содержит третью высоту этого треугольника, т. е. $M_aH_a \perp M_bH_b$.

Обозначим через P точку пересечения прямых M_aH_a и H_bM_b. Тогда $\angle M_bPM_a = \angle H_bPH_a = 90^\circ$ и поэтому точка P лежит одновременно на окружности Эйлера треугольника ABC и на окружности шести точек S'_c этого треугольника, т. е. совпадает с одной из двух точек их пересечения.

По теореме 7 из [4] точки Фейербаха F и F_c лежат на окружности S'_c. Отсюда следует, что точки пересечения окружности S'_c с окружностью Эйлера треугольника ABC совпадают с точками Фейербаха F и F_c. Так как точка F не лежит на прямой M_bH_b, то это означает, что точка P совпадает с точкой F_c.

Таким образом, точки F и F_c являются основаниями высот M_bF и M_aF_c треугольника $M_aM_bH_b$, пересекающихся в точке H_a.

Для того, чтобы доказать аналогичные факты для треугольника $M_aM_bH_c$, достаточно установить, что, например, точки M_a, H_I, F_b лежат на одной прямой, соответствующим образом переформулировав и передоказав леммы 1–3 и предложение 1 для случая вневписанной окружности, после чего нужно воспользоваться тем, что точки Фейербаха F_a и F_b лежат на окружности шести точек S_c прямоугольного треугольника ABC (см. теорему 5 из [4]). □

Теорема 2. Центр E окружности Эйлера прямоугольного треугольника ABC, середина L его высоты, опущенной из вершины прямого угла и точки Фейербаха F и F_c лежат на одной окружности. Точки E, L и внешние точки Фейербаха F_a и F_b также лежат на одной окружности.

□ Окружность Эйлера треугольника $M_aM_bH_b$ проходит через основания L, F, F_c его высот (см. теорему 1) и середину E его основания M_aM_b (рис. 5). Аналогично, основания высот L, F_a, F_b треугольника $M_aM_bH_c$ и середина E его основания M_aM_b лежат на окружности Эйлера треугольника $M_aM_bH_c$. □

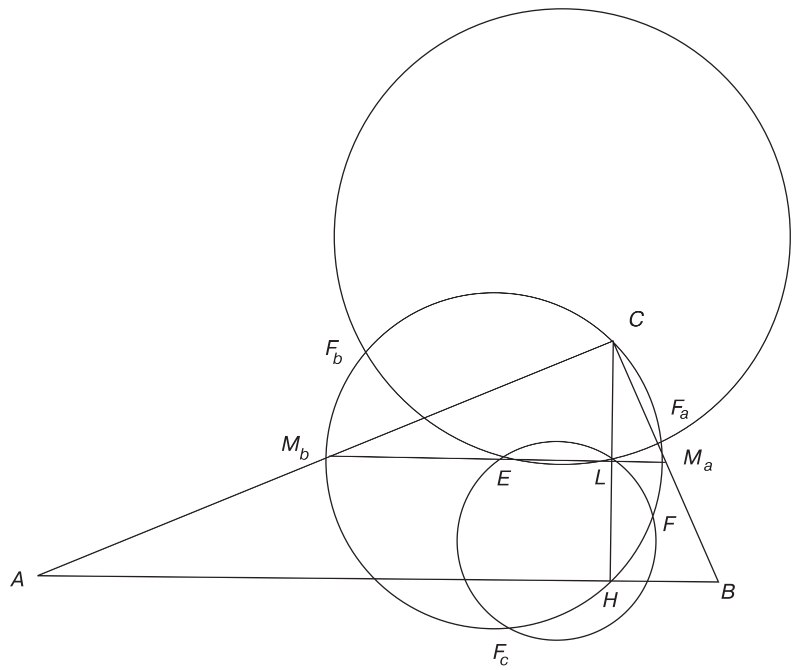


Рис. 5

Литература

1. Е. Д. Куланин. *Окружности шести точек прямоугольного треугольника.* Журнал «Математическое образование», № 2(42), 2007.

2. Е. Д. Куланин.*Прямоугольный треугольник.* Журнал «Математическое образование», № 1(41), 2007.

3. Е. Д. Куланин. О некоторых свойствах точек Фейербаха и Тебо. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», № 3, 2005.

4. Е. Д. Куланин. *Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника.* Журнал «Математическое образование», № 3(43), 2007.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник.

E-mail: lukas03@mail.ru

Экстремальные геометрические задачи

В. Б. Дроздов

В статье иллюстрируются методы решения планиметрических и стереометрических экстремальных задач, как элементарные, так и с применением дифференциального исчисления. Приведена подборка задач с ответами, которые можно использовать на уроках при изучении соответствующих разделов.

«Так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым Творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.»
Леонард Эйлер

Под экстремальными геометрическими задачами имеются в виду задачи на нахождение наибольших или наименьших значений геометрических величин. Эти достаточно разнообразные задачи можно классифицировать по-разному. По числу измерений — планиметрические и стереометрические. По количеству фигур (тел) — одна фигура (тело) или комбинация фигур (тел). По виду исследуемой функции — от одной или нескольких переменных. По методам решения — общий (с помощью производной) или частные методы элементарной математики. Экстремальные геометрические задачи представляют собой своеобразный «математический сплав» геометрии, алгебры, тригонометрии, анализа. Поэтому их решение весьма полезно. Начнем с классических примеров.

Планиметрия

Задача 1. Из множества всех треугольников с данным периметром $2p$ найти треугольник с наибольшей площадью.

Решение. Имеем две независимые переменные a и b, ибо третья сторона треугольника $c = 2p - a - b$. Так как частные производные в школе не изучаются, то ищем элементарный метод решения. Естественно записать неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим для трех величин: $p-a$, $p-b$, $p-c$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3},$$

откуда

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^3}{27} \qquad \text{и} \qquad p(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{p^4}{27}.$$

В силу формулы Герона $S^2 \le \dfrac{p^4}{27}$, следовательно, $S \le \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

Известно, что среднее геометрическое равно среднему арифметическому тогда и только тогда, когда они составлены из равных величин, то есть в нашем случае при $p-a = p-b = p-c$. Значит, $S_{\max} = \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, что будет в случае равностороннего треугольника.

Задача 2. Из всех четырехугольников, вписанных в окружность радиусом R, найти четырехугольник наибольшей площади.

Решение. Площадь произвольного четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними: $S = \frac{1}{2}ef\sin\alpha$. Очевидно, что $e \le 2R$; $f \le 2R$; $\sin\alpha \le 1$.

Следовательно, $S \le 2R^2$, откуда $S_{\max} = 2R^2$ при $e = f = 2R$. и $\alpha = 90°$. Значит, искомый четырехугольник — квадрат. Интересно, что в данной задаче довольно затруднительно применить не только обычную, но и частные производные.

Задача 3. Пусть r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника. Найти наибольшее значение отношения r/R.

Решение. Из формулы Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где d — расстояние между центрами окружностей, сразу вытекает, что $(r/R)_{\max} = 1/2$. А как решить задачу без этой нетривиальной формулы? Из известных формул $r = S/p$, $R = \dfrac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ получим:

$$\frac{r}{R} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}.$$

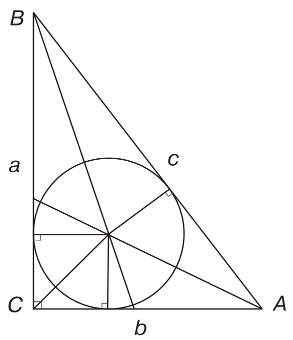
Последнее равенство нужно возвести в квадрат и сгруппировать сомножители так:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{a^2}\right)\left(\frac{(b+c-a)(b+a-c)}{b^2}\right)\left(\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{c^2}\right).$$

В итоге имеем:

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{(b-c)^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{(a-c)^2}{b^2}\right)\left(1 - \frac{(a-b)^2}{c^2}\right),$$

откуда следует, что уже известный результат будет только в случае равностороннего треугольника.



Задача 4. Среди всех прямоугольных треугольников с общей гипотенузой c найти тот, который имеет наибольший радиус вписанной окружности r.

Решение. См. рис. 1. Из формулы $\operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}$ при

$$C = 90°, \quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{C}{2}(\sin A + \cos A + 1),$$

имеем:

$$r = \frac{C}{2}(\sin A + \cos A - 1) = \frac{C}{2}\left(\sqrt{2}\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right).$$

Поэтому $r_{\max} = \dfrac{C}{2}(\sqrt{2} - 1)$ при $A = \dfrac{\pi}{4}$, то есть треугольник — равнобедренный. Ниже для сравнения решим задачу с помощью производной. $r' = \dfrac{C}{2}(\cos A - \sin A)$. Из уравнения $r' = 0$ находим $A = \dfrac{\pi}{4}$. Очевидно, что $0 < A \le \dfrac{\pi}{4}$, ибо, не умаляя общности, можно считать, что A — не больший острый угол треугольника. Поскольку при $A \to 0$ $r \to 0$, а $r\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{C}{2}(\sqrt{2} - 1)$, то мы пришли к уже найденному элементарным способом результату.

Задача 5. Найти внутри треугольника точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника была бы наименьшей.

Решение. В этой задаче эффективен метод координат. Пусть вершины треугольника ABC имеют координаты: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, а искомая точка $M(x; y)$. Сумма квадратов расстояний

$$S = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

легко приводится к виду:

$$S = \left(3x^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3)x + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right) + \left(3y^2 - 2(y_1 + y_2 + y_3)y + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right).$$

Из свойств квадратичной функции следует, что $S_{\min}$ достигается при $x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ и $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Но тогда точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Доказательство последнего весьма прозрачно и тоже легко проводится методом координат. Достаточно написать уравнения двух медиан треугольника ABC и найти координаты их точки пересечения. Отметим, что в точке пересечения медиан треугольника находится его центр масс.

Стереометрия

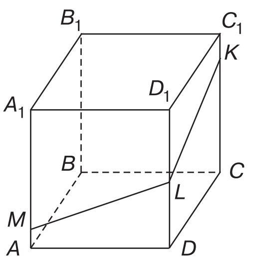
Задача 6. Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной диагональю d найти тот, который имеет наибольшую площадь полной поверхности S.

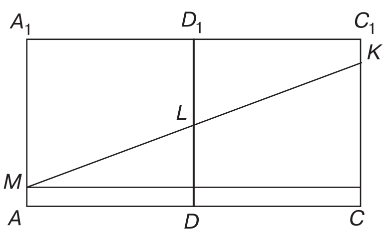
Решение. Среди измерений параллелепипеда x, y, z два независимых, поскольку $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$. Значит, ищем элементарный способ определить наибольшее значение переменной величины $S = 2xy + 2xz + 2yz$. Для этого надо сложить неравенства

$$\begin{cases} (x-y)^2 \geq 0, \\ (x-z)^2 \geq 0, \\ (y-z)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Сразу получим: $S \leq 2d^2$, откуда $S_{\max} = 2d^2$ при $x = y = z$, то есть в случае куба. Некоторая искусственность решения компенсируется его краткостью и изяществом.

Задача 7. На ребре AA_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M так, что $AM = \frac{1}{7}$, а на ребре CC_1 взята точка K. Указать кратчайший маршрут из точки M в точку K по поверхности куба в зависимости от параметра $a = CK$.





Решение. Мы избежим чрезвычайно громоздких выкладок, если догадаемся повернуть грань куба DCD_1C_1 на $90°$. См. рис. 2. Это совершенно допустимо, так как отрезки ML и LK от этого не изменятся. Ясно, что кратчайший маршрут будет в том и только в том случае, когда точки M, L, K лежат на одной прямой. По теореме Пифагора легко находим:

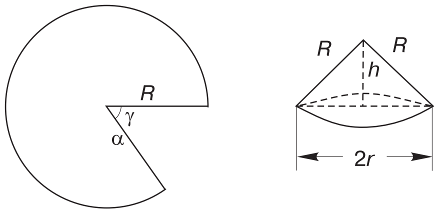
$$(ML + LK)_{\min} = \sqrt{4 + \left(a - \frac{1}{7}\right)^2}.$$

Задача 8. Из круга радиусом R вырезается сектор с углом α при вершине, и оставшаяся часть сворачивается в коническую воронку. При каком α получится воронка наибольшей вместимости?

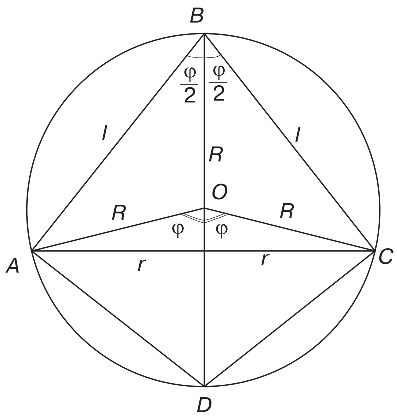
Решение. Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - h^2)h = \ = \frac{1}{3}\pi(R^2 h - h^3)$$

— функция одной переменной h, заключенной в границах $0 < h < R$. См. рис. 3.



Производная этой функции обращается в нуль при $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$. При стремлении h к своим границам объем конуса стремится к нулю. Поэтому при $h = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, то есть $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ этот объем максимален. Из очевидного равенства $\alpha R = 2\pi R - 2\pi r$ находим: $\alpha = 2\pi\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.



Задача 9. В данный шар радиусом R вписать конус, имеющий наибольшую площадь полной поверхности S.

Решение. На рис. 4 изображено общее осевое сечение шара и конуса. Пусть r и l — радиус основания и образующая конуса соответственно. Тогда $S = \pi r^2 - \pi r l$. В качестве независимой переменной удобно выбрать $\angle AOD = \varphi$. Вписанный угол $ABD = \dfrac{\varphi}{2}$. Ясно, что $r = R\sin\varphi$ и $l = 2R\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Выражаем S как функцию от φ:

$$S = \pi r^2(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}).$$

По виду последней функции понятно, что не обойтись без дифференциального исчисления. Уравнение $S'_\varphi = 0$ приводится к виду:

$$2\sin 2\varphi + 3\cos\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Применяя дважды формулу синуса двойного угла и однократно формулу косинуса тройного угла, получим:

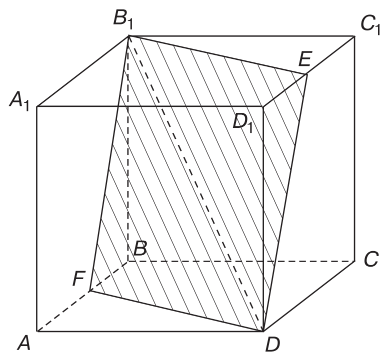
$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} - 1\right) = 0.$$

Единственный корень последнего уравнения, удовлетворяющий условию $0 < \varphi < \pi$, есть $\varphi = 2\arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right)$. При стремлении угла φ к своим границам площадь S стремится к нулю. Значит, параметры конуса с наибольшей площадью полной поверхности таковы:

радиус основания $\qquad r = R\sin\varphi = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{R}{16}\sqrt{190+14\sqrt{17}}$

и высота $\qquad h = R(1+\cos\varphi) = 2R\cos^2\dfrac{\varphi}{2} = R\left(\dfrac{23-\sqrt{17}}{16}\right).$

Видим, что иногда ответ в задачах бывает весьма громоздким.



Задача 10. Среди всех сечений единичного куба, проходящих через его диагональ, найти сечение наименьшей площади и саму эту площадь.

Решение. На рис. 5 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его искомое сечение — параллелограмм DEB_1F. Пусть $D_1E = BF = x$ (эти отрезки равны в силу соображений симметрии). Ясно, что площадь сечения $S = 2S_{\triangle B_1DE}$. Стороны треугольника B_1DE легко определяются по теореме Пифагора:

$$B_1D = a = \sqrt{3}; \qquad DE = b\sqrt{1+x^2};$$
$$B_1E = c = \sqrt{1+(1-x)^2}.$$

Формулу Герона здесь удобнее записать в виде:

$$S_{\triangle B_1DE} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4},$$

исключив полупериметр p. Поскольку умножать многочлены легко, подставляем в последнюю формулу a, b, c выраженные через x. Преодолев громоздкие, но все же «технические» вычисления, получим весьма компактный результат:

$$S = \sqrt{2(x^2-x-1)}.$$

Очевидно, что $0 \le x \le 1$. Находим $S(0) = S(1) = \sqrt{2}$ и значение площади при $x = \dfrac{1}{2}$ (абсцисса вершины параболы $y = x^2 - x + 1$): $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Следовательно, сечение наименьшей площади, равной $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, проходит через середины ребер куба AB и C_1D_1.

В заключение приведем достаточно представительный список экстремальных геометрических задач с ответами.

Планиметрия

1. В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади.

2. В данный полукруг вписать прямоугольник наибольшей площади.

3. Из всех прямоугольников данного периметра найти прямоугольник наибольшей площади.

4. Среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти тот, периметр которого наибольший.

5. Из круговых секторов данного периметра p найти сектор наибольшей площади $S_{\max}$.

6. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь большая диагональ этой трапеции?

7. Даны две пересекающиеся окружности радиусов r и R. Их общая хорда равна $2a$. Найти длину наибольшей секущей, проходящей через точку пересечения окружностей.

8. На основании треугольника найти точку, произведение расстояний от которой до двух других сторон треугольника было бы наибольшим.

9. Заключить квадрат со стороной a в равносторонний треугольник возможно меньших размеров. Найти сторону этого треугольника.

10. Поместить внутри квадрата со стороной a равносторонний треугольник возможно больших размеров. Найти сторону этого треугольника.

11. На окружности радиусом R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

12. В круг радиуса R вписывается данный угол α. Какими должны быть длины хорд, образующих этот угол, чтобы их сумма была наибольшей?

13. Из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами найти четырехугольник наибольшей площади.

14. Даны площадь S и угол α треугольника. Найти минимум а) суммы двух сторон, заключающих данный угол; б) стороны, противолежащей данному углу; в) всего периметра.

15. Из всех треугольников, вписанных в круг и имеющих общее основание, найти треугольник с наименьшей площадью.

16. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти треугольник с наибольшей площадью.

17. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны a. При какой длине другого основания площадь трапеции будет наибольшей?

18. Найти основание равнобедренного треугольника с данной стороной b, в который вписана окружность наибольшего радиуса.

19. В данную окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник. Какое наибольшее значение может принимать высота этого треугольника, проведенная к боковой стороне, и при каком значении угла при вершине?

20. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника равна l. Какое наибольшее значение может принимать высота треугольника, проведенная к гипотенузе?

21. Вырезать из квадрата шестиугольник наибольшей площади.

22. Найти длину наименьшего отрезка, который бы разделил равносторонний треугольник со стороной a на две равновеликие части.

23. Какова наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в ромб с диагоналями $2a$ и $2b$?

24. Доказать, что из всех треугольников с данной стороной $BC = a$ и данным противолежащим углом A равнобедренный треугольник имеет наименьшую медиану m_a, если угол A при вершине тупой, и наибольшую, если угол A острый.

25. В треугольнике заданы сторона a и периметр $2p$. Какие длины должны иметь две другие стороны этого треугольника, чтобы его площадь была максимальной?

26. Какой должен быть угол при основании равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

27. Острый угол A прямоугольного треугольника ABC равен $30°$. На гипотенузе AB выбрана точка B так, что сумма квадратов расстояний ее до вершин треугольника минимальна. Найти отношение $AD : BD$.

28. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круговой сектор радиусом R с центральный углом $\alpha \leq 90°$.

29. Какими должны быть острые углы в прямоугольном треугольнике, чтобы отношение гипотенузы к высоте, опущенной из вершины прямого угла, было минимальным?

30. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Какие должны быть размеры окна, чтобы оно имело наибольшую площадь при заданном периметре окна P.

31. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине найти треугольник с наибольшей биссектрисой угла при вершине треугольника.

32. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, который имеет наибольшую сумму квадратов сторон.

33. Из всех треугольников с данным углом и с данной площадью найти тот, у которого сумма квадратов сторон, образующих данный угол, наименьшая.

34. Из всех треугольников, вписанных в данную окружность, найти тот, у которого сумма квадратов расстояний от центра окружности до сторон наименьшая.

35. Из всех прямоугольников, описанных около прямоугольника со сторонами a и b найти тот, который имеет наибольшую площадь. Вычислить эту площадь.

36. В данный треугольник вписан прямоугольник так, что одна его сторона находится на основании треугольника. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади?

37. Из всех прямоугольников, имеющих данную диагональ, найти прямоугольник:
а) с наибольшей площадью; б) с наибольшим периметром.

38. Найти наибольшее значение острого угла, образованного медианами катетов прямоугольного треугольника.

39. В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям AD и BC. Известно, что диагональ BD равна a, а длина AD равна $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. При какой длине боковой стороны AB площадь трапеции будет наибольшей?

40. В сектор радиуса R с центральным углом 2α $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ вписан равнобедренный треугольник так, что одна из его вершин лежит на дуге сектора, а две другие — на ограничивающих сектор радиусах, причем оси симметрии сектора и треугольника совпадают. Чему равно наибольшее значение площади такого треугольника?

41. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Какую наименьшую длину может иметь медиана, проведенная к большему катету?

42. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = \sqrt{3}$ на диагонали AC взяты точки M и N так, что $MN = 1$ и $AM < AN$. При каком значении AM сумма квадратов сторон четырехугольника $BNDM$ будет наименьшей?

43. В квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 2$ вписан треугольник BMN со стороной $MN = 1$, вершины которого M и N лежат на сторонах квадрата AD и CD соответственно. При каком значении угла NMD площадь вписанного треугольника будет наибольшей?

44. Чему равно наименьшее отношение суммы квадратов сторон треугольника к его площади? В каком треугольнике оно достигается?

45. Чему равно наименьшее отношение квадрата полупериметра треугольника к его площади? В каком треугольнике оно достигается?

46. Какое наибольшее значение может принимать длина отрезка, отсекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной к вписанной окружности, проведенной параллельно основанию, если периметр треугольника равен $2p$?

47. Из данной прямоугольной трапеции вырезать прямоугольник наибольшей площади, имеющий с трапецией общий прямой угол. Какова наибольшая площадь прямоугольника, если основания трапеции равны a и b, а высота равна h?

48. Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана, проведенная из вершины B, образует со стороной BC угол 45°?
49. Из всех треугольников ABC с данным основанием $AB = c$ и постоянной высотой $CH = h$ найдите треугольник, около которого можно описать окружность наименьшего радиуса, и вычислите этот радиус.
50. Какое наибольшее значение может принимать величина угла A треугольника ABC, в котором медиана BM в 1,5 раза больше высоты AH?

Стереометрия

1. Около шара радиусом R описать конус наименьшего объема V.
2. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с площадью, равной 2, а высота призмы равна гипотенузе основания. Какими должны быть стороны основания, чтобы боковая поверхность призмы была наименьшей?
3. В шар вписан конус наибольшего объема. В этот конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение высоты цилиндра к радиусу шара.
4. Вписать в данный шар радиуса r цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.
5. Бревно длиной 20 дм имеет форму усеченного конуса с диаметрами оснований 2 дм и 1 дм. Требуется вырубить из бревна брус с квадратным поперечным сечением, ось которого совпадала бы с осью бревна и объем которого был бы наибольшим. Как это сделать?
6. Из всех параллелепипедов с данной суммой S трех взаимно перпендикулярных ребер найти тот, объем которого наибольший.
7. В правильной треугольной пирамиде сумма квадратов длин всех ребер равна Q. Какое наибольшее значение может иметь ее боковая поверхность S?
8. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, высота равна H. В конус вписан цилиндр так, что одно основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое — на боковой поверхности конуса. Какое наибольшее значение может иметь боковая поверхность цилиндра?
9. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Сумма длин всех ее ребер равна l. Найти наибольшее значение боковой поверхности S.
10. Надо вырубить из гранита постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равной диагонали основания, а площадь основания должна быть равной 4 м^2. Каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы объем постамента оказался наименьшим?
11. По углам прямоугольного листа 80×50 см надо вырезать одинаковые квадраты так, чтобы после загибания краев получилась открытая коробка наибольшего объема. Какой должна быть сторона каждого вырезанного квадрата?
12. Какой наибольшей полной поверхности можно сделать ящик, если сумма длин его ребер равна l?
13. Из квадратного листа жести со стороной a требуется вырезать развертку правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы вершины квадрата склеивались в вершину пирамиды. Как это сделать, чтобы получить пирамиду наибольшего объема?
14. Консервная банка данного объема имеет форму цилиндра. Каково должно быть соотношение ее размеров (высоты и диаметра), чтобы на ее изготовление пошло минимальное количество жести?
15. Из всех конусов с данной образующей l найдите конус наибольшего объема.
16. Найдите размеры конической палатки данной вместимости, на изготовление которой требуется наименьшее количество материи.
17. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S. При каком угле наклона бокового ребра к плоскости основания объем пирамиды будет наибольшим?
18. В данный шар вписан конус. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, при котором площадь боковой поверхности конуса будет наибольшей.

19. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, высота призмы h. Какую наибольшую площадь может иметь сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону основания, если $a = 14$ см и $h = 6$ см?

20. Объем правильной треугольной призмы равен V. Каковы должны быть длины сторон основания и высоты, чтобы площадь полной поверхности призмы была наименьшей?

21. Котел состоит из цилиндра, завершенного двумя полусферами. Определить размеры котла, чтобы при данном объеме V его поверхность была наименьшей.

22. Из всех цилиндров, вписанных в данный шар, найти цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности.

23. В данный шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение радиуса основания цилиндра к радиусу шара.

24. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, имеющая наибольший объем. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

25. Из множества цилиндров, у которых сумма диагонали осевого сечения и высоты равна a, выбран тот, который имеет наибольший объем. Найти боковую поверхность этого цилиндра.

26. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат сферической поверхности этого шара. Определить высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

27. В правильную треугольную пирамиду, площадь основания которой S и высота h, вписана правильная треугольная призма так, что одно из ее оснований лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания находятся на боковых ребрах. Найти наибольший возможный объем призмы.

28. Около сферы описана правильная четырехугольная пирамида. Найти, при каком угле наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания отношение поверхности сферы к боковой поверхности пирамиды будет наибольшим.

29. Около шара объема V описана правильная треугольная пирамида. Каков наименьший возможный объем этой пирамиды?

30. Пусть R и r — радиусы сфер, описанной около правильной четырехугольной пирамиды и вписанной в нее. Найти наименьшее значение отношения R/r.

31. Определить размеры конуса данного объема V, имеющего наименьшую площадь боковой поверхности.

32. Среди всех правильных треугольных призм, вписанных в шар радиусом R, найти ту, которая имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

33. Среди всех конусов, периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус с наибольшим объемом и вычислить этот объем.

34. Сумма длин всех ребер правильной шестиугольной призмы равна 36. Найти длину стороны основания призмы, при которой объем призмы будет наибольшим.

35. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, MA — высота пирамиды, $MO = 4\sqrt{3}$, где O — середина AB. Найти длину высоты пирамиды, при которой ее объем будет наибольшим.

36. В основании пирамиды $MABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3BC$, MD — высота пирамиды и $MD + BC = 12$. Найти длину отрезка BC, при которой объем пирамиды будет наибольшим.

37. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную длину и составляет с плоскостью основания угол α. При каком α объем пирамиды будет наибольшим?

38. В полушар радиуса R вписан конус так, что его вершина находится в центре полушара. Найти радиус основания конуса, при котором объем его будет максимальным.

39. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который противолежит данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β? При каком значении α объем пирамиды будет наибольшим?

40. В полушар радиуса R вписан цилиндр так, что плоскость основания цилиндра совпадает с плоскостью, ограничивающей полушар. Найти высоту цилиндра наибольшего объема.
41. Через ребро AB правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найти площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, $AB = a$.
42. Основание пирамиды $SABC$ — треугольник ABC, у которого $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = \varphi$, $AC = b$. Боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, а угол между гранью SBC и плоскостью основания равен α. При каком значении φ объем пирамиды наибольший?
43. В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиуса r. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая этот шар. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значений.
44. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания один и тот же угол β. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду, если ее объем равен V. При каком β радиус шара наибольший?
45. Конус описан около полушара радиуса R так, что центр основания конуса лежит в центре шара. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α. При каком значении α объем конуса будет наименьшим?
46. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна.
47. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $TABC$, у которой высота равна медиане основания. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMT, если AT — боковое ребро пирамиды, а точка M лежит на медиане основания, не пересекающей это ребро?
48. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, в которую, в свою очередь, вписан шар. При какой высоте пирамиды объем вписанного шара будет наибольшим?
49. В сферу радиуса R вписана пирамида $TABC$, основанием которой служит прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA, а боковое ребро TC образует с диагоналями основания углы 30° и 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания AC?
50. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Высота пирамиды, опущенная из вершины S, равна 4, причем основание этой высоты принадлежит треугольнику ABC (включая его контур — границу). Найти наименьшее возможное при этих условиях значение радиуса шара, описанного около пирамиды $SABC$.

Ответы

Планиметрия

1. Квадрат. **2.** Одна из сторон прямоугольника вдвое больше другой. **3.** Квадрат. **4.** Равнобедренный треугольник. **5.** $S_{\max} = p^2/4$ при $2r = l$, где r — радиус сектора, l — длина дуги. **6.** $\sqrt{2}$. Равнобедренная трапеция. **7.** $2\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$. **8.** Середина основания. **9.** $\frac{a}{3}(3+2\sqrt{3})$. **10.** $2a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **11.** $4R\sqrt{4R^2-l^2}$. **12.** Обе хорды равны $2R\cos(\alpha/2)$. **13.** Вписанный. **14.** а) $(a+b)_{\min} = 2\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a = b$; б) $C_{\min} = 2\sqrt{S\operatorname{tg}(\alpha/2)}$ при $a = b$; в) $P_{\min} = 2(1+\sin(\alpha/2))\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$ при $a = b$. **15.** Равнобедренный треугольник. **16.** Равносторонний треугольник. **17.** $2a$. **18.** $(\sqrt{5}-1)$. **19.** $h_{\max} = \frac{8\sqrt{3}}{9}R$ при $\alpha = \arccos(1/3)$. **21.** Повернуть квадрат вокруг его центра на 60°. Центры квадрата и шестиугольника совпадают, а одна из больших диагоналей шестиугольника лежит на диагонали квадрата. **22.** $a/\sqrt{2}$ **23.** ab. **25.** $p-(a/2)$; $p-(a/2)$. **26.** $\pi/3$. **27.** $7 : 5$. **28.** $\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **29.** 45°. **30.** Ширина $\frac{2p}{4+\pi}$; высота $\frac{p}{4+\pi}$. **31.** Равнобедренный треугольник. **32.** Равносторонний треугольник. **33.** Равнобедренный треугольник. **34.** Равносторонний треугольник. **35.** $(a+b)^2/2$. **36.** Высота прямоугольника равна половине высоты треугольника. **37.** а) квадрат; б) квадрат. **38.** $\operatorname{arctg}(3/4)$. **39.** $\frac{a}{2\sqrt{2}}\sqrt{17-\sqrt{105}}$. **40.** При $0<\alpha\le\pi/3$ $S_{\max}=\frac{R^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$; при $\pi/3<\alpha<\pi/2$ $S_{\max}=2R^2\sin\alpha\sin^2(\alpha/2)$. **41.** $1{,}5h$. **42.** 0,5. **43.** $\pi/4$. **44.** $4\sqrt{3}$; в равностороннем. **45.** $3\sqrt{3}$; в равностороннем. **46.** $p/4$. **47.** $S_{\max}=\frac{a^2h}{4(a-b)}$ при $x=a/2$, если $b<a/2$. $S_{\max}=bh$, при $x=b$, если $b\ge a/2$. Здесь x — длина стороны вырезаемого прямоугольника, лежащей на большем основании трапеции. **48.** 45°. **49.** При $h>c/2$ равнобедренный треугольник и $R_{\min}=\frac{c^2+4h^2}{8h}$. При $h\le c/2$ прямоугольный треугольник и $R_{\min}=c/2$. **50.** 90°.

Стереометрия

1. Высота конуса $h=4R$, радиус его основания $r=R\sqrt{2}$, наименьший объем $V_{\min}= \frac{8}{3}\pi R^3$. **2.** 2 и 2. **3.** 4/9. **4.** Высота цилиндра равна $\sqrt{2}\cdot r$. **5.** Нужно удалить верхнюю (более тонкую) часть бревна так, чтобы осталось бревно длиной $13\frac{1}{3}$ дм, и вписать квадрат в верхнее основание бревна. **6.** Куб с ребром $S/3$. **7.** $S_{\max}=\frac{Q}{2\sqrt{5}}$. **8.** $\frac{1}{2}\pi RH$. **9.** $S_{\max}=l^2/24$. **10.** 2, 2, $2\sqrt{2}$. **11.** 10 см. **12.** $l^2/24$, ящик — куб. **13.** Диагональ основания пирамиды равна 0,8 стороны данного квадрата. **14.** Высота цилиндра равна диаметру основания. **15.** Высота конуса наибольшего объема равна $l/\sqrt{3}$. **16.** Отношение высоты конуса к радиусу его основания равно $\sqrt{2}$. **17.** 45°. **18.** $\arccos(1/3)$. **19.** 96 см^2. **20.** $a=h\sqrt{3}=\sqrt[3]{4V}$, где a — длина стороны основания призмы и h — ее высота. **21.** Минимальная поверхность котла достигается, когда он состоит только из двух полусфер. **22.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. **23.** $\sqrt{(2/3)}$. **24.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$. **25.** $\pi a^2\sqrt{2}/8$. **26.** $R/\sqrt{13}$. **27.** $4SH/27$. **28.** $\arccos(\sqrt{2}-1)$. **29.** $6\sqrt{3}V/\pi$. **30.** $\sqrt{2}+1$. **31.** Радиус основания $\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\sqrt{2}}}$; высота $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. **32.** Ребро основания $R\sqrt{6}/2$; высота $R\sqrt{2}$. **33.** $64\sqrt{3{,}2\pi}/75$. **34.** 2. **35.** 4. **36.** 8. **37.** $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{2})$. **38.** $R\sqrt{(2/3)}$. **39.** $\alpha=\pi/3$. **40.** $R/\sqrt{3}$. **41.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$ при $h>a/\sqrt{6}$; $\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$ при $0<h\le a/\sqrt{6}$. **42.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$. **43.** $\frac{2rR^3}{R^2-r^2}$ при $r<R\le(1+\sqrt{2})r$; $\frac{R^2}{2}\left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\right)$ при $R>(1+\sqrt{2})r$. **44.** $\arccos(1/3)$. **45.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **46.** $4-2\sqrt{2}$. **47.** $\frac{27R^2}{13\sqrt{13}}$. **48.** $4R/3$. **49.** $R^2/8$. **50.** 3,5.

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

Нужно ли учить высшую математику?

Ю. В. Покорный, Н. В. Титова

Излагаемые далее заметки отражают мнения и сомнения профессиональных математиков, порождаемые известными проблемами учебной математики.

Если да, то когда?!

Этот вопрос у преподавателей средней школы, как правило, не принято обсуждать: программы спущены сверху и надо не обсуждать, а выполнять. Однако ответ на вопрос, как выполнять, во многом зависит от ответа на предыдущий вопрос, а нужно ли учить высшую математику.

Пункт 1. Нужно ли учить высшую математику?

Изучение элементов высшей математики — одна из основных особенностей современных школьных программ. Изучение в школе основ высшей математики категорически не одобряется значительной частью преподавателей высшей школы. На самых разнообразных обсуждениях вузовские преподаватели оказываются едиными в том, что если говорить о преподавании основ высшей математики для облегчения ее изучения в вузе, то лучше бы школа этим не занималась — ибо элементы высшей математики в школе даются неквалифицированно и часто ошибочно. Внимание акцентируется абсолютно не на том, что необходимо позднее в вузе, а в вузе вчерашних школьников, которые якобы кое-что освоили из высшей математики, приходится переучивать.

Мы сейчас говорили о выпускниках школы, достаточно успешно освоивших школьную программу. И это лишь одна из сторон интересующей нас проблемы. Вопрос, чему надо учить (и надо ли учить) наиболее старательных и успевающих школьников, привыкших безропотно осваивать всё, что надо освоить.

В последние годы основы высшей математики оказываются предметом изучения практически всех студентов высшей школы. Применительно к студентам-гуманитариям здесь возникает парадоксальная ситуация: значительная часть выпускников средней школы толком не владеет даже дробями, путается в модулях. То есть не имеет элементарной математической культуры, необходимой для освоения азов высшей математики, а все программы, спускаемые для их обучения сверху, предполагают по умолчанию, что вновь испеченные студенты элементарную математику знают достаточно глубоко. Спрашивается, как вести себя преподавателям вуза в этой, поистине драматической ситуации, когда подавляющее число первокурсников, например, исторического факультета в принципе не имеют базы, необходимой для освоения планируемых для них знаний. Может их следует обучать не ϵ-δ языку и теории пределов, а чему-то более полезному, хотя бы и с философско-методологической точки зрения? Ведь математические знания, создававшиеся человечеством на протяжении многих тысячелетий в процессе своего генезиса отнюдь не были направлены на то, чтобы стать головной болью студентов-гуманитариев двадцать первого века!

Пункт 2. Если да, то зачем?

Таким образом, вопрос о содержании знаний по высшей математике у нас возникает двуединым образом. С одной стороны чему и как учить наиболее успешных учащихся средней школы. С другой стороны — чему и как уже в вузе учить наименее успешных в математическом плане бывших школьников. Оба эти вопроса объединяются одним:

ЗАЧЕМ?

Это, кстати, один из наиболее важных вопросов в математическом образовании, который, как ни странно, полностью выбрасывается из внимания в процессе преподавания. Этот вопрос — зачем осваивать (учить, зубрить) ту или иную дефиницию, долбить ту или иную процедуру — естественен для любого нормального ученика или слушателя. Но ответ на него всем привычно знаком: “потом узнаете”, но это “потом”, “когда-нибудь”, привычное для учеников и студентов, не придает смысла обучению. Самое неприятное, что на этот вопрос не имеют, как правило, содержательного ответа и преподаватели, и учителя. Занудливые правила типа: сложения дробей или чисел с разными знаками не подразумевают даже ответа на вопрос: “Зачем надо складывать?” Не говоря уже и о связанном с ним вопросе — “А что такое сумма?” И зачем, например, язык кванторов, эпсилон и дельта языки, или зачем нужно строгать примеры на вычисление пределов и прочего, ведь на экзаменах по этому материалу и Лейбниц, и Эйлер, и Лагранж оказались бы элементарными двоечниками.

Итак, вопрос о том, чему и как учить, относящийся к основам высшей математики, мы сразу связываем с вопросом “а зачем это надо делать?” Без ответа на этот второй вопрос “Зачем?”, поиски ответа на первый вопрос лишены смысла.

Пункт 3. Ответ на вопрос “Зачем?” ясен только для будущих “технарей”

Зачем нужно учить высшей математике будущих инженеров — это было понятно всегда, как минимум в последние полвека. Именно дифференциальное и интегральное исчисление являются главным языком, наиболее емко описывающим основные математические модели физики. И возникла математика, которую мы сейчас называем высшей, именно как средство формулировок, описания и анализа проблем, которые возникают в физике и технике. По той же причине основная проблематика современного естествознания так же не может быть описана без использования математической символики, без математических методов, опоры на них, без умения дифференцировать и интегрировать. Поэтому дифференциальное и интегральное исчисления являются необходимыми компонентами освоения определенных знаний и достижений.

А вот с ролью математики для гуманитарных направлений ситуация совершенно другая — наследие второй половины 20 века, а именно элементы высшей математики в средней школе не ясны в смысле своей актуальности. В самом деле, спрашивается: нужно ли ”гуманитариям” не только знать теорию пределов, но и уметь вычислять эти пределы, а это один из первых навыков из высшей математики, нужно ли им владеть интегральным и дифференциальным исчислениями. И если да, то надо четко понимать какую цель преследуют эти навыки. Нужно ли, например, гуманитарию владеть теоремами о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу, по параметру, формулой типа Навье-Стокса, понимать, что матрица — это не только таблица, но и преобразование в конечномерном пространстве. Но если отложить в сторону вопрос о том, что в последние годы ввели изучение высшей математики на всех без различия гуманитарных циклах от психологов до историков, и вопрос о том, чему именно их учить, — это самостоятельный вопрос. Но особенно актуален в наше время другой вопрос: зачем нужно основы высшей математики изучать в школе?

Пункт 4. Откуда взялась высшая математика в школе?

Элементы высшей математики внедрились в школу в результате реформ 60-70 годов, под предлогом устранения разрыва между высшей и элементарной математикой. В полном объеме эта реформа, как известно, провалилась, но от нее осталось самое зловещее наследие: склонность к формально-дедуктивному языку, дрессировка детей на $\epsilon - \delta$ языке и некоторые первичные понятия вузовской математики, которые заимствованы из начального этапа 1 семестра математических факультетов. Трагичность этой ситуации заключается в том, что, с одной стороны, школьные преподаватели, не владея толком соответствующей математической грамотой дифференциального и интегрального исчислений, обращают внимание на чисто внешние, формальные аспекты, с другой стороны и цель этих начальных шагов подготовки по высшей математике не объяснима. Основной современный мотив, который выдвигают наиболее "продвинутые" учителя: это якобы облегчит дальнейшее вузовское образование, но с этим абсолютно не согласны преподаватели высшей школы, так как вчерашних выпускников приходится полностью переучивать. Важен еще другой аспект: когда обучающимся не понятен смысл, нет ответа на вопрос: зачем это надо? Если учесть наблюдающееся повально у значительной части школьников старших классов неприязненное отношение к математике, то насильственное обучение таким азам только лишь усиливает патологическое отторжение потенциально способных школьников от важнейшего раздела их обучения. В этой связи следует отметить одну чрезвычайно неприятную особенность школьного образования, обнажившуюся за последние годы именно в процессе преподавания математики в вузе.

Одной из проблем, роднящей гуманитариев и математиков, является чрезвычайная запущенность технологии математического преподавания, результатом которой является повсеместная неграмотность в дробях. Многие студенты испытывают "страх Божий" перед конкретными числовыми выкладками, в которых присутствуют обыкновенные дроби. И даже если речь идет о студентах математико-емких направлений типа будущих экономистов, страховщиков, коммерческих юристов, которых готовит достаточно большое количество современных вузов на платной основе, где студентами оказываются молодые люди, не имевшие шансов пройти на бесплатные профили в основном из-за сложностей владения математикой, но вынужденные, в силу специализации, ее достаточно серьезно изучать, особенно остро демонстрируют проблему дробей.

Эта проблема дробей воспринимается их школьными учителями весьма спокойно, а именно считается, что если он чего-то не доучил в школе, то, наверняка потом наверстает в вузе. Как-будто вузовская математическая подготовка эту проблему автоматически закроет. Опыт вузовского обучения таких учеников показывает, что в рамках вузовского курса высшей математики наверстать отсутствие грамоты в дробях практически невозможно. Молодые люди, овладевшие такими разделами, как экономическое моделирование, линейное программирование, владея алгоритмами симплекс-метода, умея интерпретировать его идеи на графиках и картинках, мгновенно пасуют, как только приходится провести конкретные вычисления для примеров, если там приходится проводить действия с дробями.

Пункт 5. Вот и возникает вопрос: можно ли учить высшей математике без дробей?

Для анализа этого вопроса следует вернуться к началу формирования концепции о необходимости изучения высшей математики в школе. Эту концепцию связывают с именем А. Н. Колмогорова, но при этом полностью забывают то, что говорил он сам. По его мнению, основы дифференциального и интегрального исчисления необходимо осваивать как главное средство описания важнейших физических законов. И учащиеся должны глубоко осознать три основополагающих модели математической физики. Именно для это в школьный курс были введены и детально изучались дифференциальные уравнения, описывающие: равномерно ускоренное движение $y' = a$, гармонические колебания $y'' = -k^2 y$ и показательный рост или убывание $y' = ky$. Главное в этих примерах — осознание глубины явлений и емкости их описаний, недостижимое для более наивных, простых понятий. Без доведения учащихся до полноценного понимания подобных примеров, освоение дифференциального и интегрального исчисления не имеет смысла. Более того, такое изучение порочно.

Эта концепция, возможно, была уместна в конце шестидесятых, когда, с одной стороны, школьное среднее образование еще не было повально обязательным, и кроме того, совершенно незначительная часть школьников, поступая в вузы, ориентировалась на будущую профессию математика-ученого. Для остальных основы высшей математики должны были ориентировать их в философском плане, неизбежности освоения этих законов для изучения законов природы.

Мысль Колмогорова об общеобразовательной полезности высшей математики для школьников имела некоторый резон для тех, кто после школы не планировал обучение в вузе, для тех же, кто после школы планировал учебу в вузе, она существенно перекрывалась вузовскими программами. В любом случае, как считают преподаватели высшей школы, успешных выпускников средней школы высшей математике гораздо лучше научат в вузе. Для остальных же школьников, не собиравшихся поступать в техникумы или вузы, подобное образование было весьма сомнительно, с учетом необходимых для него затрат.

После сокрушительного провала реформы математического образования семидесятых годов от ее замыслов остались первые шаги алгоритма — изучение начальных фактов и понятий из теории пределов, с дрессировкой определений на языке $\epsilon - \delta$. Никаких дифференциальных уравнений в перспективе, как думал А. Н. Колмогоров, и без чего нет смысла во всей затее, нет и в замысле.

Следует заметить сразу, что основная часть школьников, с так называемыми “гуманитарными мозгами”, воспринимает этот материал просто как ненужный хлам, изучаемый непонятно для чего и ничего кроме раздражения не вызывающий.

Еще одним из наследий математической реформы было желание как можно сильнее формализовать описания понятий объектов, при этом полностью прерывалась связь с первоосновой этих понятий. Более того, не было заботы о том, чтобы учащиеся, хотя бы на интуитивном уровне, ощущали смысл понятия. Приведем несколько характерных примеров.

Смысл слова “число” погружен в полный мрак. Изначально можно догадаться, что натуральные числа — это продукт процедуры счета. Но попробуйте, дорогой читатель, прочитать хотя бы в каком-либо учебнике определение суммы двух чисел. Младшеклассники на уровне интуиции воспринимают сумму, как результат сложения, а саму процедуру сложения на сенсомоторном уровне, то есть на уровне ощущения. Сложить две кучки палочек (камешков, конфет) в одну и прочее. Так же отсутствует определение суммы дробей, вместо этого школьники зазубривают алгоритм сложения: “Чтобы сложить две дроби...” Вопрос о том, зачем нужно уметь складывать дроби, полностью выведен из сферы внимания. А о цели и смысле этой процедуры свежему восприятию догадаться невозможно. Также после введения иррациональных чисел с помощью бесконечных, непериодических десятичных дробей невозможно догадаться не только о смысле суммы или хотя бы о способе ее отыскания. Невозможно понять, на какое восприятие рассчитывали авторы этого определения, опираясь в нем на актуальную бесконечность. Здесь перечислены далеко не все прорехи в таком подходе.

Пункт 6. Понятие обыкновенной дроби оказывается более глубоким, чем это привыкли представлять профессионалы — в том числе и преподаватели вузов

Сравнительно недавно среди вузовских преподавателей математики нашего города вдруг вспыхнула довольно яростная дискуссия, поводом для нее послужило несогласие некоторых преподавателей вузовской математики с тем, что в одном из “решебников” для подготовки к ЕГЭ был назван неправильным ответ $x = -1$ к уравнению вида $\sqrt[3]{x} + 1 = 0$. Обсуждаемый аргумент из этой книги звучал так: степень с рациональным показателем не имеет смысла при отрицательном основании. А здесь речь как бы и идет о выражении $(-1)^{\frac{1}{3}}$. “Как же так?” — возмущались многие преподаватели, ведь в некоторых учебниках для вузов четко написано, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена на всей оси? Ведь еще со школы известно, что из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя, а кубичный корень очень даже можно. В самом деле, соотношение $\sqrt[3]{x}+1=0$ имеет вещественный корень $x=-1$. В чем же проблема?

Приведенный пример характерен для следующего, достаточно забавного на первый взгляд явления. В вузовскую математику и все методические традиции как бы незаметно перекочевывают весьма серьезные дефекты школьного образования.

Для начала поставим вопрос так: верно ли, что $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$? Ведь со школьной скамьи это равенство ни у кого не вызывает сомнений. А теперь возведем -1 в степень $\frac{2}{6}$. Если вспомнить школьное определение рациональной степени, то мы здесь должны решить следующий вопрос: как нам нужно смотреть на $(-1)^{\frac{2}{6}}$ либо как на $((-1)^2)^{\frac{1}{6}}$ и тогда ответ очевиден, либо как на $((-1)^{\frac{1}{6}})^2$ и в этом случае мы получаем нелепость. В чем же здесь дело? Вопрос, казалось бы совсем тривиальный — верно ли равенство $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$? Но если мы обозначим левую и правую части соответственно α и β, где $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{2}{6}$, то получается, что несмотря на равенство $\alpha=\beta$ из него не следует, что $a^\alpha=a^\beta$.

Если разобраться в собственных ощущениях, то это разночтение в значении $(-1)^{\frac{2}{6}}$ объясняется в представлении дроби $\frac{2}{6}$, а именно: либо $\frac{2}{6}$ есть продукт деления $2:6$, либо $\frac{2}{6}$ есть сумма двух долей $\frac{2}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$. Именно вторая версия нас приводит к нелепости, так как $(-1)^{\frac{1}{6}}$ смысла не имеет, а в первой версии все было получено. И мы уже здесь сталкиваемся с весьма серьезными глубинами элементарных, казалось бы, знаний и представлений. Эти глубины в свое время были вскрыты комплексным анализом. В самом деле, при алгебраическом извлечении корней шестой степени из любого числа мы наверняка получим математически содержательный ответ в количестве шести значений. Воспользуемся известной формулой Муавра, применяемой для возведения в степень (извлечения корней). В общем виде эти формулы выглядят так:

$$[r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))]^k = r^k(\cos(k\varphi)+i\sin(k\varphi)),$$

$$[r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))]^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{r}(\cos(\frac{\varphi}{k})+i\sin(\frac{\varphi}{k}))+\frac{2\pi}{k},$$

в частности, для корней шестой степени из -1 мы получим ответ

$$x_k=\cos(\frac{180^\circ}{6}+k60^\circ)+i\sin(\frac{180^\circ}{6}+k60^\circ);$$

при $k=0,1,\ldots,5$ получим:

$x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $x_1=\frac{i\pi}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $x_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$, $x_4=-\frac{i\pi}{2}$, $x_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$.

При возведении в квадрат мы получим следующие числа: $x_0^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1^2=-1$, $x_2^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4^2=-1$, $x_5^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, среди этих корней неизбежно присутствует значение $x=-1$. О чем говорят проведенные тривиальные выкладки: как минимум о том, что из школьной программы почти полностью выброшены сведения о комплексных числах, которые некогда, вплоть до формулы Муавра были обязательными. Именно этот пробел делает как бы незаметной нескладуху в определении степени с рациональным показателем. Он же генетически наследуется и наработанными методическими традициями высшей школы, где преподаватели хоть и получили в свои студенческие годы достаточно обстоятельный курс комплексного анализа, но затем опустили эти знания в подсознательную интуицию так, что они о себе с разбегу так и не напоминают.

Пункт 7. Разделение культур

В высшем анализе есть четкое разделение на две культуры: "вещественный анализ" и "комплексный анализ". Эти два раздела четко различаются в любой математической классификации знаний, но методическая наука забыла про это различие. Дело в том, что обе эти культуры, присутствующие и в школе, полностью перемешаны друг с другом. В школьной математике есть понятие “алгебраическое уравнение” и есть термин “корень”. Именно этот термин, переместившись в название процедуры извлечения корня, и запутывает вопрос. Та же функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ в рамках комплексного анализа имеет смысл не только при любом отрицательном значении x, но и при любом комплексном значении x. В этом и заключается одно из преимуществ работы с комплексными числами. В рамках вещественного анализа функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ — обычная функция вещественного аргумента и в рамках математического анализа нужно четко отслеживать эту неявную обусловленность. Здесь, в математическом анализе, алгебраические (то есть комплексно-значные) значения корней принципиально не допускаются. То есть и без углубления в комплексный анализ вопрос об адекватности записи $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$ далеко не очевиден. Ибо сумма долей $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ и продукт деления двойки на шесть одинаковых частей — не совсем одно и тоже хотя бы и с предметной точки зрения.

Заключение

Мораль сей басни такова! Штампы преподавания математики, сформировавшиеся в течение нескольких поколений приводят к искажению математической интуиции.

Даже у профессиональных математиков, преподавателей вузов, математическая интуиция сформировалась под влиянием предрассудков и клише, сложившихся на протяжении предыдущих поколений. И мы не всегда с разбегу можем отличить частного отношения от дроби, алгебраический многочлен от функции, неограниченную последовательность чисел от функции числового аргумента, числовую ось от геометрической оси. А чем числа отличаются от величин? — вопрос, ответ на который, по мнению А. Н. Колмогорова, должен был знать каждый выпускник школы. Но на последний вопрос большинство преподавателей вузов сходу не найдет точный ответ.

Таким образом, пытаясь найти ответ на вопрос: “Зачем учить высшую математику?” — каждый из нас неизбежно придет к сомнениям в чистоте основ собственной математической культуры.

Покорный Юлий Витальевич
Воронежский государственный университет,
математический факультет,
заведующий кафедрой математического анализа,
профессор, доктор физ.-мат. наук

Титова Наталья Владимировна
Воронежский государственный университет,
математический факультет,
аспирантка кафедры математического анализа

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167. E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2008 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2008 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents