ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год двенадцатый

№ 4 (48)

октябрь – декабрь 2008 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (48), 2008 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2008 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.12.2008 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (48), октябрь – декабрь 2008 г.

Содержание

Поздравляем Н. Н. Константинова!

От редакции

Сердечно поздравляем Николая Николаевича Константинова, члена редакционной коллегии журнала "Математическое образование", с присуждением ему премии Правительства РФ в области образования за 2008 г.!

Из Постановления от 24 декабря 2008 г. №983

"О присуждении премий Правительства Российской Федерации 2008 года в области образования":

Правительство Российской Федерации постановляет:

Присудить премии Правительства Российской Федерации 2008 года в области образования:

...

20. Константинову Николаю Николаевичу, кандидату физико-математических наук, преподавателю средней общеобразовательной школы №179 г. Москвы, — за создание научно-практической разработки "Турнир имени М. В. Ломоносова" для общеобразовательных учреждений.

Председатель Правительства Российской Федерации В. Путин

О Турнире имени М. В. Ломоносова — традиционном многопредметном соревновании школьников — было подробно рассказано в первом выпуске нашего журнала (№1, 1997 г.), см. также специальный выпуск №40 за 2007 г., посвященный 75-летию Н. Н. Константинова. Современное состояние Турнира отражено на сайте www.mccme.ru

Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности?

А. И. Щетников

Статья посвящена классическим геометрическим задачам древности. Приведен анализ ряда решений, предложенных античными математиками. Сделана реконструкция возможных способов рассуждений, которые ведут к этим решениям.

I. Задача об удвоении куба

Введение

Все известные нам античные решения задачи об удвоении куба описаны *Евтокием* (VI в. н. э.) в комментарии к книге *Архимеда "О шаре и цилиндре"*. К этим решениям относятся:

а) решение *Архита Тарентского* (IV в. до н. э.), в котором используются пространственные построения с пересечением тора, цилиндра и конуса;

б) механическое решение, приписываемое *Платону* (IV в. до н. э.);

в) два решения *Менехма* (IV в. до н. э.) с коническими сечениями;

г) механическое решение *Эратосфена Киренского* (III в. до н. э.), в котором применяется специальное устройство с прямоугольными пластинками;

д) решение *Никомеда* (III в. до н. э.), в котором используется специальная механическая кривая — конхоида, предназначенная для выполнения вставок.

е) группа схожих решений, принадлежащих *Филону Византийскому* (III в. до н. э.), *Аполлонию Пергскому* (конец III в. до н. э.) и *Герону Александрийскому* (I в. н. э.); в этих решениях применяются разного рода вставки;

ж) группа схожих решений, принадлежащих *Диоклу* (конец III в. до н. э.), *Паппу Александрийскому* (конец III в. н. э.) и *Спору Никейскому*; в решении *Диокла* используется специальная механическая кривая — циссоида.

Евтокий сообщает, что сведение задачи об удвоении куба к задаче об отыскании двух средних пропорциональных выполнил *Гиппократ Хиосский* (конец V в. до н. э.), который «нашёл, что если для двух данных линий, из которых большая равна удвоенной меньшей, найти две средние пропорциональные, составляющие с ними непрерывную пропорцию, то тем самым будет достигнуто и удвоение куба; тем самым он свёл одну проблему к другой, ничуть не меньшей».

Все эти решения рассмотрены в следующих книгах. Во-первых, это сделанный И. Н. *Веселовским* перевод всех относящихся к делу отрывков из *Евтокия* (*Архимед* 1962, с. 459–480). Во-вторых, это общий анализ истории задачи об удвоении куба, выполненный Б. Л. *Ван дер Варденом* (1959, с. 194–196, 221–227, 317, 322–325, 362). В-третьих, это математический обзор предложенных решений, произведённый В. В. *Прасоловым* (1997). Из комментариев на других языках следует упомянуть книгу Т. *Хизса* (*Heath* 1921).

Решения задачи о вставке двух средних пропорциональных, которые приводит в своём комментарии *Евтокий*, изложены по общей норме, характерной для античных математических текстов: после формулировки задачи сразу же идёт описание построения, а за ним — доказательство того, почему это построение верно. Понятно, что из такого рода текстов часто совсем не видно, как эти решения могли быть найдены.

В. В. *Прасолов* предпринял попытку восстановить те пути, которыми античные геометры пришли к своим решениям. Однако его реконструкции не всегда могут быть признаны удачными. В первую очередь это относится к построению *Никомеда*. Реконструкция *Прасолова* слишком «алгебраична», что мало соответствует духу древнегреческой математики, и она, как мне представляется, нисколько не раскрывает той «логики математического открытия», которой руководствовался *Никомед*.

Я полагаю, что правильный путь восстановления этой логики должен ориентироваться не столько на детали тех доказательств, которые приводит *Евтокий* (ведь эти доказательства призваны лишь подтвердить правильность построений, и они молчат о том, каким образом эти построения были придуманы), сколько на исходную ключевую проблему в формулировке *Гиппократа Хиосского*:

Для двух данных отрезков a и b найти отрезки x и y в непрерывной пропорции

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \tag{1}$$

Решая задачу об удвоении куба, античные геометры с самого начала исходили из этой пропорции и постоянно имели её в виду. И пути, которыми они пришли к различным своим решениям, определялись теми средствами работы с пропорциями, которые у них имелись. А этими средствами были:

а) представление членов пропорций сторонами подобных треугольников (*а* — раздельная пропорция; *б*, *в* — непрерывная пропорция);

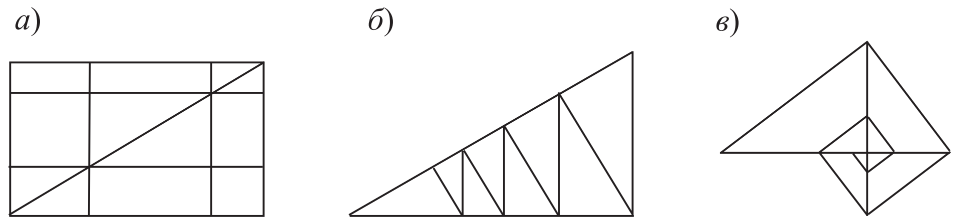


Рис. 1

б) формальные преобразования пропорций, описанные в V книге *Начал*;

в) преобразования «геометрической алгебры», описанные во II книге *Начал*.

Из формальных преобразований последних двух пунктов нам потребуется следующая выкладка, которая, как мы увидим ниже, лежит в основе решений *Никомеда* и *Аполлония*. Сначала почленным сложением крайних отношений в непрерывной пропорции (1) получим ещё одну пропорцию

$$\frac{x}{y} = \frac{y+a}{x+b}.$$

Затем перемножим её члены крест-накрест:

$$y(y+a) = x(x+b).$$

Наконец, выделив полные квадраты, получим соотношение

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{2}$$

Соотношение (2) вкупе с пропорцией

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$

определяет оба искомых средних. Различные геометрические интерпретации соотношения (2), как мы увидим ниже, использовались античными геометрами для нахождения различных решений задачи о вставке двух средних пропорциональных.

Решение Никомеда

Преобразуем соотношение (2) к виду

$$\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Представим соотношение (3) геометрически (рис. 2).

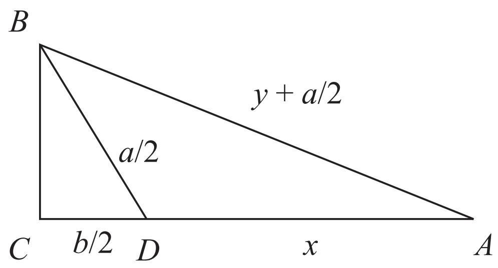


Рис. 2

Треугольник BCD мы уже можем построить по данным катету и гипотенузе, но положение точки A пока что остаётся неопределённым. Для его отыскания представим исходную пропорцию $\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$ в виде $\frac{(a/2)}{x} = \frac{y}{2b}$ и перенесём её на чертёж с помощью теоремы *Фалеса* (рис. 3).

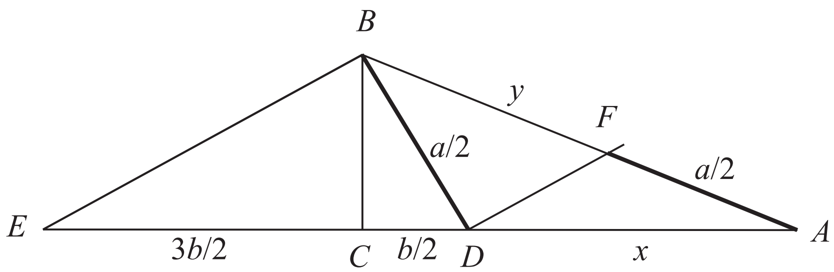


Рис. 3

Теперь составим план построения. Сначала построим прямоугольный треугольник BCD с катетом $CD = b/2$ и гипотенузой $BD = a/2$. Затем пристроим к нему прямоугольный треугольник BCE с катетом $CE = 3b/2$. Проведём прямую DF, параллельную EB. Осталось провести из точки B прямую BA таким образом, чтобы на ней внутри угла FDA был вставлен отрезок $FA = a/2$.

Для выполнения этой вставки *Никомед* предложил использовать специальную механическую кривую — *конхоиду* (рис. 4). Чтобы построить конхоиду, нужно выбрать прямую («линейку») и точку вне неё («полюс»). Конхоида характеризуется следующим свойством: на каждой прямой, проходящей через полюс, отрезок, высекаемый точками линейки и конхоиды, равен одной и той же фиксированной величине («радиусу»).

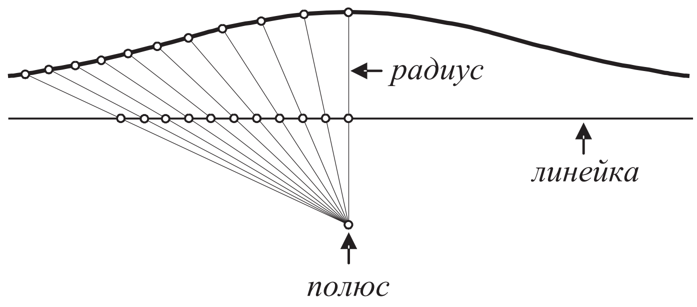


Рис. 4

В нашем случае требуется построить конхоиду с полюсом B, линейкой DF и радиусом $a/2$. (Заметим, что в задаче об удвоении куба $b = 2a$, и накрестлежащие углы EBD и BDF — прямые.) Пересечение построенной конхоиды с продолжением прямой ED даст искомую точку A (рис. 5).

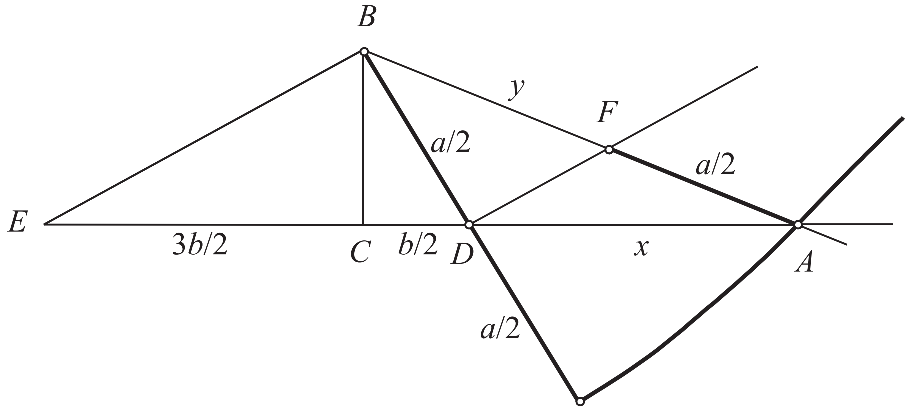


Рис. 5

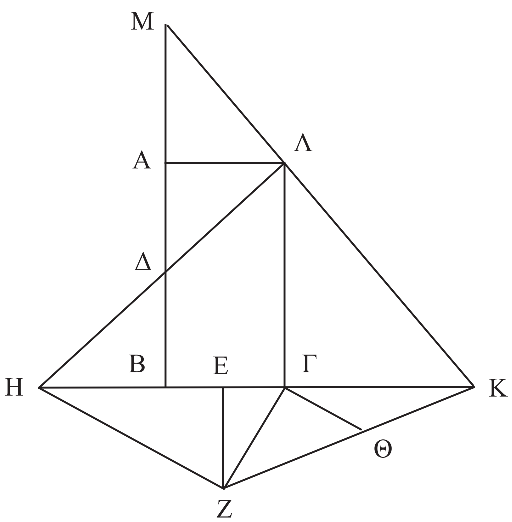


Рис. 6.

Заинтересованный читатель может теперь самостоятельно разобрать решение *Никомеда* и убедиться, что та реконструкция, которую мы построили выше, верно схватывает суть дела. Текст комментария *Евтокия* убеждает нас и в том, что проводить реконструкцию доказательства, опираясь только на текст доказательства, зачастую оказывается делом почти безнадёжным; гораздо более надёжный подход к делу состоит в том, чтобы неуклонно спрашивать себя, на основании каких исходных посылок автор мог прийти к открытому им построению. Текст доказательства может дать для этого лишь отдельные намёки; дело же исследователя — не идти слепо за текстом доказательства, но установить, с какой исходной идеи стартовал автор, и попытаться пройти шаг за шагом все те ходы, которые привели его к открытию.

Решение *Никомеда* мы приводим в переводе И. Н. *Веселовского* (*Архимед* 1962, с. 477); перевод заново сверен с критическим изданием *Eutocius 1915.*

«Возьмём две взаимно перпендикулярные прямые ΓΛ и ΛA, для которых требуется найти две средние пропорциональные в непрерывной пропорции. Дополним параллелограмм ABΓΛ и разделим пополам каждую из AB, BΓ в точках Δ, E; соединяющую прямую ΛΔ продолжим, и пусть она пересечёт продолжение ГВ в Н. Затем перпендикулярно к ВГ проведём ЕZ и сделаем ГZ равной АΔ; проведём соединяющую прямую ZН и параллельную ей линию ГΘ. Получив угол КГΘ, проведём ZΘК из заданной точки Z так, чтобы ΘК равнялась АΔ или ГZ (что это возможно, ясно из свойств конхоиды). Продолжим соединяющую прямую КΛ, и пусть она пересечёт продолжение ВА в М. Я утверждаю, что ГΛ к КГ, как КГ к МА, как МА к АΛ.

Так как ВГ разделена в Е пополам и к ней прибавлена КГ, то, значит, прямоугольник между ВК и КГ вместе с квадратом на ГЕ равен квадрату на ЕК. Прибавим к обеим частям квадрат на ЕZ: тогда прямоугольник между ВК и КГ вместе с квадратами на ГЕ и ЕZ, равными квадрату на ГZ, будет равен квадратам на КЕ и ЕZ, равным квадрату на КZ. Затем, поскольку МА к АВ как МΛ к ΛК, и МΛ к ΛК как ВГ к ГК, то и МА к АВ как ВГ к ГК. Теперь АΔ будет половиной АВ, а ГН будет удвоенной ВГ (так как ΛГ в два раза больше ΔВ); тогда МА к АΔ как НГ к ГК. Но НГ к ГК как ZΘ к ΘК, вследствие параллельности НZ и ГΘ; и присоединением, МΔ к ΔА как ZК к КΘ. Но по предположению АΔ равна ΘК, и АΔ равна ГZ; значит, и МΔ равна ZК, и квадрат на МΔ равен квадрату на ZК. Теперь квадрат на МΔ равен прямоугольнику между ВМ и МА вместе с квадратом на ΔА; и по уже доказанному, квадрат на ZК равен прямоугольнику между ВК и КГ вместе с квадратом на ГZ. Но квадрат на АΔ равен квадрату на ГZ, поскольку по предположению АΔ равна ГZ; значит, и прямоугольник между ВМ и МА равен прямоугольнику между ВК и КГ. Таким образом, МВ к ВК, как КГ к АМ. Но ВМ к ВК, как ГΛ к ГК. И тем самым ΛГ к ГК, как КГ к АМ. И также ΛГ к ГК, как МА к АΛ. И вот ΛГ к ГК, как ГК к АМ, как АМ к АΛ.»

Решение Филона — Аполлония — Герона

Вновь обратимся к соотношению (2) и преобразуем его к виду

$$\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2. \tag{4}$$

Рассмотрим чертёж, изображенный на рис. 7. В силу подобия треугольников здесь уже имеет место пропорция $a : x = y : b$. Мы хотим, чтобы для четырёх отрезков, составляющих эту пропорцию, выполнялось также соотношение (4). Это означает, что проведённые на рис. 8 отрезки GE и GF должны быть равны между собой. Так получается решение, принадлежащее *Герону*; решения *Филона* и *Аполлония* отличаются от него лишь некоторыми деталями.

Вот как выглядит решение *Герона* в переводе:

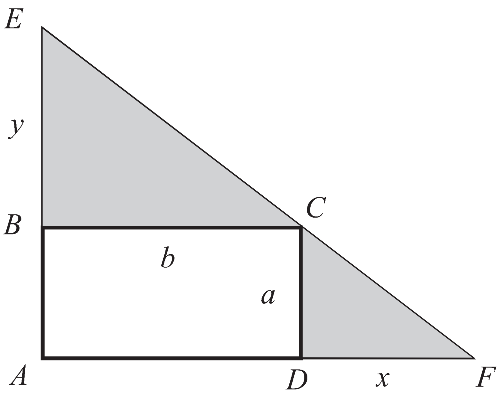


Рис. 7.

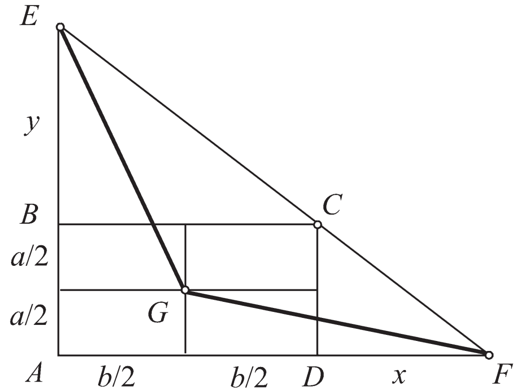


Рис. 8.

«Пусть даны две прямые АВ, ВГ, для которых требуется найти две средние пропорциональные. Расположим их так, чтобы они образовали при В прямой угол, и дополним параллелограмм ВΔ; проведём прямые АГ, ВΔ; они, очевидно, между собой равны и пересекаются пополам; построенный на одной из них круг пройдёт и через концы другой, так как рассматриваемый параллелограмм будет прямоугольным. Продолжим ΔΓ, ΔA до Z, H и вообразим линейку ZBH, которая двигалась бы около некоторого неподвижного гвоздя B. Повернём её так, чтобы расстояния EZ и EH от точки E были равными. Представим, что линейка находится в положении ZBH, причём, как сказано, прямые EZ и EH сделались равными. Из точки E опустим на ΓΔ перпендикуляр EΘ; очевидно, что он разделит ΓΔ пополам.

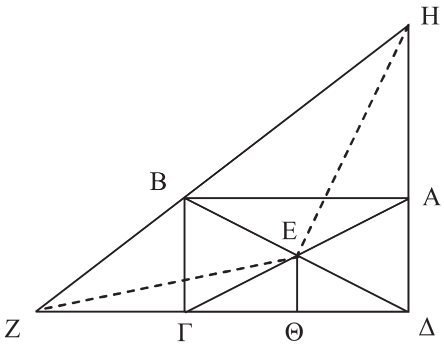


Рис. 9.

Так как ΓΔ разделена в точке Θ пополам и к ней добавлен ΓZ, то прямоугольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратом на ΓΘ равен квадрату на ΘZ. Прибавим общий квадрат на EΘ, тогда прямоугольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратами на ΓΘ, EΘ равен квадратам на ZΘ, ΘE. Но квадраты на ΓΘ, ΘE равны квадрату на ΓE, и квадраты на ZΘ, ΘE равны квадрату на EZ. Значит, прямоугольник между ΔZ и ZΓ вместе с квадратом на ΓE равен квадрату на EZ. Точно так же докажем, что прямоугольник между ΔH и HA вместе с квадратом на AE равен квадрату на EH. Затем AE равна EΓ, и HE равна EZ; значит, прямоугольник между ΔZ и ZΓ равен прямоугольнику между ΔH и HA. Если же прямоугольник между крайними равен прямоугольнику между средними, то четыре прямых составляют пропорцию; значит, ZΔ к ΔH, как AH к ΓZ. Но ZΔ к ΔH, как ZΓ к ΓB, и как BA к AH, так как в треугольнике ZΔH проведены ΓB и AB параллельно ΔH и ΔZ. Значит, BA к AH, как AH к ΓZ, и как ΓZ к ΓB. И вот для AB и BΓ найдены средние пропорциональные AH и ΓZ.»

Решение Диокла — Паппа — Спора

Основу этого решения составляет фигура из трёх прямоугольных треугольников, стороны которых образуют непрерывную пропорцию (рис. 10). Катеты $OA = a$ и $OD = b$ заданы, катеты $OB = x$ и $OC = y$ нужно взять такими, чтобы прямые AB и CD были параллельны, а прямая BC — перпендикулярна к ним обеим.

Идея *Диокла* состоит в том, чтобы достроить рис. 10 до вписанного прямоугольника (рис. 11). Если мы станем изменять положение вершины B, точка D будет описывать некоторую кривую. Эта кривая называется *циссоидой*.

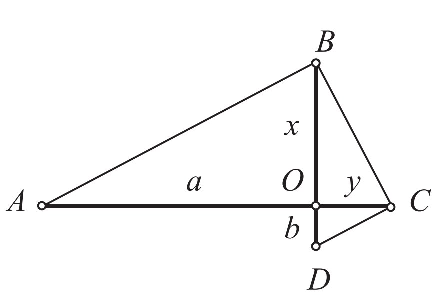


Рис. 10.

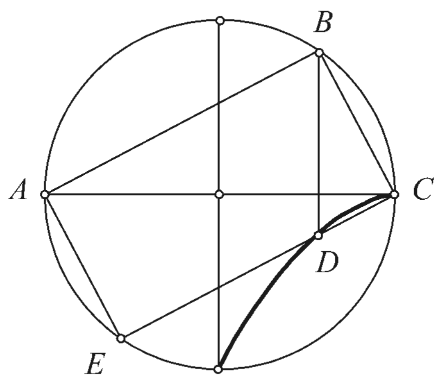


Рис. 11.

Чтобы произвести удвоение куба, надо найти такое положение точки D, для которого $a : b = 2$. Если циссоида уже проведена, это построение элементарно (рис. 12).

Вот как выглядит решение *Диокла* в переводе:

«Проведём в круге два перпендикулярных диаметра AB, ΓΔ; по обе стороны от B отложим две равные дуги EB и BZ; через Z проведём ZH параллельно AB; и соединим ΔE. Я утверждаю, что для ΓH, HΘ двумя средними пропорциональными будут ZH, HΔ.

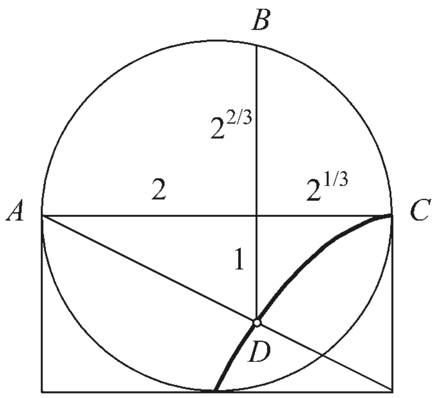


Рис. 12.

Проведём через E параллельно AB прямую EK; тогда EK равна ZH, и KΓ равна HΔ. Это будет очевидным, если соединить Λ прямыми с E, Z; ведь получившиеся углы ΓΛE, ZΛΔ равны, и при K, H будут прямые углы; тогда вследствие равенства ΛE и ΛZ все стороны и углы одного треугольника будут соответственно равны всем сторонам и углам другого треугольника, а значит, будут равны и оставшиеся ΓK и HΔ. Теперь, поскольку ΔK к KE, как ΔH к HΘ, но и ΔK к KE, как EK к KΓ (ведь EK будет средней пропорциональной для ΔK, KΓ), то, значит, ΔK к KE, и EK к KΓ, как ΔH к HΘ. Далее, ΔK равна ΓH, KE равна ZH, KΓ равна HΔ; значит, ΓH к HZ, как ZH к HΔ, как ΔH к HΘ.

Если с каждой стороны B взять равные дуги MB, BN, через N параллельно AB провести NΞ и соединить ΔM, то совершенно так же для ΓΞ, ΞO средними пропорциональными будут NΞ, ΞΔ. Если мы подобным образом проведём много непрерывно расположенных параллельных между B, Δ, затем отложим от B к Γ дуги, соответственно равные дугам, отсекаемым этими прямыми от B, и полученные точки соединим с Δ прямыми (наподобие ΔE, ΔM), то эти прямые пересекут соответствующие им параллели между B, Δ в некоторых точках (в нашем примере в Θ, O); если соединить эти точки по линейке прямыми, то мы получим некоторую начерченную в круге линию, обладающую тем свойством, что если через любую её точку провести прямую, параллельную ΛB, то эта проведённая прямая и отсекаемый ей на диаметре по направлению к Δ отрезок будут средними пропорциональными для другого отрезка диаметра по направлению к точке Γ и той части проведённой прямой, которая заключена между построенной в круге линией и диаметром ΓΔ.

После этой подготовки возьмём две прямые, для которых требуется отыскать две средние пропорциональные, и пусть это будут A, B. Возьмём круг с двумя взаимно перпендикулярными диаметрами ΓΔ, EZ и начертим в нём при помощи непрерывных точек упомянутую кривую ΔΘZ. Сделаем, чтобы как A к B, так и ΓH к ΓK. Затем продолжим ΓK до пересечения с построенной линией в Θ. Через Θ параллельно EZ проведём ΛM; тогда, согласно вышеизложенному, средними пропорциональными для ΓΛ, ΛΘ будут MΛ, ΛΔ. Затем, поскольку ΓΛ к ΛΘ как ΓH к HK, и ΓH к HK как A к B, то если мы между A, B вставим прямые N, Ξ так, чтобы все они были в одном отношении к ΓΛ, ΛM, ΛΔ, ΛΘ, то средними пропорциональными для A, B будут N, Ξ, что и требовалось отыскать.»

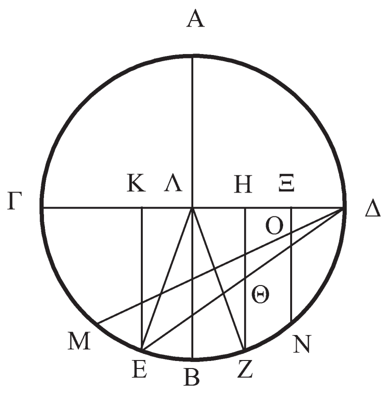


Рис. 13

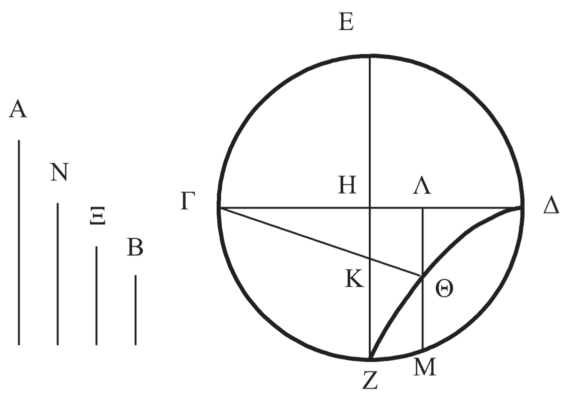


Рис. 14

Решение Архита

Анализ задачи начнём с того, что построим полусферу единичного радиуса и проведём в её основании диаметр $AB = 2$. Допустим, что искомый отрезок, длина которого равна $\sqrt[3]{2}$, уже найден: пусть это будет хорда AC, лежащая в плоскости основания полусферы. Проведём через AC плоскость, перпендикулярную плоскости основания: она пересечёт полусферу по полукругу с диаметром AC. В этом полукруге проведём хорду $AD = 1$ и соединим CD. Угол ADC — прямой, как вписанный в полукруг. В секущей плоскости продолжим AC и AD, восстановим к AC перпендикуляр CE до пересечения с AD в точке E, а затем восстановим к AE перпендикуляр EF до пересечения с AC в точке F. Около прямоугольного треугольника AEF опишем полукруг с диаметром AF (рис. 15). В силу подобия треугольников имеет место пропорция $AD : AC = AC : AE = AE : AF$, и поскольку по предположению $AD = 1$ и $AC = \sqrt[3]{2}$, тем самым $AF = 2$.

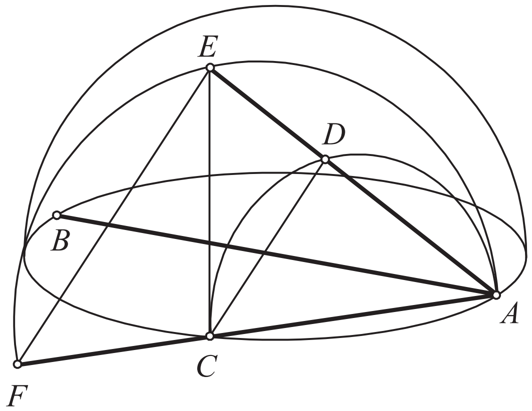


Рис. 15

Рассмотрим теперь точку E. Во-первых, E лежит на перпендикуляре EC к основанию, и тем самым — на поверхности цилиндра, установленного на круге основания. Во-вторых, E лежит на продолжении AD, и тем самым — на поверхности конуса с вершиной A, основанием которого служит круг, проведённый на поверхности полусферы циркулем с единичным раствором. В третьих, E лежит на полукруге с диаметром $AF = 2$, плоскость которого перпендикулярна к плоскости основания, и тем самым — на поверхности тора, заметаемого вращением исходной сферы вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно к плоскости основания. Все три поверхности — цилиндр, конус и тор — мы можем мысленно построить, поскольку данных для этого вполне достаточно.

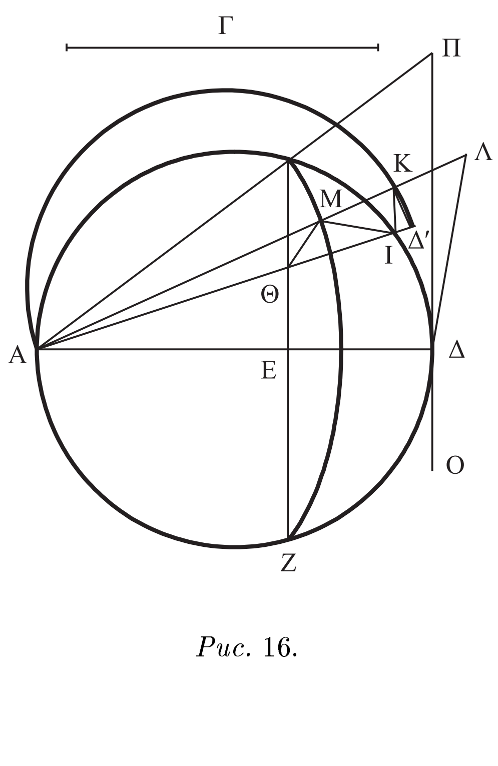


Рис. 16.

Найдя точку E как место пересечения трёх поверхностей, мы найдём вслед за ней точку C и тем самым искомый отрезок AC.

Поскольку исходная полусфера в итоговом построении непосредственно не участвует, не участвует она и в доказательстве, которое даёт *Архит*. Как это часто бывает, когда строительные леса убраны, трудно сказать, откуда решение взялось. Но если их восстановить, всё становится на свои места.

Вот как выглядит решение *Архита* в переводе:

«Пусть даны две прямые ΑΔ, Γ; требуется для ΑΔ, Γ найти две средние пропорциональные. На большей из них ΑΔ опишем круг ΑΒΔΖ и вставим в него ΑΒ, равную Γ; пусть она, будучи продолжена, встретит в Π касательную к кругу, проведённую из Δ. Проведём ΒΕΖ, параллельную ΠΔΟ, и вообразим прямой полуцилиндр на полукруге ΑΒΔ, а на ΑΔ — перпендикулярный полукруг на прямоугольнике полуцилиндра. Этот полукруг при вращении от Δ к Β около неподвижного конца диаметра Α будет пересекать цилиндрическую поверхность и вычертит на ней некоторую линию. И опять, около неподвижной прямой АΔ будем вращать треугольник АПΔ против движения полукруга; этот треугольник образует коническую поверхность с прямой АП, которая при вращении пересечёт начерченную на цилиндре линию в некоторой точке; при этом В опишет полукруг на конической поверхности. Пусть в пересечении вышеупомянутых линий движущийся полукруг занимает положение Δ′KA, вращающийся обратно треугольник — положение ΔΛA, причём точкой упомянутого пересечения будет K; и пусть описанный точкой В полукруг будет BMZ, а его общее пересечение с кругом BΔZA будет BZ. Опустим из K перпендикуляр на плоскость полукруга BΔA; конец этого перпендикуляра попадёт на окружность, так как цилиндр будет прямым. Пусть это будет KI, и соединяющая прямая AI пересечёт BZ в Θ, а AΛ пересечёт полукруг BMZ в M. Проведём прямые KΔ′, MI, MΘ. Так как каждый из полукругов Δ′KA и BMZ перпендикулярен к лежащей под ними плоскости, то и их общее сечение MΘ будет перпендикулярно к плоскости круга; поэтому MΘ будет перпендикулярна к BZ.

Таким образом, прямоугольник между BΘ и ΘZ, или прямоугольник между AΘ и ΘI, равен квадрату на MΘ; следовательно, треугольник AMI будет подобен каждому из треугольников MIΘ и MAΘ. Далее, угол IMA прямой. Прямым будет и угол Δ′KA; значит, KΔ′ и MI будут параллельны, и получится пропорция: Δ′A к AK, как KA к AI, как IA к AM, вследствие подобия треугольников. Так что четыре прямые Δ′A, AK, AI, AM составляют непрерывную пропорцию. Затем AM равна Г, так как она равна AB; значит, для двух данных прямых AΔ, Г найдены две средние пропорциональные AK, AI.»

Литература

[1] Архимед. *Сочинения.* Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.

[2] Ван дер Варден Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959.

[3] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира.* М.: Фазис, 1997.

[4] Eutocius. Commentarii in libros de sphaera et cylindro. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii.* Ed. J. L. Heiberg. Leipzig: Teubner, 1915. Vol. 3., p. 2–224.

[5] Heath T. L. *A history of Greek mathematics.* 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921.

II. Квадратриса Гиппия и её связь с задачами о трисекции угла и о квадратуре круга

Обзор исторических свидетельств

Задача о делении произвольного угла на три равных части (и вообще на произвольное число равных частей) могла исходно рассматриваться греческими геометрами в связи с вопросом о построении разных правильных многоугольников. Попытки решить её в общем виде с помощью циркуля и линейки не увенчались успехом. Поэтому для её решения стали изобретаться другие средства.

Одним из таких средств служит специальная механическая кривая, изобретённая знаменитым софистом *Гиппием Элидским* (конец V в. до н. э.). Позднее эта кривая была применена *Диностратом* (середина IV в. до н. э.) для решения задачи о квадратуре круга, и поэтому она получила название квадратрисы.

О том, что квадратриса каким-то образом связана с именем Гиппия, сообщает неоплатоник *Прокл* (V в. н. э.) в *Комментарии к I книге Начал Евклида.* В первом отрывке, относящемся к этому вопросу, *Прокл* перечисляет разные подходы к решению задачи о трисекции угла: «*Никомед* воспользовался для этого конхоидальной линией, и он учит нас её порождению, порядку и признакам, будучи открывателем её особенностей; и с её помощью он делит всякий прямолинейный угол на три части. Другие осуществляли это при посредстве квадратрис *Гиппия* и *Никомеда*, и они тоже пользовались смешанными линиями — квадратрисами. Иные же начали со спиралей *Архимеда* и разделили данный прямолинейный угол в данном отношении» (272.7). Во втором отрывке речь идёт об установлении определяющих принципов для различных кривых: «Ведь и *Аполлоний* показывает признаки каждой из конических линий, и *Никомед* для конхоид, и *Гиппий* для квадратрис, и *Персей* для спирик» (356.11).

Свидетельства *Прокла*, восходящие к скорее всего к *Гемину* (I в. н. э.), весьма отрывочны. Подробное же изложение, включающее в себя построение квадратрисы, предложенное *Динократом* решение задачи о квадратуре круга, критические возражения, выдвинутые против этого решения *Спором Никейским*, а также связь квадратрисы с некоторыми спиральными линиями, приводит *Папп* (III в. н. э.) в *Математическом собрании* (IV, 30–34). Как сообщает *Папп* в начале этого раздела, «для осуществления квадратуры круга *Динострат*, *Никомед* и другие более поздние математики пользуются некоторой кривой, получившей имя квадратрисы от этого её основного свойства». Имя *Гиппия* в тексте *Паппа* не упомянуто — скорее всего, по той причине, что хотя *Гиппий* и придумал саму эту кривую, описав её принцип построения, однако её связь с проблемой квадратуры круга была установлена существенно позже.

Гиппий и задача о делении угла в данном отношении

Ключевая идея, выдвинутая *Гиппием*, состоит в непрерывном соотнесении двух равномерных движений — кругового и прямолинейного. Если нам удастся установить такое соотнесение, то тогда, разделив след прямолинейного движения на любое число равных частей с помощью теоремы *Фалеса*, мы разделим на такое же число равных частей и соотнесённую с этим следом круговую дугу, а тем самым — и опирающийся на эту дугу центральный угол. На таком соотнесении основан целый ряд решений задач о делении угла, в том числе и упомянутое выше решение *Архимеда* со спиралями; решение же *Гиппия* было, судя по всему, исторически первым.

Рассмотренное *Гиппием* соотнесение устроено так. В квадрат $ABCD$ впишем дугу окружности BED с центром A. Пусть отрезок AB равномерно вращается вокруг A так, что точка B описывает дугу BED; и пусть отрезок BC, оставаясь всё время параллельным AD, равномерно перемещается по направлению к AD. Пусть оба равномерных движения совершаются в одно и то же время так, что обе прямые AB и BC одновременно совпадут с AD. Движущиеся прямые будут в каждый момент времени пересекаться в некоторой точке, которая опишет некоторую кривую BFG (рис. 17). Если AFE представляет некоторое положение вращающейся прямой, а F — точку её пересечения с параллельно перемещающейся прямой, то по определению AB будет так относиться к перпендикуляру HF, как вся дуга BD к дуге ED.

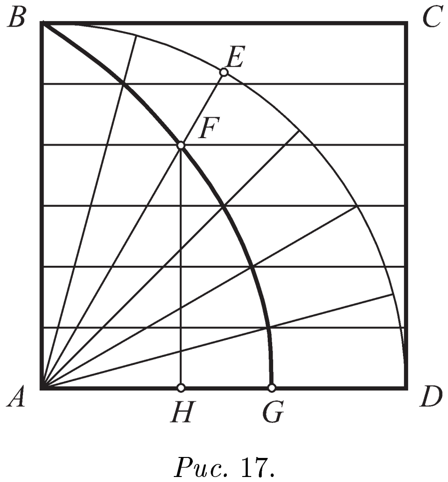


Рис. 17.

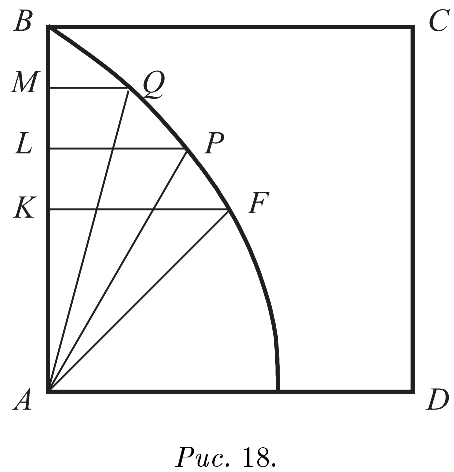


Рис. 18.

Ясно, что когда кривая *Гиппия* уже начерчена, её можно применять для деления произвольного угла на любое число равных частей. К примеру, пусть мы хотим разделить некий острый угол на три части. Отложим равный ему угол BAF, где F — точка, в которой сторона угла пересекает кривую. Опустим из F на AB перпендикуляр FK. Разделим отрезок BK на три равных части точками L, M. Восстановим к AB перпендикуляры LP, MQ до пересечения с кривой в точках P, Q. Проведём лучи AP, AQ — они делят угол BAF на три равных части (рис. 18).

Против применения квадратрисы в геометрии возражал *Спор*. «В самом деле, — говорил он, — как можно заставить две точки двигаться из B равномерным движением так, чтобы одновременно одна точка пришла по прямой в A, а другая точка — по дуге в D, если не знать с самого начала, как относятся между собой длины этих прямой и дуги? Ведь именно в этом отношении должны находиться и скорости обоих движений. Если же это отношение нам не дано, то не следует пользоваться этой линией, относящейся скорее к механике, нежели к геометрии».

Возможно, *Спор* в своём возражении и был некоторым образом прав, и решение задачи о трисекции угла с помощью квадратрисы или других механических линий не может быть признано за «настоящее» геометрическое решение. Однако сама квадратриса, будучи мысленно построенной, оказывается вполне определённым объектом, с которым можно связывать разные геометрические задачи. Например, можно спрашивать, какую долю от стороны квадрата D составляет отсекаемый квадратрисой отрезок AG? Этот вопрос, конечно же, является геометрическим и подлежит изучению в геометрии. Его исследование приводит к решению ещё одной знаменитой задачи древности — а именно, к решению задачи о спрямлении окружности и о квадратуре круга.

Динострат и задача о спрямлении дуги окружности

Как сообщает *Папп*, *Динострат* установил, что дуга BED так относится к радиусу AD, как сам этот радиус AD относится к отрезку AG, где G — концевая точка квадратрисы. Этой же теореме можно придать и такую эквивалентную формулировку: если провести дугу в четверть окружности с радиусом AG, длина этой дуги будет равна стороне исходного квадрата AD.

Для перехода от спрямления дуги к квадратуре круга надо воспользоваться теоремой, которую доказывает *Архимед* в сочинении *О квадратуре круга*, но формулировка которой почти наверняка была известна и до него: круг равновелик треугольнику, высота которого равна радиусу круга, а основание — длине окружности.

Предложенное *Диностратом* доказательство теоремы о спрямлении дуги ведётся от противного. Сначала предполагается, что величина AK, определяемая из пропорции

$$\text{дуга } BED : AD = AD : AK,$$

будет или больше, или меньше AG; оба эти предположения приводятся к противоречию, после чего делается вывод, что AK совпадает с AG.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, характерной для многих сохранившихся доказательств античной геометрии: ни из формулировки теоремы, ни из самого доказательства никоим образом не видно, откуда автор узнал, что доказываемая им теорема истинна. А между тем у него обязательно должно было иметься некоторое предварительное понятие о её истинности: ведь если бы такого предварительного понятия у него не было, с чего бы он стал эту теорему доказывать?

Осознав эту ситуацию, попытаемся реконструировать тот путь, который мог бы привёсти *Динострата* к его открытию. Как мы помним, исходная идея *Гиппия* состояла в согласовании двух движений — вращательного и поступательного. В описанной выше конструкции проходимые двумя точками расстояния были различными, а потому были различны и скорости движений. Потребуем теперь, чтобы эти скорости были одинаковыми, а точка пересечения движущихся отрезков двигалась всё по той же кривой. Тогда ведущая точка, совершающая вращательное движение, должна будет двигаться не по дуге BD, но по меньшей дуге LG, равной по длине стороне исходного квадрата AB. Допустим, что эта окружность уже построена, и проведём анализ задачи.

Обратим оба движения вспять от конечного положения. Покажем, что точка P всегда лежит внутри роговидного угла, образованного дугой окружности GL и вертикальной прямой GS (рис. 19). Предварительно докажем две леммы. Оба доказательства будут опираться на допущение о выпуклых линиях, известное по книге *Архимеда «О шаре и цилиндре»*:

1. Постулат. *Две линии, расположенные на плоскости и имеющие одни и те же концы, всегда будут неравными, если обе они выпуклы в одну и ту же сторону, и одна из них целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой; при этом меньшей будет объемлемая линия.*

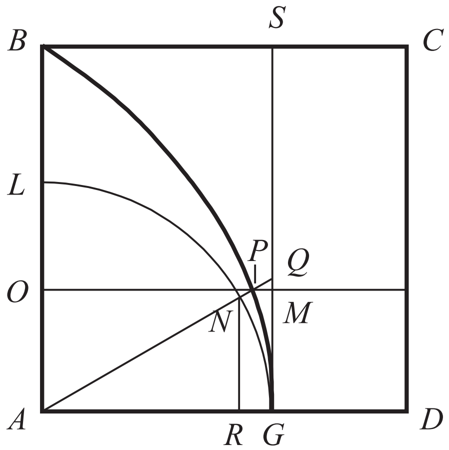


Рис. 19

2. Лемма 1. *Отвес NR короче дуги NG.*

Доказательство. Зеркально отразим перпендикуляр и дугу относительно прямой AD. Теперь их можно рассматривать как половины от хорды и от дуги, которую стягивает эта хорда. Но согласно постулату *Архимеда* хорда короче стягиваемой дуги.

3. Лемма 2. *Отвес QG длиннее дуги NG.*

Доказательство. Зеркально отразим перпендикуляр и дугу относительно прямой AQ. Теперь их можно рассматривать как половины от угла, составленного из двух касательных, и от охваченной этим углом дуги. Но согласно постулату *Архимеда* стороны угла в сумме длиннее охватываемой этим углом дуги.

Вернёмся теперь к нашему основному рассуждению. В силу обеих лемм, а также в силу равенства дуги GM и отрезка GN, имеет место двойное неравенство

$$RN < GM < GQ.$$

Поэтому точка P, лежащая на горизонтальной прямой OM, расположена на AQ между точками N и Q.

Поскольку точка P всегда лежит между дугой LG и вертикалью SG, квадратриса в своей концевой точке неминуемо должна упереться в точку G. Этим отводится ещё одно возражение против использования квадратрисы, выставленное *Спором*. «Невозможно — говорит он, — определить ту точку кривой, которая необходима для выполнения квадратуры круга, а именно точку её пересечения с прямой AD. Ведь когда прямые AB и BC будут при своём движении приближаться к исходному положению, они совпадут с прямой AD и никоим образом не дадут точки взаимного пересечения».

На это можно сказать, что хотя прямые AB и BC в своём конечном положении совпадают по длине и не дают пересечения в точке, однако во всех прочих положениях они пересекаются в некоторой определённой точке, и эта точка в своём движении подходит к точке G как к пределу этого движения.

Завершив это рассуждение, мы можем понять также и то, почему *Динострат* был вынужден доказывать свою теорему от противного. В самом деле, дуга LG, которой мы пользовались в анализе задачи, исходно предполагалась равной стороне AD. Но если мы сначала строим квадратрису, и лишь потом — дугу LG, проходящую через концевую точку квадратрисы G, то тогда нам надо доказать, что эта дуга равна по длине стороне квадрата AD. По сути дела, именно этот факт и доказывает *Динострат*.

Литература

[1] Архимед. *Сочинения.* Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.

[2] Ван дер Варден Б. Л. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* Пер. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1959.

[3] Прасолов В. В. *Геометрические задачи древнего мира.* М.: Фазис, 1997.

[4] Heath T. L. *A history of Greek mathematics.* 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921.

[5] Pappus. *Synagoge.* Ed. F. Hultsch. 3 vols. Berlin: Weidmann, 1876–1878.

[6] Proclus. *In primum Euclidis elementorum librum commentarii.* Ed. G. Friedlein. Leipzig: Teubner, 1873.

Щетников Андрей Иванович,
руководитель проекта “Школа Пифагора”,
Центр образовательных проектов “Сигма”,
Новосибирск.

Email: pythagor@ngs.ru

Об эквивалентности прямых Эйлера и Нагеля

Алексей Мякишев

В статье изучено соотношение прямых Эйлера и Нагеля, соединяющих некоторые замечательные точки треугольника. Попутно выводится ряд полезных фактов геометрии треугольника.

1. Действующие лица

1.1. Прямая Эйлера. *В любом треугольнике его ортоцентр (точка пересечения высот) H, центроид (точка пересечения медиан) G, и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, причем $\frac{HG}{OG} = \frac{2}{1}$ (точка G лежит внутри отрезка HO)*[1].

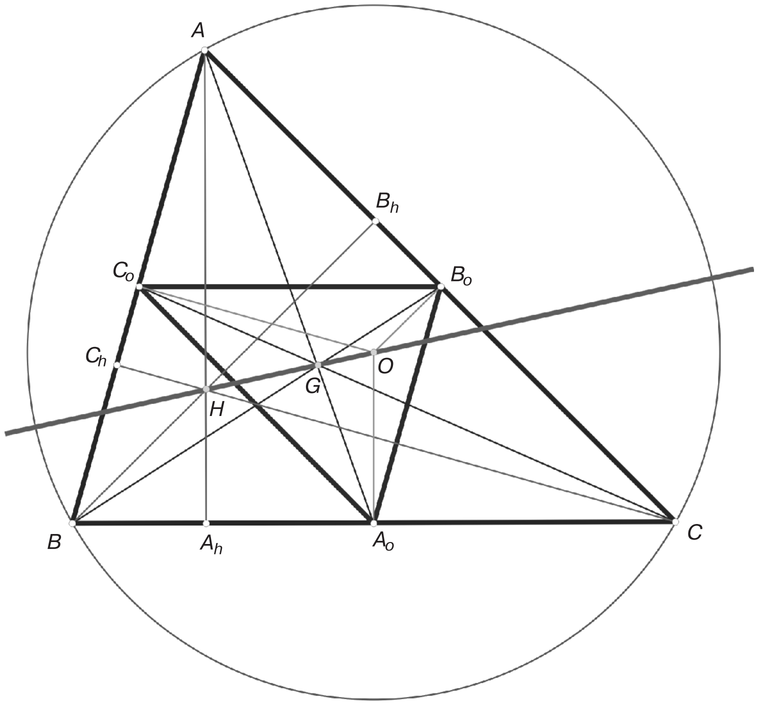


Рис. 1

Мы сразу докажем этот красивый факт, если рассмотрим гомотетию $\mathrm{H}_{(G,-\frac{1}{2})}$ с центром в точке пересечения медиан G и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$.

Действительно, так как медианы делятся центроидом G в отношении $2 : 1$, считая от вершин, указанная гомотетия переводит треугольник ABC в его серединный треугольник $A_0B_0C_0$. Кроме того, очевидно, что центр O описанной около треугольника ABC окружности совпадает с ортоцентром H' серединного треугольника. Но гомотетия, являясь преобразованием подобия, переводит соответствующие элементы треугольника в соответствующие — в частности, ортоцентр переходит в ортоцентр: $\mathrm{H}_{(G,-\frac{1}{2})}(H) = H' = O$.

[1]Вообще-то в случае равностороннего треугольника все три точки совпадают. Но мы и здесь, и в дальнейшем (в подобных ситуациях) будем считать случай правильного треугольника — *предельным* и не будем выделять его особо.

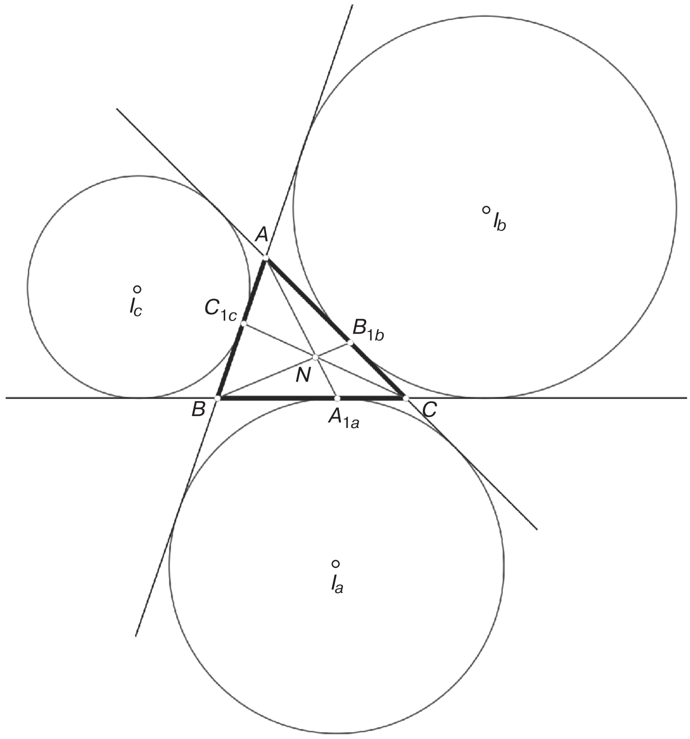


Рис. 2

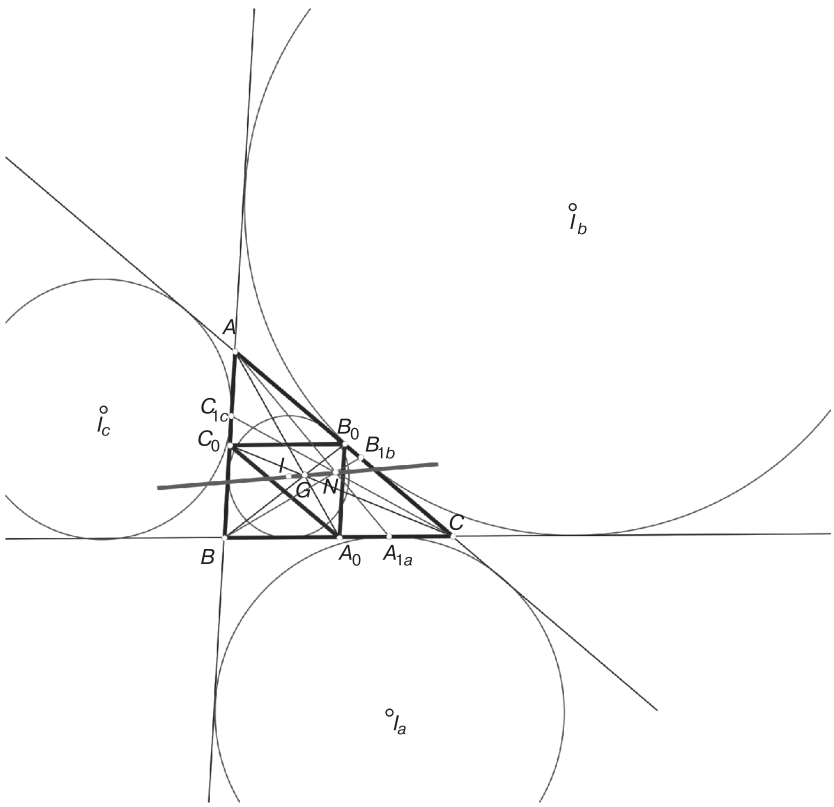


Рис. 3

1.2. Точка Нагеля и прямая Нагеля. Имеется и еще одна прямая, очень схожая с предыдущей — *прямая Нагеля.* Прежде чем сформулировать соответствующую теорему (доказательство которой будет полностью аналогично предыдущему, но потребует несколько больших усилий), необходимо только напомнить, что такое точка Нагеля.

Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания соответствующих вне-

вписанных окружностей с его сторонами, пересекаются в одной точке, которую называют точкой Нагеля N.

То, что эта точка действительно существует, несложно показать с помощью теоремы Чевы.

> *В любом треугольнике его точка Нагеля N, центроид G, и центр вписанной окружности I лежат на одной прямой, причем $\frac{NG}{IG} = \frac{2}{1}$ (точка G лежит внутри отрезка NI).*

Достаточно убедиться в том, что гомотетия $\mathrm{H}_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$ с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ переводит точку Нагеля в центр вписанной окружности.

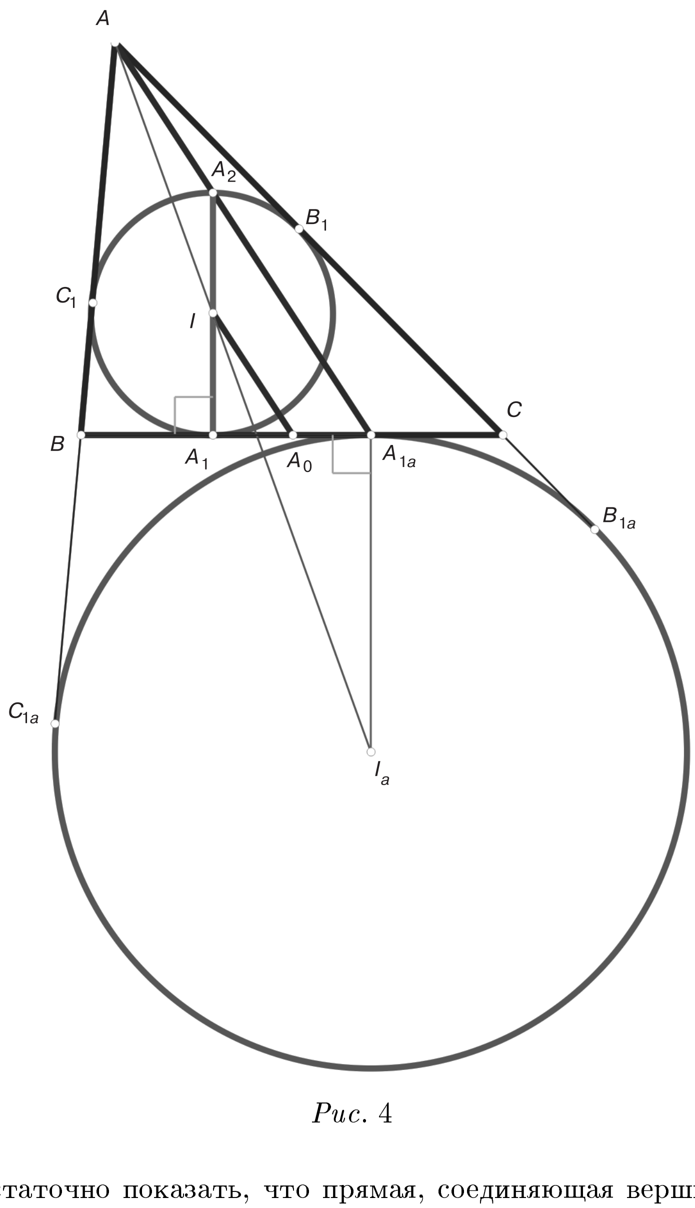


Рис. 4

Иначе говоря, достаточно показать, что прямая, соединяющая вершину A треугольника с соответствующей точкой касания вневписанной окружности A_{1a} перейдет при этой гомотетии в прямую, проходящую через центр вписанной окружности I (потому что дальше мы точно так же сумеем показать, что и образы двух других чевиан, проходящих через точку Нагеля, будут проходить через центр вписанной окружности, а точка пересечения прямых должна переходить в точку пересечения их образов).

Стало быть, образ нашей прямой есть некоторая прямая, проходящая через середину стороны BC — точку A_0 (поскольку рассматриваемая гомотетия вершину треугольника переводит в середину противолежащей стороны), причем *параллельно* исходной прямой (образ прямой, не проходящей через центр гомотетии есть параллельная ей прямая).

Заметим еще, что прямая, соединяющая вершину треугольника A с точкой A_{1a} касания вневписанной окружности со стороной BC, проходит через точку A_2, диаметрально противоположную точке A_1 касания вписанной окружности со стороной BC (т. е. симметричную ей относительно центра вписанной окружности) — что сразу следует из рассмотрения гомотетии с центром в A, переводящей вписанную окружность во вневписанную: точка A_2 переходит в точку A_{1a}.

Отсюда мы заключаем, что образ прямой есть средняя линия IA_0 в треугольнике $A_2A_1A_{1a}$ (точки касания вписанной и описанной окружности со стороной BC симметричны относительно ее середины), и потому проходит через центр вписанной окружности.

1.3. Добавочные точки и прямые Нагеля. Обратим теперь внимание на то, что центр вписанной окружности I имеет три родственные ей точки I_a, I_b, I_c — центры окружностей вневписанных, обладающих схожими свойствами. Такие точки Джон Конвей обозвал *слабыми* (*weak points*), а «одинокие» точки (к числу которых, например, относятся центроид, ортоцентр, и центр описанной окружности) — *сильными* (*strong points*). Строгое определение и разные свойства сильных и слабых точек можно найти на сайте Стива Сигура[2] [4].

Оказывается, слабой является и точка Нагеля.

Пусть A_1 — точка касания *вписанной окружности* со стороной BC, C_{1b} — точка касания вневписанной окружности с центром в I_b с продолжением стороны BA, а B_{1c} — точка касания вневписанной окружности с центром в I_c с продолжением стороны CA. Тогда прямые AA_1, BB_{1c}, CC_{1b} пересекаются в одной точке. Ее называют *первой добавочной точкой Нагеля* и обозначают N_a. Две другие добавочные точки определяются аналогично.

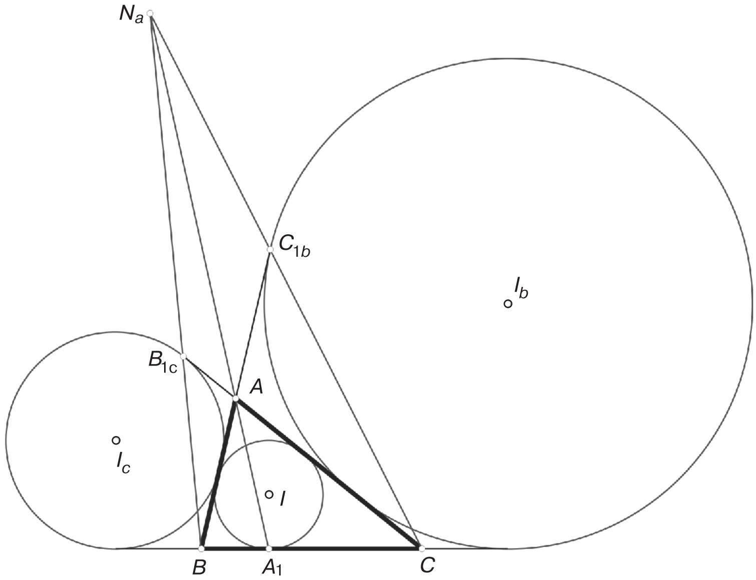


Рис. 5

Поскольку слабые точки ходят «четверками», любая теорема, в формулировке которой они фигурируют, имеет трех «сестер».

Есть три сестры и у прямой Нагеля.

Отрезок с концами в добавочной точке Нагеля и соответствующем ей центре вневписанной окружности, содержит центроид G и делится им в отношении $2:1$. (Доказать это утверждение, естественно, можно посредством все той же гомотетии $\mathrm{H}_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$).

[2]Увы, этот замечательный педагог и математик скончался 5 июля 2008 года в возрасте 62 лет. Фигура в американском образовании такого же масштаба, как, например, А. Н. Земляков в российском.

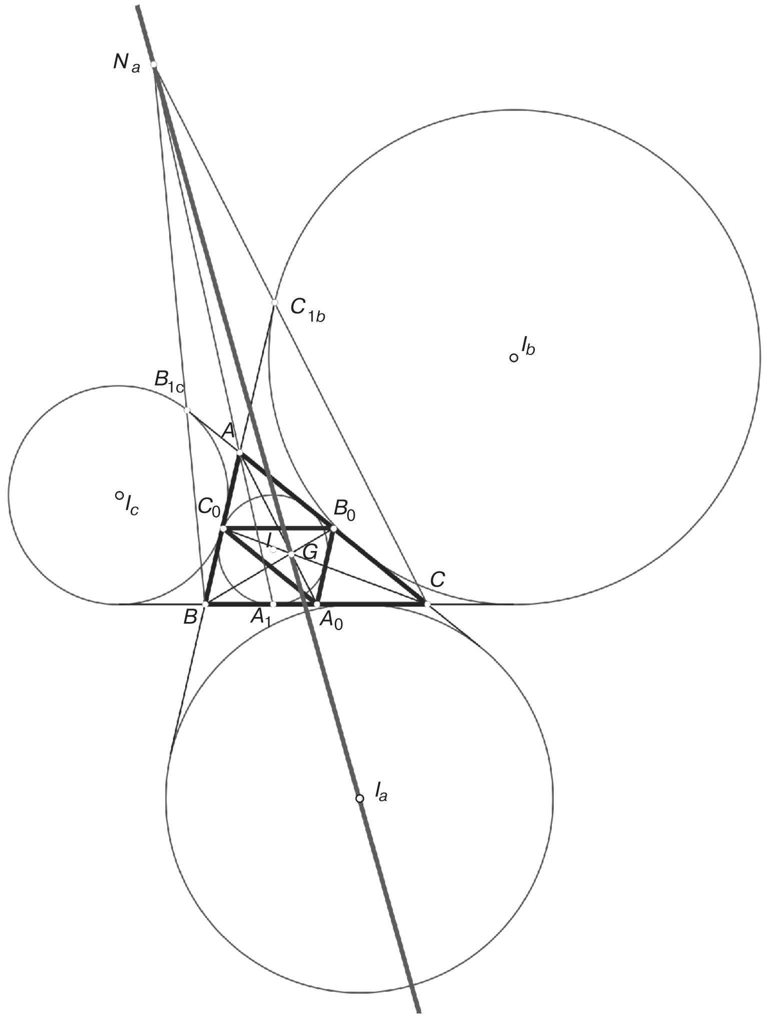


Рис. 6

2. Постановка задачи

Попробуем сравнить прямые Эйлера и Нагеля и ответить на вопрос, который, будучи поставлен неформально, может звучать приблизительно так:

> которая прямая «лучше», «мощнее»?[3]

Неформальные же соображения отдают пальму первенства прямой Эйлера.

Во-первых, точки, определяющие прямую Эйлера, «более замечательны» — если центры вписанной и описанной окружности сопоставимы и примерно равны по «степени замечательности», то точка Нагеля явно проигрывает ортоцентру (более сложная конструкция).

Во-вторых, как показывает практика (под этим словом подразумевается изучение автором статьи классического наследия по книжкам Прасолова и Шарыгина), в задачах прямая Эйлера появляется чаще, чем прямая Нагеля.

Ну, а в-третьих (уж если быть совсем неформальным), сами имена собственные подсказывают ответ: ведь они явно принадлежат математикам разных весовых категорий, и нетрудно сообразить, кто тут тяжеловес.

[3]Вспоминается фраза из одной старой детской книжки: «Ежели кит со слоном схлестнутся, то кто кого сборет?» (Не ручаюсь за дословною точность, цитируя по памяти. А книжка, кажется, Льва Кассиля «Швамбрания»).

Однако все эти соображения[4] носят ярко выраженный «гуманитарный» характер[5] (каков вопрос, таков ответ).

Но можно попробовать перевести сам вопрос на язык математики. Например, спросим так:

> Верно ли, что из факта существования прямой Эйлера для произвольного треугольника следует факт существования прямой Нагеля? Верно ли обратное утверждение?

А это уже — вполне содержательные геометрические задачи.

Как будет установлено в разделе 7, прямая Эйлера действительно «сильнее» прямой Нагеля (см. утверждение 7.1, 7.3) в некотором математическом смысле. Однако, если к прямой Нагеля добавить ее «добавочных» родственников, они все вместе «уравновесят» прямую Эйлера. А именно, в разделе 7 будет также доказана *основная теорема*:

> *В любом треугольнике существует прямая Эйлера* $\Leftrightarrow$ *в любом треугольнике существуют прямые Нагеля.*

Ее доказательство и является целью нашей работы.

В самом доказательстве будут использованы разнообразные теоремы и задачи элементарной геометрии, и мы начнем с того, что напомним о них.

3. Вспомогательные утверждения

3.1. Барицентрические координаты. Пусть на плоскости зафиксирован некоторый треугольник ABC. Выберем произвольную точку P плоскости. Оказывается, вершины этого треугольника можно «нагрузить» (т. е. поместить в вершины материальные точки — возможны как положительные, так и отрицательные массы) таким образом, что центр масс этой системы совпадет с точкой P.

Сами массы (определенные с точностью до умножения на отличную от нуля константу) называют *барицентрическими координатами точки P относительно* (или, как часто говорят, *в базисе*) треугольника ABC.

Ниже укажем некоторые факты из области барицентрического исчисления. (Их доказательства можно посмотреть в [1] и в [2] — глава 14).

Факт 3.1.1. — координаты некоторых замечательных точек. Обозначим стороны и углы данного треугольника ABC стандартным образом: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$. Кроме того, буквой s обозначим полупериметр треугольника. Тогда координаты перечисленных ниже замечательных точек (в базисе треугольника ABC) имеют следующий вид (как функции сторон или углов):

Точка пересечения медиан (центр тяжести, центроид, барицентр) $G = (1 : 1 : 1)$.

Точка пересечения высот (ортоцентр)

$$H = \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right) = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)\,.$$

Центр описанной окружности

$$O = \left(a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) : b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) : c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\right) = (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)\,.$$

Центр вписанной окружности $I = (a : b : c) = (\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$.

Центр вневписанной окружности $I_a = (-a : b : c) = (-\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma)$.

---

[4]Особенно последнее из них. Что уж говорить, подобные «аргументы» (*а ты кто такой!?*) — в природе человека.

[5]Автор статьи на самом деле с глубоким уважением относится ко всем гуманитарным дисциплинам и ко многим их отдельным представителям.

Точка Нагеля $N = (s-a : s-b : s-c) = \left(\cot\frac{\alpha}{2} : \cot\frac{\beta}{2} : \cot\frac{\gamma}{2}\right)$.

Добавочная точка Нагеля $N_a = (-s : s-c; s-b) = \left(-\cot\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta}{2} : \tan\frac{\gamma}{2}\right)$.

Факт 3.1.2. Лемма о трех точках и доказательство сущестования прямых Эйлера и Нагеля с помощью барицентрических координат.

Лемма о трех точках. Известно, что точки X, Y, Z имеют следующие координаты относительно треугольника ABC:

$$X = (p_1, q_1, r_1)\,; \qquad Y = (p_2, q_2, r_2)\,; \qquad Z = (p_1+q_1, p_2+q_2, p_3+q_3)\,.$$

Тогда эти точки лежат на одной прямой, и $\frac{XZ}{YZ} = \left|\frac{p_2+q_2+r_2}{p_1+q_1+r_1}\right|$, причем точка Z расположена *внутри* отрезка XY, если суммы масс имеют одинаковый знак, и *вне* — в противном случае.

Доказательство леммы: По условию, центр масс системы $(p_1+p_2)\,A$; $(q_1+q_2)\,B$; $(r_1+r_2)\,C$ находится в точке Z. Разобьем эту систему на две подсистемы: p_1A; q_1B; r_1C с центром масс в точке X и суммарной массой $p_1+q_1+r_1$, и p_2A; q_2B; r_2C с центром масс в точке Yи суммарной массой $p_2+q_2+r_2$. По правилу группировки, центр масс этой системы из двух точек по-прежнему совпадает с точкой Z. Затем воспользуемся правилом рычага.

Теперь, если рассмотреть координаты точек N, N_a, I, I_a как функции сторон, из леммы о трех точках немедленно будет следовать существование прямых Нагеля.

В отличие от геометрических доказательств (см. 1.1, 1.2, 1.3), доказательство существования прямой Эйлера методом барицентрических координат посложнее, чем аналогичное для прямых Нагеля. Однако и тут все быстро получится из леммы о трех точках, если выразить координаты через углы следующим образом: $H = (\lambda\tan\alpha; \lambda\tan\beta; \lambda\tan\gamma)$, где $\lambda = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; $O = \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} : \frac{\sin 2\beta}{2} : \frac{\sin 2\gamma}{2}\right)$ и использовать справедливое для треугольника равенство

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

3.2. Аффинные преобразования. Напомним определение и некоторые свойства аффинных преобразований (подробности см. в [2], глава 29).

> *Аффинное преобразование плоскости — это такое преобразование, которое любую прямую переводит в прямую.*

В частности, любое подобие есть аффинное преобразование.

Аффинное преобразование есть не что иное, как параллельная проекция одной плоскости на другую (тень, отбрасываемая фигурой, представляет собой ее аффинный образ). Перечислим основные свойства аффинных преобразований.

Свойство 3.2.1. Сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой.

Свойство 3.2.2. Сохраняется отношение площадей фигур.

Свойство 3.2.3. Параллельные прямые переходят в параллельные.

Свойство 3.2.4. Существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее произвольный треугольник ABC в произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$).

При этом любая точка P и ее образ P_1 имеют *одинаковые барицентрические координаты* (относительно треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно).

3.3. Ортотреугольник и его углы. Треугольник с вершинами в основаниях высот исходного треугольника, называют *ортотреугольником.*

Утверждение 3.3.1. Пусть $A_hB_hC_h$ — ортотреугольник *остроугольного* треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_h = \pi - 2\angle A, \quad \angle B_h = \pi - 2\angle B, \quad \angle C_h = \pi - 2\angle C.$$

Доказательство: Как обычно, обозначим ортоцентр буквой H.

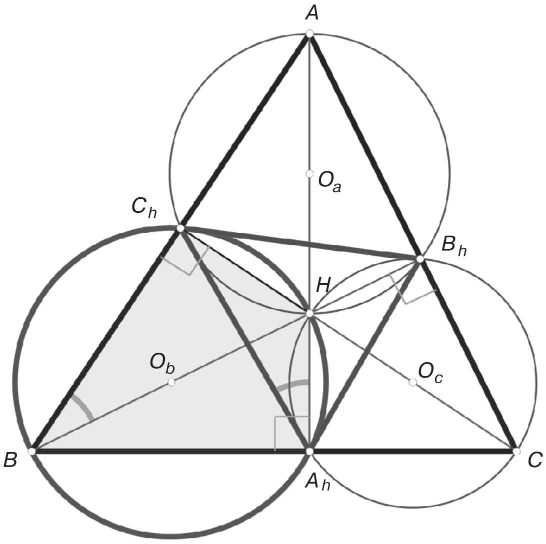


Рис. 7

Так как четырехугольник BC_hHA_h составлен из двух прямоугольных треугольников, то около него можно описать окружность с центром в точке O_b — середине отрезка BH. Углы, опирающиеся на одну дугу, равны и потому

$$\angle C_hA_hH = \angle C_hBH = \angle ABB_h = \frac{\pi}{2} - \angle A.$$

Из тех же соображений окружность можно описать и около четырехугольника CA_hHB_h, откуда следует, что $\angle B_hA_hH = \angle B_hCH = \angle ACC_h = \frac{\pi}{2} - \angle A$. Значит, $\angle A_h = \angle C_hA_hH + \angle B_hA_hH = 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) = \pi - 2\angle A$.

Два других равенства проверяются аналогично.

Утверждение 3.3.2. Пусть $A_hB_hC_h$ — ортотреугольник *тупоугольного* треугольника ABC, с тупым углом при вершине A. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_h = 2\angle A - \pi, \quad \angle B_h = 2\angle B, \quad \angle C_h = 2\angle C.$$

Доказательство: Очевидно, что $A_hB_hC_h$ в этом случае будет также и ортотреугольником треугольника HCB (с ортоцентром в точке A). Углы треугольника HCB несложно выразить через углы треугольника ABC:

$$\angle H = \pi - \angle B_hAC_h = \pi - \angle BAC = \pi - \angle A.$$

$$\angle B' = \angle ABC + \angle C_hBH = \angle B + \left(\frac{\pi}{2} - \angle H\right) = \angle B + \angle A - \frac{\pi}{2} = \pi - \angle C - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle C.$$

$$\angle C' = \angle ACB + \angle B_hCH = \angle C + \left(\frac{\pi}{2} - \angle H\right) = \angle C + \angle A - \frac{\pi}{2} = \pi - \angle B - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle B.$$

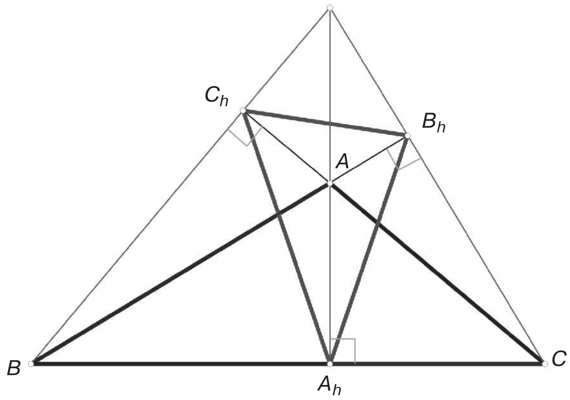


Рис. 8

Теперь воспользуемся предыдущим утверждением, считая исходным треугольником треугольник HCB. Тогда получим:

$$\angle A_h = \pi - 2\angle H = \pi - 2(\pi - \angle A) = 2\angle A - \pi.$$
$$\angle B_h = \pi - 2\angle C' = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle B\right) = 2\angle B.$$
$$\angle C_h = \pi - 2\angle B' = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = 2\angle C.$$

Замечание 3.3.1. В *прямоугольном* треугольнике ортотреугольник вырождается в высоту, проведенную из вершины прямого угла. Заметим, что при непрерывной деформации тупоугольного треугольника (двигая, например, вершину A) в остроугольный (и наоборот), в момент прохождения прямого угла точка B_h переходит в точку C_h (и наоборот). Из предельных соображений мы можем в этом случае считать, что $\angle A_h = 0$, (остроугольный треугольник) $\angle B_h = \pi - 2\angle B = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = 2\angle C = \angle C_h$ (тупоугольный треугольник), (остроугольный треугольник)

$$\angle C_h = \pi - 2\angle C = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle B\right) = \ = 2\angle B = \angle B_h$$

(тупоугольный треугольник). И в прямоугольном треугольнике как раз $\angle B + \angle C = \frac{\pi}{2}$.

3.4. Треугольники, образованные центрами вневписанных и описанной окружностей, и их углы. Треугольник $I_aI_bI_c$ с вершинами в центрах *вневписанных* окружностей исходного треугольника ABC назовем *вневписанным*.

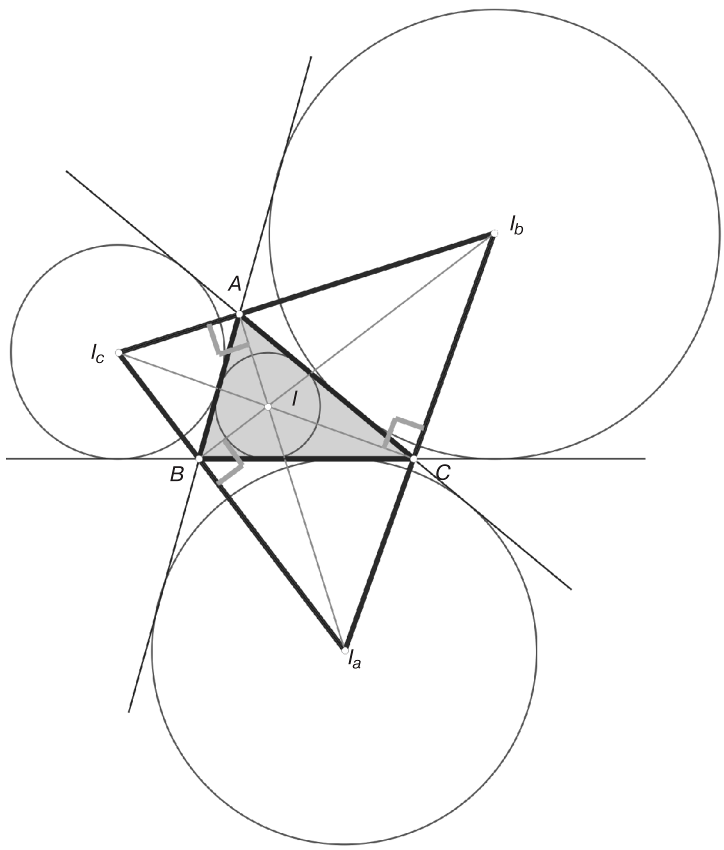


Рис. 9

Утверждение 3.4.1. Пусть $I_aI_bI_c$ — *вневписанный* треугольник треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle I_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}, \quad \angle I_b = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}, \quad \angle I_c = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Доказательство: Вершины вневписанного треугольника — точки пересечения *внешних* биссектрис исходного треугольника (и они же лежат на соответствующих *внутренних* биссектрисах).

А так как внутренняя и внешняя биссектрисы при вершине угла перпендикулярны, то треугольник ABC является *ортотреугольником остроугольного* треугольника $I_aI_bI_c$. Тогда, согласно утверждению 3.3.1,

$$\angle A = \pi - 2\angle I_a \Rightarrow \angle I_a = \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}.$$

Два других соотношения получаются аналогично.

Треугольник II_bI_c с вершинами в центе вписанной и двух *вневписанных* окружностей исходного треугольника ABC назовем *первым добавочным вневписанным.*

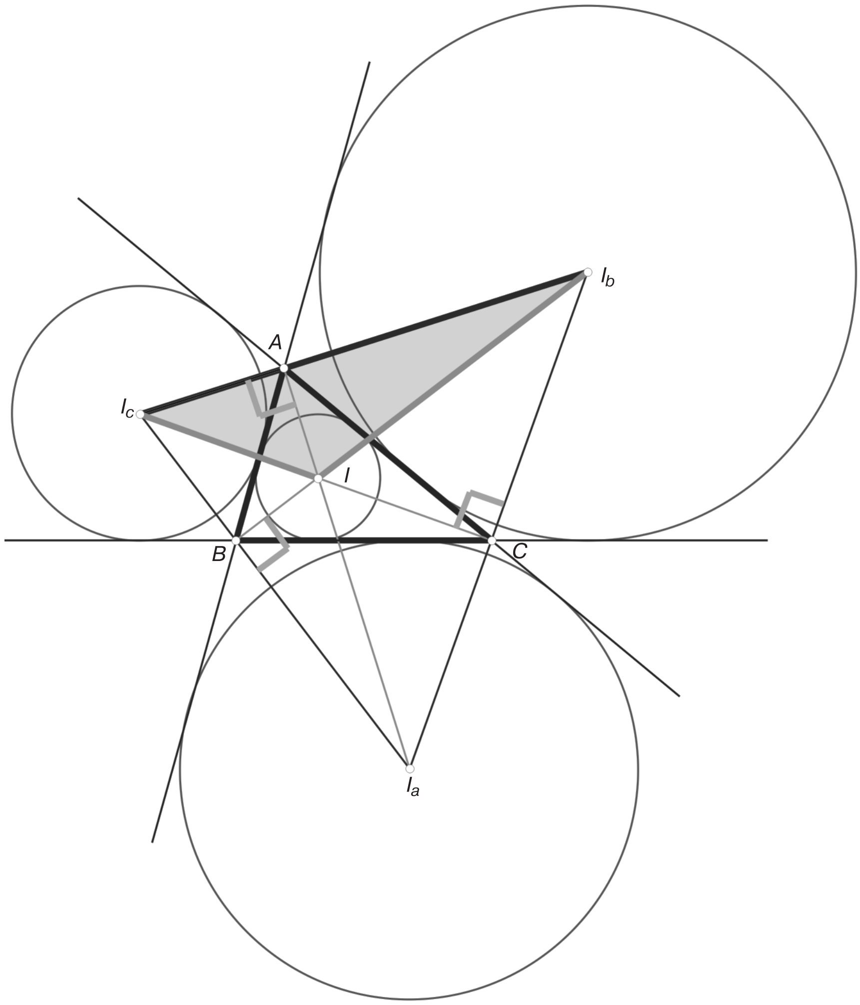


Рис. 10

Утверждение 3.4.2. Пусть II_bI_c — первый добавочный *вневписанный* треугольник треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle I = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}, \quad \angle I_b = \frac{\angle B}{2}, \quad \angle I_c = \frac{\angle C}{2}.$$

Доказательство: Как нетрудно заметить, в этом случае треугольник ABC является *орто-*

треугольником тупоугольного треугольника II_bI_c. Тогда, согласно утверждению 3.3.2,

$$\angle A = 2\angle I_a - \pi \Rightarrow \angle I_a = \frac{\pi + \angle A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}.$$
$$\angle B = 2\angle I_b \Rightarrow \angle I_b = \frac{\angle B}{2}.$$
$$\angle C = 2\angle I_c \Rightarrow \angle I_c = \frac{\angle C}{2}.$$

3.5. Треугольники Жергонна и их углы

Треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами в точках касания *вписанной* окружности исходного треугольника ABC с его сторонами назовем треугольником *Жергонна*.

Утверждение 3.5.1. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник *Жергонна* треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}, \quad \angle B_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}, \quad \angle C_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Доказательство: Как обычно, обозначим инцентр буквой I.

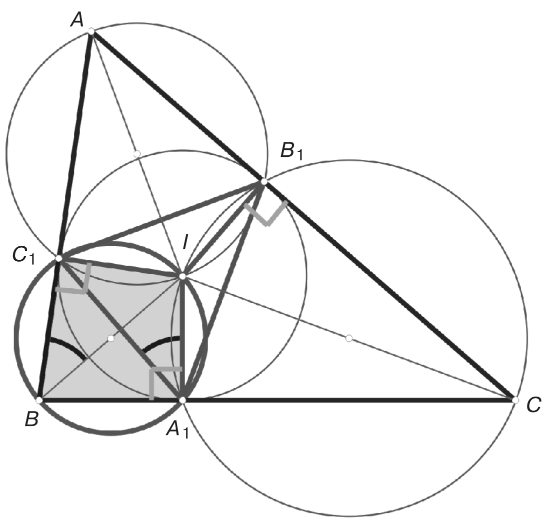


Рис. 11

Так как четырехугольник BC_1IA_1 составлен из двух прямоугольных треугольников, то около него можно описать окружность с центром в середине отрезка BI. Углы, опирающиеся на одну дугу, равны и потому $\angle C_1A_1I = \angle C_1BI = \frac{\angle B}{2}$ (BI — внутренняя биссектриса угла B).

Из тех же соображений окружность можно описать и около четырехугольника CA_1IB_1, откуда следует, что $\angle B_1A_1I = \angle B_1CI = \frac{\angle C}{2}$. Значит,

$$\angle A_1 = \angle C_1A_1I + \angle B_1A_1I = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

Два других равенства проверяются аналогично.

Из этих равенств также вытекает, что треугольник Жергонна — всегда *остроугольный*.

Треугольник $A_{1a}B_{1a}C_{1a}$ с вершинами в точках касания вневписанной окружности (с центром в I_a) со стороной BC и с продолжениями двух других сторон исходного треугольника ABC называется *первым добавочным* треугольником *Жергонна*.

Утверждение 3.5.2. Пусть $A_{1a}B_{1b}C_{1c}$ — первый добавочный треугольник *Жергонна* треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_{1a} = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}, \quad \angle B_{1a} = \frac{\angle B}{2}, \quad \angle C_{1a} = \frac{\angle C}{2}.$$

Доказательство: Как и в предыдущем случае, нетрудно усмотреть три четырехугольника, вокруг которых можно описать окружность. Тогда, рассматривая четырехугольник $BC_{1a}I_aA_{1a}$, получим:

$$\angle C_{1a}A_{1a}I_a = \angle C_{1a}BI_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}$$

(BI_a — внешняя биссектриса угла B). А рассмотрев четырехугольник $CA_{1a}I_aB_{1a}$ и рассуждая точно так же, придем к равенству

$$\angle B_{1a}A_{1a}I_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Значит, $\angle A_{1a} = \angle C_{1a}A_{1a}I_a + \angle B_{1a}A_{1a}I_a = \pi - \frac{\angle B + \angle C}{2} = \pi - \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$.

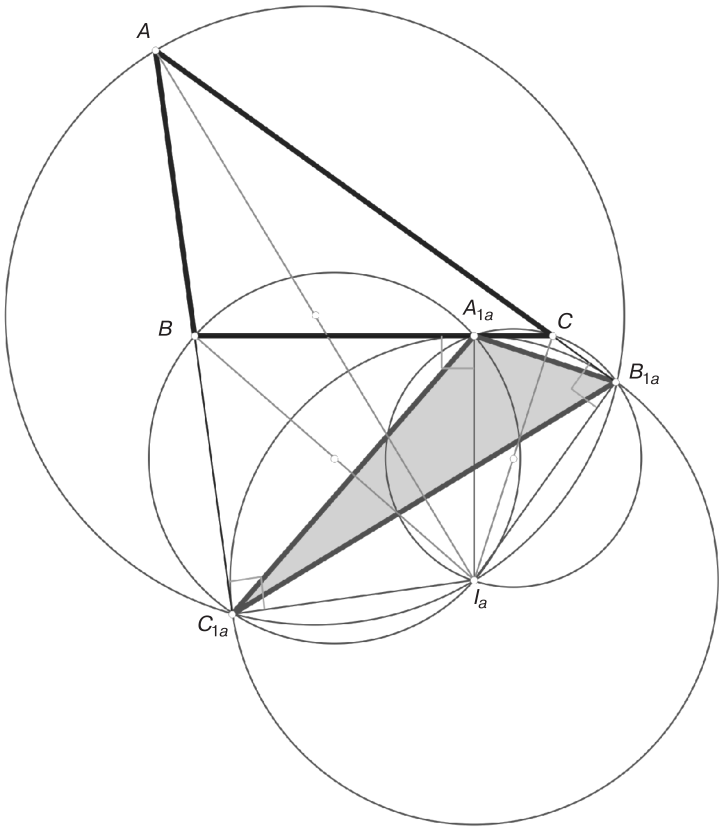


Рис. 12

Кроме того, треугольник $A_{1a}CB_{1a}$ — равнобедренный (отрезки касательных, проведенные из точки C, равны), поэтому $\angle CB_{1a}A_1 = \frac{\pi-(\pi-\angle C)}{2} = \frac{\angle C}{2}$. Четырехугольник $AC_{1a}I_aC$ — описанный, значит $\angle C_{1a}B_{1a}I_a = \angle C_{1a}BI_a = \frac{\angle A}{2}$ (AI_a — внутренняя биссектриса угла A). Тогда

$$\angle B_{1a} = \frac{\pi}{2} - \angle CB_{1a}A_1 - \angle C_{1a}B_{1a}I_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A + \angle C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - (\pi - \angle B)}{2} = \frac{\angle B}{2}.$$

Наконец, равенство $\angle C_{1a} = \frac{\angle C}{2}$ можно получить либо из аналогичных соображений, либо вычтя сумму уже найденных углов из π.

3.6. Тангенциальный треугольник и его углы

Треугольник, образованный касательными к описанной около исходного треугольника окружности в его вершинах, называют *тангенциальным.*

Утверждение 3.6.1. Пусть $A_tB_tC_t$ — *тангенциальный* треугольник *остроугольного* треугольника ABC. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_t = \pi - 2\angle A, \quad \angle B_t = \pi - 2\angle B, \quad \angle C_t = \pi - 2\angle C.$$

Доказательство: Понятно, что в этом случае треугольник ABC является треугольником *Жергонна* треугольника $A_tB_tC_t$.

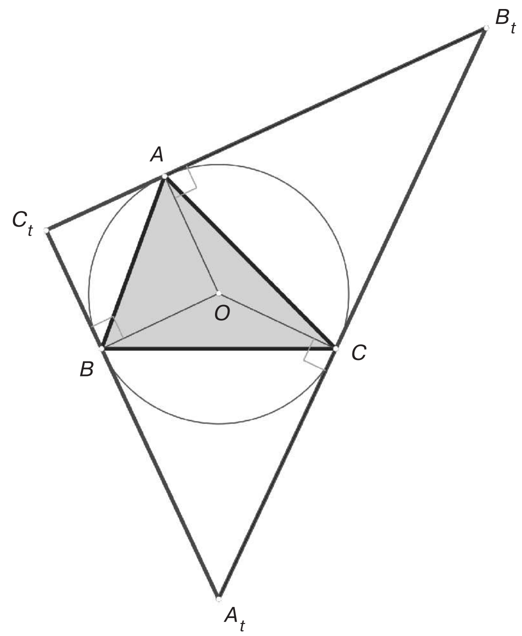


Рис. 13

Тогда, согласно утверждению 3.5.1,

$$\angle A = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A_t}{2} \Rightarrow \angle A_t = 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) \Rightarrow \angle A_t = \pi - 2\angle A.$$

Два других соотношения получаются аналогично.

Утверждение 3.6.2. Пусть $A_tB_tC_t$ — *тангенциальный* треугольник *тупоугольного* треугольника ABC, с тупым углом при вершине A. Тогда углы этих треугольников связаны соотношениями:

$$\angle A_t = 2\angle A - \pi, \quad \angle B_t = 2\angle B, \quad \angle C_t = 2\angle C.$$

Доказательство: В этом случае исходный треугольник является для тангенциального *первым добавочным* треугольником *Жергонна*, и все сразу следует из утверждения 3.5.2.

Замечание 3.5.1. В *прямоугольном* треугольнике гипотенуза является диаметром описанной окружности, поэтому касательные в ее концах к описанной окружности параллельны и тангенциальный треугольник вырождается в «бесконечный» — термин вполне уместный, особенно если вспомнить, что на проективной плоскости параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке (см. [1] — стр. 7, [2] — стр. 561). Из предельных соображений мы можем в этом случае считать (если, например, угол при вершине A — прямой), что

$$\angle A_t = 0, \quad \angle B_t = \pi - 2\angle B = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = 2\angle C,$$
$$\angle C_t = \pi - 2\angle C = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \angle B\right) = 2\angle B.$$

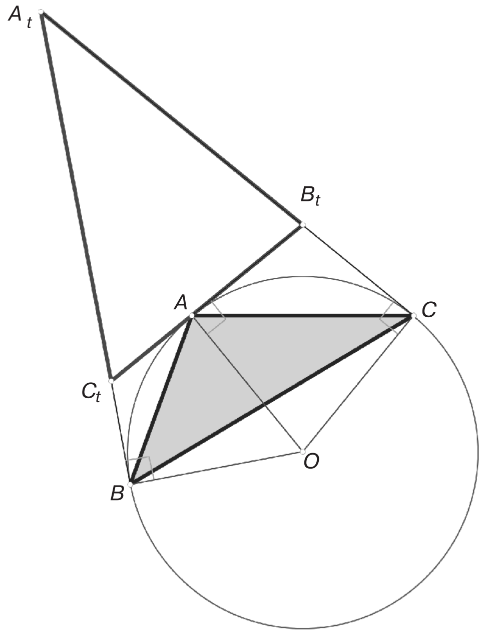


Рис. 14.

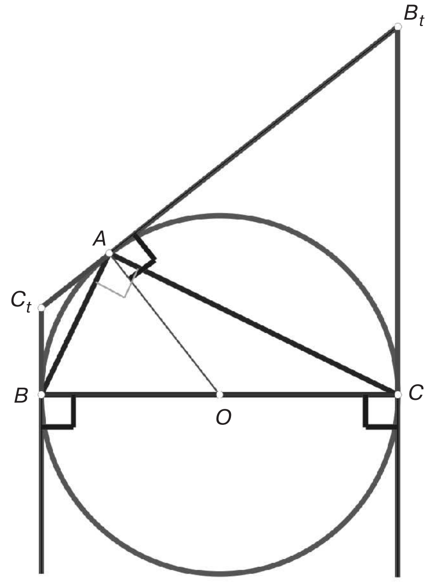


Рис. 15.

3.7. Доказательство основной теоремы

Итак, покажем, наконец, что из существования прямой Эйлера следует существование прямых Нагеля, и наоборот.

Основная теорема.

> *В любом треугольнике существует прямая Эйлера $\Leftrightarrow$ в любом треугольнике существуют прямые Нагеля.*

Этот факт следует из следующих пяти утверждений:

Утверждение 7.1. В произвольном остроугольном треугольнике существует прямая Эйлера $\Rightarrow$ в любом треугольнике существует прямая Нагеля.

Утверждение 7.2. В произвольном тупоугольном треугольнике существует прямая Эйлера $\Rightarrow$ в любом треугольнике существуют добавочные прямые Нагеля.

Утверждение 7.3 (обратное к утверждению 7.1). В любом треугольнике существует прямая Нагеля $\Rightarrow$ в произвольном остроугольном треугольнике существует прямая Эйлера.

Утверждение 7.4 (обратное к утверждению 7.2). В любом треугольнике существуют добавочные прямые Нагеля $\Rightarrow$ в произвольном тупоугольном треугольнике существует прямая Эйлера.

Утверждение 7.5. Существование прямой Эйлера для прямоугольного треугольника вытекает как из утверждения 7.3, так и из утверждения 7.4, являясь предельным случаем их обоих.

Последнее утверждение очевидно. Докажем остальные.

Доказательство утверждения 7.1. Пусть ABC — произвольный треугольник, а $I_aI_bI_c$ — его вневписанный треугольник. Согласно утверждению 3.4.1., вневписанный треугольник всегда остроугольный, и его углы связаны с углами исходного треугольника следующим образом:

$$\angle I_a = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}, \quad \angle I_b = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}, \quad \angle I_c = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}.$$

Рассмотрим аффинное преобразование Φ, отображающее треугольник $I_aI_bI_c$ на треугольник ABC $\left(I_a \xrightarrow{\Phi} A, I_b \xrightarrow{\Phi} B, I_c \xrightarrow{\Phi} C\right)$. Это преобразование переводит прямые в прямые, и сохраняет барицентрические координаты точки (см. свойство 3.2.4).

Пусть H' и O' — соответственно ортоцентр и центр описанной окружности треугольника $I_aI_bI_c$, а N и I — точка Нагеля и центр вписанной окружности треугольника ABC. Тогда (см. 3.1.1)

$$H' = (\tan\angle I_a : \tan\angle I_b : \tan\angle I_c) \qquad \text{и} \qquad O' = (\sin 2\angle I_a : \sin 2\angle I_b : \sin 2\angle I_c)\,.$$

Но

$$\begin{aligned}
\tan\angle I_a &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}\right) = \cot\frac{\angle A}{2},\\
\tan\angle I_b &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}\right) = \cot\frac{\angle B}{2},\\
\tan\angle I_c &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}\right) = \cot\frac{\angle C}{2}.
\end{aligned}$$

А также,

$$\begin{aligned}
\sin 2\angle I_a &= \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle A}{2}\right) = \sin(\pi - \angle A) = \sin\angle A,\\
\sin 2\angle I_b &= \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle B}{2}\right) = \sin(\pi - \angle B) = \sin\angle B,\\
\sin 2\angle I_c &= \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\angle C}{2}\right) = \sin(\pi - \angle C) = \sin\angle C
\end{aligned}$$

Однако, как известно (см.3.1.1),

$$N = \left(\cot\frac{\angle A}{2} : \cot\frac{\angle B}{2} : \cot\frac{\angle C}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad I = (\sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C)\,.$$

Таким образом, $\Phi(H') = N$, $\Phi(O') = I$ — и мы показали, что прямая Эйлера остроугольного треугольника $I_aI_bI_c$ аффинным преобразованием Φ переводится в прямую Нагеля исходного треугольника ABC.

Доказательство утверждения 7.2. Пусть ABC — некоторый тупоугольный треугольник с тупым углом при вершине A, а II_bI_c — его первый добавочный вневписанный треугольник. Согласно утверждению 3.4.2., добавочный вневписанный треугольник всегда тупоугольный, и его углы связаны с углами исходного треугольника следующим образом: $\angle I = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}$, $\angle I_b = \frac{\angle B}{2}$, $\angle I_c = \frac{\angle C}{2}$

Рассмотрим аффинное преобразование Φ_a, отображающее треугольник II_bI_c на треугольник ABC $\left(I \xrightarrow{\Phi_a} A, I_b \xrightarrow{\Phi_a} B, I_c \xrightarrow{\Phi_a} C\right)$. Это преобразование переводит прямые в прямые, и сохраняет барицентрические координаты точки (см. свойство 3.2.4).

Пусть H' и O' — соответственно ортоцентр и центр описанной окружности треугольника II_bI_c, а N_a и I_a — первая добавочная точка Нагеля и центр соответствующей вневписанной окружности треугольника ABC.

Тогда (см. 3.1.1)

$$H' = (\tan\angle I_a : \tan\angle I_b : \tan\angle I_c) \qquad \text{и} \qquad O' = (\sin 2\angle I_a : \sin 2\angle I_b : \sin 2\angle I_c)\,.$$

Но

$$\tan\angle I = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}\right) = -\cot\frac{\angle A}{2}, \quad \tan\angle I_b = \tan\frac{\angle B}{2}, \quad \tan\angle I_c = \tan\frac{\angle C}{2}.$$

А также,

$$\sin 2\angle I_a = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\angle A}{2}\right) = \sin\left(\pi + \angle A\right) = -\sin\angle A,$$
$$\sin 2\angle I_b = \sin 2\left(\frac{\angle B}{2}\right) = \sin\angle B,$$
$$\sin 2\angle I_c = \sin 2\left(\frac{\angle C}{2}\right) = \sin\angle C.$$

Однако, как известно (см. 3.1.1),

$$N_a = \left(-\cot\frac{\angle A}{2} : \tan\frac{\angle B}{2} : \tan\frac{\angle C}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad I_a = \left(-\sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C\right).$$

Таким образом, $\Phi_a(H') = N_a$, $\Phi_a(O') = I_a$ — и мы показали, что прямая Эйлера тупоугольного треугольника II_bI_c аффинным преобразованием Φ_a переводится в добавочную прямую Нагеля исходного треугольника ABC.

Доказательство утверждения 7.3. Пусть ABC — некоторый треугольник, а $A_tB_tC_t$ — его тангенциальный треугольник. Согласно утверждению 3.6.1, его углы связаны с углами исходного остроугольного треугольника следующим образом:

$$\angle A_t = \pi - 2\angle A, \quad \angle B_t = \pi - 2\angle B, \quad \angle C_t = \pi - 2\angle C.$$

Рассмотрим аффинное преобразование Ψ, отображающее треугольник $A_tB_tC_t$ на треугольник ABC $\left(A_t \xrightarrow{\Psi} A, B_t \xrightarrow{\Psi} B, C_t \xrightarrow{\Psi} C\right)$. Это преобразование переводит прямые в прямые, и сохраняет барицентрические координаты точки (см. свойство 3.2.4).

Пусть N' и I' — соответственно точка Нагеля и центр вписанной окружности треугольника $A_tB_tC_t$, а H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда (см. 3.1.1.)

$$N' = \left(\cot\frac{\angle A_t}{2} : \cot\frac{\angle B_t}{2} : \cot\angle\frac{\angle C_t}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad I' = \left(\sin\angle A_t : \sin\angle B_t : \sin\angle C_t\right).$$

Но

$$\cot\frac{\angle A_t}{2} = \cot\left(\frac{\pi - 2\angle A}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \angle A\right) = \tan\angle A,$$
$$\cot\frac{\angle B_t}{2} = \cot\left(\frac{\pi - 2\angle B}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \angle B\right) = \tan\angle B,$$
$$\cot\frac{\angle C_t}{2} = \cot\left(\frac{\pi - 2\angle C}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \angle C\right) = \tan\angle C.$$

А также,

$$\sin\angle A_t = \sin(\pi - 2\angle A) = \sin 2\angle A,$$
$$\sin\angle B_t = \sin(\pi - 2\angle B) = \sin 2\angle B,$$
$$\sin\angle C_t = \sin(\pi - 2\angle C) = \sin 2\angle C.$$

Однако, как известно (см. 3.1.1),

$$H = \left(\tan\angle A : \tan\angle B : \tan\angle C\right) \ \text{ и } \ O = \left(\sin 2\angle A : \sin 2\angle B : \sin 2\angle C\right).$$

Таким образом, $\psi(N') = H$, $\Psi(I') = O$ — и мы показали, что прямая Нагеля треугольника $A_tB_tC_t$ аффинным преобразованием ψ переводится в прямую Эйлера исходного остроугольного треугольника ABC.

Доказательство утверждения 7.4. Пусть ABC — некоторый тупоугольный треугольник с тупым углом при вершине A, и $A_tB_tC_t$ — его тангенциальный треугольник. Согласно утверждению 3.6.2., его углы связаны с углами исходного остроугольного треугольника следующим образом:

$$\angle A_t = 2\angle A - \pi, \quad \angle B_t = 2\angle B, \quad \angle C_t = 2\angle C.$$

Рассмотрим аффинное преобразование Ψ_a, отображающее треугольник $A_tB_tC_t$ на треугольник ABC $\left(A_t \xrightarrow{\Psi_a} A, B_t \xrightarrow{\Psi_a} B, C_t \xrightarrow{\Psi_a} C\right)$. Это преобразование переводит прямые в прямые, и сохраняет барицентрические координаты точки (см. свойство 3.2.4).

Пусть N'_a и I'_a — первая добавочная точка Нагеля и центр соответствующей вневписанной окружности треугольника $A_tB_tC_t$, а H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда (см. 3.1.1)

$$N'_a = \left(-\cot\frac{\angle A_t}{2} : \tan\frac{\angle B_t}{2} : \tan\angle\frac{\angle C_t}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad I'_a = \left(-\sin\angle A_t : \sin\angle B_t : \sin\angle C_t\right).$$

Но

$$-\cot\frac{\angle A_t}{2} = -\cot\left(\frac{2\angle A - \pi}{2}\right) = -\cot\left(-\frac{\pi}{2} + \angle A\right) = \tan\angle A,$$

$$\tan\frac{\angle B_t}{2} = \cot\left(\frac{2\angle B}{2}\right) = \tan\angle B,$$

$$\tan\frac{\angle C_t}{2} = \cot\left(\frac{2\angle C}{2}\right) = \tan\angle C.$$

А также,

$$-\sin\angle A_t = \sin(2\angle A - \pi) = -\sin 2\angle A,$$

$$\sin\angle B_t = \sin 2\angle B,$$

$$\sin\angle C_t = \sin 2\angle C.$$

Однако, как известно (см. 3.1.1),

$$H = (\tan\angle A : \tan\angle B : \tan\angle C) \qquad \text{и} \qquad O = (\sin 2\angle A : \sin 2\angle B : \sin 2\angle C).$$

Таким образом, $\psi_a(N'_a) = H$, $\Psi_a(I'_a) = O$ — и мы показали, что добавочная прямая Нагеля треугольника $A_tB_tC_t$ аффинным преобразованием ψ_a переводится в прямую Эйлера исходного тупоугольного треугольника ABC.

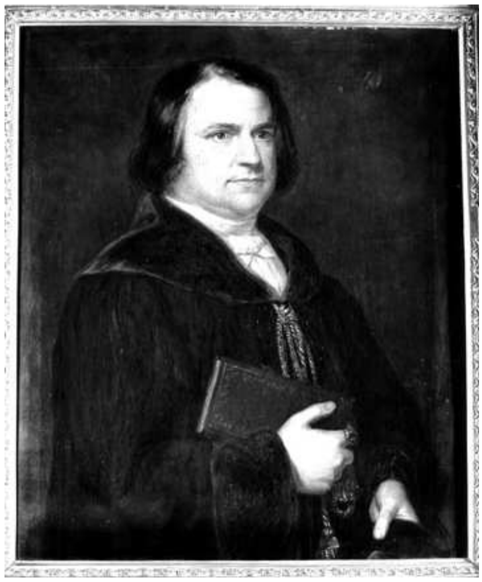
8. Приложение: Кристиан Генрих фон Нагель (1803–1882) (Christian Heinrich von Nagel)

Мы говорили о прямых, названных в честь двух математиков.

Великий Эйлер оставил после себя многотомное собрание сочинений, его творчеству и жизни посвящены разнообразные исследования — при желании их несложно найти и с ними ознакомиться. А вот о Нагеле известно совсем немногое. Краткие биографические сведения удалось почерпнуть на сайте Кимберлинга (см. [3]).

Нижеследующий фрагмент заимствован именно оттуда:

В 1821 К. Г. фон Нагель приступил к изучению теологии в Тибингене. В 1825 он удостоен сана священника. Затем в течение четырех лет посещает лекции по математике и физике, которые читают в Университете Тибенгена Боненбергер (J. G. von Bohnenberger) и Рик (F. J.P. Riecke). В декабре 1826 г. он принят учителем математики и физики (natural science) в Лицей и Реальное Училище (Realschule) Тибенгена и продолжает изучать математику в Университете. В 1830 получает докторскую степень (Ph.D.) (диссертация называлась «*De triangulis rectangulis ex algebraica aequatione construendis*» (название латинское — можно приблизительно понять, что речь идет о прямоугольных треугольниках и неких алгебраических соотношениях, с ними связанных), а научным руководителем был Боненбергер), и звание приват-доцента.



Начиная с 1830 г. занимает должность профессора математики в Гимназии города Ульма. В 1840 заканчивает 400-страничную книгу, озаглавленную «*Die Idee der Realschule, nach ihrer theoretischen Begrundung und praktischen Ausführung dargestellt*» (что можно перевести с немецкого примерно так: «Реальные Училища — теоретическое обоснование и практическое воплощение»). В 1844 г. Нагель становится ректором Реального Училища в Ульме и после 25 лет безупречной службы удостаивается титула «почетный гражданин Ульма». В 1875 выходит в отставку.

Шесть работ Нагеля имеются в книге **Peter Baptist**, *Die Entwicklung der Neueren Dreiecksgeometrie,* Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992. (П. Баптист, Развитие современной геометрии треугольника). В одной из этих работ Нагель приводит доказательство существования точек, которые ныне принято называть точками Нагеля и Жергонна. Однако прямую Нагеля сам Нагель, скорее всего, не открывал — во всяком случае, в дошедших до нас его работах она не упоминается. Как бы оно там ни было, прямая названа в честь Нагеля вполне заслуженно — ибо вклад этого ученого в элементарную геометрию весьма существенен.

Литература

[1] *Мякишев А.* Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2002.

[2] *Прасолов В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

[3] *Kimberling C.* Biographical Studies.
[http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/index.html]

[4] *Sigur S.* Triangle Geometry
http://www.paideiaschool.org/Teacherpages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, Москва.

Email: alex_geom@mtu-net.ru

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Вашему вниманию предлагается курс аналитической геометрии, который читается кафедрой “Высшая математика” курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере изложена тема 1 — арифметические действия над векторами.

Предисловие

В последние годы перед коллективом кафедры «Высшая математика» Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского встал насущный вопрос об учебнике по аналитической геометрии. Несмотря на большое количество уже существующих книг по этому предмету, нам не удалось найти ни одной, полностью соответствующей современной программе, поскольку кроме традиционного набора тем в курс «Аналитическая геометрия» были включены элементы линейной алгебры, столь необходимые будущим инженерам. В связи с этим и было написано настоящее пособие.

При работе над учебником авторы ориентировались на слушателей и курсантов ВВИА, уровень подготовки и желание учиться у которых имеет большой разброс. Помня об этом, мы постарались все принципиально важные вопросы изложить предельно ясно, снабдив их четкими и понятными доказательствами, а приемы решения всех типовых задач показать на примерах.

Мы считаем, что доказательства в курсе математики для технических специальностей не менее важны, чем приемы решения стандартных задач. Дело в том, что четко поняв, как выводится та или иная формула, прочувствовав природу явления, студент легче запомнит результат, а при необходимости получит его самостоятельно.

Следуя традиционным представлениям коллектива кафедры об учебном процессе, авторы ставили перед собой цель не только изложить необходимый набор фактов, но и заинтересовать читателя математикой, показав ее красоту и область применения. Иногда выходя за рамки курса, мы старались продемонстрировать обобщения стандартных понятий на современный, более высокий уровень. Так, например, изучив скалярное произведение в трехмерном пространстве, мы вводим его определение в абстрактном векторном пространстве и показываем возможность вычислять расстояние и углы между функциями, что имеет принципиальное значение для методов численного решения дифференциальных уравнений. Выходящие за рамки стандартной программы вопросы, т. е. факультативные, отмечены звездочкой.

Первоначально считалось, что пособие будет организовано как расширенный конспект лекций. Однако при работе над ним мы поняли, что разбить темы на лекционные куски естественным образом не получается. Поэтому весь материал книги скомпонован по темам, соответствующим тематическому плану курса.

После каждой темы (а иногда и внутри нее) разбираются примеры решения стандартных задач, необходимых для успешного усвоения курса. Затем идут контрольные вопросы, ответив на которые, слушатель сможет убедиться, что правильно понял и запомнил содержание темы.

Каждая тема снабжена задачами, которые можно и должно использовать как материал для проведения практических занятий. Задачи разбиты на три группы: простейшие, посложнее и повышенной трудности. Хотим отметить, что умение отвечать на контрольные вопросы и решать простейшие задачи — тот необходимый минимум, без которого странно рассчитывать на положительную оценку на зачете и экзамене. Отметим, что номера простейших задач снабжены кружочками, например 1.1°, а повышенной трудности — звездочками (1.20*).

В заключение скажем еще несколько слов об обозначении векторов. Поскольку наряду со стандартными векторами (направленными отрезками) мы обсуждаем векторы в абстрактном линейном пространстве, то, следуя устоявшейся российской традиции, векторы, являющиеся направленными отрезками, мы обозначаем как $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AB}$, в то время как абстрактные векторы и матрицы записываем полужирным шрифтом.

Введение

К сожалению, при современном уровне преподавания в школе учащиеся, как правило, получают ложное представление о математике и методах ее изучения. Попытаемся как-то восполнить этот пробел с самого начала нашего курса.

Условно математику можно разбить на две части — геометрию и алгебру. Геометрия изучает окружающий нас мир, а алгебра предоставляет язык для этого изучения. Обратите внимание, что математика отнюдь не сводится к формулам! Формулы — лишь инструмент математики, который относится к алгебре.

Аналитическая геометрия — это исторически первая математическая теория, в которой числа, функции и формулы прилагаются к изучению евклидовой геометрии (самой простой и естественной модели пространства-времени). Эта геометрия получила свое название благодаря древнегреческому математику Евклиду (ок. 300 г. до н. э.), систематизировавшему геометрические знания античных математиков в своем труде «Начала».

Кроме евклидовой геометрии, которую изучают в школе и которой посвящено настоящее пособие, существует еще множество разных геометрий, строящихся на аксиомах, отличных от евклидовых, причем современные физики, начиная с Эйнштейна, склонны считать, что окружающий нас мир описывается евклидовой геометрий лишь в первом приближении, а реальная геометрия вселенной и микрокосмоса существенно сложнее.

Наш курс состоит из нескольких частей: векторная алгебра (векторы и различные операции над ними), которая представляет собой основной аппарат курса аналитической геометрии; «линейная» геометрия, в которой мы будем изучать такие объекты, как прямые и плоскости; «квадратичная» геометрия, где мы познакомимся с кривыми и поверхностями второго порядка; и элементы линейной алгебры, а именно, системы линейных уравнений, матрицы и определители.

По поводу изучения математики вообще и аналитической геометрии в частности советуем ограничиться минимумом зубрежки. Рекомендуем постараться во время обучения как можно чаще ставить себе вопрос: «почему?» и отвечать на него.

Большинство первокурсников считает, что для успешной сдачи экзаменов достаточно научиться решать задачи. Это ошибочное мнение, поскольку при таком подходе приходится запоминать огромное количество формул, правил и утверждений. Ни один нормальный человек с таким количеством информации справиться не в состоянии. Если же внимательно разбирать теорию (постоянно отвечая на вопрос «почему?»), все необходимые формулы и приемы сами собой улягутся в голове и запоминать придется лишь незначительное количество ключевых определений.

Хочется сказать еще несколько слов о пользе обозначений и символьной записи. Наш опыт преподавания говорит о том, что первокурсники предпочитают словесные формулировки утверждений компактным символьным записям. Конечно, «на вкус и цвет товарищей нет», но хотелось бы обратить ваше внимание на несомненные преимущества формул в передаче информации.

Возьмем, например, такую фразу:

> Вычислить выражение: сумма двадцати четырех и шести умножается на разность тринадцати и трех, а затем еще на одну сотую. Результат произведения делится на сумму синуса от пи пополам и косинуса от пи пополам.

Согласитесь, что запомнить это выражение, а тем более вычислить его, исходя из словесной формулировки, довольно сложно. Но если записать это выражение в виде формулы:

$$\frac{(24+6)\cdot(13-3)\cdot 0{,}01}{\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}},$$

то почти сразу видно, что оно равно трем.

Очевидно, с нами многие согласятся, что в случае арифметических выражений записи с помощью формул более удобны, чем словесные. На самом деле в математике существуют определенные обозначения и кванторы, которые позволяют компактно и емко записывать громоздкие формулировки, относящиеся не только к арифметике. По мере необходимости мы будем вас с ними знакомить.

Итак, успехов вам в освоении аналитической геометрии!

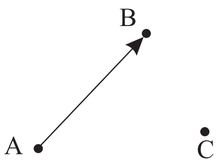
Тема 1

Арифметические действия над векторами

1. Векторы (основные определения)

Вы уже сталкивались с понятием «вектор», если не в школьном курсе математики, то в школьном курсе физики, где скорость, ускорение, сила и т. д. — это векторные величины. Сейчас мы аккуратно определим это понятие и познакомимся с его свойствами.

1.1. Определение. *Направленным отрезком* называется отрезок, у которого зафиксированы начало и конец.



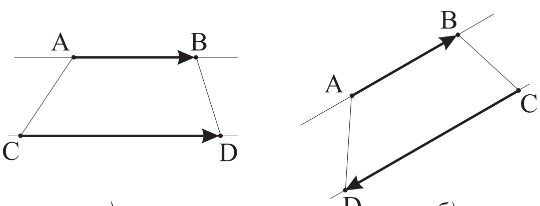
а) *б)*

Рис. 1.1. Направленный отрезок

На рис. 1.1, *а* изображен пример направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$. Точка A служит его *началом*, а B — *концом*. На рис. 1.1, *б* приведен пример так называемого *нулевого* направленного отрезка. У него начало совпадает с концом. Иными словами, нулевой направленный отрезок — это просто точка.

1.2. Определение. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными* (что обозначается как $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$), если прямые (AB) и (CD) параллельны (что мы будем обозначать как $(AB)||(CD)$), а фигура, получающаяся в результате построения отрезков AC и BD, является трапецией, как на рис. 1.2, *а*.

Направленные отрезки называются *противоположно направленными* ($\overrightarrow{AB}\downarrow\uparrow\overrightarrow{CD}$), если $(AB)||(CD)$, а трапеция получается, если провести отрезки AD и BC, как показано на рис. 1.2, *б*.



а) *б)*

Рис. 1.2. Направленные отрезки: *а)* сонаправленные; *б)* противоположно направленные

Направленные отрезки, расположенные на одной прямой, называются сонаправленными, если их концы задают одно и то же направление прямой, и противоположно направленными в противном случае.

По договоренности считают, что нулевой направленный отрезок сонаправлен любому другому направленному отрезку.

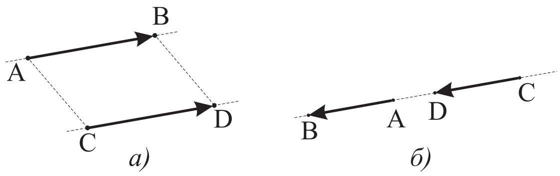


Рис. 1.3. Эквивалентные направленные отрезки

1.3. Определение. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *эквивалентными* (что обозначается как $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), если[1] $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $|AB| = |CD|$.

На рис. 1.3, *а* изображены эквивалентные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Эти направленные отрезки лежат на параллельных прямых (AB) и (CD) и имеют одинаковую длину. Заметим, что при этом фигура $ABDC$ является параллелограммом. На рис. 1.3, *б* представлены эквивалентные направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой.

Понятие «эквивалентность» очень похоже на понятие «равенство». В частности, оно *рефлексивно*, т. е. каждый направленный отрезок эквивалентен сам себе; *симметрично* (если первый отрезок эквивалентен второму, то второй эквивалентен первому) и *транзитивно* (иначе говоря, если первый отрезок эквивалентен второму, а второй третьему, то первый эквивалентен третьему).

Однако понятие «эквивалентность» более тонкое, чем «равенство». С философской точки зрения «равенство» в какой-то степени означает «совпадение», тогда как эквивалентные направленные отрезки совсем не обязательно совпадают, но их можно совместить параллельным переносом.

Понятие «эквивалентность» позволяет разбить все множество направленных отрезков на непересекающиеся подмножества, состоящие из эквивалентных друг другу направленных отрезков. Их принято называть *классами эквивалентности*. Такое разбиение подводит нас к следующему определению.

1.4. Определение. *Вектором* называется класс эквивалентности направленных отрезков. При этом каждый направленный отрезок из класса эквивалентности называется *геометрической реализацией вектора*.

Существует по крайней мере еще два определения вектора: как параллельного переноса и как свободного направленного отрезка.

Определение через параллельный перенос, на наш взгляд, довольно сложно для восприятия, а определение через *свободный* направленный отрезок очень близко к нашему. Фактически, свободный направленный отрезок — это направленный отрезок, который можно свободно перемещать параллельным переносом, т. е. практически то же самое, что и класс эквивалентности, о котором мы говорили. Но, на наш взгляд, определение вектора через класс эквивалентности более строгое, чем через свободный вектор.

В дальнейшем, после некоторого привыкания, помня о тесной связи нашего определения и свободного направленного отрезка, для упрощения речи и восприятия, мы будем изображать векторы направленными отрезками и «забудем» термин «геометрическая реализация».

[1] Для тех, кто еще не привык к символьным записям, повторим, что направленные отрезки эквивалентны, если они сонаправлены и их длины равны.

1.5. Определение. *Нулевой* вектор — это класс эквивалентности нулевых направленных отрезков. Он обозначается как $\overrightarrow{0}$.

1.6. Определение. *Длиной* вектора $\overrightarrow{a}$ называется длина любой его геометрической реализации. Она обозначается символом $|\overrightarrow{a}|$.

1.7. Определение. Два вектора называются *сонаправленными* (*противоположно направленными*), если сонаправлены (противоположно направлены) их геометрические реализации.

Обозначаются сонаправленные и противоположно направленные векторы так же, как и сонаправленные и противоположно направленные отрезки.

2. Сложение векторов и его свойства

2.1. Определение. Пусть даны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Чтобы найти их сумму, выберем геометрические реализации $\overrightarrow{AB}$ вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC}$ — вектора $\overrightarrow{b}$ так, чтобы конец направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ являлся началом направленного отрезка $\overrightarrow{BC}$. Говорят, что вектор $\overrightarrow{c}$, чьей геометрической реализацией служит направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, называется суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Традиционно такое определение суммы векторов называют *правилом треугольника.*

Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ лежат на одной прямой, то геометрической реализацией суммы будет также направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, лежащий на той же прямой. В этом случае треугольник $\triangle ABC$ получается вырожденным.

В определении суммы векторов мы сталкиваемся с определенной трудностью, которую сложно заметить неопытному читателю. Трудность заключается в следующем. Мы определили сумму векторов через их геометрические реализации. Но выбрать геометрические реализации можно как угодно. Например, в качестве геометрической реализации вектора $\overrightarrow{a}$ выберем направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, а в качестве $\overrightarrow{b}$ — $\overrightarrow{B_1C_1}$ (рис. 1.4). Тогда их суммой будет вектор $\overrightarrow{c}'$ с геометрической реализацией $\overrightarrow{A_1C_1}$. Возникает вопрос, почему $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ изображают один и тот же вектор, т. е. почему $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A_1C_1}$?

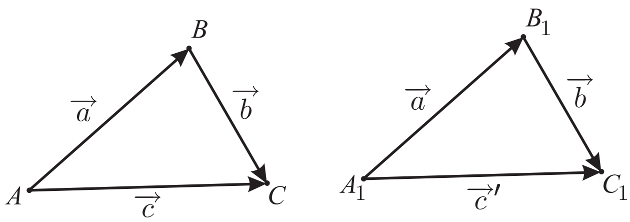


Рис. 1.4. Правило треугольника

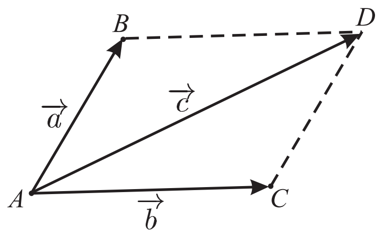


Рис. 1.5. Правило параллелограмма

Чтобы это проверить, достаточно осуществить параллельный перенос, переводящий точку A в точку A_1. Тогда направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ перейдет в $\overrightarrow{A_1B_1}$ (так как они эквивалентны, см. 1.3), а $\overrightarrow{BC}$ – в $\overrightarrow{B_1C_1}$. При этом направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ совместиться с $\overrightarrow{A_1C_1}$. Значит, эти направленные отрезки эквивалентны, т. е. $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}'$ и сумма векторов не зависит от выбора геометрических реализаций.

2.2. Определение. Пусть даны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. В качестве их геометрических реализаций выберем направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно. Обращаем внимание, что эти направленные отрезки имеют общее начало в точке A, как показано на рис. 1.5. Суммой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c}$, геометрической реализацией которого является направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в параллелограмме $ABDC$.

Из рис. 1.5 видно, что в ходе построения результирующего вектора $\overrightarrow{c}$ строится параллелограмм $ABDC$. Поэтому такое правило суммирования векторов получило название «*правило параллелограмма*».

2.3. Эквивалентность правил треугольника и параллелограмма. Суммы векторов, полученные по правилу треугольника 2.1 и по правилу параллелограмма 2.2, совпадают.

Доказательство. Для доказательства обратимся к рис. 1.6. На нем изображены геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в виде направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, а также геометрическая реализация их суммы — направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$, построенный по правилу треугольника 2.1.

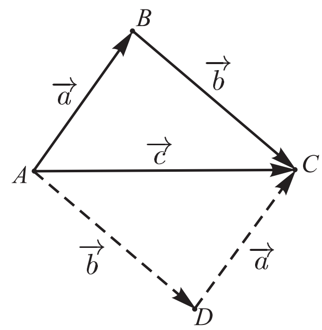


Рис. 1.6. Эквивалентность правил треугольника и параллелограмма

Достроим треугольник до параллелограмма. Для этого проведем направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$, эквивалентный $\overrightarrow{BC}$. Соединим точки D и C. То, что $ABCD$ — параллелограмм, следует из равенства треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$ и определения эквивалентных направленных отрезков 1.3.

AC — диагональ построенного параллелограмма, значит, по правилу параллелограмма 2.2 направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ является геометрической реализацией вектора суммы $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Так как построенные по правилу треугольника и по правилу параллелограмма геометрические реализации вектора $\overrightarrow{c}$ совпадают, то (по определению вектора) совпадают сами векторы, что говорит об эквивалентности правил треугольника и параллелограмма. □

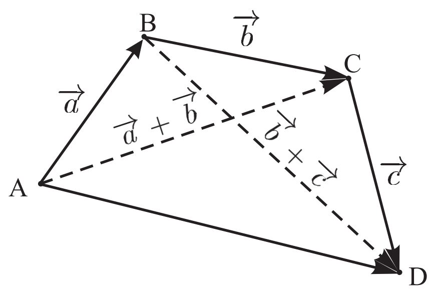
Сейчас мы сформулируем и докажем основные свойства сложения векторов (читай: «правила арифметических действий»). Вы с этими свойствами уже встречались в стандартном школьном курсе, но называли их по устаревшей российской традиции. На современном этапе приняты другие названия этих свойств, которые встречаются не только в арифметике и векторной алгебре, но практически во всех областях математики, поэтому целесообразно запомнить современные названия.

2.4. Коммутативность сложения. Для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ справедливо равенство[2]

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

Доказательство. Доказательство следует из рис. 1.6: направленный отрезок $\overrightarrow{AC}$ является одной и той же реализацией суммы векторов $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ и суммы векторов $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$. □

Рис. 1.7. Ассоциативность сложения векторов



2.5. Ассоциативность сложения. Для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ справедливо равенство[3]

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).$$

[2]В школе это свойство называют “переместительным законом сложения”.

[3]Известный из школы “сочетательный закон сложения”.

Доказательство. Из рис. 1.7 видно, что один и тот же направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ можно рассматривать как сумму направленных отрезков $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, что является реализацией вектора $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$. В то же время $\overrightarrow{AD}$ можно рассматривать как сумму направленных отрезков $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, которая является реализацией

$$\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}). \ \square$$

2.6. Нулевой вектор. Существует *нулевой* вектор $\overrightarrow{0}$, который при сложении с любым другим вектором $\overrightarrow{a}$ не меняет его: $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

Напомним, что геометрическая реализация нулевого вектора — это точка, поэтому, прибавив его к любому вектору, ничего нового не получим.

2.7. Противоположный вектор. Любой вектор $\overrightarrow{a}$ обладает *противоположным*, который мы временно обозначим через «$-\overrightarrow{a}$», таким, что: $\overrightarrow{a}$ + «$-\overrightarrow{a}$» $= \overrightarrow{0}$.

Доказательство. Пусть геометрической реализацией вектора $\overrightarrow{a}$ является направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Тогда в качестве геометрической реализации вектора «$-\overrightarrow{a}$» выберем направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$. Суммой геометрических реализаций этих векторов будет направленный отрезок $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, т. е. направленный отрезок, у которого начало совпадает с концом. Согласно определению 1.1 такой направленный отрезок называется нулевым. По определению нулевого вектора 1.5 направленный отрезок $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ является реализацией нулевого вектора $\overrightarrow{0}$. $\square$

3. Умножение векторов на числа. Свойства умножения

В этом разделе мы познакомимся с умножением векторов на числа. Но прежде чем приступить к изложению материала, необходимо отметить, что числа (как и векторы, впрочем, в чем вы позже сможете убедиться) вообще говоря, бывают разными, например рациональные, вещественные, комплексные, кватернионы. И такую операцию, как умножение вектора на число, можно определять для любых чисел. Однако исторически сложилось так, что впервые такая операция была определена для векторов, которые мы с вами изучаем, и вещественных чисел. Поэтому ими мы пока и ограничимся.

3.1. Определение. *Произведением вектора* $\overrightarrow{a}$ на число[4] $\lambda \in \mathbb{R}$ называется такой вектор $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$, что $|\overrightarrow{b}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$, причем $\overrightarrow{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$, если $\lambda \geqslant 0$ и $\overrightarrow{b} \downarrow\uparrow \overrightarrow{a}$, если $\lambda < 0$.

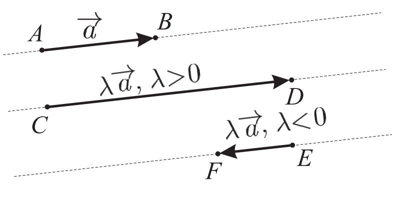


Рис. 1.8. Умножение вектора на число

На рисунке рис. 1.8 изображены геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\lambda\overrightarrow{a}$, с положительным и отрицательным λ в виде соответствующих направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, которые лежат на параллельных прямых. Так как длина направленного отрезка $|\overrightarrow{CD}| > |\overrightarrow{AB}|$, то для $\overrightarrow{CD}$ число $\lambda > 1$. Так как $|\overrightarrow{EF}| < |\overrightarrow{AB}|$, то для $\overrightarrow{EF}$ оно $-1 < \lambda < 0$.

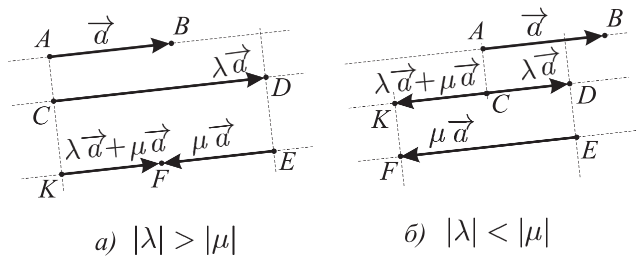
3.2. Дистрибутивность относительно суммы чисел. Для любых двух чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и вектора $\overrightarrow{a}$ выполнено равенство[5]:

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}. \tag{1.1}$$

[4] Символом $\mathbb{R}$ обозначают множество вещественных, или действительных, чисел и запись $\lambda \in \mathbb{R}$ означает, что λ — вещественное число.

[5] “Распределительный закон относительно суммы чисел”.

Рис. 1.9. Дистрибутивность относительно суммы чисел



Доказательство. Для доказательства рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\lambda = 0$, или $\mu = 0$, или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, то выполнение свойства очевидно.

2. Пусть знаки чисел λ и μ противоположны. Для определенности будем считать $\lambda > 0$, $\mu < 0$.

(а) Если $|\lambda| = |\mu|$, то в левой части (1.1) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = 0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, а в правой $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} - \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

(б) Если $|\lambda| > |\mu|$, то $\lambda + \mu > 0$, тогда длина вектора в левой части (1.1) равна $|(\lambda + \mu)\overrightarrow{a}| =$ (почему?) $= |\lambda + \mu||\overrightarrow{a}| = (\lambda + \mu)|\overrightarrow{a}| = \lambda|\overrightarrow{a}| + \mu|\overrightarrow{a}|$. Длина вектора в правой части $|\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}| =$(см. рис. 1.9, *а*) $= |\lambda\overrightarrow{a}| - |\mu\overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}| - |\mu||\overrightarrow{a}| = \lambda|\overrightarrow{a}| - (-\mu)|\overrightarrow{a}| = \lambda|\overrightarrow{a}| + \mu|\overrightarrow{a}|$. То есть длины векторов в левой и правой частях (1.1) равны.

Геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\lambda\overrightarrow{a}$, $\mu\overrightarrow{a}$, $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$ лежат на параллельных прямых, причем так как $|\lambda| > |\mu|$, то геометрические реализации векторов $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$ и $\lambda\overrightarrow{a}$ (направленные отрезки $\overrightarrow{KF}$ и $\overrightarrow{CD}$ на рис. 1.9, *а*) сонаправлены. С другой стороны, так как длина вектора $\lambda\overrightarrow{a}$ больше длины вектора $\mu\overrightarrow{a}$, то геометрическая реализация вектора $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ сонаправлена с вектором $\lambda\overrightarrow{a}$, а значит, сонаправлена с геометрической реализацией вектора $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$. Так как геометрические реализации векторов $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$ и $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ сонаправлены, длины их равны, то эти векторы равны.

(в) Если $|\lambda| < |\mu|$, то $\lambda+\mu < 0$, тогда длина вектора в левой части (1.1) равна $|(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}| = |\lambda+\mu||\overrightarrow{a}| = -(\lambda+\mu)|\overrightarrow{a}| = -\lambda|\overrightarrow{a}| - \mu|\overrightarrow{a}|$. Длина вектора в правой части (1.1) равна $|\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}| =$(см. рис. 1.9, *б*) $= -|\lambda\overrightarrow{a}| + |\mu\overrightarrow{a}| = -|\lambda||\overrightarrow{a}| + |\mu||\overrightarrow{a}| = -\lambda|\overrightarrow{a}| - \mu|\overrightarrow{a}|$. То есть длины векторов в левой и правой частях (1.1) равны.

Так как $\lambda + \mu < 0$, то геометрические реализации векторов $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$ и $\mu\overrightarrow{a}$ (на рис. 1.9, *б* направленные отрезки $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{EF}$) сонаправлены. С другой стороны, поскольку длина вектора $\lambda\overrightarrow{a}$ меньше длины вектора $\mu\overrightarrow{a}$, то геометрическая реализация вектора $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ сонаправлена с вектором $\mu\overrightarrow{a}$, и поэтому сонаправлена с геометрической реализацией вектора $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$. Таким образом, векторы $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}$ и $\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ равны.

3. Случай одинаковых знаков чисел λ и μ докажите самостоятельно! □

3.3. Ассоциативность произведения. Для любых двух чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и вектора $\overrightarrow{a}$ выполнено равенство:

$$(\lambda \cdot \mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a}). \tag{1.2}$$

Доказательство.

1. Если $\lambda = 0$, или $\mu = 0$, или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, то истинность равенства (1.2) не вызывает сомнений.

2. Пусть знаки чисел λ и μ одинаковы. Рассмотрим самый сложный случай, когда $\lambda < 0$, $\mu < 0$. Тогда $\lambda\cdot\mu > 0$, вектор $(\lambda\cdot\mu)\overrightarrow{a}$ имеет длину $|(\lambda\cdot\mu)\overrightarrow{a}| = |\lambda\cdot\mu||\overrightarrow{a}| = |\lambda||\mu||\overrightarrow{a}|$ и его геометрическая реализация — направленный отрезок $\overrightarrow{CF}$ (см. рис. 1.10) сонаправлен с направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, являющимся геометрической реализацией вектора $\overrightarrow{a}$.

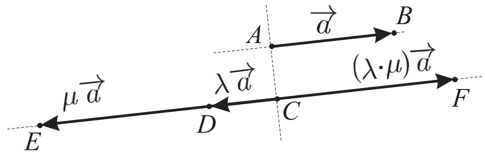


Рис. 1.10. Ассоциативность произведения

С другой стороны, длина вектора $|\lambda(\mu\overrightarrow{a})| = |\lambda||\mu\overrightarrow{a}| = |\lambda||\mu||\overrightarrow{a}|$, т. е. совпадает с длиной вектора $(\lambda\cdot\mu)\overrightarrow{a}$. Так как $\mu < 0$, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ противоположно направлен $\overrightarrow{CE}$, являющемуся геометрической реализацией вектора $\mu\overrightarrow{a}$ (см рис. 1.10). Поскольку $\lambda < 0$, то геометрическая реализация вектора $\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ противоположно направлена $\overrightarrow{CE}$, но сонаправлена с $\overrightarrow{AB}$, а значит, и с $\overrightarrow{CF}$.

Таким образом, как длины, так и направления векторов $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}$ и $\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ совпадают, т. е. эти векторы равны.

Вариант $\lambda > 0$, $\mu > 0$ рассмотрите самостоятельно.

3. Докажите свойство, когда λ и μ разных знаков. □

3.4. Дистрибутивность относительно суммы векторов. Для любых двух векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\lambda = 0$, или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, или $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, то все верно.

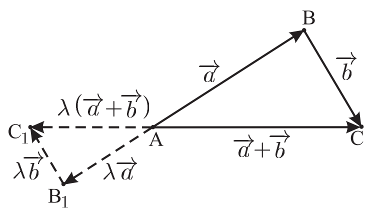


Рис. 1.11. Дистрибутивность относительно суммы векторов

2. Пусть $\lambda < 0$. Предположим сначала, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ непараллельны. Рассмотрим геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ в виде направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ соответственно (см. рис. 1.11). Построим геометрические реализации векторов $\lambda\overrightarrow{a}$, $\lambda(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ в виде направленных отрезков $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$, а также направленный отрезок $\overrightarrow{B_1C_1}$ (см. рис. 1.11). В силу наших построений отрезки AB_1 и AB лежат на одной прямой, а также лежат на одной прямой отрезки AC_1 и AC. Более того, $\frac{|\overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{AC}|} = |\lambda|$. Поэтому треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AB_1C_1$ подобны. Следовательно, $|\overrightarrow{B_1C_1}| = |\lambda||\overrightarrow{BC}|$, $\angle CBA = \angle C_1B_1A$ и прямые $(B_1C_1) \parallel (BC)$. Таким образом, из наших построений $\overrightarrow{B_1C_1} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

Из рис. 1.11 по правилу треугольника 2.1 направленный отрезок $\overrightarrow{AC_1}$ является геометрической реализацией суммы $\lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$, а также, в силу наших построений, геометрической реализацией $\lambda(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$, что доказывает (1.3).

Теперь обратимся к случаю, когда $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ параллельны. Обозначим через μ' отношение длин: $\mu' = |\overrightarrow{b}|/|\overrightarrow{a}|$ и положим $\mu = \mu'$, если эти векторы сонаправлены, и $\mu = -\mu'$, если они противоположно направлены. Тогда $\mu\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ и $|\mu\overrightarrow{a}| = \mu'|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$. Таким образом, $\overrightarrow{b} = \mu\overrightarrow{a}$ (см. определение умножения вектора на число на стр. 40. Подставим это соотношение в левую часть доказываемого равенства.

$$\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}) = (\text{по свойству } 3.2) = \lambda((1+\mu)\overrightarrow{a}) = (\text{по свойству } 3.3) =$$
$$= (\lambda(1+\mu))\overrightarrow{a} = (\lambda + \lambda\mu)\overrightarrow{a} = (\text{по свойству } 3.2) = \lambda\overrightarrow{a} + (\lambda\mu)\overrightarrow{a} =$$
$$= (\text{по свойству } 3.3) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda(\mu\overrightarrow{a}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}.$$

3. Для $\lambda > 0$ аналогичные рассуждения проведите самостоятельно.□

3.5. Умножение на единицу. Для любого вектора $\overrightarrow{a}$ выполнено равенство:

$$1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}.$$

В виду простоты этого свойства оставим его доказательство в качестве обязательного, хотя и простого упражнения. Дело в том, что изучать математику, ничего не доказывая при этом самостоятельно, крайне трудно и можно опуститься до тривиальной зубрежки, от чего мы вас пытаемся удержать!

4. Векторное пространство

Формально этот раздел не входит в обязательный курс аналитической геометрии и его, в принципе, можно пропустить. Однако, как нам кажется, интересно узнавать, как устроена современная наука и чем она занимается. Поэтому мы вам настоятельно советуем не оставлять факультативные разделы без внимания.

Основной метод математики, как, собственно, и любой научной дисциплины, — это движение от частных случаев к общей закономерности и, после развития теории, приложение найденных закономерностей к частным случаям. Однако математику среди остальных наук выделяет степень абстрактности, что хорошо будет видно из этого раздела.

Мы с вами познакомились с векторами, научились их складывать, умножать на числа и выяснили свойства этих операций, позволяющие производить вычисления. Очевидно, что складывать и умножать на числа можно не только векторы, а, например, сами числа или функции, имеющие одинаковую область определения, или последовательности (может, и бесконечные). Да много чего можно напридумывать. И все бы и закончилось простыми ассоциациями, если бы эти объекты (функции, например) не были столь важны как в физике, так и в любой технической дисциплине. Поэтому математики попытались выделить характеризующие свойства векторов в некоторую систему, довольно хорошо изучили ее, после чего полученные результаты смогли прикладывать уже не просто к векторам, но и таким объектам, как многочлены или непрерывные функции, ничем не похожие на направленные отрезки. Наибольшим достижением этого приложения, на наш взгляд, стала возможность измерения расстояния и углов между функциями. Углы пока отставим, а вот привлекательность измерения расстояния между функциями и вам должна быть понятна. Действительно, рассмотрим вполне конкретную задачу о траектории баллистической ракеты. Аналитическими методами точного ее решения получить невозможно на современном этапе. Поэтому встает вопрос о *приближенном решении*. Однако, что такое приближенная длина, мы сказать в состоянии — это число, отличающееся от истинного не более заданной точности. А что такое точность, когда речь идет о функциях? Так вот, возможность определения расстояния между функциями снимает проблему неопределенности приближенной траектории.

Теперь, осознав полезность обобщения понятия вектора, введем определение векторного пространства.

4.1. Определение. (Вещественным) *векторным*, или *линейным пространством* называется непустое множество V, элементы которого принято называть векторами (стрелки при их обозначении не ставят, а выделяют полужирным шрифтом), на котором введены операции суммы векторов и произведения их на (вещественные) числа, причем выполнены следующие свойства[6]:

[6] Значок $\forall$ называется квантором всеобщности. Поэтому запись $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ читается как «для любых векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства V». Символ $\exists$ — это квантор существования. Запись $\exists \mathbf{0}$ читается как «существует 0».

1) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V: \quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$;

2) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V: \quad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$;

3) $\exists \mathbf{0} \in V$ — такой вектор, что $\forall \mathbf{u} \in V: \quad \mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ (его называют *нулевым* вектором;

4) $\forall \mathbf{u} \in V\ \exists$«$-\mathbf{u}$»: $\quad \mathbf{u}+$«$-\mathbf{u}$»$=$«$-\mathbf{u}$»$+\mathbf{u}=\mathbf{0}$;

5) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\lambda \mathbf{u}+\lambda \mathbf{v}$;

6) $\forall \mathbf{u} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad (\lambda+\mu) \mathbf{u}=\lambda \mathbf{u}+\mu \mathbf{u}$;

7) $\forall \mathbf{u} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: \quad (\lambda \mu) \mathbf{u}=\lambda(\mu \mathbf{u})$;

8) $\forall \mathbf{u} \in V: \quad 1 \mathbf{u}=\mathbf{u}$.

Сравните эти свойства (аксиомы векторного пространства) с аналогичными свойствами арифметических операций над векторами.

В качестве примеров векторных пространств, прежде всего, можно привести множество векторов — классов эквивалентных направленных отрезков, которое мы будем с этого момента обозначать символом $\mathbb{E}^3$ и называть *евклидовым трехмерным пространством*[7].

Следующий пример — *арифметическое векторное пространство* $\mathbb{R}^n$, состоящее из вектор-столбцов

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Операции определяются покоординатно:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, которое стандартно обозначается как $C[a, b]$, тоже можно рассматривать как векторное пространство, определив сумму $f(x)$ и $g(x)$ как функцию, которая принимает в точке x значение $f(x)+g(x)$. Надеемся, вам понятно, как определить произведение функции на число!

В качестве упражнения убедитесь, что для операций на $\mathbb{R}^n$ и $C[a, b]$ аксиомы векторного пространства действительно выполнены и подберите еще несколько примеров векторных пространств.

Приведем пример работы с векторами абстрактного векторного пространства и докажем некоторые простейшие свойства, вытекающие из аксиом. Эти свойства настолько естественны, что при работе с направленными отрезками даже и сомнений не возникало, что нечто подобное нужно формулировать. А вот в случае абстрактного векторного пространства эти свойства нужно проверить!

4.2. Единственность нуля. Нулевой вектор в любом векторном пространстве только один!

Доказательство. Предположим, что существует два нулевых вектора, которые мы обозначим через $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$. Нам нужно показать, что на самом деле $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$. По определению нулевого вектора (аксиома 3) для любого вектора $\mathbf{u}$ выполнено свойство $\mathbf{0}_1+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. Поэтому, если в качестве $\mathbf{u}$ взять $\mathbf{0}_2$, то получим, что $\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2$.

[7] Это название — дань уважения древнегреческому математику Евклиду, систематизировавшему геометрические знания античных математиков в своем труде «Начала».

С другой стороны, в этой же сумме можно воспользоваться тем, что $\mathbf{0}_2$ — нулевой вектор. Поэтому его прибавление к $\mathbf{0}_1$ не изменит последний вектор, т. е. $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$.

Сравнивая эти два равенства, получаем то, что нужно:

$$\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2. \ \square$$

4.3. Умножение на 0. Если произвольный вектор умножить на 0, получится нулевой вектор.

Доказательство. Чтобы проверить это утверждение, нужно убедиться, что $0\mathbf{u}$ обладает свойством нулевого вектора, т. е. ничего не меняет при прибавлении к любому другому вектору $\mathbf{v}$. И поскольку по утверждению 4.2 таким свойством обладает единственный нулевой вектор, мы докажем наше утверждение. Предположим сначала, что $\mathbf{v} = \mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} 0\mathbf{u} + \mathbf{u} &= 0\mathbf{u} + 1\mathbf{u} = && \text{(по аксиоме 8)}\\ &= (0+1)\mathbf{u} = && \text{(по аксиоме 6)}\\ &= 1\mathbf{u} = \mathbf{u} && \text{(по аксиоме 8).} \end{aligned}$$

Теперь проверим, что

$$0\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} \tag{1.4}$$

для произвольного вектора $\mathbf{v}$. Если к обеим частям проверяемого равенства прибавить $\mathbf{u}$, то получим равносильное выражение:

$$\mathbf{u} + 0\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

А так как мы уже знаем, что $\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = \mathbf{u}$, то последнее равенство истинно. Следовательно, верно и равенство (1.4). □

4.4. Умножение на -1. Если произвольный вектор умножить на -1, получится противоположный ему.

Доказательство. Сложим вектор $\mathbf{u}$ и $(-1)\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} =& 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = && \text{(по аксиоме 8)}\\ =& (1 + (-1))\mathbf{u} = && \text{(по аксиоме 6)}\\ =& 0\mathbf{u} = \mathbf{0} && \text{(по предыдущему утверждению). } \square \end{aligned}$$

В связи с этим утверждением вектор, противоположный вектору $\mathbf{u}$, можно обозначать просто как $-\mathbf{u}$.

Проверив эти полезные свойства в абстрактном векторном пространстве, мы можем применить их и к нашим векторам — классам эквивалентных направленных отрезков!

Примеры решения типовых задач

Пример 1.1. Выразить вектор $\overrightarrow{a}$ из рис. 1.12 через векторы $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ и $\overrightarrow{e}$.

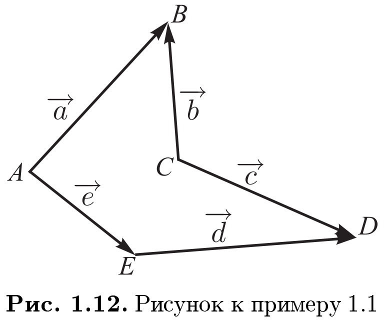


Рис. 1.12. Рисунок к примеру 1.1

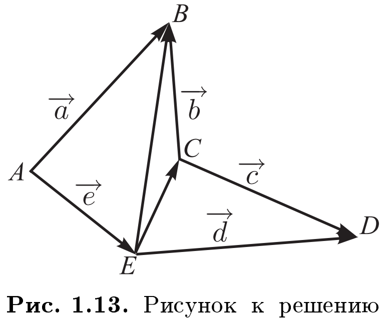


Рис. 1.13. Рисунок к решению примера 1.1

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AE}$ — геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{e}$ соответственно. Изобразим направленные отрезки $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{EC}$.

Из треугольника $\triangle ECD$ выразим $\overrightarrow{EC}$:

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD}.$$

Из $\triangle ECB$:

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}.$$

Из $\triangle AEB$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}.$$

Тогда вектор $\overrightarrow{a}$ можно выразить следующим образом:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{e}.$$

Обращаем внимание на то, что вектор $\overrightarrow{a}$ можно выразить через остальные векторы еще и с помощью правила *многоугольника*.

Правило состоит в следующем: если направленные отрезки расположить так, чтобы начало каждого следующего слагаемого было в конце предыдущего, то суммой будет направленный отрезок, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего.

Для нашего примера результатом применения правила многоугольника является равенство:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}.$$

Получим тот же результат

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{e}.$$

Пример 1.2. В прямоугольнике $ABCD$ точка P является серединой стороны AB. Разложить $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ по $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{PD}$.

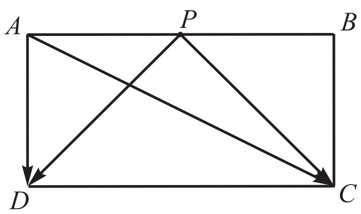


Рис. 1.14. Рисунок к примеру 1.2

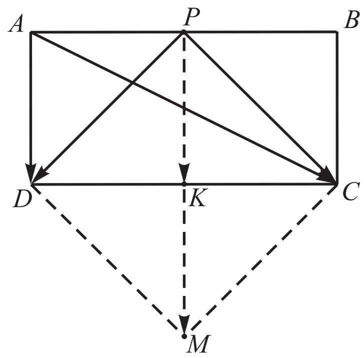


Рис. 1.15. Рисунок к решению примера 1.2

Решение. Достроим $\triangle PCD$ до параллелограмма $PCMD$, в котором $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{DC}$ — направленные отрезки диагоналей. Выразим их через $\overrightarrow{PD}$ и $\overrightarrow{PC}$:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}.$$

Известно, что параллелограмме точка пересечения диагоналей делит их пополам, поэтому

$$\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PM}.$$

Отметим, что $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{AD}$ — это геометрические реализации одного и того же вектора. Значит, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC})$.

Теперь из $\triangle ACD$ выразим $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PC}) + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PD}.$$

Контрольные вопросы

1.1. Что такое направленный отрезок?

1.2. Дайте определение сонаправленных, противоположно направленных и эквивалентных направленных отрезков.

1.3. Что называется вектором?

1.4. Приведите примеры физических величин, которые являются векторами.

1.5. Сформулируйте правила, по которым можно найти сумму двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Эквивалентны ли эти правила?

1.6. Что значит умножить вектор $\overrightarrow{a}$ на число λ?

1.7. Перечислите свойства, которыми обладают линейные операции над векторами.

1.8. Какой вектор называется противоположным данному?

1.9. Дайте определение нулевого вектора.

1.10. Сформулируйте правило многоугольника для суммирования нескольких векторов.

Задачи

1.1°. Для заданных векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ построить векторы: $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$; $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{a}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a}$.

1.2°. В треугольнике ABC выразить $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.3. Выразить вектор $\overrightarrow{x}$ через векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{e}$ (см. рис. 1.16).

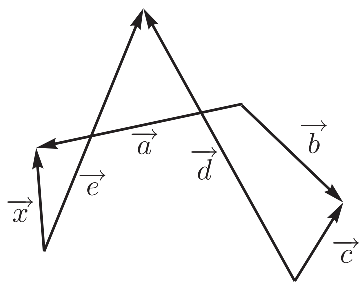


Рис. 1.16. Рисунок к задаче 1.3

1.4. В $\triangle ABC$ проведена медиана CM. Направленные отрезки $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ являются геометрическими реализациями векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ соответственно. Разложить по этим векторам $\overrightarrow{CM}$.

1.5. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, чтобы выполнялось условие $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}|$?

1.6. В ромбе $ABCD$ угол при вершине B равен 120^o. Из центра O ромба проведены перпендикуляры OP и OQ к сторонам AB и BC соответственно. Выразить через векторы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

1.7. Пирамида построена на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Ее основанием является параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Найти вектор $\overrightarrow{MS}$, где M — точка пересечения диагоналей основания, S – вершина пирамиды.

1.8. В $\triangle ABC$ точки M, N и P являются серединами сторон AB, BC и CA соответственно. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{b}$. Выразить векторы сторон $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

1.9. Для трех точек A, B и C найти такую точку O, чтобы выполнялось условие $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.

1.10. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. В нем $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$. Выразить через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{FA}$.

1.11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенном на векторах $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{c}$. Точки M и N делят ребро BB_1 так, что $|BM| = |MN| = |NB_1|$. Выразить векторы $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{DN}$ через векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

1.12. Уличный фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC, прикрепленного концами к крюкам A и C, находящимся на одной горизонтами. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC, если вес фонаря равен 150 Н, длина всего троса равна 20 м, а отклонение точки подвеса фонаря от горизонтали равно 0,1 м. Весом троса пренебречь. Использовать условие замкнутости силового многоугольника.

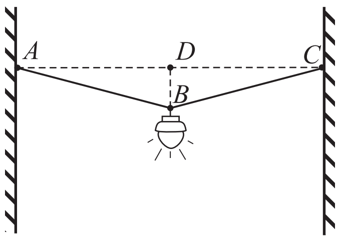


Рис. 1.17. Рисунок к задаче 1.12

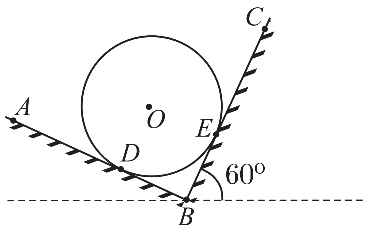


Рис. 1.18. Рисунок к задаче 1.13

1.13. На двух взаимно перпендикулярных гладких наклонных плоскостях AB и BC лежит однородный шар веса 60 Н. Определить давление шара на каждую плоскость, зная, что плоскость BC составляет с горизонтом угол 60°.

1.14*. Для заданного вектора $\overrightarrow{a}$ с помощью циркуля и линейки построить вектор $\sqrt{3}\,\overrightarrow{a}$.

1.15*. Для заданного вектора $\overrightarrow{a}$ с помощью циркуля и линейки построить вектор $\sqrt{6}\,\overrightarrow{a}$.

1.16*. В $\triangle ABC$ проведена биссектриса CL. Направленные отрезки $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ являются геометрическими реализациями векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ соответственно. Разложить по этим векторам $\overrightarrow{CL}$.

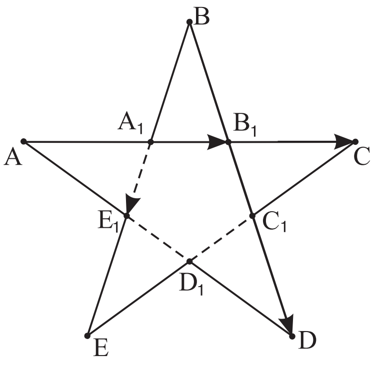


Рис. 1.19. Рисунок к задаче 1.17*

1.17*. $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ — пентограмма, т. е. пятиконечная звезда (см. рис. 1.19). Выразить $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через $\overrightarrow{A_1E_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$.

1.18*. В четырехмерном прямоугольном параллелепипеде

$$A_0B_0C_0D_0A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2A_3B_3C_3D_3$$

выразить направленный отрезок главной диагонали $\overrightarrow{A_0C_3}$ через главные диагонали граней, прилежащие к точке A_0: $\overrightarrow{A_0C_2}$, $\overrightarrow{A_0B_3}$, $\overrightarrow{A_0D_3}$ и $\overrightarrow{A_0C_1}$. Гранями четырехмерного прямоугольного параллелепипеда являются трехмерные прямоугольные параллелепипеды.

1.19*. Векторное пространство $\mathbb{R}_3[x]$ состоит из многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами, степень которых не превосходит 3. Выразите вектор $\mathbf{v} = x + x^2$ через векторы $\mathbf{e_1} = 2x + 1$ и $\mathbf{e_2} = \frac{1}{2} + x^2$.

1.20*. Векторное пространство $C[-\pi, \pi]$ из состоит непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций. Выразите вектор $\mathbf{v} = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ через векторы $\mathbf{e_1} = \sin x$ и $\mathbf{e_2} = \cos x$.

Кулешов Сергей Алексеевич,
доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры Высшая математика
Военно-Воздушной Академии
имени проф. Н. Е. Жуковского.

Email: KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна,
канд. педагогических наук,
доцент кафедры Высшая математика
Военно-Воздушной Академии
имени проф. Н. Е. Жуковского.

Email: afsalimova07@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры Высшая математика
Военно-Воздушной Академии
имени проф. Н. Е. Жуковского.

Email: stav@inm.ras.ru

Математические определения и преподавание

А. Пуанкаре

Классики математической науки оставили в том числе и ценное методическое наследие. Предлагаем вниманию читателей главу II из книги выдающегося французского математика А. Пуанкаре "Наука и метод", посвященную вопросу о методике введения математических определений. Текст печатается по изданию А. Пуанкаре "Наука и метод", авторизованный перевод Бориса Кореня под ред. проф. Н. А. Гезехуса, С-Петербург, Издание Н. П. Карбасникова, 1910.

1. Здесь я должен говорить об общих определениях в математике, — по крайней мере, этого может требовать заголовок настоящей главы. Но мне трудно будет ограничиться этим вопросом настолько, насколько нужно было бы ограничиться, по правилу единства действия; мне нельзя будет трактовать его, не затрагивая отчасти других соседних вопросов, и если, таким образом, окажется, что я буду отклоняться в сторону от главного пути, сворачивая, время от времени, на узенькие тропинки, то я попрошу вас это мне простить.

Что такое хорошее определение? Для философа и ученого хорошее определение это — такое определение, которое прилагается ко всем определенным предметам, и только к ним. Но не то — для преподавателя: для него хорошее определение — то, которое понято учениками.

Существует очень много умов, совершенно отказывающихся понимать математику. Как это могло произойти? Нет ли здесь чего-нибудь парадоксального? Вот наука, взывающая только к основным принципам логики, например, к принципу противоречия, — к тому, что составляет, так сказать, самый скелет нашего разума, к тому, чего нельзя было бы покинуть, не перестав вместе с тем мыслить, — и есть люди, которые находят ее темной! И даже их большинство! Что они неспособны творить, это — еще не удивительно, но что они не понимают безукоризненно изложенных доказательств, что они остаются слепыми, когда мы указываем им на сияние, которое нам кажется таким чистым и ярким, это — уже более чем удивительно.

И, тем не менее, всякий, имевший хотя небольшой опыт по экзаменам, знает, что эти слепые — совсем не люди исключения. Перед нами проблема, которую решить не легко, но которая всегда должна сильно волновать всех, посвящающих себя педагогической деятельности.

Что значит "понимать"? Имеет ли это слово один и тот же смысл для всех? Понимать доказательство теоремы — значит ли это: исследовать, один за другим, каждый из силлогизмов, из которых оно слагается, и констатировать, что ошибок нет, и ход правилен? Точно так же, понимать определение — значит ли это только признать, что вам уже известен смысл всех входящих в него терминов и затем констатировать, что оно не заключает никакого противоречия?

Для немногих — да. После подобного констатирования они скажут: я понял. Для большинства — нет. Большинство людей гораздо требовательнее: им надо знать не только то, правильны ли все силлогизмы доказательства, но и то, почему они соединены в таком-то порядке, предпочтительно перед таким-то иным. Поскольку им кажется, что здесь главную роль сыграл каприз, а не постоянно сознающий преследуемую цель интеллект, — поскольку они и думают, что ничего не поняли.

Без сомнения, они и сами не дают себе полного отчета в том, чего требуют, и не могли бы формулировать свои требования, — но факт тот, что они не удовлетворены, они смутно чувствуют, что чего-то все-таки не достает. Как же это происходит? Вначале они еще замечают очевидности, которые проходят перед из глазами; но так как эти очевидности связаны слишком тонкой нитью с предыдущими и последующими, то они проходит перед глазами, не оставляя следа в мозгу, и тотчас забываются; освещенные одну секунду, они быстро опять погружаются в сумрак вечной ночи. Подвинувшись далее, они не видят уже даже этого эфемерного света, потому что теоремы опираются одна на другую, а те, которые им нужны, уже забыты; и так они оказываются неспособными понимать математику.

Учитель здесь часто совсем не виноват; часто интеллект учеников слишком ленив для того, чтобы следить за руководящей нитью, искать ее и ловить. Но чтобы как можно чаще приходить к ним на помощь, учитель должен предварительно хорошо сам понять то, что их останавливает.

Иные из них постоянно спрашивают себя: для чего может служить вот это? Они ничего не понимают, если вокруг себя, в практике или в природе, не могут найти основания для такого-то или такого-то математического понятия. Под каждое слово они хотят подставить какой-нибудь чувственный образ. Надо, чтобы сообщенное им определение вызывало этот образ, чтобы на всякой стадии доказательства они видели его трансформацию и эволюцию: только при этом условии они поймут и будут помнить. Часто еще эти последние строят свои собственные иллюзии. Не слушают рассуждений, а смотрят на фигуры; воображают что поняли, а сами только и делали, что смотрели.

2. Сколько различных направлений! Надо ли с ними бороться? Надо ли использовать их? И если бы мы захотели с ними бороться, то какому из них все-таки следует сочувствовать? Надо ли разъяснять тем, которые удовольствуются чистой логикой, что они видят лишь лицевую сторону вещей? Или же пытаться доказывать тем, которых не удовлетворяет такая дешевая цена, что выставляемые ими требования не являются необходимыми?

Иначе говоря: следует ли пытаться изменить самую природу ума порученных нам молодых людей? Такие попытки были бы напрасными: у нас нет философского камня, с помощью которого превращают одни металлы в другие; все, что мы можем делать с нашими металлами, это — обработать их, приспособляясь к их свойствам.

Многие дети неспособны стать математиками, и, тем не менее, их надо учить математике. И сами математики не все, ведь, вылиты из одной формы. Достаточно вчитаться в их книги, чтобы начать различать среди них два рода умов: логиков, в роде Вейерштрасса, и — интуитивистов, в роде Римана. Та же разница умов и у наших студентов. Одни предпочитают решать свои задачи "анализом", как они говорят, другие — "геометрически".

Совершенно бесполезно пытаться что-нибудь здесь изменить, а впрочем, разве это было бы желательно? Хорошо, что существуют и логики, и интуитивисты. Кто осмелится сказать, что предпочел бы он: чтобы никогда не писал Вейерштрасс или чтобы не было Римана? Итак, нам надо примириться с фактом различия умов или, лучше, — надо этому радоваться.

3. Так как слово "понимать" имеет много значений, то определения, очень хорошо понятые одними, не всегда окажутся пригодными для других. Встречаются такие определения, которые стремятся вызвать в нас некоторый образ, и такие, которые ограничиваются комбинированием одних только пустых форм, вполне постижимых, но совершенно невещественных, лишенных, с помощью абстракции, всякого содержания. Не знаю, нужны ли примеры? Тем не менее я приведу их, и прежде всего возьму крайний — определение дробей. Чтобы дать определение дроби, в начальных школах разрезают на части яблоко или пирожное; их разрезают, конечно, мысленно, а не на самом деле, так как я не предполагаю, что бюджет начальных школ допускает подобную расточительность. В высшей нормальной школе, или на факультетах, наоборот, скажут: дробь — это совокупность двух целых чисел, отделенных горизонтальной чертой; затем определят условиями действия, которые можно производить над этими символами; докажут что правила этих действий — те же, что и правила действий над целыми числами, и, наконец, констатируют, что, производя по этим правилам умножение дроби на знаменатель, получают числитель. Это очень хорошо, потому что обращаются к молодым людям, уже давно свыкшимся с понятием дроби, благодаря тому, что раньше перед ними делили яблоки или другие предметы. И ум, уточненный усиленным математическим воспитанием, мало-по-малу достиг того, что стал, наконец, ощущать потребность в чисто логическом определении. Но как ошеломлен был бы начинающий,

если бы ему предложили подобное определение.

Таковы же тоже определения, которые вы находите в книге, поистине превосходной и не раз награжденной, — в “Grundlagen der Geometrie” Гильберта (Hilbert). Действительно, посмотрите, как она начинается: “Представим себе три системы *вещей*, которые мы назовем точками, прямыми и плоскостями”. Что такое эти “вещи”? Мы этого не знаем, и нам незачем это знать; было бы даже прискорбно, если бы мы пытались это узнать; все, что мы имеем право об этом знать, это — то, чему научают нас об этом аксиомы, например, такая аксиома: “Две различные точки всегда определяют прямую”. Аксиома эта сопровождается следующим комментарием: “вместо *определяют*, мы можем сказать, что прямая проходит через эти две точки или что она соединяет эти все точки, или что две точки находятся на прямой”. Таким образом, “находиться на прямой” просто определено, как синоним выражения “определять прямую”. Вот книга, которую я считаю очень хорошей, но которую я не порекомендовал бы гимназисту. Впрочем, я мог бы бесстрашно и это сделать: далеко у него чтение этой книги не пошло бы.

Я взял крайние примеры, но и ни один учитель, конечно, не мог бы мечтать идти так далеко. Тем не менее, оставляя в стороне крайние примеры, мы все-таки можем спросить: не подвергается ли и он уже той же опасности?

Заглянем в четвертый класс. Учитель диктует: “окружность есть место точек плоскости, равноотстоящих от внутренней точки, называемой центром”. Хороший ученик записывает эту фразу в тетрадь; другой рисует в тетради всякие рожи, но ни тот, ни другой ничего не поняли. Тогда учитель берет мел и чертит на доске круг. “Ах, думают ученики, отчего он сейчас не сказал, что окружность — это круг: мы бы поняли”. Без сомнения, прав все-таки учитель. Определение, данное учениками, не имело бы никакой ценности, потому что не могло бы служить ни для какого доказательства, а, главное, еще и потому, что оно не воспитывало бы в них очень полезной привычки анализировать собственные мысли. Но учитель должен был им показать, что им только казалось так, что они поняли, но что на самом деле они ничего не поняли; он должен был дать им понять, как грубы их первоначальные идеи; он должен был добиться того, чтобы у них появилось желание очистить и исправить идею.

4. Кончаю с примерами. Я хотел только наглядно представить вам два противоположных воззрения; между ними огромный контраст. Этот контраст мы попытаемся объяснить, обратившись к истории науки. Возьмем книгу по математике, написанную пятьдесят лет тому назад. Большая часть рассуждений в этой книге, как нам покажется, лишена строгости.

В эту эпоху допускали, что непрерывная функция не может переменить своего знака, не уничтожившись тем самым; теперь — это доказывают. Допускали, что обыкновенные правила вычисления приложимы к иррациональным числам; теперь — это доказывают. Допускали и многое такое, что бывало ошибочным. Полагались на интуицию; но все больше и больше замечали, что интуиция не гарантирует точности и даже не дает уверенности. Она, например, подсказывает нам, что всякая кривая имеет касательную, то есть, что всякая непрерывная функция имеет производную, а это — неверно. А так как уверенность необходима, то и пришлось долю интуиции постепенно ограничить.

Как совершилась эта необходимая эволюция? Своевременно было замечено, что нельзя ввести точность в рассуждения, если она сначала не введена в определения.

Долгое время многие математические сущности были плохо определены. Думали, что знают их, так как представляли их себе, прибегая к помощи чувств или воображения, но ведь это были только грубые образы их, а не точные идеи, на основе которых можно начинать рассуждение.

Вот в эту сторону и направили свое внимание логики. Так было, например, с несоизмеримым числом.

Смутная идея непрерывности, подсказанная интуицией, в результате вылилась в сложную систему неравенств, относящихся к целым числам. Так именно окончательно исчезли все трудности, приводившие в ужас наших отцов, когда они размышляли над основаниями дифференциального и интегрального исчислений.

Теперь в анализе остались только целые числа, или конечные либо бесконечные системы целых чисел, связанных сетью равенств и неравенств.

Математика, как говорят, арифметизировалась.

5. Но вы думаете, что математика достигла абсолютной строгости без жертв? Совсем нет: то, что она выиграла в строгости, она потеряла в объективности. Этой совершенной чистоты она достигла, удаляясь от полной реальности. Теперь можно свободно пробегать всю ее область, когда-то усеянную препятствиями; но эти препятствия не совсем исчезли: они только перенесены к границе и все-таки их всякий раз снова придется побеждать, когда надо будет переходить эту границу, чтобы попасть в царство практики.

Имелись и такие смутные понятия, которые были образованы из неподходящих друг к другу элементов, из тех, — построенных a priori, других, — вытекающих из более или менее продуманных случаев опыта; думали, что по интуиции могут знать их главные свойства. Теперь эмпирические элементы отбрасывают, сохраняя только элементы априорные; априорное свойство осталось единственным свойством, служащим для определения, и все другие свойства выводятся из него путем строгого рассуждения. Это очень хорошо, но остается еще доказать, что это свойство, ставшее определением, действительно принадлежит реальным предметам, известным нам из опыта, откуда также берет начало и наше смутное интуитивное понятие. А для того чтобы это доказать, надо будет взывать как раз к опыту либо к интуиции; а если бы мы доказать не могли, наши теоремы были бы совершенно строгими, но и совершенно бесполезными.

Логика иногда рождает чудовищ. Уже в течение полувека математики отмечают множество странных функций, которые, по-видимому, стремятся как можно меньше походить на порядочные функции, пригодные для чего-нибудь: или без непрерывности, или непрерывность, но без производных, и т.д. Сверх того, с точки зрения логической, эти необыкновенные функции — наиболее общи, а те, которые встречаешь на каждом шагу, представляют из себя лишь частные случаи, и им отводится совсем немного места.

Прежде, изобретая новые функции, имели в виду какую-нибудь практическую цель; теперь же их изобретают исключительно для того, чтобы признать небезупречными рассуждения наших отцов, и так будут поступать и в дальнейшем.

Если бы единственным руководителем педагога была признана логика, то преподавание ему пришлось бы начинать с функций наиболее общих, то есть, наиболее причудливых. И начинающего надо было бы ввергнуть прежде всего в этот музей уродств. А если вы этого не сделаете, могли бы говорить логики, то вы доберитесь до полной строгости, лишь после длинного ряда этапов.

6. Да, может быть, — так, но ведь нельзя же слишком низко ценить реальность. Я разумею здесь не только реальность чувственного мира, которая, конечно, имеет свою цену, потому что девять десятых ваших учеников просят у вас оружие именно для борьбы с ней; есть другая реальность, более тонкая, проникающая жизнь математических существ и представляющая из себя нечто другое, чем логика.

Наше тело слагается из клеточек, клеточки — из атомов. Составляют ли эти клеточки и атомы всю реальность человеческого тела? Не является ли реальностью, и гораздо более интересной, то, как они взаимно расположены и как из такого расположения вытекает единство индивида?

Разве мог бы думать естествоиспытатель, которому приходилось исследовать слона только в микроскоп, что он достаточно хорошо знает это животное?

То же — и в математике. Логик, разложивший каждое доказательство на ряд элементарных операций, еще не обладает всею реальностью; от него совершенно ускользнет что-то нам неизвестное, что сообщает единство доказательству.

Нечего удивляться работе каменщика в зданиях, возведенных нашими учителями, когда мы не можем понять плана архитектора. Вот этого общего взгляда на целое логика не может нам дать, — его нужно искать у интуиции.

Возьмем, например, идею непрерывной функции. Вначале это лишь чувственный образ, черта, начерченная мелом на черной доске. Но постепенно идея очищается; строится система неравенств, воспроизводящая все черты первоначального изображения, что служит к прояснению идеи; когда все определено, *кружала убираются*, как это бывает при окончании постройки свода; грубое представление подпорок, с этого момента бесполезное, должно исчезнуть, и останется только само строение, безукоризненное в глазах логика. Тем не менее, если учитель не напомнит ученикам первоначальный образ идеи, если он в один момент не восстановит подпирающую дугу, ученику будет очень трудно постигнуть, что за каприз взгромоздил таким образом, все эти неравенства одни на другие. Определение здесь было бы логически правильным, но не вскрывало бы перед учеником истинной реальности.

7. Теперь я возвращаюсь к ранее затронутому. Без сомнения, учителю трудно преподавать то, что его ум совершенно не удовлетворяет; но удовлетворение учителя не единственная цель преподавания: на первом плане стоит ум ученика, а затем то, чем он, по нашему желанию, должен стать.

Зоологи утверждают, что эмбриологическое развитие животного повторяет в очень короткое время всю историю развития его предков в геологической эпохе. По-видимому, то же самое относится к развитию умов. Воспитатель должен заставить ребенка пройти тем же путем, каким прошли его отцы, — быстрее, но не минуя этапов. В этом именно смысле история науки должна быть нашим первым наставником.

Наши отцы думали, что они знают, что такое дробь, что такое непрерывность, что такое площадь кривой поверхности; мы же теперь видим, что они этого не знали. Точно так же наши ученики думают, что знают это, когда приступают к серьезному изучению математики. Если без всякой предварительной подготовки я им заявлю: “Нет, вы этого не знаете: того, что, как вам кажется, вы понимаете, — вы не понимаете; я должен еще вам доказать то, что вам представляется очевидным”, и если в своем доказательстве я буду опираться на такие посылки, которые кажутся им менее очевидными, чем заключение, то что подумают эти несчастные? Они подумают, что математическая наука есть лишь произвольный набор бесполезных хитросплетений; либо сразу почувствуют к ней отвращение; либо станут забавляться ею, как игрой и уподобятся, по образу мышления, греческим софистам.

Наоборот, позже, когда ум ученика достаточно освоится с математическим рассуждением и, благодаря многократным упражнениям, созреет, — сомнения будут рождаться сами собою, и тогда мое доказательство будет желанным гостем. Оно возбудит ряд новых сомнений, и вопросы у моего слушателя будут возникать последовательно, как возникали они у наших отцов, — до тех пор, пока, наконец, полная строгость не удовлетворит его. Мало только сомневаться, — надо узнать, почему возникают сомнения.

8. Главная цель математического образования — развить определенные способности ума. Из последних не следует очень низко ценить интуицию. Именно через нее математический мир сохраняет соприкосновение с миром реальным и всякий раз, когда чистой математике удастся его миновать, только интуиция способна бывает заполнить пропасть, отделяющую символ от реальности. Практику она всегда будет нужна, а на одного чистого математика приходится сто практиков.

Инженер должен получать полное математическое образование, но для чего? — чтобы видеть различные стороны вещей, и видеть быстро: ему некогда “искать маленького животного”. Надо, чтобы во встречающихся ему сложных физических предметах он мог быстро распознавать те точки, на которые может быть направлено действие созданных нами математических орудий. Как бы справился он с этой задачей, если бы мы оставили между теми и другими глубокую пропасть, вырытую логиками?

9. Рядом с будущими инженерами — другие ученики, менее многочисленные, которые станут современными учителями. Они, следовательно, должны пройти всю науку до самого ее основания; углубленное и строгое познание первых принципов для них безусловно необходимо. Но это не должно служить основанием для того, чтобы в них не развивать интуиции; потому что, видя науку всегда только с одной стороны, они составили бы себе о ней совсем неправильное понятие, а кроме того, не владея сами определенным качеством, они не могли бы развивать его у своих

учеников.

Да и сами чистые математики должны иметь эту способность: логика доказывает, а интуиция творит. Быть критиком хорошо, быть творцом — еще лучше. Вы в состоянии распознать, правильна ли эта комбинация; прекрасное дело, если вы не владеете другим искусством — производить выбор между всеми возможными комбинациями. Логика говорит нам, что на таком-то и таком-то пути мы наверно не встретим препятствий; она не говорит, каков тот, который ведет к цели. Для этого надо издали видеть цель, а способность, научающая нас видеть, есть интуиция. Без нее математик был бы похож на того писателя, который безупречен в правописании, но у которого нет мыслей. Теперь можно спросить: как бы развивалась эта способность, если бы ее преследовали и жестоко судили везде, где только она ни проявится, и если бы к ней питали недоверие прежде, чем выяснено точно, когда и чем именно она вообще полезна.

Позвольте мне сказать здесь несколько вводных слов по вопросу о значении письменных задач. Письменным сочинениям не отводится, по-моему, достаточно места при некоторых экзаменах, например, в Политехнической Школе. Мне скажут, что они закрыли бы двери школы для очень многих хороших учеников, очень хорошо знающих свой курс, понимающих его, но, тем не менее, совсем не способных хоть к чему-нибудь применять его. Только что я говорил, что слово "понимать" имеет много значений; упомянутые ученики, очевидно, понимают только в первом значении этого слова, а мы видели, что такого понимания недостаточно ни для того, чтобы быть инженером, ни для того, чтобы быть математиком. Что же?.. В виду того, что выбор учеников необходим, я бы предпочел уже выбирать таких, которые волне понимают.

10. Но, не правда ли, и искусство логически рассуждать есть тоже ценное качество, которое учитель математики безусловно должен развивать в учениках? Я и не думаю забывать этого; об этом надо очень, даже очень заботиться, — и с самых первых шагов. Я был бы искренно огорчен, если бы геометрия постепенно выродилась в какую-нибудь тахиметрию, науку низшего разряда, — и я никогда не стану на сторону крайних доктрин некоторых немецких Oberlehrer. Но ведь представляется так много случаев для упражнений с учениками в правильном рассуждении — в тех отделах математики, в которых совсем нет отмеченных мною выше затруднений. Есть целые цепи теорем, где с самого же начала и, так сказать, совершенно естественно господствовала логика и где мы встречаем образцы, данные первыми геометрами, которым постоянно надо будет удивляться и подражать.

При изложении первых принципов надо избегать излишних тонкостей; тут они были бы более досадны, а сверх того и бесполезны. Нельзя все доказать и все определить; и всегда надо будет заимствовать кое-что у интуиции. Что за нужда, что мы сделаем это немного раньше или немного позже, или даже, что мы возьмем у нее немного больше или немного меньше, лишь бы, правильно пользуясь данными нам предпосылками, мы научились правильно рассуждать.

11. Возможно ли выполнить столько противоположных условий? Возможно ли это, в частности, когда речь идет о построении определений? Как найти выражение, удовлетворяющее одновременно и непримиримым законам логики, и нашему желанию постигнуть место нового понятия во всем целом науки, и нашей потребности мыслить образами? Чаще всего, выражение оказывается несовершенным: вот почему недостаточно выразить определение, — надо еще его подготовить и надо его оправдать.

Что я хочу этим сказать? Часто повторяют: всякое определение содержит в себе аксиому, так как им утверждается существование определенного предмета. Следовательно, с точки зрения чисто логической, определение будет оправданно только тогда, когда вы *докажете*, что нет противоречия в его терминах и что оно не стоит в противоречии с ранее допущенными истинами.

Но этого недостаточно; определение выражается, как условие; но большинство умов возмутится, если вы предложите им определение, как условие *произвольное*. Они успокоятся только после того, как вы ответите на целый ряд вопросов.

Математические определения наиболее часто представляют из себя, как это показал Лиар (Liard), настоящие постройки, возведенные во всех своих частях из более простых понятий.

Но почему соединены эти элементы таким образом, когда были возможны тысячи других соединений? Каприз ли это? Если нет, то почему именно эта комбинация имела больше прав на существование, чем все остальные? Каким запросам она отвечала? Как предвидели, что она будет играть в развитии науки важную роль, что она сократит наши рассуждения и вычисления? Есть ли в природе какой-нибудь хорошо знакомый нам предмет, являющийся, так сказать, ее подобием, неопределенным и грубым?

Если вы ответите на все эти вопросы удовлетворительно, то нам придется признать, что новорожденному надо дать имя. Но на этом дело не кончается: выбор имени тоже не должен быть произвольным; вы должны объяснить, какими аналогиями вы пользуетесь, давая то или иное имя. Если вы дали сходные имена различным вещам, то вы должны показать, что эти вещи отличаются по содержанию, но, по крайней мере, мало отличаются по форме; что их свойства аналогичны и, так сказать, параллельны.

Такой ценой вы удовлетворите уже все притязания. Если выражение достаточно правильно, чтобы понравится логику, то оправдание удовлетворит интуитивиста. Но надо стараться поступать еще лучше; всегда, когда это окажется возможным, оправдание пусть предшествует выражению и подготовляет его; пусть слушатели изучением ряда частных примеров подготовляются к общему выражению.

Наконец, и еще одно важно помнить. Каждая из частей выражений определения имеет целью отличить определяемый предмет от класса других соседних предметов. Определение будет понятно только тогда, когда вы покажете не только определяемый предмет, но и соседние, от которых его следует отличать, когда вы поможете подметить разницу между ними и затем ясным образом добавите: именно для этого-то, выражая определение, я сказал то-то или то.

Теперь мы можем от общих мест перейти к исследованию того, как прилагать только что приведенные мною довольно отвлеченные положения к определению понятий в арифметике, геометрии, анализе и механике.

Арифметика.

12. Целое число определять не приходится; зато обыкновенно определяют действия над целыми числами. Я думаю, что ученики заучивают эти определения наизусть, но не придают им никакого смысла. Тому две причины: во-первых, им сообщают эти определения слишком рано, когда их ум еще не ощущает в них никакой потребности; затем, эти определения и не удовлетворительны с точки зрения логической. Для сложения невозможно подыскать хорошего определения просто потому, что здесь не все поддается определению, — препятствие непреодолимое. Сказать, что сложение состоит в том, что прибавляют, не значит — определить его. Все, что можно сделать, это исходить из известного числа конкретных примеров и заявить: операция, которую мы только что выполняли, называется сложением.

С вычитанием — дело другое; его можно определить логически, как действие, обратное сложению; но с этого ли надо начинать? Здесь надо начинать тоже с примеров, показать на этих примерах обратность этих двух действий. Так определение будет подготовлено и оправдано.

То же — и с умножением. Берем частную задачу; показываем, что она решается посредством сложения многих чисел, равных между собой; затем показываем, что результат получается скорее с помощью умножения, — действия, в выполнении которого ученики уже имеют навык, — и логическое определение получится, таким образом, совершенно естественно.

Деление определим, как действие, обратное умножению; но начнем с примера, относящегося к обычному понятию разделения, и на этом примере покажем, что умножение воспроизводит делимое.

Остаются действия над дробями. Здесь — трудность только в определении умножения. Лучше всего сначала изложить теорию пропорций, — только из нее может вытечь логическое определение; но чтобы обеспечить правильное понимание определений, встречающихся в начале этой теории, надо их подготовить многочисленными примерами, взятыми из классических задач на тройное правило, в которые позаботиться ввести дробные данные. Не следует также бояться еще ближе познакомить учеников с понятием пропорции при помощи геометрических образов, напоминая ли им что-нибудь из геометрии, если они уже имели с ней дело, или, если они ее еще не знают, обращаясь к их непосредственной интуиции, что, между прочим, подготовит их к ней. Наконец, определив умножение дробей, надо оправдать это определение, доказывая, что умножение дробей обладает свойствами переместительности, сочетательности и распределительности, и обращая особое внимание слушателей на то, что это последнее констатирование делается именно для оправдания определения.

Вы видите, какую роль во всем этом играют геометрические образы; и эта роль оправдывается философией и историей науки. Если бы арифметика оставалась совершенно чистой от всякого смешения с геометрией, она знала бы только целое число; но именно для того, чтобы отвечать и на запросы геометрии, она изобрела еще другое — дробь.

Геометрия.

В геометрии мы прежде всего встречаем понятие прямой линии. Можно ли определить прямую линию? Известное определение: кратчайший путь от одной точки до другой, — меня совсем не удовлетворяет. Я бы просто начинал с *линейки* и сначала показывал бы ученикам, как можно проверить линейку посредством поворачивания; эта поверка есть настоящее определение прямой линии: **прямая линия есть ось вращения**. Затем надо было бы показать ученику способ поверки линейки посредством скольжения, чем мы привлекли бы его внимание к одному из наиболее важных свойств прямой линии. Что касается свойства быть кратчайшим путем от одной точки до другой, то теорема о нем может быть доказана убедительно, но доказательство это слишком тонко для того, чтобы его преподавать в средней школе. Лучше показать, что предварительно выверенная линейка совпадает с натянутой нитью. Можно без боязни, в виду подобных затруднений, увеличивать число аксиом, оправдывая их перед учениками с помощью простых опытов.

Допускать эти аксиомы все равно надо, а если приходится их допускать немного больше, чем это строго необходимо, то зло еще не очень велико; важно научить правильно рассуждать на основе однажды принятых аксиом. Дядя Sarcey, любивший повторяться, часто говорил, что в театре зритель охотно принимает все постулаты, выставленные в начале, но раз уже занавес поднят, он становится в логике непримиримо строгим. В математике — то же самое.

Для определения круга надо начинать с действия циркулем. Ученики с первого же раза узнают начерченную кривую; заставьте их затем наблюдать, что расстояние между двумя точками инструмента остается постоянным, что одна из этих точек неподвижна, а другая подвижна, и таким образом, естественно, приведете их к логическому определению.

Определение плоскости заключает в себе аксиому, и этого не надо скрывать. Возьмите чертежную доску и обратите внимание слушателей на то, что подвижная линейка постоянно совпадает с этой доской, сохраняя притом три степени свободы.

Сравните ее с цилиндром и конусом, к которым прямую линию можно только приложить при условии, допускающем лишь две степени свободы; затем возьмите три чертежных доски; сначала покажите, что они могут скользить, оставаясь приложенными одна к другой, и притом с тремя степенями свободы; и наконец, чтобы отличить плоскость от сферы, покажите, что две из этих досок, могущие быть приложены к третьей, могут быть наложены и одна на другую.

Быть может, вас удивит это постоянное пользование подвижными инструментами; это вовсе не простой, грубый прием, а дело гораздо более философское, чем можно подумать сначала. Что такое геометрия для философа? Это — изучение группы. Группы движений твердых тел. Как же тогда определить эту группу, не двигая некоторых твердых тел?

Надо ли сохранить классическое определение параллельных прямых, гласящее, что так называются прямые, которые, находясь в одной плоскости, никогда не встречаются, как бы далеко мы их не продолжили? Нет, — потому что это определение — отрицательное, потому что оно не поддается опытной проверке, а следовательно, его и нельзя рассматривать, как непосредственную данную интуиции. Нет, — в особенности потому, что оно всецело чуждо понятию группы, рассмотрению движения твердых тел, которое является, как я сказал, истинным началом геометрии. Не лучше ли было бы сначала определить прямолинейное перенесение неизменной фигуры, как движение, при котором все точки этой фигуры имеют прямолинейные траектории; показать, что подобное перенесение возможно, заставляя скользить наугольник по линейке. Из этого экспериментального констатирования, возведенного в аксиому, легко было бы уже вывести понятие параллели и самый постулат Эвклида.

Механика.

Мне незачем определять скорость, ускорение или другие кинематические понятия: их с пользой можно отнести к понятию производных.

Я остановлюсь, наоборот, на динамических понятиях силы и массы.

Поразительно, что очень многие молодые люди со средним образованием совершенно не прилагают к реальному миру тех механических законов, которым их учили. И не потому только не прилагают, что неспособны к этому, но они даже и не думают об этом. Для них мир науки и мир действительности отделены друг от друга непроницаемой перегородкой. Можно видеть иногда, как какой-нибудь хорошо одетый господин, может быть бакалавр, сидя в экипаже, подталкивает его, думая, что этим он помогает ему двигаться, это — наперекор принципу действия и противодействия.

Мы меньше будем удивляться этому, если попробуем заглянуть в душу наших учеников и посмотреть, что там происходит. Каково для них истинное определение силы? Совсем не то, которое они повторяют, но то, которое, будучи сокрыто в одном из закоулков их разума, управляет оттуда всем разумом. Вот это определение: "силы это — стрелки, из которых строят параллелограммы". Стрелки эти у них — воображаемые существа, которые ничего не должны делать ни с чем из того, что существует в природе. Этого бы не случилось, если бы мы показывали им силы в действительности, прежде чем представлять их с помощью стрелок.

Как определить силу? Мне кажется, что мне удалось в другом месте достаточно ясно показать, что хорошего логического определения силы нет. Есть антропологическое определение: ощущение мускульного усилия; оно действительно слишком грубо и ничего полезного из него извлечь нельзя.

Вот путь, по которому надо следовать. Прежде всего надо познакомить с родом силы, показать один за другим все виды этого рода; они очень многочисленны и очень различны: давление жидкостей на стенки сосудов, в которых они заключены, натяжение нитей, упругость пружин, тяжесть, действующая во всех молекулах тел, трение всякого рода, взаимное действие и противодействие двух соприкасающихся тел.

Это только качественное определение, — надо научить измерять силу. Для этого сначала покажем, что можно заменять одну силу другой, не нарушая равновесия. Первый пример этого замещения мы находим в весах и двойном взвешивании Борда. Затем покажем, что можно заменять вес не только другим весом, но и силами различной природы: например, нажим Прони (Prony) позволяет заменить тяжесть трением.

Из всего этого вытечет понятие эквивалентности двух сил.

Надо затем определить направление силы. Если сила F эквивалентна другой силе F', которая прилагается к рассматриваемому телу с помощью натянутой нити так, что F можно заменить через F' без нарушения равновесия, то точка прикрепления нити будет, по новому определению, точкой приложения силы F', а также и точкой приложения эквивалентной ей силы F; направление нити будет направлением силы F', а также и направлением эквивалентной ей силы F.

Затем надо перейти к сравнению величины сил. Если одна сила может заменить две других силы того же направления, то она, стало быть, равна их сумме, например, покажем, что гиря в 20 граммов может заменить две гири по 10 граммов.

Достаточно ли этого? Нет еще. Мы умеем теперь сравнивать интенсивность двух сил, имеющих одно и тоже направление и одну и ту же точку приложения; надо научить делать то же самое, при различных направлениях. Для этого берем нить, натягиваемую грузом, и перебрасываем ее через блок; мы скажем, что натяжение обоих побегов нити одно и то же и равно натягивающему грузу.

Это определение позволяет нам сравнивать натяжение обоих побегов нити и, пользуясь предыдущими определениями, сравнивать две какие угодно силы, имеющие те же направления, что и эти два побега. Надо это оправдать, показывая, что натяжение последнего побега остается тем же для одного и того же натягивающего груза, каковы бы не были число и расположение передаточных блоков. Затем его надо дополнить, показав, что это верно только, если блоки — без трения.

Преподав эти определения, надо показать, что для полного определения силы достаточно указания точки приложения направления и интенсивности; что две силы, у которых эти три элемента одни и те же, *всегда* эквиваленты и могут всегда быть заменены одна другой, независимо от того, находится система в равновесии или в движении, и независимо от того, каковы другие участвующие в ней силы.

Надо показать, что две вместе действующие силы могут быть всегда заменены одной равнодействующей; что *эта равнодействующая остается одною и тою же*, независимо от того, находится тело в покое или в движении и независимо от того, каковы другие силы, приложенные к нему.

Наконец, надо показать, что силы, таким образом определенные, подчиняются принципу равенства действия и противодействия.

Все это — опыт, и один только опыт может нас всему этому научить.

Если мы, таким образом, назовем несколько обыденных опытов, которые сами ученики производят ежедневно, не подозревая этого, и произведем еще небольшое число простых и хорошо подобранных опытов, — этого будет достаточно.

Только пройдя все это, можно начать изображать силы посредством стрелок, но и дальше было бы желательно, чтобы, развивая отвлеченные рассуждения, мы возвращались время от времени от символа к реальности. Например, не трудно иллюстрировать параллелограмм сил с помощью прибора, состоящего из трех перекинутых через блоки нитей, натянутых гирями, действующих на одну и ту же точку, при чем вся система находится в равновесии.

Зная силу, легко определить массу. Определение должно быть почерпнуто из динамики: нет возможности поступить иначе, потому что цель, которой мы хотим достигнуть это — дать возможность понять различие между массой и весом. Здесь тоже определение должно быть подготовлено опытами. Действительно, есть машина, которая как будто бы создана прямо для того, чтобы показать, что такое масса, — это машина Атвуда. Впрочем, не мешает напомнить сначала законы падения тел, напомнить, что ускорение силы тяжести одно и то же для тяжелых и легких тел, что оно изменяется с широтой и т.д.

Теперь, если вы мне скажете, что все методы, которые я так усиленно хвалю, уже давно применяются в школах, я обрадуюсь этому больше, чем удивлюсь. Я знаю, что преподавание математики, в его целом, поставлено у нас хорошо; я не хочу, чтобы его потрясали в основе, — я даже был бы этим огорчен; я желаю только постепенно прогрессирующих улучшении. Не надо, чтобы развитие этого преподавания претерпевало резкие колебания, по капризному веянию эфемерных мод. В подобных бурях скорее понизилась бы его высокая воспитательная ценность. Хорошая и твердая логика должна быть по-прежнему его основой. Определение с помощью примера всегда необходимо, но оно должно подготовлять логическое определение, оно не должно его заменять; по меньшей мере, оно должно делать его желательным — в тех случаях, когда настоящее логическое определение может быть дано с пользой только в высшей школе.

Вы должны понять, что то, что я говорил теперь, не знаменует собою отказа от того, что я писал прежде. Я часто имел случай критиковать известные определении, которые я теперь восхваляю. Эта критика остается вполне: определения эти являются лишь предварительными и временными. Но идти-то надо все-таки через них.

Содержание журнала “Математическое образование” за 2007-2008 гг.

№ 40, специальный выпуск, 2007 г.

Номер посвящен 75-летию Н. Н. Константинова

№ 1 (41), январь – март 2007 г.

№ 1 (45), январь – март 2008 г.

№ 2 (46), апрель – июнь 2008 г.

№ 3 (47), июль – сентябрь 2008 г.

№ 4 (48), октябрь – декабрь 2008 г.

О web-странице журнала “Математическое образование”

Web-страница журнала “Математическое образование” размещена по адресу www.matob.ru

Авторов, представляющих статьи в редакцию журнала, просим сообщать, согласны ли они, чтобы их статьи вывешивались на этой странице в архиве, в формате PS и/или PDF.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2008 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2008 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Предполагается вывешивать статьи в формате PS и/или PDF в архиве на сайте журнала. Просим авторов предоставляемых статей сообщать, согласны ли они на это.

Contents