ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год тринадцатый

№ 1 (49)

январь – март 2009 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 1 (49), 2009 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2009 г.
"Математическое образование", периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 31.03.2009 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (49), январь – март 2009 г.

Содержание

Южно-Уральская региональная математическая олимпиада

А. Ю. Эвнин

В статье приводятся задачи Южно-Уральской региональной олимпиады 2005–2008 гг. для абитуриентов вузов Челябинской области.

В 2004–2008 гг. в Челябинской области для абитуриентов проводилась Южно-Уральская региональная олимпиада. Её организаторами являлись Главное управление образования и Совет ректоров высших учебных заведений Челябинской области. Олимпиада проходила одновременно на трёх площадках — в Южно-Уральском, Челябинском и Магнитогорском государственных университетах. В олимпиаде по математике каждый год принимало участие от 500 до 700 учащихся — выпускников общеобразовательных учреждений и учреждений среднего профессионального образования.

Материалы олимпиады 2004 г. приведены в статье

Воронин, С. М. *Южно-Уральская региональная олимпиада по математике* / С. М. Воронин, В. И. Заляпин, А. Ю. Эвнин // Математика в школе. – 2004. – 8. – С. 51–53.

В настоящей публикации — условия и решения задач 2005–2008 гг.

Условия задач

2005 год

1. Решить неравенство
$$x \cdot 2^x \leqslant x(4-x) + 3(2^x - 1).$$

2. Найти произведение наибольшего и наименьшего значений функции
$$y = 2^{\operatorname{arctg}(x^7 - 5x^5 + x^3)}$$
на промежутке $[-2; 2]$.

3. 1) Пусть $a(n)$ — процент попаданий по мишени биатлонистки A, вычисленный после того, как она сделала n выстрелов с начала сезона. Известно, что для некоторых n_1 и n_2 выполняются неравенства $n_1 < n_2$ и $a(n_1) < 75\,\% < a(n_2)$. Обязательно ли найдётся такое число n, что $a(n) = 75\,\%$?

2) Пусть $b(n)$ — процент попаданий по мишени биатлонистки B, вычисленный после того, как она сделала n выстрелов с начала сезона. Известно, что для некоторых k_1 и k_2 выполняются неравенства $k_1 < k_2$ и $b(k_1) > 75\,\% > b(k_2)$. Обязательно ли найдётся такое число k, что $b(k) = 75\,\%$?

4. Если выписать цифры от 0 до 9 по возрастанию и составить последовательность сумм двух соседних цифр (1, 3, 5, …, 17), то получится арифметическая прогрессия с разностью 2. Расположить цифры 0, 1, 2, …, 9 в таком порядке, чтобы новая последовательность сумм двух соседних цифр была арифметической прогрессией с разностью 1. Найти все решения этой задачи.

5. Доказать, что
$$\cos\frac{\pi}{11}\cdot\cos\frac{2\pi}{11}\cdot\cos\frac{3\pi}{11}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{1024}.$$

6. Дан произвольный треугольник. Доказать, что всегда можно провести такие три прямые, параллельные его сторонам, что треугольник будет разбит на три треугольника и равносторонний шестиугольник. Найти длину стороны шестиугольника, если длины сторон исходного треугольника равны a, b и c.

7. В куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ с ребром длиной l вписана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ так, что вершины A, B и C делят рёбра MN, MQ и MM_1 соответственно в отношении 1:2, считая от точки M, а вершины A_1, B_1 и C_1 принадлежат граням PP_1N_1N, PP_1Q_1Q и $M_1N_1P_1Q_1$. Доказать существование и единственность такой призмы. Доказать, что она правильная и найти радиус описанной вокруг неё сферы.

2006 год

8. Вычислить
$$20052006\frac{67}{12345}\cdot 20052005\frac{67}{12345}-20052007\frac{67}{12345}\cdot 20052004\frac{67}{12345}.$$

9. Решить уравнение $\sin\dfrac{2\sqrt{\pi x}}{\pi+x}=0$.

10. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 2(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})=3\sqrt[6]{xy};\\ x-y=63.\end{cases}$$

11. 50 синих и 50 красных точек разделили окружность на 100 равных дуг. Доказать, что прямоугольных треугольников с красными вершинами столько же, сколько прямоугольных треугольников с синими вершинами.

12. Решить в целых числах уравнение $x^3+x=y^2$.

13. Найти множество всех точек K в трапеции $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ таких, что $S_{ABK}=S_{CDK}$.

14. Найти плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды, у которой совпадают центры вписанной и описанной сферы.

2007 год

15. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5\,986x+2\,007y+2\,007z=35\,881;\\ 2\,007x+5\,986y+2\,007z=70;\\ 2\,007x+2\,007y+5\,986z=4\,049.\end{cases}$$

16. Имеется 68 камней разного веса и чашечные весы без гирь. Можно ли за 100 взвешиваний найти самый тяжёлый и самый лёгкий камень?

17. На отрезке BD отмечена точка C и построены в одной полуплоскости с границей BD два равносторонних треугольника: BAC и CED. Отрезки BE и AC пересекаются в точке K, а отрезки CE и AD — в точке L. Доказать, что треугольник CKL — равносторонний.

18. Пусть $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$. Доказать, что $\dfrac{a-b}{1+ab} + \dfrac{b-c}{1+bc} + \dfrac{c-a}{1+ac} \geqslant 0$.

19. Найти остаток от деления многочлена $x^{2007} + x^{207} + x^{27} + x^7 + 1$ на многочлен $x^3 - x$.

20. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x^2+3}+1\right)\operatorname{arctg} x + \left(\sqrt{x^2+4x+7}+1\right)\operatorname{arctg}(x+2) = 0.$$

21. Найти площадь фигуры, задаваемой системой неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| + |x+y| \leqslant 8; \\ y^7 + y^{-7} \leqslant x^7 + x^{-7}. \end{cases}$$

2008 год

22. Найти множество значений функции $y = \sin^2 x + \sin 2x$.

23. Найти все x и y такие, что $(2x+1)^2 + y^2 + (y-2x)^2 = \dfrac{1}{3}$.

24. Найти наименьшее значение функции

$$y = \frac{(2^x + 2^{-x})^6 - (2^{6x} + 2^{-6x}) - 2}{(2^x + 2^{-x})^3 + (2^{3x} + 2^{-3x})}.$$

25. В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и AD. Окружность радиуса AB с центром в точке A пересекает отрезок MN в точке P. Найти угол APC.

26. Пусть при $n \geqslant 2$

$$a_n = \frac{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \ldots \cdot \lg n}{3^n}.$$

Найти номера наименьших элементов последовательности (a_n).

27. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$. Доказать, что

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 4(x_1 - x_n).$$

28. У прямоугольного параллелепипеда есть сечение, являющееся правильным шестиугольником. Доказать, что этот параллелепипед — куб.

Решения задач

1. Перепишем неравенство в виде $(x-3)(2^x + x - 1) \leqslant 0$ и применим метод интервалов.

Ответ: $[0;3]$.

2. Функция $f(x) = \operatorname{arctg}(x^7 - 5x^5 + x^3)$ непрерывна (как всякая элементарная функция). Поэтому на любом отрезке она имеет наибольшее и наименьшее значение. Кроме того, $f(x)$ — нечётная функция. Из этого следует, что на симметричном относительно начала координат отрезке её наибольшее и наименьшее значения отличаются только знаком. Поэтому если $\max 2^{f(x)} = 2^M$, то $\min 2^{f(x)} = 2^{-M}$.

Ответ: 1.

3. Если после n выстрелов меткость была ниже 75%, а после $n+1$-го выстрела превысила 75%, то $n+1$-й выстрел был точным и выполняются неравенства $\frac{m}{n} < \frac{3}{4}$ и $\frac{m+1}{n+1} > \frac{3}{4}$, где m — число попаданий в первых n выстрелах. Отсюда $4m < 3n < 4m+1$, что невозможно, так как между двумя соседними целыми числами $4m$ и $4m+1$ нет других целых чисел. Обратный “перескок” возможен. Например, пусть два первых выстрела были точными (текущая меткость 100%), а третий — нет (меткость составит $66\frac{2}{3}\%$, что меньше 75%).

Ответ: а) да; б) нет.

4. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ — искомая последовательность. Для $i = 1, 2, \ldots, 8$ имеем:

$$(a_{i+2} + a_{i+1}) - (a_{i+1} + a_i) = 1,$$

откуда $a_{i+2} - a_i = 1$. Значит, числа a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 образуют арифметическую прогрессию с разностью 1. Это же верно по отношению к числам $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$. Возможны лишь два таких варианта: $a_1 = 0, a_2 = 5$ и $a_1 = 5, a_2 = 0$.

Ответ: 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9; 5, 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4.

5.

Первый способ. Пусть

$$A = \prod_{k=1}^{10} \cos\frac{k\pi}{11}; \quad B = \prod_{k=1}^{10} \sin\frac{k\pi}{11}.$$

Тогда, применив формулу синуса двойного угла, получим:

$$A \cdot B = \frac{1}{2^{10}} \prod_{k=1}^{10} \sin\frac{2k\pi}{11}.$$

Преобразуем произведение последних пяти множителей:

$$\prod_{k=6}^{10} \sin\frac{2k\pi}{11} = (-1)^5 \prod_{k=6}^{10} \sin\frac{(2k-11)\pi}{11} = -\prod_{l=1}^{5} \sin\frac{(2l-1)\pi}{11}.$$

Таким образом,

$$\prod_{k=1}^{10} \sin\frac{2k\pi}{11} = -\prod_{k=1}^{10} \sin\frac{k\pi}{11}.$$

Значит, $A \cdot B = -\frac{B}{1024}$, откуда $A = -\frac{1}{1024}$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Умножим и разделим произведение косинусов на $\sin\frac{\pi}{11}$. Затем 10 раз применим формулу синуса двойного угла. Например, $\sin\frac{\pi}{11} \cdot \cos\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{11}$ или $\sin\frac{8\pi}{11} \cdot \cos\frac{8\pi}{11} = \frac{1}{2}\sin\frac{16\pi}{11} = -\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{11}$. При этом множители в аргументе синуса при $\frac{\pi}{11}$ меняются в такой последовательности: $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 5 \to 10 \to 9 \to 7 \to 3 \to 6 \to 1$. В итоге получим:

$$-\frac{1}{1024} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}} = -\frac{1}{1024}.$$

6. Пусть ABC — исходный треугольник, причём $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Предположим сначала, что искомые прямые существуют, а длина стороны шестиугольника равна x. В обозна-

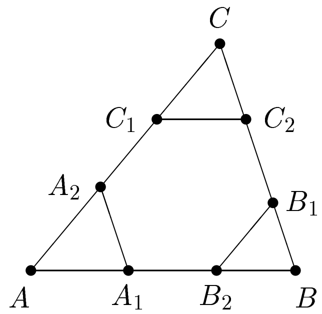


Рис. 1

чениях, понятных из рис. 1,

треугольник CC_1C_2 подобен треугольнику CAB с коэффициентом подобия $\frac{x}{c}$. Поэтому $CC_1 = \frac{x}{c} \cdot b$. Аналогично, $AA_2 = \frac{x}{a} \cdot b$. Из условия $AA_2 + A_2C_1 + C_1C = b$ получаем $x\left(\frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c}\right) = b$, откуда $x = \frac{abc}{ab + bc + ca}$. Теперь докажем существование указанных прямых. Отметим на сторонах треугольника ABC точки, определяемые следующими условиями:

$$A_1 \in AB, \quad AA_1 = \frac{x}{a} \cdot c, \qquad A_2 \in AC, \quad AA_2 = \frac{x}{a} \cdot b,$$

$$B_1 \in BC, \quad BB_1 = \frac{x}{b} \cdot a, \qquad B_2 \in AB, \quad BB_2 = \frac{x}{b} \cdot c,$$

$$C_1 \in CA, \quad CC_1 = \frac{x}{c} \cdot b, \qquad C_2 \in CB, \ CC_2 = \frac{x}{c} \cdot a.$$

Тогда треугольники AA_1A_2, C_1C_2C, B_2BB_1 подобны исходному треугольнику ABC, причём

$$C_1C_2 \parallel AB, \ B_1B_2 \parallel CA, \ A_1A_2 \parallel BC, \ \ C_1C_2 = B_1B_2 = A_1A_2 = x.$$

Легко проверить, что $A_2C_1 = C_2B_1 = B_2A_1 = x$. Действительно, равенство $A_2C_1 = x$ обеспечено самим способом получения x. А равенства $A_1B_2 = B_1C_2 = x$ следуют из симметрии формулы, выражающей x через a, b и c.

Ответ: всегда; сторона шестиугольника $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^{-1}$.

7. Проведём выкладки при $l = 3$ (после чего воспользуемся соображениями подобия). Введём систему координат с центром в точке M и осями, направленными по рёбрам куба. Вершины призмы, принадлежащие рёбрам куба, будут иметь координаты: $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

Пусть вектор $\boldsymbol{r} = (a; b; c)$ соответствует боковому ребру призмы (то есть $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$). Тогда координаты оставшихся вершин призмы таковы: $A_1(1+a; b; c)$, $B_1(a; b+1; c)$, $C_1(a; b; c+1)$. По условию задачи точки A_1, B_1, C_1 принадлежат граням с уравнениями $x = 3$; $y = 3$; $z = 3$ и каждая координата каждой из этих точек не больше 3. Отсюда следует, что $a = b = c = 2$. При этом получается призма, удовлетворяющая условию задачи. Таким образом, её существование и единственность доказаны.

Поскольку (как легко проверить) вектор $\boldsymbol{r}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, боковое ребро призмы перпендикулярно её основанию, то есть призма — прямая. Точка $O_1\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ — центр основания призмы. Точка D с радиус-вектором $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OO_1} + \frac{\boldsymbol{r}}{2}$ равноудалена от вершин призмы и является центром описанной сферы. Имеем: $D\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$. Радиус описанной сферы равен

$$AD = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

Куб с ребром длины l подобен кубу с ребром длины 3; коэффициент подобия равен $\frac{l}{3}$. Отсюда искомый радиус равен $\frac{l\sqrt{33}}{9}$.

8. Пусть $a = 20052004\frac{67}{12345}$. Имеем: $(a + 2)(a + 1) - (a + 3)a = 2$.

Ответ: 2.

9.

Первый способ. Очевидно, $\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Кроме того, $x \geqslant 0$ и, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, $\frac{2\sqrt{\pi x}}{\pi + x} \leqslant 1$. Отсюда единственный корень уравнения $x = 0$.

Второй способ. После замены переменной $t = \sqrt{x}$ получаем квадратное уравнение $2\sqrt{\pi}t = \pi k(\pi + t^2)$. При $k \neq 0$ $D/4 = \pi - \pi^3 k^2 \geqslant 0 \iff k = 0$. Поэтому $k = 0$, при этом $t = 0$ и $x = 0$.

Ответ: 0.

10.

$$\begin{cases} 2(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) = 3\sqrt[6]{xy}; & (1) \\ x - y = 63. & (2) \end{cases}$$

Исходя из правой части (1), имеем $xy \geqslant 0$. Из (1) также следует, что $x = 0 \iff y = 0$. Поэтому с учётом (2) получаем, что $xy > 0$.

I. Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Поделив обе части (1) на $\sqrt[3]{y}$, получим

$$2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 3\sqrt[6]{\frac{x}{y}} - 2 = 0,$$

откуда $\sqrt[6]{\dfrac{x}{y}} = 2, \quad x = 64y$. Теперь из (2) следует: $x = 64, y = 1$. При этом $x > 0$ и $y > 0$.

II. Пусть $x < 0$ и $y < 0$. После замены $u = -x, v = -y$ имеем
$2(\sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{u}) = 3\sqrt[6]{vu}$, где $u, v > 0$. Значит $v = 64u$, и $y = 64x$. Теперь из (2) следует: $x = -1, y = -64$. При этом $x < 0$ и $y < 0$.

Ответ: $(64; 1), (-1; -64)$.

11. Две диаметрально противоположные одноцветные точки порождают 48 прямоугольных треугольников данного цвета. Осталось заметить, что таких пар синего цвета столько же, сколько красного (иначе общее количество синих точек не будет равно числу красных точек).

12. Переписав уравнение в виде $x(x^2 + 1) = y^2$, заметим, что x и $x^2 + 1$ — взаимно простые числа. (В самом деле, если d — (натуральный) общий делитель чисел x и $x^2 + 1$, то d будет делителем и числа $(x^2 + 1) - x^2 = 1$; значит, $d = 1$).

Отсюда следует, что

$$x^2 + 1 = z^2 \qquad (*)$$

для некоторого целого числа z. (Действительно, если в разложении числа $x^2 + 1$ на простые множители некоторое простое число p входит в нечётной степени, то, поскольку p не является делителем числа x, в разложении числа y^2 число p должно входить в той же нечётной степени, а это невозможно).

Из $(*)$ вытекает: $x = z = 0$. Отсюда $y = 0$.

Ответ: (0;0).

13.

I. Пусть точка M — середина BC, а точка N — середина AD. Легко видеть, что $S_{ABMN} = S_{NMCD}$. Кроме того, для любой точки P имеем $S_{BMP} = S_{CMP}$ и $S_{ANP} = S_{DNP}$. Поэтому: если $K \in [MN]$, то

$$S_{ABK} = S_{ABMN} - S_{BMK} - S_{ANK} = S_{NMCD} - S_{CMK} - S_{DNK} = S_{CDK}.$$

Таким образом, все точки отрезка $[MN]$ входят в искомое ГМТ.

II. Покажем теперь, что других точек ГМТ не содержит. Возьмём произвольную прямую, параллельную основаниям трапеции, и будем двигать по ней точку K от боковой стороны AB к боковой стороне CD. При этом площадь треугольника ABK будет увеличиваться, а площадь CDK — уменьшаться. Поэтому ГМТ пересекается с данной прямой не более чем в одной точке.

Ответ: отрезок, соединяющий середины оснований трапеции.

14. Пусть S — вершина пирамиды, $A_1A_2 \ldots A_n$ — основание, O — центр обеих сфер, T — центр основания, P — проекция O на боковую грань SA_1A_2. Поскольку $OA_1 = OA_2 = OS$, точка P — центр окружности, описанной вокруг треугольника SA_1A_2.

Кроме того, $OP = OT$ и $\triangle OTA_1 = \triangle OPA_1$ (по гипотенузе и катету). Поэтому $TA_1 = TA_2 = PA_1 = PA_2$. (Другой вариант рассуждений: отрезки касательных, проведённых из точки к сфере, равны: $A_1P = A_1T$ и т.д.)

Значит, $\triangle TA_1A_2 = \triangle PA_1A_2$ (по трём сторонам) и $\angle A_1PA_2 = \angle A_1TA_2 = \dfrac{2\pi}{n}$. Осталось заметить, что вписанный угол A_1SA_2 вдвое меньше центрального A_1PA_2.

Ответ: $\dfrac{\pi}{n}$.

15. Сложим уравнения:

$$10\,000(x+y+z) = 40\,000.$$

Отсюда $x+y+z=4$, и из 3-го уравнения системы имеем:

$$5\,986z + 2\,007(4-z) = 4\,049; \quad 3\,979z = -3\,979; \quad z=-1.$$

Аналогично находим значения других переменных.

Ответ: $(7; -2; -1)$.

16. Разобьём камни на пары. За 34 взвешивания сравним камни в каждой паре. Более тяжёлые камни соберём в кучку A, а более лёгкие — в кучку B. Сравним два камня из кучки A. Более тяжёлый сравним с третьим камнем и т. д. В результате за 33 взвешивания мы сможем определить самый тяжёлый камень. Аналогичная процедура позволяет за 33 взвешивания определить самый лёгкий камень из кучки B. Таким образом, ровно за 100 взвешиваний мы найдём самый тяжёлый и самый лёгкий камень.

Ответ: да.

17. Поскольку $\angle KCL = 180^\circ - (\angle BCA + \angle DCE) = 60^\circ$, достаточно доказать, что $KC = CL$.

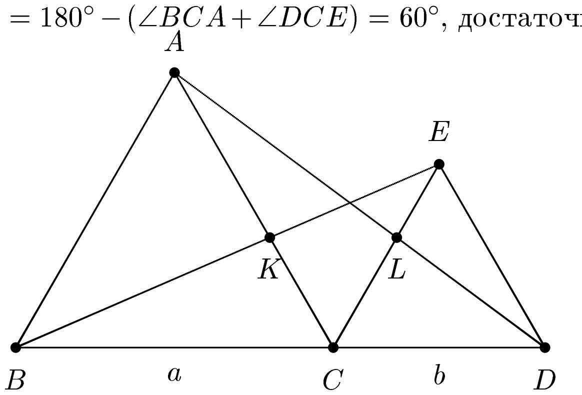


Рис. 2

Первый способ. Пусть $BC = a$, $CD = b$. Из подобия треугольников BKC и BED вытекает пропорция $\dfrac{KC}{ED} = \dfrac{BC}{BD}$, откуда $CK = \dfrac{ba}{a+b}$. Аналогично получаем, что $CL = \dfrac{ab}{a+b}$. Всё доказано.

Второй способ. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки C точка B переходит в A, E — в D, отрезок BE — в отрезок AD, луч CA — в луч CE (рис. 2). Поэтому точка K (пересечение BE и AC) переходит в точку L (пересечение CE и AD). Значит, $CK = CL$.

18.

Первый способ. Запишем цепочку равносильных неравенств (при выполнении условий задачи):

$$\frac{c-a}{1+ac} = \frac{c-b}{1+ac} + \frac{b-a}{1+ac} \geqslant \frac{b-a}{1+ab} + \frac{c-b}{1+bc};$$

$$(c-b)\left(\frac{1}{1+ac} - \frac{1}{1+bc}\right) \geqslant (b-a)\left(\frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+ac}\right);$$

$$\frac{(c-b)(bc-ac)}{(1+ac)(1+bc)} \geqslant \frac{(b-a)(ac-ab)}{(1+ab)(1+ac)};$$

$$\frac{(c-b)\cdot c\cdot(b-a)}{1+bc} \geqslant \frac{(b-a)\cdot a\cdot(c-b)}{1+ab};$$

$$c(1+ab) \geqslant a(1+bc); \quad c+cab \geqslant a+abc; \quad c \geqslant a.$$

Последнее неравенство верно — значит, верно и первое.

Второй способ. Пусть $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha) \geqslant 0.$$

Сделаем ещё одну замену: $x = \beta-\alpha$, $y = \gamma-\beta$. При этом $\gamma-\alpha = x+y$. Требуется доказать, что

$$\operatorname{tg}(x+y) \geqslant \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y.$$

Это вытекает из формулы тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

и того, что числа x, y и $x+y$ принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

19. При делении многочлена на многочлен в остатке возникает многочлен, степень которого меньше степени делителя. В данном случае имеем остаток $r(x) = ax^2+bx+c$ и тождество

$$x^{2007}+x^{207}+x^{27}+x^7+1 = (x^3-x)\cdot s(x)+ax^2+bx+c. \qquad (*)$$

Подставив в $(*)$ нули многочлена x^3-x — числа -1, 0 и 1, получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -3 = a-b+c; \\ 1 = c; \\ 4 = a+b+c. \end{cases}$$

Решим эту систему: $a = -0{,}5$, $b = 3{,}5$, $c = 1$.

Ответ: $-0{,}5x^2+3{,}5x+1$.

20. Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\sqrt{x^2+3}+1\right)\operatorname{arctg}x$. На положительной полуоси эта функция возрастает как произведение положительных возрастающих функций. В силу нечётности $f(x)$ возрастает и на всей числовой прямой. Из нечётности и монотонности следует, что

$$f(x)+f(y) = 0 \iff x+y = 0.$$

Осталось заметить, что исходное уравнение можно записать в виде

$$f(x)+f(x+2) = 0.$$

Значит, $x+x+2 = 0$ и $x = -1$.

Ответ: -1.

21. Чтобы построить границу фигуры, задаваемой первым неравенством системы, заметим, что прямые $x = 0$, $y = 0$ и $x+y = 0$ разбивают координатную плоскость на шесть областей, в каждой из которых модули раскрываются единообразно. После несложных выкладок получим шестиугольник, площадь которого равна 48. Преобразуем второе неравенство:

$$x^7+\frac{1}{x^7} \geqslant y^7+\frac{1}{y^7}; \quad x^7-y^7 \geqslant \frac{x^7-y^7}{x^7y^7};$$

$$\left(x^7-y^7\right)\left(1-\frac{1}{x^7y^7}\right) \geqslant 0; \quad \frac{(x^7-y^7)(x^7y^7-1)}{x^7y^7} \geqslant 0.$$

Прямая $y = x$, оси координат и ветви гиперболы $xy = 1$ делят шестиугольник на участки знакопостоянства функции

$$f(x, y) = \frac{(x^7 - y^7)(x^7y^7 - 1)}{x^7y^7}.$$

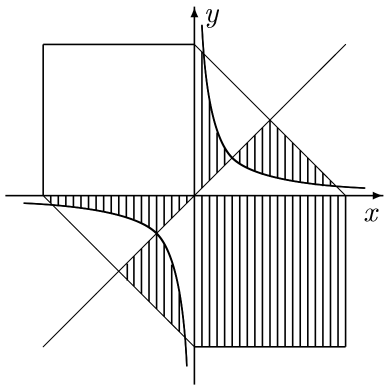


Рис. 3

На рис. 3 искомая фигура заштрихована. При симметрии относительно прямой $y = x$ заштрихованные части рисунка переходят в незаштрихованные и наоборот. Действительно, если F — наша фигура, то при выполнении неравенств $x \neq y$, $xy \neq 0$ и $|x| + |y| + |x + y| \leqslant 1$

$$M(x; y) \in F \iff M'(y; x) \notin F.$$

Поэтому площадь заштрихованной части равна в точности половине площади шестиугольника,

Ответ: 24.

22. Использовав формулу понижения степени, представим функцию в виде

$$y = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x = \frac{1}{2} + (\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x).$$

Как известно, множество значений функции $y = a\sin t + b\cos t$ есть отрезок $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}; \sqrt{a^2 + b^2}\right]$ (этот факт вытекает из формулы введения вспомогательного угла $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(t + \varphi)$). Отсюда и получается ответ.

Ответ: $\left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

23. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x, считая y параметром:

$$8x^2 + 4(1 - y)x + 2y^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

После несложных выкладок получим выражение для дискриминанта этого уравнения

$$D = -48\left(y + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Квадратное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен. Найденный дискриминант неотрицателен лишь при $y = -\frac{1}{3}$. При этом и $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{1}{3}; y = -\frac{1}{3}$.

24. Сделаем замену переменной $t = 2^x$. Поскольку $t > 0$, задача сводится к нахождению наименьшего значения функции

$$f(t) = \frac{\left(t + \frac{1}{t}\right)^6 - \left(t^6 + 2 + \frac{1}{t^6}\right)}{\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 + \left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)}$$

на положительной полуоси. Во второй паре скобок в числителе нетрудно увидеть квадрат суммы

$\left(t^3+\dfrac{1}{t^3}\right)$. Используя далее формулу разности квадратов, имеем:

$$f(t)=\frac{\left(\left(t+\frac{1}{t}\right)^3\right)^2-\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)^2}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^3+\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)}=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-\left(t^3+\frac{1}{t^3}\right)=3\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

Осталось вспомнить, что наименьшее значение суммы двух положительных взаимно обратных чисел равно двум.

Ответ: 6.

25.

Первый способ.

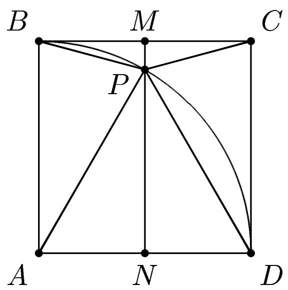


Рис. 4

В прямоугольном треугольнике APN катет AN вдвое меньше гипотенузы AP. Поэтому $\angle APN = 30^\circ$. Углы PAB и APN равны как накрест лежащие. Кроме того, треугольник BAP равнобедренный. Значит,

$$\angle APB=\frac{180^\circ-\angle BAP}{2}=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ.$$

В силу симметрии относительно прямой MN имеем равенства:

$$\angle DPC=\angle APB,\quad \angle NPD=\angle NPA.$$

Осталось сложить три угла:

$$\angle APC=\angle APN+\angle NPD+\angle DPC=30^\circ+30^\circ+75^\circ=135^\circ.$$

Второй способ. В силу симметрии относительно прямой MN имеем $\angle APC=\angle DPB$. Угол DPB вписан в окружность и опирается на угол в 270°. Отсюда $\angle DPB=135^\circ$.

Ответ: 135°.

26. Все члены последовательности положительны. Чтобы выяснить характер изменения членов последовательности с ростом n, найдём отношение соседних членов:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\lg 2\cdot\lg 3\cdot\ldots\cdot\lg n}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{\lg 2\cdot\lg 3\cdot\ldots\cdot\lg(n-1)}=\frac{\lg n}{3}.$$

Значит, при $n<1000$ выполняется неравенство $a_n<a_{n-1}$, а при $n>1000$ соответственно $a_n>a_{n-1}$. Кроме того, $a_{999}=a_{1000}$. Из цепочки соотношений

$$a_1>a_2>\cdots>a_{999}=a_{1000}<a_{1001}<a_{1002}<\ldots$$

вытекает, что a_{999} и a_{1000} — наименьшие элементы последовательности.

Ответ: 999 и 1000.

27. Сначала заметим, что при положительном b справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{b}\geqslant 4(a-b). \qquad (*)$$

Действительно, после умножения на b неравенство преобразуется к виду $(a-2b)^2 \geqslant 0$. Беря в качестве a и b числа x_{i-1} и x_i для $i = 2, 3, \ldots, n$, получим

$$\frac{x_1^2}{x_2} \geqslant 4(x_1 - x_2); \quad \frac{x_2^2}{x_3} \geqslant 4(x_2 - x_3); \quad \ldots; \quad \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 4(x_{n-1} - x_n).$$

Сложение найденных неравенств даёт требуемое неравенство.

Заметим, что неравенство $(*)$ возникает при рассмотрении простейшего случая задачи, когда $n = 2$.

28. Пусть $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ — сечение, являющееся правильным шестиугольником. Продлим стороны T_6T_1 и T_3T_2 до пересечения в точке N (рис. 5).

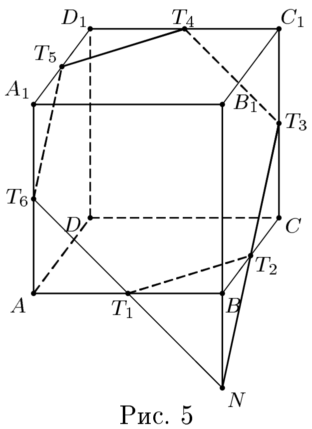


Рис. 5

Заметим, что точка N лежит на продолжении ребра B_1B, поскольку прямая B_1B является линией пересечения плоскостей граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1, в которых лежат пересекающиеся прямые T_6T_1 и T_3T_2. У прямоугольных треугольников T_1BN и T_2BN равные гипотенузы T_1N и T_2N (так как треугольник T_1T_2N — правильный) и общий катет BN. Отсюда $T_1B = T_2B$.

Итак, треугольник T_1BT_2 прямоугольный и равнобедренный. Такими же являются и треугольники $T_2CT_3, T_3C_1T_4$ и т. д.

Гипотенузы этих треугольников равны, поэтому равны и катеты. Стало быть, вершины правильного шестиугольника делят соответствующие рёбра пополам, а все рёбра параллелепипеда равны между собой. Это и требовалось доказать.

Эвнин Александр Юрьевич,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры прикладной математики
Южно-Уральского Государственного Университета.

Email: evnin@prima.susu.ac.ru

Правило Кеплера для вычисления объема бочки и формула Симпсона

Зигфрид Краутер

В статье рассказывается о так называемом правиле Кеплера, которое стимулировало открытие формулы Симпсона и было важным этапом на пути создания интегрального исчисления. Статья написана на основе лекции, прочитанной автором осенью 2007г. для студентов Института математики, информатики и физики Самарского государственного педагогического университета (ныне Самарская государственная социально-гуманитарная акдемия).

1. Введение

В первой части речь идет об объеме усеченной пирамиды с квадратным основанием. Наша цель здесь — формирование представлений о способах приближенного вычисления объема. Результатом рассмотрения этого простого специального случая явится правило Кеплера для вычисления объема бочки.

Является ли всякий шестигранник усеченной пирамидой?

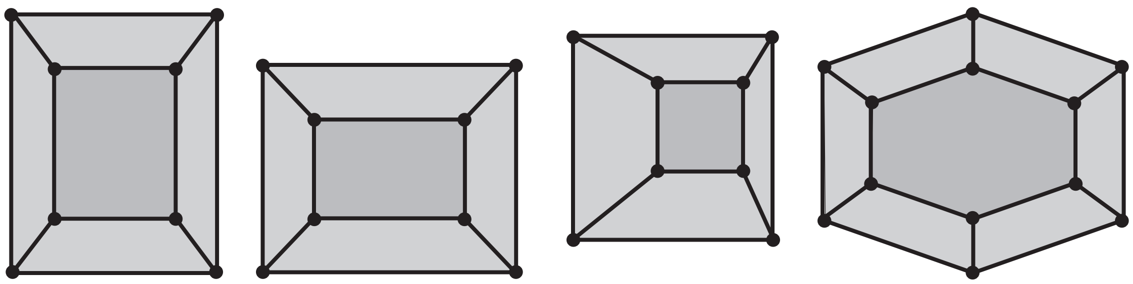
Прежде чем находить объем усеченной пирамиды, выясним, каким необходимым условиям должен удовлетворять шестигранник, чтобы он являлся усеченной четырехугольной пирамидой. Совершенно ясно, что верхнее и нижнее основания такого многогранника должны лежать в параллельных плоскостях.

Задание 1:

a) На горизонтальной плоскости находятся четыре тела. Вид каждого тела показан на рисунках. Какие рисунки соответствуют усеченной пирамиде, а какие нет?

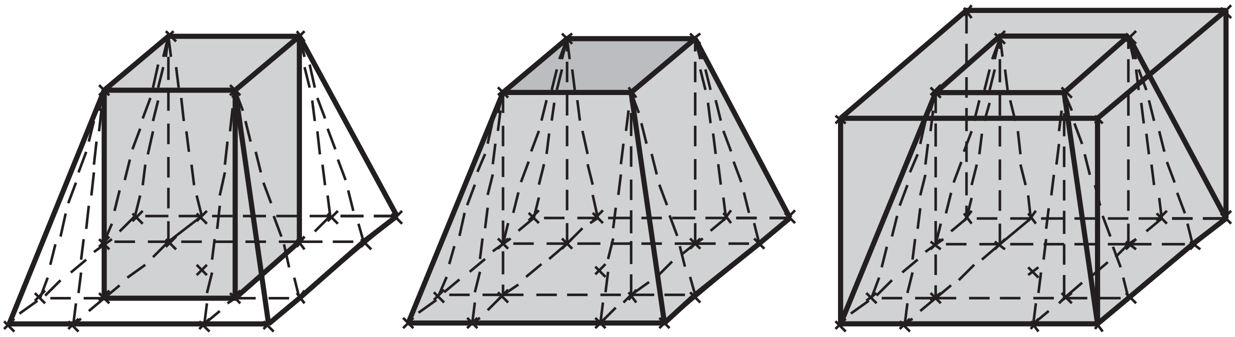
При каких условиях можно сделать вывод о том, что проекция тела на горизонтальную плоскость, похожая на проекцию пирамиды, действительно является проекцией усеченной пирамиды?

c) Усечением каких тел получаются другие тела, изображенные на рисунке? (Односкатные крыши, например, являются усечениями четырехскатных крыш).



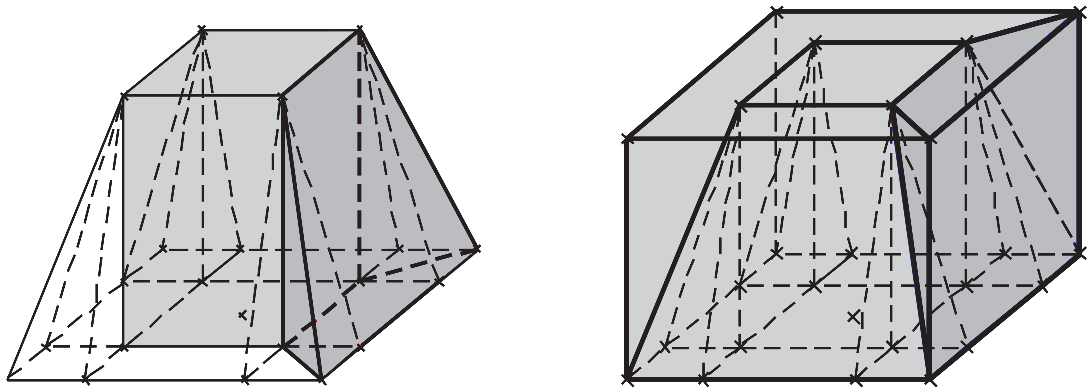
Приведем необходимое условие для изображения усеченной пирамиды: *изображения верхнего и нижнего оснований должны быть не только подобны друг другу, но должны также иметь центр гомотетии.*

Проведем элементарное эвристическое исследование следующего простого примера. Пусть параметры усеченной пирамиды с квадратным основанием таковы: a — длина стороны нижнего основания; b — длина стороны верхнего основания; h — высота пирамиды, G – площадь нижнего основания; D — площадь верхнего основания.



Вписанный параллелепипед Усеченная пирамида Описанный параллелепипед

• Сравнение объема усеченной пирамиды с объемами вписанного и описанного параллелепипедов



Очевидно, что объем вписанного параллелепипеда V_i меньше объема описанного параллелепипеда V_e.

Среднее арифметическое V_1 объемов этих двух параллелепипедов естественно принять за первое приближение к объему усеченной пирамиды.

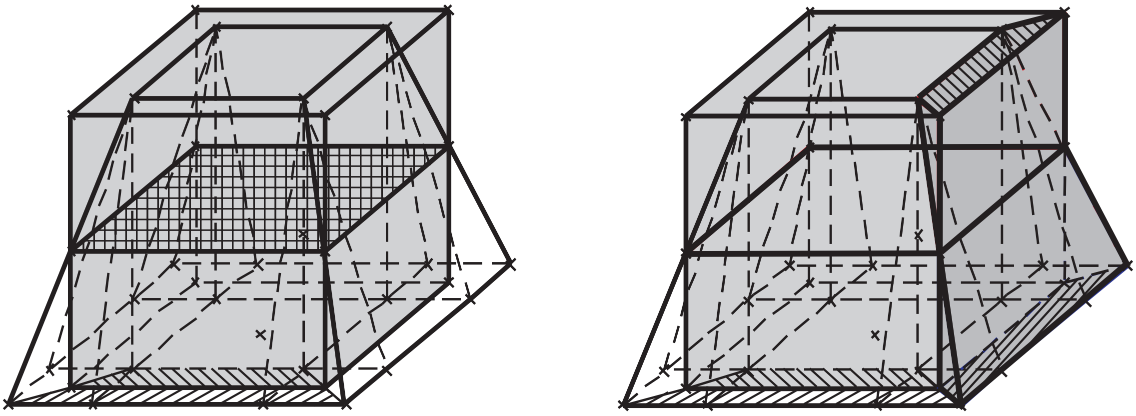
Покажем, что объем пирамиды V меньше, чем V_1. Для этого удобно использовать такое представление $V_1 = V_i + 0,5(V_e - V_i)$. Здесь второе слагаемое равно половине разности объемов двух параллелепипедов. Требуемое неравенство теперь легко усмотреть из чертежа. Разность описанного и вписанного параллелепипедов есть объединение четырех прямых призм, основаниями которых являются равнобедренные трапеции. Рассмотрим одну из этих призм. Боковая грань данной усеченной пирамиды делит эту призму на две неравные части, которые назовем клиньями. Один из этих клиньев дополняет вписанный параллелепипед до исходной пирамиды. Объем этого дополняющего клина меньше объема второго клина (так как у этих двух клиньев равные основания – равнобедренные трапеции, но разные длины параллельных им ребер – эти ребра совпадают со сторонами верхнего и нижнего оснований пирамиды). Отсюда следует, что $V < V_1$.

• Аппроксимация пирамиды параллелепипедом, основание которого совпадает с серединным поперечным сечением пирамиды

Вторым приближением к объему усеченной пирамиды является объем параллелепипеда, основание которого совпадает с серединным поперечным сечением пирамиды. Так назовем сечение, которое параллельно основаниям пирамиды и делит высоту пирамиды пополам. В сечении получается квадрат, сторона которого является средней линией боковой грани пирамиды и длина которой равна $m = \frac{a+b}{2}$.

Отсюда получаем второе приближение к объему усеченной пирамиды

$$V_2 = h\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = hM, \quad \text{где } M \text{ — площадь серединного поперечного сечения.}$$



Справедливо неравенство $M < \frac{G+D}{2}$ (поскольку $\frac{G+D}{2} - M = \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+B}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} > 0$).

Следовательно, $V_2 < V_1$ — второе приближение к величине V меньше первого.

Убедимся, что $V > V_2$. Для этого рассмотрим серединный параллелепипед и будем поворачивать его боковые грани вдоль горизонтальных осей симметрии до тех пор, пока они не совпадут с боковыми гранями исходной пирамиды. При этом поворачивающиеся грани будут отсекать от параллелепипеда и пристраивать к нему клинья с общим гребнем. Но при этом пристраиваемый к серединному параллелепипеду клин имеет больший объем, чем отсекаемый клин, ибо у этого пристраиваемого клина основание больше, чем у отсекаемого клина. Отсюда следует, что $V > V_2$.

Итак, получены два приближения к величине V объема пирамиды – с избытком и с недостатком, сверху и снизу: $V_2 < V < V_1$.

• Рассмотрение частных предельных случаев

Полученные нами оценки для объема усеченной пирамиды безусловно должны быть справедливыми и для всевозможных частных и предельных случаев. Рассмотрим два таких случая. Первый — когда в качестве усеченной пирамиды выступает параллелепипед, второй — когда в качестве усеченной пирамиды выступает конус. В первом случае $D = G$ — площади верхнего и нижнего основания равны, во втором случае $D = 0$, ибо верхнее основание вырождается в точку.

Первый предельный случай — случай параллелепипеда.

В этом случае $G = M = D$ и соответственно

$$V = V_1 = V_2 = Gh$$

В этом частном случае оба приближения V_1 и V_2 для объема Vсовпадают с точным значением объема V, и поэтому отсюда нельзя извлечь никаких оснований для оценки точности приближений в общем случае.

Второй предельный случай — случай конуса.

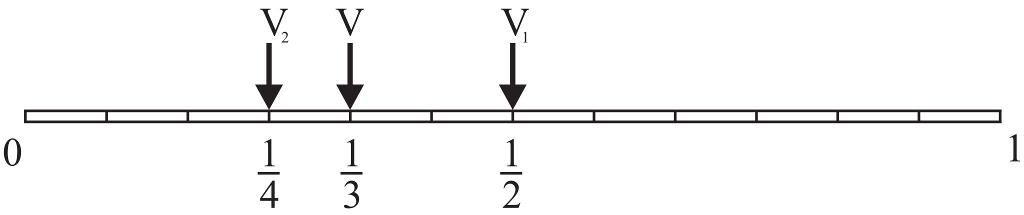
При этом $G = 4M$, $D = 0$ и

$$V = \frac{1}{3}Gh, \quad V_1 = \frac{1}{2}Gh, \quad V_2 = \frac{1}{4}Gh.$$

Здесь мы получаем такие отклонения приближений V_1 и V_2 от точного значения объема V:

$$V_1 - V = \frac{1}{6}Gh, \quad V - V_2 = \frac{1}{12}Gh.$$

Эти отклонения относятся как 2:1. Отношение величин трех объемов можно представить на числовой прямой:



Из уравнения $V_1 - V = 2(V - V_2)$ находим

$$V = \frac{V_1 + 2 \cdot V_2}{3}, \text{ или } V = \frac{h}{6}(G + 4M + D).$$

Удивительным образом эта формула дает точное значение объема усеченной пирамиды. Эта формула представляет известное правило Кеплера для вычисления объема бочки (Johannes Kepler, 1571—1630) и является частным случаем формулы Симпсона (Thomas Simpson, 1710—1761). Иоганн Кеплер открыл эту формулу, решая задачу вычисления объема винных бочек (Stereometria doliorum; Archimedische Messkunst; Linz 1613). Затем английский математик Симпсон применил правило Кеплера к заданной на отрезке функции несколько раз. В результате Симпсон получил формулу, которая теперь носит его имя. Эта формула относится к созданному Лейбницем и Ньютоном интегральному исчислению.

• Подтверждение результата в конкретном примере

Задание 2:

Дана правильная усеченная пирамида с квадратным основанием, в которой $a = 11$ см, $b = 5$ см, $h = 4$ см.

a) Найдите приближенные значения объема по формулам V_1 и V_2.

b) Найдите объем пирамиды V по правилу Кеплера.

c) Убедитесь в справедливости равенства $V_1 - V = 2(V - V_2)$.

[Контрольные данные: $V_1 = 292$ куб. см; $V_2 = 256$ куб. см; $V = 268$ куб. см.]

• Точное определение объема усеченной пирамиды

Остается открытым вопрос о том, всегда ли правило Кеплера вычисления объема бочки дает верное значение объема произвольного тела. Об этом будет сказано ниже.

Усеченная пирамиды получается дополнением вписанного параллелепипеда. С другой стороны такая пирамида получается из полной пирамиды отсечением верхней части. Отсюда получаются два способа вычисления объема усеченной пирамиды. Мы выбираем оба пути:

• Первый способ: дополнение к пирамиде

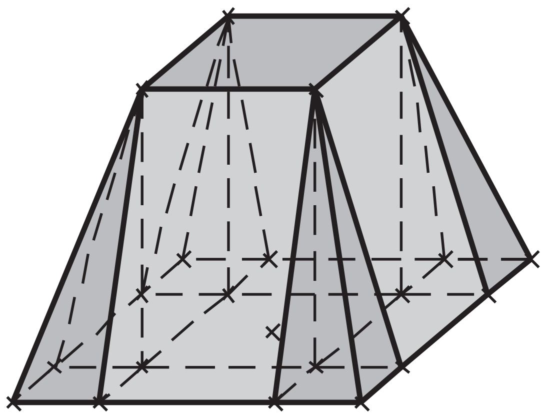
Дополним усеченную пирамиду до полной правильной четырехугольной пирамиды. Найдем высоту этой полной пирамиды. Рассмотрим сечение полной пирамиды плоскостью, проходящей через ее вершину и ось симметрии основания. Пусть H — высота пирамиды. Из подобия двух треугольников, получаемых в сечении, получаем уравнение $\frac{H-4}{5} = \frac{H}{11}$. Отсюда находим $H = \frac{22}{3}$ и $\frac{22}{3} - 4 = \frac{10}{3}$ — высоту отсекаемой пирамиды.

Объем усеченной пирамиды есть разность между объемом исходной пирамиды и объемом отсекаемой части:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (121 \cdot \frac{22}{3} - 25 \cdot \frac{10}{3}) = 268 \text{ куб. см}.$$

• Путь 2: разбиваем усеченную пирамиду на части, объемы которых можно вычислить.

Усеченная пирамида состоит из вписанного параллелепипеда, четырех примыкающих к его граням клиньев и четырех угловых четырехугольных пирамид.



Объем вписанного параллелепипеда равен $25 \cdot 4$ куб. см.

Объем четырех клиньев (клин в данном случае — это прямая треугольная призма), примыкающих к боковым граням параллелепипеда, равен $2 \cdot (3 \cdot 5 \cdot 4))$ куб. см

Объем четырех угловых пирамид равен $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4$ куб. см

Складывая, получаем значение объема усеченной пирамиды $V = 268$ куб. см.

Двумя способами мы получили верное значение объема усеченной пирамиды. Правило Кеплера вычисления объема бочки также дает верный результат.

• Применение правила Кеплера для вычисления объема произвольных тел.

Правило Кеплера диктует способ вычисления объема тела, два основания которого лежат на параллельных плоскостях. Примером такого тела является обычная бочка.

Объем тела $= \frac{высота}{6} \times$ (площадь нижнего основания $+ 4 \times$площадь среднего сечения $+$ площадь верхнего основания).

Попробуем применить это правило к шару. В этом предельном случае естественно считать, что каждое основание вырождается в точку с нулевой площадью, а высота тела равна диаметру шара. По формуле Кеплера получаем

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 4\pi r^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Удивительно, но мы получили точное значение объема шара! Этот пример укрепляет наше доверие к формуле Кеплера.

Теперь применим правило Кеплера с “лежащему” на горизонтальной плоскости цилиндру, радиус основания которого равен r и обычная высота равна h. При нашем рассмотрении верхнее и нижнее основания тела вырождаются в отрезок прямой с нулевой площадью, высота тела равна диаметру основания цилиндра, серединное поперечное сечение является прямоугольником, площадь которого равна $2rh$. Формула Кеплера приводит к величине

$$V = \frac{2r}{6}(0 + 4 \cdot 2rh + 0) = \frac{8}{3}r^2 h.$$

Это значение объема не совпадает с известным точным значением объема цилиндра $V_{цилиндр} = \pi r^2 h$. Формула Кеплера приводит к величине, которая примерно на 15% меньше истинной.

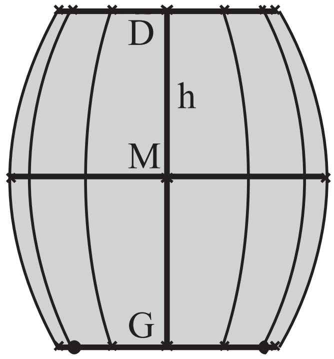
Возникает естественный вопрос: в каких еще случаях правило Кеплера и формула Кеплера дают точное значение объема тела?

Ответ таков. Пусть тело заключено между двумя параллельными плоскостями и x — расстояние между плоскостью нижнего основания и плоскостью поперечного сечения. Тогда площадь поперечного сечения S является функцией от x. Если эта функция $S(x)$ является квадратичной, то правило Кеплера приводит к точному значению объема тела.

Вернемся к шару. Для шара по теореме о произведении отрезков хорд, проходящих через одну точку, имеем $p^2 = x(2r - x)$, где p — радиус сечения шара. Следовательно, площадь поперечного сечения шара равна $S(x) = \pi p^2 = \pi x(2r - x)$ и является квадратичной функцией от x. Поэтому не случайно, что формула Кеплера дает верный результат.

С другой стороны, для лежачего цилиндра площадь поперечного сечения $S(x) = 2h \cdot \sqrt{x(2r - x)}$ не выражается квадратичной функцией, и поэтому формула Кеплера не гарантирует получение точного значения объема.

Применим правило бочки (правило Кеплера) для вычисления объема реальной бочки, основания которой и любое поперечное сечение являются кругами. Параметры бочки таковы: диаметр обоих оснований бочки равен $2r = 40$ см $= 4$ дм, диаметр круга серединного поперечного сечения равен $2R = 60$ см $= 6$ дм, высота бочки равна 100 см $= 10$ дм.



По правилу бочки находим приближенное значение объема:

$$V = \frac{10}{6}(4\pi + 4 \cdot 9\pi + 4\pi) = \frac{220\pi}{3} = 230,4 \text{ (куб. дм), или 230,4 литров.}$$

2. Правило Кеплера вычисления объема бочки и формула Симпсона

Рассмотрим правило Кеплера с позиций интегрального исчисления.

• Вычисление объема тела с известными поперечными сечениями

Пусть данное тело ограничено двумя параллельными друг другу плоскостями, расстояние между которыми равно h и которые содержат основания данного тела. Пусть известна площадь любого поперечного сечения этого тела $S(x)$, где x — расстояние от плоскости сечения до одного из оснований. Тогда ранее введенные величины G, M, D представляются так:

$S(0) = G$ — площадь поперечного сечения на высоте 0, то есть площадь нижнего основания,
$S\left(\frac{h}{2}\right) = M$ — площадь серединного поперечного сечения,
$S(h) = D$ — площадь верхнего основания тела.

Будем считать, что тело состоит из большого числа цилиндрических слоев, толщина которых равна Δx. Величина $\Delta V = S(x) \cdot \Delta x$ равна объему одного слоя. Стандартный для интегрального исчисления предельный переход при $\Delta x \to 0$ приводит к формуле объема тела — к интегралу от функции $S(x)$ по отрезку $0 \leq x \leq h$:

$$V = \int_0^h S(x)dx.$$

По этой формуле можно вычислить объем цилиндра, конуса, шара и многих других тел. Трудности бывают тогда, когда первообразная для функции $S(x)$ не выражается через элементарные функции. Иногда подобные интегралы называют "неберущимися". В таких случаях приходится обращаться к методам приближенных вычислений и приближать подынтегральную функцию $S(x)$ какими-либо известными интегрируемыми функциями. Один из простейших способов такой аппроксимации — приближение данной функции с помощью квадратичных функций. Эта идея лежит в основе правила Кеплера вычисления объема бочки и формулы Симпсона приближенного вычисления определенных интегралов.

• Приближенные вычисления при квадратичной интерполяции

Рассмотрим тело, например, бочку, площадь основания которого равна G, площадь верхнего основания равна D, высота равна h, площадь серединного поперечного сечения (сечения на высоте $\frac{h}{2}$) равна M.

Заменим неизвестную функцию площади поперечного $S(x)$ квадратичной функцией $p(x) = ax^2+bx+c$ с такими параметрами a, b, c, чтобы выполнялись три равенства: $p(0) = G$, $p\left(\frac{h}{2}\right) = M$, $p(h) = D$.

Задание 3:

Решите систему из трех указанных выше уравнений относительно неизвестных a, b, c и найдите выражение трех коэффициентов квадратичной функции через G, D, M, h .

Ответ. $a = \frac{2D+2G-4M}{h^2}$, $b = \frac{4M-D-3G}{h}$, $c = G$

Заменяя теперь под интегралом функцию $S(x)$ функцией $p(x)$, мы получим приближенное значение интеграла и тем самым приближенное значение объема рассматриваемого тела с известными площадями поперечных сечений:

$$\int\limits_0^h p(x)dx = \int\limits_0^h (ax^2 + bx + c)dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right)\Big|_{x=0}^{x=h} =$$

$$= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \frac{h(2D + 2G - 4M}{3} + \frac{h(4M - D - 3G)}{2} + hG = \quad \frac{h}{6}(G + 4M + D).$$

Итак, $V = \int\limits_0^h S(x)dx \approx \int\limits_0^h p(x)dx = \frac{h}{6}(G + 4M + D)$.

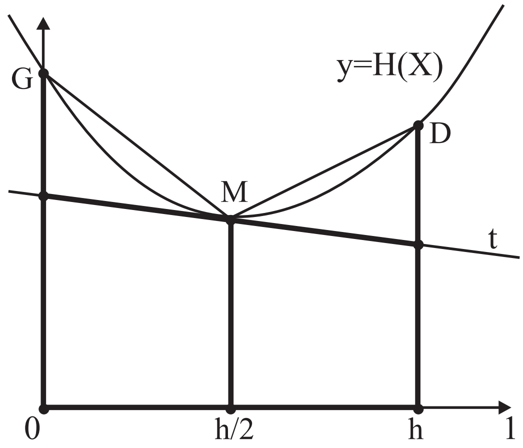
Это приближенное равенство хорошо известно. Для любой квадратичной функции $S(x)$ это равенство является точным.

В дальнейшем будет показано, что квадратичная интерполяция приводит к точному результату и в том случае, если функция $S(x)$ есть произвольный полином третьей степени.

• Описанные и вписанные трапеции

Кеплер и Симпсон получили свои элегантные формулы без применения методов интегрального исчисления. В своих рассуждениях они использовали более простые соображения, о которых пойдет речь далее. Для приближенного вычисления площади криволинейной трапеции рассмотрим три трапеции. Параллельные основания всех этих трех трапеций лежат на прямых, перпендикулярных оси Ox. Одна боковая сторона каждой трапеции лежит на оси Ox. Вторая боковая сторона большой (касательной) трапеции образована касательной к графику функции в точке с абсциссой$x = \frac{h}{2}$. Вторые боковые стороны каждой малой (хордовой) трапеции являются хордами графика функции.

Пусть по-прежнему известны значения функции $S(x)$ в трех точках: $S(0) = G$, $S\left(\frac{h}{2}\right) = M$, $S(h) = D$.



Сумма площадей двух хордовых трапеций равна $X = \frac{G+M}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{M+D}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{4}(G + 4M + D)$.

Площадь касательной трапеции K равна произведению ее средней линии M на высоту: $K = hM$.

Хордовые трапеции используют разбиение отрезка на две половины, естественно поэтому приписать им в два раза больший вес при аппроксимации площади трапеции: $V = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}K = \frac{2X+K}{3}$.

Заменяя здесь X и K их выражениями через G, M, D, h, получим формулу, выражающую правило Кеплера для вычисления объема бочки:

$$V = \frac{h}{6}(G + 4M + D).$$

• В каких случаях правило Кеплера вычисления объема бочки дает точный результат

На примере лежащего цилиндра мы обнаружили, что правило бочки не для любого тела дает точное значение объема. Только что рассмотренная квадратичная интерполяция показывает, что правило бочки дает точный результат для всех тел, площадь поперечного сечения которых $S(x)$ квадратичным образом зависит от x. Это относится, например, к усеченному конусу, у которого сечения являются подобными фигурами и их площади относятся как квадраты длин соответственных элементов.

Покажем теперь, что правило бочки дает точный результат не только для полиномов второй степени, но и для полиномов третьей степени

Пусть известны три значения данной функции $f(x)$: $f(0) = G$, $f\left(\frac{h}{2}\right) = M$, $f(h) = D$.

При интерполяции функции f квадратичной функцией $p(x) = ax^2 + bx + c$ получается (как было показано выше) такое значение интеграла

$$V = \int\limits_0^h (px)dx = \frac{h}{6}(G + 4M + D).$$

Для упрощения выкладок выполним замену координат и будем считать, что
для функции $f(x)$ известны три значения : $f(-H) = A$, $f(0) = 0$, $f(H) = B$.

Квадратичная интерполяция этой функции приводит к полиному $p(x) = \frac{(A+B)}{2H^2}x^2 + \frac{B-A}{2H}x$.

Интеграл $\int\limits_{-H}^{H} p(x)dx = \frac{H(A+B)}{3}$.

С учетом замены переменных (а именно переноса начала координат) имеем $A = G - M$, $B = D - M$. Выполняя эту замену, а именно прибавляя к интегралу площадь прямоугольника $2HM$и заменяя H на $\frac{h}{2}$, снова получаем значение объема равным $\frac{h}{6}(G - M + D - M) + hM = \frac{h}{6}(G + 4M + D)$, доставляемое формулой Кеплера.

Пусть теперь интерполяцию выполняет кубический полином третьей степени $k(x)$. Так как $k(0) = 0$, то $k(x) = rx^3 + sx^2 + tx$.

Три коэффициента этого полинома находятся из системы двух уравнений:

$$k(-H) = -rH^3 + sH^2 - tH = A, \;\; k(H) = rH^3 + sH^2 + tH = B.$$

Сложив два этих уравнения, найдем $s = \frac{A+B}{2H^2}$. Значения двух других коэффициентов при нечетных степенях аргумента x не важны, ибо значение интеграла

$$\int\limits_{-H}^{H} k(x)dx = \left(\frac{r}{4}x^4 + \frac{s}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\right)_{-H}^{H} = \frac{s}{3} \cdot 2 \cdot H^3 = \frac{H(A+B)}{3}$$

от этих коэффициентов не зависит.

Мы получаем, что два интеграла дают один и тот ж результат как для квадратичного, так и для кубического полинома, представляющих подынтегральную функцию.

Следовательно, квадратичная интерполяция, то есть вычисление объема тела по формуле Кеплера, приводит к точному результату и тогда, площадь поперечного сечения выражается целой рациональной функцией третьей степени.

• Формула Симпсона как обобщение правила Кеплера вычисления объема бочки

Формула Симпсона для приближенного вычисления интегралов $S = \int\limits_0^h f(x)dx$ получается из правила Кеплера следующим образом. Промежуток интегрирования $0 \leq x \leq h$ делится на $2n$ равных отрезков точками $x_k = \frac{h}{2n} \cdot k$ $(k = 0, 1, 2, ..., 2n)$. К каждому отрезку $[x_0; x_2]$, $[x_2; x_4]$, $[x_4; x_6]$, $\ldots$, $[x_{2n-2}; x_{2n}]$ применяется правило Кеплера для вычисления интеграла $S_{2k} = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx$ на промежутке $x_{2k-2} \leq x \leq x_{2k}$. При этом используются значения функции в точках деления $f(x_k) = y_k$. $S_{2k} = \frac{h}{6n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$. Складывая последние уравнения, получим

$$S \approx \frac{h}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Последнее равенство обычно называют формулой Симпсона.

Литература

[1] Ahbe, H. Die Simpson-Regel. In: PM 22; 1980; Heft 1; S. 9 – 17.

[2] Fricke, A. Volumenberechnung einer Klasse von Prismatoiden als Beispiel heuristischen Vorgehens. In: Winter H.; Wittmann E. C. (Hsg); Beiträge zur Mathematikdidaktik. Festschrift für Wilhelm Oehl. Schroedel 1976.

[3] Krauter, S. Erlebnis Elementargeometrie; München 2005.

Профессор Зигфрид Краутер,
Высшая педагогическая школа
г. Людвигсбург, Германия.

Siegfried.Krauter@t-online.de

Перевод с немецкого: С.В.Дворянинов.

О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции

С. В. Дворянинов, М. И. Сильванович

В статье рассматривается формула для производных высших порядков сложной функции, которая может быть использована в практике преподавания и изучения математического анализа в университетах.

1. Итальянский математик Фаа ди Бруно

Итальянский математик и священнослужитель родился 7 марта 1825 в Александрии; умер в Турине 26 марта 1888. По окончании курса в коллегии в Нови Лигуре Фаа ди Бруно поступил в Туринскую военную академию, из которой выпустился в 1846 году. Участвовал в войне 1848—1849 годов. Затем Фаа ди Бруно покинул армию, чтобы продолжить изучение математики, и отправился в Париж, где учился под руководством Коши и Леверье (выдающегося ученого и астронома, участвовавшего в открытии планеты Нептун). Получил в 1855 году степень доктора наук в Парижском Университете после представления им диссертации "Théorie de l'élimination, dévoleppement de la fonction perturbatrice d'une planète" (П., 1856). С 1860 года преподавал в Туринском университете, а в 1871, получив и там степень доктора и звание профессора, занял кафедру высшего анализа и высшей геометрии, но впоследствии читал только высший анализ.

Из немалого научного наследия итальянского математика обратим внимание на один его результат, относящийся к математическому анализу.

2. Формула ди Бруно в сборниках задач по анализу

Две задачи, связанные с формулой Фиа ди Бруно, без упоминания этого имени, имеются в задачнике [2].

Задача 1229 ([2]). Пусть функции $F(x)$ и $u(x)$ имеют n-е производные. Пусть $G(x) = F(u(x))$. Доказать, что

$$\frac{d^nG(x)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)F^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $c_k(x) \quad (k = 0,1,2,...,n)$ не зависят от функции $F(u)$.

Здесь решение получается последовательным применением правила дифференцирования сложной функции.

В следующей задаче 1230 ([2]) внутренней функцией является функция $u(x) = x^2$. Требуется доказать, что для n-й производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ справедлива формула

$$\frac{d^nG(x)}{dx^n} = (2x)^nF^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}F^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}F^{(n-2)}(x^2) + ...$$

Сравнивая правые части (1) и (2), можно увидеть значение коэффициентов $c_k(x)$ в этом частном случае формулы (1). Равенство (2) является частным случаем формулы Фаа ди Бруно.

3. Теорема Фаа ди Бруно

Теорема ([1]). Пусть функции $F(x)$ и $u(x)$ имеют n-е производные. Тогда для n-й производной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место следующая формула:

$$G^n(x) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+...} F^{(\alpha+\beta+\gamma+...)}(u) \cdot P_{\alpha+\beta+\gamma+...},$$

где

$$P_{\alpha+\beta+\gamma+...} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!...}\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta} \cdot \left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\gamma} .... \qquad (3)$$

Суммирование в правой части ведется по всем целым неотрицательным числам $\alpha, \beta, \gamma, ...$, удовлетворяющим равенствам $\alpha + 2\beta + 3\gamma + ... = n$.

Указанная выше задача 1229 доставляет первую часть доказательства формулы (3). Заметим, что в большинстве популярных учебником по математическому анализу формула (3) отсутствует. В издании учебника [1] 1999 года она появилась как теорема Валле-Пуссена. В последующих изданиях авторство теоремы было уточнено.

Можно предположить, что со временем формула (3) станет столь же популярной в практике преподавания математического анализа в университетах, как формула бинома Ньютона и формула Лейбница для высших производных произведения двух функция. В пользу этого выступает то обстоятельство, что использование этой формулы выступает хорошим средством формирования у студентов навыков комбинаторного мышления.

4. Примеры

Рассмотрим несколько примеров использования формулы (3).

Пример 1. Пусть $G(x) = e^{x^2}$, тогда $F(x) = e^x$, $u(x) = x^2$. Производные двух последних функций таковы:

$$F^{(n)}(x) = e^x \quad \text{при всех} \quad n, \quad u'(x) = 2x, \quad u''(x) = 2, \quad u^{(n)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 3.$$

Формула (3) для n-й производной функции $G(x)$ принимает вид:

$$G^{(n)}(x) = e^{x^2} \sum_{\alpha+2\beta=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{2!}\right)^{\beta} = e^{x^2} \sum_{\alpha+2\beta=n} \frac{n!}{\alpha!\beta!}(2x)^{\alpha}.$$

Рассмотрим последнее равенство при $n = 6$. Соответствующие пары целых неотрицательных чисел α и β находятся как решения уравнения

$$1 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 6.$$

Таких решений имеется четыре:

α		β	
$6 \cdot 1$	$+$	$0 \cdot 2$	$= 6,$
$4 \cdot 1$	$+$	$1 \cdot 2$	$= 6,$
$2 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 2$	$= 6,$
$0 \cdot 1$	$+$	$3 \cdot 2$	$= 6.$

Подставив в формулу для $G^{(6)}(x)$ найденные значения α и β, получим

$$G^{(6)}(x) = e^{x^2}\left[\frac{6!}{6!0!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^6 + \frac{6!}{4!1!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^4 + \frac{6!}{2!2!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^2 + \frac{6!}{0!3!}\right],$$

или

$$G^{(6)}(x) = e^{x^2}\left[64x^6 + 480x^4 + 720x^2 + 120\right].$$

Если $n = 8$, то соответствующее уравнение относительно $(\alpha;\beta)$ имеет пять решений:

$\alpha \cdot 1$	$+$	$2 \cdot \beta$	$= 8,$
$8 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 0$	$= 8,$
$6 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 1$	$= 8,$
$4 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 2$	$= 8,$
$2 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 3$	$= 8,$
$0 \cdot 1$	$+$	$2 \cdot 4$	$= 8.$

Соответственно находим, что производная $G^{(8)}(x)$ равна

$$G^{(8)}(x) = e^{x^2}\left[\frac{8!}{8!0!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^8 + \frac{8!}{6!1!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^6 + \frac{8!}{4!2!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^4 + \frac{8!}{2!3!}\left(\frac{2x}{1!}\right)^2 + \frac{8!}{0!4!}\right],$$

или

$$G^{(8)}(x) = e^{x^2}\left[256x^8 + 3584x^6 + 13440x^4 + 13440x^2 + 1680\right].$$

Пример 2. Пусть $G(x) = e^{\sin x}$. Здесь $F(x) = e^x$, $u(x) = \sin x$. В отличие от примера 1 производные внутренней функции теперь в ноль не обращаются:

$$F^{(n)}(x) = e^x, \quad u^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, n = 4k \\ \cos x, n = 4k+1 \\ -\sin x, n = 4k+2 \\ -\cos x, n = 4k+3. \end{cases}$$

Найдем 6-ю производную функции $G(x) = e^{\sin x}$, применив формулу (3). Здесь следует найти все наборы из шести целых неотрицательных чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \varepsilon$ таких, что

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + 5\varphi + 6\varepsilon = 6.$$

Все десять таких решений представлены в таблице:

	α	β	γ	δ	φ	ε
1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	2	0	0	1	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	3	0	1	0	0	0
7	0	3	0	0	0	0
8	2	2	0	0	0	0
9	4	1	0	0	0	0
10	6	0	0	0	0	0

Соответственно им по формуле (3) находим, что

$$G^{(6)}(x) = e^{\sin x}\left[\frac{6!}{1!0!0!0!0!0!}\left(\frac{-\sin x}{6!}\right) + \frac{6!}{1!0!0!0!1!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)\left(\frac{\cos x}{5!}\right) + \right.$$

$$+\frac{6!}{0!1!0!1!0!0!}\left(\frac{-\sin x}{2!}\right)\left(\frac{\sin x}{4!}\right) + \frac{6!}{2!0!0!1!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)^2\left(\frac{\sin x}{4!}\right) +$$

$$+\frac{6!}{1!1!1!0!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)\left(\frac{-\sin x}{2!}\right)\left(\frac{-\cos x}{3!}\right) + \frac{6!}{3!0!1!0!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)^3\left(\frac{-\cos x}{3!}\right) +$$

$$+\frac{6!}{0!3!0!0!0!0!}\left(\frac{-\sin x}{2!}\right)^3 + \frac{6!}{2!2!0!0!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)^2\left(\frac{-\sin x}{2!}\right)^2 +$$

$$\left.+\frac{6!}{4!1!0!0!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)^4\left(\frac{-\sin x}{2!}\right) + \frac{6!}{6!0!0!0!0!0!}\left(\frac{\cos x}{1!}\right)^6\right]$$

или

$$\begin{gathered} G^{(6)}(x) = e^{\sin x}\left[-\sin x + 16\cos^2 x - 15\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin x + \right. \\ +60\cos^2 x\sin x - 20\cos^4 x - 15\sin^3 x + 45\cos^2 x\sin^2 x - \\ \left. -15\cos^4 x\sin x + \cos^6 x\right]. \end{gathered} \tag{4}$$

Последнюю формулу можно переписать в виде

$$G^{(6)}(x) = e^{\sin x}\left[-15\sin^3 x + \left(45\cos^2 x - 15\right)\sin^2 x + \right.$$

$$\left.+\left(-15\cos^4 x + 75\cos^2 x - 1\right)\sin x + \cos^6 x - 20\cos^4 x + 16\cos^2 x\right].$$

Пример 3. Пусть $G(x) = \sin(\sin x)$. Тогда $F(x) = \sin x$, $u(x) = \sin x$.

Найдем, аналогично предыдущему примеру, 6-ю производную функции $G(x)$, применяя формулу (3) и промежуточные результаты, полученные в примере 2:

$$\begin{gathered} G^{(6)}(x) = -\sin x\cos(\sin x) - 16\cos^2 x\sin(\sin x) + 15\sin^2 x\sin(\sin x) - \\ -15\cos^2 x\sin x\cos(\sin x) - 60\cos^2 x\sin x\cos(\sin x) - 20\cos^4 x\sin(\sin x) + \\ +15\sin^3 x\cos(\sin x) + 45\cos^2 x\sin^2 x\sin(\sin x) - \\ -15\cos^4 x\sin x\cos(\sin x) - \cos^6 x\sin(\sin x). \end{gathered} \tag{5}$$

Заметим, что в равенствах (3) и (4) те множители, которые в формулах (1) и (3) обозначены как $c_k(x)$ и $P_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}$ соответственно, являются одинаковыми, то есть независящими от внешней функции!

В итоге

$$G^{(6)}(x) = \left(\left(45\cos^2 x + 15\right)\sin^2 x - \cos^6 x - 20\cos^4 x - 16\cos^2 x\right)\sin(\sin x) +$$

$$+\left(15\sin^3 x + \left(-15\cos^4 x - 75\cos^2 x - 1\right)\sin x\right)\cos(\sin x).$$

Литература

[1] Архипов. Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 5-е издание, исправленное. Изд. Московского университета, изд. "Дрофа", М., 2004.

[2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд. десятое. М., Наука, 1990.

[3] The Original Catholic Encyclopedia -
http://oce.catholic.com/index.php?title=Francesco_Faa_di_Bruno

[4] The MacTutor History of Mathematics archive -
http://www-history.mcs.st- and.ac.uk/~history/Biographies/Faa_di_Bruno.html

Дворянинов Сергей Владимирович,
к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики
Самарского государственного аэрокосмического
университета имени академика С. П. Королева
e-mail: dvoryan@yandex.ru

Сильванович Михаил Игоревич,
студент 2 курса
Самарского государственного аэрокосмического
университета имени академика С. П. Королева
e-mail: silvmike@yandex.ru

Законы понятного учебного текста

И. П. Костенко

Данная статья представляет собой уточненный и дополненный авторский вариант статьи "Педагогика учебной книги", опубликованной в журнале "Университетская книга", 2008, №3, с. 28-32. Тезисы "Педагогика учебной книги и ее экспертная оценка" части этой статьи содержатся в сборнике "Тезисы докладов 3-й международной конференции, посвященной 85-летию Л. Д. Кудрявцева". М.: МФТИ, 2008, с. 476-478.

"Учебная книга не роман, и если дурно составлена,
то сделает вреда не меньше чумы и холеры"
В. Г. Белинский

1. Проблема учебника

Общеизвестно, что современные учебники не используются в учебном процессе (в школе и вузе) и никем не читаются. Потому, что непонятны. Проблема эта возникла сразу после реформы-60 и стоит вот уже более четырех десятилетий. Выпускаются сотни учебных книг, снабженных министерскими грифами, а проблема стоит. Почему? Отчасти потому, что даже не озвучивается, а возможно, и не осознается ее причина. А причина проста и очевидна – она в низком педагогическом качестве современных учебных книг, а точнее, в его отсутствии.

Данная статья не претендует на решение проблемы, которая вообще неразрешима в современных условиях, что доказано жизнью. Цель статьи – напомнить простые, важные и хорошо забытые вещи. А именно, – разъяснить педагогические законы, которые должны направлять изложение в учебной книге, и показать характерные педагогические ошибки, которые возникают при нарушении этих законов. Законы эти всеобщи – для любой дисциплины и для любого читателя (от ребенка до специалиста). В данной статье они иллюстрируются на примере математики.

2. Противоречие между научным и педагогическим "уровнями" учебной книги

Цель учебного текста — передача читателю учебной информации в таком виде, чтобы он смог ее понять. Т.е. помощь читателю, облегчение понимания. Этот аспект наиболее труден при написании учебной книги и практически игнорируется при ее экспертной оценке.

Была ли когда-нибудь отвергнута учебная книга по причине ее недостаточного педагогического уровня, попросту, — из-за ее непонятности? Думаю, никогда. Шаблонный мотив официального отклонения учебных книг — недостаточный "научный уровень". Более того, под этим предлогом отвергаются как раз те редкие книги, которые стремятся облегчить читателю понимание, обращаясь к его образному мышлению, к интуиции. Интуитивные рассуждения всегда логически уязвимы и легко приходят в противоречие с "научным" требованием формальной "строгости" изложения.

Причина указанного противоречия не субъективная. Ведь нет эталона педагогически совершенной учебной книги, с которой можно было бы сравнивать. А эталон научного совершенства есть — это университетский курс. На этот эталон и ориентируются сегодня учебники, чуть ли не от начальной школы до высшей гуманитарной. Этот эталон формирует научную психологию авторов учебников и экспертов, закрепляя в их сознании штамп изложения, который непреодолимо мешает писать понятные, читаемые книги, а экспертам оценивать их педагогические качества.

Эталон "высокого теоретического уровня" обучения (принцип ВТУ) был внедрен в практическую педагогику в 60-х годах прошлого века реформой высшей и средней школы. И сразу резко понизил педагогический уровень обучения, а с ним и качество знаний обучаемых. Породил проблему учебника и сделал ее неразрешимой.

3. Законы понятного обучения

В кругах специалистов существует мнение, что педагогического эталона быть не может, поскольку "методика математики не наука, а искусство... рекомендации и принципы, лежащие в их основе, недоказуемы (??)" [1, с. 82]. Это мнение провоцируется, опять-таки, жестко зафиксированным в сознании специалиста штампом научного изложения. Интеллектуальные привычки практически непреодолимы. Штамп этот может быть ослаблен в результате долгого опыта преподавания, заинтересованного в результате. Но существенно изменить что-либо бывает поздно. Помочь могла бы педагогическая культура, своевременно сформированная у молодого специалиста. Но культуре у нас не учат, — она забыта. Давайте вспомним кое-что.

Преподавание, действительно, искусство, но методика — это сокровищница исторического, многовекового опыта преподавания, содержащая выверенные жизнью принципы и *законы*, доказуемые практикой, а не формальной логикой. Вот некоторые. Преподавание любого предмета должно быть постепенным и подробным, идти "от знакомого к незнакомому", "от конкретного к абстрактному", "от простого к сложному", точнее — через простое, элементарное к сложному, составному. Законами обучения, *сообразного человеческой природе*, являются единство теории и практики, абстрактного и конкретного, логики и интуиции, рационального и эмоционального, мысли и действия — это и законы познания. Понятным будет только генетическое изложение, которое показывает явление, понятие в развитии, чтобы учащийся видел, как оно возникает и почему приобретает тот или иной вид. Все эти законы должны соблюдаться в учебной книге.

Эти законы установлены в 1658 г. Я. А. Коменским в знаменитой "Opera didactica omnia" [2, с. 50-77]. Но они столь основательно нами забыты, что нужно заново учиться их понимать и учиться правильно их использовать.

Законы эти подтверждены и уточнены современной наукой. В 50-х гг XX в. физиология (Р. Сперри) открыла двуполушарную спецификацию человеческого мозга: правое полушарие перерабатывает, в основном, конкретно-образную информацию, левое — абстрактно-логическую, и они работают согласованно. Особенности функционирования полушарий и механизмы их согласования детально показаны в книге [3, с. 296-311], ориентированной, в частности, и на преподавателей. Один из выводов: "Путь от образного мышления к понятийному ведет от конкретного образа через формирование образов все более высокого уровня обобщения к образным схемам" [2, с. 308]. Вывод этот подтверждает, уточняет и обогащает классический закон "от конкретного к абстрактному" и закон наглядности обучения.

Другой, открытый в тех же 50-х годах психологами (Д. Миллер) закон "7 ± 2", — ограниченность объема кратковременной памяти (первичного восприятия) примерно семью несвязанными единицами информации [3, с. 96]. Убедиться в этом можно, пытаясь повторить записанный на листе беспорядочный ряд однозначных чисел, — для пяти чисел это сделать легко, дальше пойдут сбои. Чтобы запомнить большее количество чисел, необходимо время для выявления структуры, которой можно связать эти числа в новую, обобщенную единицу информации. Эта структура есть ни что иное, как смысл, который переводит информацию в долговременную память. Можно строго показать, что нарушение этого закона является причиной затруднений восприятия учащимся длинного доказательства математической теоремы. Я. А. Коменский формулировал приложение этого закона к педагогике так: "обучение юношества будет проходить легко, если... никто не будет обременен чрезмерным количеством подлежащего изучению материала... во всем будут двигаться вперед не спеша... " [2, с. 59].

Законы педагогики просты и естественны. Но их реализация в практическом обучении очень трудна. Попытаемся переформулировать и конкретизировать эти законы, применительно к педагогической задаче создания понимаемого учебного текста.

4. Приоритет Ученика

Самым общим, базовым законом обучения является следующий: правильное обучение это такое обучение, которое *сообразно* (!) *человеческой природе*. Оно должно идти “по стопам природы” (Я. А. Коменский [2, с. 59]. И, значит, должно приоритетно учитывать психологические возможности ученика, потребности его *личности*.

Этот закон направлял развитие отечественного образования на протяжении всего XIX века. Видный русский педагог П. Ф. Каптерев выразил в 1911 г. это гуманистическое качество Русской Школы так: общественное образование не есть “изучение предметов, а есть развитие личности предметами” [4, с. 11].

Но в начале XX в. в учебных руководствах для средней и высшей школы закон стал искажаться, — приоритет сдвинулся с ученика на науку. Причиной этого сдвига было бурное развитие естественных наук и рост общественной потребности в специалистах. В частности, наука математика стала приобретать почти совершенную логическую упорядоченность и завершенность. Это не могло не влиять на преподавание. Однако, русская педагогика не подчинялась этой тенденции и в лучших образцах своих учебников (А. П. Киселев, А. К. Власов, Н. Н. Лузин) еще долго, вплоть до конца 50-х годов XX в., сохраняла “установку на понимание” (Лузин). Я. А. Коменский формулировал эту установку так: “Правильно обучать... это значит — раскрывать (!) способность понимать вещи” [2, с. 68].

Современное обучение, ориентированное на науку и не учитывающее психологических (возрастных) особенностей ученика, не раскрывает, а наоборот, атрофирует присущую ему способность понимания. Абстрактное обучение по принципу ВТУ нарушает нормальное функционирование мозга учащегося, поскольку обращается только к одному его полушарию. В то время, как “мозг способен полностью раскрыть свои возможности лишь при функциональном взаимодействии обоих полушарий.” [5, с. 24]. На эту ошибку западных систем образования — перекос в сторону теории и формальной логики — давно указывали ученые — философы, физиологи, психологи [там же]: “Для повышения эффективности обучения целесообразно чаще обращаться к возможностям правого полушария ...” [3, с. 332]. Но ВТУ-специалисты, “пишущие” учебники, не слышат того, чего не хотят слышать.

Применительно к задаче понимаемого учебника, закон природосообразности можно сформулировать, как *приоритет Ученика перед Наукой*. В частности, если для облегчения понимания нужно пожертвовать какой-то долей логической формальной строгости, нужно жертвовать без сожалений. Надо понимать и признать, что это не приведет к ненаучности текста, если не нарушит научного *смысла*, который всегда можно разъяснить “не строго” и не формально, а интуитивно, образно, на примерах. И только так его и можно разъяснить, обращаясь к правому полушарию, ответственному за цельное, синтетическое, образное восприятие.

В связи с этим, полезно напомнить слова нашего классика, великого математика и великого педагога, академика Н. Н. Лузина, сказанные еще в 20-х годах XX века: многие так называемые “строгие” рассуждения “в смысле строгости немногого стоят и всегда могут быть заменены более интуитивными и *столь же научными*” [7, с. VI-VII].

5. Педагогическое структурирование

Понятным для учащегося будет только текст, *структурированный* на простые, *неперегруженные* учебные порции. *Последовательность* развертывания педагогической структуры должна направляться особенностями восприятия и ходом мысли учащегося, а не логикой дедуктивной научной системы. Это положение имеет основой психологический закон ограниченности кратковременной памяти и базовый закон сообразности обучения человеческой природе.

В частности, логика обучения, имеющего цель понятность и эффективность, обязана учитывать потребность учащегося быстро убедиться в полезности для него (!) преподносимых ему знаний (как часто мы, преподаватели, слышим: “а зачем нам это надо?”). Ему не нужны строго логические обоснования, если он понял суть. Вслед за этим ему нужны практические *действия*, приводящие к ощутимому полезному результату. Ему нужно личное *ощущение* (а не убеждающие слова преподавателя) действительной *полезности* для него новых знаний. Я. А. Коменский выразил это так: "обучение... будет проходить легко, если... все будет передаваться... для непосредственной пользы." [2, с. 59].

Однако, современные учебники математики для высшей школы абсолютно игнорируют психологию ученика и попросту копируют структуру университетского курса, лишь убирая некоторые сложные доказательства. Это грубейшая педагогическая ошибка, потому что строго логическая структура вступает в противоречие с психологическими законами восприятия и понимания новой информации. И противоречие это непреодолимо для новичка.

Задача понятного и задача строгого изложения математики — принципиально разные задачи. Цель научной систематики — связать научные факты в последовательную логически обоснованную систему. Цель педагогической системы иная — сделать научные факты *понятными* и убедительными для учащегося (а не для профессора математики). И решаются эти задачи разными методами: первая — по законам психологии, вторая — формальной логики; первая больше аппелирует к правому полушарию мозга (образы, интуиция), вторая — к левому. В педагогической системе формальная логика играет вспомогательную роль и решающее значение приобретают примеры, образы, аналогия, правдоподобные (Д. Пойа) рассуждения. "При изучении наук примеры важнее правил" (И. Ньютон).

Возникает вопрос: а как же, в таком случае, строить учебные курсы? Надо признать, что это очень трудная педагогическая задача. И я не хотел бы быть понятым так, будто знаю, как ее решать. Могу лишь поделиться некоторыми соображениями, касающимися вузовской учебной математической книги.

Как в современных учебниках математики строится раздел "Пределы"? Дается нивесть откуда взявшееся строгое определение предела и развертывается длинная цепочка логических выводов из него. Нужно ли это учащемуся? Давайте хотя бы попытаемся стать на его позицию и честно спросим себя: не вызывает ли такая схоластическая, абстрактная, навязываемая ему умственная пища попросту отвращение к математике? И признаемся, — ведь именно отвращение к математике мы все чаще всего и видим в конечном результате нашей педагогической деятельности.

Естественен следующий вопрос: а что же тогда нужно учащемуся? А то же самое, что было нужно ученым на заре возникновения дифференциального исчисления: *действия и польза*. После отработки смысла понятия предела учащемуся нужен *метод вычисления* пределов и *действия* с ними (вспомним законы познания – единство абстрактного и конкретного, единство мысли и действия). Логически обосновать метод можно позже, если вообще нужно. А пользу можно быстро показать хотя бы для правильного построения графиков функций вблизи точек разрыва (устранение ошибок, которые учащиеся делают, строя график "по точкам"). Дальнейшая польза будет еще более впечатляюще продемонстрирована при решении задачи о скорости, приводящей к понятию производной.

Теперь выстраивается совсем другая, отличная от строго логичной, ориентированной на науку, структура: 1. Примеры и смысл предельного перехода; 2. Определение (нестрогое, с примерами); 3. Методы вычисления, примеры; 4. Приложения, примеры; 5. Обоснование: а) строгое определение предела и пример его использования; б) строгое доказательство теоремы о пределе суммы; в) формулировка других теорем и их приложения.

Заметим, строгость не исключается, а отодвинута в конец, когда учащийся освоится с понятием. Трудности (осмысление понятия и обоснования его свойств) разделены. Необходимость строгого определения понятия может быть теперь мотивирована для ученика пользой открытия и обоснования *работающих* теорем (не всех, которые логически необходимы, а именно работающих в курсе). Наконец, каждая учебная порция посвящена одной, четко поставленной педагогической задаче, достижение которой может быть легко и объективно проконтролировано с помощью контрольных заданий.

Между прочим, вот что находим у Я. А. Коменского: "Все нужно изучать последовательно, сосредотачивая внимание в каждый данный момент только на чем-либо одном." [2, с. 76].

6. Единство абстрактного и конкретного

Это, в сущности, классический закон "*от конкретного к абстрактному*". В частности, этот закон должен строго соблюдаться при введении новых понятий. Начинать следует с разнообразных конкретных примеров, с "чувственного созерцания". Затем идет анализ — выявление общего в этих примерах, сначала на интуитивном, образном уровне, затем более точное. И, как результат длительной подготовки, появляется строгая формулировка.

Университетский курс руководствуется противоположным ("от абстрактного к конкретному") принципом дедуктивной подачи материала, по причине его системности, эталонной однозначности, доказательности, точности и экономности. Новые понятия при таком изложении спускаются "с потолка" в виде строгих определений и, в лучшем случае, "иллюстрируются" примерами.

Наверное, этот неправильный метод очень удобен обучающим, поскольку и в давние времена Я. А. Коменский сетовал, что "школы... дают правила абстрактно и только затем их разъясняют приводимыми примерами, хотя свет должен предшествовать тому, что освещается" [2, с. 50]. А в не столь давнее время великий А. Пуанкаре отмечал ту же ошибку и предупреждал, что "не достаточно высказать определение, необходимо его подготовить и необходимо его оправдать" [7, с. 361].

Замечательно, что Я. А. Коменский понимал необходимость и обратного хода "от более общего к более частному" [2, с. 59]. Некоторые современные ВТУ-методисты хотят видеть в этом оправдание научно-дедуктивного изложения. Но здесь совсем другой смысл. Вдумайтесь: "Неправильно будет преподавать науки с самого начала во всех подробностях, вместо того, чтобы предпосылать им сперва общий очерк... " [2, с. 54]. "Идея... (которая является ни чем иным, как извлечением, охватывающим в самом общем виде все части предмета) всегда должна запечатлеться в уме учащегося ранее, чем приступят к частному его рассмотрению. В таком случае учащийся уже в самом начале хорошо может обозревать как цель и пределы предмета, так и внутреннее расположение его частей" [2, с. 67]. Т. е. имеется в виду, что каждую тему, каждый раздел и фрагмент обучения следует начинать с общего взгляда, с поверхностного, но цельного, обобщенного представления всей картины, с организующей идеи.

Эти древние чудесно выраженные мысли подтверждаются и уточняются современной наукой, установившей, что общий взгляд может быть сформирован только правым полушарием: "Целостность восприятия, обеспечиваемая правым полушарием, позволяет одномоментно усмотреть не только элементы изучаемого материала, но и их взаимосвязи, т. е. понять общую структуру предмета. Усвоение общей структуры облегчает нахождение места в ней каждому новому факту" [3, с. 334].

Более того, физиологи поняли диалектический механизм взаимодействия полушарий, который определяет взаимодействие конкретного и абстрактного и подтверждает, что обучение должно идти "от конкретного": "в правом полушарии производится обработка первичной информации... Первичные образы (!) могут быть затем преобразованы левым полушарием в символы, а их отношения при дальнейшей формализации — в логические конструкции. Эти конструкции отчасти могут быть вновь наглядно представлены в правом полушарии и т. д." [3, с. 336]. И что же? Все эти научные факты не известны современным методистам и авторам учебников? Или вытесняются из сознания под влиянием сидящего там дедуктивного университетского штампа?

Наша тема слишком обширна для журнальной статьи. Нужно было бы поговорить о подробности изложения. Степень подробности определяется элементами, знакомыми и понятными ученику ("от знакомого к незнакомому"). В книгах эти элементы обычно подменяются другими, обобщенными элементами, привычными автору. Нужно было бы обсудить принцип образности (наглядности) и методы его современного осуществления. Но остановимся еще только на одном важнейшем педагогическим элементе учебной книги.

7. Язык

Я. А. Коменский обращает наше внимание на тонкую особенность языка учебной книги: “Каждая наука должна быть заключена в самые сжатые, но точные правила. Каждое правило нужно излагать немногими (!), но самыми ясными, сжатыми (!) словами” [2, 64]. Это еще один ценный нам совет из прошлого. Здесь предвосхищен понятый современной психологией механизм “свертывания информации”, который происходит в процессе ее переработки мозгом. Это и механизм прочного запоминания — экономного упаковывания точных и сжатых выводов в долговременной памяти.

Язык книги отчетливо проявляет культуру и степень добросовестности автора, а также его нацеленность — на читателя, или на науку, или на себя. Язык — первый показатель педагогического качества книги. Если книга легко читается, значит, она написана простым, грамотным и точным языком. Таковы учебники А. П. Киселева. Приведу один пример Киселевского определения понятия.

“Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q, рис. 26), исходящими из одной прямой (AB), называется двугранным углом” (А. П. Киселев, Н. А. Рыбкин. Геометрия (стереометрия) 10-11. Дрофа. 1995. С. 21.).

Оценим педагогическое совершенство этого определения. Весь смысл заключен, в сущности, в пяти (!) словах. Слова эти сразу связываются в сознании ученика со зрительным образом, абсолютно правильным в научном отношении. Образ *запечатлевает* понятие в сознании ученика и в его памяти. Точность, сжатость, простота! И замечательно соответствие правильному взаимодействию полушарий, которое было еще не известно во времена Киселева!

А теперь сравните Киселевское определение с аналогичным определением из современного, действующего много лет учебника: “Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими (?) одной плоскости” (Л. С. Атанасян и др. Геометрия 10-11. М.: Просвещение. 1993. С. 50).

Не возникло ли у вас ощущения, что вы двигались по ухабам и застряли в яме? “Фигура, образованная прямой” (?!), “границей, не принадлежащими” (!?). После этого вы легко сможете себе представить, какие ощущения возникают у юного ученика, и к каким последствиям они ведут. Вот по таким учебникам в течение сорока лет руководители нашего образования заставляют учиться миллионы детей.

Атанасяну, наверное, не понравилось у Киселева слово “исходящими”, как не научное, и он заменил его псевдонаучной бессмыслицей. Таков всегда результат ориентации ВТУ-авторов на Науку в ущерб Ученику.

А вот пример из высшей школы, позволяющий сравнить языковую культуру учителя дореволюционной русской гимназии и советского академика.

“Всякое осуществление (?) определенных условий и действий, при которых (?) наблюдается изучаемое случайное явление, будем называть опытом. ... Любая качественная характеристика (?) результата опыта называется событием” (В. С. Пугачев. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука. 1968. С. 14).

Можно ли представить себе рецензию современного эксперта по качеству, в которой было бы написано, например, так: “книга не может быть рекомендована в качестве учебной потому, что написана безграмотным языком”?

8. Что делать?

Вопрос, который часто задают управленцы, и ответ на который им не нужен.

Вопрос предполагает, что существует решение, которое может быстро исправить ситуацию, и которое только надо найти. Предположение ошибочое. Во-первых, решения, которые, действительно, могли бы что-то изменить, не желательны и даже опасны для наших управленцев, их тактика — создавать видимость прогрессивной активности и намечать “меры”, которые ничего не исправляют, а часто ухудшают. Во-вторых, в наших условиях решение проблемы качества учебников просто не существует. Это доказано жизнью, — с 1960-х гг., когда были изгнаны из средней и высшей школы прекрасные учебники А. П. Киселева и Н. Н. Лузина, в течение сорока лет проблема не решена.

Проблема решается только талантливым педагогом в течение всей его педагогической жизни (А. П. Киселев). И только при условии настоящей заинтересованности общества и управленцев в ее решении. Более того, решается даже не одним, а несколькими поколениями лучших педагогов, каждое из которых опирается на достижения предыдущих. Киселев венчает этот титанический труд. На подобный труд не способны современные дипломированные методисты, да он и невозможен в наших непрерывно изменяемых условиях.

Известно, что частные проблемы невозможно решить, не разрешив прежде общие. А главная общая проблема, все-таки в другом, — в самой системе управления нашим образованием. Начиная с реформ 60-х годов XX в., она планомерно трансформировалась так, чтобы исключить возможность объективной оценки качества функционирования любого элемента системы. И сегодня в этом свойстве она достигла совершенства.

В частности, политика "процентомании", введенная для сокрытия результатов реформы в 70-х годах прошлого века при министре М. А. Прокофьеве, заменила объективный контроль качества знаний школьников (министерские фронтальные контрольные работы) процентами успеваемости, нарисованными учителями школ под нажимом руководства. То же самое было сделано в высшей школе. Тем самым, заблокирован главный критерий педагогического качества учебника — качество знаний, которое он обеспечивает. Экспертная оценка не может заменить этот единственно верный критерий. Более того, она субъективно искажает истину и закрепляет ложные тенденции.

В некоторых "развивающихся" странах критерием, на основе которого принимается решение о запуске учебника в жизнь, является успеваемость учащихся. Если в результате использования учебника она повышается, то он, очевидно, полезен. Если же нет, то зачем он нужен? [8]. Организовать подобную объективную процедуру оценки качества учебника не очень трудно и вполне по силам управленцам. Но им это совсем не нужно.

Литература

[1] Кудрявцев Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1977.

[2] Коменский Я. А., Локк Д., Руссо Ж. Ж., Песталоцци И. Г. Педагогическое наследие. М.: Педагогика, 1989.

[3] Грановская Р. М. Элементы практической психологии. Л.: ЛГУ, 1988.

[4] Педагогика, 1993, №4.

[5] Оттосон Д. Новое в исследованиях мозга // Курьер ЮНЕСКО, 1986, №12.

[6] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.

[7] Грэнвиль Э. Элементы дифференциального и интегрального исчислений. Ч. 1. Л.: ГИ, 1924.

[8] Перспективы. Вопросы образования. 1984, №3.

Костенко Игорь Петрович,
кандидат физико-математических наук,
доцент Ростовского государственного
университета путей сообщения
(филиал в г. Краснодаре).

Email: kost@kubannet.ru

Результаты в PISA[1] и школьная математика в Финляндии: слабые и сильные стороны, будущее

Дж. Малати

Автор анализирует ход развития школьного математического образования в Финляндии в последние годы, итогом которого явилось современное состояние. Последнее характеризуется относительно высокими результатами тестирования по программе PISA и одновременно низким уровнем выступлений в Международной Математической Олимпиаде.

Успех Финляндии в реализации программы PISA определяется рядом сильных сторон, среди которых — тщательное изучение учащимися трудностей школьной программы, а также рядом изменений, направленных на соответствие международным тенденциям. Наряду с сильными сторонами имеются различные недостатки, не позволяющие достичь аналогичного успеха в Международной Математической Олимпиаде (далее IMO - International Mathematics Olympiad), а также поставлять студентов соответствующего уровня для университетов и политехнических институтов. Новый шаг развития — разработка более сбалансированной программы — начался в 1995 году, а в 2004 г. с этой целью Национальное Правление по образованию опубликовало новую "Базисную Программу".

1. Введение

В прошлой и современной истории финский народ встречался с разными проблемами, борясь как за выживание, так и за различные достижения. Время от времени Финляндия достигала успехов, некоторые из них довольно удивительные. К такому типу успехов относится успех в PISA. Удивление вызывается, в частности, тем, что Финляндия не имеет больших достижений на IMO. Со времени первого участия в 1965 году Финляндия имела только скромные результаты, лучшие выступления — в 1981, 1982 и 1983гг. Самый лучший результат был в 1982г., когда Финляндия заняла 8-е место из 30 стран. В самой Финляндии среди математиков, а также в более широких кругах принято считать, что это объясняется слабым уровнем школьной и студенческой математики.

В 2005г., на конференции "Teaching mathematics: beyond the PISA survey" ("Обучение математике: за пределами обзора PISA"), организованной Математическими Обществами Франции и Финляндии, я сделал доклад "Какие причины определяют успех Финляндии в PISA?". Через год французский журнал Gazette des Mathématiciens опубликовал мою статью с тем же названием (Malaty 2006). Та же статья была опубликована в конце 2006г. Датским Математическим Обществом в специальном выпуске своего журнала Matilde под названием "Математика в Финляндии". По договоренности между Математическими Обществами Дании и Финляндии эта статья шла первой, с двумя комментариями. Оба комментария были написаны известными финскими математиками, первый был подписан 207 математиками (Astela, et. al 2006, Kivelä 2006). Несомненно, оба комментария представляют факты о слабом уровне финской школьной математики, однако эти факты не противоречат другим, представленным мною фактам о том, на чем основан успех Финляндии в PISA.

http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M29/Matilde29.pdf

[1]PISA (Programme for International Student Assessment) — Международная программа оценки образовательных достижений учащихся. Является проектом Организации экономического сотрудничества и развития (OECD) и направлена на выявление политически значимых индикаторов знаний и умений 15-летних учащихся. — *Прим. ред.*

2. Между успехами и проблемами

С одной стороны, успех в PISA вполне заслуженный, а с другой стороны, мы действительно имеем серьезные проблемы в школьной математике.

2.1. Как это можно объяснить?

Тесты PISA измеряют математическую грамотность. Задания тестов относятся к математике повседневной жизни и включают такие задачи, для решения которых не требуется изучать математику как структуру. В Финляндии хорошо известно, что мы не имели бы успеха в PISA, если бы задания были направлены на понимание математических понятий и соотношений. Наибольшая трудность для наших студентов — построить доказательство. Это объяснимо, поскольку школьная математика не имеет дела с математикой как структурой. В упомянутом выше комментарии, подписанном 207 финскими математиками, авторы приводят факты падения уровня математических знаний студентов университетов и политехнических институтов (Astela, et. al 2006).

2.2. Изменения программы и PISA

До 1967г. финская школьная программа была традиционной; учащиеся на школьном уровне занимались каждую неделю алгеброй и геометрией, при этом и по алгебре, и по геометрии были отдельные учебники. Таким образом преподавание строилось около 100 лет. С 1967г. в школьной программе Финляндии происходили различные изменения. Четыре основные направления перемен следующие: "Новая математика", особенно с 1970 по 1980, "Возврат к основам" (1980-1985), "Решение задач" (1985-1990), а также "Математика повседневной жизни" (1990-1995). Эти направления до сих пор оказывают влияние на школьную математику в Финляндии, особенно "Математика повседневной жизни", и это влияние привело к возможности успеха в PISA.

2.3. Почему обеспечивается PISA, но не IMO?

Для достижения успеха в IMO необходимо вести работу с одаренными учениками, что не характерно для Финляндии. С другой стороны, в течение более 100 лет предоставлялось всеобщее образование на определенных принципах равенства. Эта тенденция усилилась в 1970г. с введением единого обязательного общего среднего образования (классы 1-9). Это так называемое "базовое образование".

Закон о базовом образовании 1998г. поясняет, что базовое образование должно обеспечивать каждого ребенка знаниями и навыками, необходимыми для повседневной жизни. Он также подчеркивает принцип равенства детей при обучении. Это равенство имеет для финского общества особое значение, что повлияло на уровень школьной математики и, соответственно, на результаты в PISA и IMO. С одной стороны, математические программы и учебники рассчитаны не более чем на средний уровень учащихся, с другой стороны, в каждом классе учителя стараются вовремя распознать моменты отставания учащихся и предложить соответствующую помощь; для этой цели есть "специальные учителя". Чтобы обеспечить эту возможность, число учащихся в классе сравнительно невелико. В большинстве классов от 15 до 25 учащихся. Таким образом, сочетание перемен в школьном образовании, особенно таких как "Назад к основам" и "Математика повседневной жизни", а также принципы закона о базовом образовании, относящиеся к содержанию и равенству при обучении, оказалось подходящей основой для успеха в PISA, но не для успеха в олимпиаде. Обратим также внимание на тот факт, что время, отведенное на обучение математике в Финляндии, является одним из наименьших в мире (UNESCO 1986). В настоящий момент у нас 31 учебный час в неделю (час — 45 минут) на 9 классов общеобразовательной школы. Это дает в среднем 2,6 часа в неделю на каждый класс (здесь час — 60 минут). Такое малое количество часов хорошо соответствует целям Закона о базовом образовании 1998г., где образование отвечает потребностям повседневной жизни, а принцип равенства относится также к распределению школьных предметов. С таким малым количеством часов трудно добиться успеха в олимпиаде, но вполне возможно в PISA, с его ограниченными целями проверки математической грамотности. Ниже приводится цитата из Закона о базовом образовании 628/1998:

“Поддерживать развитие учащихся в направлении гуманности, чтобы они становились этически ответственными членами общества, обеспечивать их знаниями и навыками, необходимыми в жизни... Закон способствует равенству в обществе, а также равенству способности учащихся получать образование и другими способами развивать себя в течение своей жизни...”

Заметим, что во время движения “Новая математика” время, посвященное преподаванию математики в школах, было гораздо больше. Не только в результате международного, в частности, скандинавского влияния, но и благодаря финскому менталитету сопротивления возникающим проблемам. Это помогает понять, почему был достигнут упомянутый успех на математической Олимпиаде. Это был успех учащихся, которые начали свое школьное обучение в годы 1969, 1970 и 1971.

3. Каковы причины успеха Финляндии в PISA?

Упомянутые выше изменения школьной математики, происходившие в Финляндии, происходили также в других странах. Почему же они повлияли в Финляндии больше, чем в других местах, на результаты в PISA? Одна из существенных причин — упомянутая выше забота об отстающих учащихся. Влияние этой работы ясно сказалось на результатах в PISA, без заботы об учащихся с затруднениями в обучении мы не заняли бы первого места в PISA в 2003г. Однако не только эта забота помогла занять первое место. Можно выделить 6 основных причин: 1) успешная предпрофессиональная подготовка учителей; 2) профессиональная культура учителя; 3) успешная повышение квалификации учителей; 4) разнообразные усилия, направленные на развитие математического образования; 5) традиции повседневной школьной жизни в Финляндии; 6) непрерывность труда учителя. Я не буду подробно останавливаться на всех этих причинах, поскольку первые пять обсуждались в вышеуказанных статьях (Malaty 2006, 2008). Я кратко расскажу о достоинствах предпрофессиональной подготовки учителей, а также о шестой причине. О достоинствах и недостатках подготовки учителей в Финляндии у меня есть две статьи: 2004 и 2008 года. Первая была отредактирована для Национального Правления Финляндии по образованию:

http://www.oph.fi/info/finlandinpisastudies/conference2005/malaty.doc.

В подготовке учителей имеются три сильные стороны: а) поддержание высокого уровня квалификации в системе образования учителей; б) возможность набирать мотивированных студентов; в) обеспечение учительской практики в школах практики при университетах. Непрерывность учительского труда имеет две сильные стороны: а) выбор профессии учителя на всю жизнь; б) редкая перемена школы. Каждый учитель должен получить степень магистра. Это степень магистра образования для учителей начальной школы (классы 1-6) и “специальных учителей” (классы 1-9), а также степень магистра наук для учителей средней школы (классы 7-12).

Профессия учителя одна из наиболее популярных среди абитуриентов университетов, особенно профессия учителя начальной школы, на которую мы можем набирать хорошо мотивированных студентов. Если на специальность учителя математики средней школы число поступающих примерно равно числу мест, то конкурс на специальность учителя начальной школы 5-8 человек на место. Не поступившие обычно снова поступают еще один или несколько раз в последующие годы. Важно отметить, что у нас практически нет проблемы ухода учителей. Те, кто выбирает профессию учителя, выбирают ее на всю жизнь. Одна из причин этой сильной стороны образования — возможность набрать хорошо мотивированных студентов. Надо отметить тот факт, что интерес молодежи к профессии учителя начальной школы не определяется высоким жалованием. Жалование не слишком низкое, но и не достаточно высокое, чтобы служить основной мотивацией. Решающим является эмоциональный фактор. Финская молодежь с большой теплотой вспоминает время, проведенное в начальной школе, особенно в первых двух классах. В эти годы школьный день часто оканчивается трогательным прощанием детей с учителем. Поэтому небольшое число мест учителей начальной подготовки очень популярно среди студентов специальности “учитель начальной школы”. Также поэтому учителя начальной школы редко меняют место работы, что дает возможность реализовать свои профессиональные планы.

Учительская практика в школах практики при университетах обеспечивает идеальную среду, где с одной стороны каждый практикант может получить помощь и руководства от специалиста по математическому образованию в том объеме, который требуется, а с другой стороны для него доступны все возможности университета, включая университетскую библиотеку. В Финляндии школы практики учителей обычно расположены в университетском городке близко к факультету подготовки учителей, на котором специалисты по математическому образованию являются также тьюторами практики учителя.

4. Изменения в школьной математике и оппозиция

Финские математики, включая Неванлинну (Nevanlinna 1966) были против перемен, предложенных направлением “Новая математика”. Против движения “Назад к основам” сначала не было подобной оппозиции. Однако, когда окончилось влияние “Новой математики”, уровень студентов университетов и технических вузов привел к недовольству всех математиков школьными изменениями.

Большинство специалистов по математическому образованию участвовали в реформаторской деятельности. Одной из ведущих фигур в реформах 1980-х и 1990-х годов был Erkki Pehkonen. В 1990, в совместной работе с Bernd Zimmermann из Германии, Pehkonen объявил, что школьная математика не является математикой в собственном смысле, но общеобразовательным предметом, который только называется математикой (Pehkonen and Zimmermann 1990, 10).

Несмотря на определенную трудность выдвигать другой взгляд в качестве специалиста по математическому образованию, я придерживался точки зрения, больше ориентированной на математиков. Я придерживался мнения, что устный счет, технические навыки, решение задач, а также математика повседневной жизни могут занимать определенное место в школьной математике, но этого недостаточно. Одна из причин в том, что все эти разделы не могут обеспечить базу для высшего образования в университетах и технических вузах. Кроме того, это привело бы в конце концов к серьезному отрицательному влиянию на развитие математической культуры, а также науки и технологий. Другая причина в том, что каждому ребенку требуется формальный опыт для вхождения в фазу формального оперирования по Пиаже. Поскольку другие формальные предметы, например, логика, не изучаются в школе в возрасте развития формального мышления, математика остается единственным предметом, который дает возможность каждому ребенку развивать его формальное мышление. Напомним также об очевидном взаимопереплетении культурных и индивидуальных интересов. Интересы культуры требуют, чтобы существовали индивидуумы, способные получать высшее образование.

5. Обучение арифметике и проблемы в обучении алгебре

Математики университетов и технических вузов уверены, что сегодняшние студенты слабо знают как алгебру, так и геометрию. (Astela, et. al 2006, 9). Во времена традиционного расписания, до начала движения “Новая математика” геометрия была основным способом развития формального мышления учащихся. Сегодня это не так и мы имеем разные проблемы при обучении геометрии. Что касается развития формального мышления, сегодняшнее обучение геометрии даже влияет на него отрицательно. Рассмотрим более подробно только некоторые аспекты обучения арифметике и их отношения к нашим проблемам обучения алгебре.

При обучении алгебре мы сталкиваемся с серьезными проблемами с начала 1980-х годов. Основной момент здесь — отсутствие систематического изучения и даже применения на интуитивном уровне свойств операций сложения и умножения, особенно свойств ассоциативности и дистрибутивности. Это произошло в соответствии с одним из требований реформы, чтобы программа “Назад к основам” отличалась от программы “Новой математики”. Требование было убрать все, что относилось к эпохе “Новой математики”. А из традиционной программы в качестве основы новой программы вернули только навыки, особенно арифметические. Целью было ответить на критику, что “Новая математика” ухудшила арифметические навыки детей. Способом достичь этой цели было — дать правила и тренировать детей в их использовании для получения правильных ответов.

Сначала дети тренируются при обучении арифметике, но потом это становится также способом изучения алгебры и геометрии. При обучении сложению, вычитанию и умножении чисел в курсе арифметики дети пишут в тетрадях в клетку и приучаются записывать числа одно под другим. В случае сложения дети обучаются складывать также более двух чисел тем же способом, при этом знак “+” пишется только один раз перед последним слагаемым, а не между каждыми двумя слагаемыми. После получения суммы, разности или произведения дети должны записать ответ в специальной строке или даже в рамке, перед которой стоит значок “V:” “V” — сокращение слова “Vastaus”, т.е. “Ответ”. Аналогичные процедуры применяются при обучении “длинному делению”.

При обучении математике, даже при решении текстовых задач или рисовании геометрических фигур, используются только тетради в клетку. Поэтому в тестах для начальной школы после каждой текстовой задачи часть бумаги разлинована в клетку. В некоторых случаях дети получают ноль за решение текстовой задачи, потому что они не смогли записать решение в пределах клетчатой области. Часто возникает ситуация, что большинство учащихся класса получает низкие оценки за текстовые задачи, но если посмотреть их тетради, мы увидим, что они могли решать аналогичные задачи. Причина в том, что они могли самостоятельно потренироваться по учебнику после обсуждения примера в классе. В 1980 и 1990-е годы я присутствовал более чем на 2000 уроках математики. Интересно отметить, что если в классе был иностранный ученик, то часто он мог решить текстовую задачу, и в некоторых случаях быстрее, чем финские ученики. Причина экономии времени в том, что он бросал нечитаемый текст, находил числа и выполнял действия аналогично разобранному примеру.

Из вышесказанного мы видим, что в начальной школе (классы 1-6) использование знака равенства “=” было заменено использованием знака “V” для обозначения ответа. Это значит, что знак равенства потерял свое значение. Кроме того, обычно в учебниках справа от знака равенства нарисованы квадратики. Число этих квадратиков равно числу цифр в требуемом ответе. Это значит, что знак равенства утратил также и свою роль. Не осталось места для записи равных выражений и использования транзитивности равенства. Таким образом, начальная школа не создает необходимой основы для изучения алгебры.

В начальной школе начинается и другая проблема изучения алгебры. Вместо использования ассоциативности сложения и умножения, а также дистрибутивности умножения относительно сложения учебники, начиная с 3 класса, предлагают так называемое правило или соглашение о порядке действий. Оно называется в учебниках “Порядок вычислений”. Это правило такое же, как в простых калькуляторах, и приводится в следующей форме: сначала вычисляйте внутри скобок, затем умножайте и делите, затем скалдывайте и вычитайте слева направо. Ученики начальной школы, т.е. до 13 лет, тренируются в применении этого правила. Это приводит к хронической проблеме, которая встречается даже у студентов университетов. Чтобы продемонстрировать ее, рассмотрим следующий пример: упростить $9 + (1 + 5)$. В течении 20 лет я даю этот пример студентам специальности “учитель начальной школы”. Каждый год не более 5% могут использовать свойство ассоциативности, более 50% применяют правило “сначала вычислить в скобках”, остальные сначала убирают скобки, потом складывают слева направо. Аналогичные результаты показывают студенты-математики, а также учителя при повышении квалификации. Во всех этих случаях видна и другая проблема — трудности правильной записи математического текста.

Отметим, что использование правила “порядок действий” продолжается до конца средней школы. Спросим, как ученики могут упростить выражение вроде $2x+3y+3x+y$, если они должны “складывать слева направо”, как учились. Учебник, содержащий этот пример для учеников 7 класса (14 лет), использует следующий трюк. Сначала рассматриваются примеры: 2 яблока + 3 яблока = 5 яблок, 2 кг + 3 кг = 5 кг, 2 м + 3 м = 5 м; затем добавляется утверждение $2x+3x=5x$, и наконец выражение $2x+3y+3x+y$, причем нарисованы яблоки для демонстрации коэффициента x и бананы для демонстрации коэффициента y. (Jaakola et. al 1995, 103-104). Этот трюк помогает упрощать подобные выражения, причем алгебра рассматривается как “исчисление букв”. Учебник предлагает ученикам понимать, что x — это как яблоки, килограммы или метры, чтобы избежать противоречия с “порядком действий”, при котором настоящая действительная природа x забыта. Отсутствие изучение свойств ассоциативности и дистрибутивности превратило изучение алгебры в изучение “механической арифметики”. Если забыть вышеописанный трюк, в алгебре ученики в основном обучаются подстановке данных чисел вместо букв и снова применяют “порядок действий” для получения правильных ответов.

6. Будущее школьной математики в Финляндии

В Финляндии предпринимались различные попытки развития математического образования (Malaty 2006, 2008). Результатом можно считать изменения в сторону более сбалансированной программы, начиная с 1995г. С одной стороны, мы нацелены на закрепление успехов в обеспечении потребностей повседневной жизни, но с другой стороны мы стремимся к построению математики как структуры. Мы добились определенных успехов в обучении математике в старших классах средней школы (классы 10-12), а также в начальной школе, особенно в 1-2 классах. Путь достижения нашей цели долгий, а процесс довольно медленный. Подразделение, требующее большего внимания, — это средние классы (7-9). Наиболее положительный момент в этом отношении тот, что Национальное Правление по образованию в 2004г. опубликовало новую базисную программу, в которую существенными элементами входят “математическое мышление” и “структура математики”. Наши сильные стороны в работе по преодолению трудностей учащимися помогли добиться хороших результатов, в частности, успеха в PISA. Эти сильные стороны могут стать также основой для освоения математики как структуры, а также для помощи в развитии одаренных учащихся.

Литература

1. Astela, et. al 2006, The PISA survey tells only a partial truth of Finnish Children’s Mathematical Skills, *Matilde*, 29, p.9.

2. Jaakola et. al 1995, *Kolmio*, Kirjayhtymä, Helsinki [учебник].

3. Kivelä 2006, Severe Shortcomings in Finnish Mathematics Skills, *Matilde*, 29, p.10.

4. Malaty, G. 2006, What are the Reasons Behind the Success of Finland in PISA? *Gazette des Mathématiciens*, 108, pp. 59-66.

5. Malaty, G. 2008, Mathematics Teacher training in Finland, *International Comparative Study in Mathematics Teacher*, CfTB Publications, pp.16-18.

6. Nevanlinna, R. 1966, Reform in Teaching Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 73, pp.451-464.

7. Pehkonen, E. and Zimmermann, B. 1990, Probleemakentät matematiikan opetuksessa ja niiden yhteys opetuksen ja oppilaiden motivaation kehittämiseen, osa 1, Tutkimuksia 86, Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto, Helsinki.

8. UNESCO 1986, *The Place of Science and Technology in School Curricula: A Global Survey.*

Джордж Малати,
профессор университета Йоенсуу, Финляндия.

Email: george.malaty@joensuu.fi

Перевод с английского: В.М.Имайкин.

А не самые ли почтенные имена — “Ум” и “Разумение”? Платон об образовании

Составитель А. В. Жуков

Подборка актуальных и в наши дни высказываний великого философа о науках, в частности, о математике.

Пролегомены[1] от составителя

Читая сочинения Платона [1], я неожиданно поймал себя на мысли, что отдельные высказывания древнегреческого классика я уже где-то встречал, – конечно же, в современной научно-методической и популярной литературе; естественно, – в несколько ином изложении. Сравните:

Что же? Приходилось ли тебе наблюдать, как люди с природными способностями к счету бывают восприимчивы, можно сказать, ко всем наукам?

Платон, Государство, кн. VII, 526 в[2]

Если одну и ту же проблему поставить перед представителями различных профессий, в чем-то необычную, нестандартную или незнакомую им всем, то математик с ней справится лучше.

Гуго Штейнгауз (1887-1972)

Никакое орудие только от того, что оно очутилось в чьих-либо руках, никого не сделает сразу мастером или атлетом и будет бесполезно, если человек не умеет с ним обращаться и недостаточно упражнялся.

Платон, Государство, кн. II, 374 d

Невозможно освоить ремесло, изучая каталоги и посещая выставки инструментов, но не беря этих инструментов в руки. Точно так же, нельзя изучать математику, будучи пассивным наблюдателем... Так же, как наличие инструментов не делает человека ремесленником, накопленные знания не делают его математиком. Гораздо важнее умение их использовать. Именно поэтому так важно решать задачи.

Альберто П. Кальдерон (1920-1998)

Удовольствия от наук не смешаны с печалью.

Платон, Филеб, 52 в

Когда мир сходит с ума, математик может найти несравненное успокаивающее средство в математике. Из всех искусств и наук математика – наиболее чистая и наиболее абстрактная, и математик из всех людей должен быть тем самым, кто легче всего может найти убежище там, где по словам Бертрана Рассела “по крайней мере один из наших благородных импульсов может наилучшим образом найти себе приют и спасение от унылого плена реального мира”.

Г. Харди, Апология математика

[1] Сжатые изложения. — *Прим. ред.*

[2] Ссылки на цитаты из произведений Платона даются согласно общепринятой пагинации древнегреческих текстов. Переводы выполнены А.Н. Егуновым, Н.В. Самсоновым, С.П. Маркишем, С.Я. Шейман-Топштейн.

Сочинения Платона служат благодатным источником огромного множества других "живых" мыслей, не утративших своей актуальности и в наши дни. В этом может убедить небольшая подборка цитат из его работ, приведенная ниже. Я составлял ее, исходя из субъективных предпочтений, поэтому она ни в коей мере не отображает всю полноту научно-методических проблем, отраженных в произведениях великого философа всех времен.

Упражняться же, чего бы это ни касалось, гораздо легче бывает в малых вещах, чем в большом.

Политик, 286 b

Как говорят каменщики, большие камни не ложатся хорошо без малых.

Законы, X, 902 e

Доводы, доказывающие свою правоту через правдоподобие, – это пустохвалы, и если не быть настороже, они обманут тебя самым жестоким образом. Так случается и в геометрии, и во всем прочем.

Федон, 92 d

Какая бесконечная разница существует между человеком причастным к геометрии и непричастным...

Государство, VII, 527 c

После плоскостей мы взялись за твердые тела, находящиеся в круговращении, а надо бы раньше изучить их самих по себе – ведь правильнее было бы после второго измерения рассмотреть третье: оно касается измерения кубов и всего того, что имеет глубину... С изучением науки об измерении глубины дело обстоит до смешного плохо... Нет такого государства, где наука эта была бы в почете, а исследуют ее слабо, так как она трудна.

Государство, VII, 528 b, d

Большая глупость думать, будто все это не суть необходимые познания для человека, собирающегося обучиться хоть чему-нибудь из самых прекрасных наук.

Законы, VII, 818 d

Знаток языка при встрече с человеком, считающим себя сведущим в гармонии только потому, что он умеет настраивать струну то выше, то ниже, не скажет грубо: "Бедняга, ты, видно, рехнулся", – но, напротив, скажет очень мягко, как подобает человеку, причастному к музыке: "Уважаемый, конечно, и это необходимо уметь тому, кто собирается заняться гармонией; но это не исключает того, что человек в твоем положении нимало не смыслит в гармонии: у тебя есть необходимые предварительные сведения по гармонии, но самой гармонии ты не знаешь".

Федр, 268 e

Борьбой надо заниматься ради войны, но не следует изучать ратное дело ради борьбы.

Законы, VI, 814 d

Питай своих детей науками не насильно, а играючи, чтобы ты лучше мог наблюдать природные наклонности каждого.

Государство, VII, 537 a

Если тело насильно заставляют преодолевать трудности, оно от этого не делается хуже, но насильственно внедренное в душу знание непрочно.

Государство, VII, 536 e

Усталость и сон — враги наук.

Государство, VII, 537 b

Я говорю по поводу белизны, что, будучи чистой, она, даже если ее мало, превосходит, благодаря этому истинному своему свойству, большую массу нечистой белизны. Так вот... мы смотрим теперь не на пользу и громкую славу знаний, а на то, присуща ли нашей душе способность любить истину и все делать ради нее.

Филеб, 58 d

В науках очищается и вновь оживает некое орудие души каждого человека, которое другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более ценно, чем иметь тысячу глаз.

Государство, VII, 527 e

А не самые ли почтенные имена — "ум" и "разумение"?

Филеб, 59 d

Литература

[1] Платон, Сочинения, тт. 1,2, 3(1), 3(2), М.: Мысль, 1968-1972.

Жуков Александр Владимирович,
кандидат технических наук,
преподаватель Российской
Открытой Академии Транспорта.

Email: izyaslav@gmail.com

Учебное пособие в журнале

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Продолжаем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержатся темы 2, 3. Тема 1 опубликована в предыдущем номере журнала.

Тема 2

Базис и координаты

5. Линейная зависимость векторов

Продолжим развитие идей, изложенных в предыдущей лекции и связанных с понятием вектора как элемента линейного пространства.

Естественно перейти от рассмотрения свойств одного вектора к изучению свойств группы векторов.

Рассмотрим совокупность векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ из линейного пространства V. Все совокупности векторов можно разделить на две группы: в первой один вектор можно линейно выразить через другие, а во второй ни один вектор выразить через другие нельзя. От того, к какой группе принадлежит та или иная совокупность векторов, зависят ее свойства. Например, векторы из первой группы можно использовать для создания «основы» или, говоря научным языком, *базиса*, через который будут выражаться остальные векторы пространства V.

5.1. Определение. *Линейной комбинацией* элементов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ векторного пространства V с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ называется выражение вида

$$\lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mathbf{u}_i.$$

5.2. Определение. Векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ линейного пространства V называются *линейно зависимыми,* если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *одновременно не равные нулю*, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равна нулю.

В противном случае векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ называются *линейно независимыми.*

Обратите внимание на требование к коэффициентам λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ в определении линейной зависимости векторов: они *не должны равняться нулю одновременно.* Дело в том, что если *все* коэффициенты в линейной комбинации равны 0, то и сама комбинация нулевая (или, говоря научным языком, *тривиальная*)

$$0 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \qquad (2.1)$$

Поскольку этому тождеству удовлетворяет любой набор векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, то никакого условия, определяющего зависимость между $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, не возникает.

В определении же линейной независимости линейная комбинация может равняться нулю *только* когда все коэффициенты нулевые.

Обратим внимание, что в формуле (2.1) знаки $\mathbf{0}$, стоящие после знака равенства (как после первого, так и после второго), означают нулевые элементы векторного пространства V, а это не всегда 0 из множества действительных чисел.

Любое определение становится более понятным после исследования каких-нибудь примеров. Перейдем к их рассмотрению.

5.3. Линейная зависимость одного вектора. Если $n = 1$, т. е. рассматривается один вектор $\mathbf{u}$, то он будет линейно зависим только в том случае, если он нулевой. Действительно, если вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, то равенство

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

возможно только при $\lambda = 0$, что означает линейную независимость совокупности векторов, состоящей из одного вектора $\mathbf{u}$. Напоминаем, что по определению линейной независимости векторов их линейная комбинация тривиальна только тогда, когда *все* коэффициенты равны нулю! А мы из равенства $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ получили, что единственный коэффициент $\lambda = 0$!

5.4. Линейная зависимость системы с нулевым вектором. Если система векторов содержит нулевой вектор, то эта система линейно зависима.

Доказательство. Допустим среди векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ есть нулевой, например, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Для доказательства линейной зависимости нам достаточно предъявить *нетривиальную* линейную комбинацию этих векторов (не все коэффициенты нулевые), равную нулю. Например,

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{u}_n = 1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = 1 \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Иными словами, мы взяли $\lambda_1 = 1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$. Так как $\lambda_1 \neq 0$, то комбинация нетривиальная. Поэтому система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ линейно зависима. □

5.5. Теорема (о линейной зависимости векторов, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных). Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству теоремы, отметим следующее. Когда в формулировке теорем встречается фраза «(выполняется A) тогда и только тогда, когда (выполняется B)», то это означает, что необходимо доказать, что из «выполнения A» следует «выполнение B» и, наоборот, при «выполнении B» «выполняется A».

Доказательство. 1) Пусть система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ линейно зависима, т. е. согласно определению линейной зависимости 5.2 существует линейная комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

в которой хотя бы одно число, например, λ_i не равно нулю.

Так как $\lambda_i \neq 0$, то из (2.2) можно выразить $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{u}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\mathbf{u}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\mathbf{u}_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\mathbf{u}_n.$$

Таким образом, доказано, что в линейно зависимой системе векторов хотя бы один является линейной комбинацией остальных.

2) Пусть, например, вектор $\mathbf{u}_1$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{u}_1 = \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n,$$

тогда справедливо равенство

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 - \lambda_2 \mathbf{u}_2 - \dots - \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

что доказывает линейную зависимость векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Действительно, мы предъявили линейную комбинацию этих векторов, в которой $\lambda_1 = 1 \neq 0$! □

С точки зрения математической логики, если из A следует B, и из B следует A, то это означает, что понятия A и B *эквивалентны*, т. е. описывают одно и то же, но разными словами. Поэтому доказанное утверждение позволяет ввести другое определение линейной зависимости векторов, равносильное определению 5.2.

Векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ линейного пространства V называются *линейно зависимыми,* если хотя бы один из векторов является линейной комбинацией остальных.

5.6. Линейная зависимость системы векторов, содержащей зависимую подсистему. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, в которой есть линейно зависимая подсистема. Перенумеровав, если нужно, векторы, мы можем считать, что первые k векторов линейно зависимы. Значит, найдется линейная комбинация, равная нулю:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \tag{2.3}$$

в которой не все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ нулевые (можете для простоты рассуждений считать $\lambda_1 \neq 0$).

Теперь нам нужно найти нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю, для всей системы векторов. Сделаем это, добив к равенству (2.3) нулевые слагаемые:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{u}_k + 0 \cdot \mathbf{u}_{k+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Очевидно, что равенство сохранится, т. е. у нас есть линейная комбинация равная нулю. Но с другой стороны, $\lambda_1 \neq 0$. Значит, в ней не все коэффициенты нулевые. Поэтому исходная система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ тоже линейно зависима (согласно определению 5.2). □

Подытожим полученные результаты.

Система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ из векторного пространства V может быть линейно зависимой или линейно независимой.

Если система линейно независима, то ни один вектор этой системы нельзя выразить через остальные, векторы не зависят друг от друга. Среди векторов линейно независимой системы отсутствует нулевой вектор.

Если же система линейно зависима, то какой-либо вектор этой системы можно выразить через остальные, т. е. один вектор «зависит» от других. Более того, при добавлении к линейно зависимой системе любого числа векторов она остается линейно зависимой.

Рассмотрим случай, когда система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ линейно независима, а при добавлении вектора $\mathbf{u}_{n+1}$ становится линейно зависимой.

5.7. Теорема. Если линейно независимая система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ становится линейно зависимой после добавления к ней вектора $\mathbf{u}_{n+1}$, то вектор $\mathbf{u}_{n+1}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.

Доказательство. По условию система $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}$ линейно зависима. Значит, существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n + \lambda_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

Если $\lambda_{n+1} \neq 0$, то мы можем выразить вектор $\mathbf{u}_{n+1}$ через остальные:

$$\mathbf{u}_{n+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \mathbf{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \mathbf{u}_n,$$

что докажет требуемое утверждение.

Таким образом, нам достаточно убедиться, что $\lambda_{n+1} \neq 0$. Допустим, это не так и $\lambda_{n+1} = 0$, тогда соотношение (2.4) принимает вид:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n + 0\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}.$$

Но векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ линейно независимы, поэтому равенство

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

возможно, только когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Следовательно, все коэффициенты в (2.4) нулевые, что противоречит предположению о линейной зависимости системы $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$. Значит, предположение о $\lambda_{n+1} = 0$ ложно и утверждение доказано. □

6. Коллинеарные векторы

6.1. Теорема. Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейного пространства V линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. найдется число λ (коэффициент пропорциональности), для которого $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 5.5 в частном случае, когда $n = 2$. Из нее следует, что система из двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов (для определенности будем считать, что это вектор $\mathbf{u}$) является линейной комбинацией остальных, т. е. $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$. □

Пропорциональные векторы в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ (т. е. пространстве направленных отрезков) имеют специальное название: *коллинеарные* векторы, несмотря на то, что определение коллинеарности звучит несколько иначе.

6.2. Определение. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются *коллинеарными*[1], если $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \overrightarrow{b}$ (т. е. если они сонаправлены или противоположно направлены).

Докажем, что коллинеарные векторы пропорциональны.

6.3. Теорема. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. найдется число λ, для которого $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$.

Доказательство. 1) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны, тогда $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ или $\overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \overrightarrow{b}$. В каждом из этих случаев соответствующие геометрические реализации этих векторов лежат на одной или параллельных прямых.

Рассмотрим случай, когда $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. По определению умножения вектора на число векторы $\overrightarrow{a}$ и $\lambda \overrightarrow{a}$ коллинеарны. Возьмем λ такое, чтобы $|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, причем $\lambda \geqslant 0$, если $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ и $\lambda < 0$ если $\overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \overrightarrow{b}$. Тогда $|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda||\overrightarrow{a}| = \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$. Если $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$, $\lambda > 0$, тогда $\lambda \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{a}$, поэтому $\lambda \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$. Если $\overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \overrightarrow{b}$, $\lambda < 0$, тогда $\lambda \overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \overrightarrow{a}$, поэтому $\lambda \overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$. Так как геометрические реализации векторов $\lambda \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, длины их равны, то эти векторы равны: $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$, т. е. векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ пропорциональны.

Если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, то из равенства $\overrightarrow{a} = 0 \cdot \overrightarrow{b}$ также следует, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ пропорциональны.

2) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ пропорциональны, т. е. найдется число λ, для которого $\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a}$. Тогда по определению умножения вектора на число при $\lambda \geqslant 0$ $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, а при $\lambda < 0$ $\overrightarrow{a} \downarrow\uparrow \lambda \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, или согласно определению 6.2 векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны. □

[1] Слово «коллинеарные» вопреки современной традиции написано все-таки правильно. Этимология слова проста: то, что относится к одной линии. Фактически должно было бы писаться как «колинерные».

6.4. Следствие. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство. Согласно теореме 6.1 векторы пропорциональны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, а согласно доказанной теореме 6.3 это возможно тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны. Поэтому векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. □

Очевидно, что из следствия 6.4 непосредственно вытекает, что два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.

7. Компланарные векторы

Следующий по сложности случай системы векторов — это три вектора. Хотелось бы получить какой-то ясный критерий линейной зависимости трех векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$. Начнем с определения.

7.1. Определение. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ называются *компланарными*[2], если их геометрические реализации параллельны одной плоскости.

Оказывается, компланарность — это и есть необходимое и достаточное условие линейной зависимости трех векторов.

Обратите внимание! Если два вектора из трех (например, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$) коллинеарны, то вся тройка линейно зависима и компланарна. Сформулируем и докажем это утверждение в виде теоремы.

7.2. Теорема (о компланарных векторах). Три вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство. 1) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы. Тогда согласно теореме 5.5 (при $n = 3$) хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных. Пусть для определенности таким вектором будет $\overrightarrow{c}$ (для других векторов рассуждения проводятся аналогично), тогда

$$\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ в виде направленных отрезков $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ соответственно (рис. 2.1). Обозначим через π плоскость, в которой лежат прямые (OA) и (OB).

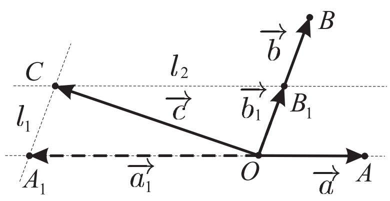


Рис. 2.1. Теорема о компланарных векторах

Так как согласно определению умножения вектора на число направленный отрезок $\lambda_1\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1}$ лежит на прямой (OA), то он лежит в плоскости π. Аналогично, направленный отрезок $\lambda_2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1}$ также лежит в плоскости π. Складывая направленные отрезки $\lambda_1\overrightarrow{OA}$ и $\lambda_2\overrightarrow{OB}$ по правилу параллелограмма, получаем направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$, также лежащий в плоскости π. С другой стороны, согласно формуле (2.6) $\overrightarrow{OC}$ является геометрической реализацией вектора $\overrightarrow{c}$. Таким образом, геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ лежат в одной плоскости π, поэтому по определению компланарности 7.1 векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны.

2) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны. Если хотя бы два из них коллинеарны, то по теореме 5.6 и следствию 6.4 векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы. Рассмотрим случай, когда в системе векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ нет коллинеарных. Пусть геометрическими реализациями векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ являются направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Через точку C проведем прямые l_1 и

[2]Здесь опять проявляются особенности устаревшего русского языка. Компланарность означает отношение к одной плоскости, и должно писаться как «копланарность».

l_2, параллельные прямым (OB) и (OA) соответственно (см. рис. 2.1). Обозначим через A_1 и B_1 точки пересечения прямых l_1 и l_2 соответственно с прямыми (OA) и (OB). Из параллелограмма OA_1CB_1 получаем:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}. \tag{2.7}$$

Направленные отрезки $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA}$ являются геометрическими реализациями коллинеарных векторов $\overrightarrow{a_1}$ и $\overrightarrow{a}$, которые согласно теореме 6.3 пропорциональны, т. е. $\overrightarrow{a_1} = \lambda_1 \overrightarrow{a}$. $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ являются геометрическими реализациями коллинеарных векторов $\overrightarrow{b_1}$ и $\overrightarrow{b}$, для которых согласно теореме 6.3 выполняется условие пропорциональности: $\overrightarrow{b_1} = \lambda_2 \overrightarrow{b}$. Следовательно, согласно (2.7) вектор $\overrightarrow{c} = \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}$, т. е. является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Отсюда по теореме 5.5 система векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно зависима. □

7.3. Следствие. Любые три некомпланарных вектора линейно независимы.

Доказательство. Предположим, что три некомпланарных вектора из $\mathbb{E}^3$ линейно зависимы. Тогда по доказанной теореме 7.2 векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны, что противоречит предположению. Следствие доказано. □

8. Базис

В этом и следующем вопросах мы обсудим известные и даже где-то волнующие (для тех, кто увлекается научной фантастикой) термины «координаты» и «размерность».

Если многие довольно неплохо представляют себе, что такое координаты (набор чисел, однозначно определяющий положение точки), то вопрос о том, что такое размерность, вызывает столбняк в аудитории.

С другой стороны, если вспомнить, что прямая одномерна, плоскость двумерна, а пространство трехмерно, то легко прийти к выводу, что размерность — это количество степеней свободы, которые нужно зафиксировать, чтобы однозначно задать положение точки.

В векторной алгебре векторы удобно задавать упорядоченным набором чисел. Выясним как это можно сделать. Рассуждения будем проводить для абстрактного векторного пространства, но вы можете представлять себе $\mathbb{E}^3$.

8.1. Определение. Система векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ векторного пространства V называется *полной*, если любой вектор $\mathbf{u} \in V$ линейно выражается через них:

$$\forall \mathbf{u} \in V, \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}: \quad \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n.$$

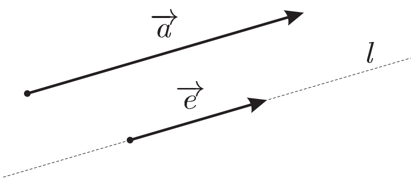


Рис. 2.2. О полноте системы векторов, состоящей из одного вектора

Возьмем, например, векторы, параллельные фиксированной прямой l, и выберем какой-нибудь один ненулевой из них, скажем, $\overrightarrow{e}$ (рис. 2.2).

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\overrightarrow{a}$, геометрическая реализация которого лежит на прямой, параллельной l. Тогда $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{e}$ коллинеарны, а значит, по теореме 6.3 они пропорциональны: $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{e}$.

Таким образом, любой вектор, параллельный l, линейно выражается через $\overrightarrow{e}$. Значит, согласно определению 8.1 система, состоящая из одного вектора $\overrightarrow{e}$, является полной для векторов, параллельных прямой l.

8.2. Предложение. Любые два неколлинеарных вектора на плоскости образуют полную систему для векторов, параллельных этой плоскости.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — неколлинеарные векторы. Возьмем их геометрические реализации $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общим началом. Ясно, что существует единственная плоскость π, проходящая через точки O, A и B. Говорят, что эта плоскость задается векторами[3] $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Рассмотрим теперь любой вектор $\overrightarrow{c}$, параллельный π. Тогда $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ — компланарны. Значит, по теореме 7.2 они линейно зависимы. С другой стороны, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ линейно независимы, т. к. неколлинеарны (по следствию 6.4). Таким образом, по теореме 5.7 получаем, что $\overrightarrow{c}$ линейно выражается через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Поскольку мы брали произвольный вектор $\overrightarrow{c}$, параллельный π, то можем утверждать, что *любой* вектор, параллельный плоскости π, является линейной комбинацией $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, что говорит о полноте системы векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. $\square$

8.3. Предложение. Любые три некомпланарных вектора в $\mathbb{E}^3$ образуют полную систему.

Доказательство. Рассмотрим некомпланарные векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ и произвольный вектор $\overrightarrow{x}$ в $\mathbb{E}^3$. Если $\overrightarrow{x}$ компланарен с любой парой векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, или $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, или $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ (в частности, $\overrightarrow{x}$ может быть нулевым), то согласно теоремам 7.2 и 5.6 система $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{x}$ линейно зависима, т. к. содержит линейно зависимую подсистему. Поскольку векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ некомпланарны, то по следствию 7.3 они линейно независимы, и по теореме 5.7 вектор $\overrightarrow{x}$ линейно выражается через $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ (при добавлении $\overrightarrow{x}$ система из линейно независимой стала линейно зависимой).

Пусть векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ некомпланарны. Рассмотрим геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{x}$ в виде направленных отрезков $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OX}$, имеющих общее начало — точку O (рис. 2.3). Обозначим через π плоскость, в которой лежат направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ (почему?), то через точку X проведем прямую l, параллельную прямой (OC). Прямая l не параллельна плоскости π (почему?) и, следовательно, пересекает ее. Точку пересечения прямой и плоскости обозначим через M (см. рис. 2.3). По правилу треугольника сложения векторов:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX}.$$

Направленный отрезок $\overrightarrow{MX}$ лежит на прямой l, т. е. коллинеарен $\overrightarrow{OC}$. Тогда по теореме 6.3 $\overrightarrow{MX} = \lambda_1\overrightarrow{OC}$.

Направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ лежит в плоскости π, т. е. компланарен с $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Тогда, опираясь на предложение 8.2, получим равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \lambda_2\overrightarrow{OA} + \lambda_3\overrightarrow{OB}.$$

В результате

$$\overrightarrow{MX} = \lambda_1\overrightarrow{OC} + \lambda_2\overrightarrow{OA} + \lambda_3\overrightarrow{OB},$$

что можно переписать как

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{c} + \lambda_2\overrightarrow{a} + \lambda_3\overrightarrow{b}.$$

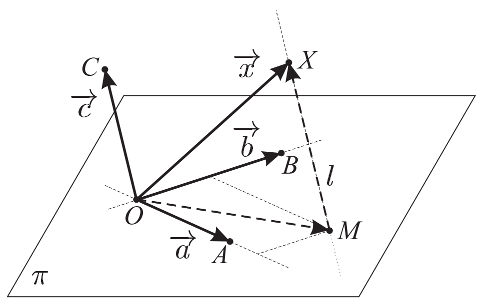


Рис. 2.3. О полноте системы векторов, состоящей из трех векторов

Так как вектор $\overrightarrow{x}$ выбирали произвольным, то можно утверждать, что *любой* вектор из $\mathbb{E}^3$ является линейной комбинацией $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, что доказывает полноту произвольных трех некомпланарных векторов в $\mathbb{E}^3$. $\square$

Основное свойство полной системы векторов заключается в том, что любой другой вектор пространства можно выразить через векторы этой системы.

Ясно, что если к полной системе $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ добавить еще один вектор $\mathbf{u}_{n+1}$, то дополненная система $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}$ тоже будет полной. Действительно, т. к. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ — полная система, то для всякого вектора $\mathbf{v}$ найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, при которых

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n.$$

[3] На самом деле, конечно, задается не одна плоскость, а целый класс параллельных друг другу плоскостей. Почему?

Но тогда соотношение

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{u}_n + 0 \cdot \mathbf{u}_{n+1}$$

выражает вектор $\mathbf{v}$ через дополнительную систему, т. е. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}$ тоже полна.

В связи с этим интересно рассматривать *минимальные* полные системы.

8.4. Определение. Упорядоченная система векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейного пространства V называется *базисом*, если она *полна* и *линейно независима*.

Обратите внимание на слово «упорядоченная» в определении базиса. Здесь имеется в виду, что если, например набор $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — базис, то $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1$ — тоже базис, но уже другой, поскольку порядок векторов в наборе отличается от исходного.

Тому факту, что базис — это минимальная полная система, посвящена задача (2.18*).

8.5. Теорема. Любые два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ на плоскости образуют базис в пространстве векторов, параллельных этой плоскости.

Доказательство. Мы уже доказали, что если $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ неколлинеарны, то они линейно независимы (см. следствие 6.4) и представляют собой полную систему (см. предложение 8.2). Поэтому согласно определению базиса 8.4 $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ являются базисом на плоскости. □

8.6. Теорема. Любые три некомпланарных вектора $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ — это базис в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$.

Доказательство. Согласно предложению 8.3 векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ образуют полную систему. По следствию 7.3 векторы $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ линейно независимы, значит, по определению 8.4 $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ являются базисом в пространстве $\mathbb{E}^3$. □

9. Координаты

Перейдем к рассмотрению понятия «координаты». Напомним, что координаты — это набор чисел, однозначно определяющих положение точки в пространстве. Например, задав долготу, широту и высоту над уровнем моря, мы зафиксируем точку на Земле. Обратите внимание, что координаты *относительны*, что выражается в явно словах «*относительно* уровня моря» и неявно: долгота отсчитывается от нулевого меридиана, выбор которого обусловлен ходом истории и был сделан в определенной степени произвольно.

Наша задача — ввести координаты, однозначно определяющие вектор в векторном пространстве. Делается это с помощью базиса.

9.1. Определение. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис векторного пространства V. Ввиду полноты системы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ для каждого $\mathbf{v} \in V$ найдутся числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{2.8}$$

Упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_n)$ называется *координатами* вектора $\mathbf{v}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

9.2. Замечание. При фиксированном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ координаты любого вектора определены однозначно. Иными словами, если нам удалось подобрать два набора чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, каждый из которых — координаты вектора $\mathbf{v}$ относительно одного базиса, то обязательно

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \ldots,\ x_n = y_n.$$

Доказательство. Допустим, что нам удалось для вектора $\mathbf{v}$ в одном и том же базисе найти два набора чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$. Тогда по определению координат будут выполнены равенства:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Значит,

$$x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть и приведя подобные члены, получаем

$$(x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 - y_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Однако система $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима, поэтому последнее равенство возможно только в том случае, когда все коэффициенты линейной комбинации равны нулю:

$$(x_1 - y_1) = (x_2 - y_2) = \dots = (x_n - y_n) = 0.$$

Значит, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots$, $x_n = y_n$. Что и требовалось доказать. □

Таким образом, если в векторном пространстве V фиксирован базис $\mathbf{e}_1$, …, $\mathbf{e}_n$, то для задания вектора нам потребуется ровно n чисел (координат). Иными словами, в пространстве V есть ровно n степеней свободы. Именно поэтому возникает следующее определение.

9.3. Определение. *Размерностью* векторного пространства V называется количество векторов в его базисе. Обозначается размерность пространства V стандартным символом $\dim V$.

Такое определение не совсем корректно. Действительно, с одной стороны, интуитивно ясно, что размерность — это свойство самого пространства и никак не может зависеть от выбора базиса, но с другой, мы не можем гарантировать, что в различных базисах одного и того же пространства одно и то же количество векторов. Вам пока придется поверить нам, что это действительно так.

Бывают пространства, в которых нет конечного базиса. Такие пространства называют бесконечномерными. Например, пространство $C[-\pi, \pi]$ функций, непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ — бесконечномерно.

Как вычислить координаты произвольного вектора $\mathbf{v}$ в базисе?! Из определения 9.1 видно, что координаты вектора — это коэффициенты его разложения по векторам базиса. Думающие читатели обратили внимание, что при доказательстве теоремы 7.2 и предложения 8.3 мы описали алгоритмы определения коэффициентов разложения базиса на плоскости и в пространстве.

Тем не менее опишем алгоритм вычисления координат в базисе на примере плоскости более подробно. Для этого зафиксируем на плоскости два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ (мы уже знаем, что по теореме 8.5 они образуют базис плоскости). Для удобства выберем их геометрические реализации с общим началом (рис. 2.4).

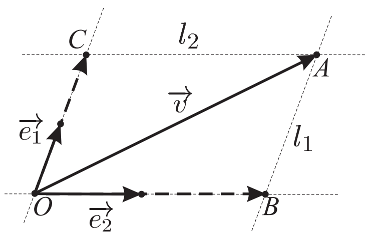


Рис. 2.4. Вычисление координат вектора на плоскости

Возьмем в той же плоскости еще какой-нибудь вектор $\overrightarrow{v}$ и определим его координаты в базисе $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$.

Для этого через конец вектора $\overrightarrow{v}$ (точки A на рис. 2.4) проведем прямые $l_1 \parallel \overrightarrow{e_1}$ и $l_2 \parallel \overrightarrow{e_2}$. Точки пересечения этих прямых с прямыми, содержащими базисные векторы, обозначим через B и C соответственно. Так как вектор $\overrightarrow{OB}$ коллинеарен $\overrightarrow{e_2}$, то найдется число $x_2 \in \mathbb{R}$, для которого $\overrightarrow{OB} = x_2\overrightarrow{e_2}$ (теорема 6.3). Аналогично, $\overrightarrow{OC} = x_1\overrightarrow{e_1}$ для какого-то $x_1 \in \mathbb{R}$.

Кроме того, по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.$$

Подставляя в это равенство найденные ранее соотношения, получим: $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$. Значит, координаты $\overrightarrow{v}$ относительно базиса $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ — это набор (x_1, x_2). Записывать мы это будем следующим образом $\overrightarrow{v}(x_1, x_2)$.

В трехмерном случае координаты вектора $\overrightarrow{v}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ записывают как $\overrightarrow{v}(x_1, x_2, x_3)$.

Важное преимущество аналитической геометрии заключается в том, что геометрические объекты описываются «числовым» образом, причем настолько адекватно, что все операции над геометрическими объектами можно заменить операциями над их «числовыми изображениями». Например, сумму векторов и произведение вектора на число можно вычислять с помощью координат, что видно из следующей теоремы.

9.4. Теорема (линейные свойства координат).

Предположим, $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ — координаты векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ — координаты суммы $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, а $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ — координаты произведения $\lambda\mathbf{u}$.

Доказательство. По определению координат 9.1 каждый из векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ можно разложить по базису:

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n. \tag{2.10}$$

Сложив эти равенства

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n + y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \dots + y_n\mathbf{e}_n = \\ = (x_1 + y_1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{e}_n,$$

получим разложение по базису суммы векторов. Следовательно, координаты суммы $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ имеют вид: $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

Умножив соотношение (2.9) на число λ и раскрыв скобки, найдем разложение по базису вектора $\lambda\mathbf{u}$:

$$\lambda\mathbf{u} = \lambda(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = (\lambda x_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda x_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\lambda x_n)\mathbf{e}_n.$$

Значит, согласно 9.1 координатами вектора $\lambda\mathbf{u}$ служит набор $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$. $\square$

10. Ортонормированный базис. Прямоугольная система координат

Здесь мы свяжем новое представление о координатах с привычным, усвоенным еще в школе. Кажущееся несоответствие между определением координат из предыдущего раздела с прочно усвоенным ранее возникает из-за того, что в школе определялись координаты *точки*, а мы давали определение координат *вектора*. Теперь построим мостик между этими понятиями.

Начнем с рассмотрения векторов, расположенных на плоскости. Зафиксируем плоскость $\mathbb{A}^2$ и рассмотрим векторное пространство векторов, ей параллельных, которые обозначим через $\mathbb{E}^2$ и назовем евклидовой плоскостью.

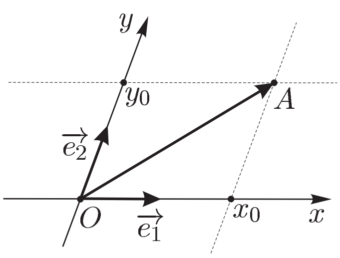


Рис. 2.5. Система координат Oxy

Как мы уже выяснили в теореме 8.2, любая пара неколлинеарных векторов $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ образует на плоскости базис. Ранее мы показали, как определить координаты вектора относительно этого базиса. Для расчетов удобно брать геометрические реализации базисных векторов с общим началом. Оказывается, такой подход позволяет ввести систему координат.

10.1. Определение. *Системой координат* Oxy на плоскости $\mathbb{A}^2$ называется базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ в $\mathbb{E}^2$ и фиксированная точка $O \in \mathbb{A}^2$ (см. рис. 2.5). *Координатами* точки A относительно этой системы называются координаты (x_0, y_0) вектора $\overrightarrow{OA}$[4] относительно базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, что записывается как $A(x_0, y_0)$.

В дальнейшем нам потребуется еще несколько понятий, которые логично ввести здесь.

[4]В школьном курсе геометрии вектор $\overrightarrow{OA}$ известен как *радиус-вектор*.

10.2. Определение. Базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ на плоскости $\mathbb{E}^2$ или $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ называется *ортогональным*, если все базисные векторы попарно перпендикулярны.

10.3. Определение. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если все базисные векторы имеют единичную длину. В российской литературе векторы ортонормированного базиса называют *ортами*[5]. При некотором дополнительном условии, которое будет описано позже, такие векторы принято обозначать через $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ и $\overrightarrow{k}$.

10.4. Определение. Система координат Oxy называется *прямоугольной*, если соответствующий базис ортонормированный рис. 2.6.

Аналогичным образом вводится система координат в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$.

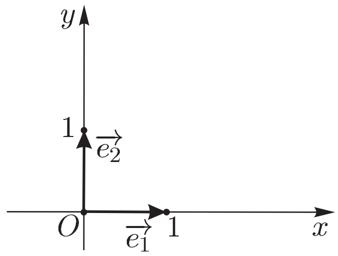


Рис. 2.6. Прямоугольная система координат Oxy на плоскости

На практике довольно часто возникает необходимость вычислять координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты точек начала A и конца B и наоборот.

Основываясь на приведенном ниже примере 2.1, сформулируем *правило*:

> *чтобы вычислить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Обратите внимание, что здесь легко допустить ошибку, забыв, что из чего вычитать. Поэтому рекомендуется сделать рисунок, похожий на рис. 2.8 (см. примеры решения задач), и сообразить самостоятельно, как найти требуемые координаты.

10.5. Теорема. Любой единичный вектор $\overrightarrow{e_1}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ можно достроить до ортонормированного базиса.

Доказательство. Рассмотрим геометрическую реализацию $\overrightarrow{OA}$ вектора $\overrightarrow{e_1}$ (рис. 2.7). Через точку O проведем произвольную прямую l, перпендикулярную $\overrightarrow{e_1}$. Отложим на ней отрезок OB единичной длины (не важно, в какую сторону) и обозначим вектор $\overrightarrow{OB}$ через $\overrightarrow{e_2}$. Осталось провести прямую l', перпендикулярную плоскости BOA, и отложить на ней единичный отрезок OC. Положив $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OC}$, получим ортонормированный базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.□

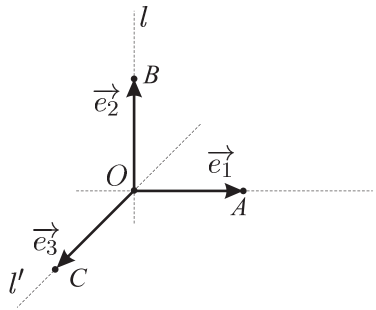


Рис. 2.7. Построение ортонормированного базиса

11. Центр масс

Введенные действия над векторами позволяют вычислить координаты центра масс системы материальных точек. Опишем, что такое центр масс и как найти его координаты.

11.1. Определение. Рассмотрим систему материальных точек A_1 с массой m_1, A_2 с массой m_2, …, A_n с массой m_n. *Центром масс* этой системы называется такая точка C, для которой выполняется равенство:

$$m_1\overrightarrow{CA_1} + m_2\overrightarrow{CA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{CA_n} = \overrightarrow{0}. \tag{2.11}$$

[5] *Ортом* называют вектор единичной длины.

Используя значок суммы, это соотношение можно переписать более компактно:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{CA_i} = \overrightarrow{0}. \tag{2.12}$$

Пусть i-ая точка A_i имеет координаты (x_i, y_i, z_i). Наша задача — найти координаты центра масс $C(x_c, y_c, z_c)$.

Опираясь на правило вычисления координат (стр 53), получим $\overrightarrow{CA_i}(x_i - x_c, y_i - y_c, z_i - z_c)$. Подставив найденные координаты в равенство (2.12) и используя линейные свойства координат (стр 52), придем к соотношению:

$$\begin{gathered}
m_1(x_1 - x_c, y_1 - y_c, z_1 - z_c) + m_2(x_2 - x_c, y_2 - y_c, z_2 - z_c) + \dots + m_n(x_n - x_c, y_n - y_c, z_n - z_c) = \\
= (m_1(x_1 - x_c), m_1(y_1 - y_c), m_1(z_1 - z_c)) + (m_2(x_2 - x_c), m_2(y_2 - y_c), m_2(z_2 - z_c)) + \\
+ \dots + (m_n(x_n - x_c), m_n(y_n - y_c), m_n(z_n - z_c)) = \big(m_1(x_1 - x_c) + m_2(x_2 - x_c) + \dots + m_n(x_n - x_c),
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&m_1(y_1 - y_c) + m_2(y_2 - y_c) + \dots + m_n(y_n - y_c), \\
&m_1(z_1 - z_c) + m_2(z_2 - z_c) + \dots + m_n(z_n - z_c)\big) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

(поскольку координаты нулевого вектора — это нули).

Так как координаты однозначно определяют вектор, то два вектора совпадают тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. Поэтому последнее равенство приводит к системе:

$$\begin{cases}
m_1(x_1 - x_c) + m_2(x_2 - x_c) + \dots + m_n(x_n - x_c) = 0, \\
m_1(y_1 - y_c) + m_2(y_2 - y_c) + \dots + m_n(y_n - y_c) = 0, \\
m_1(z_1 - z_c) + m_2(z_2 - z_c) + \dots + m_n(z_n - z_c) = 0.
\end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим

$$\begin{aligned}
&m_1(x_1 - x_c) + m_2(x_2 - x_c) + \dots + m_n(x_n - x_c) = \\
&\qquad = m_1x_1 - m_1x_c + m_2x_2 - m_2x_c + \dots + m_nx_n - m_nx_c = \\
&\qquad\qquad = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)x_c = 0.
\end{aligned}$$

Введя теперь обозначение для суммарной массы системы $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, выразим из последнего соотношения первую координату центра масс x_c:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m}. \tag{2.13}$$

Аналогично вычисляются остальные координаты:

$$\begin{aligned}
y_c &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m}, \\
z_c &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n}{m}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

11.2. Принцип суперпозиции. Рассмотрим две системы материальных точек: $A_1, \dots, A_n$ с массами $m_1, \dots, m_n$ и суммарной массой m; $B_1, \dots, B_k$ с массами $\mu_1, \dots, \mu_k$ и суммарной массой μ. Пусть C_a — центр масс первой системы точек, а C_b — второй. Обозначим через C центр масс системы точек $A_1, \dots, A_n$, $B_1, \dots, B_k$, а через C' — центр масс системы двух точек: C_a с массой m и C_b с массой μ. Тогда $C = C'$.

Доказательство. По формуле (2.13) первая координата центра масс точек $A_1, \ldots, A_n$, т. е. координата точки C_a равна

$$x_{ca} = \frac{m_1 x_{A1} + m_2 x_{A2} + \cdots + m_n x_{An}}{m};$$

первая координата центра масс точек $B_1, \ldots, B_k$, т. е. координата точки C_b вычисляется как

$$x_{cb} = \frac{\mu_1 x_{B1} + \mu_2 x_{B2} + \cdots + \mu_k x_{Bk}}{\mu},$$

а первая координата центра масс точек $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_k$, а именно, координата точки C имеет вид

$$x_c = \frac{m_1 x_{A1} + m_2 x_{A2} + \cdots + m_n x_{An}}{m + \mu} + \frac{\mu_1 x_{B1} + \mu_2 x_{B2} + \cdots + \mu_k x_{Bk}}{m + \mu}.$$

По той же формуле (2.13) первая координата точки C'

$$\begin{aligned} x_{c'} &= \frac{m x_{ca} + \mu x_{cb}}{m + \mu} = \\ &= \frac{1}{m + \mu}\left(m\frac{m_1 x_{A1} + m_2 x_{A2} + \cdots + m_n x_{An}}{m} + \mu\frac{\mu_1 x_{B1} + \mu_2 x_{B2} + \cdots + \mu_k x_{Bk}}{\mu}\right) = x_c. \end{aligned}$$

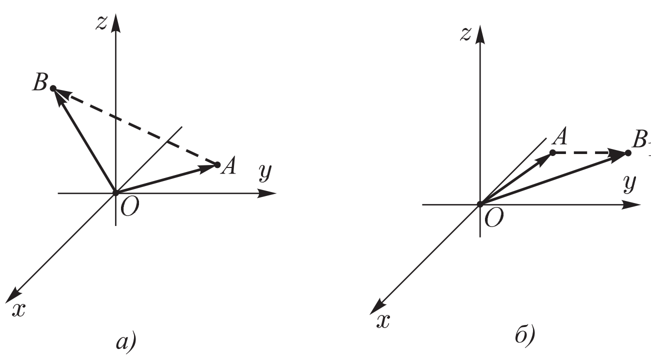
Аналогичным образом доказывается, что остальные координаты точек C и C' совпадают. Теорема доказана. □

Примеры решения типовых задач

Пример 2.1. Даны точки $A(2,1,1)$ и $B(3,-1,4)$ относительно системы координат[6] $Oxyz$ и вектор $\overrightarrow{AB_1}(0,1,0)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и координаты точки B_1.

Решение.

Рис. 2.8. Рисунок к решению примера 2.1



Построим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рис. 2.8, *а*). По определению координат точки 10.1 набор чисел $(2,1,1)$ — координаты вектора $\overrightarrow{OA}$; $(3,-1,4)$ — координаты вектора $\overrightarrow{OB}$. Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Значит, согласно теореме 9.4 координаты $\overrightarrow{AB}$ — это разность соответствующих координат вектора $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2, -1-1, 4-1) = \overrightarrow{AB}(1,-2,3).$$

[6]Как правило, считают, что система координат фиксирована и слова «относительно системы координат $Oxyz$» опускают

Вспомним, что координаты точки B_1 — это координаты вектора $\overrightarrow{OB_1}$. Из рис. 2.8, *б* следует: $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_1}$. Координаты точки A совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OA}(2,1,1)$, значит,

$$\overrightarrow{OB_1}(2+0, 1+1, 1+0) = \overrightarrow{OB_1}(2,2,1).$$

Таким образом, $B_1(2,2,1)$.

Пример 2.2. Пусть $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ — базис. Найти координаты следующих векторов:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}; \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_1}; \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3}; \quad \overrightarrow{0}.$$

Решение. По определению 9.1 координаты вектора — это коэффициенты его разложения по базису. Равенство для вектора $\overrightarrow{a}$ можно переписать как $\overrightarrow{a} = 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 1 \cdot \overrightarrow{e_2} + 1 \cdot \overrightarrow{e_3}$, откуда $\overrightarrow{a}(1,1,1)$. Аналогично определяем координаты остальных векторов:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_3} = 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + (-1) \cdot \overrightarrow{e_3} &&\Rightarrow &&\overrightarrow{b}(1,0,-1);\\
&\overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_1} = 1 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + 0 \cdot \overrightarrow{e_3} &&\Rightarrow &&\overrightarrow{c}(1,0,0);\\
&\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{e_1} + 0 \cdot \overrightarrow{e_2} + 0 \cdot \overrightarrow{e_3} &&\Rightarrow &&\overrightarrow{0}(0,0,0).
\end{aligned}$$

Пример 2.3. Даны точки $A(1,-2,2)$ и $B(-13,5,-3/2)$. Найти координаты точки M, лежащей на прямой (AB), если известно, что длины отрезков $[AM]$ и $[MB]$ относится как $2:5$.

Решение. Для решения задачи рассмотрим направленные отрезки $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$. Они коллинеарны, т. к. точки A, B и M лежат на одной прямой, поэтому согласно теореме 6.1

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}. \tag{2.15}$$

Так как точка M лежит на отрезке AB, то число $\lambda \geqslant 0$. Если координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $M(x_M, y_M, z_M)$, то в координатной форме равенство (2.15) выглядит так:

$$x_M - x_A = \lambda(x_B - x_M), \quad y_M - y_A = \lambda(y_B - y_M), \quad z_M - z_A = \lambda(z_B - z_M).$$

Выражая отсюда координаты точки M, получаем

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{2.16}$$

Согласно равенству 2.15 $|\overrightarrow{AM}| = |\lambda||\overrightarrow{MB}|$, отсюда $|\lambda| = \lambda = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = 2/5$. Подставляя все данные в формулы 2.16, получаем

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{1 + 2/5 \cdot (-13)}{1 + 2/5} = -3; \quad y_M = \frac{-2 + 2/5 \cdot 5}{1 + 2/5} = 0;\\
z_M &= \frac{2 + 2/5 \cdot (-3/2)}{1 + 2/5} = 1.
\end{aligned}$$

Итак, координаты искомой точки $M(-3,0,1)$.

Пример 2.4. Являются ли векторы $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath}$ компланарными?

Решение. Для решения задачи воспользуемся теоремой 7.2 и определением линейной зависимости (или независимости) системы векторов 5.2. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b} + \lambda_3 \overrightarrow{c} &= \lambda_1(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}) + \lambda_2(\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}) + +\lambda_3(\overrightarrow{k} - \overrightarrow{\imath}) =\\
&= (\lambda_1 - \lambda_3)\overrightarrow{\imath} + (\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{\jmath} + (\lambda_3 - \lambda_2)\overrightarrow{k}.
\end{aligned}$$

Согласно определению 5.2 необходимо исследовать равенство:

$$(\lambda_1 - \lambda_3)\overrightarrow{\imath} + (\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{\jmath} + (\lambda_3 - \lambda_2)\overrightarrow{k} = 0.$$

Так как по определению базиса 8.4 векторы $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ линейно независимы, то последнее равенство возможно только при условии, что

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0,\ \lambda_3 - \lambda_2 = 0,$$

откуда получаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \tag{2.17}$$

В качестве λ_1 можно взять любое действительное число. Например, $\lambda_1 = 1$, тогда из (2.17) $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Таким образом, линейная комбинация векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ может быть равна нулю при коэффициенте $\lambda_1 \neq 0$, поэтому согласно определению 5.2 векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы. Тогда из теоремы 7.2 следует, что эти векторы компланарны, т. е. лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Пример 2.5. Векторы заданы своими координатами относительно какого-то базиса: $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Проверить, что эти векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}.$$

Решение. Мы знаем, что по теореме 6.1 два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. найдется число λ, для которого $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$. Благодаря линейным свойствам координат (стр 52) это равенство можно переписать в виде

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_n),$$

что равносильно набору равенств:

$$x_1 = \lambda y_1, \quad x_2 = \lambda y_2, \quad \ldots, \quad x_n = \lambda y_n,$$

откуда и получается пропорциональность координат.

Пример 2.6. Разложить вектор $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath}$ по базису $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{e_2} = 2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$.

Решение. Обратите внимание, что в формулировке задачи неявно подразумевается, что на плоскости фиксирован ортонормированный базис $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ и все векторы в задаче выражены через него. Следуя примеру 2.2, найдем координаты:

$$\overrightarrow{e_1}(1, 1), \qquad \overrightarrow{e_2}(2, -1), \qquad \overrightarrow{a}(3, -2).$$

Прежде чем переходить к определению координат, необходимо проверить, образуют ли векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ базис. Для этого достаточно показать, что векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ линейно независимы.

Благодаря примеру 2.5, мы знаем, что векторы линейно зависимы тогда и только тогда, когда пропорциональны их координаты. А так как здесь это не так $\left(\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}\right)$, векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ линейно независимы.

По определению координат 9.1 необходимо найти коэффициенты λ_1 и λ_2 в разложении $\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}$, т.,е.

$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} = \lambda_1(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}) + \lambda_2(2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}) = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\overrightarrow{\imath} + (\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{\jmath}.$$

В силу единственности разложения вектора $\overrightarrow{a}$ по базису $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}$ (см. замечание 9.2) мы можем приравнять коэффициенты при одинаковых базисных векторах:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим, что

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}; \quad \lambda_2 = \frac{5}{3}.$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{a}$ в новом базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$:

$$\overrightarrow{a}\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

Пример 2.7. В вершинах треугольника $A_1(1,3,5)$, $A_2(2,-4,0)$, $A_3(-2,4,4)$ находятся единичные точечные массы. Найти координаты центра масс этого треугольника.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (2.13), (2.14). Так как в вершинах треугольника находятся единичные точечные массы, то в (2.13), (2.14) $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, тогда координаты центра масс

$$x_c = \frac{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3}}{3} = \frac{1+2-2}{3} = \frac{1}{3},$$
$$y_c = \frac{y_{A1} + y_{A2} + y_{A3}}{3} = \frac{3-4+4}{3} = 1,$$
$$z_c = \frac{z_{A1} + z_{A2} + z_{A3}}{3} = \frac{5+0+4}{3} = 3.$$

Можно доказать, что если в вершинах треугольника находятся материальные точки с одинаковыми массами, то центр масс системы материальных точек расположен в точке пересечения медиан треугольника. Оставим доказательство в качестве полезной задачи (см. задачу 2.19*).

Пример 2.8. Единичные точечные массы помещены в вершинах четырехугольника $A(-1,2)$, $B(3,6)$, $C(12,3)$, $D(-4,-3)$. Найдите координаты центра масс этого четырехугольника.

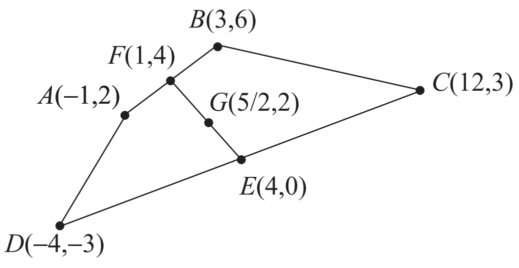


Рис. 2.9. Рисунок к примеру 2.8

Решение. Центр масс четырехугольника можно вычислять по формулам (2.13) и (2.14), как это было сделано в примере 2.7. Но мы воспользуемся принципом суперпозиции 11.2. Найдем сначала центр масс точек A и B. Поскольку массы у них одинаковы, центр масс F будет располагаться ровно в середине отрезка AB (рис. 2.9), а его координаты — $(1,4)$ (см. пример 2.3). Аналогично, центр масс отрезка CD — это его середина $E(4,0)$.

Теперь, следуя принципу суперпозиции, можно заменить исходный четырехугольник на отрезок EF, в каждой вершине которого помещены по две единичные точечные массы. Опять получаем ситуацию с отрезком, в вершинах которого находятся одинаковые массы. Следовательно, его центр масс, как и центр масс четырехугольника, попадает в середину $G\left(\frac{5}{2}, 2\right)$.

Контрольные вопросы

2.1. Что такое линейная комбинация векторов?
2.2. Какая система векторов называется линейно независимой?
2.3. Может ли система векторов, содержащая нулевой вектор, быть линейно независимой? Почему?
2.4. Сформулируйте два определения линейной зависимости системы векторов.
2.5. Может ли система, содержащая линейно зависимую подсистему, быть линейно независимой? Ответ поясните примером.
2.6. Дайте определение коллинеарных и компланарных векторов.
2.7. Сформулируйте необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
2.8. Сформулируйте необходимое и достаточное условие компланарности векторов.
2.9. Дайте определение полной системы векторов. Привести примеры.
2.10. Что называется базисом линейного пространства?
2.11. Дайте определение координат вектора и координат точки. В чем различие между этими понятиями?
2.12. Определите координаты вектора $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_1}$ относительно базиса $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.
2.13. Сформулируйте линейные свойства координат.
2.14. Какой базис называется ортогональным?
2.15. Дайте определение ортонормированного базиса.
2.16. Дайте определение прямоугольной системы координат.

Задачи

2.1°. Для векторов $\overrightarrow{a}(1,1,0)$ и $\overrightarrow{b}(-3,2,1)$ вычислите координаты векторов $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $-3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

2.2°. Координаты точек $A(2,3,-1)$ и $B(-4,-1,5)$. Найдите координаты $\overrightarrow{OM}$, если OM — медиана в треугольнике $\triangle OAB$, точка O — начало координат.

2.3°. Для точки $M(3,2)$ найдите координаты точки, симметричной относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

2.4. Докажите, что все координаты нулевого вектора в любом базисе равны нулю.

2.5. Пусть $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ некомпланарны. Компланарны ли векторы
а) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$?
б) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$?
в) $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3}$?
г) $\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{e_1} - 18\overrightarrow{e_2} + 12\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{b} = -8\overrightarrow{e_1} + 24\overrightarrow{e_2} - 16\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{c} = 8\overrightarrow{e_1} + 7\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$?
Являются ли векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно независимыми, если $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ компланарны?

2.6. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то точки A, B, C и D лежат на одной прямой или в одной плоскости.

2.7. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина отрезка BC и точка O — точка пересечения диагоналей. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$ в базисе $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

2.8. Даны три вектора $\overrightarrow{a}(1,3)$, $\overrightarrow{b}(2,-1)$, $\overrightarrow{c}(-4,1)$. Найдите числа α и β такие, что $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

2.9. Точки $M(2,-1)$, $N(-1,4)$ и $P(-2,2)$ являются серединами сторон треугольника. Определите координаты его вершин.

2.10. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$: $A(3,-5)$, $B(5,-3)$, $C(-1,3)$. Определите координаты четвертой вершины D.

2.11. Даны вершины треугольника $A(2,1,0)$, $B(-2,5,4)$ и $C(3,-3,5)$. Найдите координаты точки пересечения его медиан.

2.12. Найдите координаты центра масс однородной пластинки, имеющей форму четырехугольника $ABCD$ с вершинами в точках $A(3,1)$, $B(7,3)$, $C(0,4)$ и $D(-1,2)$.

2.13. Определите координаты концов отрезка $[AB]$, который точками $P(2,2)$ и $Q(1,5)$ разделен на три равные части.

2.14*. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении $3:1$, считая от вершины.

2.15*. Найдите центр правильного шестиугольника, зная координаты двух его смежных вершин: $A(2,0)$ и $B(5,3\sqrt{3})$. Рассмотрите все возможные варианты решения.

2.16*. На диагонали BC_1 боковой грани треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка M, а на диагонали CA_1 другой боковой грани — точка N. Прямая MN параллельна плоскости ABB_1A_1. Найдите отношение $|CN|:|CA_1|$, если $|BM|:|BC_1|=1:3$.

2.17*. Векторы $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ линейно независимы. Будут ли линейно зависимы векторы $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\cdots+\mathbf{e}_n$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3+\cdots+\mathbf{e}_n$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\cdots+\mathbf{e}_{n-1}$?

2.18*. Докажите, что минимальная полная система (т. е. если из нее исключить произвольный вектор, она перестанет быть полной) векторов линейно независима.

2.19*. Докажите, что если в вершинах треугольника расположены материальные точки с одинаковой массой, то центр масс этой системы материальных точек расположен в точке пересечения медиан этого треугольника.

2.20*. Докажите, что если в вершинах выпуклого четырехугольника расположены материальные точки с одинаковой массой, то центр масс этой системы материальных точек расположен в точке пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон этого четырехугольника.

2.21*. Найдите координаты вектора $2x-3x^2+1$ относительно базиса $\mathbf{e}_1=x+1$, $\mathbf{e}_2=x-1$ и $\mathbf{e}_3=x^2$ в пространстве квадратных многочленов от x, которое обычно обозначается через $\mathbb{R}_2[x]$.

2.22*. Докажите, что упорядоченный набор векторов $\mathbf{e}_1(1,1,1)$, $\mathbf{e}_2(1,1,0)$, и $\mathbf{e}_3(1,0,0)$ образует базис в $\mathbb{R}^3$ и найдите координаты вектора $\mathbf{u}(1,2,3)$ относительно этого базиса.

Тема 3

Системы линейных алгебраических уравнений. Матрицы

12. Основные понятия СЛАУ

При решении задачи о разложении вектора по базису (пример 2.6 на стр 57) мы с вами столкнулись с системой двух уравнений с двумя неизвестными. Ясно, что задача о разложении вектора по базису, в котором 10 векторов, сводится к системе десяти уравнений с десятью неизвестными.

Более того, во многих практических задачах, например по аэродинамике, приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных. Причем на современном этапе точного аналитического решения таких уравнений получить невозможно. Поэтому приходится прибегать к приближенным методам, которые часто сводят дифференциальное уравнение к *системе линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). В связи с этим полезно научиться решать такие системы. Здесь мы познакомимся с универсальным методом решения СЛАУ, которым можно решить любую систему, если такое решение существует.

Начнем с определений и терминологии.

12.1. Определение. *Системой линейных алгебраических уравнений* называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

где a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ — известные числа, которые называются *коэффициентами системы*; b_i — тоже известные числа, называемые *свободными членами*; а x_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ — *неизвестные*, которые, собственно, и нужно определить при решении СЛАУ.

12.2. Определение. *Решением СЛАУ* (3.1) называется упорядоченный набор элементов $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, который при подстановке в систему вместо $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ обращает каждое ее уравнение в тождество.

12.3. Определение. *Матрицей* **A** *коэффициентов системы* (3.1) называется прямоугольная таблица следующего вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}. \tag{3.2}$$

Говорят, что эта матрица имеет размер $m \times n$. Обратите внимание, что n здесь — число строк, а m — число столбцов, a_{ij} — элемент матрицы, расположенный на пересечении i-ой строки и j-го столбца. В частности, первый индекс i указывает на номер строки, где расположен элемент матрицы a_{ij}, а j — на номер столбца.

Свободные члены системы (3.1) и ее неизвестные часто записывают в виде столбцов: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — *столбец свободных членов*; $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — *столбец неизвестных.*

В некоторых случаях удобно столбец свободных членов приписывать к матрице системы. Полученную матрицу называют *расширенной матрицей* системы (3.1):

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{3.3}$$

12.4. Определение. СЛАУ (3.1) называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. В противном случае СЛАУ называется *неоднородной*.

12.5. Определение. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. Если же у нее нет ни одного решения, то система называется *несовместной*.

12.6. Определение. Совместные системы подразделяются на *определенные*, которые имеют единственное решение, и *неопределенные*, которые имеют более одного решения.

13. Метод Гаусса решения СЛАУ

Идея метода Гаусса основана на простом наблюдении. Представьте, что нам нужно решить следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

При этом коэффициенты a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} отличны от нуля.

Из последнего уравнения мы легко определяем, что $x_n = b_n/a_{nn}$. Подставляя найденное значение неизвестной x_n в предпоследнее уравнение $a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1}$, однозначно определяем x_{n-1}. Действуя аналогичным образом, можно найти все значения неизвестных.

Чтобы было понятнее, приведем конкретный пример.

Пример 3.1. Решить СЛАУ

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ \phantom{x_1 +{}} 8x_2 + 3x_3 = 6, \\ \phantom{x_1 + 8x_2 +{}} 2x_3 = 4. \end{array}\right.$$

Решение. Из третьего уравнения находим, что $x_3 = 2$. Подставляя это равенство во второе уравнение, получаем

$$8x_2 + 3 \cdot 2 = 6.$$

Значит, $x_2 = 0$ и первое уравнение системы можно переписать в виде

$$x_1 + 7 \cdot 0 + 2 = 0,$$

откуда $x_1 = -2$. Итак, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ — решение системы.

Таким образом, при решении произвольной системы нам нужно какими-то равносильными преобразованиями привести исходную систему к системе (3.4), которая, как мы убедились, решается очень легко. Ясно, что *равносильные преобразования* систем — это такие преобразования, которые не меняют множества решений СЛАУ.

13.1. Определение. Две СЛАУ называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

13.2. Типы элементарных преобразований. Выясним, а какие, собственно, преобразования систем можно называть равносильными?

Прежде всего заметим, что расширенная матрица системы дает о СЛАУ полную информацию. Иными словами, мы легко восстановим систему, если нам известна ее расширенная матрица.

Самым простым равносильным преобразованием является перестановка уравнений, что на языке расширенной матрицы выглядит так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Здесь переставили i-ю и j-ю строки. Такое преобразование строк расширенной матрицы системы называется элементарным преобразованием *типа I*. Соответственно, в самой СЛАУ поменяются местами i-е и j-е уравнения. Очевидно, что при перестановке строк получается система, эквивалентная исходной.

Элементарное преобразование *типа II* заключается в том, что к одному уравнению системы прибавляется какое-то другое, умноженное на некоторое число. С точки зрения расширенных матриц это преобразование состоит в том, что i-я строка изменяется по следующему правилу: к каждому элементу i-й строки добавляется соответствующий элемент j-й строки, умноженный на фиксированное число λ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} & b_i+\lambda b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{3.5}$$

Как уже отмечалось, в этом случае в СЛАУ изменится i-е уравнение: к нему добавится j-е уравнение, умноженное на λ; остальные уравнения системы не меняются.

13.3. Теорема. СЛАУ, полученная из исходной системы в результате элементарных преобразований I-го и II-го типов, эквивалентна исходной системе.

Доказательство. Элементарное преобразование I-го типа вызывает лишь изменение порядка уравнений, при этом сами уравнения, а значит, и множество решений СЛАУ, не меняются.

Пусть теперь система получена из данной СЛАУ с помощью элементарного преобразования II-го типа. Обозначим произвольное решение исходной СЛАУ с расширенной матрицей (3.3) как набор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Очевидно, этот набор удовлетворяет всем уравнениям преобразованной СЛАУ (с расширенной матрицей (3.5)), кроме, быть может, i-го уравнения, т. к. все уравнения, кроме него, остались без изменений.

Подставив набор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ в i-е уравнение новой системы и перегруппировав слагаемые, убедимся, что получится верное равенство:

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})c_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})c_2 + \dots + (a_{in}+\lambda a_{jn})c_n = b_i + \lambda b_j;$$
$$(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \dots + a_{in}c_n) + \lambda(a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \dots + a_{jn}c_n) = b_i + \lambda b_j.$$

Набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ является решением исходной СЛАУ, поэтому выражение в первой скобке равно b_i, а во второй — b_j, что означает равенство левой и правой частей.

Итак, каждое решение исходной СЛАУ является решением преобразованной системы, что можно сформулировать следующим образом:

если вторая СЛАУ получена из первой путем прибавления к i-му уравнению j-го, умноженного на число λ, то любое решение первой системы является решением второй. $(*)$

Для доказательства эквивалентности первой и второй систем нам достаточно показать, что любое решение второй системы является решением первой. Однако легко понять, что если к i-му уравнению второй системы прибавить j-ое уравнение, умноженное на число $-\lambda$, то получится первая система, поэтому можно воспользоваться доказанным утверждением $(*)$, из которого следует, что любое решение второй системы является также решением первой системы. □

Заметим еще, что

если одно из уравнений системы умножить на ненулевое число, то получится эквивалентная система.

Проверьте этот факт самостоятельно!

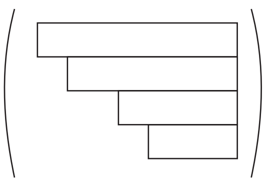


Рис. 3.1. Ступенчатая матрица

Теперь мы готовы приступить к описанию *метода Гаусса* решения систем, который еще называют *методом последовательных исключений*. Он заключается в том, чтобы, используя элементарные преобразования строк, исключить первую переменную из всех уравнений, кроме первого, вторую переменную исключить из всех уравнений, кроме первых двух, и т. д. В результате получится система с расширенной матрицей ступенчатого вида, которая схематически представлена на рис. 3.1.

На этом рисунке первый слева элемент в каждом прямоугольнике отличен от нуля, а вне прямоугольников стоят только нули.

13.4. Определение. Говорят, что матрица имеет *ступенчатый вид*, если каждая ее строка (кроме, быть может, первой) начинается с нулей, причем под первым ненулевым элементом каждой строки стоит столбец нулей.

Например, матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

имеют ступенчатый вид, а про матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 9 \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

этого сказать нельзя.

Итак, если мы из исходной системы получим эквивалентную ей, но с расширенной матрицей ступенчатого вида, то мы сможем последовательно найти все значения неизвестных, начиная с последней, как мы это сделали в примере 3.1.

К сожалению, более подробно рассказывать о методе Гаусса в общем виде довольно громоздко. Поэтому продемонстрируем его на примерах.

Пример 3.2. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 14x_3 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 14 & -2 \\ 1 & 4 & 11 & 5 \end{array}\right).$$

Наша цель привести эту матрицу к ступенчатому виду, пользуясь элементарными преобразованиями строк. В частности, сначала нужно добиться, чтобы первый столбец матрицы имел вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для этого прибавим ко второй строке исходной матрицы первую, умноженную на[1] -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 14 & -2 \\ 1 & 4 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2-2\cdot 1 & 7-2\cdot 3 & 14-2\cdot 5 & -2-2\cdot(-1) \\ 1 & 4 & 11 & 5 \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 11 & 5 \end{array}\right)$$

Если теперь к третьей строке системы прибавить первую, умноженную на -1, то получится

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 11 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке последней матрицы вторую, умноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Итак, мы пришли к матрице ступенчатого вида. Соответствующая СЛАУ, эквивалентная исходной, запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим, что $x_3 = 3$. Подставив найденное значение во второе уравнение, получим соотношение для второй неизвестной:

$$x_2 + 4\cdot 3 = 0,$$

откуда $x_2 = -12$. Наконец, из первого уравнения определяем x_1:

$$x_1 + 3\cdot(-12) + 5\cdot 3 = -1 \Leftrightarrow x_1 - 21 = -1 \Leftrightarrow x_1 = 20.$$

Найденное решение удобно записать в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Здесь и далее под этими словами мы будем подразумевать, что к каждому элементу второй строки прибавим соответствующий элемент первой строки, умноженный на число -2.

Из решения видно, что СЛАУ совместная (имеет решение) и определенная (решение единственное). К сожалению, не для всех систем решение ищется так просто.

Пример 3.3. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -1, \\ 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 13, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 11 & 5 & 13 \\ -2 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right).$$

Если ко второй строке этой матрицы прибавить первую, умноженную на -1, а затем к третьей строке прибавить первую, то получим

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 0 & -1 \\ 2 & 11 & 5 & 13 \\ -2 & -3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right).$$

Вычтем теперь из третьей строчки вторую:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Последнее уравнение системы с такой расширенной матрицей имеет вид

$$0 \cdot x_3 = -8$$

и не имеет решений. Значит, и исходная система решений не имеет, т. е. несовместна.

Приведем пример совместной, но неопределенной системы.

Пример 3.4. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 6, \\ 6x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 12x_4 = 12, \\ 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & -5 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & -6 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем первую, а из третьей вычтем первую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & -5 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & -1 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & -6 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 3 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Если теперь из третьей и четвертой строк вычесть вторую, то придем к матрице вида

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как нулевые строки расширенной матрицы соответствуют уравнениям типа $0 \cdot x = 0$, то соответствующая система имеет только два уравнения:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 6, \\ \qquad\qquad\quad\; 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Как видите, из этой системы невозможно однозначно определить значение ни одной неизвестной! Поэтому поступают следующим образом. Переменные, стоящие в начале каждого ненулевого уравнения, объявляют *базисными*, а остальные *свободными*.

В нашем случае базисные переменные — это x_1 (с нее начинается первое уравнение системы) и x_3 (она стоит в начале второго уравнения). Поэтому свободные переменные — это x_2 и x_4.

Свободным переменным присваивают *произвольные* значения. Пусть, например, $x_2 = a$ и $x_4 = b$. Выразим базисные переменные через свободные. Из второго уравнения:

$$4x_3 + 2b = 0 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2}b.$$

Подставим теперь значения последних трех переменных в первое уравнение:

$$3x_1 + 3a - 5\left(-\frac{1}{2}b\right) + 5b = 6 \Leftrightarrow 3x_1 + 3a + \frac{15}{2}b = 6.$$

Отсюда

$$x_1 = 2 - a - \frac{5}{2}b.$$

Запишем решение в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - a - \frac{5}{2}b \\ a \\ -\frac{1}{2}b \\ b \end{pmatrix}.$$

Здесь a и b — произвольные числа (параметры), причем при любых конкретных значениях этих параметров мы будем получать конкретные решения. Например, если $a = 0$ и $b = 2$, то столбец

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

является решением системы. Проверьте этот факт прямой подстановкой решения в систему и найдите еще несколько конкретных решений.

Более того! Можно утверждать, что любое конкретное решение исходной системы получается при некоторых конкретных значениях параметров a и b.

Хочется отметить еще один полезный факт. Если система неопределенная, то количество параметров в записи ее решения в точности совпадает с количеством свободных переменных!

14. Линейные операции над матрицами

Вы, безусловно, отметили, насколько удобно пользоваться расширенной матрицей при решении СЛАУ. Этот раздел посвящен матрицам.

Напомним, что *матрицей* называется прямоугольная таблица «чисел»[2]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Причем две *матрицы равны* тогда и только тогда, когда совпадают их размеры и все соответствующие элементы.

Множество всех матриц размера $m \times n$, элементы которых — вещественные числа, принято обозначать как $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Если размер матрицы несущественен или известен, то можно вместо обозначения $(a_{ij})_{m\times n}$ использовать просто (a_{ij}).

Две матрицы одного размера можно складывать по правилу:

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, матрицу можно умножать на число:

$$\lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n},$$

$$5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 25 & 30 & 35 & 40 \end{pmatrix}.$$

Мы уже сталкивались с множествами, элементы которых можно складывать и умножать на числа. Если эти операции удовлетворяют определенным свойствам, то такие множества называют векторными пространствами. Проверим, что множество матриц $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ с операциями суммы и умножения на число действительно является векторным пространством.

14.1. Теорема. Множество матриц $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ с операциями суммы и умножения на число является векторным пространством.

Доказательство. Фактически здесь нужно проверить, что сумма матриц и операция умножения матрицы на число удовлетворяют аксиомам векторного пространства 1)–8), о которых шла речь в первой теме.

1) Коммутативность сложения:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij})$$

следует из определения суммы матриц и того факта, что на уровне действительных чисел коммутативность выполнена. Действительно,

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}).$$

2) Ассоциативность сложения матриц:

$$\Big((a_{ij}) + (b_{ij})\Big) + (c_{ij}) = (a_{ij}) + \Big((b_{ij}) + (c_{ij})\Big)$$

[2] Вообще говоря, в качестве элементов a_{ij} матрицы могут выступать не только числа, но и, например, функции, или ряды, или сами матрицы, но для начального ознакомления мы будем считать, что a_{ij} — это вещественные числа.

проверяется аналогично. Проделайте это!

3) В качестве *нулевой матрицы* выступает матрица, все элементы которой — нули

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому $(a_{ij}) + \mathbf{0} = \mathbf{0} + (a_{ij}) = (a_{ij})$.

4) В качестве противоположной к матрице (a_{ij}) выступает матрица $(-a_{ij})$.

5) Дистрибутивность относительно суммы матриц:

$$\lambda\big((a_{ij}) + (b_{ij})\big) = \lambda(a_{ij} + b_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij}) = (\lambda a_{ij}) + (\lambda b_{ij}) = \lambda(a_{ij}) + \lambda(b_{ij}).$$

Легко проверить и остальные свойства. Оставим читателю их проверку в качестве обязательного упражнения. □

Любопытно вычислить размерность пространства $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Как вы помните (стр 51), для этого достаточно предъявить базис в пространстве матриц и подсчитать количество базисных элементов. Эту любопытную, но несложную задачу мы оставим читателю (задача 3.30*), снабдив ее указаниями.

15. Произведение матриц

Есть еще одна операция над матрицами, которая называется *произведением матриц*. Ее смысл можно будет объяснить после того, как мы расскажем о геометрической интерпретации матриц (см. стр 74).

Произведение определено не для всех пар матриц, а лишь тогда, когда количество столбцов первой матрицы (длина ее строк) равно количеству строк второй (длине ее столбцов).

Научимся сначала умножать строку на столбец. Рассмотрим строку длины n, т. е. матрицу $(a_{1j})_{1\times n}$ и столбец с тем же количеством элементов $(b_{j1})_{n\times 1}$. Их произведение определяется по правилу:

$$(a_{1j}) \cdot (b_{j1}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1}, \tag{3.6}$$

которое в подробной записи выглядит так:

$$(a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}.$$

Иными словами, первый элемент строки умножается на первый элемент столбца, второй элемент строки умножается на второй элемент столбца и т. д. и все полученные произведения складываются.

Таким образом, в результате произведения строки на столбец получается число! Например,

$$(1\,2\,3\,4) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 0.$$

Теперь возьмем матрицу $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m\times p}$ с m строками и p столбцами и матрицу $\mathbf{B} = (b_{kj})_{p\times n}$ с p строками и n столбцами и определим их произведение

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

как матрицу $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$ размера $m\times n$, элемент которой, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

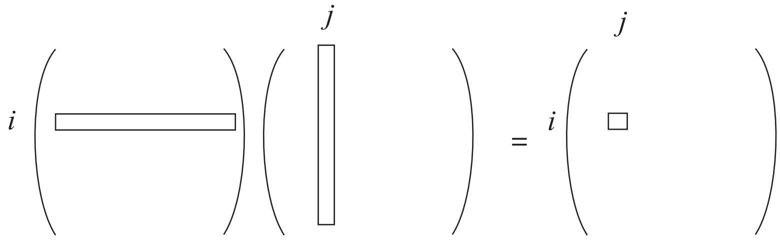


Рис. 3.2. Иллюстрация к правилу «строка на столбец»

Иначе говоря, чтобы найти элемент произведения, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, нужно каждый элемент i-ой строки матрицы A умножить на соответствующий элемент j-го столбца матрицы B, и все такие произведения сложить. Такое правило кратко называют «*строка на столбец*» (см. рис. 3.2).

Приведем пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ -1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 3 & -1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Обратите внимание! Количество строк произведения равно количеству строк первого сомножителя, а количество столбцов произведения — количеству столбцов второго.

Произведение матриц — эта одна из операций, которая ломает привычные представления о законах арифметики. Действительно, мы можем вычислить произведение таких матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

так как длина строки первой матрицы совпадает с длиной столбца второй. Если же сомножители в этом произведении поменять местами, т. е. записать произведение матриц в виде

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

то это равенство нарушается и произведение найти невозможно. Более того, после перестановки сомножителей в формуле (3.7) произведение тоже будет определено, но результат получится другой. В матрице произведения будет три строки и три столбца. Вычислите произведение самостоятельно. Подводя итог, можно сказать, что результат произведения матриц зависит от порядка сомножителей, в отличие от произведения чисел!

15.1. Свойства произведения матриц. Сформулируем полезные свойства произведения матриц. Пусть даны матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, для которых определены произведения $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ и $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}$. Тогда для них справедливы тождества:

1) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$;

2) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;

3) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.

Доказательства этих свойств оставим читателю (см. задачи 3.31*, 3.32*).

15.2. Матричная запись СЛАУ. Рассмотрим СЛАУ (3.1) (стр 61). Как мы уже знаем, по ней можно выписать матрицу коэффициентов $\mathbf{A}$ (3.2), столбец неизвестных $\mathbf{X}$ и столбец свободных членов $\mathbf{B}$. Поскольку длина строки матрицы коэффициентов совпадает с длиной столбца неизвестных, можно вычислить произведение $\mathbf{AX}$:

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\,n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Как видите, в результате получился столбец. Приравняем его к столбцу свободных членов

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\,n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

При определении матриц (стр 68) было сказано, что матрицы равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие элементы. Поэтому предыдущее равенство равносильно системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1\,n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2\,n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Иначе говоря, СЛАУ (3.1) равносильна матричному равенству:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Действительно, такая запись очень похожа на обыкновенное линейное уравнение, которое можно было бы решить как $\mathbf{X} = \mathbf{B}/\mathbf{A}$, если бы мы могли придать смысл отношению матриц.

Об отношении матриц мы поговорим чуть позже. Сейчас воспользуемся матричной записью системы для исследования ее множества решений.

16. Теорема о структуре решений однородной СЛАУ

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Как мы выяснили в предыдущем пункте, ее можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов, $\mathbf{X}$ — столбец неизвестных, а $\mathbf{0}$ — нулевой столбец свободных членов.

Решение СЛАУ, т. е. набор конкретных значений неизвестных $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, тоже можно записывать в виде столбца

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

При этом, если подставить решение $\mathbf{C}$ в матричное уравнение, то, естественно, получится верное тождество:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{0}.$$

Если система совместна и определена, то у нее только одно решение. А вот если она неопределенная, то получается некоторое множество решений. Хорошо бы понять, что оно собой представляет. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

16.1. Теорема. *Множество решений однородной СЛАУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ представляет собой векторное пространство.

Доказательство. Фактически здесь нам нужно доказать, что если $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ — решения СЛАУ, то и любая линейная комбинация $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{C}_1 + \mu\mathbf{C}_2$ тоже будет ее решением. Проверим это.

Так как $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ — решения, то $\mathbf{AC}_1 = \mathbf{AC}_2 = \mathbf{0}$. Подставим в систему столбец $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{C}_1 + \mu\mathbf{C}_2) = \text{ (по свойству 2) на стр 70) } = \lambda\mathbf{AC}_1 + \mu\mathbf{AC}_2 = \lambda\mathbf{0} + \mu\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Значит, $\mathbf{C}$ действительно является решением. □

16.2. Следствие. Если $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_r$ — решения однородной СЛАУ, то любая их линейная комбинация

$$\mathbf{C} = \lambda_1\mathbf{C}_1 + \lambda_2\mathbf{C}_2 + \cdots + \lambda_r\mathbf{C}_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\mathbf{C}_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$$

является решением данной системы.

Доказательство. Предлагаем читателю доказать это утверждение самостоятельно. □

16.3. Следствие. Если однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения, то она имеет бесконечно много решений.

Обратите внимание, что множество решений однородной СЛАУ с n неизвестными является подмножеством в $\mathbb{R}^n$ (векторном пространстве столбцов длины n), размерность которого конечна, а именно, равна n. Поэтому естественно предположить, что множество решений однородной СЛАУ обладает базисом.

16.4. Определение. Базис $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_r$ пространства решений однородной СЛАУ называется ее *фундаментальной системой решений (ФСР)*.

16.5. Утверждение. Общее решение СЛАУ записывается в виде

$$\mathbf{C}_{\text{о.о.}} = \lambda_1\mathbf{C}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{C}_r. \tag{3.8}$$

Прокомментируем это утверждение. Как мы знаем из определения (стр 50), базис — это полная линейно независимая система. Значит, через фундаментальную систему решений можно выразить любое другое решение с подходящими числовыми коэффициентами. Именно в этом смысле выражение (3.8) называют *общим* решением СЛАУ.

17. Теорема о структуре решений неоднородной СЛАУ

Рассмотрим теперь неоднородную СЛАУ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Оказывается, чтобы найти все ее решения, достаточно отыскать какое-то конкретное (*частное*) решение и прибавить к нему общее решение однородной системы $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Сформулируем это в виде теоремы.

17.1. Теорема. *Общее решение неоднородной СЛАУ* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ является суммой ее частного решения $\mathbf{C}_{\text{ч}}$ и общего решения $\mathbf{C}_{\text{о.о.}}$ соответствующей однородной системы $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{C}_{\text{о.н.}} = \mathbf{C}_{\text{ч}} + \mathbf{C}_{\text{о.о.}}.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим какое-то решение $\mathbf{C}$ системы $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ и подставим в исходную систему сумму

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}_{\text{ч}} + \mathbf{C}).$$

Раскрыв скобки, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}_{\text{ч}} + \mathbf{C}) = \mathbf{AC}_{\text{ч}} + \mathbf{AC} = \mathbf{B} + \mathbf{0} = \mathbf{B}.$$

Значит, сумма частного решения неоднородной системы с произвольным решением однородной системы снова является решением неоднородной системы. Теперь нужно показать, что любое решение неоднородной системы можно получить таким же способом. Пусть $\mathbf{C}'$ — какое-то решение неоднородной системы, т. е. $\mathbf{AC}' = \mathbf{B}$. Представим $\mathbf{C}' = \mathbf{C}_{\text{ч}} + (\mathbf{C}' - \mathbf{C}_{\text{ч}})$. Осталось показать, что $\mathbf{C}' - \mathbf{C}_{\text{ч}}$ является решением однородной системы:

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}' - \mathbf{C}_{\text{ч}}) = \mathbf{AC}' - \mathbf{AC}_{\text{ч}} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана. □

Чтобы лучше понять теорему о структуре решений СЛАУ, обратимся к примеру 3.4, где мы нашли решение неоднородной СЛАУ в виде столбца

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - a - \frac{5}{2}b \\ a \\ -\frac{1}{2}b \\ b \end{pmatrix}.$$

Преобразуем решение согласно теореме 17.1 и утверждению 16.5 при $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 - a - \frac{5}{2}b \\ a \\ -\frac{1}{2}b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{C}_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — частное решение неоднородной системы, а $\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ — решения соответствующей однородной системы, что легко проверить прямой подстановкой в систему из примера 3.4. Более того, $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ — базис пространства решений однородной СЛАУ, т. е. образуют ее ФСР. Общее же решение однородной СЛАУ запишется здесь следующим образом:

$$\mathbf{C}_{\text{о.о.}} = a\mathbf{C}_1 + b\mathbf{C}_2 = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

18*. Линейный оператор. Матрица линейного оператора

Наступил момент для геометрической интерпретации матриц. Надо сказать, что аппарат матриц был разработан в середине XIX века как раз для решения СЛАУ. Практически одновременно появилась теория линейных пространств и отображений, в которой матрицы являются чем-то вроде координат. Благодаря такой геометрической аналогии многие утверждения о матрицах стали более понятны. Сейчас мы и поговорим об этой аналогии. Начнем с некоторого класса отображений векторных пространств.

18.1. Определение. Пусть A и B — два множества. *Отображением* множества A на множество B (иногда множество B совпадает с множеством A) называется правило $f\colon A \to B$, по которому *каждому* элементу a множества A ставится в соответствие *один и только один* элемент множества B, который принято обозначать через $f(a)$.

Например, $y = x^2$ является отображением множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ на само себя, а вот $y = \sqrt{x}$ уже нельзя назвать отображением множества $\mathbb{R}$ на себя, поскольку не существует вещественного числа, равного, например $\sqrt{-1}$. Однако $y = \sqrt{x}$ — отображение множества неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ в себя.

В качестве еще одного примера можно привести отображение множества всех живущих ныне людей в вещественные числа, которое ставит в соответствие каждому человеку его рост.

Но нас сейчас будут интересовать далеко не все отображения (которых так много, что невозможно себе и представить), а лишь линейные отображения векторных пространств.

18.2. Определение. *Линейным отображением* $\mathcal{A}\colon V \to W$ векторного пространства V на векторное пространство W называется отображение, удовлетворяющее свойству *линейности*:

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V;\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{A}(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{u} + \mu\mathcal{A}\mathbf{v}.$$

Иными словами, линейное отображение сохраняет операции суммы и умножения на число.

В качестве примера линейного отображения $\mathcal{R}_\alpha$ можно предложить поворот на угол α относительно начала координат. Поскольку при повороте параллелограмм переходит в параллелограмм, то и сумма векторов будет переходить в сумму векторов. Попытайтесь доказать, что $\mathcal{R}_\alpha(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\mathcal{R}_\alpha(\overrightarrow{a})$. Вторым достаточно простым примером может служить центральная симметрия, переводящая каждый вектор в ему противоположный.

Мы уже неоднократно повторяли, что основной принцип аналитической геометрии — это привлечение чисел к геометрическим исследованиям. Поэтому рассмотрим какое-нибудь линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ и зафиксируем базисы: $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в пространстве V и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ в пространстве W.

Как мы знаем, любой вектор $\mathbf{v}$ пространства V можно записать через координаты: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Применим к этому вектору отображение $\mathcal{A}$, учитывая, что $\mathcal{A}$ — линейное отображение:

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n). \tag{3.9}$$

Таким образом, зная, как преобразуются при линейном отображении базисные векторы и координаты вектора $\mathbf{v}$, мы легко можем вычислить $\mathcal{A}(\mathbf{v})$.

Далее, векторы $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$ принадлежат пространству W и их можно разложить по базису $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$. Пусть, например,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{\varepsilon}_m,\\
&\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + a_{m2}\boldsymbol{\varepsilon}_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + a_{mn}\boldsymbol{\varepsilon}_m.
\end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в равенство (3.9).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}) &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = \\ &= x_1(a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + a_{m1}\boldsymbol{\varepsilon}_m) + \dots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \dots + a_{mn}\boldsymbol{\varepsilon}_m).\end{aligned}$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим разложение вектора $\mathcal{A}(\mathbf{v})$ по базису $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}) = &(x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n})\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ &+ (x_1a_{21} + \dots + x_na_{2n})\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ (x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn})\boldsymbol{\varepsilon}_m.\end{aligned}$$

Итак, столбец координат вектора $\mathbf{w} = \mathcal{A}(\mathbf{v})$ выглядит так:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + \dots + x_na_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

и умножим ее на столбец

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Получим:

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + \dots + x_na_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{Y}.$$

Значит,

чтобы найти координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{v})$ в базисе $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$, нужно матрицу $\mathbf{A}$ умножить на столбец координат вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$.

Матрица $\mathbf{A}$ (3.11), называется *матрицей линейного отображения* $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$.

Обратите внимание! Чтобы сформировать матрицу $\mathbf{A}$ линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$, нужно разложить вектор $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$ по базису $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ и соответствующие координаты записать в первый столбец матрицы $\mathbf{A}$; затем координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$ относительно базиса $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ записать во второй столбец матрицы $\mathbf{A}$ и, вообще, координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)$ записать в j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если при линейном отображении пространство W совпадает с пространством V, то в качестве базиса $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ принято брать базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, а само отображение $\mathcal{A}$ называть *линейным оператором*.

Приведем пример.

Пример 3.5. Найти матрицу поворота $\mathcal{R}$ на 45° в ортонормированном базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ (рис. 3.3) и вычислить координаты вектора $\mathcal{R}(\overrightarrow{a})$, если $\overrightarrow{a}(2,6)$.

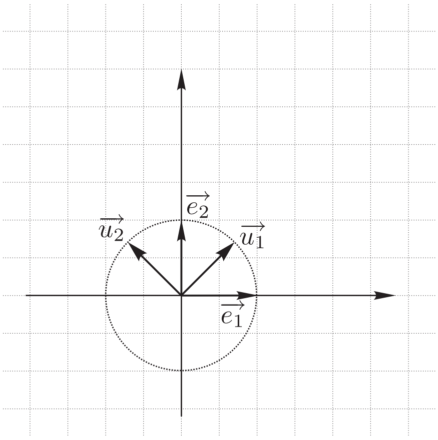


Рис. 3.3. Рисунок к задаче 3.5

Решение. Обозначим через $\overrightarrow{u_1}$ вектор $\mathcal{R}(\overrightarrow{e_1})$ и через $\overrightarrow{u_2}$ вектор $\mathcal{R}(\overrightarrow{e_2})$ и разложим эти векторы по базису $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$. Из рисунка видно, что $\overrightarrow{u_1}(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$, т. е. $\overrightarrow{u_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а $\overrightarrow{u_2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Чтобы выписать матрицу $\mathbf{R}$ поворота в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, нам нужно координаты вектора $\overrightarrow{u_1}$ записать в первый столбец матрицы $\mathbf{R}$, а координаты вектора $\overrightarrow{u_2}$ — во второй:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

С первой частью задания мы справились. Теперь определим координаты вектора $\mathcal{R}(\overrightarrow{a})$. Для этого достаточно вычислить произведение

$$\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

18.3. Действия с линейными отображениями. Если у нас есть линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$, можно определить новое отображение $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$, действующее по правилу:

$$\mathcal{B}(v) = \lambda\mathcal{A}(v).$$

Иными словами, отображение $\mathcal{B}$ — это умноженное на число λ отображение $\mathcal{A}$. Проверим, что $\mathcal{B}$ тоже является линейным отображением:

$$\mathcal{B}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \lambda\big(\mathcal{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\big) = \lambda\big(\alpha\mathcal{A}(\mathbf{u}) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{v})\big) =$$
$$= \alpha\lambda\mathcal{A}(\mathbf{u}) + \beta\lambda\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \alpha\mathcal{B}(\mathbf{u}) + \beta\mathcal{B}(\mathbf{v}).$$

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$. Это означает, что ее j-ый столбец — суть координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{e}_j)$ в базисе $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$, т. е.

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2j}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{\varepsilon}_m.$$

Вычислим теперь матрицу отображения $\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$ в тех же базисах. Для этого найдем координаты вектора $\mathcal{B}(\mathbf{e}_j)$.

$$\mathcal{B}(\mathbf{e}_j) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{e}_j) = \lambda(a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_{2j}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{\varepsilon}_m) =$$
$$= \lambda a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \lambda a_{2j}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + \lambda a_{mj}\boldsymbol{\varepsilon}_m.$$

Следовательно, j-ый столбец матрицы $\mathbf{B}$ отображения $\mathcal{B}$ получается как произведение j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$ на число λ. Значит, $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$. Иными словами,

матрица линейного отображения $\lambda\mathcal{A}$ получается из матрицы отображения $\mathcal{A}$ умножением на число λ.

Предположим теперь, что у нас есть два линейных отображения $\mathcal{A}\colon V \to W$ и $\mathcal{B}\colon V \to W$. Определим отображение $\mathcal{C}\colon V \to W$ как сумму

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u}).$$

Обязательно проверьте, что $\mathcal{C}$ тоже линейное отображение, а его матрица — это сумма матриц отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Как мы убедились, существует тесная связь между матрицами и линейными отображениями, причем сумме отображений соответствует сумма матриц, а произведению числа и отображения — произведение числа и матрицы. Такая же связь прослеживается между векторами и координатами. Поэтому естественно называть матрицу линейного отображения его координатами, но относительно двух базисов.

Теперь раскроем смысл произведения матриц. Предположим, что у нас есть три векторных пространства и два линейных отображения:

$$V \xrightarrow{\mathcal{B}} W \xrightarrow{\mathcal{A}} L.$$

Можно построить «сквозное» отображение $\mathcal{C}\colon V \to L$, которое называется *композицией отображений*

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})).$$

При этом пишут: $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

Проверим, что $\mathcal{C}$ — линейное отображение.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \mathcal{A}\big(\mathcal{B}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})\big) = \mathcal{A}\big(\alpha\mathcal{B}(\mathbf{u}) + \beta\mathcal{B}(\mathbf{v})\big) = \\ &= \alpha\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})) + \beta\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{v})) = \alpha\mathcal{C}(\mathbf{u}) + \beta\mathcal{C}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

Зафиксируем теперь базисы: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в пространстве V, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_p$ в пространстве W и $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m$ в пространстве L. Пусть $\mathbf{B} = (b_{kj})_{p\times n}$ — матрица отображения $\mathcal{B}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_p$, а $\mathbf{A} = (a_{ik})_{m\times p}$ — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}_p$ и $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m$. Тогда матрица отображения $\mathcal{C}$ в базисах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\ell}_m$ будет равна

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}.$$

Доказательство этого факта основано на прямом вычислении координат векторов $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_j))$, что довольно громоздко. В общем виде все желающие могут провести его самостоятельно, а мы разберем подробно частный случай $n = p = m = 2$.

Итак, нам нужно вычислить координаты векторов $\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_j))$ при $j = 1$ и $j = 2$. Если

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{то } \mathcal{B}(\mathbf{e}_1) = b_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2, \qquad \mathcal{B}(\mathbf{e}_2) = b_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_1)) &= \mathcal{A}(b_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2) = b_{11}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + b_{21}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \\ \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_2)) &= \mathcal{A}(b_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + b_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2) = b_{12}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + b_{22}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Тот факт, что матрица отображения $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

означает, что
$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = a_{11}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{21}\boldsymbol{\ell}_2, \qquad \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = a_{12}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{22}\boldsymbol{\ell}_2.$$
Подставляя эти соотношения в (3.12), получаем
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{e}_1) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_1)) = b_{11}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + b_{21}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = b_{11}\big(a_{11}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{21}\boldsymbol{\ell}_2\big) + b_{21}\big(a_{12}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{22}\boldsymbol{\ell}_2\big) = \\ = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\boldsymbol{\ell}_1 + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\boldsymbol{\ell}_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\mathbf{e}_2) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{e}_2)) = b_{12}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + b_{22}\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = b_{12}\big(a_{11}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{21}\boldsymbol{\ell}_2\big) + b_{22}\big(a_{12}\boldsymbol{\ell}_1 + a_{22}\boldsymbol{\ell}_2\big) = \\ = (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\boldsymbol{\ell}_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\boldsymbol{\ell}_2.\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{C}$ равна
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$
что совпадает с произведением
$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

19. Обратимые отображения и обратная матрица

Обсудим теперь «отношение матриц», о котором шла речь на стр 71. Заметим только, что несмотря на то, что этот вопрос не отмечен звездочкой, он содержит материал, как обязательный для всех, так и факультативный. К факультативной части относится все, касающееся линейных операторов, а к обязательной — все про матрицы.

Как уже отмечалось, между матрицами и линейными отображениями существует тесная связь. В некотором смысле матрицы можно рассматривать как координаты линейных отображений. В частности, произведению, или композиции линейных отображений, соответствует произведение их матриц. Поэтому пытаясь осознать, что же такое «отношение матриц», можно сначала попытаться интерпретировать «отношение линейных отображений».

Математика, как и любая другая наука, в своих исследованиях новых объектов опирается на естественные аналогии. Мы хорошо себе представляем отношение чисел. Обратите внимание, что для вычисления дроби a/b достаточно найти число $1/b = b^{-1}$, а затем взять произведение ab^{-1}. При этом известно, что

1) единица — это такое число, которое в произведении с любым другим не меняет его: $1{\cdot}a = a$;

2) b^{-1} — это такое число, называемое обратным к b, которое в произведении с b дает единицу: $b^{-1} \cdot b = 1$;

3) обратное число существует не для всех чисел, а только для ненулевых!

Примерим все три пункта к линейным отображениям, а результаты переформулируем в терминах матриц.

Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ из векторного пространства V в векторное пространство W. Опираясь на аналогию с числами, назовем *единичным* такое линейное отображение $\mathcal{E}_W\colon W \to W$, которое удовлетворяет равенству: $\mathcal{E}_W\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Подставим в это равенство произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$: $\mathcal{E}_W(\mathcal{A}(\mathbf{v})) = \mathcal{A}(\mathbf{v})$. Очевидно, последнее соотношение будет выполнено, например, тогда, когда отображение $\mathcal{E}_W$ «вообще ничего не делает», т. е. $\mathcal{E}_W(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ для всех $\mathbf{w} \in W$. Такое отображение принято называть *тождественным*. На самом деле можно показать, что единичным может быть только тождественное отображение.

Поговорим теперь об обратном линейном операторе. Помня об аналогии с числами, обратным к отображению $\mathcal{A}\colon V \to W$ должно быть такое отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon W \to V$, для которого

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_W. \tag{3.13}$$

К сожалению, ввиду некоммутативности произведения линейных отображений одного такого соотношения для определения обратного отображения недостаточно. В действительности точное определение выглядит следующим образом:

19.1. Определение. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ — линейное отображение. *Обратным* к нему называется линейное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon W \to V$, для которого

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_W, \qquad \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_V,$$

где $\mathcal{E}_V\colon V \to V$ — тождественное отображение на пространстве V.

Проанализируем свойства линейного отображения $\mathcal{A}$, при которых для него может существовать обратное отображение. Зафиксируем базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ пространства V. Как мы уже знаем (стр 74), линейное отображение полностью описывается своим действием на базисе, или векторами $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$.

На рис. 3.4, *а* схематически изображено действие $\mathcal{A}$ на базисе, где прямоугольники — это пространство V и W, точки в левом прямоугольнике — базисные векторы, а в правом — образы базисных векторов при действии оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$. Подставим теперь базисные векторы в одно из соотношений определения 19.1:

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1,\ \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n. \tag{3.14}$$

Следовательно, обратное отображение в схематической картинке должно просто оборачивать стрелки (рис. 3.4, *б*). Обратите внимание, если векторы $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$ образуют базис пространства W, то отображение $\mathcal{A}^{-1}$ будет полностью определено соотношениями (3.14). Кроме того, будут выполнены оба равенства определения 19.1. Заметим (без доказательства), что если векторы $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$ базис не образуют, то у отображения $\mathcal{A}$ нет обратного (см. аналогию 3) с числами).

Итак, для того чтобы линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ обладало обратным, необходимо и достаточно, чтобы

а) размерности пространств V и W совпадали;

б) если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства V, то $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_n)$ — базис пространства W.

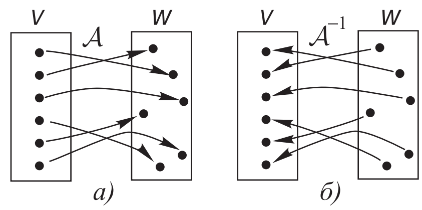


Рис. 3.4. Действие линейного оператора на базисе и обратный к нему оператор

При этом из любого равенства определения 19.1 будет следовать второе.

В задаче 3.33* приводится пример линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, для которых $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}_V$, но $\mathcal{B}\mathcal{A} \neq \mathcal{E}_W$.

Легко понять, что матрица тождественного отображения $\mathcal{E}_V$ в любом базисе выглядит так:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

У нее на главной диагонали стоят единицы, а вне — нули. Размер этой матрицы зависит от размерности пространства V: если $\dim V = n$, то размер $\mathbf{E}$ — это $n \times n$.

Проверьте, что для любой матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$ имеют место равенства: $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.

19.2. Определение. Матрица $\mathbf{E}$ (3.15) называется *единичной матрицей.*

По аналогии с линейными отображениями введем понятие обратной матрицы.

19.3. Определение. *Обратной* к матрице $\mathbf{A}$ называется такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Матрица, обладающая обратной, называется *обратимой*, или *невырожденной.*

Мы уже говорили, что если линейное отображение $\mathcal{A}\colon V \to W$ обладает обратным, то $\dim V = \dim W$. При этом в определении обратного отображения можно ограничится одним из равенств:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}_W \qquad \text{или} \qquad \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}_V.$$

В связи с этим сформулируем следующее замечание.

19.4. Замечание. Если матрица $\mathbf{A}$ — обратима, то она квадратная, т. е. число ее строк равно числу столбцов. Причем равенство $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ равносильно равенству $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

19.5. Метод Гаусса вычисления обратной матрицы. Здесь мы сформулируем и покажем на примерах алгоритм, позволяющий найти обратную матрицу или доказать, что таковой не существует. Поскольку он основан на элементарных преобразованиях строк, то алгоритм называют *методом Гаусса обращения матрицы.*

Пусть дана квадратная матрица $\mathbf{A}$. Построим новую матрицу, приписав справа к исходной единичную: $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$. Теперь, совершая элементарные преобразования строк всей «составленной» матрицы, добьемся того, что слева будет стоять единичная матрица: $(\mathbf{E}|\mathbf{B})$. Оказывается, что матрица, оказавшаяся в результате справа ($\mathbf{B}$ в наших обозначениях), и будет обратной к $\mathbf{A}$. Обратимся к примеру.

Пример 3.6. Найти матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 12 & 8 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Припишем справа к матрице $\mathbf{A}$ единичную матрицу и на первом этапе приведем получившуюся длинную матрицу к ступенчатому виду. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на -2, а к третьей — первую, умноженную на -3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 15 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Обратите внимание[3], что слева получилась матрица верхнетреугольного вида, т. е. у нее под диагональю стоят только нули. Более того, на диагонали левой матрицы нули отсутствуют, что свидетельствует о существовании обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

На следующем этапе нам нужно слева получить диагональную матрицу, т. е. матрицу, у которой ненулевые элементы могут стоять только на диагонали. Для этого ко второй строке прибавим третью, умноженную на -4, а из первой вычтем третью, умноженную на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[3]Здесь переход от одной матрицы к следующей обозначается стрелкой, поскольку мы переходим не к эквивалентным матрицам, а постепенно меняем матрицы, чтобы в результате получить обратную.

Теперь разделим всю вторую строку матрицы на 2, что в этом алгоритме вполне допустимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Осталось вторую строку умножить на -5 и прибавить ее к первой.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -18 & -5/2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, слева получилась единичная матрица. Значит, согласно алгоритму, справа стоит $\mathbf{A}^{-1}$. Убедитесь в этом!

Пример 3.7. Найти матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Припишем справа к матрице $\mathbf{A}$ единичную матрицу и на первом этапе приведем получившуюся длинную матрицу к ступенчатому виду. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на -1, а к третьей — первую, умноженную на -4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Поскольку слева получилась верхнетреугольная матрица с нулем на диагонали, то обратной матрицы к данной в задаче не существует.

Естественно, у любознательного читателя должен возникнуть вопрос: а почему, собственно, метод Гаусса обращения матриц работает. Иными словами, почему в конце алгоритма в правой части всегда будет стоять матрица, обратная к исходной? Оказывается, ответить на этот вопрос не так уж и сложно. Достаточно заметить, что все элементарные преобразования строк матрицы можно осуществить умножением ее слева на подходящую матрицу. Проверку этого факта мы оставим читателю в качестве обязательного упреждения (задачи 3.27 и 3.29), а сейчас сосредоточим внимание на обосновании метода Гаусса обращения матриц.

Практика показывает, что большинство слушателей тяжело воспринимают доказательство корректности метода Гаусса в абстрактной ситуации. В связи с этим мы обоснуем этот метод на примере 3.6, оставив общее рассуждение для пытливого читателя[4].

Первое, что мы сделали после приписывания единичной матрицы, — это к ко второй строке длинной матрицы прибавили первую, умноженную на -2. Эту операцию можно осуществить, если слева умножить как левую матрицу ($\mathbf{A}$), так и правую ($\mathbf{E}$) на матрицу

$$\mathbf{E}_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(проверьте!). Иными словами, от исходной длинной матрицы $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ мы перешли к $(\mathbf{E}_{21}(-2) \cdot \mathbf{A}|\mathbf{E}_{21}(-2) \cdot \mathbf{E})$.

[4]Надеемся, что после того, как мы полностью разберем пример, справиться с доказательством общего случая не сможет только ленивый.

Следующее действие — это прибавление к третьей строке получившейся матрицы первой, умноженной на -3, что достигается через умножение левой и правой частей матрицы на

$$\mathbf{E}_{31}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Схематично первый этап, состоящий из двух описанных операций, выглядит следующим образом:

$$\big(\mathbf{A}|\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{E}_{21}(-2)\cdot\mathbf{A}|\mathbf{E}_{21}(-2)\cdot\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{E}_{31}(-3)\cdot\mathbf{E}_{21}(-2)\cdot\mathbf{A}|\mathbf{E}_{31}(-3)\cdot\mathbf{E}_{21}(-2)\cdot\mathbf{E}\big)$$

Если обозначить произведение матриц $\mathbf{E}_{31}(-3)\cdot\mathbf{E}_{21}(-2)$ через $\mathbf{P}_1$ и пропустить в схематической записи одно действие, то первый этап метода Гаусса можно переписать как

$$\big(\mathbf{A}|\mathbf{E}\big) \to (\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}).$$

На втором этапе мы ко второй строке матрицы прибавили третью, умноженную на -4, а к первой — третью, умноженную на -2. Эти преобразования достигаются через умножение матриц на

$$\mathbf{E}_{23}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_{13}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На схеме все это выглядит так:

$$\big(\mathbf{A}|\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{E}_{13}(-2)\cdot\mathbf{E}_{23}(-4)\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{E}_{13}(-2)\cdot\mathbf{E}_{23}(-4)\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big).$$

Опять для сокращения записей введем обозначение $\mathbf{P}_2 = \mathbf{E}_{13}(-2)\cdot\mathbf{E}_{23}(-4)$ и перепишем схему:

$$\big(\mathbf{A}|\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big).$$

Наконец, мы поделили вторую строку матрицы на 2, что равносильно умножению матрицы на

$$\mathbf{E}_2(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и из первой строки вычли вторую, умноженную на 5, что достигается умножением на матрицу

$$\mathbf{E}_{12}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если ввести еще одно обозначение: $\mathbf{P}_3 = \mathbf{E}_{12}(-5)\cdot\mathbf{E}_2(1/2)$, то процесс вместе с последним этапом можно переписать так:

$$\big(\mathbf{A}|\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big) \to \big(\mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A}|\mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}\big).$$

После всех этих преобразований слева получилась единичная матрица, т. е.

$$\mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}, \tag{3.16}$$

а справа — какая-то матрица $\mathbf{B} = \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E}$. Но поскольку умножение на единичную матрицу ничего не меняет, то

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1\cdot\mathbf{E} = \mathbf{P}_3\cdot\mathbf{P}_2\cdot\mathbf{P}_1.$$

Вернемся теперь к равенству (3.16).

$$\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Примеры решения типовых задач

Пример 3.8. Исследовать на определенность однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ \ 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 13x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Поскольку данная СЛАУ однородная, то она, конечно, совместная ($(0,0,0)$ — решение). Значит, нужно выяснить, является ли она определенной согласно определению 12.6. Выпишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 13 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix} \overset{①}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{②}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Первую строку оставим без изменений. Вторую строку сложим с первой, умноженной на (-2). Третью строку сложим с первой, умноженной на (-1).

2. Заметим, что вторая и третья строки совпали. Таким строкам будут соответствовать одни и те же уравнения, решения которых, очевидно, совпадают. Поэтому одну из строк в матрице системы можно отбросить. Множество решений системы при этом не изменится. Теперь преобразованная матрица имеет ступенчатый вид. Восстановим систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \qquad\qquad\quad\ 5x_3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе два уравнения, поэтому и число базисных переменных тоже равно двум. Пусть x_1, x_3 — базисные переменные, тогда x_2 — свободная переменная, поэтому данная СЛАУ является неопределенной. Значение x_3 однозначно определяется из второго уравнения $x_3 = 0$. Учитывая этот факт, из первого уравнения выразим x_1: $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$. Свободной переменной x_2 можно присваивать произвольные значения: $x_2 = a$, $a \in \mathbb{R}$, тогда $x_1 = -\frac{3}{2}a$.

Решение исходной СЛАУ выглядит следующим образом: $x_1 = -\frac{3}{2}a$, $x_2 = a$, $x_3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Исходя из утверждения о структуре общего решения однородной СЛАУ 16.5, решение данной системы можно записать иначе:

$$\mathbf{X} = a \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Решение $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ составляет фундаментальную систему решений.

Пример 3.9. Исследовать на определенность однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad\quad + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Как и в предыдущем примере, перейдем к рассмотрению матрицы системы и преобразуем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В ходе преобразований первую строку перепишем, затем из второй строки вычитаем первую, а к третьей строке добавляем первую, умноженную на (-2). Отбросив третью строку, получим матрицу ступенчатого вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует однородная СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1, x_3 — базисные переменные, а x_2, x_4 — свободные. Обозначим $x_2 = a$, $x_4 = b$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Тогда из второго уравнения $x_3 = \frac{1}{2}x_4$, т. е. $x_3 = \frac{1}{2}b$. Выразим из первого уравнения x_1:

$$x_1 = -2x_2 + x_3 - 3x_4 \Leftrightarrow x_1 = -2a + \frac{1}{2}b - 3b \Leftrightarrow x_1 = -2a - \frac{5}{2}b.$$

В результате получаем ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -2a - \frac{5}{2}b, \\ x_2 = a, \\ x_3 = \frac{1}{2}b, \\ x_4 = b, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

или

$$\mathbf{X} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}.$$

Решения $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ составляют ФСР.

Пример 3.10. Исследовать систему на совместность и найти ее общее решение

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. С помощью тех же элементарных преобразований, которые были описаны в примере 3.9, преобразуем расширенную матрицу неоднородной системы в матрицу ступенчатого вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Базисными переменными выберем x_1 и x_3, а x_2 и x_4 — свободными. Пусть $x_2 = a$, $x_4 = b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Из второго уравнения находим $2x_3 = x_4$, значит, $x_3 = \frac{1}{2}b$. Из первого уравнения

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 2 - 2a + \frac{1}{2}b - 3b \Leftrightarrow x_1 = 2 - 2a - \frac{5}{2}b.$$

Таким образом, данная система уравнений имеет бесконечно много решений, т. е. она совместна и неопределенна.

Решение системы имеет вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2 - 2a - \frac{5}{2}b, \\ x_2 & = & a, \\ x_3 & = & \frac{1}{2}b, \\ x_4 & = & b, \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

или

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — частное решение неоднородной системы, а столбцы $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ФСР соответствующей однородной системы (сравните с решением примера 3.9).

Пример 3.11. Исследовать систему на совместность и найти ее общее решение

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 9x_4 & = & 22, \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & = & -3, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и выполним следующие действия:

1. Первую строку оставим без изменений. Ко второй строке добавим первую, умноженную на (-1). К третьей строке добавим первую, умноженную на (-3). К четвертой строке добавим первую, умноженную на (-2). Таким образом, элементы, стоящие в столбце под элементом $a_{11} = 1$, обнулились.

2. Чтобы избежать дробных коэффициентов, изменим порядок строк так, чтобы элемент, стоящий во второй строке и втором столбце, был равен единице. Для этого четвертую строку умножим на (-1) и поменяем ее местами со второй строкой.

3.Чтобы обнулить элементы, стоящие в столбце под элементом a_{22}, из третьей строки вычтем вторую, а к четвертой строке добавим вторую, умноженную на (-3).

4. Третью строку умножим на $-\frac{31}{16}$ и добавим к четвертой. Тем самым обнулится элемент,

стоящий под элементом a_{33}.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \overset{①}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \end{array}\right) \overset{②}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -9 & 13 & 47 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \end{array}\right) \overset{③}{\sim}$$

$$\overset{③}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -9 & 13 & 47 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \\ 0 & 0 & 31 & -52 & -166 \end{array}\right) \overset{④}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & -9 & 13 & 47 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \\ 0 & 0 & 0 & 377 & 754 \end{array}\right).$$

Последней строке получившейся расширенной матрицы соответствует уравнение $377x_4 = 754 \Leftrightarrow x_4 = 2$; третьей строке — уравнение $16x_3 - 39 \cdot 2 = -110 \Leftrightarrow x_3 = -2$; второй строке — $x_2 - 9 \cdot (-2) + 13 \cdot 2 = 47 \Leftrightarrow x_2 = 3$. Из первой строки получаем $x_1 - 3 - 4 \cdot (-2) + 9 \cdot 2 = 22 \Leftrightarrow x_1 = -1$. Итак, исходная СЛАУ имеет единственное решение

$$x_1 = -1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2;\ x_4 = 2.$$

Контрольные вопросы

3.1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
3.2. Дайте определение матрицы СЛАУ.
3.3. Что такое расширенная матрица СЛАУ?
3.4. Что называется решением СЛАУ?
3.5. Какая СЛАУ называется однородной, а какая неоднородной? Приведите примеры.
3.6. Чем отличаются совместная и несовместная системы?
3.7. Какие СЛАУ называются неопределенными?
3.8. Является ли однородная СЛАУ совместной? Ответ обоснуйте.
3.9. Приведите примеры элементарных преобразований матрицы.
3.10. Дайте определение матрицы ступенчатого вида.
3.11. Дайте определение линейных операций над матрицами.
3.12. Сформулируйте правило умножения одной матрицы на другую.
3.13. Перечислите свойства произведений матриц.
3.14. Что называется фундаментальной системой решений однородной СЛАУ?
3.15. Какова структура решений однородной СЛАУ?
3.16. Сформулируйте теорему о структуре решений неоднородной СЛАУ.

Задачи

3.1°. Является ли $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ решением системы

$$\begin{cases} x + y = 2\sqrt{5}, \\ \frac{x}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = 8? \end{cases}$$

3.2°. Совместна ли система

$$\begin{cases} 2,5x - 1\frac{1}{3}y = 1, \\ -15x + 12y = -3? \end{cases}$$

В задачах 3.3°-3.5° решите систему уравнений.

3.3°.
$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - y = -4. \end{cases}$$

3.4°.
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -4, \\ 2x + \frac{1}{6}y = -7. \end{cases}$$

3.5°.
$$\begin{cases} x + y - z = -4, \\ -x + y + z = 0, \\ x - y + z = 10. \end{cases}$$

В задачах 3.6-3.11 исследуйте на определенность и найдите решение однородных СЛАУ.

3.6.
$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$$

3.7.
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

3.8.
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 2x + 3y - 5z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

3.9.
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

3.10.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3.11.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

В задачах 3.12-3.13 определите значения параметра a, при которых однородная СЛАУ имеет нетривиальные решения. Найдите эти решения.

3.12.
$$\begin{cases} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

3.13.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

В задачах 3.14-3.21 исследуйте неоднородные СЛАУ на совместность и найдите (общее) решение системы.

3.14.
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

3.15.
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + y - z = 0, \\ -x - y + 5z = 4, \\ x + y + 5z = 6. \end{cases}$$

3.16.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ 3x - y = 4, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$$

3.17.
$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 5, \\ 4x + y = 7, \\ 5x + 2y = 8. \end{cases}$$

3.18.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ 3x - y = 4, \\ 4x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

3.19.
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

3.20.
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

3.21.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

В задачах 3.22–3.26 найдите обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ методом Гаусса.

3.22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3.23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$

3.24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

3.25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.27. Обозначим через $\mathbf{P}_{ij}$ матрицу, получающуюся из единичной в результате перестановки i-ой и j-ой строк (рис. 3.5, *а*); через $\mathbf{E}_{ij}(\lambda)$ — матрицу, которая получается из единичной при прибавлении к i-ой ее строке j-ой, умноженной на λ (рис. 3.5, *б*), а через $\mathbf{E}_i(\mu)$ — матрицу, получающуюся из $\mathbf{E}$ в результате умножения ее i-ой строки на μ (рис. 3.5, *в*).

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \qquad \mathbf{E}_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \lambda & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \qquad \mathbf{E}_i(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

а) *б)* *в)*

Рис. 3.5. Рисунок к задаче 3.27

Докажите, что при матрица $\mathbf{P}_{ij}\mathbf{A}$ получается из $\mathbf{A}$ перестановкой i-ой и j-ой строк; матрица $\mathbf{E}_{ij}(\lambda)\mathbf{A}$ получается из $\mathbf{A}$ в результате прибавления к ее i-ой строке j-ой, умноженной на λ; матрица $\mathbf{E}_i(\mu)\mathbf{A}$ получается из $\mathbf{A}$ после умножения i-ой строки матрицы $\mathbf{A}$ на λ.

3.28. Чем отличаются матрицы $\mathbf{AP}_{ij}$, $\mathbf{AE}_{ij}(\lambda)$ и $\mathbf{AE}_i(\mu)$ от матрицы $\mathbf{A}$?

3.29. Опираясь на задачу 3.27, обоснуйте метод Гаусса обращения матрицы.

3.30*. Определите размерность пространства $\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, показав, что матрицы, у которых все элементы равны нулю, кроме одного, равного 1, образуют базис. Таких матриц ровно $m \cdot n$, по количеству элементов матрицы.

3.31*. Рассмотрим линейные отображения

$$V \xrightarrow{\mathcal{C}} W \xrightarrow{\mathcal{B}} L \xrightarrow{\mathcal{A}} H.$$

Используя аксиомы векторного пространства, докажите, что для этих линейных отображений выполнено свойство:

$$(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}).$$

Покажите, как из него следует ассоциативность произведения матриц: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

3.32*. Пусть даны линейные отображения: $\mathcal{B}\colon V \to W$, $\mathcal{A}\colon V \to W$ и $\mathcal{C}\colon W \to L$. Докажите, что

$$\mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \mathcal{CA} + \mathcal{CB}.$$

Выведите отсюда соответствующее свойство матриц.

3.33*. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — базис векторного пространства V, а $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ — базис пространства W. Зададим линейное отображение $\mathcal{A}$: $V \to W$ действием на базисных векторах: $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \boldsymbol{\varepsilon}_2$. Отображение $\mathcal{B}$: $W \to V$ действует по правилу: $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{e}_1$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathbf{e}_2$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \mathbf{e}_1$. Проверьте, что $\mathcal{BA} = \mathcal{E}_V$, но $\mathcal{AB} \neq \mathcal{E}_W$.

Кулешов Сергей Алексеевич, дфмн, профессор кафедры "Высшая математика" Военно-воздушной Академии имени проф. Н. Е. Жуковского. KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна, кпн, доцент той же кафедры. afsalimova07@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович, кфмн, доцент той же кафедры. stav@inm.ras.ru

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.matob.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2009 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2009 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Предполагается вывешивать статьи в формате PS и/или PDF в архиве на сайте журнала. Просим авторов предоставляемых статей сообщать, согласны ли они на это.

Contents