ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год тринадцатый

№ 3 (51)

июль – сентябрь 2009 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Бондал А.И.
Дориченко С.А. (заместитель главного редактора)
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 3 (51), 2009 г.

©“Математическое образование”, составление, 2009 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2009 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.09.2009 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3 (51), июль – сентябрь 2009 г.

Содержание

Геометрия и действительные числа в физике

А. И. Бондал

Физические теории строятся в предположении, что выбрано так называемое основное числовое поле, которое в большинстве случаев оказывается полем действительных чисел. Автор показывает, что этот выбор далеко не очевиден и с математической точки зрения не является ни самым простым, ни самым естественным. Выбор других полей может привести к развитию новых содержательных физических теорий. Интересные алгебро-геометрические концепции, развитые А.Гротендиком, могут оказаться существенными наводящими соображениями в этом направлении. Статья ранее опубликована на японском языке в журнале "Kagaku (science)", Vol. 79, No. 7 (2009), pp. 794-797. На русском языке публикуется впервые.

Современная физика основана на действительных числах. Все объекты, с которыми ежедневно имеет дело физик-теоретик: действительные векторные пространства, комплексные многообразия, гильбертовы пространства, эрмитовы операторы и т.п. — оказываются осмысленными при условии, что мы рассматриваем действительные числа (или довольно умеренное их расширение — комплексные числа) в качестве того, что математики называют "основным полем". Это значит, что сделан выбор совокупности чисел, с которой мы работаем. Мы ожидаем, что эти числа можно складывать, вычитать, перемножать и делить одно на другое. Когда выбор зафиксирован, математики исследуют различные конструкции, лежащие в основе соответствующих разделов математики, таких как линейная алгебра, гомологическая алгебра, теория Ли, алгебраическая геометрия и т.п.

Заметим, что выбор действительных чисел ни в коем случае не является единственным с точки зрения современной математики: есть много других возможностей выбора полей, например, поля рациональных чисел, алгебраических чисел, конечных полей, p-адических полей и т.п. Огромная часть современной математики посвящена изучению различных феноменов, относящихся к объектам, которые живут в этих "параллельных мирах", построенных над другими полями. Между этими мирами имеются интересные взаимоотношения, которые разнообразят научную жизнь математиков.

Это может показаться удивительным, но с точки зрения чистой математики действительные числа вовсе не являются самым "естественным" выбором. Математики — довольно бесхитростные люди. Им нравится, когда их теории основаны в конечном счете на простой и прямой логике. Типичное сотрудничество между математиком и физиком-теоретиком можно кратко описать так. Физик объясняет математику свое новое интересное открытие, которое обычно вырастает из сравнения различных теорий, долгих вычислений, а также из физических допущений и догадок. Математик старается выделить из этого самые основные и, как он надеется, простейшие математические концепции, чтобы переинтерпретировать результаты физика в строгих математических терминах. В случае успеха он развивает основанную на этой концепции теорию, которая, в зрелом виде, становится в свою очередь полезной для физика.

Да, математик верит, что эта концепция должна быть очень простой, "детской". И действительно, история науки показывает, что любая сложная теория рано или поздно получает простое и прозрачное основание, делающее саму теорию ясной и лаконичной. Однако он знает, что достичь этой ясности и чистоты — совсем не простая задача. Обычно профессиональному математику с хорошим знанием математической культуры гораздо проще получить самые замысловатые заключения из простой хорошей концепции, чем положить начало самой концепции. Вполне возможно развивать способность делать логические заключения в заданных рамках, но всегда очень трудно изобрести что-то выходящее за эти рамки. Сама возможность такого трансцендентного перехода из одной среды в другой параллельный мир — это пленительная черта науки, которая делает исследовательскую деятельность такой привлекательной для всех ее участников.

Французский математик Александр Гротендик оказался тем математиком 20-го века, который смог полностью изменить лицо одного из важных разделов математики — алгебраической геометрии — посредством своих удивительных "детских" концепций. Ниже мы обсудим некоторые из его идей.

Алгебраическая геометрия изучает геометрические объекты, которые можно описать чисто алгебраическими средствами. Такое описание становится возможным благодаря открытию, восходящему (по крайней мере) к Рене Декарту, французскому математику и философу 17-го века. Он ввел в пространстве систему координат и описал точку пространства набором чисел — координатами этой точки. В результате некоторые геометрические образы в пространстве, такие как кривые, поверхности и, более общо, "алгебраические многообразия", были описаны как множества точек — общих решений систем полиномиальных уравнений от нескольких переменных. Простым примером, известным всем из средней школы, является единичная окружность. В этом случае пространством является плоскость с двумя координатами, скажем, x и y, а окружность задается как множество точек, удовлетворяющих хорошо известному полиномиальному уравнению от этих двух координат:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Это квадратное уравнение от x и y. Если мы найдем любые x и y, удовлетворяющие этому уравнению, мы получим точку окружности.

В этом рассуждении x и y были действительными числами. Это значит, что мы молчаливо предположили, что нашим основным полем было поле действительных чисел. Но мы могли выбрать и любое другое поле, например, конечное поле чисел по модулю 5. Это значит, что в качестве элементов поля мы берем только целые числа от 0 до 4, а любое другое целое n, большее 4 или меньшее 0, отождествляется однозначно с одним из этих чисел, например, k, требованием, чтобы $n-k$ делилось на 5. Наше уравнение окружности вполне осмыслено в этом поле. Например, если мы возьмем $x = 4$ и $y = 0$, мы получим точку на нашей окружности, поскольку $4^2 + 0^2 = 16 = 1$ в этом поле.

Такой выбор поля может показаться очень экзотическим. Но с точки зрения математика он гораздо проще, чем выбор действительных чисел. Для сравнения, чтобы строго определить действительные числа, сначала определяют целые числа, а затем рациональные числа как дроби вида m/n, где m и n — целые. Еще древними греками было открыто, что этого все же недостаточно: диагональ квадрата со стороной длины 1, которая по теореме Пифагора является решением полиномиального уравнения

$$x^2 = 2,$$

не выражается рациональным числом. Поэтому следует ожидать дальнейшего расширения. Для поля чисел по модулю 5 это уравнение вообще не имеет решения. Но мы можем расширить наше поле формальным присоединением решения этого уравнения. Более того, мы можем присоединить к полю все решения всех полиномиальных уравнений с коэффициентами из нашего поля. К сожалению, если мы применим эту процедуру к рациональным числам, известно, что ее недостаточно для получения всех действительных чисел из рациональных. Например, длина нашей единичной окружности не есть число, которое можно получить такой процедурой; это число является трансцендентным.

Для определения действительных чисел приходится рассматривать подходящие бесконечные последовательности рациональных чисел и формально присоединять пределы этих последовательностей. Строго говоря, это означает, что мы должны рассматривать сами эти последовательности как новые числа. Заметим, что многие последовательности могут дать одно и то же действительное число в качестве предела. Это тоже надо учитывать как соответствующее отношение эквивалентности на совокупности последовательностей.

Такая конструкция действительных чисел вовсе не выглядит прямой и естественной с чисто математической точки зрения. Математик может наивно спросить, почему физики в качестве основного поля рассматривают действительные числа, а не какое-либо поле попроще. Естественный ответ для ученого 19-го века был бы таким: “мы наблюдаем наше пространство как нечто, имеющее 3 непрерывных направления, и эти непрерывные направления можно описать только при помощи действительных чисел”. Но из удивительных физических открытий первой половины 20-го века мы знаем, что существуют дискретные или квантовые эффекты, которые проявляются, в частности, на очень малых расстояниях. Поэтому наш мир может оказаться гораздо более сложным, чем просто непрерывным.

Тем менее, квантовая механика, основная физическая теория, которая предназначена описывать дискретные феномены нашего физического мира, дает только предсказания для вероятности того, что наблюдаемая величина принимает значения в заданном интервале действительных чисел. Мы повторяем многократно один и тот же эксперимент, измеряем выбранную наблюдаемую величину и определяем долю тех экспериментов (назовем их успешными), в которых значение наблюдаемой оказывается в заданном интервале. Заметим, что эта доля является рациональным числом: отношение числа успешных экспериментов к числу всех экспериментов. К сожалению, квантовая механика предсказывает не эти рациональные числа, а только их пределы, когда число экспериментов стремится к бесконечности.

Можно высказать догадку, что имеются некоторые “скрытые” (действительные) параметры, которые не выявляются квантовой механикой, но все же могут быть открыты, и именно эти параметры могли бы дать точное предсказание о точном рациональном числе — доле успешных экспериментов. К несчастью, было показано, что эта догадка неверна. Есть математически строгое доказательство, что существование скрытых параметров привело бы к противоречию с основными предсказаниями квантовой механики.

Обратите внимание, что эта идея скрытых параметров основана на допущении, что наше основное поле — поле действительных чисел. Если мы стараемся избежать действительных чисел в теоретических конструкциях квантовой механики, нам придется радикально изменить теорию. Не только значения наших измеряемых величин могли бы не быть действительными числами, но также и основное предсказание квантовой механики (мы помним, что это предел рациональных чисел, полученных в серии экспериментов) должно быть заменено чем-то другим. Это титаническая проблема, где сотрудничество математиков и физиков при изучении нашей Вселенной могло бы быть особенно полезно.

Одно из очевидных препятствий на пути решения этой проблемы — огромное разнообразие полей, причем кажется, что нет особо предпочтительного внутренне оправданного выбора. Фактически, мы можем сделать шаг вперед и спросить: если не рассматривать действительные числа как адекватное устройство, управляющее физикой нашего мира, почему вообще надо верить, что она управляется каким-то числовым полем? Может случиться, что наш мир имеет более комбинаторную, чем числовую природу. Какой могла бы быть математическая теория для такого мира?

Многие считают, что математика — это наука о числах. Конечно, во многом это так, и это значительная часть современной математики, но похоже, что математика теперь наука не только о числах. На пути изучения различных теорий и попыток понять внутренний смысл различных математических конструкций математика постепенно развивает идеи, оперирующие не столько с числами, сколько с понятиями. Тем не менее, числа остаются основным средством проверки обоснованности любой математической теории.

Примером такой линии развития в математике является понятие алгебраического многообразия, как оно было заложено А. Гротендиком. Первые ясные представления о многообразии как о геометрическом объекте, имеющем “продолжения в нескольких направлениях”, восходят к гениальному германскому математику Бернгарду Риману. Он развил их в своей известной лекции при вступлении в должность “О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии”, прочитанной для не математиков. Первое точное определение многообразия, близкое к тому, которое остается самым популярным для большинства математиков и физиков, было дано Германом Вейлем в его замечаниях к лекции Римана. Он определяет многообразие как нечто, что склеено из простых маленьких кусочков, каждый из которых выглядит как окрестность точки в векторном пространстве над полем действительных чисел.

Гротендик развил понятие многообразия в подходе алгебраической геометрии, где его обычно называют алгебраическим многообразием. Сначала он ввел понятие схемы, подходящее для определения тех геометрических объектов, которые появляются в результате пересечения двух алгебраических многообразий, касающихся друг друга в некоторых общих точках. Например, прямая $x = 1$ является касательной к единичной окружности в точке $(1, 0)$, и поэтому пересечение прямой и окружности — не просто эта точка, а схема, представляющая “двойную точку” в точке $(1, 0)$.

Далее рассмотрение наиболее основных простых и существенных свойств многообразий и схем привело его к полному пересмотру понятия многообразия. Сначала он пересмотрел понятие точки. Каждое многообразие состоит из точек. Уже в случае схем “точки” понимаются в расширенном смысле; они выглядят скорее подмногообразиями, чем просто точками. Это позволяет точкам “чувствовать” друг друга посредством “бо́льших” точек. Гротендик возводит понятие точки на категориальный уровень: есть много типов точек, и эти типы образуют категорию. Категория типов содержит информацию о всех возможных соотношениях между различными типами. Многообразие описывается как подходящий набор точек различных типов. Эти идеи придают понятию многообразия, которое исходно было чисто геометрическим, алгебраическую природу.

Когда многообразие описывается при помощи таких абстрактных категориальных данных, совсем не ясно, каково геометрическое содержание этого понятия. Однако это геометрическое содержание важно отслеживать, поскольку именно геометрическое ви́дение всегда помогает понимать наиболее глубокие структуры, открытые математиками и физиками. Существует понятие локальности, относящееся к любому геометрическому объекту. Локальность выражается в математике в терминах топологии, науки, которая также была создана Риманом. Гротендик преобразовал топологическую информацию о локальности в соответствующие данные о категории типов точек. Эти данные теперь называются топологией Гротендика.

Это, вероятно, самый глубокий из известных в настоящее время математических подходов к понятию пространства; он нашел различные приложения в теории чисел, анализе, топологии и алгебраической геометрии. Он имеет огромный потенциал для различных обобщений. Просто изменяя категорию типов точек и выбирая подходящую топологию Гротендика, можно определить, например, некоммутативную геометрию, а также много других новых математически осмысленных теорий. Благодаря этому есть шансы, что новая парадигма квантовой физики будет использовать идеи Гротендика о структуре пространств в качестве одной из существенных компонент.

Как это может помочь выявлению роли действительных чисел в физике? Конструируя действительные числа, мы начали с целых чисел и были вынуждены широкомасштабно расширять множество чисел, которые мы рассматриваем. Почему бы не двинуться в обратном направлении, стараясь минимизировать рассматриваемое числовое поле (архетипическая математическая идея упрощения!)?

К счастью, кажется, есть математический объект, который хотя до сих пор и не понят как следует, но в настоящее время интенсивно изучается математическим сообществом. Этот таинственный объект, окрещенный “полем из одного элемента”, возможно перебрасывает мост между комбинаторикой и теорией числовых полей. Заметим, что “поле из одного элемента” не является полем в обычном смысле, поскольку в обычном поле 1 отличается от 0, значит, каждое поле имеет по крайней мере два элемента: 1 и 0. Тем не менее, некоторые его предварительные определения даны в стиле категориального подхода Гротендика к определению основных объектов алгебраической геометрии. Есть много интересных математических предсказаний и ожиданий комбинаторной природы относительно этого "поля". У него есть счастливое свойство быть в некотором смысле универсальным. Ожидается, что интересная версия алгебраической геометрии в духе Гротендика может существовать над полем из одного элемента. Будущее покажет, какую роль эта геометрия может сыграть в физике вне рамок действительных чисел.

Бондал Алексей Игоревич,
доктор физико-математических наук,
и.о. ведущего научного сотрудника
отдела алгебры МИРАН.

Email: bondal@mi.ras.ru

О преподавании алгебры и начал анализа в школе

А. В. Гладкий

В статье анализируется эволюция уровня преподавания курса алгебры и начал анализа (эпизодически также геометрии) в средней школе — как с точки зрения содержания образования, так и методики преподавания. Обсуждаются возможные пути повышения уровня, в частности, путем написания соответствующих учебных пособий.

Уже около шестидесяти лет я не перестаю думать о преподавании математики в школе. Когда я учился в Московском педагогическом институте им. Ленина, мои амбиции ограничивались тем, чтобы стать хорошим учителем. А когда Петр Сергеевич Новиков взял меня в аспирантуру, амбиции возросли: теперь я хотел стать хорошим преподавателем провинциального пединститута. Потом много лет работал в вузах, готовивших учителей, и регулярно бывал в школах. Самому преподавать в школе долго не удавалось: директора школ не решались доверить даже один предмет в одном классе университетскому профессору, хотя официального запрета не было, из соображений «как бы чего не вышло». (Исключением были математические классы, но они меня мало интересовали.) В «перестроечное» время положение изменилось, и я начал преподавать в школе, как и многие мои коллеги. А в 2000-м г. ушел из Российского государственного гуманитарного университета, где работал с 1991 года, и преподаю с тех пор только в школе. Сейчас у меня уже довольно большой опыт преподавания в старших, средних и даже начальных классах, и вместе с многолетним опытом преподавания в высшей школе получается неплохой материал для размышлений, которыми я хотел бы поделиться с читателями, в основном ограничиваясь соображениями, относящимися к наиболее близким мне курсам «Алгебра» и «Алгебра и начала анализа». (Конечно, иногда придется нарушать это ограничение.)

I

Когда я был школьником, арифметика, алгебра и геометрия изучались по слегка переработанным учебникам А. П. Киселева. Для конца XIX столетия, когда они были написаны, их научный уровень был очень высоким, а в методическом отношении это подлинные шедевры. Учебник геометрии Киселева переиздается до сих пор, и я тоже им пользовался, когда преподавал этот предмет. Но алгебру сейчас невозможно изучать по Киселеву, потому что содержание этого курса очень сильно изменилось — настолько, что возникает сомнение, правомерно ли сохранять его прежнее название.

Алгебра у Киселева остается тем, чем была в течение многих веков — наукой о решении уравнений. За сравнительно небольшими исключениями содержание его учебника подчинено одной центральной теме: какие бывают уравнения и системы уравнений и как их решать. После основательной предварительной подготовки, включающей изучение многочленов и алгебраических дробей, рассматриваются линейные уравнения, затем квадратные; потом появляются некоторые уравнения высших степеней и даже неалгебраические: иррациональные, показательные, логарифмические. А вокруг этого обширный материал, необходимый для обстоятельного изучения всех этих типов уравнений: извлечение квадратного корня, иррациональные числа, функции и их графики, обобщение понятия степени, логарифмы, комплексные числа. Фактическим завершением курса служит глава об общих свойствах многочленов и алгебраических уравнений.

Почти все это еще в 40-х и 50-х гг. входило в обязательную программу средней школы (а также элементы комбинаторики, бином Ньютона и прогрессии — у Киселева это тоже есть)[1]. Сравнив те разделы учебника Киселева, которые изучались в 6–8 классах, с современными учебниками алгебры для соответствующих им теперь 7–9 классов, мы увидим, что там излагается, по существу, другая наука. Уравнения и системы уравнений, конечно, остались, но перестали быть главным стержнем курса, а на первый план вышли функции. Мы найдем там не только много разнообразных примеров функций и понятия области определения и множества значений, но и такие свойства функций, как монотонность, ограниченность, четность и нечетность, выпуклость и даже непрерывность. Фактически это не алгебра, а пропедевтика математического анализа. С таким изменением направления связано и значительное усиление внимания к неравенствам. В этом же курсе изучаются теперь тригонометрические функции. (Зато нет, например, умножения многочленов «столбиком» и деления «уголком» — самого интересного, что было в мои школьные времена в алгебре в 6-м классе.)

Разумеется, содержание любого школьного курса должно время от времени обновляться вслед за развитием науки. Однако более естественным было бы такое обновление школьной алгебры, при котором она осталась бы алгеброй, но обогатилась бы идеями, появившимися в этой науке в XIX веке. Можно было бы обратить внимание на свойства операций над многочленами и алгебраическими дробями и сравнить их со свойствами операций над целыми, рациональными и действительными числами. Потом к ним добавились бы свойства операций над множествами; можно было бы подобрать для упражнений много наглядных примеров систем математических объектов, в которых естественным образом определяются операции, и объяснить, для чего эти операции нужны. И постепенно вырисовались бы главные идеи более новой алгебры — той, которая была новой во второй половине XIX столетия. А во второй части курса, в старших классах, появилось бы много возможностей развить эти идеи дальше.

II

Но при реформировании школьного курса алгебры, предпринятом в 60-х–70-х гг. теперь уже прошлого столетия, был избран другой путь. Еще в начале этого столетия многие ученые и педагоги в европейских странах, включая Россию, выступали за реформу преподавания математики в средней школе, сильно отставшего к тому времени от развития математической науки, и особенно важным считали включение в школьный курс элементов дифференциального и интегрального исчислений[2]. Можно сослаться, например, на статью Э. Бореля [4], опубликованную в 1914 г. и в том же году вышедшую в русском переводе. Позволю себе привести цитату: «Математика, преподаваемая в нашей средней школе, есть лишь схоластический пережиток, тогда как миром правит другая математика, и лишь малому числу избранных дано восторгаться гордой мощью этой математики. Но всякий образованный человек должен по крайней мере знать, что эта математика существует, а не представлять себе всех математиков вроде маньяков, проводящих дни и ночи за извлечением кубических корней.» Говоря о «другой математике», Борель имеет в виду прежде всего дифференциальное и интегральное исчисления, «одно имя которых вселяет в непосвященных страх», и настаивает на том, что учения, связанные «с четырьмя великими именами: Галилея, Декарта, Ньютона и Лейбница», должны занять в средней школе подобающее им место.

Именно такую цель ставили перед собой А. Н. Колмогоров и его сотрудники, разработавшие курс «Алгебра и начала анализа», введение которого заставило внести существенные измене-

[1] Школ и классов «с физико-математическим уклоном» тогда не было. Профильные школы и классы возникли в начале 60-х гг. как реакция на реформу, сделавшую среднее образование обязательным, что привело к резкому снижению его качества. Небезынтересно заметить, что в 1971 г. против создания школ для особо одаренных детей выступил в печати П. Л. Капица [1]; очень интересна также переписка А. Н. Колмогорова и П. Л. Капицы по этому вопросу [2].

[2] О движении за реформирование школьного преподавания математики в предреволюционной России см. в статье Н. Я. Виленкина [3].

ния и в преподавание алгебры в средних классах. К сожалению, эта цель не была достигнута; более того, результаты реформы оказались во многом противоположными тем, на которые рассчитывали ее организаторы. Неудача была обусловлена прежде всего системой управления образованием и системой подготовки учителей. Важным элементом советской системы управления образованием, к 70-м годам окончательно закосневшей, были «стабильные учебники», по которым обязаны были преподавать учителя во всей огромной стране. Переходу на новый стабильный учебник предшествовало его «экспериментальное опробование», но оно было чисто формальным: в нескольких городах и районах всем учителям данного предмета предписывалось работать по пробному учебнику и писать отчеты, причем отрицательные отзывы во внимание не принимались. И когда новый учебник становился обязательным для всех, учителя часто испытывали значительные трудности, особенно в тех случаях, когда научный уровень учебника повышался. Возникали эти трудности в основном из-за усиленно прививавшегося студентам пединститутов представления, будто учителю достаточно знать свой предмет в пределах школьной программы, так что на изучение научных дисциплин можно не обращать особого внимания. Понятно, что воспитанный в таком духе учитель при каждом изменении программы оказывается беспомощным[3]. Между тем реформа курса алгебры весьма существенно изменила программу, и не менее существенно изменилась программа реформированного тогда же курса геометрии. Геометрия и при традиционном изложении по Киселеву была трудна для школьников, а новый учебник, возникший в результате сотрудничества А. Н. Колмогорова с талантливыми педагогами-математиками А. Ф. Семеновичем и Р. С. Черкасовым, был намного труднее. Но это книга добротная, тщательно продуманная, богатая новыми методическими идеями. В нормальных условиях этот учебник был бы сначала взят на вооружение небольшим числом учителей, а со временем на его основе теми же или другими авторами были бы созданы учебные пособия, которые получили бы более широкое распространение. Массового же «внедрения» он не выдержал и вскоре был заменен учебником А. В. Погорелова, обладающим внешними признаками «традиционности», а на самом деле тоже отошедшим от традиции очень далеко — с тем различием, что нетрадиционность колмогоровского учебника была обусловлена стремлением приблизить школьный курс к современным научным требованиям, а погореловского — личными вкусами автора[4]. Для школьников он тоже труден, но трудности здесь искусственные, не вызванные необходимостью. Потом появились и другие учебники геометрии, среди которых нельзя не выделить прекрасные книги И. Ф. Шарыгина. Но самым распространенным до сих пор остается учебник Погорелова (ко всему прочему написанный крайне небрежно и плохим языком). Искусству доказательства этот учебник учит гораздо хуже, чем учебник Киселева, потому что многие классические рассуждения, опирающиеся на наглядные представления, заменены в нем либо вычислениями, либо изысканными конструкциями, которые может оценить лишь искушенный в математике человек; школьник то и другое воспринимает как своего рода цирковые фокусы, непонятно для чего нужные. Кроме того, разрушена складывавшаяся десятилетиями культура решения геометрических задач. Решается гораздо меньше задач на доказательство, а задачи на построение исчезли вовсе. Таким образом, реальный уровень преподавания геометрии стал существенно ниже. Доходит до того, что методисты вполне официально рекомендуют учителям требовать знания только тех геометрических фактов, которые нужны для решения задач — разумеется, вычислительных, потому что при такой установке ни о каких других речи быть не может. Геометрия стала второстепенным предметом, и понижение ее статуса было подтверждено отменой обязательных экзаменов по геометрии, как переводных, так и выпускных.

Учебник алгебры и начал анализа под редакцией А. Н. Колмогорова также оказался трудным, но в меньшей степени, чем учебник геометрии. Он был переработан в сторону облегчения и

[3]В конце 80-х гг. пишущий эти строки попытался проанализировать советскую систему подготовки учителей в книге [5]. Эта книга осталась неопубликованной, но она размещена на сайте http://modernproblems.org.ru, в разделе «Образование и воспитание». (Мне представляется, что эта книга не утратила актуальности и сейчас, т. к. система в основных чертах осталась прежней. Подробнее см. в предисловии к книге, написанном в 2003 г.)

[4]Об учебнике А. В. Погорелова см. в статьях [6] и [7].

используется до сих пор. Написан он весьма тщательно, выдержан в едином стиле (чего очень нелегко добиться в книге, написанной коллективом авторов) и аккуратностью изложения выгодно отличается от других известных мне пособий по этому курсу[5]. (Должен оговориться, что знаю далеко не все пособия — их вышло потом довольно много.) Но в центральных разделах книги, посвященных элементам дифференциального и интегрального исчислений, уровень строгости определений и доказательств значительно ниже того, который был выдержан в написанных на сто лет раньше учебниках Киселева. (В других известных мне пособиях он еще ниже.)

Что же получилось в конечном счете в результате реформы?

III

Уже очень давно справедливо считается, что математике нужно учить детей, с одной стороны, потому, что она в той или иной степени пригодится им в жизни, с другой — потому, что она, по словам Ломоносова, «ум в порядок приводит», то есть приучает к четкому, ясному и упорядоченному мышлению, помогает выработать навыки логического рассуждения. Ясно, что чем старше дети, тем больше внимания нужно уделять второй задаче.

По старой традиции в европейской школе, в том числе российской, в средних и старших классах функцию «приведения ума в порядок» выполнял главным образом курс геометрии, но и в алгебре были разделы, хорошо служившие этой цели. Так было в течение многих десятилетий, но после введения в школьную программу элементов дифференциального и интегрального исчислений традиция была нарушена. Из курса алгебры многое было изъято, причем как раз то, что в наибольшей степени способствовало «приведению ума в порядок» и расширению кругозора (комбинаторика, бином Ньютона, комплексные числа, теорема Безу). Освободившееся место заняли производные и интегралы, о которых рассказывают в стиле тех времен, когда начала анализа были, по выражению Г. М. Фихтенгольца, «покрыты мистическим туманом». Получился курс, который не только не способствует развитию навыков четкого и упорядоченного мышления, но, напротив, разрушает их, отучает от строгих рассуждений, от доказательств. А донести до школьников идеи, лежащие в основе понятий производной и интеграла, при этом не удается. Наивно было бы думать, что изложить эти понятия без обоснования так, чтобы было в самом деле понятно, легче, чем с обоснованием. В старые времена были, видимо, преподаватели, умевшие их так излагать, но это искусство давно забыто. И фактически все, что получает нынешний школьник в результате изучения «начал анализа» — это навыки выполнения некоторых формальных операций, смысл которых ему непонятен. Причиняемый таким преподаванием вред очевиден, а польза равна нулю: всем, кому могут потом понадобиться для работы хотя бы только элементы математического анализа, придется изучать его заново, и то, что они учили в школе, им в этом не поможет. А так как геометрия низведена до положения второстепенного предмета, приходится констатировать, что школьный курс математики в весьма значительной степени утратил свою развивающую, общеобразовательную функцию (и утилитарную тоже выполняет хуже, но это другая тема), и можно говорить о кризисе в школьном преподавании математики.

Сейчас учителя математики чаще всего считают, что их главная и едва ли не единственная задача — научить производить некоторые действия согласно определенным предписаниям («алгоритмам», как теперь обычно говорят), а обоснования и доказательства — это необязательные украшения, «бантики», как выразилась одна учительница при обсуждении моей программы по алгебре для 8-го класса. Понимать смысл этих действий тоже не обязательно, важно только одно — чтобы ответ получился правильный. Человек, которого так учили математике, не сможет, конечно, восторгаться ее гордой мощью, чего хотели Э. Борель и А. Н. Колмогоров. Больше того — он будет испытывать к ней отвращение. Как же бороться с такой профанацией?

[5] Уже после смерти Колмогорова в учебник был добавлен обширный исторический раздел, буквально пестрящий ошибками и резко выбивающийся из общего стиля книги. (Появился, между прочим, портрет Лейбница с подписью «Лейбниц Готфрид Фридрих» — это все равно, что поместить в учебнике русской литературы портрет Пушкина с подписью «Пушкин Александр Семенович».) Одновременно было опущено очень полезное приложение «Материал для повторения». И в таком виде учебник переиздается около двадцити лет!

IV

Подозреваю, что многие сочтут ответ очевидным. Детей с математическими способностями, скажут они, нужно отдавать в математические классы, там они и геометрию изучат как следует, и начала анализа. Всем прочим математику надо преподавать в максимально облегченном виде, без строгих определений и доказательств; а детям с гуманитарными склонностями математика вообще ни к чему, в гуманитарных классах ее давно пора отменить.

При серьезном подходе это расхожее мнение не выдерживает критики (даже если отвлечься от того немаловажного обстоятельства, что далеко не везде есть возможность организовать математические классы), потому что основано на заблуждениях. Одно из них состоит в том, что между математикой и естественными науками с одной стороны и гуманитарной сферой деятельности с другой будто бы лежит непреодолимая пропасть, и вся культура находится по одну ее сторону, а то, что, по другую, имеет только прикладное значение. Отсюда проистекает скрытое, а иногда и открытое взаимное презрение «гуманитариев» и «естественников». В действительности математика и естественные науки составляют столь же неотъемлемую часть общечеловеческой культуры, как искусство и гуманитарные науки.[6] Филолог, невежественный в математике и физике, имеет не больше прав называться культурным и образованным человеком, чем математик, невежественный в истории и литературе. Другое заблуждение — будто бывают дети с блестящими гуманитарными способностями, совершенно неспособные к изучению математики, и наоборот — с блестящими математическими способностями и нулевыми гуманитарными. Есть, конечно, дети, больше интересующиеся историей и литературой, чем математикой и физикой, или наоборот, но чтобы ученик, очень сильный, скажем, в истории и литературе, был слаб в математике — так не бывает никогда. Это знают все учителя, думающие о развитии своих учеников, а не об успехе на олимпиадах и при поступлении в вузы. Когда я преподавал математику в гуманитарных классах, ученики, самые сильные в гуманитарных предметах, были и у меня самыми сильными, а самые слабые в них — самыми слабыми; ни одного исключения мне не встретилось. Третье заблуждение, более новое, но в последние десятилетия широко распространившееся, — убеждение, что чем раньше человек выберет или ему выберут специальность, тем лучший из него выйдет специалист. Для музыкантов-инструменталистов и, кажется, для профессиональных спортсменов это действительно верно, но для тех, кто выберет технические профессии, и в не меньшей степени для тех, кто будет работать с людьми, сделавшись педагогами, психологами, юристами (не говоря уже о тех, кто пойдет в науку) ранняя специализация очень вредна: она приводит к сужению кругозора и появлению специалистов, «подобных флюсу», по известному выражению Козьмы Пруткова, — ничего не видящих за пределами своей узкой специальности. Между тем при нынешних темпах технического прогресса специалист, допустим, по холодной обработке металлов окажется беспомощным, если технология холодной обработки металлов существенно изменится — что с большой вероятностью может произойти не один раз, прежде чем он выйдет на пенсию, — а он не обладает достаточно широким кругозором. (Положение такого специалиста вполне аналогично положению учителя, знающего свой предмет лишь в пределах школьной программы, о чем говорилось выше; в сущности, это одно и то же явление.)

Есть и другие, не столь важные заблуждения, но сказанного о трех главных вполне достаточно для категорического вывода: модная сейчас «дифференциация обучения» — тупиковый путь, и во всяком случае преодолеть кризис в школьном преподавании математики она не поможет.

V

Так что же — значит, справиться с этим кризисом невозможно, и преподавание математики в нашей школе обречено на окончательную деградацию? Осмелюсь ответить на этот вопрос

[6] Это утверждение представляется мне очевидным, но для тех, кто сомневается в необходимости изучения математики для приобщения к культуре, я написал в свое время статью [8].

отрицательно. Как ни плохо обстоит дело «в целом», в России и сейчас не так уж мало хороших учителей и хороших школ (и не только в крупных городах), не перевелись талантливые педагоги, и живы еще старые российские традиции в образовании: связь между высшей и средней школой, готовность учителя беседовать с любознательным школьником и профессора с любознательным студентом[7]. Это создает предпосылки для преодоления кризиса. Разумеется, быстро преодолеть его невозможно. Сначала должны появиться учебники, написанные с учетом накопленного опыта, как положительного, так и отрицательного; эти учебники возьмут на вооружение сначала немногие учителя, потом таких учителей станет больше, с учетом их опыта учебники будут совершенствоваться, появятся новые учебники… — словом, будет идти нормальный процесс эволюции, как во времена Киселева. Мы видели выше, что реформа 60-х–70-х гг. провалилась главным образом из-за системы стабильных учебников, сделавшей нормальную эволюцию невозможной. Сейчас министерские чиновники разрабатывают законопроекты, предусматривающие фактический возврат к стабильным учебникам (и даже распространение системы стабильных учебников на высшую школу, до чего советские чиновники не додумались), но я думаю, что из этой затеи ничего не выйдет: наша бюрократическая машина крайне неповоротлива, образованные и думающие учителя, отвыкшие уже от мелочной опеки, будут отчаянно сопротивляться, и среди чиновников разных уровней тоже есть разумные люди. Геометрию во многих школах преподают теперь по учебникам И. Ф. Шарыгина, написанным на современном научном уровне и в то же время живо и доступно. На очереди алгебра и начала математического анализа.

Мне представляются возможными два пути выхода из того странного положения, в котором находятся теперь в школе эти предметы. Один из них состоит в том, чтобы переработать курс алгебры в направлении приближения его к современному состоянию этой науки (см. выше) и включить в него небольшой раздел, посвященный идеям предела, производной и интеграла. В этом разделе изложение должно быть основано исключительно на примерах, доказательства должны проводиться только для простейших частных случаев элементарными способами, и нигде не должно выдаваться за доказательство то, что таковым не является. Итогом изучения этого раздела должно быть осознание поистине удивительного факта, что операции проведения касательной и вычисления полощади — взаимно обратные. (Его можно проиллюстрировать на тех же простейших примерах.) Техники дифференцирования и интегрирования здесь касаться незачем.

Другой возможный путь — научиться преподавать начала анализа без мистического тумана, так, чтобы этот курс служил «приведению ума в порядок» не хуже, чем традиционный курс геометрии. Это трудно, но, по моему глубокому убеждению, вполне возможно. Если бы удалось наладить такое преподавание сначала хотя бы в нескольких школах, то появилась бы надежда постепенно исправить положение. И прежде всего нужно написать учебник нового типа, в котором рассуждениям и объяснениям отдавалось бы решительное предпочтение перед вычислениями и формальными преобразованиями и полная строгость сочеталась бы с максимальной наглядностью.

Мы с моим коллегой Ю. Н. Козиоровым, имеющим большой опыт преподавания анализа и математической логики в педагогических институтах, а также руководства математическими кружками для школьников, решились попытаться написать такой учебник. Работа над ним продолжается уже около десяти лет и сейчас, как нам кажется, близка к завершению. В процессе работы нам пришлось подвергнуть критическому анализу наши методические привычки — привычки, свойственные, по-видимому, подавляющему большинству тех, кто читает математические курсы в университетах и педвузах и пишет по этим курсам учебники (а также многим авторам школьных учебников). Мы привыкли главное внимание обращать на безупречность формальной правильности и не слишком заботимся о том, как помочь учащемуся разобраться в хитросплетениях наших безупречных конструкций. Многие преподаватели и авторы учебников

[7]Как стары эти традиции, можно видеть из письма Н. Н. Лузина к М. Я. Выгодскому [9], в котором он рассказал о своих беседах с профессором Б. К. Млодзеевским в бытность студентом Московского университета по поводу трудностей, возникших у него при изучении математического анализа.

считают всякие объяснения излишними: «Умный и так поймет, а дураку все равно не объяснишь». Между тем больше всех нуждаются в объяснениях как раз самые умные, самые вдумчивые студенты и школьники. Н. Н. Лузин рассказал в упомянутом выше письме, как трудно было ему изучать анализ и как помог ему терпеливыми объяснениями «властный», но доброжелательный Б. К. Млодзеевский. Не исключено, что если бы на месте Млодзеевского оказался важный барин, к которому страшно обратиться за объяснениями, то судьба Лузина была бы иной, и не было бы Московской математической школы.

За барственной позицией преподавателя, пренебрегающего объяснениями, прячется обыкновенная лень. Обдумывать разные подходы к объяснению, искать образы и сравнения, помогающие понять содержательный смысл формальных операций, оттачивать детали, излагать рассуждения на русском или другом естественном языке, борясь с его неподатливостью, заботясь о ясности и выразительности, обдумывая каждую фразу и каждое слово, устраняя чересчур тяжелые обороты и слишком частые повторения одних и тех же слов и словосочетаний — очень трудная работа, требующая много времени и внимания. Выписывать цепочки формальных преобразований несравнимо легче. Вот и идут преподаватели и авторы учебников по пути наименьшего сопротивления, и это освящается традицией.

Все, кому приходилсь читать анализ первокурсникам, знают, что главный барьер для них — теория пределов, излагаемая обычно на «ε–δ-языке» с помощью неравенств. Начав пользоваться вместо этого наглядными геометрическими рассуждениями, я сразу увидел, что они доходят существенно лучше, а поработав в школе, убедился, что школьник склонен воспринимать длинную цепочку выкладок как некое магическое средство — цепочку заклинаний. Даже если каждый отдельный шаг ему понятен, остается непонятным главное: почему надо делать именно такие шаги, а не какие-нибудь другие, какая идея стоит за этой цепочкой? (Конечно, есть сильные школьники, хорошо понимающие «выкладочные» доказательства, но я далеко не уверен, что и для них более наглядные не были бы проще.) И я не первый пришел к таким выводам. Вадим Арсеньевич Ефремович, крупный ученый и замечательный педагог, принадлежавший к поколению моих учителей и сохранивший до последних дней жизни удивительную ясность и живость мысли[8] (мне посчастливилось в 1986–89 гг. работать с ним на одной кафедре) не уставал повторять, что изложение теории пределов на языке неравенств — «безобразие». При нашей последней встрече в апреле 89-го он говорил, что сохраняется это безобразие только благодаря косной традиции, идущей от времен Вейерштрасса, когда никакого другого языка для изложения теории пределов не было. А. Ж. Дьедонне в вышедшей еще в 1960 г. и 4 года спустя изданной в русском переводе книге [11] охарактеризовал «ε–δ-технику» как устаревшую.

Конечно, трудно отрешиться от стереотипа, выработавшегося еще в студенческие годы и закрепленного многолетним опытом преподавания и чтением книг, авторы которых придерживались той же традиции. Но возможно. И тогда открывается широкое поле для размышлений на методические темы.

VI

Прежде всего мне хотелось бы остановиться на использовании в преподавании математики в средней и высшей школе символического языка математической логики.

Когда я в 1954 г. впервые начал читать анализ на 1-м курсе, я попробовал записывать определения в теории пределов на символическом языке и поначалу был доволен результатами, потому что студентам стало легче выучивать эти определения; но довольно скоро пришел к выводу, что в данном случае символическая запись облегчает только механическое запоминание, не способствуя лучшему пониманию, так что фактически я поддерживаю вредную привычку заучивать формулировки, не понимая их смысла. Потом я почти 30 лет не преподавал анализ и читал только алгебру, математическую логику, теорию алгоритмов и спецкурсы. А когда в 1986 г. вернулся к анализу, не без удивления обнаружил, что в новых учебниках широко используется

[8] О В. А. Ефремовиче см. [10].

логическая символика (в 50-х гг. в СССР лишь очень немногие математики знали о ее существовании, хотя русский перевод «Основ теоретической логики» Гильберта и Аккермана вышел еще в 1947 г.), причем логические символы вводятся просто как сокращенные записи некоторых слов. К тому времени у меня был уже большой опыт преподавания математической логики; кроме того, я специально занимался вопросом о соотношении значений пропозициональных связок и «логических слов» естественного языка (см. [12, 13, 14]). И я подумал, что, видимо, пора уже дать символическому языку право гражданства не только в высшей, но и в средней школе и вводить его не мимоходом, скороговоркой, а по-настоящему, с подробными пояснениями и опорой на естественный язык. Главное — познакомить ученика не только с логическими символами, но и с понятиями, которые за ними стоят; тогда ему многое станет яснее. Если, например, он будет знать, что импликация с ложной посылкой истинна, ему легче будет понять, почему пустое множество является подмножеством любого множества. Пониманию старшеклассников, знакомых с первоначальными понятиями теории множеств, это должно быть вполне доступно.

Позже, уже в конце 90-х, я это проверил в одном 10-м гуманитарном классе и двух 9-х «культурологического» профиля. Во всех трех классах ученики легко усваивали этот материал, а задачи на перевод с русского языка на символический и обратно решали не хуже, чем студенты, с которыми я подобные занятия проводил много раз.

При изучении начал анализа символический язык может хорошо работать не только в теории пределов. Очень полезен он при изучении свойств числовых множеств и функций и еще полезнее в разделе о равносильности уравнений и неравенств. В нынешних учебниках трактовка равносильности архаична; особенно сильно это бросается в глаза, когда речь идет о неравенствах. Используя символический язык, можно сделать этот раздел гораздо прозрачнее и понятнее.

Говоря о неравенствах, хотелось бы сделать следующее замечание. Со времени реформы в школе прочно утвердилось решение неравенств вида $f(x) > 0$ и т. п., где f — многочлен, корни которого известны, с помощью «метода интервалов», основанного на не доказываемом свойстве непрерывных функций и требующего вычисления значений многочлена в точках, число которых на единицу больше числа его корней. Учителя, как правило, тратят на отработку этого метода много времени. Между тем такие неравенства очень просто решаются без всяких вычислений, если пользоваться тем очевидным фактом, что произведение нескольких действительных чисел, отличных от нуля, тогда и только тогда положительно, когда число отрицательных сомножителей в нем четно. С небольшими измнениями это соображение работает и при замене многочлена едва ли не всеми функциями, для которых в школе решают неравенства «методом интервалов». Зачем же учить детей стрелять из пушек по воробьям?

Еще одно замечание — по поводу определения непрерывной функции как такой, график которой есть «непрерывная линия». Предлагая его ученикам — явно или неявно, — мы их обманываем: нарисованная или напечатанная на бумаге «непрерывная линия», если посмотреть на нее в микроскоп, окажется состоящей из отдельных точек, как и график любой функции, если только его можно изобразить на чертеже[9]. Поэтому такое определение не соответствует никакому реальному явлению (в отличие, например, от нестрогого определения производной как скорости изменения значений функции).

Подобных замечаний разной степени важности можно было бы сделать много, но вряд ли стоит приводить их прежде, чем мы сможем предложить на суд коллег свой вариант учебного пособия или хотя бы некоторые главы. А сейчас я хотел бы заметить, что суровая реальность предъявляет к структуре пособия требования, которые необходимо выполнить независимо от того, нравятся ли они авторам. Во-первых: так как мы хотим, чтобы нашим пособием могли пользоваться ученики старшей школы, учившиеся в основной школе по разным учебникам, в которых многие темы излагаются разными способами (и притом, по нашему убеждению, не всегда корректно), мы вынуждены заново излагать эти темы. Разумеется, образованный и думающий учитель (а только на такого учителя рассчитано наше пособие) легко выяснит, что́

[9]Простейший пример функции, график которой невозможно изобразить на чертеже даже грубо приближенно — функция Дирихле.

из этого материала его ученикам необходимо изучать заново и что́ достаточно бегло повторить. Во-вторых: реформа ввела в школьную практику несколько новых тем, без которых, как нам кажется, можно было бы обойтись (например, решение тригонометрических неравенств), но опустить их мы не можем, потому что они входят в обязательные программы для всевозможных экзаменов. В-третьих: некоторые понятия, сохраняющиеся в школьном преподавании с давних времен, представляются нам некорректными. Такие понятия, хотя их немного, представляют для нас наибольшую трудность, т. к. они тоже входят в программы экзаменов.

Теперь о том, как могло бы использоваться наше пособие. Конечно, оно не предназначается для массового использования в качестве единственного или основного учебника, и если вообще найдутся учителя, которые захотят пользоваться им в качестве основного пособия, то их будет немного. Но мы надеемся, что книга будет полезна учителям самых разных школ и классов, от физико-математических до гуманитарных (мы очень старались выдержать ее в «гуманитарном стиле») в качестве вспомогательного пособия, а ученикам — в качестве книги для чтения.

Упражнений в пособии немного; мы сознательно не перегружали его задачами и ограничились «необходимым минимумом». Но в руках учителей и учеников, которые будут пользоваться этим пособием, должен быть также «привязанный» к нему задачник; такой задачник еще предстоит составить.

В заключение хочу подчеркнуть, что мы не считаем выбранный нами путь выхода из кризиса единственно возможным. Было бы очень хорошо, например, если бы кто-нибудь из коллег взялся за разработку нового школьного курса алгебры в том направлении, о котором говорилось выше. Необходимым условием нормального процесса эволюции является плюрализм; в применении к образованию это верно не в меньшей степени, чем в применении к общественной жизни, а в применении к преподаванию каждого отдельного учебного предмета — не в меньшей степени, чем в применении к образованию в целом.

Литература

[1] Капица П. Л. Некоторые принципы творческого воспитания и образования современной молодежи.// Математика в образовании и воспитании. Сост. В. Б. Филиппов. М.: ФАЗИС, 2006.

[2] Абрамов А. М. Переписка П. Л. Капицы и А. Н. Колмогорова по вопросам образования.// Математика в образовании и воспитании. Сост. В. Б. Филиппов. М.: ФАЗИС, 2006.

[3] Виленкин Н. Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты.// Математика в школе, 1988, № 4.

[4] Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки.// Математика в образовании и воспитании. Сост. В. Б. Филиппов. М.: ФАЗИС, 2006.

[5] Гладкий А. В. Откуда берутся учителя. Записки преподавателя пединститута. http://modernproblems.org.ru

[6] Александров А.Д. О строгости изложения в учебном пособии А. В. Погорелова.// Математика в школе, 1984, № 1.

[7] Гладкий А. В. О некоторых определениях в учебном пособии А. В. Погорелова.// Математика в школе, 1990, № 6.

[8] Гладкий А. В. Зачем нужна в школе математика?// Знание — сила, 1996, № 2.

[9] Лузин Н. Н. О бесконечно малых величинах в преподавании и в науке.// Математика в высшем образовании, 3. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского гос. университета, 2005.

[10] Гладкий А. В., Грек А. С., Фет А. И. Памяти В. А. Ефремовича.// Математика в школе, 1989, № 5.

[11] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.

[12] Гладкий А. В. О значении союза *или*.// Семиотика и информатика, выпуск 13. М.: ВИНИТИ, 1979.

[13] Гладкий А. В. О значении союза *если*.// Семиотика и информатика, выпуск 18. М.: ВИНИТИ, 1982. Перепечатка: // Семиотика и информатика, выпуск 35. М.: ВИНИТИ, 1997.

[14] Гладкий А. В., Дрейзин Ф. А. О семантике русского отрицания.// Wiener slawistischer Almanach, Bd. 11. Wien: Gesellschaft zur Förderung slawistischer Studien, 1983.

Гладкий Алексей Всеволодович,
д. ф-м. н., профессор,
ведущий научный сотрудник
Московского института открытого образования.

Email: avgladkij@Gmail.com

Из опыта изучения элементов теории групп в непрофильных старших классах средней школы

В. М. Имайкин

В статье описан опыт преподавания элементов теории групп в непрофильных старших классах средней школы.

1. Введение

Занятия по изучению элементов теории групп проводились автором в 10 и 11 классах ГОУ СОШ №1314 г. Москвы в рамках более широкого курса "Обучение схематизации на материале математики". Обучение схематизации является содержанием метапредмета "Знак" — учебного предмета особого типа. Предмет разработан в контексте мыследеятельностного подхода к педагогике (ведущий разработчик НИИ Инновационных стратегий развития общего образования Департамента образования г. Москвы) и к настоящему времени представлен в ряде теоретических монографий и учебных пособий [1, 2, 3], куда читатель может обратиться за подробностями. Сформулируем кратко основную идею: схематизация — разработка и использование специальных знаковых (как правило, графических) средств для организации понимания, мышления и коммуникации на том или ином предметном материале. Это первый уровень освоения схематизации, следующие уровни относятся к собственно методологическому содержанию, они представлены в основополагающей работе [1].

Математика, с одной стороны, является удобным учебным предметом для освоения схематизации. Например, при помощи достаточно простых схем можно организовать понимание устройства логической структуры математического рассуждения, в частности, доказательства, [4]. С другой стороны, математический материал представляет и определенные трудности. Если проанализировать примеры обучения схематизации на материале литературы, истории и других предметов [3], можно заметить, что сами знаковые средства схематизации являются внешними по отношению к предметному материалу. В математике же часто некоторые математические объекты более высокого уровня абстракции могут сами служить схемами по отношению к другим объектам. Образно говоря, математика сама наполнена схемами, и некоторые исследователи считают это принципиальным отличием математики от других естественных наук. Приведем ряд цитат из интересной дискуссионной статьи [5]:

> ...основное в деятельности естествоиспытателей — это исследование не окружающего мира, а его моделей.
>
> ...
>
> С течением времени ученые научились придумывать удовлетворяющие их модели и на этой основе исследовать окружающий мир.
>
> ...
>
> ...рассматривая модели в разных науках, мы вдруг обнаруживаем группы чрезвычайно сходных моделей и результаты, полученные в одной модели, могут быть применены в другой. Например, изменение численности хищника в системе хищник – жертва очень похоже на изменение силы тока в колебательном контуре.
>
> ...
>
> Схожесть моделей можно по-иному выразить, сказав, что модели каждого класса имеют общую *схему*, т.е. что схожие модели — это модели, которые основываются на одной и той же схеме.
>
> Введя таким образом понятие схемы, мы приходим к задаче абстрактного изучения схем как таковых, безотносительно к их конкретному воплощению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Математикой называется наука, изучающая все возможные — хотя бы мысленно — схемы, их взаимосвязи, методы их конструирования, иерархии схем (схемы схем) и т.д. и т.п.

Возвращаясь к нашей теме, примем за рабочую гипотезу, что понятие группы может служить (частичной) схемой устройства тех алгебраических структур, которые дети фактически изучили к старшим классам средней школы. Преподавание темы было основано на следующих методических принципах:

1. Рефлексивный обзор изученных алгебраических структур с выделением свойств, подводящих к понятию группы.

2. Взгляд с точки зрения групп на различные знакомые учащимся алгебраические и геометрические ситуации.

3. Выявление одинакового устройства (изоморфизма) или различия групп в конкретных ситуациях.

4. Практическое применение группового подхода.

5. О терминологии: мы старались не пользоваться теоретико-множественной и теоретико-групповой терминологией и вводили соответствующие термины только в случае крайней необходимости, а также для справки, чтобы учащиеся могли обращаться к учебной и популярной литературе по этой тематике.

Кратко опишем реализацию пунктов 1-3 и более подробно остановимся на пункте 4.

2. Организация учебного материала с точки зрения групп

К этому времени учащиеся знакомы с системами натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Мы просмотрели все эти системы с точки зрения действий сложения и умножения, выписали свойства действий, а также результаты некоторых наблюдений.

В системе натуральных чисел можно выполнять сложение и умножение, при этом выполнены следующие свойства:

$$a + b = b + a, \quad (1) \qquad (a + b) + c = a + (b + c), \quad (2)$$
$$ab = ba, \quad (3) \qquad (ab)c = a(bc) \quad (4)$$

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (5)$$

которые называются соответственно переместительным и сочетательным свойством сложения, переместительным и сочетательным свойством умножения, а также распределительным свойством умножения относительно сложения. Мы также зафиксировали наблюдения: обратные действия по отношению к сложению и умножению (т.е. вычитание и деление) в области натуральных чисел не всегда выполнимы; по отношению к умножению есть такое уникальное число 1, которое не изменяет второй множитель:

$$1 \cdot a = a \quad (6)$$

для любого a. Затем мы провели аналогичные наблюдения над другими системами.Отметим то новое, что добавляется при очередном расширении системы.

В области целых чисел по отношению к сложению появляется уникальное число 0, которое не изменяет второго слагаемого:

$$0 + a = a \quad (7)$$

для любого a. Кроме того, всегда можно выполнить обратное к сложению действие — вычитание. После соответствующего обсуждения мы пришли к выводу, что это свойство можно записать в виде существования обратного числа относительно сложения: для любого целого a существует такое целое $-a$, что

$$a + (-a) = 0. \tag{8}$$

Теперь вычитание можно отождествить со сложением: $a - b = a + (-b)$. Обратное действие к умножению — деление — по-прежнему не всегда выполнимо. В области рациональных чисел для сложения выполнены все свойства (1), (2), (7), (8). Далее, каждое рациональное число, кроме 0, имеет обратное число относительно умножения: для любого ненулевого рационального a существует такое рациональное a^{-1}, что

$$a \cdot a^{-1} = 1. \tag{9}$$

Теперь деление можно отождествить с умножением: $a/b = a \cdot b^{-1}$. В области действительных чисел для сложения выполнены все свойства (1), (2), (7), (8), а для умножения (если исключить 0) — все свойства (3), (4), (6), (9). Мы попутно зафиксировали интересный вопрос: с точки зрения арифметических действий и их свойств система рациональных чисел вроде бы не отличается от системы действительных чисел. Чем же на самом деле они отличаются? На этом этапе мы пока не вводим никаких новых названий, а фиксируем только общее в ситуациях: есть определенные наборы элементов (натуральных, целых, рациональных, действительных чисел); над ними можно выполнять определенные действия (сложение и умножение); эти действия обладают определенными свойствами (1)–(9).

Для дальнейшего движения мы рассмотрели еще несколько ситуаций. На известном для детей материале это 1) составление сложной функции и 2) геометрические преобразования, оставляющие на месте определенную фигуру.

1) Рассмотрим взаимно-однозначные функции, отображающие числовую прямую на себя. Обозначим совокупность всех таких функций G. С двумя функциями из G можно выполнить действие составления сложной функции (операцию *композиции* — новый для учащихся термин). Для функций $f(x)$ и $g(x)$ композиция — это новая функция, которая обозначается $h = g \circ f$ и действует по правилу $h(x) = g \circ f(x) \equiv g(f(x))$. Эта новая функция опять принадлежит совокупности G. Операция композиции обладает следующими свойствами: 1. Существует *нейтральный элемент* $e(x)$ относительно композиции, обладающий свойством $e \circ f = f \circ e = f$. Таким элементом является тождественная функция $e(x) \equiv x$. 2. Для каждой функции f из G существует *обратный элемент* f^{-1} относительно композиции, обладающий свойством $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$. 3. Операция композиции обладает свойством сочетательности $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Последнее свойство легко доказать, нарисовав соответствующую диаграмму, которую в рамках нашего курса можно рассматривать как *схему-средство доказательства*. Нетрудно увидеть, что свойство переместительности в данном случае отсутствует. Например, для функций $f(x) = x^3$, $g(x) = x + 1$ получаем $g \circ f(x) = x^3 + 1$, а $f \circ g(x) = (x+1)^3$ — это разные функции, т.е. разные элементы совокупности G. Поэтому в формулировках свойств 1. и 2. мы используем запись композиции в обоих порядках.

2) Мы рассмотрели ряд фигур и выделили движения, оставляющие данную фигуру на месте. Например, для параллелограмма (но не ромба) с точкой пересечения диагоналей O таких движений два: тождественное движение I, оставляющее все точки плоскости на месте, а также поворот R_O^{180} вокруг точки O на 180 градусов. В случае ромба или прямоугольника добавляется еще две осевых симметрии S_1, S_2 — относительно диагоналей для ромба и относительно средних линий для прямоугольника. В случае правильного треугольника с центром O получаем 6 движений: I, R_O^{120}, R_O^{240}, S_1, S_2, S_3; три последних движения — осевые симметрии относительно медиан. Мы заметили, что “с ходу” не получается придумать фигуру, у которой ровно три или пять движений, оставляющих ее на месте. Для случая трех фигура была подсказана учителем, после чего дети по аналогии предложили фигуру для любого количества движений — “якорь” с соответствующим числом “лапок”. Для якоря с тремя лапками — три движения, с пятью — пять и т.д., см. рис. 1.

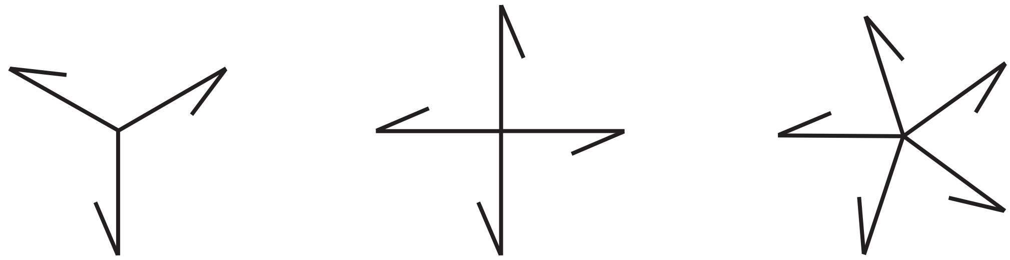


Рис. 1.

Мы отметили, что в этом случае все движения являются поворотами (I можно рассматривать как поворот на 0 градусов), а осевые симметрии отсутствуют.

Для каждой из рассмотренных фигур можно рассмотреть композицию двух движений, оставляющих данную фигуру на месте. Это снова будет движение, оставляющее фигуру на месте, в каждом конкретном случае его можно явно найти. Рассмотрим все на примере ромба. Вся совокупность G состоит из 4 движений: I, R_O^{180}, S_1, S_2. Выпишем результаты всех композиций в форме таблицы: в левом столбце перечислены движения, которые выполняются первыми, в верхней строке — вторыми; на пересечении строки и столбца записан результат соответствующей композиции.

	$\mathbf{I}$	$\mathbf{R_O^{180}}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$
$\mathbf{I}$	I	R_O^{180}	S_1	S_2
$\mathbf{R_O^{180}}$	R_O^{180}	I	S_2	S_1
$\mathbf{S_1}$	S_1	S_2	I	R_O^{180}
$\mathbf{S_2}$	S_2	S_1	R_O^{180}	I

Аналогичные таблицы мы составили для всех остальных рассмотренных фигур. Из этих таблиц видно, что во всех случаях тождественное движение I играет роль нейтрального элемента относительно операции композиции. К каждому движению для данной фигуры находится, относительно композиции, обратный элемент. Например, из приведенной таблицы видно, что $I^{-1} = I$, $(R_O^{180})^{-1} = R_O^{180}$, $(S_1)^{-1} = S_1$, $(S_2)^{-1} = S_2$. Свойство сочетательности выполняется, поскольку диаграмма, нарисованная для доказательства в случае композиции функций, годится для любых отображений. Свойство переместительности выполняется не всегда: если в нашей таблице результат композиции не зависит от порядка, то для случая правильного треугольника можно заметить, например, что $R_O^{120} \circ S_1 \neq S_1 \circ R_O^{120}$.

Затем мы рассмотрели новый для учащихся материал: арифметику остатков от деления на заданное число (мы ограничились сложением) и перестановки множества из заданного числа элементов с операцией композиции. Всюду мы наблюдали похожую ситуацию. Например, рассмотрим остатки от деления на 5: 0, 1, 2, 3, 4. Составим таблицу сложения аналогично предыдущей таблице композиций: в первом столбце первое слагаемое, в верхней строке — второе, на пересечение соответствующая сумма остатков.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Мы видим, что 0 служит нейтральным элементом относительно сложения, для каждого элемента относительно сложения имеется обратный, например, $3 + 2 = 2 + 3 = 0$, т.е. элемент 3 является обратным к элементу 2 и наоборот; свойство сочетательности выполняется (в данном случае свойство переместительности тоже выполняется). Аналогично мы рассмотрели перестановки, отметим только, что свойство переместительности в этом случае выполняется не всегда: например, в случае перестановок из 3 элементов

$$(132) \circ (213) \neq (213) \circ (132)$$

(здесь перестановки записаны в краткой форме).

В итоге мы приходим к выводу, что все многообразие рассмотренных ситуаций схематизируется следующим понятием абстрактной группы. Пусть есть набор G некоторых элементов g, причем между элементами определена некоторая операция $*$, так что если g_1, g_2 — элементы G, то результат операции $g_3 = g_1 * g_2$ — снова элемент G. Если для операции $*$ выполнены следующие свойства:

1. существует такой *нейтральный* элемент e относительно операции, называемый также *единицей*, что $e * g = g * e = g$ для любого элемента g;

2. для любого элемента g существует такой обратный элемент g^{-1} относительно операции, что $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$;

3. свойство сочетательности — для любых элементов g_1, g_2, g_3 выполняется равенство $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$,

то набор G с операцией $*$ называется группой.

Свойство переместительности не входит в общее определение группы. Если, как это было в некоторых рассмотренных примерах, оно выполняется, т.е. $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$ для любых элементов g_1, g_2, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*[1].

Теперь все рассмотренные примеры можно описать единообразно с точки зрения понятия группы:

1. Целые числа образуют группу относительно операции сложения, т.е. $G = Z$, “$*$”=“$+$”. Эта группа коммутативная. Нейтральным элементом относительно сложения является число 0, т.е. $e = 0$.

2. Рациональные числа образуют коммутативную группу относительно операции сложения, нейтральным элементом является 0. Кроме того, рациональные числа без 0 образуют коммутативную группу относительно умножения, в этом случае $G = Q - \{0\}$, “$*$”=“$\times$”, нейтральным элементом является число 1, т.е. $e = 1$.

3. Аналогичная ситуация для действительных чисел — это коммутативная группа относительно сложения, единица группы — число 0; действительные числа без 0 — коммутативная группа относительно умножения, в этом случае единица группы — число 1.

4. Совокупность G всех взаимно-однозначных функции, отображающих числовую прямую на себя, является группой относительно операции взятия композиции, т.е. “$*''$ = “$\circ''$. Единицей группы в этом случае является функция $y = x$. Эта группа не коммутативна.

5. Набор всех движений, переводящих некоторую заданную фигуру в себя, является группой относительно операции взятия композиции, т.е. “$*''$ = “$\circ''$. Единицей группы является тождественное преобразование I, оставляющее все точки фигуры на месте, т.е. $e = I$. В некоторых случаях, например, для ромба, такая группа оказывается коммутативной, а в других, как для правильного треугольника — некоммутативной.

6. Остатки от деления на заданное число образуют коммутативную группу относительно операции сложения, единицей группы является остаток 0. Можно пронаблюдать, что остатки от деления на простое число, например на 5, образуют коммутативную группу относительно умножения, единицей группы является остаток 1.

7. Перестановки с операцией взятия композиции образуют группу, единицей является тождественная перестановка, оставляющая все элементы множества на месте. Начиная с множества из трех элементов, группа перестановок является некоммутативной.

[1] По имени выдающегося норвежского математика XIX века Нильса Хенрика Абеля.

3. Изоморфизм (одинаковое устройство) групп

Рассмотрим две группы G и H. Если между элементами групп можно установить взаимно-однозначное соответствие, при котором операция между элементами первой группы переходит в операцию между элементами второй группы, то группы называются изоморфными (одинаково устроенными; первым термином мы пользовались в более подготовленном 11 классе, а вторым — в 10-м).

Более подробно, чтобы установить изоморфизм групп G, операцию в которой обозначим $*$, и H, операцию в которой обозначим $\circ$, надо

1) установить взаимно-однозначное соответствие между элементами группы (для групп с конечным числом элементов это означает, что количества элементов в группах должны быть равны), причем

2) если при этом соответствии элемент g_1 переходит в h_1, g_2 переходит в h_2 и $g_3 = g_1 * g_2$ переходит в h_3, то обязательно должно быть $h_3 = h_1 \circ h_2$.

Это определение можно изобразить следующей схемой:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{группа} & G & \text{с операцией} & *; & g_1 & * & g_2 & = & g_3 \\
 & | & & & | & & | & & | \\
\text{взаимно}- & | & & & | & & | & & | \\
\text{однозначное} & | & & & | & & | & & | \\
\text{соответствие} & | & & & | & & | & & | \\
 & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{группа} & H & \text{с операцией} & \circ; & h_1 & \circ & h_2 & = & h_3
\end{array}$$

Таким образом, само понятие изоморфизма групп можно наглядно представить для учащихся в виде схемы. Правая часть этой схемы

$$\begin{array}{ccccc}
g_1 & * & g_2 & = & g_3 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
h_1 & \circ & h_2 & = & h_3
\end{array}$$

представляет собой схему определенного типа, которая в алгебре называется диаграммой. Диаграммы широко используются в современной алгебре и примыкающих областях математики.

Далее, мы выясняли, какие из рассмотренных нами групп изоморфны, а какие нет. Конечные группы с разным числом элементов не могут быть изоморфны, поскольку в этом случае нельзя установить взаимно-однозначного соответствия. Для ряда групп с одинаковым числом элементов мы выяснили, что они изоморфны. Например, группа самосовмещений ромба изоморфна группе самосовмещений прямоугольника, группа самосовмещений параллелограмма изоморфна группе Z_2 с операцией сложения или группе, состоящей из чисел 1 и -1 с операцией умножения. Группа самосовмещений правильного треугольника изоморфна группе перестановок множества из 3 элементов и т.п.

С другой стороны, если в группах одинаковое число элементов, как можно выяснить, что они не изоморфны? Например, изоморфны ли группы самосовмещений ромба и группа Z_4 с операцией сложения? Здесь на помощь приходят соображения, связанные с порядком элемента группы. Рассмотрим, например, группу $Z_4; +$. Она состоит из 4 элементов: 0, 1, 2, 3. При этом 1+1=2, 1+1+1=3, 1+1+1+1=0. Т.е. результаты операции над одним элементом группы — 1 — исчерпывают всю группу $Z_4; +$.

Удобно ввести соответствующие понятия и обозначения в общем виде. Для группы G с операцией $*$ введем следующие обозначения: $g^2 = g * g$, $g^3 = g^2 * g$. В последнем случае надо быть внимательным. Поскольку группа не обязательно коммутативна, возможны два варианта определения: $g^3 = g^2 * g$ или $g^3 = g * g^2$. Покажем, что результат будет одинаковым. Действительно, $g^2 * g = (g * g) * g = g * (g * g)$ по свойству сочетательности, а последнее выражение и есть $g * g^2$. Аналогично определим $g^4 = g^3 * g$ и т.д.; каждый раз можно показать, что результат не зависит от порядка, в котором выполняется операция. Поэтому можно ввести единообразные обозначения $g^2 = g * g$, $g^3 = g * g * g$, $g^4 = g * g * g * g$ и т.д., так что "степень" равна количеству "сомножителей".

Вернемся к группе $Z_4; +$. Если положить $g = 1$, то имеем $2 = g^2$, $3 = g^3$, $0 = g^4$ — это нейтральный элемент (единица) группы. Обозначив в общем виде единицу группы через e, приходим к выводу, что вся группа $Z_4; +$ состоит из элементов e, g, g^2, g^3, а $g^4 = 1$ — зацикливание. Группа такого типа называется циклической. Циклические группы устроены наиболее просто — они порождены степенями одного элемента. Среди рассмотренных выше примеров циклическими являются группы остатков от деления на любое число с операцией сложения, т.е. группы $Z_n; +$, группа из двух элементов 1 и -1 с операцией умножения, а также группа поворотов "якоря" с n лапами. Нетрудно доказать, что любые две конечные циклические группы с одинаковым числом элементов изоморфны, и наоборот, всякая группа, изоморфная циклической, тоже циклическая. Примером бесконечной циклической группы является группа целых чисел с операцией сложения, т.е. группа $Z; +$.

Теперь рассмотрим группу самосовмещений ромба. Она, как и $Z_4; +$, состоит из 4 элементов: $e = I$ — единица группы (тождественное преобразование), $g_1 = R$ — поворот на 180 градусов относительно центра ромба, $g_2 = S_1$, $g_3 = S_2$ — две осевые симметрии. Легко видеть, что в этом случае $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = e$, т.е. уже вторая степень каждого элемента равна единице группы (в таком случае говорят, что порядок элемента — наименьшая степень, в которой он дает единицу — равен двум). Тем самым, нет ни одного элемента, степени которых порождали бы всю группу. Поэтому группа самосовмещений ромба не является циклической и не изоморфна группе $Z_4; +$.

Замечания. 1. При изучении элементов теории групп надо обращать внимание на "очевидные", но важные факты, например, такие как единственность нейтрального элемента группы или единственность обратного элемента к данному. Или: при изоморфизме единица первой группы отображается на единицу второй группы, обратный элемент переходит в обратный и т.п. Мы обсуждали подобные факты по мере их появления в практических задачах.

2. Естественно возникает вопрос о классификации групп в зависимости от числа элементов (порядка группы). С учащимися было сделано движение в этом направлении. Основная трудность — неподготовленность учащихся непрофильных классов к рассуждениям в терминах абстрактных групп.

Практические применения группового подхода

Новой для учащихся была следующая точка зрения: если имеются две конкретные группы с разными (в практическом смысле) операциями, но они оказываются изоморфными, то операцию в одной группе можно заменить на операцию в другой. Такой подход имеет полезные практические последствия. Мы рассмотрели два сюжета: сведение умножения к сложению и естественное введение комплексных чисел.

Сведение умножения к сложению и механизация умножения

Рассмотрим совокупность всех векторов плоскости, параллельных некоторой фиксированной прямой. Набор таких векторов образует коммутативную группу относительно операции сложения. Единицей группы является нулевой вектор, а обратным элементом для вектора $\vec{a}$ является вектор $-\vec{a}$. Эта группа изоморфна группе действительных чисел с операцией сложения. Для установления изоморфизма на указанной прямой вводится система координат, так что прямая превращается в числовую.

С другой стороны, определение сложения векторов таково, что его можно механизировать при помощи подвижной шкалы. Расположим две числовые прямые с одинаковым масштабом одну под другой, совместив начала отсчета. Отложим от начала отсчета О на первой прямой вектор $\vec{a}$, а на второй вектор $\vec{b}$. Теперь сдвинем вторую прямую так, чтобы ее начало отсчета совпало с концом вектора $\vec{a}$. То место, куда при этом попал конец вектора $\vec{b}$, отметим точкой С. Тогда вектор $\vec{OC}$ равен сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Ограничимся векторами с целыми координатами. Очевидно, что набор таких векторов тоже образует группу относительно сложения, эта группа изоморфна группе $Z; +$ целых чисел относительно сложения.

Теперь введем новую группу. Рассмотрим число 2, возведенное во все возможные натуральные и целые отрицательные степени, а также в нулевую степень, т.е. набор чисел

$..., 2^{-3} = 1/8, 2^{-2} = 1/4, 2^{-1} = 1/2, 2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, ...$

Легко проверить, что набор этих чисел образует коммутативную группу с операцией умножения. Далее мы рассмотрели следующие вопросы:

1. Выяснить, что эта группа изоморфна группе $Z; +$.

2. Мы имеем две группы, одну с операцией умножения, а другую с операцией сложения. Как практически заменить умножение сложением?

3. Мы видели, что сложение можно механизировать при помощи подвижной шкалы. Как практически механизировать умножение?

Опишем кратко ответы на эти вопросы.

1. Зададим соответствие $2^n \mapsto n$. Легко проверить, что это изоморфизм между группой степеней двойки с операцией умножения и группой целых чисел с операцией сложения.

2. Допустим, мы хотим перемножить 2^n и 2^m. При заданном изоморфизме первому числу соответствует n, а второму m. Выполним сложение $n+m$. Найдем то число, которому при нашем изоморфизме соответствует $n+m$, т.е. выполним обратное отображение. Это число 2^{n+m}. Оно и есть произведение чисел 2^n и 2^m. Заметим, что само действие умножения мы не выполняли. Мы выполнили три раза взятие образа при прямом и обратном отображении, а также одно действие сложения.

3. Идея заключается в том, что на шкалах над каждым числом n написать и 2^n. Тогда при механическом сложении целых чисел одновременно будет выполняться и умножения двойки в соответствующих степенях. Далее можно убрать сами числа и оставить только соответствующие степени двойки. См. рис. 2.

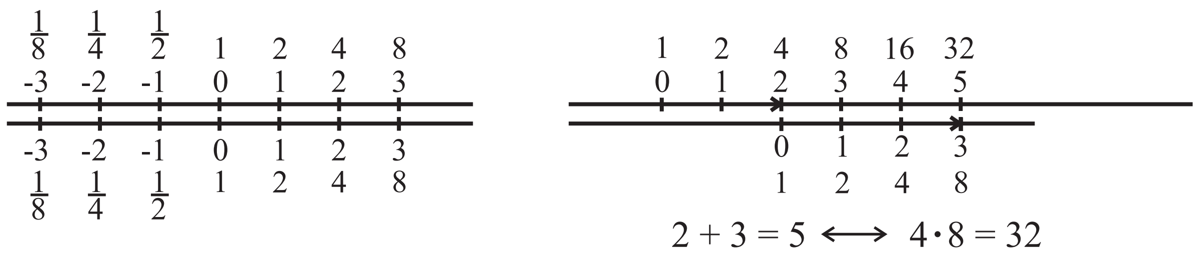


Рис. 2.

Наконец, мы обсудили вопрос, как распространить замену умножения сложением не только для дискретного ряда степеней двойки, но и для всех действительных чисел. Для учащихся 11 класса это занятие рефлексивное, поскольку они знакомы с показательной функцией 2^x и с обратной логарифмической функцией. Для учащихся 10 класса занятие получается проектным — они приходят к пониманию того, какие математические объекты нужно построить для решения нашей практической задачи.

Методическое замечание. Описанное выше занятие разумно проводить в *задачной форме организации*, см. [6]. В такой форме учащиеся попадают в ситуацию переоткрытия, в данном случае таблицы логарифмов по основанию два, а также в ситуацию изобретения логарифмической линейки.

Естественное геометрическое введение комплексных чисел

Вопрос возникает в связи с темой степенной функции и вообще возведения чисел в дробную степень. В школе принят осторожный подход: в дробные степени возводятся только положительные вещественные числа. Можно тем не менее обсудить с учащимися, какие трудности возникают с отрицательными числами. Например (см. [7]), можно определить $(-1)^{1/3}$ как -1, поскольку $(-1)^3 = -1$. С другой стороны, $1/3 = 2/6$ и тогда должно быть $(-1)^{1/3} = (-1)^{2/6} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$. Приходим к вопросу, почему значение корня должно быть положительным? Далее естественно поставить вопрос, что мешает извлечь корень четной степени из отрицательного числа?

Взгляд на эту проблему с точки зрения теории групп помогает наметить путь движения. Основная идея — внимательно рассмотреть изоморфизм группы векторов, параллельных фиксированной прямой, и группы вещественных чисел по сложению.

Шаг 1. Изоморфизм установил взаимно-однозначное соответствие, но в вещественных числах есть еще операция умножения; при помощи нашего соответствия перенесем умножение на векторы, параллельные фиксированной прямой.

Шаг 2. Будем считать эту фиксированную прямую осью OX координатной плоскости OXY. Рассмотрим более широкое множество всех векторов этой плоскости; будем считать, что все векторы отложены от начала координат. Тогда каждый вектор определяется двумя числовыми параметрами: своей длиной и углом между положительным направлением оси OX и вектором. Этот угол задан с точностью до величины, кратной 2π. Для векторов, лежащих на оси OX этот угол равен 0, если вектор соответствует положительному числу, или π, если вектор соответствует отрицательному числу. Для нулевого вектора угол будем считать неопределенным.

Шаг 3. Внимательно понаблюдаем, что происходит с длинами и углами для векторов, лежащих на оси OX, при умножении. Для этого составим следующую таблицу, для простоты в ней заданы конкретные числовые значения.

$1-$й вектор	длина	угол	$2-$й вектор	длина	угол	произведение	длина	угол
2	2	0	3	3	0	6	6	0
2	2	0	-3	3	π	-6	6	π
-2	2	π	3	3	0	-6	6	π
-2	2	π	-3	3	π	6	6	0

Рассмотрев эту таблицу, учащиеся быстро сообразили, что при перемножении векторов длины перемножаются, а углы складываются.

Шаг 4. Теперь рассмотрим вопрос, нельзя ли таким же образом определить умножение уже для всех векторов плоскости: результатом умножения двух векторов будет вектор, длина которого равна произведению длин сомножителей, а угол равен сумме углов сомножителей. Мы практически поупражнялись в таком умножении векторов, выяснили, что свойства умножения похожи на обычные свойства умножения чисел (переместительность, сочетательность), а также, что возможно деление на ненулевой вектор.

Шаг 5. Наконец, мы рассмотрели вопрос об извлечении корня данной степени, причем определение корня берем наиболее широкое: вектор $\vec{a}$ является корнем степени n из вектора $\vec{b}$, если $a^n = b$. Учащиеся проделали ряд упражнений, в которых практически находили корни разной степени при помощи геометрических построений. В итоге этих построений сформулировано наблюдение, что из каждого вектора существует ровно n корней степени n и они расположены в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Заключительные выводы: совокупность векторов с так определенными операциями сложения и умножения можно рассматривать как новую *числовую систему* — систему *комплексных чисел*, более широкую, чем систему действительных чисел и включающую действительные числа. В этой системе определены сложение, умножение, деление на ненулевое число, а также возможно извлечение корня любой степени. Мы увидели, где находятся корни четной степени из отрицательных чисел: они "убежали" с действительной прямой и расположились на плоскости.

На этом месте мы закончили тему с учащимися 10 класса. С учениками 11 класса продвинулись несколько дальше: если разложить каждый вектор по базису из двух векторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, отождествив последний с 1, а второй обозначив через i, то придем к алгебраической записи комплексных чисел в виде $x + yi$, причем операция умножения, определенная выше геометрически, соответствует обычному умножению комплексных чисел.

Общий методический вывод. По мнению автора, элементы теории групп можно вводить в старших непрофильных классах средней школы на основе обобщения многочисленных ситуаций, знакомых учащимся, а также имея в виду различные практические приложения.

Литература

[1] Дмитриев Д.Б. Метапредмет "Знак" — выращивание способности видеть невидимое. В сборнике "Новое содержание образования". М.: Пушкинский дом, 2001, с. 64-97.

[2] Громыко Ю.В. Метапредмет "Знак". М.: Пушкинский дом, 2001.

[3] Громыко Н.В. Обучение схематизации в школе. М.: Пушкинский дом, 2005.

[4] Имайкин В.М. Обучение схематизации на материале математики в старших классах средней школы. Блок 1. Схематизация логической структуры математического рассуждения. *Принято к публикации в сборнике Департамента образования г. Москвы.*

[5] Постников М.М. Является ли математика наукой? // Математическое образование, №2, 1997, с. 83-88.

[6] Имайкин В.М. Фрагменты деятельностного содержания образования на материале математики. // Математическое образование, №4(31), 2004, с. 64-74.

[7] Покорный Ю.В., Титова Н.В. Нужно ли учить высшую математику? // Математическое образование, №3(47), 2008, с. 50-55.

Имайкин Валерий Марсович,
кандидат физико-математических наук,
снс НИИ Инновационных стратегий
развития общего образования
Департамента образования г. Москвы.

Email: ivm@infoline.su

Трудно решаемые задачи

А. Ф. Ляхов

Статья посвящена классификации сложности задач и обсуждению гипотезы $P \neq NP$. Рассматривается задача поиска алгоритма раскрытия игры "Сапёр". Показано, что алгоритм раскрытия игры существует с некоторой вероятностью. Следовательно, можно ввести новый класс задач, когда часть индивидуальных задач, принадлежит к классу P сложности, часть NP сложности, а часть просто не вычислима

Проблема определения трудности решения математических задач возникла практически одновременно с возникновением математики. Человечество всегда волновал вопрос, почему одни задачи решаются легко, а другие с трудом, один человек мог решить задачу, а другой нет.

Другой важнейший вопрос, связанный с трудностью задач, может быть сформулирован так: если задачу не удается решить, то существует ли у неё решение[1]?

Интерес к проблемам существования решения задач и создания алгоритмов обострился в конце 19 века. В это время появились различные механические устройства для автоматического проведения вычислений. Однако для реализации сложных алгоритмов требовались настоящие вычислительные машины. Это привело к тому, что были предложены различные теоретические модели идеальных вычислительных машин: машина Тьюринга, Поста и т.д.

С появлением реальных электронных вычислительных машин, разработки по теории алгоритмов стали особенно актуальны и фактически обеспечили начало современной информационной революции.

На часть вопросов, которые исследовались ранее, ответы были получены, но возникли новые более глубокие проблемы, связанные с решением задач и вычислимостью функций.

Трудно решаемые задачи

Перед тем как проводить сравнительный анализ трудности задач, определим само понятие задачи и ряд характеристик задачи [1].

Под массовой задачей $\boldsymbol{\Pi}$ понимается некоторый общий вопрос, на который следует дать ответ. Обычно задача содержит несколько параметров, или свободных переменных, конкретные значения которых не определены.

Задача определяется следующей информацией:

- общим списком всех параметров,
- формулировкой тех свойств, которым должен удовлетворять ответ, т.е. решение задачи.

Индивидуальная задача $\boldsymbol{I}$ получается из массовой задачи $\boldsymbol{\Pi}$, если всем параметрам массовой задачи присвоить конкретные значения.

Приведём пример наиболее широко изучаемых переборных массовых задач в теории алгоритмов.

Задача о коммивояжере.

Путешественник должен объехать n городов, побывав в каждом городе один раз и вернуться в исходный город, при этом затратить минимальную сумму на поездку.

Условие. Задано конечное множество $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$ "городов", расстояние $d(c_i, c_j) \in Z^+$ для каждой пары городов $c_i, c_j \in C$ и граница $B \in Z^+$(положительное целое число).

Вопрос. Существует ли "маршрут", проходящий через все города из С, длина которого не превосходит B?

[1] Примеров таких задач, известных с древности, очень много: это и квадратура круга, и великая теорема Ферма и т.д.

Этот вопрос может быть записан в следующем виде. Существует ли последовательность $\left\langle c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, ..., c_{\pi(m)} \right\rangle$, такая что $\sum\limits_{i=1}^{m-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) + d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)}) \leq B$?

Очевидно, что при малом количестве городов решение находится перебором возможных вариантов, но с ростом m количество различных вариантов маршрута растёт как $m!$.

Задача о рюкзаке.

Дано n предметов, для каждого из которых известен объём a_i и стоимость b_i. Требуется этими предметами заполнить рюкзак ограниченного объема так, чтобы суммарная стоимость упакованных предметов была максимальной.

Условие. Задано конечное множество U размер $S(u) \in Z^+$ и стоимость $V(u) \in Z^+$ каждого $u \in U$, положительные целые числа B и K.

Вопрос. Существует ли такое подмножество $U' \subseteq U$, что $\sum\limits_{i \in U'} S(u) \leq B$ и $\sum\limits_{i \in U'} V(u) \geq K$?

Еще одной широко известной массовой переборной задачей, о которой стоит упомянуть, является задача о разложении составного числа на множители.

Под алгоритмом задачи будем понимать общую, выполняемую шаг за шагом процедуру, позволяющую ее решить.

Будем говорить, что алгоритм решает массовую задачу $\boldsymbol{\Pi}$, если он применим к любой индивидуальной задаче $\boldsymbol{I}$ из $\boldsymbol{\Pi}$ и дает ее решение[2].

Понятие эффективности алгоритма связано со всеми вычислительными ресурсами, необходимыми для его реализации. Обычно под “эффективным” алгоритмом решения задачи понимают самый быстрый алгоритм.

Время работы алгоритма удобно выражать в виде функции от одной переменной, характеризующей размер индивидуальной задачи, т.е. объемом входных данных, требуемых для описания задачи.

Описание задачи осуществляется следующим образом.

Введем Σ — множество символов, которые образуют некоторый алфавит. Цепочки из символов этого алфавита образуют слова, множество таких цепочек Σ^*. Любое подмножество $L \subseteq \Sigma*$ будем называть языком в алфавите Σ.

Соответствие между задачами и языками устанавливаются с помощью схем кодирования. Схема кодирования $\boldsymbol{l}$ задачи $\boldsymbol{\Pi}$ описывает каждую индивидуальную задачу из $\boldsymbol{\Pi}$ подходящими словами в некотором фиксированном алфавите Σ.

$$L[\Pi, l] = \{x \in \Sigma^*, \quad x \text{ - код индивидуальной задачи}\}$$

Задача $\boldsymbol{\Pi}$ и схема кодирования $\boldsymbol{l}$ разбивает слова Σ^* на три класса: слова не являющиеся кодами задачи $\boldsymbol{\Pi}$, слова являющиеся кодами индивидуальных задач $\boldsymbol{\Pi}$ с положительным ответом на вопрос и слова с отрицательным ответом.

Если $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{l'}$ — две схемы кодирования, то $L\,[\Pi, l]$, $L\,[\Pi, l']$ выполняются одновременно. Входная длина индивидуальной задачи $\boldsymbol{I}$ из $\boldsymbol{\Pi}$ определяется числом символов в цепочке, полученной применением к задаче $\boldsymbol{I}$ схемы кодирования для массовой задачи $\boldsymbol{\Pi}$. Именно это число используется в качестве формальной характеристики размера индивидуальной задачи.

Приведем простейший пример кодирования массовой задачи.

Массовая задача может быть описана на естественном языке.

Дано число $\boldsymbol{A}$ и число $\boldsymbol{B}$. Чему равно произведение чисел?

Индивидуальная задача. Дано число $\boldsymbol{A}$ равное двум и число $\boldsymbol{B}$ равное двум. Чему равно произведение чисел?

Математическая кодировка массовой задачи: A*B = ?

Индивидуальная задача 2*2=?

Массовая задача на языке Си:

[2]Заметим, что класс математических задач шире класса задач, решаемых алгоритмически [2].

```
1. /*Произведение двух чисел
2. #include ⟨studio.h⟩
3. void main ()
4. {
5. int a,b,s;
6. printf("\n Введите числа a и в");
7. scanf("%d%d",&a,&b);
8. s=a*b;
9. printf("\n Сумма S= %d", s);
10. }
```

Индивидуальная задача может быть получена двумя способами: либо через введение значений $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, либо изменением восьмой строки $s = 2 * 2$;

Для решения на компьютере задача переводится в последовательность двоичных кодов, описывающую последовательность состояний реле, реализованных в микропроцессорах.

Очевидно, что в приведенном примере длина кода задачи зависит от длины записи перемножаемых чисел и результата[3].

В теории алгоритмов принято различать сложность алгоритмов по изменению его длины в зависимости от входных параметров.

С каждой задачей $\boldsymbol{\Pi}$ связана не зависящая от схемы кодирования функция $Length : D_{\Pi} \to Z^{+}$ (D_{Π} — множество всех индивидуальных задач), которая "полиноминально эквивалентна" длине кода индивидуальной задачи, получаемой при любой разумной схеме кодирования ($Length\,[I]$ — функция длины задачи в символах выбранного алфавита).

Под полиноминальной эквивалентностью задач понимается следующее. Для любой разумной схемы кодирования $\boldsymbol{l}$ задачи $\boldsymbol{\Pi}$ существует два полинома p и p' такие, что $Length[I] \leq p(|x|)$ и $|x| \leq p'(Length[I])$, где $|x|$ — длина слова x.

Алгоритм решения задачи П будем называть псевдополиноминальным по времени алгоритмом, если его временная функция ограниченна сверху полиномом от двух аргументов $Length[I]$ и $Max[I]$. ($Max[I]$ — максимальное число в I).

Полиномиальным алгоритмом (или алгоритмом полиноминальной сложности) называется алгоритм, у которого временная сложность равна $O(p(n))$, где $p(n)$ — некоторая полиноминальная функция, а n — входная длина.

Приведем оценки полиноминальной сложности некоторых известных алгоритмов. Алгоритм быстрой сортировки элементов массива $O(n^2)$, алгоритм пирамидальной сортировки $O(n \log_2 n)$. Известен алгоритм умножения двух чисел с асимптотической сложностью $O(n \log n \log\log n)$, алгоритм умножения матриц $O(n^{2,2})$, алгоритм решения задачи линейного программирования — со сложностью $O(n^{3,5})$[3] , метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений имеет сложность $O(n^3)$, быстрое преобразования Фурье – $O(n \log n)$.

Заметим, что любой полиноминальный алгоритм является псевдополиноминальным по времени, но не обратно.

Временная сложность алгоритма отражает требующиеся для его работы затраты времени. Это функция, которая каждой длине n (индивидуальной задачи) ставит в соответствие максимальное время, затрачиваемое алгоритмом на решения индивидуальных задач этой длины[4]. Функция временной сложности будет полностью определена, если зафиксирована схема кодирования, определяющая входную длину индивидуальной задачи, и выбрано вычислительное устройство (или его модель), определяющее время работы.

Заметим, что сложность алгоритма связана с используемой для решения задачи памятью. Например, пусть требуется определить число единиц в двоичной последовательности длины n.

---

[3]Для формализации понятия "алгоритм" необходимо зафиксировать определенную модель процесса вычислений.

[4]Практически во всех математических пакетах имеются встроенные функции, позволяющие определять время работы программы, т.е. время индивидуальной задачи.

Алгоритм, который считает единицы, последовательно просматривая все элементы последовательности, имеет трудоемкость $O(n)$. Можно предложить другой алгоритм, который требует 2^n ячеек памяти для хранения всех двоичных последовательностей длины n, причем номер ячейки — это двоичная последовательность длины n, а в самой ячейке хранится число единиц этой последовательности. Задача решается за одно обращение к памяти, т.е. трудоемкость алгоритма $O(1)$.

Полиноминальные алгоритмы обычно создаются в результате глубокого анализа задачи. Задачи, для которых найден полиноминальный алгоритм, относятся к множеству задач класса P (Polynomial).

Все неполиноминальные алгоритмы, как правило, считаются экспоненциальными. Большинство экспоненциальных алгоритмов являются вариантами полного перебора возможных частных решений задачи, и такие задачи относятся к задачам класса NP (Nondeterministically Polynomial).

Принято считать задачу труднорешаемой, если для нее не получен полиноминальный алгоритм.

Примером экспоненциальных задач являются выше описанные задачи о коммивояжере и рюкзаке. В работе [1] приводится 300 подобных труднорешаемых задач.

Для исследования задач NP используют недетерминированный алгоритм, который состоит из двух этапов:

1. "угадывание" решения,

2. проверка найденного решения.

Заметим, что проверка осуществляется за полиномиальное время.

В 1971 году вышла работа С.А. Кука "Сложность процедур вывода теорем" [4], в которой было показано:

1. Если одна задача сводится к другой задаче за полиномиальное время, то любой полиноминальный алгоритм второй задачи может быть превращен в полиноминальный алгоритм решения первой задачи[5].

2. В качестве базовой, модельной задачи класса NP была выбрана задача выполнимости.

Задача выполнимости.

Условие. Задано множество булевых переменных U ($U = \{u_1, u_2, ...u_n\}$). Под набором значений истинности на множестве U будем понимать функцию $F : U \to \{T, F\}$ и набор C дизъюнкций над U.

Вопрос. Существует ли выполняющий набор значений истинности для C?

Например, заданы логические переменные X, Y, Z и набор логических операций $\wedge, \vee, \neg$. Существует ли функция $F = X \wedge Y \vee \neg Z$, имеющая истинное значение при каких-то значениях X, Y, Z?

Ответ на этот вопрос может быть получен перебором значения переменных.

Теорема Кука. Задача выполнимости есть NP-полная задача.

Было показано, что любая задача из класса NP за полиноминальное время может быть сведена к задаче выполнимости.

Проверка решения каждой индивидуальной задачи из класса $\boldsymbol{NP}$ осуществляется за полиноминальное время, а выбор этого решения — случайным образом, то есть имеет место недетерминированный алгоритм решения. Число вариантов решений, которые надо проверить, растет экспоненциально[6] с ростом входных параметров задачи.

Вопрос о взаимоотношении классов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{NP}$ является фундаментальным вопросом теории алгоритмов. Очевидно, что $P \subseteq NP$ и доказана следующая теорема. Если $\boldsymbol{\Pi} \in \boldsymbol{NP}$, то существует

[5]Примером такой сводимости могут служить различные алгоритмы прямых методов решения систем линейных алгебраических уравнений $O(n^3)$ (метод Гаусса, LU-метод, метод прогонки и др.).

[6]К этим задачам относятся такие массовые задачи: составление расписаний (учебного, рабочих часов), планирование производства, минимизация максимальных затрат и т.д. [1].

полином $\boldsymbol{p}$ такой, что $\boldsymbol{\Pi}$ может быть решена детерминированным алгоритмом с временной сложностью $O(2^{p(n)})$.

Высказана гипотеза, что $\boldsymbol{P}\neq\boldsymbol{NP}$, но доказательства ее нет. Если бы она была доказана, то для каждой конкретной задачи можно было бы определить, к какому классу она принадлежит, к классу $\boldsymbol{P}$ или к классу трудно решаемых задач $\boldsymbol{NP}$[7].

Ответ на вопрос о не эквивалентности классов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{NP}$ задач может быть получен, если будет найдена задача, принадлежащая $\boldsymbol{NP}\backslash\boldsymbol{P}$ и для нее будет доказано отсутствие полиноминального алгоритма решения.

Поиском такой задачи и объясняется интерес к игре Сапер (Minesweeper).

Поиск алгоритма раскрытия игры Сапер

Игра сапер входит в стандартный набор игр Microsoft Windows. В ней имеется прямоугольное поле, состоящее из клеток. Одни клетки пустые, в других заложены мины. Открытие клеток ведется последовательно до первой ошибки или полного раскрытия поля. При открытии пустой клетки в ней появляется цифра, равная числу мин, находящихся в восьми клетках, которые окружают открытую клетку.

Из игровой практики известно, что при некоторых простых конфигурациях мин алгоритм открытия является последовательным линейным алгоритмом, в других более сложных случаях поиск алгоритма осуществляется перебором возможных различных расстановок мин.

В работе [5] показано, что при переходе к бесконечному игровом полю в игре Сапер могут возникать расстановки мин, которые можно представить как некоторые логические элементы.

Например, структура, приведенная на рис. 1, описывает перенос переменной $\boldsymbol{X}$.

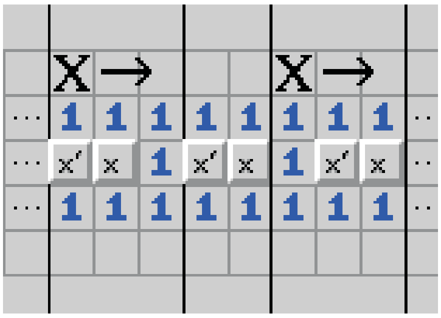
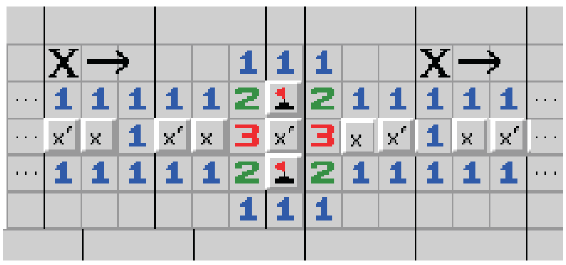


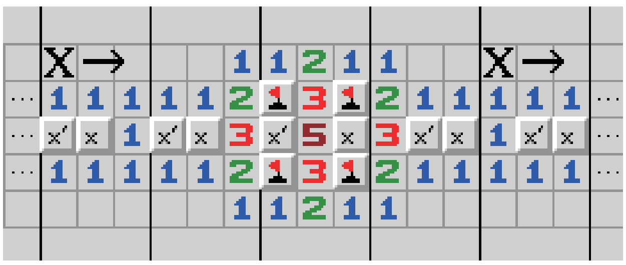
Рис.1

Здесь x' соответствует наличию мины, x — ее отсутствию (можно рассматривать обратные значения x' — мины нет, x — мина есть).

На рис.2 приведены структуры, соответствующие отрицанию (NOT) и двойному отрицанию (NOT(NOT)).



NOT



NOT(NOT)

Рис.2

[7]Интересно заметить, что математическим институтом Глена США предложена денежная премия в размере одного миллиона долларов за решения проблемы эквивалентности классов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{NP}$ задач .

В этой же работе [5] показано, что в игре сапер на бесконечном поле могут возникать структуры, которые эквиваленты последовательности логических элементов и, следовательно, некоторые индивидуальные задачи раскрытия игрового поля сводятся к задаче выполнимости Кука, то есть существует последовательность индивидуальных задач раскрытия игры сапер, которые принадлежат к классу NP-полных задач.

Однако, игровая практика показывает, что этим не исчерпываются все возможные задачи игры. Действительно при последовательном переборе возможных различных расстановок мин может возникнуть неоднозначность, то есть искомая мина с равной вероятностью может находиться в нескольких клетках. Например, пусть все игровое поле раскрыто, а в области, ограниченной кластером из мин, должна находится одна мина (рис.3). В этом случае мина с равной вероятностью находится в одной из двух клеток. Логический переход между внешним полем и областью, ограниченной кластером, невозможен.

Следовательно, в этом случае детерминированного алгоритма раскрытия игры не существует.

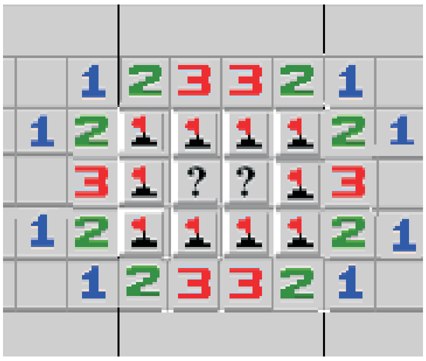


Рис.3

Возникает задача об определении вероятности появления замкнутых областей при различных концентрациях мин на поле [6].

Задача. По заданному размеру поля и случайно расставленным минам при различных концентрациях требуется определить критические значения концентрации, при которых происходит появление замкнутых кластеров и кластеров, разделяющих игровое поле на независимые части.

Анализ задачи о появлении кластеров из мин может быть проведен с помощью теории перколяции.

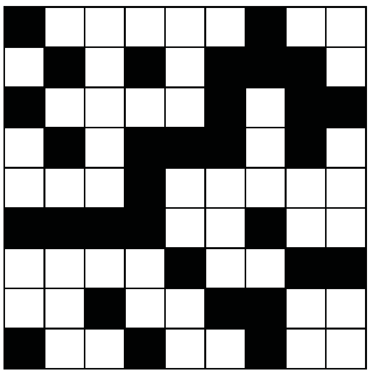


Рис. 4

Слово перколяция и основные идеи теории перколяции были разработаны Симоном Бродбентом и Джоном Хаммерсли в 1957 г. при изучении ими явлений прохождения газов через угольный фильтр. Движение газа по лабиринтам из пор в угле они назвали перколяционным процессом (percolation – просачивание, протекание).

Рассмотрим явление перколяции на простейшей квадратной сетке (рис.4) [7]. Часть клеток сетки закрашивается в черный цвет. Доля закрашенных квадратов составляет $p = \frac{N_{черн}}{N}$, N — общее число клеток, $N_{черн}$ — черные клетки

Квадраты для закрашивания выбираются двумя способами: либо случайно, либо по какому-то правилу. В первом случае говорят о случайной перколяции (перколяции Бернулли), во втором — о коррелированной.

В дальнейшем будем рассматривать случайные перколяции.

Цепочку связанных клеток одного типа называют кластером.

Кластер, соединяющий две противоположные стороны системы, называют перколяционным или бесконечным кластером[8].

Один из основных вопросов теории перколяции: при какой доле p закрашенных квадратов возникает цепочка черных квадратов, соединяющая верхнюю и нижнюю стороны сетки, то есть бесконечный кластер?

При случайной расстановке черных клеток такие цепочки могут возникать при разных концентрациях.

Однако, если размер сетки L устремить к бесконечности, то критическая концентрация станет вполне определенной. Такую критическую концентрацию называют порогом перколяции.

По своей сути перколяционный порог или перколяционный переход является геометрическим фазовым переходом. Действительно, критическая концентрация точек разделяет все сетки на два вида (две фазы): в одном виде существуют конечные кластеры, в другой существует один бесконечный кластер (рис.5).

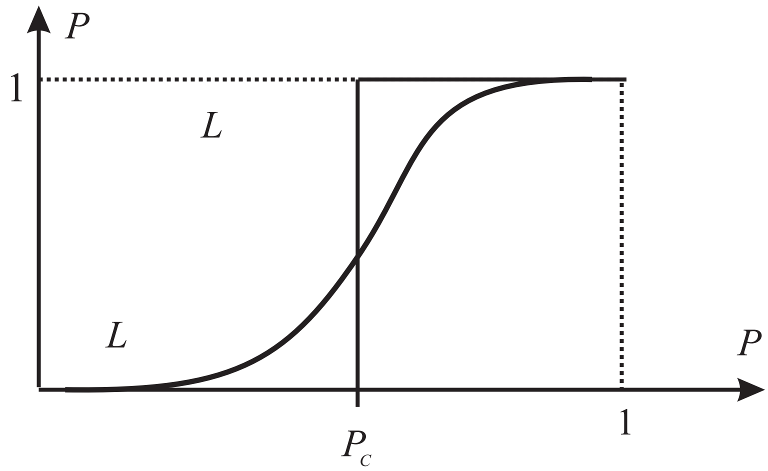


Рис.5

Многие важные характеристики кластера (длина корреляции, среднее число узлов) вблизи перехода описываются показательной функцией с различными критическими показателями.

Постановка задачи поиска кластера из мин

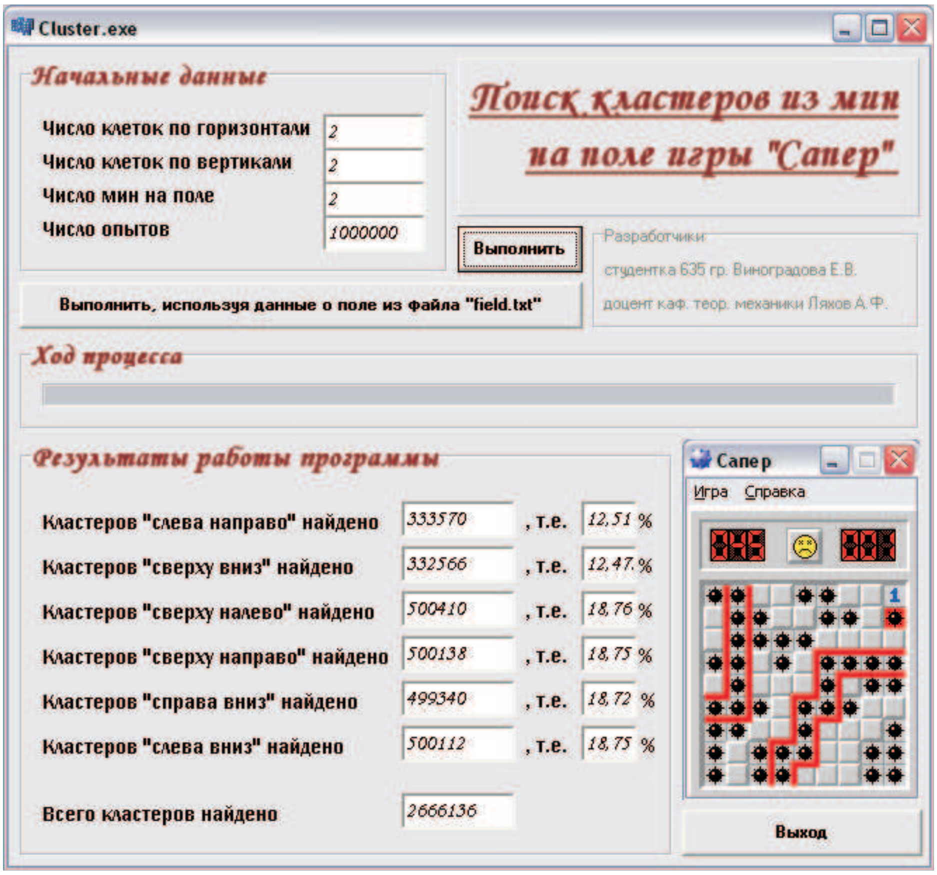
Игровая практика показывает, что вероятность раскрытия поля “Сапера” зависит от существования кластера из мин, отсекающего часть игрового поля. На основе этой практики можно сформулировать некоторые гипотезы, связанные с возможностью существования алгоритма раскрытия поля “Сапера”:

[8]Для подобных кластеров в литературе используются названия “стягивающий кластер”, “соединяющий кластер”.

1. Если на поле есть кластер из мин, делящий игровое поле на две независимые области так, что в каждой из этих областей есть мины, то алгоритм раскрытия такого поля не существует.

2. Если кластер из мин делит поле на область, содержащую все мины, и пустую область, то существование алгоритма раскрытия зависит от “толщины” кластера (т.е. стороны наибольшего квадрата из заминированных клеток, целиком включенного в кластер). Если этот кластер содержит мины, которые не могут быть обнаружены при полном раскрытии первой области, то алгоритм раскрытия не существует.

Для исследования вопроса о возникновении бесконечного кластера из мин использовался численный эксперимент. В среде визуального объектно-ориентированного программирования C++Builder 6 была написана программа Cluster, моделирующая поля игры “Сапер” и подсчитывающая число случаев появления кластера из мин, соединяющего хотя бы две стороны поля.



Программа различает шесть видов кластеров: кластеры, соединяющие левую и правую стороны поля, верхнюю и нижнюю, верхнюю и левую, верхнюю и правую, нижнюю и левую, нижнюю и правую. Некоторые кластеры относятся к нескольким видам одновременно. Программа подсчитывает случаи возникновения кластеров каждого вида в отдельности, а затем находит их общее число за большое заданное число расстановок мин на поле.

Начальными данными для работы программы являются размеры поля (число клеток по горизонтали $N1$ и по вертикали $N2$), число мин на поле M и количество опытов K, которое пользователь хотел бы провести. Эти данные можно задать с клавиатуры, изменив значение соответствующих компонентов формы. В этом случае для каждого опыта программа случайным образом расставляет мины по клеткам поля.

Алгоритм программы Cluster

Инициализация начального состояния игрового поля.

На первом этапе работы в программе создается массив X из $N1 \times N2$ элементов, в котором будет хранится информация о расположении мин на поле. Клетка будет считаться заминированной, если значение элемента, отвечающего ей, равно 1, и свободной, если оно равно 0. Если заданное количество мин будет занимать меньше половины от всех клеток поля, то все элементы массива X зануляются и единицы расставляются случайным образом. В случае, когда мин больше, чем свободных клеток, все элементы массива X становятся равными единице и случайно расставляются нули. Поскольку между клетками поля и элементами массива X есть взаимнооднозначное соответствие, то в дальнейшем будем называть заминированные клетки "единицами", а пустые – "нулями". Массив X будем отождествлять с игровым полем "Сапера".

<u>Алгоритм поиска кластера из мин.</u>

Поиск кластеров программа начинает с левой стороны поля. Все "единицы" крайнего левого столбца поля переименовываются в "двойки", т.е. элементам массива X, имеющим значение 1, присваивается значение 2. Далее в цикле проверяются ближайшие соседние к "двойкам" клетки. Если сосед сверху, снизу, справа или слева является "единицей", то он становится "двойкой". Процесс заканчивается, если при очередной проверке не появляется ни одной новой "двойки". Таким образом, программа фиксирует кластер "слева направо", если на правой стороне поля появилась хотя бы одна двойка, "сверху налево" - если двойка появилась на верхней стороне, "слева вниз" - если на нижней. Потом поле возвращается в исходное состояние (все "двойки" вновь становятся "единицами"). Далее программа начинает поиск с верхней стороны поля (ищутся кластеры "сверху вниз" и "сверху направо"). Наконец, начиная поиск с правой стороны, программа проверяет наличие кластера "справа вниз".

Компьютерный эксперимент

В таблице 1 приведены результаты экспериментов по нахождению частоты появления кластеров на квадратных полях разного размера и с различной плотностью мин. Например, число 0.40940 на пересечении столбца с заголовком 14 и строки 0.1 означает, что на поле размера 14×14 и плотностью мин 0.1 найдено 40940 различных кластеров (эксперимент проводился 10^5раз).

Таблица 1.

плотность мин \ сторона поля	9	10	12	14	16	18	20	среднее
0.05	0.19974	0.19990	0.19309	0.20263	0.20366	0.19798	0.20233	0.19990
0.1	0.39824	0.40492	0.39173	0.40940	0.41410	0.39892	0.40305	0.40291
0.15	0.60840	0.61085	0.62414	0.60508	0.60445	0.62213	0.61218	0.61246
0.2	0.82288	0.83670	0.84083	0.83362	0.83221	0.84002	0.83822	0.83493
0.25	1.05229	1.07365	1.07075	1.07428	1.07545	1.07194	1.08004	1.07120
0.3	1.30841	1.33027	1.32234	1.34058	1.34465	1.33328	1.34067	1.33146
0.35	1.59134	1.61423	1.60732	1.63276	1.63162	1.61378	1.62389	1.61642
0.4	1.91887	1.95546	1.96590	1.93442	1.94239	1.96092	1.95494	1.94756
0.45	2.33285	2.37835	2.37768	2.33967	2.34058	2.34616	2.34257	2.35112
0.5	3.07075	2.96305	2.93342	2.90359	2.88190	2.85613	2.84452	2.92191
0.55	3.87961	3.77452	3.73631	3.76310	3.74376	3.67915	3.67160	3.74972
0.6	4.75903	4.69970	4.69852	4.83059	4.87001	4.82814	4.88149	4.79535
0.65	5.46554	5.46303	5.56690	5.58123	5.64228	5.71424	5.74255	5.59654
0.7	5.83629	5.85508	5.89997	5.92378	5.94777	5.96661	5.97462	5.91487
0.75	5.97211	5.97487	5.98761	5.99296	5.99663	5.99827	5.99882	5.98875
0.8	5.99730	5.99798	5.99932	5.99979	5.99985	5.99998	6.00000	5.99917
0.85	5.99998	5.99995	5.99998	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	5.99999
0.9	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000	6.00000

Можно видеть, что частота появления кластеров зависит главным образом от плотности мин на игровом поле. Уже при плотности 0.25 на любом поле с достаточно высокой вероятностью будет найден хотя бы один кластер (более точно – при 0.235; это значение является порогом протекания в рассматриваемой задаче). Более половины полей с плотностью мин 0.15 содержат кластер. На полях с меньшей плотностью кластеры появляются редко, и проблем при раскрытии практически не возникает. Этим объясняется статистика положительных исходов в категориях “Новичок”, “Любитель” и “Профессионал”.

Найденная экспериментальная зависимость частоты появления кластеров, соединяющих две стороны поля, от плотности мин имеет существенно нелинейный характер. График этой зависимости приведен на рис.1.

Рис. 6

Точки 1, 2 и 3 на графике соответствуют игровым полям “Новичок”, “Любитель” и “Профессионал”. Их расположение свидетельствует о том, что создатели игры “Сапер” предусмотрели ненулевую вероятность раскрытия стандартных полей. Точка 4 соответствует порогу протекания.

Среднеквадратичное отклонение, характеризующее разброс экспериментально найденных частот появления кластера из мин, вычислялось по формуле $\sigma = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} (P_{cp} - P_i)^2 / N}$, где P_{cp} — экспериментальная средняя частота появления кластера при заданной плотности мин, P_i — количество кластеров в единичном эксперименте, N — количество экспериментов ($N = 10^5$).

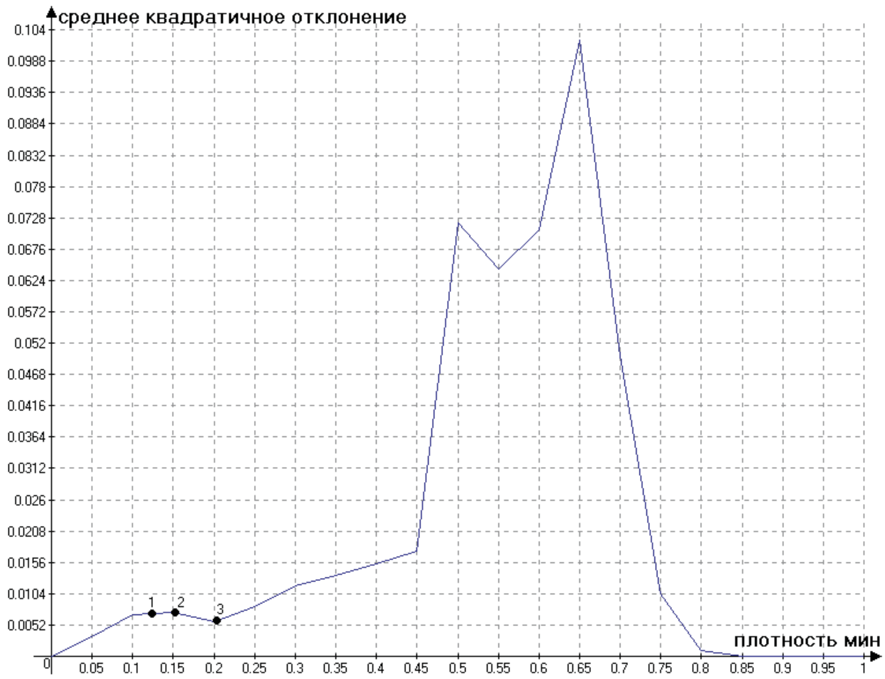


Рис. 7

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что вероятность существования алгоритма раскрытия игрового поля "Сапера" тем меньше, чем выше плотность расположения мин, причем эта зависимость имеет нелинейный характер. При исследовании было экспериментально установлено пороговое значение плотности мин $x_c = 0{,}235$. Вероятность раскрыть поле с плотностью выше этого значения мала.

Учет замкнутых кластеров, начинающихся и заканчивающихся на одной и той же стороне поля, а также замкнутые кластеры, не примыкающие ни к одной из сторон игрового поля приведет к изменению вероятности раскрытия игрового поля.

Дальнейшие исследования показывают, что замкнутые кластеры при больших плотностях мин носят явно выраженный фрактальный характер (рис.8) (фрактальная размерность $n = 1,317$ при $\rho = 0,5$).

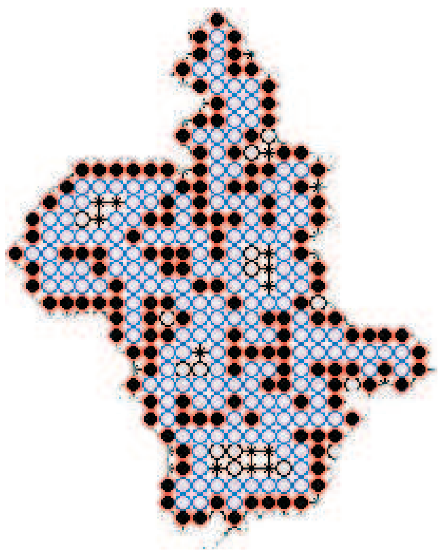


Рис. 8

Тот факт, что кластеры имеет фрактальную размерность, означает, что они обладают свойством масштабной инвариантности, поэтому исследование небольших по размерам решеток позволяет судить о бесконечных решетках.

Данное свойство индивидуальных задач раскрытия игры "Сапер" позволяет говорить о новом виде их сводимости друг к другу.

Заметим, что разработанные алгоритмы и подходы могут быть использованы в исследовании задач, связанных с проблемами распознавания образов. Действительно, любое изображение на экране может быть описано как набор некоторых кластеров из пикселей изображения. Например, можно поставить вопрос об искусственном или естественном происхождении изображения. Если величина вероятности случайного возникновения кластера изображения очень мала, и после некоторого цветового преобразования кластер изображения сохраняется, а вероятность его возникновения и в новой цветовой гамме также мала, то это, по-видимому, изображение искусственного объекта.

Заключение

Проведенные исследования игры "Сапер" позволяют ввести еще один класс трудно решаемых массовых задач, а именно задач, имеющих алгоритм решения с некоторой вероятностью, определяемой входными параметрами задачи.

Литература

[1] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

[2] Картленд Н. Вычислимость введение в теорию рекурсивных функций. М.: Мир, 1983. 256 с.

[3] Гордеев Э.Н. Задача выбора и их решение. В сборнике: Компьютер и задача выбора. М.: Наука, 1989. с.2-49

[4] Cook S.A. The complexity of theorem-proving procedures. Proc. 3rd Ann. ACM Symp. On Theory of Computing Machinery, New York, 151-158.

[5] Richard Kaye's "Minesweeper is NP-complete", Mathematical Intelligencer, vol. 22, number 2, pp.9-15, 2000.

[6] Виноградова Е.В., Ляхов А. Ф. Вероятность существования алгоритма раскрытия игры "Сапер". Компьютерные инструменты в образовании, №3, 2007. с.72-79.

[7] Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. Библиотечка "Квант", выпуск 19. М.:Наука, 1982. 268 с.

Ляхов Александр Федорович,
доцент кафедры теоретической механики
механико-математического факультета
Нижегородского государственного университета
имени Н. И. Лобачевского.

Email: Lyakhov@mm.unn.ac.ru

Теория одного класса Пуассоновских процессов

П. Г. Лахманов

Настоящая статья предлагается вниманию читателей в качестве примера применения математических методов к решению прикладных инженерных задач. В данном случае такой задачей является вычисление существенных характеристик некоторого случайного процесса. Изучение подобных процессов составляет предмет теории массового обслуживания.

Более подробно, в работе построена полная система вероятностных и временных характеристик случайного процесса, образованного наложением пуассоновского потока импульсов и регулярного функционального сигнала.

Методической основой стал синтез традиционно применявшегося для данной проблематики аппарата теории вероятностей и методов (уравнений) математической физики (дифференциальные уравнения в частных производных).

По уровню сложности статья доступна студентам физико-математических и технических специальностей, освоившим общий курс математики: анализ, дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных (в том числе знакомство с дельта-функцией), основы теории вероятностей и случайных процессов.

В ряде технических устройств имеет место выходной сигнал, образованный наложением пуассоновского потока стандартных единичных импульсов и регулярного функционального сигнала [1].

Аналогичная ситуация встречается также в ряде задач теории марковских процессов, в природных явлениях и в ситуациях экономического характера [2].

Анализ этих процессов обычно ограничивался рассмотрением функции распределения выходного сигнала и мало затрагивал временные характеристики процесса, определяющие поведение системы в пороговом режиме (среднее время достижения процессом определенного уровня (порога) — «срабатывание», дисперсия этого времени, вероятность того, что за время t «срабатывание» не произойдет (статистическая надежность состояния системы), распределение срабатываний и т. д.).

В настоящей работе методической основой теории вероятностных и временных характеристик рассматриваемых пуассоновских процессов стал синтез традиционно применявшегося для данной проблематики аппарата теории вероятностей и методов (уравнений) математической физики (методы описания процессов во времени и пространстве с помощью дифференциальных уравнений в частных производных).

Подобная междисциплинарность позволила преодолеть ряд трудностей принципиального характера и создала предпосылки для исчерпывающего описания временных характеристик процесса.

Уравнения математической физики — это, как правило, уравнения баланса — материального или энергетического, основанного на законах сохранения.

В нашем случае может быть применён закон сохранения вероятности (или плотности вероятности). Подобный подход применялся в ряде случаев в теории марковских процессов [2].

Входной пуассоновский поток (импульсов) описывается уравнением [3]:

$$\frac{\mathrm{d}\omega(x,t)}{\mathrm{d}t} = n\omega(x-1,t) - n\omega(x,t), \tag{1}$$

где $\omega(x,t)$ — вероятность значения x в момент времени t; $x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ случайная величина — набор импульсов; n — средняя частота следования импульсов; t — время.

Решением (1) является хорошо известное распределение Пуассона:

$$\omega(x,t) = \frac{(nt)^x}{x!}e^{-nt}.$$

Одновременно с набором происходит непрерывное «вычитание» из этого набора, описываемое уравнением:

$$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(\omega(x,t)\cdot v(x,t)\big) = 0, \tag{2}$$

где $v(x,t)$ — скорость «вычитания» из Пуассоновского набора, определяемая характером задачи.

Последнее уравнение напоминает уравнение неразрывности в гидродинамике (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0,$$

где ρ — плотность, v — скорость потока, t — время, а также уравнение непрерывности в электродинамике — закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0,$$

где ρ — плотность заряда j — плотность тока.

Наложение (суперпозиция) процессов (1) и (2) определяет окончательный вид общего уравнения связи между вероятностными характеристиками и «аппаратурными параметрами» (уравнение переноса вероятности или закон сохранения вероятности)

$$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} = n\omega(x-1,t) - n\omega(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\big(v(x,t)\cdot\omega(x,t)\big), \tag{3}$$

где $\omega(x,t)$ — плотность вероятности выходного сигнала.

Просматриваются определенные аналогии и параллели между этим уравнением и уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова [4].

Для случая когда «вычитание» имеет экспоненциальный характер $v = -x/\tau$ (τ — постоянная времени) имеем:

$$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} = n\omega(x-1,t) - n\omega(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\tau}\cdot\omega(x,t)\right). \tag{4}$$

На рис. 1 представлена одна из возможных реализаций последнего процесса.

Рассмотрим ещё один вывод уравнения (4), основанный на «микроскопическом» анализе баланса вероятностей: очевидно, что $\omega(x,t)\mathrm{d}x$ — вероятность того, что в момент времени t выходной сигнал принимает значения от x до $x+\mathrm{d}x$.

В момент времени $t+\Delta t$ (Δt — мало) вероятность Р нахождения выходного сигнала в интервале от x до $x+\mathrm{d}x$ запишется в виде

$$P = \omega(x,t+\Delta t)\mathrm{d}x = \left\{\omega(x,t) + \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}\Delta t\right\}\mathrm{d}x.$$

Вероятность P может быть представлена как сумма двух вероятностей (см. рис. 1), одна из которых P_1 — вероятность попадания выходного сигнала в интервал от x до $x+\mathrm{d}x$ за время Δt (от t до $t+\Delta t$) из интервала от $x\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)$ до $(x+\mathrm{d}x)\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)$ при условии, что за время Δt на вход не поступит ни одного импульса (попадания «сверху»). Другая вероятность P_2 является вероятностью попадания сигнала в интервал от x до $x+\mathrm{d}x$ за время Δt, когда в этот интервал времени на вход поступил импульс (попадание «снизу»). Вероятности P_1 и P_2 могут быть представлены в виде

$$P_1 = \omega\left(x\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right),t\right)\mathrm{d}x\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)(1-n\Delta t),$$

$$P_2 = \omega\left((x-1)\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right),t\right)\mathrm{d}x\left(1+\frac{\Delta t}{\tau}\right)n\Delta t,$$

где n — средняя частота следования Пуассоновских импульсов.

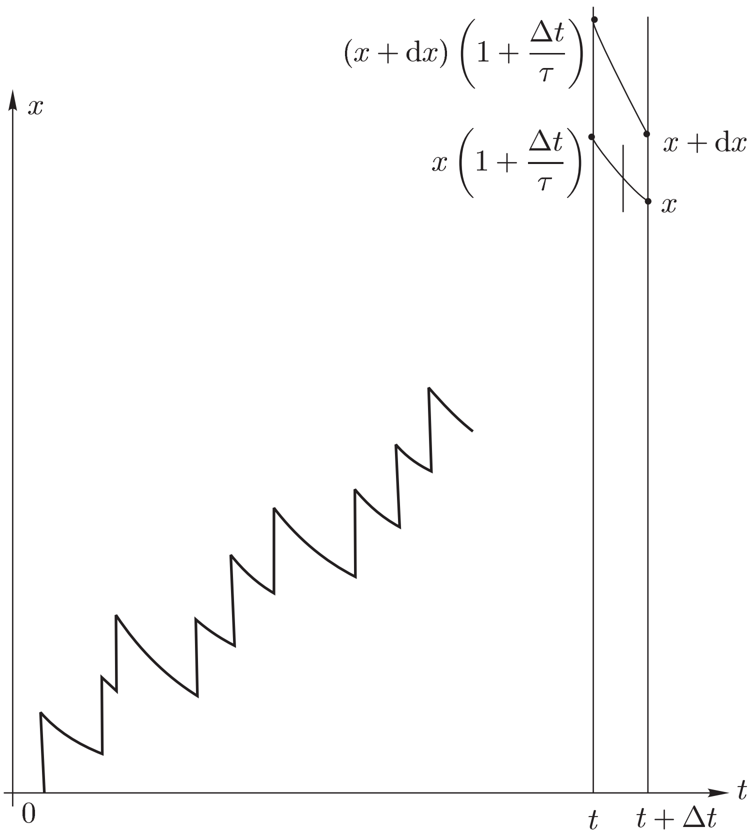


Рис. 1. При поступлении импульса сигнал x возрастает на одну единицу, в интервале между поступающими импульсами x изменяется по экспоненциальному закону с постоянной времени τ

Разложив вероятности P_1 и P_2 в ряд Тейлора, пренебрегая при этом членами более высокого порядка малости, чем второй, и приравняв сумму P_1 и P_2 вероятности к P, получим (4).

Полученные уравнения (3), (4) являются дифференциально-разностными уравнениями в частных производных первого порядка.

Обратимся к решению уравнения (4). Следует отметить, что основным подходом при нахождении как вероятностных, так и временных характеристик служили методы интегральных характеристик выходного сигнала, что в общем-то понятно, так как в данном случае любая локальная характеристика определяется поведением системы во всей области изменения переменных.

Рассмотрим метод моментов функций распределения выходного сигнала, определив k-й момент следующим образом

$$\alpha_k(t) = \int\limits_0^\infty x^k \cdot \omega(x,t)\mathrm{d}x.$$

Разберем случай скачкообразного изменения входного сигнала, при условии полного отсутствия входного сигнала в момент времени $t=0$: $n(0)=0$.

Условие скачкообразного изменения средней частоты следования импульсов на входе от 0 до n в момент времени $t=0$ может быть представлено в виде соответствующей δ-функции [5]

$$\omega(x,0) = \delta(x). \tag{5}$$

Условие нормировки запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty \omega(x,t)\mathrm{d}x = 1 \qquad (\alpha_0^x \equiv 1). \tag{6}$$

Проинтегрировав (4) по x от 0 до ∞ получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_0^x(t) = n\alpha_0^x(t) - n\alpha_0^x(t) = 0. \tag{7}$$

Решение этого уравнения обеспечивается при любом постоянном значении $\alpha_0^x(t)$, что подтверждает равенство (6).

Для нахождения первого момента распределения $\alpha_1^x(t)$ умножим уравнение (4) на x, проинтегрируем по x от 0 до ∞ и получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_1^x(t) = n - \frac{\alpha_1^x(t)}{\tau}. \tag{8}$$

Начальное условие может быть представлено следующим образом

$$\alpha_1^x(0) = 0. \tag{9}$$

Решая дифференциальное уравнение (8) с учетом (9), получим достаточно очевидный результат

$$\alpha_1^x = n\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{10}$$

Полученное решение соответствует нарастанию выходного сигнала при поступлении на вход импульсов регулярной частоты (начиная с момента времени $t = 0$) или случаю $n\tau \to \infty$.

Для нахождения второго момента функции распределения $\alpha_2^x(t)$ умножим уравнение (4) на x^2 и проинтегрируем по x от 0 до ∞.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_2^x(t) = 2n\alpha_1^x(t) + n - \frac{2\alpha_2^x(t)}{\tau}, \qquad \alpha_2^x(0) = 0. \tag{11}$$

Решая дифференциальное уравнение (11), получим

$$\alpha_2^x(t) = \frac{n\tau}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right) + n^2\tau^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Дисперсия выходного сигнала $Д$ и относительное среднеквадратическое отклонение δ_x запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} Д &= \alpha_2^x(t) - [\alpha_1^x(t)]^2 = \frac{n\tau}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right), \\ \delta_x &= \frac{\sqrt{Д}}{\alpha_1^x(t)} = \frac{\sqrt{1 - e^{-2t/\tau}}}{\sqrt{2n\tau}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Аналогичная операция над уравнением (4) для последующих моментов распределения дает следующие выражения:

$$\alpha_3^x(t) = \frac{n\tau}{3}\left(1 - e^{-3t/\tau}\right) + \frac{3}{2}n^2\tau^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\left(1 - e^{-2t/\tau}\right) + n^3\tau^3\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^3,$$

$$\begin{aligned} \alpha_4^x(t) = \frac{n\tau}{4}\left(1 - e^{-4t/\tau}\right) + \frac{25}{12}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\left(1 + \frac{34}{25}e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}\right) + \\ + 3n^3\tau^3\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2\left(1 - e^{-2t/\tau}\right) + n^4\tau^4\left(1 - e^{-t/\tau}\right)^4 \end{aligned}$$

и т. д.

Далее для решения уравнения (4) целесообразен переход от случайной величины x к её стандартизованному отклонению от среднего значения т. е. к другой случайной величине $z(t)$ связанной с x следующей зависимостью:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sqrt{Д}} = \frac{x - n\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}{\sqrt{\frac{n\tau}{2}\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)}}. \tag{13}$$

Очевидно, что для неё, как и для всякой стандартизованной величины, справедливы равенства

$$\bar{z} = M(z) = 0, \qquad Д(z) = \sigma^2 = 1.$$

Пересчет моментов выходного сигнала в единицах z приводит к следующим результатам:

$$\alpha_0^z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(z,t)\,\mathrm{d}z = 1 \quad \text{нормировка}, \qquad \alpha_1^z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\omega(z,t)\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\alpha_2^z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2\omega(z,t)\,\mathrm{d}z = 1, \qquad \alpha_3^z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^3\omega(z,t)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{4\sqrt{2n\tau}}\frac{1 - e^{-3t/\tau}}{\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)^{3/2}}.$$

Для построения $\omega(z,t)$ воспользуемся тем, что при весьма общих предположениях любая плотность вероятности может быть разложена в бесконечный ряд по нормальному закону и его производным [6].

Эта идея восходит своими истоками к трудам выдающегося русского математика П. Л. Чебышева [7]. Своё дальнейшее развитие и строгое доказательство вышеназванная гипотеза нашла в трудах Ш. Эрмита [8], Шарлье [9], Эджворта [10], Г. Крамера [6], А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко [11].

Даже невооруженным глазом видна её органическая связь с предельными теоремами теории вероятностей.

Таким образом, функцию $\omega(z,t)$ представим в виде следующего ряда (разложение по ортогональным членам)

$$\begin{gathered} \omega(z,t) = C_0(t)\varphi(z(t)) + C_1(t)\varphi'(z(t)) + C_2(t)\varphi''(z(t)) + \cdots, \\ \omega(z,t) = C_0(t)H_0(z(t))\varphi(z(t)) - C_1(t)H_1(z(t))\varphi(z(t)) + \cdots + (-1)^n C_n(t)H_n(t)\varphi(z(t)), \end{gathered} \tag{14}$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$ — плотность вероятности для нормального закона распределения, $\varphi^{(n)}(z)$ — n-я производная функции $\varphi(z)$, $H_n(z)$ — полином Чебышева – Эрмита n-го порядка.

Используя выражения полиномов Чебышева – Эрмита и свойства их ортогональности, найдем значения коэффициентов C_n [12]

$$C_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(z,t)\,\mathrm{d}z = 1, \quad C_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\omega(z,t)\,\mathrm{d}z = -\alpha_1^z(t) = 0,$$

$$C_2(t) = \alpha_2^z(t) - 1 = 0, \quad C_3(t) = -\frac{1}{6}\left[\alpha_3^z(t) - 3\alpha_1^z(t)\right] = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt{2n\tau}}\frac{1 - e^{-3t/\tau}}{\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)^{3/2}},$$

$$C_4(t) = \frac{1}{24}\left[\alpha_4^z(t) - 6\alpha_2^z(t) + 3\right] = \frac{1}{12}\frac{1}{\left(\sqrt{2n\tau}\right)^2}\frac{1 - e^{-4t/\tau}}{\left(1 - e^{-2t/\tau}\right)^2},$$

$$C_5(t) = -\frac{1}{120}\left[\alpha_5^z(t) - 10\alpha_3^z(t) + 15\alpha_1^z(t)\right] = -\frac{2}{75}\frac{1}{\left(\sqrt{2n\tau}\right)^3}\frac{1-e^{-5t/\tau}}{\left(1-e^{-2t/\tau}\right)^{5/2}},$$

$$C_6(t) = \frac{1}{720}\left[\alpha_6^z(t) - 15\alpha_4^z(t) + 45\alpha_2^z(t) - 15\right],$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$C_n(t) = (-1)^n\frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n\omega(z,t)\,\mathrm{d}z =$$

$$= (-1)^n\frac{1}{n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\cdot n!\cdot z^{n-2k}\cdot\omega(z,t)\,\mathrm{d}z}{2^k k!(n-2k)!} = \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^{n-k}\cdot\alpha_{n-2k}^z(t)}{2^k\cdot k!(n-2k)!}.$$

Итак, разложение (14) — решение уравнения (4) — окончательно запишется в следующем виде:

$$\omega(z,t) = \varphi(z(t)) - \frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt{2n\tau}}\frac{1-e^{-3t/\tau}}{\left(1-e^{-2t/\tau}\right)^{3/2}}\varphi^{(3)}(z(t)) + \frac{1}{12}\frac{1}{\left(\sqrt{2n\tau}\right)^3}\frac{1-e^{-4t/\tau}}{\left(1-e^{-2t/\tau}\right)^2}\varphi^{(4)}(z(t)). \tag{15}$$

При $t\to\infty$ (стационарный случай) разложение (15) переходит в так называемый ряд Эджворта [13]. Результат, соответствующий стационарному случаю, можно получить, если в уравнении (4) принять

$$\frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} = 0.$$

Тогда основное уравнение связи (4) для стационарного случая имеет вид

$$n\omega(x-1) - n\omega(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\omega(x)\right) = 0. \tag{16}$$

Проинтегрировав последнее уравнение по x от 0 до ∞, получим основное уравнение связи в интегральном виде:

$$\frac{x_1}{\tau}\omega(x_1) = n\int\limits_{x_1-1}^{x_1}\omega(x)\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Левая часть уравнения — поток вероятности «сверху вниз», правая часть — поток вероятности «снизу вверх», в силу стационарного режима работы эти потоки равны.

Поток вероятности определяет среднее число срабатываний (отпусканий) для порога x_1. При переходе от единиц x к единицам z ($z = \frac{x-n\tau}{\sqrt{n\tau/2}}$) основное уравнение связи для стационарного случая выглядит следующим образом:

$$\frac{\omega(z-2\delta)}{2\delta} - \frac{\omega}{2\delta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z\delta+1)\omega(z)] = 0, \tag{18}$$

где $\delta = 1/\sqrt{2n\tau}$.

Приведем ещё значения моментов выходного сигнала для стационарного случая в единицах x и z и коэффициентов разложения в ряд Эджворта (эти результаты могут быть получены как из уравнений (16), (18), так и из формул (15) путем предельного перехода $t\to\infty$).

В литературе $\omega(z)$ чаще обозначается как $g(z,\delta)$ [13].

$$\alpha_1^x = n\tau,\ \ \alpha_2^x = \frac{n\tau}{2} + (n\tau)^2,\ \ \alpha_3^x = \frac{n\tau}{3} + \frac{3}{2}(n\tau)^2 + (n\tau)^3,$$

$$\alpha_4^x = \frac{n\tau}{4} + \frac{25}{12}(n\tau)^2 + 3(n\tau)^3 + (n\tau)^4,\ \ \alpha_5^x = \frac{n\tau}{5} + \frac{35}{12}(n\tau)^2 + \frac{85}{12}(n\tau)^3 + 5(n\tau)^4 + (n\tau)^5,$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$\alpha_1^z = 0,\ \ \alpha_2^z = 1,\ \ \alpha_3^z = \frac{4}{3}\delta,\ \ \alpha_4^z = 3 + 2\delta^2,\ \ \alpha_5^z = \frac{16}{5}\delta^3 + \frac{40}{3}\delta,$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$C_0 = 1,\ \ C_1 = 0,\ \ C_2 = 0,\ \ C_3 = \frac{2}{9}\delta,\ \ C_4 = -\frac{1}{12}\delta^2,\ \ C_5 = -\frac{2}{75}\delta^3.$$

и соответственно ряд Эджворта

$$g(z,\delta) = \varphi(z) - \frac{2}{9}\delta\varphi^{(3)}(z) + \frac{1}{12}\delta^2\varphi^{(4)}(z) - \frac{2}{75}\delta^3\varphi(5)(z) + \left(\frac{1}{135}\delta^4 + \frac{2}{81}\delta^2\right)\varphi(6)(z) - \\ - \left(\frac{4}{2205}\delta^5 + \frac{1}{54}\delta^3\right)\varphi(7)(z) + \left(\frac{1}{2520}\delta^6 + \frac{203}{21\,600}\delta^4\right)\varphi(8)(z) + \cdots . \quad (19)$$

Сгруппированный по степеням $\delta = 1/\sqrt{2n\tau}$ (по степеням «относительной погрешности») ряд Эджворта приобретает следующий вид:

$$g(z,de) = \varphi(z) - \frac{2}{9}\varphi(3)(z)\delta + \left[\frac{1}{12}\varphi(4)(z) + \frac{2}{81}\varphi(6)(z)\right]\delta^2 - \\ - \left[\frac{2}{75}\varphi(5)(z) + \frac{1}{54}\varphi(7)(z) + \frac{4}{2187}\varphi(9)(z)\right]\delta^3 + \cdots . \quad (20)$$

Литература

[1] Крейндлин И. И., Лахманов П. Г., Скобло Ю. А., Терентьев В. П. «*К расчету функции распределения выходного сигнала интегратора аналоговых радиационных релейных приборов*». ВАНТ, серия Радиационная техника, 1984 г., вып 2(28), с. 14–20.

[2] Тихонов В. И., Миронов М. А. «*Марковские процессы*». Издательство «Советское радио» 1977 г.

[3] Корн Г., Корн Т. «*Справочник по математике для научных работников и инженеров*». Издательство «Наука» Москва, 1973 г.

[4] Математическая энциклопедия, т. 5, стр.634. Издательство «Советская энциклопедия» 1985 г.

[5] Диткин Б. А., Прудников А. П. «*Интегральные преобразования и операционное исчисление*». Физматгиз 1961 г.

[6] Крамер Г. «*Математические методы статистики*», пер. с англ, 2 изд. М., 1975 г.

[7] Чебышев П. Л. Полн. собр. соч., т.2. М-Л. 1947 г.

[8] Hermite Ch., «Cr, Acad sci» 1864, t 58, p. 93–100, 266–73.

[9] Charlier C. V. L. «ArKiv Mat., Astr. Fys» 1914 г. в. 2, № 25, sl-17

[10] Edgeworth F. Y. «Proc. Camb. Phil. Soc.» 1905 г., v. 20, p. 36–65.

[11] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. «*Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*». М-Л. 1949 г.

[12] Суэтин П. К, «*Классические ортогональные многочлены*», 2 изд., М., 1979 г.

[13] Таточенко Л. К. «*Радиоактивные изотопы в приборостроении*». М.: Атомиздат 1960 г.

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Продолжаем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержатся темы 5 и 6. Тема 4 опубликована в предыдущем номере журнала.

Тема 5

Векторное произведение

Как видно из названия, в этой теме изучается векторное произведение векторов, т. е. такая операция над векторами, результатом которой служит вектор. Для корректного определения этой операции нам потребуется понятие ориентированной тройки векторов. С него мы и начнем.

26. Ориентированные тройки векторов. Базис $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$

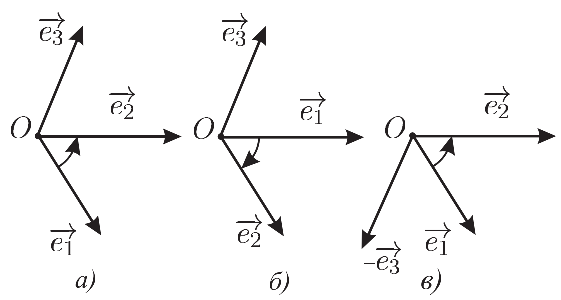


Рис. 5.1. Ориентированная тройка векторов: а) правая; б) левая; в) левая

Рассмотрим *упорядоченную тройку* векторов $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, т. е. не просто *множество* трех векторов, а множество, элементы которого перенумерованы: вектор $\overrightarrow{e_1}$ — первый, $\overrightarrow{e_2}$ — второй, а $\overrightarrow{e_3}$ — третий. Обратите внимание, что упорядоченные множества (в отличие от неупорядоченных) обозначаются в круглых скобках. При этом $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \neq (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3})$. Их геометрические реализации с общим началом в точке O представлены на рис. 5.1.

26.1. Определение. *Упорядоченная тройка* некомпланарных векторов $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ называется *правой* (или говорят, что она *положительно ориентирована*), если с конца вектора $\overrightarrow{e_3}$ кратчайший поворот от $\overrightarrow{e_1}$ до $\overrightarrow{e_2}$ виден против хода часовой стрелки (см. рис. 5.1, *а*). Эта *тройка векторов* называется *левой* (*отрицательно ориентированной*), если с конца $\overrightarrow{e_3}$ кратчайший поворот от $\overrightarrow{e_1}$ до $\overrightarrow{e_2}$ виден по ходу часовой стрелки (см. рис. 5.1, *б*).

В качестве альтернативного определения можно привести следующее:

26.2. Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ называется правой, если при повороте от первого вектора ко второму по наименьшему углу третий вектор указывает направление, по которому будет закручиваться правый винт (штопор). Если же при таком повороте третий вектор указывает направление «движения» левого винта, то тройку называют левой.

Отметим, как меняется ориентация троек при перестановке векторов и при умножении вектора на число.

26.3. Свойства ориентированных троек.

1. Если в упорядоченной тройке переставить два вектора, то ориентация тройки изменится на противоположную (сравните, например, рис. 5.1, *а* и рис. 5.1, *б*).

2. Если в упорядоченной тройке один из векторов умножить на отрицательное число, то ориентация тройки изменится на противоположную (сравните, например, рис. 5.1, *а* и *в*).

3. Если в упорядоченной тройке один из векторов умножить на положительное число, то ориентация тройки не изменится.

Вам уже известно, что три некомпланарных вектора в пространстве $\mathbb{E}^3$ образуют базис. Соответственно, в зависимости от упорядоченности тройки векторов базиса различают *правые и левые базисы.*

В физике, механике, математике чаще используют правые базисы. Это объясняется удобством использования: винты, шурупы, штопоры чаще имеют правую резьбу, нежели левую.

26.4. Определение. Правый ортонормированный базис обозначают $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ (см. рис. 5.2).

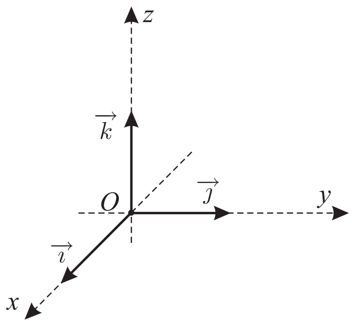


Рис. 5.2. Правый ортонормированный базис и правая система координат

26.5. Определение. *Система координат*, в пространстве $\mathbb{E}^3$ называется *правой*, если упорядоченная тройка векторов соответствующего базиса имеет положительную ориентацию.

Соответственно, если упорядоченная тройка векторов базиса отрицательно ориентирована, то система координат будет *левой*.

27. Векторное произведение и его свойства

27.1. Определение. *Векторным произведением* векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\overrightarrow{c} = 0$, если $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$;

2) если $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$, то вектор $\overrightarrow{c}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$), а значит, $\overrightarrow{c}$ перпендикулярен плоскости π, которой параллельны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (рис. 5.3);

3) длина вектора $\overrightarrow{c}$ равна произведению длин векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ на синус угла между ними, т. е.

$$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}});$$

4) векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ образуют правую тройку векторов (см. рис. 5.3).

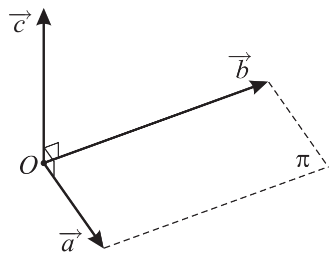


Рис. 5.3. Векторное произведение $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$

Приняты следующие обозначения векторного произведения[1]:

$$\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

[1]Обозначение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ еще довольно часто встречается в технической литературе, хотя математики предпочитают пользоваться символом $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, поскольку именно так обозначается скобка Ли, которой по существу является операция векторного произведения.

Если векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны, то из п. 3) определения следует, что модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (см. рис. 5.3):

$$S = \left|[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}). \tag{5.1}$$

Направление векторного произведения $\overrightarrow{c}$ определяется пунктами 2) и 4) определения 27.1.

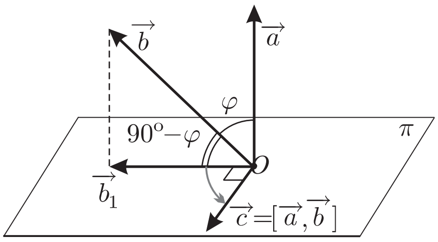


Рис. 5.4. Правило Жуковского

27.2. Правило Жуковского. В теоретической механике[2] используется альтернативное определение векторного произведения, более удобное для некоторых приложений.

Оно звучит следующим образом.

Выберем геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с общим началом в точке O (см. рис. 5.4); проведем через эту точку плоскость π, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{a}$; спроецируем в эту плоскость вектор $\overrightarrow{b}$; полученную векторную проекцию $\overrightarrow{b_1}$ развернем на 90° против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overrightarrow{a}$ и умножим этот вектор на число, равное $|\overrightarrow{a}|$. Полученный таким образом вектор $\overrightarrow{c}$ и будет векторным произведением $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$.

27.3. Эквивалентность определения векторного произведения и правила Жуковского. Докажем эквивалентность правила Жуковского 27.2 и исходного определения векторного произведения 27.1.

Доказательство. Направление вектора $\overrightarrow{c}$, изображенного на рис. 5.4, совпадает с направлением результата векторного произведения $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, т. к. тройка векторов $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ правая (рис. 5.4) и вектор $\overrightarrow{c}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ по построению. Действительно, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, т. к. геометрическая реализация вектора $\overrightarrow{c}$ лежит в плоскости π, которая перпендикулярна $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат геометрические реализации векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Найдем длину вектора $\overrightarrow{c}$:

$$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b_1}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(90^\circ - \varphi) = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \sin\varphi = |[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|.$$

Таким образом, выполняются все три условия из определения векторного произведения 27.1. Значит, вектор $\overrightarrow{c}$ есть результат векторного произведения $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$. □

[2] Яблонский А. А., Никифорова В. М. *Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика.* Интеграл-Пресс. 2006.

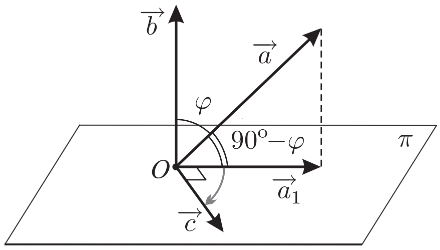


Рис. 5.5. Правило Жуковского (вторая формулировка)

Правило Жуковского можно сформулировать несколько иначе, если плоскость π строить перпендикулярно второму вектору $\vec{b}$ (см. рис. 5.5).

Для построения векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ изобразим геометрические реализации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом O, через которое проведем плоскость π, перпендикулярную вектору $\vec{b}$. Спроецируем в эту плоскость вектор $\vec{a}$. Полученную векторную проекцию развернем на 90° по ходу часовой стрелки (если смотреть с конца вектора $\vec{b}$) и умножим полученный вектор на $|\vec{b}|$.

Перейдем теперь к рассмотрению свойств векторного произведения.

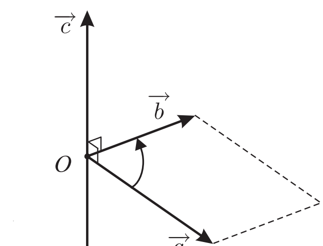
27.4. Кососимметричность. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполнено соотношение:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}].$$

Доказательство. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то как левая, так и правая части доказываемого равенства равны нулю. Поэтому будем предполагать, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны.

На рис. 5.6 вектор $\vec{c}$ является результатом векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$. По определению (стр 47) он перпендикулярен плоскости π, в которой расположены геометрические реализации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c_1}$, равный векторному произведению $[\vec{b}, \vec{a}]$, также перпендикулярен плоскости π. Следовательно, векторы $\vec{c}$ и $\vec{c_1}$ — коллинеарны.

Длины векторов $[\vec{b}, \vec{a}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ равны, т. к. в обоих случаях они равны площади одного и того же параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



42

Рис. 5.6. Кососимметричность векторного произведения

Кроме того, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую тройку (по определению), в то время как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c_1}$ образуют левую тройку векторов. Действительно, согласно определению векторного произведения, тройка векторов

$$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c_1} = [\vec{b}, \vec{a}]) \text{ — правая.}$$

Переставив в ней первые два вектора: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c_1})$, получим левую тройку (см. свойства ориентированных троек на стр 47).

Если теперь умножить вектор $\vec{c_1}$ на -1, то тройка опять изменит ориентацию (стр 47). Таким образом, $(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{c_1})$ — правая тройка, как и тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Отсюда вытекает, что векторы $\vec{c}$ и $-\vec{c_1}$ сонаправлены.

Подводя итог, получаем, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{c_1}$ имеют одинаковую длину и параллельны, кроме того векторы $\vec{c}$ и $-\vec{c_1}$ сонаправлены. Значит, $\vec{c} = -\vec{c_1}$ и

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]. \ \square$$

27.5. Линейность векторного произведения по первому аргументу. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и числа λ выполнены соотношения:

1) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;

2) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай $\vec{c} \neq \vec{0}$, т. к. при $\vec{c} = \vec{0}$ равенство выполняется автоматически.

Выберем геометрические реализации векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало в точке O, и вычислим векторные произведения по правилу Жуковского (стр 48).

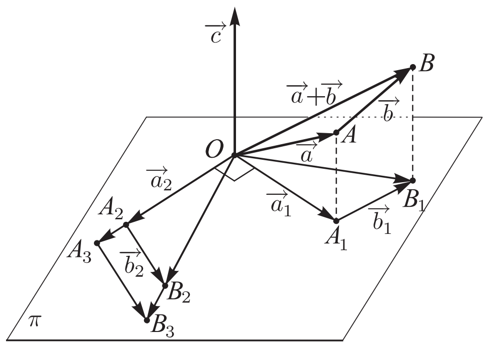


Рис. 5.7. Доказательство линейности векторного произведения по первому аргументу

Через точку O проведем плоскость π, перпендикулярную вектору $\vec{c}$. Спроецируем $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ на эту плоскость, обозначив проекции через $\vec{a_1}$, $\vec{b_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ соответственно. Проекции развернем на 90° по ходу часовой стрелки (см. рис. 5.7) и обозначим полученные векторы через $\vec{a_2}$, $\vec{b_2}$ и $\overrightarrow{OB_2}$. При этом векторный треугольник $\triangle OA_1B_1$ переходит в векторный $\triangle OA_2B_2$.

Теперь умножим все векторы треугольника $\triangle OA_2B_2$ на $|\vec{c}|$ (такое преобразование называется гомотетией с центром в O и коэффициентом $|\vec{c}|$).

По правилу Жуковского 27.2 $\overrightarrow{OA_3} = [\vec{a}, \vec{c}]$, $\overrightarrow{A_3B_3} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\overrightarrow{OB_3} = [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}]$. С другой стороны, из $\triangle OA_3B_3$ видим, что $\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_3}$. Значит,

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].$$

2) Если $\lambda = 0$ или векторы $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то равенство очевидно. Предположим, что $\lambda \neq 0$, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Докажем, что $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = [\lambda\vec{a}, \vec{b}]$. Обозначим $\lambda[\vec{a}, \vec{b}]$ через $\vec{d}$, а $[\lambda\vec{a}, \vec{b}]$ через $\vec{d_1}$. Сравним длины векторов в левой и правой частях доказываемого равенства. В левой части:

$$|\vec{d}| = |\lambda[\vec{a}, \vec{b}]| = |\lambda| \cdot |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\lambda||\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В правой части

$$|\vec{d_1}| = |[\lambda\vec{a}, \vec{b}]| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\beta = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\beta = |\lambda| \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha.$$

Здесь при $\lambda > 0$ $\angle\alpha = \angle\beta$ и при $\lambda < 0$ $\angle\beta = 180^\circ - \angle\alpha$. В обоих случаях $\sin\beta = \sin\alpha$. Итак, длины векторов в левой и правой частях равны.

Так как вектор $\overrightarrow{d}$ коллинеарен вектору $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$, то он перпендикулярен плоскости π, проходящей через векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ (см. определение на стр 47). Вектор $\overrightarrow{d_1}$ перпендикулярен плоскости, проходящей через $\lambda\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, которая, очевидно, совпадает с плоскостью π. Отсюда следует, что $\overrightarrow{d} \parallel \overrightarrow{d_1}$.

Итак, мы убедились, что $|\overrightarrow{d}| = |\overrightarrow{d_1}|$ и $\overrightarrow{d} \parallel \overrightarrow{d_1}$. Значит, либо $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d_1}$, либо $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{d_1}$. Обратите внимание, что нужное нам первое равенство будет следовать из одинаковой ориентации троек

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) \quad \text{и} \quad (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1}).$$

Пусть $\lambda > 0$. По определению векторного произведения тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}])$ — правая. Поскольку вектор $\overrightarrow{d}$ получается в результате умножения последнего вектора тройки на положительное число, то тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})$ тоже правая (см. свойства ориентированных троек на стр 47).

С другой стороны, тройка $(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ положительно ориентирована по определению векторного произведения, а так как она получается из тройки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ умножением ее первого вектора на положительное число, то тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ тоже правая. Значит, при $\lambda > 0$ $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d_1}$.

Пусть $\lambda < 0$. По определению векторного произведения тройка $(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ имеет положительную ориентацию. Она получается из тройки $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ умножением на отрицательное число λ. Следовательно, тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d_1})$ отрицательно ориентирована (см. свойства ориентированных троек на стр 47).

Далее, тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}])$ ориентирована положительно, а так как $\overrightarrow{d} = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ и $\lambda < 0$, то тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})$ отрицательно ориентирована. Поэтому и в случае $\lambda < 0$ имеет место равенство $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d_1}$. $\square$

27.6. Билинейность векторного произведения. Для любых векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ и чисел λ и μ выполнены соотношения:

- $[\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] + \mu[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$;
- $[\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}] = \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + \mu[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}]$.

Доказательство. Первое из равенств (линейность по первому аргументу) вытекает из соотношений 27.5 (убедитесь в этом!).

Второе равенство (линейность по второму аргументу) легко доказать, опираясь на первое и кососимметричность векторного произведения (стр 49). Действительно,

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}] &= -[\lambda\overrightarrow{b} + \mu\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = \quad \text{(кососимметричность)}\\
&= -\lambda[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}] - \mu[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = \quad \text{(линейность по 1-му аргументу)}\\
&= \lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] + \mu[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}] \quad \text{(кососимметричность). } \square
\end{aligned}$$

28. Векторное произведение в координатах

Здесь речь пойдет о способе вычисления координат векторного произведения через координаты сомножителей относительно базиса $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, определение которого сформулировано на стр 47.

28.1. Векторное произведение ортов. В качестве разминки найдем векторное произведение ортов $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ непосредственно через определение 27.1. Прежде всего заметим, что

$$[\vec{\imath}, \vec{\imath}] = [\vec{\jmath}, \vec{\jmath}] = [\vec{k}, \vec{k}] = \vec{0}, \tag{5.2}$$

что следует из п. 1) определения векторного произведения.

Далее по определению базиса $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ и векторного произведения 27.1 получаем следующие соотношения (проверьте!):

$$\begin{array}{lll} [\vec{\imath}, \vec{\jmath}] = \vec{k}, & [\vec{\jmath}, \vec{k}] = \vec{\imath}, & [\vec{k}, \vec{\imath}] = \vec{\jmath}, \\ [\vec{\jmath}, \vec{\imath}] = -\vec{k}, & [\vec{k}, \vec{\jmath}] = -\vec{\imath}, & [\vec{\imath}, \vec{k}] = -\vec{\jmath}. \end{array} \tag{5.3}$$

Теперь рассмотрим два произвольных вектора, представленных разложением по ортам базиса $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}.$$

Перемножим их векторно, опираясь на билинейность (27.6) векторного произведения (иначе говоря, раскроем скобки):

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}, b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}] = \\ &= a_xb_x[\vec{\imath}, \vec{\imath}] + a_xb_y[\vec{\imath}, \vec{\jmath}] + a_xb_z[\vec{\imath}, \vec{k}] + a_yb_x[\vec{\jmath}, \vec{\imath}] + a_yb_y[\vec{\jmath}, \vec{\jmath}] + \\ &+ a_yb_z[\vec{\jmath}, \vec{k}] + a_zb_x[\vec{k}, \vec{\imath}] + a_zb_y[\vec{k}, \vec{\jmath}] + a_zb_z[\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (5.2) и (5.3) для векторного произведения ортов, преобразуем последнее выражение к виду

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{\imath}(a_yb_z - a_zb_y) + \vec{\jmath}(a_zb_x - a_xb_z) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x). \tag{5.4}$$

Мы получили формулу для вычисления векторного произведения в координатах, довольно громоздкую и неудобную для запоминания. Чтобы представить этот результат в удобной форме, нам придется сделать отступление, после которого мы вновь вернемся к формуле (5.4).

29. Определители малых порядков и их свойства

В этом разделе мы познакомимся с удивительной функцией, определенной на множестве квадратных матриц, имеющей важный геометрический смысл. Эта функция называется определителем. К сожалению, рассказ об определителе с геометрической точки зрения занимает довольно много времени, а нам нужно дать наглядное правило для запоминания формулы (5.4). Поэтому сначала мы поступим стандартным образом и введем определитель формально, вернувшись к его геометрической интерпретации несколько позже.

29.1. Определение. *Определителем 2-го порядка* называется число, полученное по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5.5}$$

где a_{ij} — это числа (не обязательно вещественные).

Обратите внимание, что таблицу чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ можно воспринимать как матрицу $\mathbf{A}$ размера 2×2. Поэтому определитель порядка 2 — это функция от матриц размера 2×2. Такую функцию часто называют *детерминантом* (калька с английского слова «determinant») и при его обозначении используют символ $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$. В отличие от матрицы, которую записывают в круглых скобках, ее определитель записывают в прямых скобках.

Пример 5.1. Вычислить определитель матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычисляем по формуле (5.5)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-1) = 12 + 3 = 15.$$

29.2. Определение. *Определителем 3-го порядка* называют определитель матрицы $\mathbf{A}$ размера 3×3, т. е. число, которое вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Такой способ вычисления определителя называется *разложением по первой строке.*

Чтобы применить это правило на практике, сначала нужно выделить элемент a_{11}, мысленно вычернуть 1-ю строку и 1-й столбец, на пересечении которых расположен элемент, вычислить полученный определитель второго порядка по формуле (5.5) и умножить полученное значение на a_{11}. Затем выделить элемент a_{12}, вычислить определитель, получаемый вычеркиванием 1-й строки и 2-го столбца, на пересечении которых расположен элемент, умножить определитель на $-a_{12}$. Аналогично поступить с элементом a_{13}: вычислить определитель от матрицы элементов, расположенных вне 1-й строки и 3-го столбца и умножить на a_{13}. В конце полученные результаты необходимо сложить. Обращаем внимание, что знаки в формуле (5.6) чередуются, начиная со знака «+».

Пример 5.2. Вычислить определитель третьего порядка

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(4 \cdot 3 - 7 \cdot (-2)) - 3(1 \cdot 3 - 7 \cdot 5) - (1 \cdot (-2) - 4 \cdot 5) = 2(12 + 14) - 3(3 - 35) - (-2 - 20) =$$

$$= 2 \cdot 26 + 3 \cdot 32 + 22 = 52 + 96 + 22 = 170.$$

Общее определение определителя квадратной матрицы будет приведено в следующей теме. Там же будут рассмотрены и доказаны их свойства, поэтому здесь мы приведем лишь некоторые важные свойства определителей второго и третьего порядков без доказательства.

29.3. Свойство 1. Определитель можно вычислить, разлагая его по любой строке или любому столбцу, учитывая «шахматный» порядок знаков.

Пример 5.3. Вычислим определитель третьего порядка, разлагая его по второму столбцу

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(2 \cdot 3 + 2 \cdot 1) + 4(1 \cdot 3 - 1 \cdot 3) - (1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3) = 0.$$

Обратите внимание, что это разложение очень напоминает разложение по первой строке, но первое слагаемое (поскольку столбец разложения четный) берется со знаком «−».

29.4. Свойство 2. Если в определителе поменять местами две соседние строки или два соседних столбца, то он изменит знак на противоположный. Иными словами, определитель кососимметричен по строкам и столбцам.

Пример 5.4. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(0\cdot 2-(-1)\cdot 1)+1\cdot(1\cdot 2-(-1)\cdot 2)+$$
$$+2\cdot(1\cdot 1-0\cdot 2)=4+4+2=10.$$

Теперь поменяем местами вторую и третью строки:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(1\cdot(-1)-2\cdot 0)+1\cdot((-1)\cdot 2-1\cdot 2)+$$
$$+2\cdot(0\cdot 2-1\cdot 1)=-4-4-2=-10.$$

Как видим, во втором случае определитель сменил знак.

29.5. Свойство 3. Если две строки (или два столбца) в определителе одинаковые, то этот определитель равен нулю.

29.6. Свойство 4. Если определитель содержит нулевую строку или нулевой столбец, то он равен нулю.

29.7. Свойство 5. Если в определителе к элементам одной строки добавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

Попытайтесь доказать перечисленные свойства самостоятельно.

Последнее свойство используют, чтобы получить нули среди элементов и тем самым облегчить вычисление определителя.

Пример 5.5. В определителе

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

значение которого равен 44, к первой строке добавим третью строку, элементы которого умножим на $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot(5\cdot(-2)-3\cdot 4)=44.$$

30. Вычисление векторного произведения через определитель

Теперь мы можем вернуться к формуле (5.4) и получить удобную для запоминания формулу вычисления векторного произведения в координатной форме. Итак, формула (5.4) согласно определению 29.1 преобразуется в

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] &= \overrightarrow{\imath}(a_yb_z-a_zb_y)+\overrightarrow{\jmath}(a_zb_x-a_xb_z)+\overrightarrow{k}(a_xb_y-a_yb_x)= \\ &= \overrightarrow{\imath}(a_yb_z-a_zb_y)-\overrightarrow{\jmath}(a_xb_z-a_zb_x)+\overrightarrow{k}(a_xb_y-a_yb_x)= \\ &= \overrightarrow{\imath}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{\jmath}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Полученное выражение напоминает разложение определителя третьего порядка по первой строке, поэтому векторное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, заданных в координатной форме, удобно записывать в виде определителя третьего порядка (29.2), в первой строке которого записаны векторы $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ и $\overrightarrow{k}$, а во второй и третьей строках — координаты векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ соответственно:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Пример 5.6. Вычислить векторное произведение векторов $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$.

Решение.

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath} - 5\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 5.7. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}$, если $|\overrightarrow{m}| = 5$, $|\overrightarrow{n}| = 4$, $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Непосредственно из определения векторного произведения векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ вытекает, что площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, можно вычислить как модуль векторного произведения $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$:

$$S = |[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}).$$

Но в условии задачи задан угол $(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}})$, а не $(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$. С другой стороны, векторное произведение билинейно и кососимметрично (см. раздел 27). Поэтому векторное произведение $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ можно вычислить, просто раскрыв скобки:

$$[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = [\overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m} - 3\overrightarrow{n}] = [\overrightarrow{m}, \overrightarrow{m}] + 2[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}] - 3[\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}] - 6[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}] = 2[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}] + 3[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}] = 5[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}].$$

Теперь искомая площадь вычисляется как

$$S = |5[\overrightarrow{n}, \overrightarrow{m}]| = 5 \cdot |\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}}) = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Пример 5.8. Треугольник задан координатами своих вершин: $A(1, -2, 0)$, $B(2, 0, 1)$, $C(-3, 1, 1)$. Определить его площадь.

Решение. Достроим треугольник до параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 5.8). Очевидно, что площади этих фигур связаны соотношением: $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Площадь же параллелограмма $ABCD$ можно вычислить как длину векторного произведения (стр 48):

$$S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

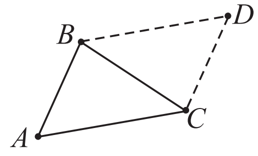


Рис. 5.8. Рисунок к задаче 5.8

Отсюда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по координатам начала и конца:

$$\overrightarrow{AB}(1,2,1), \qquad \overrightarrow{AC}(-4,3,1).$$

Запишем их векторное произведение в виде определителя и вычислим его, разложив по первой строке

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}(2\cdot 1 - 1\cdot 3) -$$
$$- \vec{\jmath}\big(1\cdot 1 - 1\cdot(-4)\big) + \vec{k}\big(1\cdot 3 - 2\cdot(-4)\big) = -\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 11\vec{k}.$$

Используя теперь формулу вычисления длины вектора через его координаты, находим искомую площадь

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+11^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+25+121} = \frac{\sqrt{147}}{2}.$$

Пример 5.9. Плоскость π проходит через точки $M_1(2,3,-1)$ и $M_2(0,4,2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$. Найти вектор, перпендикулярный плоскости π (любой такой вектор называют *нормалью плоскости* π).

Решение. Вспомните, что векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярно обоим этим векторам, в частности, оно перпендикулярно плоскости π, которая им параллельна (см. определение 27.1 на стр 47). Поэтому для решения задачи достаточно найти два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости π, и вычислить их векторное произведение.

Один вектор уже задан — это вектор $\vec{a}(1,3,-1)$, а координаты второго вектора — $\overrightarrow{M_1M_2}(-2,1,3)$. Вектор нормали

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\big(1\cdot(-1) - 3\cdot 3\big) -$$
$$- \vec{\jmath}\big((-2)\cdot(-1) - 3\cdot 1\big) + \vec{k}\big((-2)\cdot 3 - 1\cdot 1\big) =$$
$$= -10\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}.$$

Пример 5.10. Найти расстояние от точки $P(0,1,-3)$ до прямой (AB), если $A(1,3,2)$, $B(0,2,4)$.

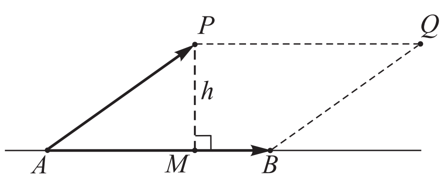


Рис. 5.9. Рисунок к задаче 5.10

Решение. Схематично изобразим прямую AB и точку P (рис. 5.9). Построим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AP}$, а затем достроим их до параллелограмма $APQB$. Очевидно, искомое расстояние есть не что иное, как высота построенного параллелограмма.

Его площадь равна абсолютной величине векторного произведения $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}]$ (см. определение векторного произведения 27.1):

$$S = |[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}]|. \tag{5.8}$$

С другой стороны, из школьного курса геометрии известно, что та же площадь равна произведению длины основания на высоту, т. е.

$$S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h. \tag{5.9}$$

Приравнивая правые части формул для площади, выразим высоту:

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}]|}{|\overrightarrow{AB}|}. \tag{5.10}$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AP}$ имеют координаты

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,2), \qquad \overrightarrow{AP}(-1,-2,-5).$$

Вычислим их векторное произведение:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(5+4) - \overrightarrow{j}(5+2) +$$
$$+ \overrightarrow{k}(2-1) = 9\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k},$$

тогда

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}]| = \sqrt{9^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{131}.$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ определяется стандартным образом:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Теперь по формуле (5.10) получаем искомое расстояние

$$h = \frac{\sqrt{786}}{6}.$$

Пример 5.11. Определить расстояние от точки $M(0,1,-3)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1,2,-1)$, $B(-1,5,-1)$, $C(1,3,2)$.

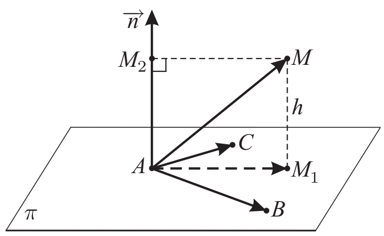


Рис. 5.10. Рисунок к задаче 5.11

Решение. Сделаем рисунок к задаче (см. рис. 5.10). Обозначим через M_1 проекцию точки M на плоскость (ABC), которую мы обозначили через π. Тогда искомое расстояние h — это длина отрезка MM_1.

Соединим любую точку плоскости, например, точку A с данной точкой M и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AM}(-1,-1,-2)$. В точке A построим геометрическую реализацию вектора нормали $\overrightarrow{n}$ к плоскости π. Из рисунка следует, что расстояние h — это абсолютная величина скалярной проекции вектора $\overrightarrow{AM}$ на нормаль $\overrightarrow{n}$.

Таким образом, для решения задачи нам нужно вычислить координаты нормали и скалярную проекцию $\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{AM}$.

Нормаль к плоскости ищем через векторное произведение, как в примере 5.9. Для этого определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}(-2,3,0)$ и $\overrightarrow{AC}(0,1,3)$, и воспользуемся формулой векторного произведения через определитель (5.7):

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}.$$

Скалярную проекцию ищем по формуле проекции:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{AM} = \frac{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n})}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{-1 \cdot 9 - 1 \cdot 6 - 2 \cdot (-2)}{\sqrt{9^2 + 6^2 + (-2)^2}} = -1.$$

Значит, нужное на расстояние равно $h = |\text{Пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{AM}| = 1$.

Понятие векторного произведения широко используется в физике.

Пусть сила $\overrightarrow{F}$ приложена в точке B (см. рис. 5.11). *Момент силы* $\overrightarrow{F}$ *относительно точки* A называется вектор $\overrightarrow{M_A}$, равный результату векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{M_A} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F}] = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{F}. \tag{5.11}$$

На рис. 5.11 момент силы $\overrightarrow{M_A}$ перпендикулярен заштрихованной плоскости, в которой расположены векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{F}$, при этом поворот этой плоскости от действия силы $\overrightarrow{F}$ с конца вектора $\overrightarrow{M_A}$ виден против хода часовой стрелки.

Если в качестве центра A выбрано начало координат O, то формула (5.11) принимает вид: $\overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$, где $\overrightarrow{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\overrightarrow{F}$.

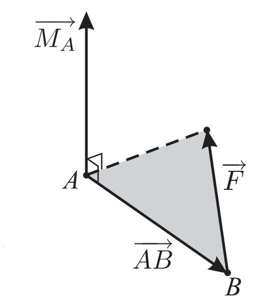


Рис. 5.11. Момент силы

Пример 5.12. Сила $\overrightarrow{F}(2, -4, 5)$ приложена к точке $B(4, -2, 3)$. Определить момент силы относительно точки $A(3, 2, -1)$.

Решение. По формуле (5.11) $\overrightarrow{M_A} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F}]$. Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{F}$:

$$\overrightarrow{M_A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}.$$

Пример 5.13. Круглый диск радиуса 0,5 м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 2\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Найти величину и направление скорости точки, находящейся на ободе диска.

Решение. Скорости точек твердого тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, находятся по формуле Эйлера:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r},$$

где $\overrightarrow{v}$ — вектор скорости рассматриваемой точки, $\overrightarrow{\omega}$ — вектор угловой скорости тела, $\overrightarrow{r}$ — радиус-вектор точки в системе координат, начало которой лежит в любой точке на оси вращения.

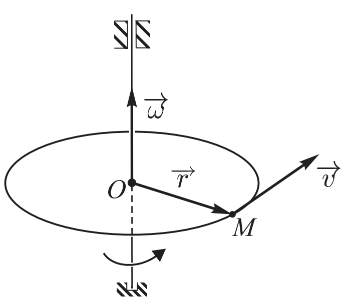


Рис. 5.12. Рисунок к задаче 5.13

Если систему координат связать с центром диска (рис. 5.12), то $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$. Вектор скорости точки M будет направлен по касательной к диску в сторону его вращения и по величине равен

$$v = \omega \cdot OM, \qquad v = 2 \cdot 0{,}5\frac{\text{м}}{\text{с}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Контрольные вопросы

5.1. Какую тройку векторов называют правой?

5.2. Как изменится ориентация тройки векторов при перестановке двух ее членов?

5.3. Как изменится ориентация тройки векторов, если один из них умножить на -2?

5.4. Сформулируйте определение ортонормированного базиса $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$.
5.5. Что называется векторным произведением? (Вспомните, что это вектор, обладающий *тремя* свойствами.)
5.6. В чем заключается правило Жуковского?
5.7. Вычислить $[\overrightarrow{a}, 2\overrightarrow{a}]$.
5.8. Опишите правила вычисления определителей второго и третьего порядков.
5.9. Приведите с выводом формулу вычисления векторного произведения в координатах.
5.10. Какие физические приложения векторного произведения вам известны?

Задачи

5.1°. Вычислите определители второго порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}; \qquad \text{г)} \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}.$$

5.2°. Вычислите определители третьего порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.3°. Докажите, что

$$\text{а)} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}; \qquad \text{б)} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{vmatrix}.$$

5.4°. Векторы $\overrightarrow{a}(1,-2,3)$ и $\overrightarrow{b}(0,2,4)$ параллельны плоскости π. Найдите вектор нормали к плоскости.
5.5°. Найдите векторы нормали к плоскости, проходящей через точки $M_1(3,4,2)$, $M_2(6,6,1)$, $M_3(4,4,2)$.
5.6. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$, если $|\overrightarrow{p}| = 3$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $(\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{6}$.
5.7. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$, если $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ — орты, угол между которыми равен $\frac{\pi}{3}$.
5.8. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$ и $2\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath} - 3\overrightarrow{k}$.
5.9. Треугольник задан координатами его вершин $A(0,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,2,0)$. Найдите его площадь.
5.10. Найдите площадь треугольника $\triangle M_1M_2M_3$, если известны координаты его вершин: $M_1(-1,0,1)$, $M_2(2,-1,2)$, $M_3(4,3,-3)$.
5.11. Найдите орт нормали к плоскости, параллельной векторам $\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$.
5.12. Найдите вектор нормали к плоскости, проходящей через точки $A(0,-1,1)$, $B(1,-1,0)$, $C(-2,0,1)$, составляющий тупой угол с осью Oz.
5.13. Найдите орт нормали к плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(1,3,5)$.
5.14. Плоскость проходит через точки $A(2,1,1)$ и $B(3,5,-2)$ параллельно оси Ox. Найдите вектор нормали к этой плоскости, составляющий острый угол с осью Oy.
5.15. Плоскость отсекает от положительных направлений координатных осей Ox, Oy, Oz отрезки одинаковой длины. Найдите орт нормали к этой плоскости.
5.16. Первая плоскость параллельна векторам $\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ и $\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$, а вторая плоскость параллельна векторам $\overrightarrow{\imath} - 2\overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{k}$. Найдите направляющий вектор линии пересечения этих плоскостей.

5.17. Найдите орт линии пересечения координатной плоскости Oyz с плоскостью, проходящей через точки $A(1,1,0)$, $B(1,0,3)$, $C(4,4,3)$.

5.18. Сила $\overrightarrow{F}(2,-3,4)$ приложена к точке $A(1,-1,0)$. Определите момент силы $\overrightarrow{F}$ относительно точки $C(1,0,2)$.

5.19. Сила $\overrightarrow{F}(3,2,-3)$ приложена к точке $B(2,1,-2)$. Найдите величину и направляющие косинусы момента силы $\overrightarrow{F}$ относительно точки $O(0,0,0)$.

5.20. В треугольнике $\triangle ABC$ найдите длину высоты, проведенной из вершины B к стороне AC, если даны координаты вершин треугольника $A(1,0,0)$, $B(5,-1,3)$, $C(1,1,1)$.

5.21. Определите расстояние от точки $M(3,-2)$ до прямой AB, если $A(0,2)$, $B(1,-1)$.

5.22. Найдите расстояние от точки $C(3,-2,1)$ до прямой, проходящей через точки $A(-1,-2,4)$ и $B(-4,-2,0)$.

5.23. Найдите расстояние от точки $A(1,-1,7)$ до плоскости, проходящей через ось Oz и точку $B(1,1,1)$.

5.24. Даны вершины пирамиды $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$, $D(2,2,2)$. Найдите высоту DH, опущенную из вершины D на основание ABC.

5.25*. В тетраэдре $ABCD$ на гранях ABC, ACD, ABD лежат отрезки AN, AP и AQ соответственно. Одинаковую ли ориентацию имеют тройки векторов: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ и $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ})$?

5.26*. Пусть вектор a имеет координаты $(-2,4)$ в системе координат, определенной базисом $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$. Длины базисных векторов $|\overrightarrow{e_1}|=|\overrightarrow{e_2}|=1$, а угол между базисными векторами $\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}}=\frac{\pi}{3}$. Найдите синус угла между вектором $\overrightarrow{a}$ и первым базисным вектором $\overrightarrow{e_1}$.

5.27*. Докажите, что для произвольных векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ справедлива формула

$$[\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]]=(\overrightarrow{b},(\overrightarrow{a},\overrightarrow{c}))-(\overrightarrow{c},(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})).$$

5.28*. Доказать тождество Якоби

$$[\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]]+[\overrightarrow{b},[\overrightarrow{c},\overrightarrow{a}]]+[\overrightarrow{c},[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]]=\overrightarrow{0}.$$

5.29*. С помощью тождества Якоби доказать, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

5.30*. Разработайте алгоритм, с помощью которого через векторное произведение можно определить, лежит ли данная точка внутри заданного треугольника, если точка и вершины треугольника заданы координатами на плоскости.

Тема 6

Смешанное произведение

31. Смешанное произведение и его свойства

В этом разделе изучается так называемое *смешанное* произведение векторов, позволяющее вычислять объемы геометрических тел.

31.1. Определение. *Смешанным произведением* векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overrightarrow{a}$ на векторное произведение векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$:

$$\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=(\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]). \qquad (6.1)$$

31.2. Линейность смешанного произведения. Смешанное произведение линейно по каждому аргументу[1]. Иными словами, для любых векторов и чисел выполнены следующие тождества:

$$\langle\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=\lambda\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle+\mu\langle\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle,$$
$$\langle\overrightarrow{a},\lambda\overrightarrow{b_1}+\mu\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{c}\rangle=\lambda\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{c}\rangle+\mu\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{c}\rangle,$$
$$\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\lambda\overrightarrow{c_1}+\mu\overrightarrow{c_2}\rangle=\lambda\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c_1}\rangle+\mu\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c_2}\rangle.$$

Доказательство. Доказательство основано на определении смешанного произведения и линейных свойствах скалярного и векторного произведений. Проверим лишь первое из равенств, оставив остальные в качестве простого, но полезного упражнения. Перепишем смешанное произведение

$$\langle\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle$$

согласно определению:

$$\langle\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=(\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}])=$$

(ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу)

$$=\lambda(\overrightarrow{a_1},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}])+\mu(\overrightarrow{a_2},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}])=$$

(вновь воспользуемся определением смешанного произведения 31.1)

$$=\lambda\langle\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle+\mu\langle\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle.$$

Линейность смешанного произведения по первому аргументу доказана. При доказательстве его линейности по второму и третьему аргументам необходимо воспользоваться линейностью как скалярного, так и векторного произведений. □

31.3. Теорема. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=0$.

Доказательство. 1) Пусть векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ компланарны. Разместим векторы в общее начало и обозначим $\overrightarrow{d}=[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]$. Если векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$ (стр 47). Значит,

$$\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=(\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}])=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0})=0.$$

Если же векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ неколлинеарны, то вектор $\overrightarrow{d}$ перпендикулярен как вектору $\overrightarrow{b}$, так и вектору $\overrightarrow{c}$. Следовательно, он перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. С другой стороны, по предположению вектор $\overrightarrow{a}$ параллелен плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$. Значит, $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{d}$ и $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d})=0$, что дает

$$\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=(\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}])=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{d})=0.$$

2) Предположим теперь, что $\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=0$. Так как

$$0=\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\rangle=(\overrightarrow{a},[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]),$$

то возможны три случая:

а) $\overrightarrow{a}=0$; б) $[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]=0$; в) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{d}=[\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}]$.

В первом случае сразу получаем, что $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линейно зависимы (а значит, компланарны) как система векторов, содержащая нулевой вектор.

[1]В современной математике произведение, линейное по каждому аргументу, чаще называют полилинейным произведением или говорят, что данное произведение полилинейно.

Во втором случае векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ коллинеарны (стр 47), что также обеспечивает линейную зависимость векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

Наконец, в последнем случае, когда $\overrightarrow{a}$ перпендикулярен векторному произведению $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, он будет параллелен плоскости, определяемой векторами $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, что вновь дает компланарность векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. □

32. Смешанное произведение в координатах

Рассмотрим смешанное произведение векторов, которые заданы координатами $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}(b_x, b_y, b_z)$ и $\overrightarrow{c}(c_x, c_y, c_z)$ относительно базиса $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$. По определению смешанного произведения $\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle = (\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}])$, поэтому сначала нужно вычислить координаты векторного произведения $[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$, что можно сделать по формуле (5.6):

$$\overrightarrow{d} = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath} \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - \overrightarrow{\jmath} \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

Кроме того, чтобы вычислить скалярное произведение $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{d}$, нам нужно сложить произведения соответствующих координат:

$$\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Эти преобразования приводят нас к следующей теореме.

32.1. Теорема. Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{b}(b_x, b_y, b_z)$ и $\overrightarrow{c}(c_x, c_y, c_z)$, заданных координатами относительно базиса $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$, вычисляется по формуле:

$$\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

32.2. Следствие. Необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, заданных в координатной форме, имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

33. Геометрический смысл смешанного произведения

33.1. Теорема. Смешанное произведение $\langle\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\rangle$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, если тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ правая, и объему, взятому со знаком «$-$», если эта тройка левая.

Доказательство. Приложим векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ к одной точке O. Обозначим через $OMNP$ параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, через $OMNPO_1M_1N_1P_1$ — параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, и через $\overrightarrow{d}$ векторное произведение $\overrightarrow{d} = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$.

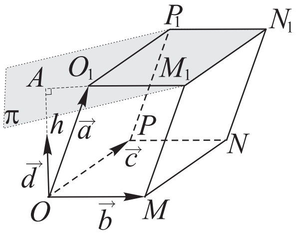


Рис. 6.1. Параллелепипед, построенный на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$

Нужно разобрать два случая:

а) тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ — правая (рис. 6.1);

а) тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ — левая.

Начнем с правой тройки. Из точки O опустим перпендикуляр OA на плоскость π, в которой лежит грань $O_1M_1N_1P_1$ параллелепипеда. Ясно, что $|OA| = h$ — его высота и объем параллелепипеда равен произведению

$$V = Sh, \tag{6.2}$$

где S — площадь основания, т. е. площадь параллелограмма $OMNP$.

Параллелограмм $OMNP$ построен на векторах $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, поэтому его площадь равна длине векторного произведения $|[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]|$ (стр 48), т. е.

$$S = |\overrightarrow{d}|. \tag{6.3}$$

По предположению тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ правая. С другой стороны, согласно определению векторного произведения (стр 47), тройка $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ тоже правая. Но тогда и тройка $(\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ также будет правой (см. рис. 6.1). Иными словами, векторы $\overrightarrow{d}$ и $\overrightarrow{a}$ направлены из точки O к плоскости π. В результате можно утверждать, что высота h — это скалярная проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{d}$, которая вычисляется по формуле проекции:

$$h = \text{Пр}_{\overrightarrow{d}}\,\overrightarrow{a} = \frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})}{|\overrightarrow{d}|}.$$

Подставим теперь полученные выражения высоты и площади (6.3) в формулу объема (6.2):

$$V = Sh = |\overrightarrow{d}|\frac{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d})}{|\overrightarrow{d}|} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}).$$

Осталось вспомнить, что

$$\overrightarrow{d} = [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \quad \text{и} \quad (\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]) = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle.$$

Итак, мы доказали, что если тройка векторов $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ правая, то

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = V, \tag{6.4}$$

где V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$.

Предположим теперь, что тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ — левая. Поменяв в ней векторы $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ местами, мы получим правую тройку $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})$ (см. свойства ориентированных троек на стр 47) причем, как уже известно, $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \rangle$ — объем параллелепипеда, построенного на этих векторах. Обратите внимание, что ни сам параллелепипед, ни его объем не зависят от порядка следования векторов в тройке. С другой стороны,

$$V = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \rangle = (\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}]) = (\overrightarrow{a}, -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}])$$

в силу кососимметричности векторного произведения (стр 49). Кроме того, ввиду билинейности скалярного произведения

$$(\overrightarrow{a}, -[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]) = -(\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]) = -\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle.$$

Таким образом, если тройка $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ левая, то

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = -V, \tag{6.5}$$

где V — объем параллелепипеда, построенного на этих векторах. □

33.2. Кососимметричность смешанного произведения.
В качестве следствия геометрического смысла смешанного произведения получается его кососимметричность. Говоря точнее, *если в смешанном произведении векторов переставить два аргумента, то произведение изменит знак.*

Действительно, мы выяснили, что модуль смешанного произведения — это объем параллелепипеда, построенного на аргументах, причем произведение положительно (объем), если тройка правая, и отрицательно (объем со знаком минус), если тройка левая. Кроме того, если в тройке переставить два вектора, то ее ориентация поменяется (стр 47).

Итак, если в правой тройке поменять два вектора, то она станет левой и смешанное произведение изменит знак с плюса на минус. Если два вектора поменять местами в левой тройке, то она станет правой, а произведение из отрицательного превратится в положительное, не поменяв при этом абсолютного значения. Это и доказывает кососимметричность смешанного произведения.

33.3. Следствие. Для произвольных векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$

$$(\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]) = ([\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}). \tag{6.6}$$

Доказательство. По определению смешанного произведения

$$(\overrightarrow{a}, [\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]) = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle.$$

Из кососимметричности этого произведения следуют равенства:

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = -\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b} \rangle = \langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle.$$

Вновь воспользуемся определением смешанного произведения:

$$\langle \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle = (\overrightarrow{c}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]).$$

Осталось заметить, что скалярное произведение симметрично:

$$(\overrightarrow{c}, [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]) = ([\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}], \overrightarrow{c}). \ \square$$

34*. Ориентированный объем n-мерного параллелепипеда

Выясняя геометрический смысл смешанного произведения, мы поняли, что оно с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на векторах, входящих в смешанное произведение, что позволяет эффективно вычислять объемы параллелепипедов через координаты. Но в отличие от объема, смешанное произведение может принимать отрицательные значения, причем знак смешанного произведения зависит от порядка аргументов. В связи с этим смешанное произведение принято называть *ориентированным объемом* параллелепипеда.

Хорошо было бы иметь аналогичный способ вычисления площадей параллелограммов. Обратите внимание, что параллелограмм можно задавать парой смежных ребер, или парой векторов. Введем понятие ориентированной площади параллелограмма.

Ориентированная площадь $\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, равна:

1) обычной площади, если поворот от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ по наименьшему углу осуществляется против часовой стрелки (рис. 6.2, *а*) (такая пара векторов называется правой);

2) обычной площади со знаком минус, если поворот от вектора $\overrightarrow{a}$ к вектору $\overrightarrow{b}$ по наименьшему углу осуществляется по часовой стрелке (рис. 6.2, *б*) (левая пара векторов).

Из этого определения немедленно следует кососимметричность ориентированной площади:

$$\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = -\delta(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}). \tag{6.7}$$

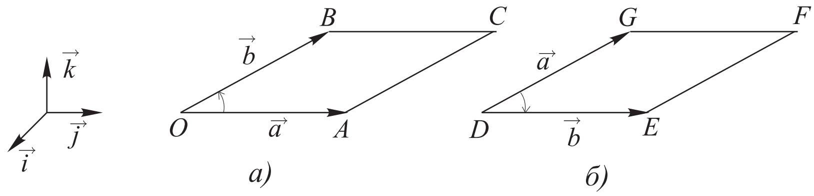


Рис. 6.2. Ориентированная площадь параллелограмма

Введем на плоскости ортонормированный базис $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, образующий правую пару, и достроим его до базиса $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{k}$ (рис. 6.2). Тогда координаты векторов, лежащих на плоскости, будут иметь вид:

$$\overrightarrow{a}(a_x, a_y, 0), \qquad \overrightarrow{b}(b_x, b_y, 0)$$

и для вычисления площади можно воспользоваться векторным произведением:

$$S = |[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]|, \qquad [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k}.$$

Обратите внимание, что $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}]$ сонаправлен с $\overrightarrow{k}$, если пара $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ правая, и противоположно направлен $\overrightarrow{k}$, если она левая (рис. 6.2). Поэтому,

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} > 0 \quad \text{для правой пары,} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} < 0 \quad \text{для левой пары.}$$

Отсюда следует, что ориентированная площадь, как и ориентированный объем, вычисляется с помощью определителя:

$$\delta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Итак, мы установили, что геометрический смысл определителей второго и третьего порядков (стр 52) — это ориентированные площадь и объем.

Рассмотрим теперь произвольное векторное пространство размерности n. Когда эту фразу произносишь на лекции, наиболее смелые из слушателей спрашивают: «А что такое n-мерное пространство? Как это можно себе представить?» Попытаемся ответить на эти вопросы. Прежде всего, неформальное определение размерности — это количество параметров, которые нужно зафиксировать, чтобы задать элемент пространства. Иначе говоря, размерность — это количество степеней свободы. Если с этим согласиться, то многомерное пространство возникает при решении большинства технических задач.

Рассмотрим задачу о движении атмосферного летательного аппарата. Совершенно очевидно, что для наиболее точного описания такого движения необходимо учитывать множество данных. Даже при грубом расчете потребуются три пространственные координаты (три параметра), фиксирующие аппарат в пространстве в данный момент времени, само время (один параметр), скорость аппарата (еще три параметра), скорость ветра (три параметра) и т. д. Таким образом, возникает 10 параметров, и можно сказать, что задача об описании движении летательного аппарата связана с 10-мерным пространством, хотя сам аппарат находится в 3-мерном.

Иными словами, хоть мы, как считается, и живем в 3-мерном пространстве (что пока не доказано), технические задачи, которые нам приходится решать, приводят нас к многомерным пространствам.

Собственно, из этого объяснения возникновения многомерного пространства следует и способ его восприятия. Думая о точке в таком пространстве, нужно помнить, что у нее много координат. Кроме того, можно отождествлять точку n-мерного пространства с набором n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

После того, как мы обсудили понятие размерности, естественно задать вопрос об ориентированном объеме n-мерного параллелепипеда. Такой параллелепипед можно себе представить как набор n векторов $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ n-мерного пространства, а каждый вектор — это набор n координат $\mathbf{a}_i(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Самый простой n-мерный параллелепипед — это единичный n-мерный куб $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, где координаты i-го вектора — это $\mathbf{e}_i(0, \ldots, 1, \ldots 0)$ (единица стоит на i-ом месте). Так, единичный двумерный параллелепипед является квадратом со стороной 1, а единичный трехмерный параллелепипед — это куб со стороной 1. Имея в виду эту аналогию, скажем, что ориентированный объем единичного n-мерного куба равен 1:

$$vol_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Вспоминая о свойствах ориентированных площади и объема, можно сформулировать следующее определение ориентированного объема n-мерного параллелепипеда.

34.1. Определение. Ориентированный объем $vol_n(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ n-мерного пространства, — это полилинейная (линейная по каждому аргументу), кососимметричная функция, равная 1 от единичного n-мерного куба.

35. Определитель порядка n

В предыдущем вопросе был определен ориентированный объем n-мерного параллелепипеда. Однако способ его вычисления остался пока нераскрытым. В алгебраической терминологии ориентированный объем называют определителем. Остановимся на этом чуть более подробно.

Мы уже осознали, что параллелепипед задается своими образующими $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Если записать их координаты в виде таблицы, то получится матрица размера $n \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а полилинейную (линейную по каждому аргументу) кососимметричную функцию строк такой матрицы называют ее *определителем*, если она равна 1 от единичной матрицы.

Обозначают определитель разными способами, например, так:

$$\det \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мы же, помня, что определитель и ориентированный объем — это разные названия одной и той же функции, будем также писать

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

воспринимая каждый i-ый аргумент $\mathbf{a}_i$ либо как вектор, либо как строку матрицы, состоящую из координат этого вектора.

Прежде чем приступить к вычислению определителя, обратим внимание на одно его очень полезное свойство, вытекающее из тождественности определителя и ориентированного объема.

35.1. Связь между определителем и линейной зависимостью системы векторов. Определитель

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы.

Доказательство. Строго говоря, это свойство не очень сложно доказывается, исходя из полилинейности и кососимметричности определителя. Но мы его сейчас докажем очень быстро и просто.

Действительно, если векторы, о которых идет речь, линейно независимы, то и соответствующий n-мерный параллелепипед невырожден и должен иметь ненулевой объем (можно представить себе трехмерный параллелепипед). Если же векторы линейно зависимы, то вместо n-мерного параллелепипеда мы получим параллелепипед меньшей размерности, n-мерный объем которого будет равен нулю. □

Из этого важного свойства вытекают полезные следствия.

35.2. Следствия.

1. Определитель с нулевой строкой равен нулю.

2. Определитель с двумя пропорциональными строками равен нулю.

3. Если к одной строке определителя прибавить другую, умноженную на число, то определитель не изменится:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Доказательство. Первые два утверждения следуют из того факта, что система векторов, содержащая нулевой вектор или два пропорциональных вектора, линейно зависима.

Для доказательства третьего свойства воспользуемся полинейностью определителя:

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) =$$
$$= \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + \lambda \det(\mathbf{a}_1, \dots, \lambda\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n).$$

Однако $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \lambda\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$, так как содержит пропорциональные строки: $\mathbf{a}_j$ и $\lambda\mathbf{a}_j$.
□

36. Определитель верхнетреугольной матрицы

Оказывается, свойств полилинейности, кососимметричности определителя и того факта, что он не меняется, если к одной строке определителя прибавить другую, умноженную на число, вполне достаточно для вычисления определителя произвольной матрицы. Начнем с простых примеров.

Пример 6.1. Вычислить определитель матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавим к третьей строке определителя четвертую, умноженную на (-2) (определитель не изменится):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавив ко второй строке нового определителя четвертую, умноженную на (-7), а к первой — четвертую, умноженную на 3, получим

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь к первой и второй строкам будем прибавлять третью умноженную на 2 и (-2) соответственно:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, к первой строке прибавим вторую и получим определитель диагональной матрицы:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det(4\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).$$

(Векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ введены на стр 66.) В силу полилинейности, коэффициенты, стоящие перед векторами $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, можно вынести за знак определителя:

$$\det(4\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = 4\det(\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = \\ = 4 \cdot 3 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).$$

Осталось заметить, что по определению

$$\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Итак,

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Обратите внимание, что определитель такой матрицы — произведение диагональных элементов. Оказывается, это не случайное совпадение, а стандартное свойство, которое сейчас будет доказано.

36.1. Определитель верхнетреугольной матрицы. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Доказательство. Если $a_{nn} = 0$, то определитель равен нулю, поскольку имеет нулевую строку. Но и произведение его диагональных элементов тоже будет нулевым. Так что в этом случае доказываемое равенство будет верным.

Пусть $a_{nn} \neq 0$. Тогда в силу полилинейности

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь последнюю строку определителя, умноженную на подходящие коэффициенты, из всех остальных (как в предыдущем примере), получим

$$\det \mathbf{A} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если $a_{n-1n-1} = 0$, то произведение диагональных элементов, как и сам определитель, будет равно нулю. Значит, в этой ситуации доказываемое равенство верно. Будем полагать, что $a_{n-1n-1} \neq 0$. Вынесем этот элемент из предпоследней строки

$$\det \mathbf{A} = a_{nn}a_{n-1n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и продолжим процесс «обнуления» элементов определителя, стоящих над диагональю (как в предыдущем примере).

Ясно, что если какой-то элемент $a_{ii} = 0$, то в некоторый момент мы получим определитель с нулевой строкой, равный нулю, как и произведение диагональных элементов. Если же ни один диагональный элемент не равен нулю, то мы придем к выражению

$$\det \mathbf{A} = a_{nn}a_{n-1n-1}\cdots a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{nn}a_{n-1n-1}\cdots a_{11}. \ \square$$

37. Метод Гаусса вычисления определителя

Метод Гаусса вычисления определителя основан на том, чтобы элементарными преобразованиями строк привести его к верхнетреугольному виду и воспользоваться свойством 36.1.

К элементарным относятся следующие преобразования строк:

1) перестановка строк (при этом определитель меняет знак);

2) прибавление к одной строке определителя другой строки, умноженной на число (при этом определитель не меняется).

Разберем пример вычисления определителя с помощью метода Гаусса.

Пример 6.2. Вычислить определитель матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований получим такой определитель, у которого первый столбец имеет вид:

$$\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где на месте $*$ стоит какое-то число. Для этого переставим третью и первую строки (определитель поменяет знак):

$$\det \mathbf{A} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-4) и прибавим ее ко второй:

$$\det \mathbf{A} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4+1(-4) & -3+(-2)(-4) & -4+2(-4) & -3+2(-4) \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -12 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-6) и прибавим ее к четвертой:

$$\det \mathbf{A} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -12 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 13 & -13 & -11 \end{vmatrix}.$$

Цель достигнута. Теперь первую строку можно оставить без изменений и заниматься тремя последними строками, стремясь получить на месте второго столбца столбец вида

$$\begin{pmatrix} -2 \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если не опасаться допустить ошибку при работе с дробями, можно было бы умножить вторую строку на $(-3/5)$ и прибавить ее к третьей. Тогда во втором столбце вместо 3 появится нужный нам 0. Однако мы поступим более осторожно и к четвертой строке прибавим третью, умноженную на (-4):

$$\det \mathbf{A} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -12 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \end{vmatrix}.$$

Переставим вторую и четвертую строки, учтя смену знака определителя:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & -11 \end{vmatrix}.$$

Теперь умножим вторую строку сначала на (-3), а потом на (-5) и прибавим к третьей и четвертой строкам соответственно:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 91 & 124 \\ 0 & 0 & 133 & 184 \end{vmatrix}.$$

Окончание вычисления определителя проведем без комментариев. Обязательно проследите за выполненными действиями и поймите, что мы делаем!

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 91 & 124 \\ 0 & 0 & 133-91 & 184-124 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 91 & 124 \\ 0 & 0 & 42 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 91-2\cdot 42 & 124-2\cdot 60 \\ 0 & 0 & 42 & 60 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 42 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -29 & -39 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 7\cdot 36 = 252.$$

38*. Свойства определителя

Здесь обсуждаются некоторые дополнительные полезные свойства определителя. Первое из них облегчает вычисление определителя так называемых *блочных матриц.*

38.1. Определение. Блочной называется матрица вида

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \\ \hline c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{array}\right).$$

Блочную матрицу можно записать в виде $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A} = (a_{ij})_{k\times k}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{k\times m}$, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times k}$, $\mathbf{D} = (d_{ij})_{m\times m}$.

38.2. Теорема. Определитель блочной матрицы $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — квадратные матрицы, равен

$$\det \mathbf{G} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Доказательство. Вычислим определитель матрицы $\mathbf{G}$ методом Гаусса. Для этого элементарными преобразованиями строк приведем матрицу $\mathbf{G}$ к верхнетреугольному виду

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}' \end{pmatrix}.$$

Здесь как матрица $\mathbf{A}'$, так и матрица $\mathbf{D}'$ будут иметь верхнетреугольный вид.

Очевидно, что при построении матрицы $\mathbf{A}'$ мы затрагивали только первые k строк (на которых расположена матрица $\mathbf{A}$). Поэтому $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$.

Аналогично, поскольку в приведении матрицы $\mathbf{D}$ к верхнетреугольному виду участвовали только последние m строк, $\det \mathbf{D} = \det \mathbf{D}'$.

С другой стороны, определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, поэтому

$$\det \mathbf{G} = a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{kk} d'_{11} d'_{22} \cdots d'_{mm}.$$

Но

$$a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{kk} = \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}, \qquad d'_{11} d'_{22} \cdots d'_{mm} = \det \mathbf{D}' = \det \mathbf{D}. \ \square$$

Как пользоваться этой теоремой, показано в примере 6.3.

38.3. Определитель транспонированной матрицы. Транспонирование — довольно распространенная операция в алгебре. Поэтому полезно с ней познакомиться и выяснить, как при этом ведет себя определитель. Поскольку нас интересуют определители, ограничимся только квадратными матрицами.

38.4. Определение. Пусть дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированной к ней называется матрица

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются строками исходной матрицы. Например, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, транспонирование квадратной матрицы получается за счет симметрии относительно главной диагонали.

38.5. Теорема. Для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ выполнено равенство:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T,$$

т. е. определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы.

Доказательство этой теоремы мы опустим ввиду его сложности, но разберем очень полезное следствие.

38.6. Следствие. Определитель является полилинейной кососимметричной функцией столбцов матрицы.

Доказательство. По определению определитель — полилинейная кососимметричная функция строк матрицы. При транспонировании строки и столбцы меняются местами, а определитель благодаря предыдущей теореме остается неизменным. Поэтому все, что можно утверждать про строки определителя, верно и относительно столбцов. В частности, если поменять два столбца местами, то определитель изменит знак. А если на месте какого-то столбца стоит линейная комбинация столбцов, то такой определитель будет равен линейной комбинациии определителей. □

38.7. Определитель произведения матриц. Для матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times n}$

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}. \tag{6.8}$$

Доказательство этой теоремы мы также опустим ввиду громоздких выкладок.

38.8. Раскрытие определителя по столбцу. Здесь мы приводим индуктивный способ вычисления определителя. Но сначала нам потребуется некоторое определение. Пусть дана квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. Ее минором M_{ij} называется определитель матрицы порядка $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $\mathbf{A}$ после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца. Например, если $n = 4$, то

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$
$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{41} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

38.9. Теорема. Для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размера $n\times n$ справедливо равенство

$$\det\mathbf{A} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}.$$

Доказательство. Представим первый столбец матрицы в виде суммы n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Так как определитель — полилинейная функция столбцов, то

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{A}_1 + \det\mathbf{A}_2 + \dots + \det\mathbf{A}_n,$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и т. д. Обратите внимание, что $\mathbf{A}_1$ — блочная матрица и ее определитель равен произведению определителей:

$$\det \mathbf{A}_1 = \det(a_{11}) \det \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} M_{11}.$$

Вычислим теперь $\det \mathbf{A}_2$, поменяв предварительно у него первую и вторую строки местами:

$$\det \mathbf{A}_2 = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -a_{21} M_{21}.$$

Для остальных определителей выполнено следующее равенство:

$$\det \mathbf{A}_k = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}.$$

Его доказательство основано на том, что мы последовательно меняем местами строки k с $k-1$, затем $k-1$ с $k-2$ и т. д. до тех пор, когда k-я строка станет первой, а первые $k-1$ строк сдвинуться вниз на одну позицию. При этом мы должны сделать $k-1$ перестановку строк, поэтому перед произведением $a_{k1} M_{k1}$, равным определителю получившейся блочной матрицы стоит знак $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$. □

38.10. Замечание. Доказательство этой теоремы основано на том, что определитель является полилинейной функцией столбцов. Так как определитель также является полилинейной функцией строк, то справедливо следующее разложение определителя по i-ой строке ($i = 1, 2, \dots, n$) (см. задачу 6.21*):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{k+i} M_{ki} =$$
$$= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}. \quad (6.9)$$

Мы рассмотрели вопрос о вычислении определителя n-го порядка. Но у читателя может возникнуть вполне справедливый вопрос: «А зачем нам нужны определители n-го порядка? Неужели, они необходимы только для вычисления ориентированного объема n-мерного параллелепипеда!?»

Оказывается, определители n-го порядка позволяют выработать простой критерий обратимости матрицы, а также построить обратную матрицу.

38.11. Теорема. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

Доказательство. 1. Пусть матрица $\mathbf{A}$ обладает обратной матрицей $\mathbf{A}^{-1}$. Докажем, что $\det \mathbf{A} \neq 0$. Для доказательства воспользуемся свойством определителя произведения матриц 38.7:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{E} \ \Rightarrow \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 1.$$

Следовательно,

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{A}^{-1}} \neq 0.$$

2. Пусть $\det \mathbf{A} \neq 0$. Покажем, что существует матрица $\mathbf{A}^{-1}$. Для этого достаточно ее предъявить.

В качестве матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ возьмем матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, — *алгебраическое дополнение* элемента a_{ij}, а M_{ij} — минор матрицы $\mathbf{A}$. Матрица

$$\mathbf{A}^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из алгебраических дополнений, называется *присоединенной* к матрице $\mathbf{A}$. Используя присоединенную матрицу, предыдущую формулу можно переписать короче:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\mathbf{A}^{\vee})^{T}.$$

Докажем, что построенная матрица (6.10) действительно является обратной, вычислив произведение $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$.

Результатом умножения матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ будет матрица

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{2k} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}A_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{1k} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{2k} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk}A_{nk} \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

Выясним, чему равны суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. Сначала исследуем суммы, стоящие на главной диагонали произведения ($i = j$).

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = && \text{(по определению } A_{ij} \text{ на стр 75)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i}M_{ik} = && \text{(по формуле (6.9))} \\ &= \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Таким образом, все элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\det \mathbf{A}$.

Теперь вычислим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$, стоящую вне диагонали. В этой ситуации $i \neq j$. Как и ранее,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i}M_{jk} = c_{ij}.$$

Но теперь мы не можем утверждать, что c_{ij} — определитель матрицы $\mathbf{A}$ (см. (6.9)), поскольку вместо требуемых по формуле элементов a_{jk} стоят элементы a_{ik}. Тем не менее, число c_{ij} тоже можно интерпретировать как определитель матрицы, но не $\mathbf{A}$, а такой, которая получена из $\mathbf{A}$ заменой j-ой строки на i-ую:

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-я строка} \\ \\ j\text{-я строка} \\ \\ \\ \end{array}.$$

Согласно следствию 2 из (35.2) определитель матрицы, у которой строки пропорциональны и, в частности, совпадают, равен нулю, поэтому все внедиагональные элементы c_{ij} матрицы (6.11) равны нулю. Таким образом, матрица (6.11) равна единичной, а это означает, что формула вычисления обратной матрицы (6.10) верна. Это также означает, что при $\det \mathbf{A} \neq 0$ обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует. □

Примеры решения типовых задач

Пример 6.3. Вычислить определитель матрицы

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Мы имеем дело с блочной матрицей

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{D} = 6 - 10 = -4$. Поэтому, согласно теореме 38.2, $\det(\mathbf{G}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{D}) = 16$.

Пример 6.4. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, если известно, что $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$, $D(6, -3, 8)$.

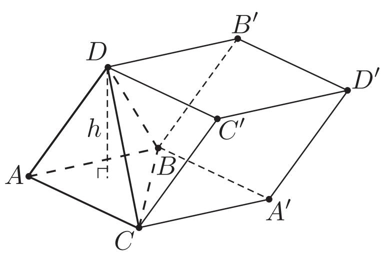


Рис. 6.3. Рисунок к примеру 6.4

Решение. Нам известно, что объем параллелепипеда можно вычислять через смешанное произведение (теорема 33.1). Поэтому достроим тетраэдр до параллелепипеда (рис. 6.3) и выясним, как соотносятся объемы этих тел. Из школьного курса известно, что объемы тетраэдра и параллелепипеда вычисляются по формулам:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h, \qquad V_{ABA'CDB'D'C'} = S_{ABA'C} \cdot h,$$

где S_{ABC} — площадь основания тетраэдра, $S_{ABA'C}$ — площадь основания параллелепипеда, а h — высота тетраэдра, опущенная из вершины D на основание, которая служит также высотой параллелепипеда. Кроме того, $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABA'C}$ (см. рис. 6.3). Следовательно, объемы тетраэдра и соответствующего параллелепипеда относятся как $1 : 6$. Иными словами,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} V_{ABA'CDB'D'C'}.$$

С учетом этой формулы и теоремы 33.1, получаем простую формулу объема тетраэдра:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle\right|.$$

Смешанное произведение, модуль которого стоит в правой части формулы, можно вычислять через координаты (стр 62). Поэтому нам нужно вычислить координаты векторов-сомножителей:

$$\overrightarrow{AB}(1,2,0), \quad \overrightarrow{AC}(0,2,2), \quad \overrightarrow{AD}(5,-2,6).$$

Далее,

$$\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(2\cdot 6 - 2\cdot(-2)) - $$
$$- 2\cdot(0\cdot 6 - 2\cdot 5) = 16 + 20 = 36.$$

В результате

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 36 = 6.$$

Пример 6.5. Определить расстояние от точки $M(1,-1,1)$ до плоскости, проходящей через точки $A(-2,0,3)$, $B(2,1,-1)$, $C(2,-,2-4)$.

Решение. На рис. 6.4 изображены направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$, на которых построен параллелепипед. Его объем равен модулю смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$. Этот же объем можно получить как результат произведения площади основания параллелепипеда на высоту, которая и есть искомое расстояние. Согласно (5.1) площадь параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда, равна модулю векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Тогда можно записать равенство

$$\left|\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\rangle\right| = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|\cdot h,$$

откуда

$$h = \frac{\left|\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\rangle\right|}{\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|}. \tag{6.12}$$

Итак, вычислим координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}(4,1,-4),\ \overrightarrow{AC}(4,-2,-7),\ \overrightarrow{AM}(3,-1,-2).$$

Найдем их смешанное произведение:

$$\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\rangle = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -7 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4((-2)\cdot(-2)-(-1)\cdot(-7)) -$$
$$- 1(4\cdot(-2) - 3\cdot(-7)) - 4(4\cdot(-1) - 3\cdot(-2)) = -33.$$

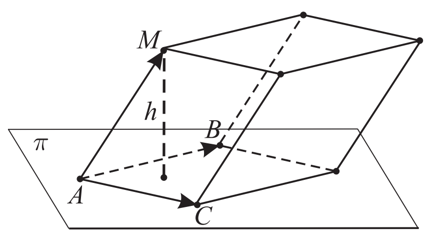


Рис. 6.4. Рисунок к примеру 6.5

Тогда объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$, равен 33. Теперь найдем векторное произведение

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\imath}(1\cdot(-7) - (-2)\cdot(-4)) -$$
$$- \overrightarrow{\jmath}(4\cdot(-7) - 4\cdot(-4)) + \overrightarrow{k}(4\cdot(-2) - 4\cdot 1) = -15\overrightarrow{\imath} + 12\overrightarrow{\jmath} - 12\overrightarrow{k}.$$

Определим площадь основания:

$$S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-15)^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{513}.$$

Таким образом, расстояние от точки M до плоскости, проходящей через точки A, B, C, равно:

$$h = \frac{33}{\sqrt{513}} = \frac{11\sqrt{57}}{57}.$$

Пример 6.6. Точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(3,2,1)$, $D(-4,3,5)$ являются вершинами тетраэдра. Найти расстояние между его ребрами (AB) и (CD) (см. рис. 6.5).

Решение. Изобразим тетраэдр и векторизуем его ребра $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB}(-1,3,-3),\ \overrightarrow{AC}(1,3,-1),\ \overrightarrow{CD}(-7,1,4).$$

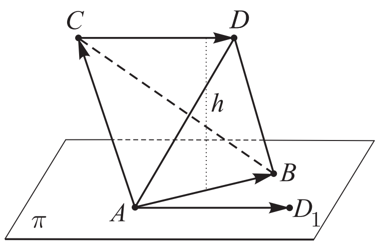


Рис. 6.5. Рисунок к примеру 6.6

Теперь мысленно перенесем вектор $\overrightarrow{CD}$ параллельно самому себе так, чтобы точка C совпала с точкой A, тогда получим вектор $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{CD}$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$ имеют общее начало (см. рис. 6.5). Искомое расстояние найдем как расстояние от точки C до плоскости, проходящей через точки A и B и параллельной вектору $\overrightarrow{CD}$ по формуле (6.12)

$$h = \frac{|\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}\rangle|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]|}.$$

Вычислим смешанное произведение векторов:

$$\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}\rangle = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot(3\cdot4 - 1\cdot(-1)) -$$

$$- 3(1\cdot4 - (-1)\cdot(-7)) - 3(1\cdot1 - 3\cdot(-7)) = -70.$$

Найдем результат векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{\imath}(3\cdot4 - 1\cdot(-3)) -$$

$$- \vec{\jmath}((-1)\cdot4 - (-3)\cdot(-7)) + \vec{k}((-1)\cdot1 - (-7)\cdot3) = 15\vec{\imath} + 25\vec{\jmath} + 20\vec{k}.$$

В итоге вычисляем расстояние между ребрами AB и CD:

$$h = \frac{|-70|}{\sqrt{15^2 + 25^2 + 20^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{5}.$$

Пример 6.7. Вычислить матрицу, обратную к $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ с помощью присоединенной матрицы.

Решение. Это пример на использование формулы (6.10). Сначала нам нужно вычислить алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы $\mathbf{A}$. По определению алгебраического дополнения $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$, где M_{11} — минор матрицы $\mathbf{A}$, получающийся вычеркиванием из нее первой строки и первого столбца. В нашем случае — это просто число 4. Значит, $A_{11} = 4$. Аналогично находим оставшиеся алгебраические дополнения:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1.$$

Таким образом, присоединенная матрица имеет вид:

$$\mathbf{A}^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычислим определитель $\det \mathbf{A} = -2$ и выпишем обратную матрицу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

6.1. Сформулируйте определение смешанного произведения трех векторов.
6.2. Какие свойства смешанного произведения вам известны?
6.3. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.
6.4. Запишите формулу вычисления смешанного произведения векторов, заданных в координатной форме.
6.5. В чем заключается геометрический смысл смешанного произведения?
6.6. Перечислите задачи, которые можно решать с помощью смешанного произведения.
6.7. Что называется определителем порядка n? Приведите способы его вычисления и сформулируйте его свойства.
6.8. Чему равен определитель верхнетреугольной матрицы?
6.9. Как применяется метод Гаусса к вычислению определителя порядка n?
6.10. Какая матрица называется транспонированной к данной?
6.11. Сформулируйте и докажите теорему о раскрытии определителя по столбцу.
6.12. Какая матрица называется блочной? Чему равен ее определитель?

Задачи

6.1°. Найдите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{a}(2, 3, -1)$, $\overrightarrow{b}(1, -1, 3)$ и $\overrightarrow{c}(1, 9, -11)$.

6.2°. Компланарны ли векторы:
а) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = -4\overrightarrow{\imath} + 7\overrightarrow{\jmath} + 6\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{k}$;
б) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{k}$;
в) $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{\imath} + 10\overrightarrow{\jmath} + 5\overrightarrow{k}$?

6.3°. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если $A(3, -1, 4)$, $B(2, 0, -1)$, $C(-1, 2, 3)$, $D(3, -2, 0)$.

6.4. Лежат ли четыре точки A, B, C и D в одной плоскости:
а) $A(1, 1, 0)$, $B(2, 0, 2)$, $C(1, 0, 0)$, $D(3, 1, 4)$;
б) $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 1, 1)$, $D(2, 1, 5)$;
в) $A(-2, -1, -1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(3, 1, -4)$, $D(4, 3, 0)$?

6.5. Найдите объем тетраэдра $ABCD$ и длину его высоты, проведенной из вершины D на плоскость основания ABC, если известны координаты его вершин: $A(2, 5, 4)$, $B(-5, -2, 0)$, $C(1, 5, -4)$, $D(-3, 4, -7)$.

6.6. Компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ в треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$?

6.7. Упростите выражения:
а) $\langle \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} \rangle$;
б) $\langle \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} \rangle$;
в) $\langle \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} \rangle$.

6.8. Сравните определители матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^T$, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

6.9. Вычислите определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{е)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{ж)} \begin{vmatrix} -6 & 9 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -2 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

6.10. Вычислите объем тетраэдра $ABCD$, если известны координаты его вершин $A(1,1,2)$, $B(0,-1,2)$, $C(-1,4,3)$, $D(0,0,1)$.

6.11. Вычислите объем шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, для которой известны координаты вершин: $A(16,0,12)$, $B(12,10,9)$, $C(4,10,3)$, $D(0,0,0)$, $E(4,-10,3)$, $F(12,-10,9)$, $A_1(16,0,18)$, $B_1(12,10,15)$, $C_1(4,10,9)$, $D_1(0,0,6)$, $E_1(4,-10,9)$, $F_1(12,-10,15)$.

6.12. Вычислите объем четырехугольной пирамиды $ABCDE$, заданной координатами вершин $A(-4,3,1)$, $B(-2,2,4)$, $C(-1,2,2)$, $D(-3,3,-1)$, $E(1/2,4,3)$.

6.13. Найдите расстояние от точки $A(1,2,3)$ до плоскости, проходящей через точки $B(-1,2,4)$, $C(0,0,0)$, $D(1,2,5)$.

6.14. Найдите расстояние от точки $A(2,-2,1)$ до плоскости, проходящей через ось Oy и точку $B(3,1,4)$.

6.15. Найдите расстояние от прямой, проходящей через точки $A(1,-1,2)$ и $B(-1,3,6)$, до плоскости, параллельной этой прямой и проходящей через точки $C(1,2,4)$ и $D(3,-2,4)$.

6.16. Найдите расстояние между прямой, проходящей через точки $A(2,1,4)$ и $B(-3,2,1)$ и прямой, проходящей через точки $C(0,1,1)$ и $D(-1,2,0)$.

6.17. Даны вершины тетраэдра: $ABCD$: $A(-1,-3,1)$; $B(5,3,8)$; $C(-1,-3,5)$; $D(2,1,-4)$. Найдите кратчайшее расстояние от ребра BD до медианы грани ABC тетраэдра.

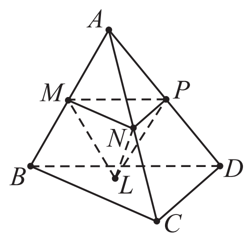


Рис. 6.6. Рисунок к задаче 6.18*

6.18*. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB, AC, AD соответствующими точками M, N, P делятся пополам. Найдите отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $LNMP$, где L — произвольная точка грани BDC (см. рис. 6.6).

6.19*. В тетраэдре $ABCD$ точки M и N являются серединами ребер AB и CD. Докажите, что любая плоскость, проходящая через точки M и N, делит тетраэдр на равные по объему части.

6.20*. Найдите матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ с помощью присоединенной матрицы.

6.21*. Используя теорему 38.9 и кососимметричность определителя, докажите формулу раскрытия определителя по k-му столбцу и k-ой строке:

а) $\det A = (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} + (-1)^{k+2} a_{2k} M_{2k} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{nk} M_{nk}$.

б) $\det A = (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} M_{k2} + \cdots + (-1)^{k+n} a_{kn} M_{kn}$.

Кулешов Сергей Алексеевич, дфмн, профессор кафедры “Высшая математика” Военно-воздушной Академии имени проф. Н. Е. Жуковского. KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна, кпн, доцент той же кафедры. afsalimova@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович, кфмн, доцент той же кафедры. stav@inm.ras.ru

Исправление в статье А. Ю. Эвнина в номере 1(49), 2009 г.

Автор сообщил, что в указанной статье приведено ошибочное решение задачи №19. Приводим эту задачу и правильное решение.

19. Найти остаток от деления многочлена $x^{2\,007} + x^{207} + x^{27} + x^7 + 1$ на многочлен $x^3 - x$.

Первый способ. При делении многочлена на многочлен в остатке возникает многочлен, степень которого меньше степени делителя. В данном случае имеем остаток $r(x) = ax^2 + bx + c$ и тождество

$$x^{2\,007} + x^{207} + x^{27} + x^7 + 1 = (x^3 - x) \cdot s(x) + ax^2 + bx + c. \qquad (*)$$

Подставив в $(*)$ нули многочлена $x^3 - x$ — числа -1, 0 и 1, получим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} -3 = a - b + c; \\ 1 = c; \\ 5 = a + b + c. \end{cases}$$

Решим эту систему: $a = 0$, $b = 4$, $c = 1$.

Второй способ. Из тождества $x^{n+2} - x^n = x^{n-1}(x^3 - x)$ вытекает, что все нечётные степени x при делении на $x^3 - x$ дают один и тот же остаток, а именно x.

Ответ. $4x + 1$.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2009 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2009 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >