ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год тринадцатый

№ 4 (52)

октябрь – декабрь 2009 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 4 (52), 2009 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2009 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.12.2009 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 4 (52), октябрь – декабрь 2009 г.

Содержание

Семь геометрических задач

В. Б. Дроздов

В статье рассмотрены необходимые и достаточные условия, при которых отрезки GH, GL, HL (G — точка пересечения медиан треугольника, H — точка пересечения высот, L — точка пересечения биссектрис) параллельны или перпендикулярны одной из сторон треугольника. Исследование проведено векторным методом. Статью можно использовать на факультативных занятиях по математике, а также в профильных физико-математических классах.

I. Предыстория

В журнале «Потенциал» № 10, 2008 г., опубликована статья Л. А. Беклемишевой «Задача Вовы». Условие задачи таково:

Дан остроугольный треугольник, и пусть отрезок MN соединяет точку пересечения его высот с точкой пересечения биссектрис. Возможно ли, что отрезок MN окажется параллельным одной из сторон треугольника? Если да, то при каких условиях? Как его вычислить?

Подробное решение задачи дано без применения векторов.

Красивые математические задачи часто непроизвольно запоминаются. Удалось найти похожую задачу, предлагавшуюся на физический факультет МГУ в 1966 году:

Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника

(Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, «Пособие по математике для поступающих в вузы», М.: «Наука», 1968, с. 368).

Естественно возникает третья задача, в которой фигурируют точки пересечения высот и медиан треугольника. И еще три задачи, где вместо параллельности — перпендикулярность. Наличие шести задач с однотипным сюжетом заставляет искать единый метод их решения. А таковым может быть только общий метод. Поскольку речь идет о параллельности и перпендикулярности, то выбираем эффективный в этих случаях векторный метод. Тем более что векторы уже давно изучаются в средней школе.

Во всех задачах используем единые обозначения:

H — ортоцентр треугольника (точка пересечения его высот).

G — центроид треугольника (точка пересечения его медиан).

L — центр вписанной в треугольник окружности (точка пересечения его биссектрис).

Унифицируем формулировки и решения задач. Параллельность рассматриваем по отношению к стороне $AC = b$ треугольника ABC, а перпендикулярность — к стороне $BC = a$.

Векторный метод решения отнюдь не избавляет от обильных тригонометрических и алгебраических выкладок. Рассматриваемые задачи в принципе коротко не решаются. Поэтому выбираем «золотую середину»: принципиальные моменты вычислений приводятся, а «технические» остаются читателю в качестве полезных упражнений. Ведь читать математическую статью надо с карандашом в руках!

II. Векторная формула

Выведем формулу, весьма полезную при решении многих геометрических задач, как планиметрических, так и стереометрических.

Пусть в треугольнике ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ точка E находится на стороне BC, точка D — на стороне AB. Известны отношения $CE/EB = \lambda_1$ и $AD/DB = \lambda_2$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F (см. рис. 1). Точка O — произвольная (может быть в плоскости треугольника, а может и нет). Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — единичные векторы, сонаправленные векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ соответственно. Тогда справедлива формула:

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\lambda_1 \cdot OA \cdot \vec{e}_1 + \lambda_1\lambda_2 \cdot OB \cdot \vec{e}_2 + \lambda_2 \cdot OC \cdot \vec{e}_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}. \tag{1}$$

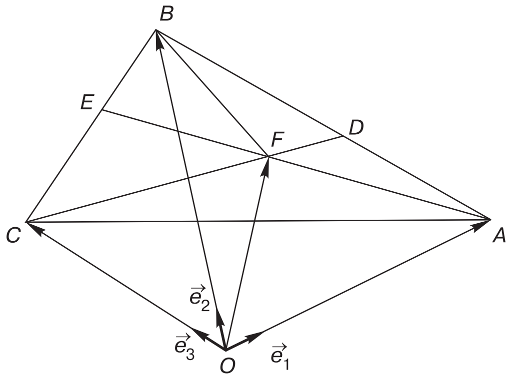

Рис. 1

Доказательство. Очевидно, что $\overrightarrow{OF} = OC \cdot \vec{e}_3 + \overrightarrow{CF}$. Чтобы выразить вектор $\overrightarrow{CF}$, надо найти отношение $CF/FD = x$. Для чего используем площадь как своего рода математический инструмент. Соединим точки B и F и обозначим площади треугольников: $S_{CEF} = S_1$, $S_{EBF} = S_2$, $S_{BDF} = S_3$, $S_{DAF} = S_4$, $S_{ACF} = S_5$. Так как как площадь — величина аддитивная и площади треугольников с общей высотой относятся как их основания, то мы приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2} = \lambda_1, \\ \dfrac{S_4}{S_3} = \lambda_2, \\ \dfrac{S_1 + S_5}{S_2 + S_3 + S_4} = \lambda_1, \\ \dfrac{S_4 + S_5}{S_1 + S_2 + S_3} = \lambda_2. \end{cases}$$

Кроме того, $\dfrac{S_1 + S_2}{S_3} = x$ и $\dfrac{S_5}{S_4} = x$. Отсюда нетрудно получить, что $x = \dfrac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_2}$. Тогда $\dfrac{CF}{CD} = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2}$, а значит $\overrightarrow{CF} = \dfrac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2} \cdot \overrightarrow{CD}$. По свойству биссектрисы треугольника, $AD = \lambda_2 \cdot BD$, следовательно, $\overrightarrow{AD} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{BD}$. Но

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} \qquad \text{и} \qquad \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}.$$

Из трех последних формул легко выразить вектор $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB} - (1+\lambda_2) \cdot \overrightarrow{OC}}{1 + \lambda_2}.$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\lambda_1 \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda_1\lambda_2 \cdot \overrightarrow{OB} - \lambda_1(1+\lambda_2)\cdot\overrightarrow{OC}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2},$$

откуда с учетом равенств $\overrightarrow{OA} = OA\cdot\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = OB\cdot\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = OC\cdot\vec{e}_3$, $\overrightarrow{OF} = OF\cdot\vec{e}_3+\overrightarrow{CF}$ приходим к формуле (1).

Совместив точки O и C, получим частный случай формулы (1):

$$\overrightarrow{CF} = \frac{\lambda_1\cdot CA\cdot\vec{e}_1 + \lambda_1\lambda_2\cdot CB\cdot\vec{e}_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2}. \tag{2}$$

Формула (2) будет применена при решении нижеследующих задач.

III. Параллельность

Так как в следующих ниже задачах вычисления обратимы, то мы вправе говорить о необходимых и достаточных условиях.

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия параллельности отрезка GL одной из сторон треугольника.

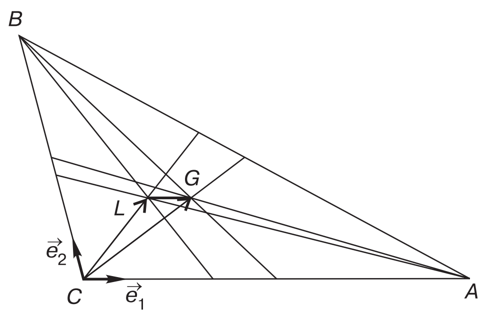

Рис. 2

Решение. См. рис. 2. Для медиан, проведенных из вершин A и C, имеем: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, тогда в силу формулы (2) $\overrightarrow{CG} = \dfrac{b\cdot\vec{e}_1 + a\cdot\vec{e}_2}{3}$. Для биссектрис, проведенных из вершин A и C соответственно имеем: $\lambda_1 = b/c$, $\lambda_2 = b/a$. Формула (2) дает: $\overrightarrow{CL} = \dfrac{ab(\vec{e}_1+\vec{e}_2)}{a+b+c}$. Поскольку $\overrightarrow{GL} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CG}$, то

$$\overrightarrow{GL} = \frac{(2a-b-c)b}{3(a+b+c)}\vec{e}_1 + \frac{(2b-a-c)a}{3(a+b+c)}\vec{e}_2. \tag{3}$$

Ясно, что $GL \parallel AC \Leftrightarrow \overrightarrow{GL} \parallel \vec{e}_1$, т.е. $2b-a-c=0$, откуда $b = \dfrac{a+c}{2}$.

Итак, *для того, чтобы отрезок GL был параллелен одной из сторон треугольника, необходимо и достаточно, чтобы стороны треугольника образовывали арифметическую прогрессию.* При этом разность прогрессии должна быть отличной от нуля, иначе в случае равностороннего треугольника отрезок GL вырождается в точку. Очевидно, что отрезок GL не может быть параллелен ни одной стороне равнобедренного, но не равностороннего треугольника. См. рис. 3. Не умаляя общности, считаем $a<b<c$. Тогда угол C — наибольший. Находим $\cos C$ из теоремы косинусов:

$$c^2 = a^2 + \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{a+c}{2}\right)\cos C.$$

В итоге получим: $\cos C = \dfrac{5a-3c}{4}$. Следовательно, при $5a>3c$ треугольник будет остроугольным, при $5a=3c$ — прямоугольным, при $5a<3c$ — тупоугольным. И во всех трех случаях разносторонним.

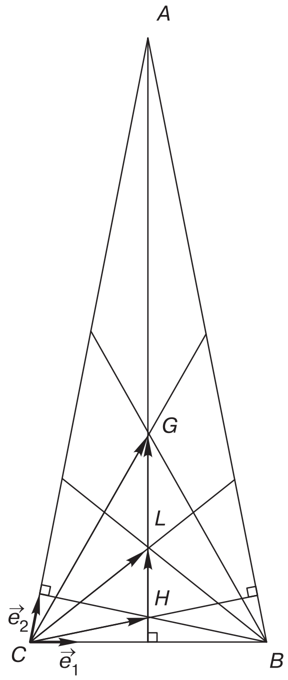

Рис. 3

Задача 2. Найти необходимые и достаточные условия параллельности отрезка GH одной из сторон треугольника.

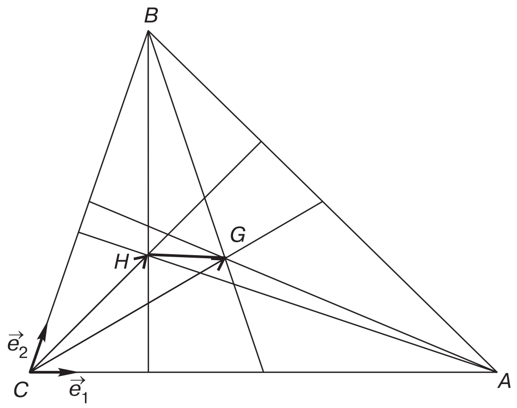

Рис. 4

Решение. См. рис. 4. Вектор $\overrightarrow{CG} = \dfrac{b \cdot e_1 + a \cdot \vec{e}_2}{3}$ выражен в первой задаче. Для высот, проведенных из вершин A и C, соответственно имеем:

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} B}, \qquad \lambda_2 = \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} B}.$$

Формула (2) дает:

$$\overrightarrow{CH} = b \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \cdot \vec{e}_1 + a \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C \cdot \vec{e}_2.$$

При этом мы воспользовались легко доказываемым тождеством:

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1, \tag{4}$$

где A, B, C — углы треугольника ABC. Поскольку $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CG}$, то

$$\overrightarrow{GH} = b\left(\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C - \frac{1}{3}\right) \cdot \vec{e}_1 + a\left(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C - \frac{1}{3}\right) \cdot \vec{e}_2. \tag{5}$$

Ясно, что $GH \parallel AC \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} \parallel \vec{e}_1$, т. е. $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = 1/3$, или $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$.

Итак,

> *для того, чтобы отрезок GH был параллелен одной из сторон треугольника, необходимо и достаточно, чтобы произведение тангенсов углов, прилежащих к этой стороне, было равно трем.*

При этом каждый из углов отличен от $60°$, иначе, в случае равностороннего треугольника, отрезок GH вырождается в точку. Очевидно, что отрезок GH не может быть параллелен ни одной стороне равнобедренного, но не равностороннего треугольника (см. рис. 3). Так как $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C > 0$, то углы A и C — острые. Положив в формуле (4) $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = 1/3$, найдем, что

$$\operatorname{ctg} B = \frac{2}{3(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)} > 0.$$

Значит и угол B — острый. Тогда $\triangle ABC$ — разносторонний остроугольный.

Задача 3. Найти необходимые и достаточные условия параллельности отрезка LH одной из сторон треугольника.

Решение. Так как $\overrightarrow{LH} = \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GH}$, то в силу формул (3) и (5) имеем:

$$\overrightarrow{LH} = b\left(\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C - \frac{a}{2p}\right) \cdot \vec{e}_1 + a\left(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C - \frac{b}{2p}\right) \cdot \vec{e}_2. \tag{6}$$

Ясно, что $LH \parallel AC \Leftrightarrow \overrightarrow{LH} \parallel \vec{e}_1$, т. е. $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = b/2a$, или

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = \frac{2p}{b}. \tag{7}$$

Итак,

> *для того, чтобы отрезок LH был параллелен одной из сторон треугольника, необходимо и достаточно, чтобы произведение тангенсов углов, прилежащих к этой стороне, было равно периметру треугольника, деленному на эту сторону.*

При этом каждый из углов отличен от $60°$, иначе в случае равностороннего треугольника отрезок LH вырождается в точку. Покажите самостоятельно, что если положить в равенстве (7) один из углов равным $60°$, то и другой будет равным $60°$. Очевидно, что отрезок LH не может быть параллелен ни одной стороне равнобедренного, но не равностороннего треугольника (см. рис. 3). Так как $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C > 0$, то углы A и C — острые. Заменив в формуле (4) $\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C = b/2a$, найдем, что

$$\operatorname{ctg} B = \frac{a+c}{2p(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C)} > 0.$$

Значит и угол B — острый. Тогда $\triangle ABC$ — разносторонний остроугольный.

Остались, однако, весьма необходимые вычисления. Заранее неочевидно, что уравнение (7) имеет решения. А уравнение $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3$ из второй задачи имеет решения вне всякого сомнения. Поэтому сведем уравнение (7) к тригонометрическому. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{2p}{b} &= \frac{a+b+c}{b} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2R \sin B} = \frac{(\sin A + \sin C) + \sin(A+C)}{\sin(A+C)} = \\ &= \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}} = \frac{\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{A+C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}} = \\ &= \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}.\end{aligned}$$

Если применить формулы

$$\operatorname{tg} A = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}, \qquad \operatorname{tg} C = \frac{2\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}}$$

и обозначить $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = x$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = t$ (считаем t параметром) то уравнение (7) приводится к виду

$$(3t^2-1)x^2 - 2tx + (1-t^2) = 0. \tag{8}$$

Так как $\triangle ABC$ остроугольный, то $0 < t < 1$ и $0 < x < 1$.

Если $t = 1/\sqrt{3} \Leftrightarrow A = 60^\circ$, то уравнение (8) становится линейным, имеющим корень $x = 1/\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow C = 60^\circ$. Таким образом получаем равносторонний треугольник с вырожденным в точку отрезком LH.

Если $t \neq 1/\sqrt{3}$, то дискриминант квадратного уравнения (8) положителен при любом t, что элементарно проверяется. Корни уравнения (8) есть:

$$x_1 = \frac{t+\sqrt{3t^4-3t^2+1}}{3t^2-1}; \qquad x_1 = \frac{t-\sqrt{3t^4-3t^2+1}}{3t^2-1}.$$

Если $0 < t < 1/\sqrt{3}$, то по теореме Виета $x_1 < 0$; $x_2 > 0$. Неравенство $x_2 < 1$ приводится к виду $t(1-t)(1-3t^2) > 0$, что верно при любом $0 < t < 1/\sqrt{3}$.

Если $1/\sqrt{3} < t < 1$, то по теореме Виета $x_1 > 0$; $x_2 > 0$. Неравенство $x_1 < 1$ приводится к виду $t(1-t)(1-3t^2) > 0$, что не имеет места ни при одном $1/\sqrt{3} < t < 1$. Неравенство $x_2 < 1$ приводится к виду $t(1-t)(1-3t^2) < 0$, что верно при любом $1/\sqrt{3} < t < 1$.

Следовательно, уравнение (8) имеет решение

$$x = \frac{t-\sqrt{3t^4-3t^2+1}}{3t^2-1}.$$

IV. Перпендикулярность

Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой, то равнобедренность треугольника является достаточным условием перпендикулярности каждого из отрезков GL, GH, LH основанию треугольника (см. рис. 3). Поэтому ниже ищем неравнобедренные треугольники, обладающие соответствующими свойствами.

Задача 4. Существует ли неравнобедренный треугольник, в котором отрезок GL перпендикулярен одной из сторон треугольника?

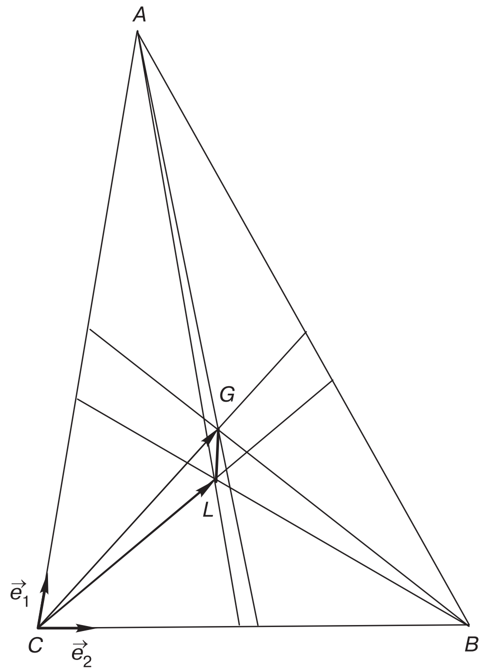

Рис. 5

Решение. См. рис. 5. Ясно, что $GL \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{GL} \cdot \vec{e}_2 = 0$. Применяем формулу (3) с учетом того, что $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos C = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$:

$$(b^3 - c^3) + (3a^2c - 3a^2b) + (2ac^2 - 2ab^2) + (b^2c - bc^2) = 0;$$
$$(b - c)(b^2 + bc + c^2) - 3a^2(b - c) - 2a(b - c)(b + c) + bc(b - c) = 0;$$
$$(b - c)\big((b + c)^2 - 2a(b + c) - 3a^2\big) = 0;\ \ (b - c)(b + c + a)(b + c - 3a) = 0.$$

Так как $b \neq c$, то $b + c = 3a$. Итак,

> *для того, чтобы отрезок GL был перпендикулярен одной из сторон неравнобедренного треугольника, необходимо и достаточно, чтобы утроенная сторона, к которой перпендикулярен отрезок GL, была равна сумме двух других сторон.*

Не умаляя общности, считаем, что $b < c$. Тогда c — наибольшая сторона треугольника ABC, ибо таковой явно не может быть сторона $BC = a$. По теореме косинусов находим $\cos C = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$, где C — наибольший угол треугольника. При $a = (b + c)/3$ получим $\cos C = (5b - 4c)/3b$. Следовательно, при $5b > 4c$ треугольник будет остроугольным, при $5b = 4c$ — прямоугольным, при $5b < 4c$ тупоугольным. И во всех трех случаях разносторонним.

Задача 5. Существует ли неравнобедренный треугольник, в котором отрезок GH перпендикулярен одной из сторон треугольника?

Решение. Ясно, что $GH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} \cdot \vec{e}_2 = 0$. Применяем формулу (5) с учетом того, что $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos C$:

$$b\left(\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C - \frac{1}{3}\right)\cos C + a\left(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

По теореме синусов $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$. Учитываем, что $A = 180^\circ - (B + C)$ и заменяем котангенсы на отношения косинусов к синусам. В результате получим:

$$\sin B\left(\frac{1}{3} - \frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}\right)\cos C + \sin(B + C)\left(\frac{1}{3} + \frac{\cos(B + C)}{\sin(B + C)} \cdot \frac{\cos C}{\sin C}\right) = 0.$$

Приводим к общему знаменателю, раскрываем скобки, учитываем, что $\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$. Имеем:

$$\frac{1}{3}\sin C(2\sin B\cos C + \sin C\cos B) + \cos C(\cos B\cos C - \sin B\sin C - \cos B\cos C) = 0;$$
$$\frac{1}{3}\sin C(\sin C\cos B - \sin B\cos C) = 0;\ \ \sin C\cdot\sin(C - B) = 0.$$

Так как B и C — углы треугольника, то $B = C \Leftrightarrow b = c$. Итак,

неравнобедренный треугольник, в котором отрезок GH перпендикулярен одной из сторон, не существует.

Задача 6. Существует ли неравнобедренный треугольник, в котором отрезок LH перпендикулярен одной из сторон треугольника?

Решение. Ясно, что $LH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{LH}\cdot\vec{e}_2 = 0$. Применяем формулу (6) с учетом того, что $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \cos C$:

$$b\cos C\left(\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C} - \frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}\right) + a\left(\frac{\cos A\cos C}{\sin A\sin C} - \frac{\sin B}{\sin A + \sin B + \sin C}\right) = 0.$$

По теореме синусов $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$. Исключаем угол $A = 180^\circ - (B + C)$:

$$\cos C\left(\frac{\cos B\cos C}{\sin C} - \frac{\sin B\sin(B + C)}{\sin(B + C) + \sin B + \sin C}\right) - \\ - \left(\frac{\cos(B + C)\cos C}{\sin C} + \frac{\sin B\sin(B + C)}{\sin(B + C) + \sin B + \sin C}\right) = 0.$$

Преобразуем общее для обеих скобок выражение:

$$\frac{\sin B\sin(B + C)}{\sin(B + C) + \sin B + \sin C} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{\cos}\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \\ = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}} = \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Последовательно имеем:

$$\cos C\left(\cos B\cos C - 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\right) - \\ - \left(\cos(B + C)\cos C + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\cdot(1 + \cos C) + \cos B\cos^2 C - \cos(B + C)\cos C = 0;$$
$$-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \cos C(\cos B\cos C - \cos B\cos C + \sin B\sin C) = 0;$$
$$-4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\cos^2\frac{C}{2} + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos C = 0;$$
$$4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos C - \cos\frac{C}{2}\cos\frac{B + C}{2}\right) = 0;$$
$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{B}{2} + C\right) + \cos\left(\frac{B}{2} - c\right) - \cos\frac{B}{2} - \cos\left(\frac{B}{2} + C\right)\right) = 0;$$
$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{B}{2} - C\right)\cos\frac{B}{2}\right) = 0;\ \ \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin^2\frac{B - C}{2} = 0.$$

Так как B и C — углы треугольника, то $B = C \Leftrightarrow b = c$. Итак, *неравнобедренный треугольник, в котором отрезок LH перпендикулярен одной из сторон, не существует.*

V. Параллельность и перпендикулярность

Естественно задаться вопросом: а может ли какой-либо из отрезков: GL, GH, LH быть параллелен одной стороне треугольника и перпендикулярен другой? В отношении отрезков GH и LH ответ отрицательный. Ведь параллельность каждого из двух последних отрезков одной из сторон треугольника возможна только в остроугольном треугольнике. Это установлено в задачах 2 и 3. А искомый треугольник должен быть прямоугольным.

Задача 7. Существует ли треугольник, в котором отрезок GL параллелен одной его стороне и перпендикулярен другой?

Решение. В первой задаче установлено, что $GL \parallel b \Leftrightarrow a + c = 2b$. В четвертой задаче установлено, что $GL \perp a \Leftrightarrow b + c = 3a$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + c = 2b, \\ b + c = 3a \end{cases}$$

с очевидным решением: $b = 4a/3$, $c = 5a/3$. Значит, $a : b : c = 3 : 4 : 5$ (см. рис. 6).

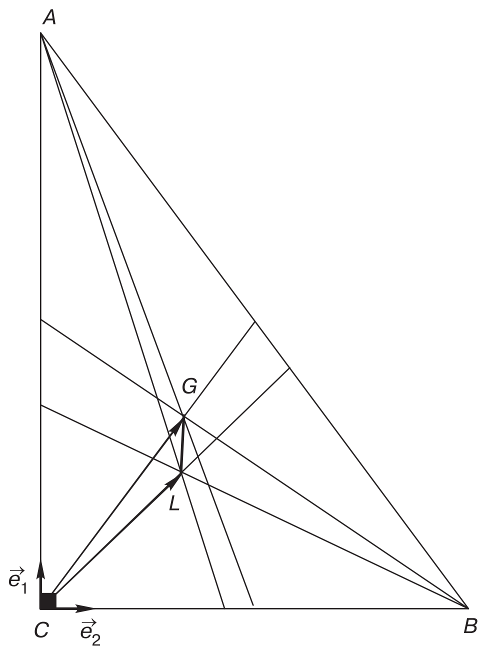

Рис. 6

Итак,

отрезок GL параллелен одной стороне треугольника и перпендикулярен другой его стороне тогда и только тогда, когда треугольник подобен египетскому пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4, 5.

Данный треугольник был известен древним египтянам свыше четырех тысяч лет назад. Несмотря на это, сейчас удалось найти новое замечательное свойство этого замечательного треугольника!

Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.

О необходимости аргументации при решении стереометрических задач

Е. В. Потоскуев

В статье обращено внимание на необходимость логической аргументации при использовании в решении стереометрической задачи "очевидных из картинки" фактов: параллельности или перпендикулярности некоторых прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей и т.п. Приведены образцы такой аргументации на примере ряда задач.

При решении стереометрических задач учащиеся, основываясь на наглядности и «очевидности» рассматриваемой геометрической «картинки», могут высказывать как интуитивно верные, так и неверные утверждения. Но даже в том случае, когда эти утверждения верны, каждое из них следует корректно обосновать. Логически необоснованное решение, даже при безошибочных вычислениях и получении верного ответа, влечет за собой снижение оценочного балла.

Для получения высокой оценки за решение стереометрической задачи учащийся должен выработать умение быстро и правильно изображать фигуры, заданные в условии задачи, и корректно обосновывать каждое утверждение, появляющееся при ее решении.

В данной статье приводятся некоторые методические рекомендации по выработке у учащихся навыков корректно обосновывать как «шаги» построения нужной для решения задачи фигуры, так и утверждения, возникающие при ее решении.

Учащимся необходимо помнить, что если основанием наклонной призмы служит правильный $\triangle MPK$, а вершина M_1 верхнего основания проектируется в центр этого треугольника, то сначала нужно построить изображение треугольника MPK и его центра O. Затем на луче, проведенном из точки O перпендикулярно плоскости MPK, выбрать точку M_1, после чего завершить построение верхнего основания призмы и провести ее боковые ребра. При этом невидимые ребра следует провести штриховыми линиями.

С изображения основания следует начинать изображение других наклонных призм частных видов.

Рассмотрим, например, решение следующей задачи.

Задача 1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC, сторона которого равна 8. Вершина A_1 проектируется в центр нижнего основания, при этом ребро A_1A составляет со стороной AB основания угол в $45°$. Найдите площадь боковой поверхности и объем этой призмы.

Решение. Пусть точка O — центр правильного треугольника ABC (рис. 1), значит, отрезки AM, BK и CH являются его высотами. Тогда по теореме о трех перпендикулярах отрезки A_1H и A_1K перпендикулярны соответственно AB и AC, поэтому они являются высотами граней соответственно AA_1B_1B и AA_1C_1C. Причем, $A_1H = A_1K$ (как наклонные, имеющие равные проекции OH и OK). Это означает, что прямоугольные треугольники A_1AH и A_1AK равны, откуда следует: $\angle A_1AK = \angle A_1AH = 45°$. Следовательно, эти треугольники — равнобедренные прямоугольные, поэтому $A_1H = A_1K = 0{,}5AB = 0{,}5 \cdot 8 = 4$. Значит, $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot A_1K = 8 \cdot 4 = 32$. Аналогично, $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot A_1H = 32$. Докажем, что грань BB_1C_1C — прямоугольник и найдем ее площадь $S_{BB_1C_1C}$.

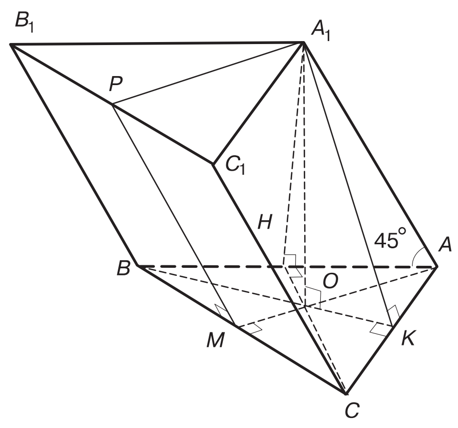

Рис. 1.

В самом деле, имеем: $A_1O \perp (ABC) \Rightarrow A_1O \perp BC$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $AM \perp BC$. Значит, $BC \perp (A_1AM)$ (по признаку прямой и плоскости) $\Rightarrow BC \perp A_1A$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Далее, так как $A_1A \parallel (B_1C_1C)$, то прямая $PM = (B_1C_1C) \cap (A_1AM)$ параллельна A_1A (по теореме о линии пересечении двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой). Получаем: $BC \perp A_1A$, $A_1A \parallel C_1C \Rightarrow BC \perp C_1C$, значит, четырехугольник BB_1C_1C — прямоугольник, и $S_{BB_1C_1C} = BC \cdot C_1C$. Найдем длину ребра A_1A.

В равнобедренном прямоугольном $\triangle A_1AH$ с катетом $AH = 4$ получаем: $A_1A = 4\sqrt{2}$. Так как $C_1C = A_1A = 4\sqrt{2}$, то $S_{BB_1C_1C} = 8 \cdot 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$. Таким образом,

$$S_{\text{бок.}} = 2S_{AA_1C_1C} + S_{BB_1C_1C} = 2 \cdot 32 + 32\sqrt{2} = 32(2 + \sqrt{2}) \text{ (кв. ед.).}$$

Найдем объем V данной призмы. В прямоугольном $\triangle A_1AO$:

$$A_1O = \sqrt{A_1A^2 - OA^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

Тогда объем

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot A_1O = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = 64\sqrt{2} \text{ (куб. ед.).}$$

Ответ: $32(2 + \sqrt{2})$ кв.ед.; $64\sqrt{2}$ куб.ед.

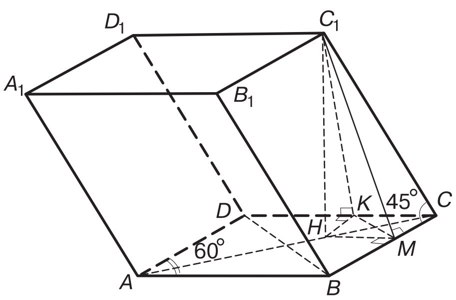

Рис. 2.

Учитель может расширить перечень частных видов призм и параллелепипедов. Так, например, можно рассказать учащимся о наклонном параллелепипеде, боковое ребро которого образует равные углы с пересекающимися с ним ребрами основания: в этом случае конец данного ребра, являющийся вершиной верхнего основания параллелепипеда, ортогонально проектируется на биссектрису угла, образованного этими ребрами основания.

Рассмотрим, к примеру, следующую задачу.

Задача 2. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной, равной 6, и острым углом в 60°. Найдите объем параллелепипеда, если его боковые грани — ромбы с острым углом в 45°.

Решение. Пусть дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2), в котором $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle C_1CB = \angle C_1CD = 45^\circ$; C_1M и C_1K — высоты боковых граней параллелепипеда, C_1H — его высота.

Так как боковые грани — ромбы, то $C_1C = BC = 6$. Причем в равнобедренных прямоугольных треугольниках C_1CM и C_1CK имеем: $CM = CK = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

По теореме о трех перпендикулярах $HM \perp BC$, $HK \perp CD$, причем $HM = HK$ (как проекции равных наклонных C_1M и C_1K). Это означает, что точка H — основание высоты C_1H параллелепипеда — принадлежит биссектрисе угла BCD, т. е. диагонали AC ромба $ABCD$.

В прямоугольном $\triangle CMH$ ($CM \perp HM$) находим:

$$CH = \frac{CM}{\cos 30^\circ} = 3\sqrt{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6},$$

тогда в прямоугольном $\triangle C_1CH$ ($C_1H \perp HC$) получаем:

$$C_1H = \sqrt{C_1C^2 - CH^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$V = AB^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot C_1H = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 108 \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ: 108 куб.ед.

Следующим видом многогранников является *пирамида.* Необходимо помнить, что *двугранным углом при ребре пирамиды называют содержащий эту пирамиду двугранный угол, образованный плоскостями тех граней, в которых расположено данное ребро.*

Изучая пирамиду, стоит особо остановиться на треугольных пирамидах — тетраэдрах. Следует рассмотреть тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке (*ортоцентрический тетраэдр*), и тетраэдр, все грани которого — равные треугольники (*равногранный тетраэдр*). Правильный тетраэдр является равногранным и ортоцентрическим.

Необходимо рассмотреть и изобразить некоторые частные виды пирамид: а) пирамиду, все боковые ребра которой образуют равные углы с плоскостью ее основания; вершина такой пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около ее основания; б) пирамиду, все двугранные углы которой при ребрах основания равны между собой; ортогональной проекцией вершины такой пирамиды на ее основание является центр окружности, вписанной в это основание; в) пирамиду, имеющую боковые грани, перпендикулярные плоскости ее основания.

Учитель сам может расширять перечень частных видов пирамид и рассказать: а) о пирамиде, боковое ребро которой образует равные углы с пересекающимися с ним ребрами основания; ортогональная проекция вершины такой пирамиды на ее основание принадлежит биссектрисе угла, образованного этими ребрами основания; б) о пирамиде, два боковых ребра которой равны между собой; вершина такой пирамиды проектируется на серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего основания равных боковых ребер.

Следует вырабатывать у учащихся привычку начинать изображения частных видов пирамиды с изображения их оснований. Если при этом все боковые ребра (все боковые грани) пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то сначала необходимо построить изображение центра окружности, описанной около основания (вписанной или вневписанной в него), и только после этого из построенного центра провести перпендикуляр к плоскости многоугольника и выбрать на этом перпендикуляре в качестве вершины пирамиды любую точку, отличную от центра многоугольника.

Рассмотрим решение задачи о пирамиде одного из перечисленных видов.

Задача 3. Два боковых ребра треугольной пирамиды и заключенная между ними сторона основания равны соответственно 12 дм, 18 дм и 18 дм. Найдите объем пирамиды, если все ее боковые грани образуют равные двугранные углы с плоскостью основания, а высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$ дм.

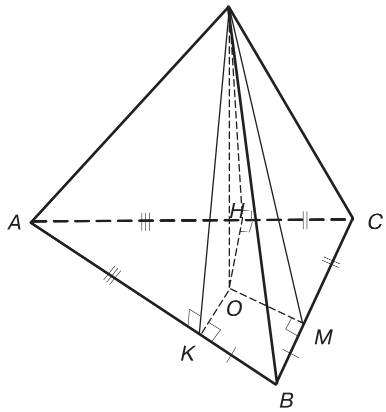

Рис. 3.

Решение. Пусть $AP = AB = 18$, $BP = 12$, $PO = 6\sqrt{3}$ — высота пирамиды $PABC$ (рис. 3).

Проведем высоты PK, PM и PH граней соответственно PAB, PBC и PAC. Из $PK \perp AB$, $PM \perp BC$, $PH \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах следует: $OK \perp AB$, $OM \perp BC$, $OH \perp AC$. Тогда $\angle OKP = \angle OMP = \angle OHP$ (как линейные углы равных двугранных углов при ребрах AB, BC и AC). Это означает, что прямоугольные треугольники OKP, OMP и OHP равны, откуда: $OK = OM = OH$; $PK = PM = PH$. Получили: основание O высоты PO пирамиды равноудалено от всех сторон треугольника ABC, поэтому точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC и $OK = R$, где R — радиус этой окружности.

Так как точки K, M и H являются точками касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности, то $AK = AH$, $BK = BM$, $CH = CM$ (по свойству отрезков касательных к окружности). Найдем длины сторон AC и BC.

В треугольнике ABP находим: $PK = \frac{2S_{\triangle ABP}}{AB} = \frac{2\sqrt{24\cdot12\cdot6\cdot6}}{18} = 8\sqrt{2}$. Тогда в прямоугольном $\triangle APK$ по теореме Пифагора: $AK = \sqrt{AP^2 - PK^2} = \sqrt{18^2 - (8\sqrt{2})^2} = 14$. Значит, $AH = AK = 14$ и $BK = AB - AK = 4 = BM$. Кроме того, в прямоугольном $\triangle OPK$ по теореме Пифагора: $OK = \sqrt{PK^2 - OP^2} = \sqrt{128 - 108} = 2\sqrt{5} = R$.

Если $CM = CH = x$, то периметр треугольника ABC равен:

$$P_{\triangle ABC} = 18 + (14 + x) + (4 + x) = 2\cdot(18 + x);$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(x+18)(x+18-18)(x+18-(x+14))(x+18-(x+4))} = \\ = \sqrt{(x+18)\cdot x\cdot 4\cdot 14} = 2\sqrt{14x(x+18)}.$$

Тогда

$$R = \frac{2S\triangle_{ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\cdot 2\sqrt{14x(x+18)}}{2\cdot(18+x)} = \frac{2\sqrt{14x(x+18)}}{18+x} = 2\sqrt{5}$$

или

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{14x(x+18)}}{x+18} = \frac{\sqrt{14x}}{\sqrt{x+18}} \quad\Rightarrow\quad 5(x+18) = 14x \quad\Rightarrow\quad x = 10.$$

Тогда $BC = 14$, $AC = 24$.

Теперь находим объем V пирамиды:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PO = \frac{1}{3}\cdot \quad 2\sqrt{14\cdot 10\cdot(10+18)}\cdot 6\sqrt{3} = 112\sqrt{15}\ (\text{дм}^3).$$

Ответ: $112\sqrt{15}$ дм^3.

Необходимо в число решаемых включать задачи о четырехугольных пирамидах, в основании которых лежат не только параллелограммы, прямоугольники, квадраты, но и трапеции.

Задача 4. Основанием пирамиды $PABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$); все двугранные углы при ребрах ее основания равны. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее объем равен 3200 см^3, $AB = 32$ см, $CD = 18$ см.

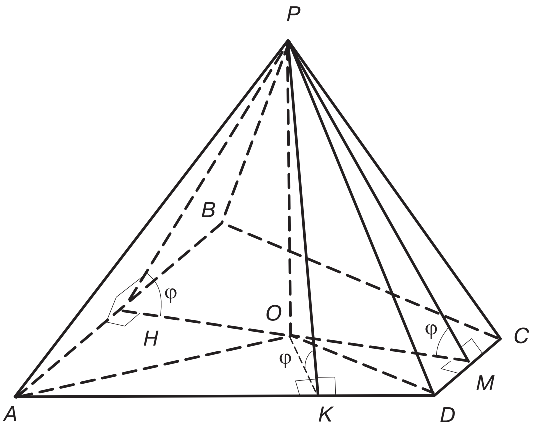

Рис. 4.

Решение. Так как все двугранные углы при ребрах основания пирамиды $PABCD$ равны, то основание высоты PO пирамиды совпадает с центром O окружности, вписанной в трапецию $ABCD$; точка O является серединой отрезка HM, соединяющего середины оснований трапеции. Обозначим: $\varphi = \angle OKP = \angle OMP = \angle OHP$ — линейные углы двугранных углов при ребрах основания пирамиды, где $MH \perp AB$, $OK \perp AD$ (рис. 4).

$PO \perp (ABC)$, значит, прямая PO перпендикулярна любой прямой плоскости основания пирамиды.

Так как H, M и K — точки касания вписанной в трапецию $ABCD$ окружности, то: $AK = AH = \frac{1}{2}AB = 16$; $KD = DM = \frac{1}{2}CD = 9$. Значит, $AD = AK + KD = 16 + 9 = 25$.

В прямоугольном треугольнике AOD находим: $OK = \sqrt{AK\cdot KD} = \sqrt{16\cdot 9} = 12$. Значит, высота MH трапеции равна $2OK = 24$, а ее площадь равна

$$\frac{CD + AB}{2}\cdot MH = \frac{18+32}{2}\cdot 24 = 600.$$

Используя формулу объема пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot PO$, имеем: $3200 = \frac{1}{3} \cdot 600 \cdot PO$, откуда $PO = 16$. В прямоугольном $\triangle OMP$: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{OP}{OM} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}6$.

Так как боковые грани пирамиды проектируются в треугольники AOB, BOC, COD и DOA, составляющие это основание, то

$$S_{\text{осн.}} = S_{\text{бок.}} \cdot \cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi} = \frac{600}{0{,}6} = 1000 \ (\text{см}^2).$$

Ответ: 1000 см^2.

Для решения многих задач требуется изобразить многогранник, который явным образом задан условием задачи. Этим многогранником может быть: прямоугольный (наклонный) параллелепипед, наклонная (прямая) призма, правильная пирамида и другие их виды. Однако, для развития пространственного воображения при решении задач необходимо предлагать учащимся такие задачи, для решения которых они должны самостоятельно «мысленно сконструировать», представить, а затем изобразить со всеми обоснованиями многогранник, удовлетворяющий условиям задачи.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. Основаниями треугольной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ являются правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, стороны которых равны соответственно 12 и 4. Найдите длины боковых ребер этой усеченной пирамиды, если вершина A_1 удалена на расстояние 8 от каждой из вершин основания ABC.

Решение. Сначала следует проанализировать «устройство» данной усеченной пирамиды. Пусть точка O — центр основания ABC, M — середина BC, M_1 — середина B_1C_1.

Вершина A_1 равноудалена от каждой из вершин основания ABC, значит, $A_1O \perp$ $\perp (ABC)$ (рис. 5), откуда $A_1O \perp BC$. Кроме того, $AM \perp BC$ (как медиана правильного треугольника ABC). Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $(A_1AM) \perp BC$. Тогда в силу $BC \parallel B_1C_1$ получаем: $(A_1AM) \perp B_1C_1$, при этом плоскость A_1OM проходит через середину M_1 отрезка B_1C_1, так как $A_1 \in (A_1AM)$ и $A_1M_1 \perp B_1C_1$.

Далее, так как $A_1M_1 = 2\sqrt{3}$ и $OM = 2\sqrt{3}$, то $A_1M_1 = OM$, значит, четырехугольник A_1M_1MO — параллелограмм. А так как $A_1O \perp (ABC)$, то A_1M_1MO — прямоугольник, поэтому $M_1M \perp (ABC)$, откуда плоскость грани BB_1C_1C перпендикулярна плоскости ABC и плоскости A_1AM (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

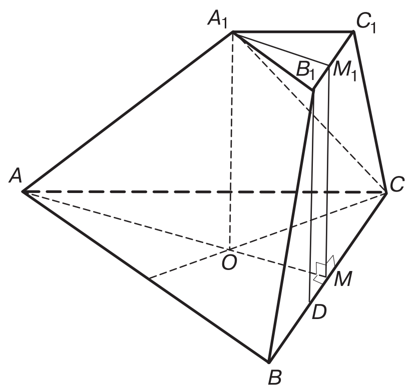

Рис. 5.

Теперь найдем длины боковых ребер B_1B и C_1C.

В прямоугольном $\triangle A_1AO$:

$$M_1M = A_1O = \sqrt{A_1A^2 - OA^2} = \sqrt{8^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4.$$

Так как $B_1C_1 = \frac{1}{3}BC$, то $B_1M_1 = \frac{1}{3}BM$, и если $MD = B$ $B_1M_1 = 2$, то $BD = BM - MD = 6 - 2 = 4$. Тогда в прямоугольном $\triangle BB_1D$ находим: $B_1B = \sqrt{B_1D^2 + BD^2} = 4\sqrt{2}$. А так как BB_1C_1C — равнобедренная трапеция, то $CC_1 = B_1B = 4\sqrt{2}$.

Таким образом, боковые ребра данной усеченной пирамиды равны 8, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$.

Ответ: 8, $4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$.

Следует особое внимание уделить решению задач, в которых необходимо строить сечение многогранника с полным аргументированным обоснованием каждого «шага» построения, после чего найти площадь этого сечения.

Уровень сложности задач на построение сечений многогранников следует повышать как «находясь внутри одного вида многогранников», так и при переходе от одного их вида к другому (от призм и параллелепипедов — к пирамидам).

В профильных классах (и при дифференцированном методе обучения в общеобразовательных классах) полезно решать интересные и красивые задачи, подобные следующей.

Задача 6. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через его центр и перпендикулярной диагонали куба. Найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно 6.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб, точка M — середина его диагонали A_1C, α — плоскость, проходящая через M перпендикулярно A_1C (рис. 6).

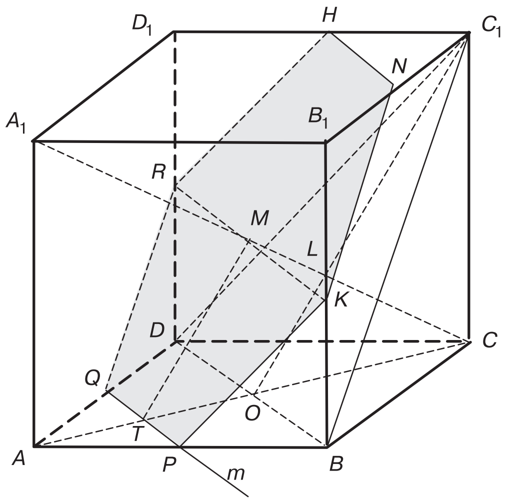

Рис. 6

Ортогональной проекцией диагонали A_1C на плоскость ABC является диагональ AC основания $ABCD$, перпендикулярная BD. Значит, $A_1C \perp BD$ (по теореме о трех перпендикулярах). Аналогично, $A_1C \perp C_1B$. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1C \perp (BC_1D)$, откуда $A_1C \perp C_1O$. Обозначим: $L = A_1C \cap (BC_1D) = A_1C \cap C_1O$.

Заметим, что $A_1C = 6\sqrt{3}$, $MC = 0{,}5A_1C = 3\sqrt{3}$, $AC = 6\sqrt{2}$, $OC = 3\sqrt{2}$. Из подобия прямоугольных треугольников OCL и A_1CA имеем:

$$OC : A_1C = CL : CA \qquad \Rightarrow \qquad CL = \frac{OC \cdot CA}{A_1C} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда $ML = MC - CL = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Значит, $ML : LC = 1 : 2$.

Так как $\alpha \perp A_1C$ и $(BC_1D) \perp A_1C$, то $\alpha \parallel (BC_1D)$, значит, прямая $m = \alpha \cap (ABC)$ параллельна BD (по теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью), причем α пересекает AC в такой точке T, что $TO : OC = ML : LC = 1 : 2$. Учитывая при этом, что $OA = OC$, приходим к выводу: точка $T = \alpha \cap AC$ является серединой отрезка OA.

Таким образом: $T \in m$, T — середина OA и $m \parallel BD \Rightarrow$ точки $P = m \cap AB = \alpha \cap AB$ и $Q = m \cap AD = \alpha \cap AD$ являются серединами ребер AB и AD (по теореме Фалеса). Точки P и Q — вершины искомого сечения.

Дальнейшее построение сечения можно осуществлять, используя параллельность плоскостей $\alpha \parallel (BC_1D)$, а также параллельность противоположных граней куба и теорему о пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Действительно, так как $\alpha \parallel (BC_1D)$, а также грань ABB_1A_1 параллельна грани CDD_1C_1 и точка P — середина AB, то пересечением плоскости α и грани ABB_1A_1 является отрезок $PK \parallel DC_1 \parallel AB_1$, где K — середина ребра BB_1; точка K — вершина сечения.

Аналогично, пересечением плоскости α и грани ADD_1A_1 является отрезок $QR \parallel$ $\parallel BC_1 \parallel AD_1$, где R — середина ребра DD_1; точка R — вершина сечения. Далее проводим отрезки $RH \parallel DC_1$ (H — середина C_1D_1) и $KN \parallel BC_1$ (N — середина B_1C_1). Точки H и N — вершины сечения.

Таким образом, искомым сечением куба является правильный шестиугольник $PQRHNK$, сторона которого равна половине диагонали грани куба, т. е. $PK = 3\sqrt{2}$. Площадь этого сечения равна $6 \cdot \frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $27\sqrt{3}$ кв. ед.

Задача 7. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость β, перпендикулярная противоположной грани и пересекающая ее. Найдите площадь сечения, если секущая плоскость β образует с плоскостью основания угол α, а высота пирамиды равна h.

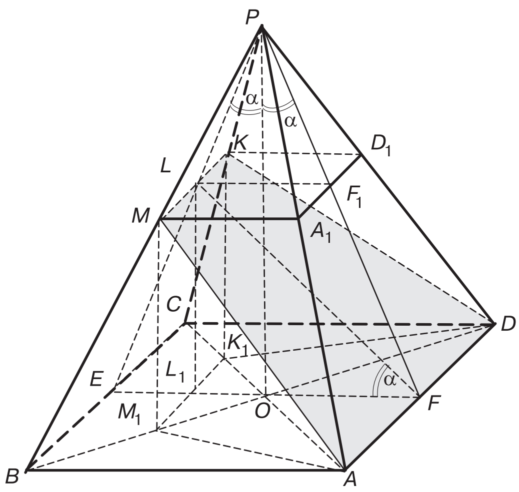

Рис. 7.

Решение. Пусть $PABCD$ — правильная пирамида (рис. 7); $PO = h$ — высота пирамиды; точки E и F — середины ребер BC и AD.

Построим сечение данной пирамиды плоскостью β, проведенной через ребро AD перпендикулярно грани BCP.

Так как $AD \parallel BC$, то по признаку параллельности прямой и плоскости $AD \parallel (BCP)$. Значит, отрезок MK, по которому плоскость β пересекает грань BCP, параллелен AD (по теореме о прямой пересечения двух плоскостей, одна из которых проходит через прямую, параллельную другой). Таким образом, сечением данной пирамиды плоскостью β является трапеция $ADKM$.

Имеем: $EF \perp BC$; $PE \perp BC$ (как медиана равнобедренного $\triangle BPC$) $\Rightarrow BC \perp (EFP)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow (BCP) \perp (EFP)$ (по признаку перпендикулярности плоскостей).

Обозначим: $FL = \beta \cap (EFP)$, $MK = \beta \cap (BCP)$. Так как $AD \parallel BC$, $BC \perp (EFP)$, то $AD \perp (EFP)$, откуда $AD \perp FL$, $AD \perp FE$. Значит, $\angle EFL = \alpha$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью β и плоскостью основания пирамиды.

Так как $\beta \perp (BCP)$, $(EFP) \perp (BCP)$, то $FL \perp (BCP)$. Тогда по определению прямой, перпендикулярной плоскости, $FL \perp PE$ и $\mathrm{FL} \perp MK$, при этом $L = PE \cap MK$ и $MK \parallel AD$ (так как плоскости BCP и β проходят через параллельные прямые BC и AD). Значит, сечение $ADKM$ — равнобедренная трапеция, у которой FL — высота (L — середина MK). Найдем S_{ADKM}.

Пусть M_1, K_1, L_1 — ортогональные проекции на плоскость основания соответственно точек M, K, L, при этом L_1 — середина M_1K_1. Ортогональными проекциями прямых PC, PB и PE на эту плоскость являются соответственно прямые AC, BD и EF. Следовательно, $M_1 \in BD$, $K_1 \in AC$, $L_1 \in EF$. Таким образом, равнобедренная трапеция ADK_1M_1, диагонали AK_1 и DM_1 которой взаимно перпендикулярны, является ортогональной проекцией сечения $ADKM$ на плоскость основания. Это означает, что $S_{ADKM} = \frac{S_{ADK_1M_1}}{\cos\alpha}$. Найдем $S_{ADK_1M_1}$.

Так как диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, то прямоугольные треугольники OK_1L_1 и OFD — равнобедренные, значит, $OL_1 = L_1K_1$, $OF = FD$. Поэтому

$$S_{ADK_1M_1} = \frac{AD + K_1M_1}{2} \cdot L_1F = \frac{2OF + 2OL_1}{2} \cdot FL_1 = FL_1^2.$$

Тогда $S_{ADKM} = \frac{FL_1^2}{\cos\alpha}$. Найдем L_1F.

В прямоугольном $\triangle L_1FL$: $L_1F = LF \cdot \cos\alpha$. Так как $FL \perp PE$, $EF \perp OP$, то $\angle OPE = \angle EFL = \alpha$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Тогда в $\triangle OPE$: $OE = OP \cdot \operatorname{tg}\alpha = h \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Значит, $EF = 2OE = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Поэтому в прямоугольном $\triangle EFL$:

$$FL = EF \cdot \cos\alpha = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = 2h \cdot \sin\alpha.$$

Следовательно, $L_1F = LF \cdot \cos\alpha = 2h \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Таким образом, получаем:

$$S_{ADKM} = \frac{FL_1^2}{\cos\alpha} = \frac{4h^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = 4h^2 \sin^2\alpha \cos\alpha.$$

Замечание. Площадь сечения можно найти иначе: $S_{\text{сеч}} = \frac{AD+MK}{2} \cdot FL$. Отрезок MK можно найти следующим образом. Сечением данной пирамиды плоскостью, проходящей через прямую MK параллельно основанию пирамиды, является квадрат MKD_1A_1 (рис. 7); $F_1 = A_1D_1 \cap PF$. У этого квадрата $LF_1 = MK$. Найдем F_1L.

В треугольнике LFF_1 имеем $\angle FLF_1 = \alpha$ ($LF_1 \parallel EF$); $\angle FF_1L = 90^\circ + \alpha$, как смежный с $\angle LF_1P = 90^\circ - \alpha$;

$$\angle F_1FL = \angle OFP - \angle OFL = (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha.$$

Тогда в $\triangle LF_1F$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{LF_1}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{LF}{\sin(90^\circ + \alpha)} \quad \Rightarrow \quad LF_1 = \frac{LF\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2h \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Значит, $MK = LF_1 = 2h \operatorname{tg}\alpha \cos 2\alpha$. Учитывая, что $AD = EF = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$, получаем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{AD + MK}{2} \cdot FL = \frac{2h \cdot \operatorname{tg}\alpha + 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 2\alpha}{2} \cdot 2h \cdot \sin\alpha = \\ = \frac{2h \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot (1 + \cos 2\alpha) \cdot 2h \cdot \sin\alpha}{2} = 4h^2 \sin^2\alpha \cos\alpha \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $4h^2 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$ кв.ед.

Задачи, аналогичные разобранным в тексте данной статьи, можно найти в задачнике [2]. Это, например, задачи: 2.006-2.019, 2.021-2.030, 2.035-2.039, 2.043-2.057, 2.062-2.068, 2.073-2.089, 2.190-2.200, 2.205-2.225, 2.231-2.248, 2.253-2.273, 2.295-2.317, 2.320-2.330, 2.350-2.359, 2.384-2.389, 2.395-2.403.

Литература

[1] Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003–2009.

[2] Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2003–2009.

Потоскуев Евгений Викторович,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Тольяттинского государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук,
Почетный работник общего образования РФ.

Email: potoskuev@pisem.net

Сведение задачи оптимизации с дробно-линейным функционалом к аналогичной задаче с линейным функционалом

В. Г. Мотанов

Задаче оптимизации дробно-линейной функции с линейными ограничениями посвящена значительная литература, см., например, [1]. Однако, только в [2] было замечено, что более общая задача оптимизации с дробно-линейным функционалом и любыми ограничениями, с точки зрения проективной геометрии, фактически равносильна задаче оптимизации с линейным функционалом. В отличие от [2], в настоящей статье задача оптимизации с дробно-линейным функционалом будет переведена в задачу с линейным функционалом таким проективным преобразованием, которое сохраняет условие неотрицательности переменных, обычно налагаемое на множество ограничений.

Рассмотрим следующую задачу: максимизировать

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j y_j + a_{n+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j + b_{n+1}} \tag{1}$$

при ограничениях

$$f_k(y_1, y_2, ..., y_n) \leq B_k, \ \ (k = 1, 2, ..., m), \tag{2}$$

$$y_j \geq 0, (j = 1, 2, ..., n). \tag{3}$$

Обозначим множество решений неравенств (2),(3) через M. Если знаменатель функции (1) в точках множества M обращается в 0, то функция (1) не ограничена на множестве M ни сверху, ни снизу. В этом случае задача (1), (2), (3) тривиальна. Поэтому предположим, что знаменатель в точках множества M не обращается в 0. Задачу (1), (2), (3) при этом предположении будем называть задачей D. Оказывается, что с точки зрения проективной геометрии задача D эквивалентна задаче оптимизации с линейным функционалом, которую будем называть задачей L. Точнее, всегда найдется некоторое проективное преобразование пространства $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$, переводящее задачу D в задачу L, причем это преобразование не разрывает множество M, так как гиперплоскость, переходящая в бесконечно удаленную гиперплоскость, не проходит через внутренние точки множества M. В частности, если ограничения (2) линейны, то задача D будет задачей дробно-линейного программирования, которую для краткости будем называть задача DL. В этом случае проективное преобразование переводит многогранное множество M снова в многогранное множество, поскольку гиперплоскость, переходящая в бесконечно удаленную гиперплоскость, не проходит через внутренние точки множества M. В этом случае задача DL эквивалентна задаче линейного программирования, которую для краткости будем называть задачей LL. По той же причине, если ограничения (2) выпуклы, то задача D в этом случае будет эквивалентна задаче выпуклого программирования с линейном функционалом.

Покажем, что с точки зрения проективной геометрии задача D эквивалентна задаче L. Для этого сначала покажем, что любое проективное преобразование, переводящее гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y_j + b_{n+1} = 0 \tag{4}$$

в бесконечно удаленную гиперплоскость, "выпрямляет" дробно-линейную функцию (1), т.е. переводит дробно-линейную функцию (1) в линейную функцию.

Подействуем проективным преобразованием

$$y_j = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} d_{ij} y_i' + d_{j,n+1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i y_i' + d_{n+1}} \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{5}$$

на гиперплоскость (4). Получим

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} d_{ij} y_i' + d_{j,n+1} \right) + b_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} d_i y_i' + d_{n+1} \right) = 0$$

или, меняя порядок суммирования,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j d_{ij} + b_{n+1} d_i \right) y_i' + \sum_{j=1}^{n} b_j d_{j,n+1} + b_{n+1} d_{n+1} = 0.$$

Проективным преобразованием (5) гиперплоскость (4) переводится в бесконечно удаленную гиперплоскость тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} b_j d_{ij} + b_{n+1} d_i = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Но в этом случае, если $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j d_{j,n+1} + b_{n+1} d_{n+1} \neq 0$, то очевидно, что дробно-линейная функция (1) переходит в линейную, т.е. задача D переходит в задачу L. Указанных проективных преобразований существует бесконечно много. Возникает задача нахождения наиболее простого такого преобразования. Критерии простоты при этом возможны различные. Важным критерием простоты является сохранение структуры ограничений (2), (3), т.е. сохранение как числа ограничений вида (2), так и числа ограничений вида (3). Будем искать такое проективное преобразование (5), которое ограничения (3) переводит в ограничения такого же вида, т.е. в ограничения

$$y_j' \geq 0, \ (j = 1, 2, ..., n). \tag{6}$$

Сначала покажем, что этого всегда можно добиться, если $b_{n+1} \neq 0$. Действительно, рассмотрим проективное преобразование вида:

$$y_j = \frac{y_j'}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i y_i' + d_{n+1}}, \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{7}$$

Подействуем этим преобразованием на гиперплоскость (4). Получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left(b_j \frac{y_j'}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i y_i' + d_{n+1}} \right) + b_{n+1} = 0, \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{8}$$

Преобразование (7) переводит бесконечно удаленную гиперплоскость в гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i' + d_{n+1} = 0 \tag{9}$$

На внутренних точках множества M' (в которое переводится множество M преобразованием (7)) левая часть (9) отлична от нуля. Поэтому на внутренних точках множества M' уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j y'_j + b_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i y'_i + d_{n+1}\right) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j + b_{n+1} d_j) y'_j + b_{n+1} d_{n+1} = 0.$$

Теперь выберем $d_j,\ (j = 1, 2, ..., n+1)$ такими, чтобы гиперплоскость (4) переводилась преобразованием (7) в бесконечно удаленную гиперплоскость. Полагая

$$d_j = -\frac{b_j}{b_{n+1}},\ (j = 1, 2, ..., n),\ d_{n+1} = 1 \tag{10}$$

добьемся этого. Кроме того, легко проверяется, что проективное преобразование

$$y_j = \frac{y'_j}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_{n+1}} y'_i}, \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{11}$$

переводит дробно-линейную функцию (1) в линейную функцию

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y'_j + \alpha_{n+1}, \tag{12}$$

где

$$\alpha_j = \frac{b_{n+1} a_j - a_{n+1} b_j}{b_{n+1}^2},\ (j = 1, 2, ..., n), \quad \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Ниже будет показано, что на множестве M' функция

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_{n+1}} y'_i \tag{$*$}$$

имеет один и тот же знак. Отсюда следует, что ограничения (3) при преобразовании (11) очевидно переходят или в ограничения (6), или в ограничения

$$y'_j \le 0,\ \ j = 1, 2, ..., n,$$

которые заменой y'_j на $-y'_j$ перейдут в ограничения вида (6).

Пусть ограничения (2), (3) преобразованием (11) переводятся в следующие ограничения

$$\varphi_k(y'_1, y'_2, ..., y'_n) \le \beta_k,\ (k = 1, 2, ..., m) \tag{13}$$

$$y'_j \ge 0,\ (j = 1, 2, ..., n). \tag{3'}$$

Очевидно, что максимумы (минимумы) функции (1) на множестве M и функции (12) на множестве M' одинаковы. Таким образом, в случае $b_{n+1} \ne 0$, задача D проективным преобразованием координат (11) переводится в следующую эквивалентную задачу L: максимизировать линейную функцию (12) на множестве M', определяемом неравенствами (13), (3′). При этом существенно, что за счет специального выбора проективного преобразования ограничения (2), (3) переходят в ограничения такого же типа (13), (3′). В частности, если ограничения (2) линейны, то ограничения (13) также будут линейными. В этом случае задача (1), (2), (3) является задачей дробно-линейного программирования и проективным преобразованием (11) она переводится в задачу линейного программирования (12), (13), (3′) с сохранением структуры ограничений (2), (3).

После определения оптимального решения полученной задачи (12), (13), (3′) в штрихованных координатах с помощью формул (11) выразим это решение в исходных координатах.

Остался нерешенным вопрос об определении знака функции (*) на точках множества M'. Покажем, что этот знак однозначно определяется знаком знаменателя функции (1) на точках множества M и знаком числа b_{n+1}. Для этого необходимо воспользоваться преобразованием, обратным к преобразованию (11). Найдем это преобразование. Из (11) вытекает, что для любых $i,\ j = 1, 2, ..., n$.

$$\frac{y'_j}{y_j} = \frac{y'_i}{y_i} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_{n+1}} y'_i.$$

Отсюда

$$y'_j y_i = y_j y'_i,\ \ (i, j = 1, 2, ..., n)\,. \tag{15}$$

Далее, из (11) имеем

$$b_{n+1} y'_j = y_j \left(b_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} b_i y'_i \right) = b_{n+1} y_j - \sum_{i=1}^{n} b_i y_j y'_i,\ \ (j = 1, 2, ..., n)\,.$$

Отсюда, в силу (15)

$$b_{n+1} y'_j = b_{n+1} y_j - \sum_{i=1}^{n} b_i y_j y'_i,\ \ (j = 1, 2, ..., n)$$

или

$$(b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i) y'_j = b_{n+1} y_j,\ \ (j = 1, 2, ..., n)\,.$$

Следовательно,

$$y'_j = \frac{b_{n+1} y_j}{b_{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i y_i}, \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (*), после несложных преобразований получим

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{b_{n+1}} y'_i = \frac{b_{n+1}}{b_{n+1} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j},$$

т.е. знак функции(*) совпадает со знаком выражения

$$\frac{b_{n+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} b_j y_j + b_{n+1}}.$$

Следовательно, если знаки знаменателя функции (1) на множестве M и числа b_{n+1} совпадают, то функция (*) положительна на множестве M'. В противном случае функция (*) на множестве M' отрицательна.

Случай b_{n+1}=0 сводится к рассмотренному случаю, например, с помощью линейного преобразования вида:

$$y'_i = y_i + \delta_{ij},\ (i = 1, 2, ..., n)\ ,\ \text{где}\ j,\ (1 \leq j \leq n)\ \text{такое, что}\ b_j \neq 0,\ \text{а}\ \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ i \neq j \\ 1, & \textit{если}\ i = j \end{cases}.$$

С целью иллюстрации изложенной теории рассмотрим элементарный пример.

Пусть требуется максимизировать дробно-линейную функцию

$$f\,(y_1, y_2) = \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2 + 1}$$

на множестве M

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - 2 \leq 0 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Согласно общей теории, эта задача дробно-линейного программирования проективным преобразованием

$$y_1 = \frac{y'_1}{1 - y'_1 - y'_2} \tag{17}$$

$$y_2 = \frac{y'_2}{1 - y'_1 - y'_2}. \tag{18}$$

переводится в следующую задачу линейного программирования: максимизировать линейную функцию

$$\varphi(y'_1, y'_2) = y'_1 - y'_2$$

на множестве M'

$$\begin{array}{l} 4y'_1 + 3y'_2 - 2 \leq 0, \\ y'_1 \geq 0, \\ y'_2 \geq 0. \end{array}$$

Легко убедиться, что максимальное решение последней задачи достигается в точке $y'_1 = \frac{1}{2},\ y'_2 = 0$ и $\varphi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}$. Этому решению соответствует следующее максимальное решение исходной задачи дробно-линейного программирования $y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ f\,(1, 0) = \frac{1}{2}$, которое вычисляется по формулам (17), (18).

Литература

1. М. Базара, К. Шетти. Нелинейное программирование, Москва: “Мир”, 1982 г.

2. Мотанов В.Г. О задачах оптимизации с дробно-линейным функционалом // Экономика и математические методы, №4, 1971 г.

Мотанов Валерий Григорьевич,
доцент кафедры высшей математики
Московского государственного
университета природообустройства,
кандидат технических наук.

Из истории математики

Основополагающие понятия лейбницева исчисления[1]

Хенк И. М. Бос

Предлагаемая вниманию читателя статья представляет собой доклад на симпозиуме «300-летие работы Г. В. Лейбница 'Nova Methodus' (1684–1984)», см. сноску к заголовку. В ней показано, что построенное Лейбницем исчисление дифференциалов, основанное на понятиях переменной и прогрессии переменной (в отличие от понятия функции, лежащего в основе современного математического анализа) являлось логически стройной, практически значимой и эстетически совершенной теорией. Ранее статья напечатана в журнале "Математика в высшем образовании", №2, 2004 г. Настоящая публикация осуществлена с разрешения редакции указанного журнала.

Введение

Мы празднуем 300-летие появления первой статьи об исчислении бесконечно малых[2]. В ней ещё содержалось много неясных высказываний и даже заблуждений[3]. Однако к 1684 г. у Лейбница уже сложилось чёткое представление об этом исчислении. Это представление я и обозначаю выражением «лейбницево исчисление». «Изобретение» или «открытие» Лейбницем исчисления бесконечно малых обычно датируется 1675 г.[4], но основные понятия и идеи, сформулированные им поначалу, были существенно переработаны за девять лет, прошедших с момента открытия до первой публикации. Более поздние статьи самого Лейбница, а также братьев Бернулли, Лопиталя и других сделали это исчисление известным; оно быстро распространилось и стало применяться для решения самых разнообразных задач. С 1684 г. до 1720 г. основополагающие понятия лейбницева исчисления претерпели лишь незначительное изменение[5]. В этой статье я буду

[1]Доклад был представлен на симпозиуме «300-летие работы Г. В. Лейбница 'Nova Methodus' (1684–1984)», проходившем в г. Нордвикерхут (Нидерланды) в августе 1984. Опубликован в *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14 (Wiesbaden (Steiner Verlag), 1986), pp. 103–118.

[2]G.W. Leibniz, «Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus», *Acta Eruditorum.* октябрь 1684, pp. 467–473; также в G. W. Leibniz *Mathematische Schriften* (7 vols., ed. C. I. Gerhardt), Berlin and Halle, 1849–1853 (перепечатано Hildesheim 1961–1962), vol. 5, pp. 220-226.

[3]Ср. H.-J. Hess «Zur Vorgeschichte der 'Nova Methodus»', *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14 (Wiesbaden (Steiner), 1986), pp. 64–102. См. также всесторонние и чрезвычайно полезные примечания в последнем итальянском издании *Memoda* P. Dupont'ом и C.S. Roero: *Leibniz 1684*, Torino (Fac. Sci. Mat. Fis. Nat., Univ. Torino; *Series Quaderni di Mathematica* 56), 1984.

[4]См. Hofmann, J. E., *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676)*, Munchen, 1949, pp. 118-130; Hofmann, J. E., *Leibniz in Paris 1672–1676* (перевод предыдущего издания), Cambridge, 1974, pp. 187–201; Baron, M. and Bos, H. J. M., *Newton and Leibniz* (Unit C3 of the Open University course AM 289 *History of Mathematics — origins and development of the calculus*), Milton Keynes (Open University Press), 197, pp. 35–46 и Bos, H. J. M. *Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition*, (Глава II опубликована в: *From calculus to set theory, and introductory history* (ed. I. Grattan Guinness), London, 1980), pp. 49–93, особенно pp. 60–70.

[5]Наиболее важное фундаментальное изменение лейбницева исчисления в ранний период состояло в переносе методов, развитых для решения одномерных задач (в основном работа с кривыми) на двумерные (семейства кривых, переменные с двумя степенями свободы, поверхности); см. S.B. Engelsman «Orthogonaltrajektorien im Prioritatsstreit zwischen Leibniz und Newton» *Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14 (Wiesbaden (Steiner) 1986), pp. 144–156, а также Engelsman, S.B. *Families of curves and the origins of partial differentiation*, Amsterdam a. o. (North-Holland Publ.), 1984.

иметь дело с этими основополагающими понятиями[6]. Моей целью будет показать характерные особенности лейбницева исчисления. Я попытаюсь сделать это, исследуя, в чём оно отличается от современного математического анализа.

Я собираюсь обсуждать вопросы понимания и техники в большей мере, нежели вопросы оснований. Другими словами, меня будет интересовать не то, *что* такое лейбницевы дифференциалы или суммы, а то, *как* их представляли себе и использовали Лейбниц и его первые последователи. Я полагаю, что такой подход сможет прояснить некоторые положения лейбницева исчисления, часто упускаемые из виду.

Ломаная с бесконечным числом вершин

Лейбниц неоднократно отмечал, что ключом к пониманию его исчисления служит представление о кривой как о ломаной с бесконечным числом вершин. К примеру, в 1684 г. он писал о своих геометрических методах:

> все они могут быть выведены из общего принципа, которым я пользуюсь при измерении криволинейных фигур: он состоит в том, что кривая линия может быть представлена как ломаная с бесконечным числом сторон.[7]

Чтобы пояснить концепцию кривой как ломаной с бесконечным числом вершин, я рассмотрю сначала тот случай (рис. 1), когда кривая приближается конечной ломаной $OABC$. Предположим, что вершины ломаной лежат на кривой. Для каждой из этих вершин рассмотрим ординату y, абсциссу x, длину дуги s, измеряемую от начала кривой, площадь Q между кривой, осью абсцисс и ординатой (называемую также «квадратурой» кривой), и вообще любую переменную, которая может быть определена в связи с этой кривой. Приближающая ломаная порождает таким образом последовательности переменных. Уже в своих ранних исследованиях Лейбниц специально интересовался той ролью, которую эти последовательности играют в двух основных задачах, связанных с кривыми: задаче о квадратурах и задаче о касательных. Он осознавал, что квадратуры связаны с суммами порождаемых последовательностей, а касательные — с их разностями. А именно: если ломаная выбрана таким образом, чтобы разность между последовательными значениями x была постоянно равна 1, то тогда сумма ординат даёт приближение для квадратуры, а разности между последовательными ординатами будут приближённо задавать наклон касательных в соответствующих точках кривой. В случае произвольных приближающих ломаных отношение сумм и разностей к квадратурам и касательным будет несколько более тонким, но по-прежнему удобным.

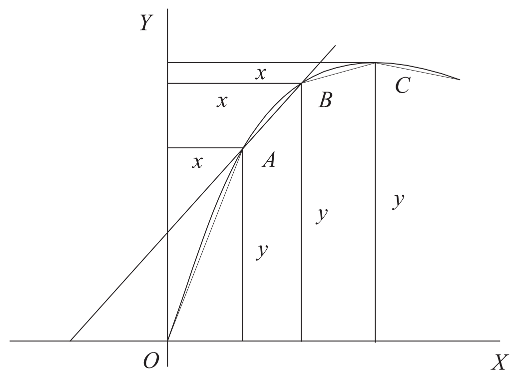

Рис. 1.

В ранних исследованиях числовых последовательностей Лейбниц рассматривал суммирование и получение разностей как операции, соответственно задающие для данной последовательности новые последовательности сумм и разностей, как это показано в табл. 1. Он отмечал также, что эти операции взаимообратны: построив последовательность разностей для последовательности сумм, мы восстановим исходную последовательность, и точно так же, взяв последовательность

[6] Я обсуждал эти вопросы более подробно в моей статье «Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus», *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1974, pp. 1–90; настоящая статья подводит итог некоторым частям этой работы, особенно главе II, pp. 12–35.

[7] «... omnes deduci posse ex generali quodam meo dimentiendorum curvilineo-rum principio, quod figura curvilinea censenda sit aequipollere Polygono infinitorum laterum». (Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1) vol. 5, p. 126). Цитата из статьи, опубликованной в *Acta Eruditorum* в декабре 1684 г.; Лейбниц отчасти ссылается на инфинитезимальный метод, опубликованный И. Х. Штурмом в мартовском номере этого же журнала за 1684 г.

сумм для последовательности разностей, мы опять получим члены исходной последовательности (за исключением a_1, если быть более точным).

Таблица 1

Последовательность: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,$	
последовательность сумм:	последовательность разностей:
$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ \ldots$	$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ \ldots$
где	где
$s_1 = a_1,$	$d_1 = a_2 - a_1,$
$s_2 = a_1 + a_2,$	$d_2 = a_3 - a_2,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3,$	$d_3 = a_4 - a_3,$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$	$d_4 = a_5 - a_4,$
и т. д.	и т. д.

Программа

Исходя из соответствия между свойствами кривых и последовательностей, Лейбниц сделал два важных интуитивных вывода:

- Изучение касательных и квадратур кривых приводит к рассмотрению последовательностей абсцисс, ординат и т. д.; касательные соответствуют разностям, квадратуры — суммам. Поскольку операции взятия последовательностей сумм и последовательностей разностей взаимообратны, задачи о касательных и квадратурах также являются взаимообратными.

- Если кривая приближается конечной ломаной, порождаемые последовательности доставляют приближения для квадратур и касательных. Эти приближения будут тем лучше, чем меньшими будут взяты разности соседних членов. И они станут точными, когда разности будут взяты бесконечно малыми (а соседние члены станут бесконечно близкими), то есть когда кривая будет рассматриваться как ломаная с бесконечным числом вершин.

Эти интуиции, сколь бы неясными они ни были, были объединены в программу, которую Лейбниц осознанно сформулировал в 1765 г. и которую он успешно осуществлял в последующие годы. Контуры этой программы таковы:

- Её цель состоит в создании исчисления квадратур, касательных и родственных задач, связанных с кривыми, которое представляло бы собой метод, основывающийся на формулах и правилах вычислений.

- Это исчисление касается последовательностей (ординат, абсцисс и других переменных) с бесконечно малыми разностями.

- Это исчисление содержит также операции над этими последовательностями, а именно операцию (с символом d), ставящую в соответствие данной последовательности её разностную последовательность, и операцию (с символом $\sum$), ставящую в соответствие данной последовательности последовательность её сумм. Первая операция используется для определения касательных, вторая — для определения квадратур.

- Операции d и $\sum$ взаимообратны.

Проиллюстрируем несколькими цитатами, как Лейбниц формулировал эти ранние программные идеи. В 1697 г. он писал Валлису:

> Рассмотрение разностей и сумм числовых последовательностей привело меня к моей первой догадке, когда я осознал, что разности относятся к касательным и суммы — к квадратурам[8].

В другом месте Лейбниц писал:

> *Основание анализа:* Разности и суммы обратны друг другу, так что сумма разностной последовательности есть член последовательности, и разность суммарной последовательности также есть член последовательности. Первое я обозначаю так: $\sum dx = x$; второе так: $d\sum x = x$. [9]

Экстраполяция конечной ломаной

Описанная выше программа была реализована в лейбницевом исчислении. Я хочу разъяснить это исчисление, обсуждая вопросы понимания и техники, с которыми Лейбниц столкнулся в работе над своей программой. Представим себе (вместе с Лейбницем), что произойдёт, когда конечная ломаная, приближающая кривую, совпадёт с кривой. Если мы визуализируем этот предельный процесс (рис. 2), это нам не многим поможет: разности между членами последовательности ординат и т. п. станут равны нулю, ординаты заполнят всю площадь между кривой и осью абсцисс, а от ломаной ничего не останется.

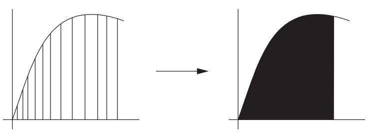

Рис. 2.

Один из способов справиться с этой проблемой состоит в том, чтобы представить предельный процесс локально (рис. 3). В каждой точке кривой секущая (продолжение стороны ломаной) становится касательной, и высота плоской полоски, ограниченной одним из звеньев ломаной, становится равной ординате. Этот локальный предельный процесс легко визуализировать и использовать; в действительности он является основным в современном математическом анализе, где производная определяется именно посредством этого процесса.

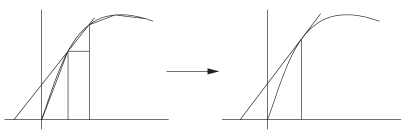

Рис. 3.

Однако Лейбниц не пользовался локальным приближением, предпочитая ему глобальное. Он не представлял себе переход от конечной ломаной к ломаной с бесконечным числом вершин как предельный процесс. В этом случае звенья и углы ломаной исчезли бы, и предельный процесс, как это объяснено выше, мог бы быть интерпретирован лишь локально. Лейбниц смотрел на этот переход скорее как на прямую экстраполяцию конечного случая на бесконечный. При этом сохраняются такие элементы ломаной, как стороны и углы, а также порождаемые последовательности. Глобальное изучение кривой по-прежнему возможно; лишь члены последовательностей становятся бесконечно близкими.

Конечно, трудно визуализировать ломаную с бесконечным числом вершин и порождаемые последовательности; проблема коллапса, изображённая на рис. 2, всё ещё сохраняется. Лейбниц разрешил, или скорее обошёл эту концептуальную проблему прежде всего отказом от рассмотрения того, что происходит с разностями и суммами самими по себе. Они становятся инфинитезимальными, однако Лейбниц старался избегать обсуждения природы инфинитезимальных

---

[8]«Mihi considerationern differentiarum et summarum in seriebus numerorum primam lucern affuderat, cum animadverterem differentias tangentibus, et summas quadraturis respondere». (письмо Лейбница Валлису 28.05.1697, Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1) vol. 4, p. 25).

[9]«Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt, hoc est summa differentiarum seriei est seriei terminus, et differentia summarum seriei est ipse seriei terminus, quorum illud ita enuntio: $\sum dx$ aequ. x; hoc ita; $d\sum x$ aeq. x» (из рукописи Лейбница *Elementa calculi novi pro differentiis el summis, tangentibus et quadraturis*, опубликованной C.I. Gerhardt'ом в *Die Geschichte der hyheren Analysis, erste Ableilung, die Entdeckung der höheren Analysis*, Halle 1855, pp. 149-155; цитата p. 153).

величин в своём исчислении. Скорее он изучал, что происходит с операциями взятия суммарных и разностных последовательностей после перехода к бесконечному случаю. Это смелый подход, и я считаю, что он характеризует математический стиль Лейбница, в частности — силу его абстракции.

Исследуя процесс прямой экстраполяции, зададимся вопросом, как преобразуются последовательности, порождаемые конечной ломаной. Представляя такую ломаную, мы фактически выделяем конечное число значений переменных, а именно тех, которые связаны с вершинами ломаной. Таким образом мы представляем каждую переменную пробегающей конечную последовательность значений. При переходе к ломаной с бесконечным числом вершин тем самым подразумевается, что переменная пробегает бесконечную последовательность бесконечно близких значений. И поскольку ломаная с бесконечным числом вершин теперь совпадает с кривой, не принимаются во внимание никакие значения переменной, кроме значений последовательности. Понятия последовательности и переменной теперь совпадают; переменная *и есть* пробегаемая ею последовательность.

Теперь рассмотрим операции, которые в конечном случае сопоставляют последовательностям значений переменной последовательности их разностей или их сумм. При переходе к бесконечному случаю эти операции, соответственно обозначаемые символами d и $\sum$, сопоставляют бесконечным последовательностям бесконечные последовательности. Но поскольку эти последовательности совпадают теперь с переменными как таковыми, d и $\sum$ становятся операциями, действующими над переменными и порождающими новые переменные. Операция d сопоставляет переменным x, y, s, Q и т. д. новые переменные, называемые их дифференциалами и обозначаемые dx, dy, ds, dQ и т. д. Эти дифференциалы суть переменные, они бесконечно малы, и они пробегают значения последовательности бесконечно малых разностей для соответствующей последовательности x, y, s и Q. Аналогично, операция $\sum$ ставит в соответствие переменным x, y, s, Q и т. д., новые переменные $\sum x$, $\sum y$, $\sum s$, $\sum Q$, являющиеся бесконечно большими.

Концепция переменных, пробегающих бесконечные последовательности бесконечно близких значений, и соответствующая концепция дифференциалов и сумм как новых переменных, является ключевой для понимания лейбницева исчисления. Она заметно отличается от ньютонова исчисления флюксий, основывающегося на принципиально иной концепции переменных, скорее протекающих по континууму значений, нежели пробегающих по последовательности.

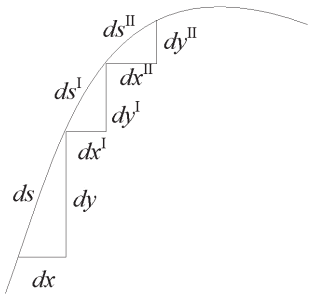

Рис. 4.

Поскольку дифференциалы являются переменными и поскольку операция d действует над переменными, она может быть приложена и к дифференциалам. Это приводит к дифференциалам высших порядков:

$$dx \xrightarrow{d} ddx$$

$$ds \xrightarrow{d} dds$$

и т. д.

Эти дифференциалы высших порядков определяются как разностные последовательности для разностных последовательностей первого порядка:

$$ddx = dx^I - dx,$$

(рис. 4), где dx^I и dx суть последовательные члены последовательности dx. Дифференциалы второго порядка вновь являются переменными; они бесконечно малы по сравнению с дифференциалами первого порядка.

Аналогично, операция $\sum$ может быть повторена несколько раз, что приведёт к суммам высшего порядка $\sum\sum x$, $\sum\sum y$, и т. д. В практике лейбницева исчисления эти бесконечно большие суммы и повторные суммы встречаются достаточно редко, потому что операция $\sum$ прилагается в основном к переменным, которые сами являются бесконечно малыми.

«Прогрессия переменных»

Я не буду обсуждать здесь правила для операции d, такие как $d(x + y) = dx + dy$, и т. п. С бо́льшим желанием я вернусь к частной проблеме, относящейся к концепциям переменных, дифференциалов и ломаных с бесконечным числом вершин, о которых шла речь выше.

Разрабатывая свою программу, Лейбниц столкнулся с особенной трудностью, а именно — с неопределённостью дифференциалов. Я смогу лучше всего пояснить эту трудность, задав следующий вопрос:

Имеет ли ломаная с бесконечным числом вершин равные звенья?

Очевидно, что мы не можем найти ответ, разглядывая эту ломаную, а стало быть — кривую. Мы должны (рис. 5) представить конечную ломаную, а затем совершить переход. Когда мы делаем это, становится ясно, что на вопрос невозможно ответить. Ломаные, приближающие кривую, могут иметь равные звенья (рис. 5, *а*), но это не обязательно; другие возможности, к примеру, таковы, что будут равными проекции звеньев на оси X или Y (рис. 5, *б* и *в*), и очевидно, что имеется много других возможностей для построения приближающих ломаных с неравными сторонами. Это означает, что понятие «ломаной с бесконечным числом вершин» приводит к неопределённости; мы не знаем *a priori*, от какой конечной ломаной был совершён предельный переход к бесконечноугольной ломаной; поэтому мы не знаем, как дифференциалы меняются вдоль кривой. Возможно, что все ds равны между собой, и тогда все dds будут равны нулю, а dx и dy будут изменяться, и тем самым ddx и ddy не будут равны нулю (в предположении что кривая не является прямой линией). Но может быть и так, что все dx равны между собой, и тогда $dds \neq 0$ и $ddx = 0$, и т. д.

Тем самым в лейбницевом исчислении поведение дифференциалов как меняющихся вдоль кривой переменных зависит от двух вещей:

- от природы кривой, и
- от природы бесконечноугольной ломаной.

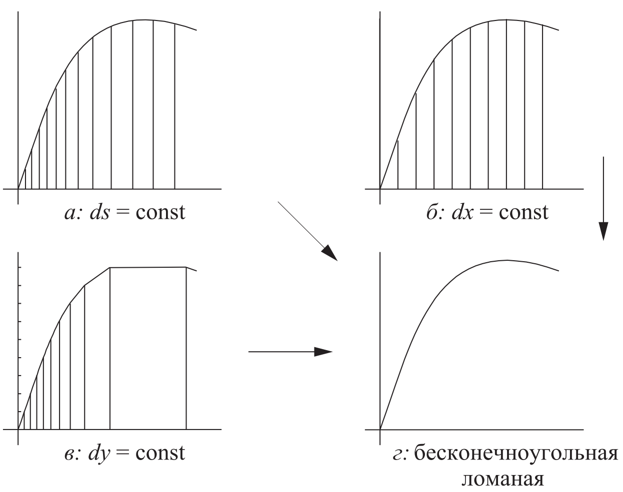

Рис. 5.

Пока природа бесконечноугольной ломаной не уточнена дополнительно, поведение дифференциалов остаётся неопределённым. Бесконечноугольная ломаная зависит от того, что Лейбниц называл «прогрессией переменных». Это выражение удачно выбрано, поскольку, к примеру, если dx фиксировано, переменные зависят или пробегают свои последовательности значений другим образом, чем если бы постоянным было ds.

Конечно, цель лейбницева исчисления состоит в определении дифференциалов как соотносящихся с природой кривой. Но это можно сделать лишь в том случае, если два вида поведения могут быть как-нибудь разделены. Мы рассмотрим сейчас, как это было сделано.

Неопределённость дифференциалов

Один из способов справиться с проблемой неопределённости дифференциалов состоит в том, чтобы раз и навсегда договориться о том, что дифференциалы одной выбранной переменной, к примеру дифференциалы dx абсциссы x, всегда будут считаться постоянными. Тогда приближающая ломаная всегда будет иметь форму, показанную на рис. 5, *б*. Для понимания лейбницева исчисления важно осознать, что Лейбниц не считал этот выход приемлемым. Он хотел сохранить свободу выбора приближающих ломаных, а ещё точнее — прогрессий переменных. Выбор одной переменной в качестве имеющей постоянные дифференциалы является совершенно произвольным; но в геометрических фигурах нет ничего такого, что вынуждало бы отдать эту привилегированную роль переменной x, а не переменной y или любой другой. Лейбниц рассуждал о возможности выбора различных прогрессий переменных так:

> При взятии сумм вовсе не обязательно, чтобы dx или dy были константами и $ddx = 0$, но можно выбрать прогрессию x или y (если кто-либо захочет принять y за абсциссу) такой, как захочется[10].

Поэтому Лейбниц не хотел исходно придавать одной из переменных специальную роль; он не хотел рассматривать остальные переменные всегда в их отношении к одной избранной переменной. Другими словами, он не рассматривал переменные как функции одной независимой переменной.

Я снова подчеркну тот факт, что переменные лейбницева исчисления не являются функциями; это одна из главных особенностей, отличающих это исчисление от развитых впоследствии форм математического анализа. В самом деле, когда концепция функции заняла центральную роль в позднейшем анализе, проблема независимости дифференциалов отпала[11].

Лейбниц решил проблему независимости дифференциалов иначе. Он методически развил приёмы и обозначения, позволяющие сохранять независимость и различать два рода изменяемости дифференциалов, один — специально для кривых, другой — порождаемый прогрессией переменных. Эти приёмы, обозначения и стоящая за ними исходная идея — бесконечноугольная ломаная — были восприняты и использовались первыми последователями Лейбница. Позднее они были забыты; можно сказать, что анализ заменил приёмы, переинтерпретировал обозначения и утратил исходную идею. Но эти аспекты существенны для понимания лейбницева исчисления; я хочу пояснить их здесь с помощью нескольких примеров.

Пример 1. Парабола

Рассмотрим параболу, заданную уравнением

$$ay = x^2.$$

Соотношения между дифференциалами первого и высших порядков для переменных x и y вдоль кривой описываются дифференциальными уравнениями. Эти уравнения принимают различные формы в зависимости от прогрессии переменных. К примеру, если dx предполагается постоянным, дифференциальные уравнения будут иметь вид:

$$\begin{gathered} ady = 2xdx \\ addy = 2(dx)^2 \\ ad^3y = 0 \\ ad^4y = 0 \\ \text{и т. д.} \end{gathered}$$

[10] «Es ist ganz nicht nötig dass die dx oder dy constantes und die $ddx = 0$ seyen, sondern man assumiert die progression der x oder y (welches man pro abscissa halten will) wie man es gut findet». (письмо Лейбница фон Боденхаузену, Leibniz, *Mathematische Schriften* (прим. 1), vol. 7, p. 387).

[11] «Differentials» (см. прим. 6) pp. 5–6 и 66–77.

Однако если постоянным предполагается dy, уравнения будут другими:

$$\begin{aligned} ady &= 2xdx \\ 0 &= 2(dx)^2 + 2xddx \\ 0 &= 6dxddx + 2xd^3x \\ 0 &= 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Для других вариантов прогрессии переменных (например, постоянной ds или постоянной ydx) будут образовываться другие наборы дифференциальных уравнений. Однако вполне возможно установить соотношения между дифференциалами применительно ко всем прогрессиям переменных. В случае координат параболы x и y эти соотношения таковы:

$$\begin{aligned} ady &= 2xdx \\ addy &= 2(dx)^2 + 2xddx \\ ad^3y &= 6dxddx + 2xd^3x \\ ad^4y &= 6(ddx)^2 + 8dxd^3x + 2xd^4x \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Отметим, что уравнения для дифференциалов первого порядка не зависят от прогрессии переменных, а для высших — зависят. Пример показывает, что при подходящем выборе прогрессии можно значительно упростить уравнения высших порядков. Это несомненное преимущество свободного выбора прогрессии переменных, и первые последователи Лейбница мастерски использовали эту возможность упрощения формул.

Пример 2. Радиус кривизны

Мой второй пример[12] касается радиуса кривизны. Рассмотрим (рис. 6) кривую C и две точки P и P', расположенные достаточно близко друг от друга. Пусть R — точка пересечения нормалей к кривой, восстановленных в точках P и P'. Радиус кривизны в точке P есть предел длины отрезка PR при $P' \to P$. (Или, как об этом сказал бы сам Лейбниц: возьмём PP' бесконечно малым и рассмотрим точку R пересечения нормалей, восстановленных в точках P' и P; RP есть радиус кривизны.)

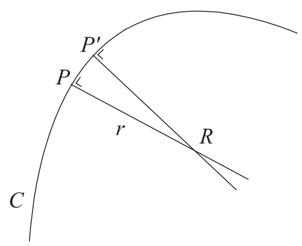

Рис. 6.

Лейбницево исчисление даёт формулы для вычисления радиуса кривизны. Эти формулы содержат дифференциалы высших порядков; тем самым они зависят от прогрессии переменных. Вот эти формулы (для обычных прогрессий):

$$\begin{aligned} r &= \frac{ds^3}{dxddy} \text{ для } dx = \text{const}, \\ r &= \frac{ds^3}{dyddx} \text{ для } dy = \text{const}, \\ r &= \frac{dxds}{ddy} \text{ для } ds = \text{const}. \end{aligned}$$

В этом случае опять имеется формула, справедливая для любых прогрессий, а именно:

$$r = \frac{dyds^2}{dsddx - dxdds}.$$

[12] «Differentials», pp. 35–42.

Эти формулы сегодня не употребляются; они могут показаться несколько странными для математиков, пользующихся современным анализом. Однако они обладают собственной элегантностью, особенно в сравнении с современной формулой для радиуса кривизны r графика функции $y = f(x)$ в точке (x, y):

$$r = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{f''(x)}.$$

Пример 3. Формула $\frac{d^2x}{dx^2}$.

Формула $\frac{d^2x}{dx^2}$ известна в современном анализе как формула для второй производной; если $y = f(x)$, то тогда производные обозначаются как

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx}, \\ f''(x) &= \frac{d^2y}{dx^2}, \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{d^ny}{dx^n}. \end{aligned}$$

Формулы для производных второго и высших порядков являются сегодня единственными, в которых сохранилось старое лейбницево обозначение d^2, d^3, и т. д. для дифференциалов высших порядков. Однако в лейбницевом исчислении эти формулы в том виде, как мы употребляем их сегодня, являются неопределёнными; их интерпретация зависит от прогрессии переменных. Интерпретация этих формул в лейбницевом исчислении совпадает с современной только в том случае, если dx берётся постоянным; для всех других прогрессий переменных математик школы Лейбница будет читать эти формулы иначе, нежели его современный коллега. К примеру, для параболы

$$y = f(x) = \frac{x^2}{a}$$

мы будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2}{a} = f''(x) \text{ для } dx = \text{const}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 0 \text{ для } dy = \text{const}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2a}{a^2 + 4x^2} \text{ для } ds = \text{const} \end{aligned}$$

(я опускаю вычисления). Эта зависимость формул от прогрессии переменных уже не входит сегодня в стандарты математического знания, что видно из того, что мы уже не отмечаем прогрессию переменных (постоянное dx), когда записываем формулу $\frac{d^2x}{dx^2}$ для второй производной. Мы сохранили формулу, но утратили исходную лейбницеву интерпретацию.

Пример 4. Дифференциальная пропорциональность

В связи с формулами примера 2 я отмечал, что дифференциальные уравнения первого порядка одинаковы для всех прогрессий переменных. Это общая черта лейбницева исчисления: уравнения, все дифференциалы которых имеют первый порядок, не зависят от прогрессии переменных. Однако если отношения между дифференциалами первого порядка выражаются другими способами, нежели с помощью уравнений, они также могут зависеть от прогрессии переменных. Это происходит, например, в случае дифференциальной пропорциональности.[13] К примеру, пусть

$$dv :: v.$$

[13] «Differentials», pp. 47–53.

Эта формула описывает движение в сопротивляющейся среде, и она говорит о том, что уменьшение скорости dv пропорционально самой скорости. Эта формула может быть интерпретирована лишь после того, как мы укажем, каким образом следует рассматривать это уменьшение скорости: происходит ли оно за равные (бесконечно малые) промежутки времени, или на равных проходимых расстояниях, или как-нибудь иначе. Эти уточнения относятся к тому, что Лейбниц называл прогрессией переменных; и интерпретация формулы действительно существенно зависит от рассматриваемой прогрессии. К примеру, если взять постоянным dv, когда будут пропорциональны скорость и изменения dv за равные бесконечно малые промежутки времени, то тогда движение будет описываться формулой

$$v = ce^{-t},$$

где c — некоторая постоянная. Но если изменения dv отнесены к равным проходимым расстояниям, то есть если мы рассматриваем прогрессию переменных, в которой ds постоянно (или, что то же самое, vdt постоянно, поскольку $ds = vdt$), это движение описывается формулой

$$v = \frac{c}{t}.$$

Зависимость пропорциональности дифференциалов от прогрессии переменных играла важную роль в дискуссии между Гюйгенсом и Лейбницем, произошедшей около 1690 г. Предметом этой дискуссии было движение в сопротивляющейся среде, и она была вызвана взаимным непониманием двух учёных, возникшем из-за неуказанности прогрессии переменных, по отношению к которой записывались дифференциальные уравнения для различных сопротивляющихся сред.

Дальнейшее развитие

После этих примеров может показаться, что зависимость формул от прогрессий переменных была попросту ненужной помехой. Но в действительности она давала большое преимущество. Первые последователи лейбницева исчисления были настоящими виртуозами в извлечении выгоды из этой зависимости от прогрессии переменных. К примеру, имея дело с дифференциальными уравнениями высших порядков, они стремились выбрать прогрессию переменных таким образом, чтобы упростить формулы (см. пример 1). Вычисляя дифференциалы высших порядков при решении механических задач (таких, как задача о форме нагруженных упругих балок или о движении тел в сопротивляющейся среде), они также пользовались неопределённостью дифференциалов. Для такого дифференцирования использовались чертежи, на которых отмечались дифференциалы первого и второго порядков, и эти чертежи часто можно было упростить выбором удобной прогрессии переменных.

Описанные мною обозначения, идеи и приёмы сегодня не употребляются; они утрачены в течение восемнадцатого и девятнадцатого столетий. Я не буду обсуждать здесь причины их исчезновения; отмечу лишь, что имелась некоторая неудовлетворённость в связи с неопределённостью дифференциалов — особенно в случае Эйлера — и в связи с появлением понятия функции[14].

Глядя назад на это развитие, нельзя сказать, что оно происходило путём отбрасывания неправильных и уродливых частей теории. Рабочие приёмы в основном не были неправильными; я считаю, что они не были и уродливыми. Но они не вписались в дальнейшее концептуальное развитие предмета и потому были отброшены.

В ходе дальнейшего развития анализа исчезли не только приёмы и идеи, связанные с неопределённостью дифференциалов; прочие концептуальные установки лейбницева исчисления также по большей части исчезли или претерпели значительные изменения, в основном из-за той главенствующей роли, которую стало играть в анализе понятие функции.

[14] «Differentials», pp. 66–77.

Различия между лейбницевым исчислением и современным анализом

Я рассматривал неопределённость дифференциалов как сильнейшую иллюстрацию значительной разницы между лейбницевым исчислением и современным анализом. Результаты сравнения двух теорий[15] я представлю в табл. 2.

Прежде всего, две теории различаются по своим базовым понятиям; и объекты, с которыми они имеют дело, также различны. Лейбницево исчисление рассматривает переменные, пробегающие бесконечную последовательность бесконечно близких значений. Эти переменные, как это было показано выше, не являются функциями, потому что никакая переменная изначально не берётся в качестве независимой. Современный анализ, напротив, имеет дело с функциями.

Во-вторых, имеется различие между основными операциями. Лейбницево дифференцирование ставит в соответствие переменной новую, бесконечно малую переменную, называемую её дифференциалом. Современный анализ ставит в соответствие функции новую функцию, называемую её производной; эта функция определяется с помощью предельного перехода. Лейбницева операция $\sum$ (для которой я использую лейбницев термин «суммирование», хотя этот термин часто заменялся термином «интегрирование», введённым братьями Бернулли) ставит в соответствие переменной новую, бесконечно большую переменную. Современный анализ ставит в соответствие функции новую функцию, называемую её интегралом.

Наконец, концепция переменных в лейбницевом исчислении содержит неопределённость дифференциалов, которая делается определённой с выбором прогрессии переменных. Проблемы неопределённости дифференциалов в современном анализе не существует, так как в нём рассматриваются функции явно определённых независимых переменных.

Таблица 2

ЛЕЙБНИЦЕВО ИСЧИСЛЕНИЕ		СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ
	Базовое понятие	
Переменная		Функция
	Операции	
Нахождение дифференциалов:		Взятие производной:
переменная → бесконечно малая переменная		функция → функция
$x \to dx$ $dy \to ddy$		$f \to f'$
Суммирование:		Интегрирование:
переменная → бесконечно большая переменная		функция → функция
$x \to \sum x$ $ydx \to \sum ydx$		$f \to F$ (где $F(x) = \int_a^x f(t)dt$)
	Неопределённость	
Неопределённость дифференциалов, удерживаемая определением прогрессии переменных		Никакой неопределённости в соответствии с понятием функции

Это сопоставление показывает, что в определённом смысле современный анализ избавился от многих сложностей, присущих лейбницеву исчислению. В нём больше нет бесконечно малых

[15] Для более детального сравнения см. (прим. 4) Baron and Bos «Newton and Leibniz» pp. 54–57, а также мои работы «Differentials» pp. 34–35, «Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition», pp. 92–93.

и бесконечно больших количеств; все функции — конечны. Устранена неопределённость дифференциалов и зависимость формул от прогрессии переменных. Но я хочу подчеркнуть ещё раз, что те положения лейбницева исчисления, которые были устранены из математики на пути её развития, не были неправильными или уродливыми. Я поистине надеюсь, что смог показать, что они придавали лейбницеву исчислению богатство построения и даже определённую красоту.

Заключение

В этом коротком изложении мне пришлось опустить многие детали, останавливаясь в основном на технических приёмах. Я надеюсь, что эта сторона дела не закрыла собой возможность общего взгляда на вопросы, которые я хотел отметить:

- Лейбницево исчисление во многих положениях принципиально отличается от современной теории.
- И тем не менее это исчисление является связной, эффективной и красивой теорией само по себе.
- Эта связность, эффективность и красота открываются лишь тому, кто изучает теорию и судит о ней в её собственных терминах, насколько это возможно, а не в терминах теорий, возникших позднее.

Я подчеркнул особую природу лейбницева исчисления и его отличия от современного анализа. Но могут спросить: стоит ли придавать этому такое значение? Как-никак современный анализ был создан современными математиками, Лейбниц же создал совсем другое исчисление — он был слишком оригинальным мыслителем, чтобы изобретать теорию, созданную другими, даже если эти другие пришли после него.

Хенк И.М. Бос,
почетный профессор Секции истории
математики и естественных наук
Университета г. Утрехт, Нидерланды.

Перевод с английского: А. И. Щетников.

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Продолжаем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержатся темы 7 и 8. Темы 5 и 6 опубликованы в предыдущем номере журнала.

Тема 7

Прямая на плоскости

В разделе «Векторная алгебра» мы разработали инструментарий для исследования геометрических объектов, который теперь активно будем прилагать к изучению прямых, плоскостей, а также кривых и поверхностей второго порядка — основных объектов предмета «Аналитическая геометрия».

В настоящее время аналитическая геометрия выросла в известную отрасль математики — «Алгебраическая геометрия» — науку, привлекающую к изучению геометрических объектов современную алгебру. Алгебраическая геометрия находит применение в теоретической физике, одна из интереснейших задач которой — создание единой теории поля, описывающей в своих рамках как электрические, так и гравитационные взаимодействия. Гипотезу о существовании такой теории выдвинул еще А. Эйнштейн. Действительно, если сравнить закон Кулона, описывающий силу притяжения заряженных частиц, и закон всемирного тяготения, касающийся притяжения материальных тел, то можно заметить их тождественность. Однако все знают о том, что существуют как положительно заряженные частицы, так и отрицательно заряженные. Но, к сожалению, тел с отрицательной массой пока не найдено. В связи с этим возникает заманчивая гипотеза: если разработать единую теорию поля, о которой мечтал Эйнштейн, то она, возможно, предскажет, как получить тела с отрицательной массой, что может послужить отправной точкой изобретения устройств, обеспечивающих антигравитацию!

Первая тема аналитической геометрии — прямая на плоскости. Здесь нам предстоит вывести различные уравнения прямой, исследовать их взаимное расположение и научиться решать задачи, посвященные прямым на плоскости. Начнем мы, естественно, с уравнений.

Обсудим выражение «уравнение прямой» или «прямая описывается уравнением». Когда мы говорим об уравнениях, описывающих какие-то объекты на плоскости, речь идет о плоскости, в которой фиксирована прямоугольная система координат Oxy, и уравнении, содержащем две неизвестных (как правило, неизвестные мы будем обозначать через x и y):

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — произвольная функция. Например,

$$2x + 3y - 2 = 0;$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0;$$
$$\sin x = \cos y$$

и т. д. Объект (в частности, прямая), описываемый *уравнением*, — это множество всех тех и только тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотрим в качестве примера уравнение $x - 2y = 0$. Легко подобрать несколько его решений: $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(20; 10)$, $\ldots$, и вообще, пара (x, y) удовлетворяет уравнению, когда координата x в два раза больше координаты y. Если изобразить «все» точки плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, то, как известно еще со школьной скамьи, получится прямая (см. рис. 7.1).

Наша задача в этой теме — выяснить, какие типы уравнений описывают прямую на плоскости и как написать уравнение конкретной прямой, заданной какими-то конкретными параметрами.

Прежде чем перейти непосредственно к выводу первого уравнения прямой, хотелось бы сформулировать основной подход к получению уравнений, описывающих прямые. Он сводится к следующим двум пунктам:

1) сформулировать условия, при которых произвольная точка M принадлежит искомой прямой, в терминах векторной алгебры,

2) переформулировать эти условия в терминах координат.

Последняя формулировка и даст нужное уравнение.

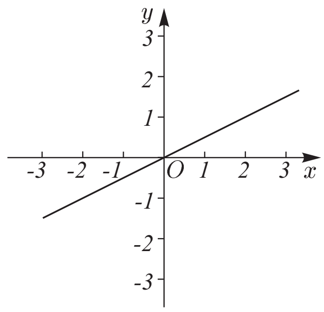

Рис. 7.1. Прямая, описываемая уравнением $x - 2y = 0$

39. Каноническое и выводимые из него уравнения прямой на плоскости

39.1. Каноническое уравнение. Поставим перед собой задачу: выписать уравнение прямой l на плоскости, проходящей через заданную точку $A(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\overrightarrow{a}(p, q)$ (рис. 7.2). Отметим, что вектор $\overrightarrow{a}$ обычно называют *направляющим вектором* прямой l.

Согласно общему принципу, возьмем произвольную точку $M(x, y)$ и выясним, при каком условии она попадет на прямую l. Поскольку требуемое условие нужно сформулировать через векторы, соединим точки A и M направленным отрезком, как это показано на рис. 7.2. Понятно, что *точка M будет принадлежать прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AM}$ будут коллинеарны.* Это и есть то условие, которое мы искали.

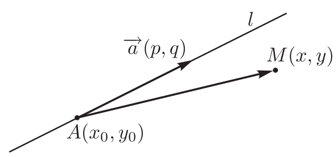

Рис. 7.2. К выводу канонического уравнения прямой

Теперь, следуя основному принципу, нам предстоит переписать найденное условие через координаты. Для этого вспомним, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AM}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Координаты вектора $\overrightarrow{a}(p, q)$ известны по условию, а координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ вычисляются как $\overrightarrow{AM}(x - x_0, y - y_0)$. Пропорциональность координат выглядит следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \tag{7.1}$$

Итак, мы получили, что

> *точка M с координатами (x, y) принадлежит прямой l, проходящей через заданную точку $A(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\overrightarrow{a}(p, q)$, тогда и только тогда, когда пара чисел (x, y) удовлетворяет условию (7.1). Именно поэтому соотношение (7.1) является искомым уравнением, которое принято называть каноническим уравнением прямой на плоскости. В нем параметры p и q — координаты направляющего вектора, а (x_0, y_0) — координаты какой-то конкретной точки нашей прямой.*

Решение задачи на составление канонического уравнения разобрано в примере 7.1.

39.2. Параметрические уравнения. В предыдущем разделе мы получили одно из основных уравнений, описывающих прямую на плоскости. Из него легко выводятся различные виды уравнений прямой. Сейчас мы получим так называемые *параметрические уравнения*.

Из названия ясно, что параметрические уравнения — это уравнения с параметром. Точнее, это система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

описывающих положение точки с координатами (x, y) на плоскости в зависимости от значения параметра t (например, времени).

Стартуем с канонического уравнения прямой (7.1), составленного в виде пропорции:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Обозначим коэффициент пропорциональности через t и запишем это уравнение в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{p} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{q} = t. \end{cases}$$

Умножив каждое из уравнений на свой знаменатель и перенеся x_0 и y_0 в правую часть, получим *параметрические уравнения прямой на плоскости*:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt. \end{cases} \tag{7.2}$$

В нем (p, q) — координаты направляющего вектора прямой, а (x_0, y_0) — координаты некоторой конкретной точки, через которую проходит прямая, t — параметр. Обратите внимание, что в «начальный момент времени» $t = 0$ точка прямой с координатами (x, y) совпадает с точкой $A(x_0, y_0)$. Поэтому точку A можно называть отправной, или начальной, точкой параметрических уравнений прямой на плоскости.

Поскольку параметрические уравнения прямой легко получить из канонического уравнения, а сами параметрические уравнения не очень часто будут встречаться в нашем курсе, то конкретный пример на них мы приводить не будем, оставив его в качестве задачи 7.15.

39.3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Предположим, нам нужно написать уравнение прямой l на плоскости, проходящей через точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ (рис. 7.3).

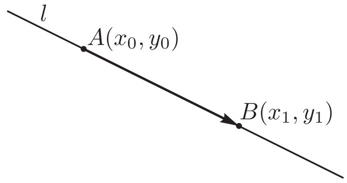

Рис. 7.3. Прямая, проходящая через две точки

Напомним, что мы уже умеем выписывать каноническое уравнение прямой. Для этого нам достаточно знать координаты какой-нибудь точки на этой прямой и координаты направляющего вектора.

Известны координаты двух точек A и B, лежащих на прямой. Формально нет только направляющего вектора. Однако вектор $\overrightarrow{AB}$, конечно, параллелен прямой (AB) и его можно взять в качестве направляющего. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ вычисляются стандартным образом:

$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

Теперь у нас есть все исходные данные для написания канонического уравнения (7.1). Воспользуемся ими и получим требуемое *уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки*:

$$l\colon \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{7.3}$$

Здесь (x_0, y_0), (x_1, y_1) — координаты точек, принадлежащих прямой.

Конкретная задача на это уравнение решена в примере 7.2.

40. Общее уравнение прямой на плоскости

40.1. Уравнение прямой по точке и нормали. Предположим, нам задан вектор $\overrightarrow{n}(A, B)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ и требуется написать уравнение прямой l, проходящей через точку M_0 *перпендикулярно* вектору $\overrightarrow{n}$ (рис. 7.4).

Как и ранее, возьмем произвольную точку $M(x, y)$, построим вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и задумаемся: при каких условиях точка M попадет на прямую l? Ясно, что это произойдет тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{n}$.

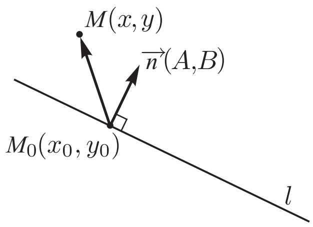

Рис. 7.4. Прямая, которая задана вектором нормали и точкой

Выразим теперь это условие через координаты. Прежде всего заметим, что координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ — это $(x - x_0, y - y_0)$. Перпендикулярность векторов означает, что угол φ между ними составляет 90°, т. е. косинус этого угла должен быть равен 0. Выражая косинус угла через скалярное произведение, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M})}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M_0M}|}.$$

Таким образом, перпендикулярность векторов означает, что их скалярное произведение равно 0. Осталось вспомнить, как вычисляется скалярное произведение через координаты:

$$(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Следовательно, искомое уравнение прямой l выглядит так:

$$l: \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7.4}$$

При этом A и B — суть координаты вектора $\overrightarrow{n}$, перпендикулярного прямой l, а (x_0, y_0) — координаты некоторой точки на прямой. Вектор $\overrightarrow{n}(A, B)$ носит название *нормали* к прямой l.

40.2. Общее уравнение прямой. Раскрыв скобки в уравнении (7.4), получим

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Выражение в скобках — число, которое можно обозначить через C и переписать уравнение в виде

$$Ax + By + C = 0. \tag{7.5}$$

Мы уже убедились, что если это уравнение получено в результате раскрытия скобок в уравнении (7.4), то оно описывает прямую. Иными словами, точки, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образуют некоторую прямую на плоскости.

Возникает закономерный вопрос: а всякое ли уравнение типа (7.5) описывает какую-то прямую на плоскости. Ответ положительный, за одним единственным исключением: если $A = B = 0$, то уравнение будет выглядеть как $C = 0$. Поскольку C — конкретное число, то получится либо тождество (если $C = 0$), которому удовлетворяет любая пара координат, т. е. такое «уравнение» описывает всю плоскость, либо ложное равенство (если $C \neq 0$), множество решений которого пусто.

Сейчас мы покажем, что если A и B одновременно в нуль не обращаются, то уравнение (7.5) описывает прямую с нормалью $\overrightarrow{n}(A, B)$. Это уравнение принято называть *общим уравнением прямой на плоскости.*

Итак, рассмотрим уравнение (7.5), в котором либо A, либо B отлично от нуля, и найдем какое-нибудь одно его решение. Будем, например, считать, что $A \neq 0$ и положим $y = 0$. Тогда это уравнение перепишется в виде:

$$Ax = -C,$$

решением которого служит число $x = -C/A$. Значит, пара $(-C/A, 0)$ является решением исходного уравнения. Обозначим множество точек плоскости, описываемых уравнением (7.5), символом l. Точка M_0 с координатами $(-C/A, 0)$ принадлежит множеству l.

Чтобы было понятнее наше рассуждение, проведем его для конкретного случая, например, для уравнения $3x + 5y + 9 = 0$. Положив $y = 0$, получим $3x = -9$, откуда $x = -3$. Таким образом, пара $(-3, 0)$ — решение исходного уравнения, что легко проверить непосредственной подстановкой. Следовательно, точка $M_0(-3, 0)$ принадлежит множеству l (мы пока еще не уверены, что это прямая).

Преобразуем уравнение (7.5) следующим образом:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow A(x + C/A) + B(y - 0) = 0$$

и введем пару векторов: $\overrightarrow{n}(A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x + C/A, y - 0)$. Точка $M_0(-C/A, 0)$ принадлежит множеству l, а точка M с координатами (x, y) — произвольная точка плоскости.

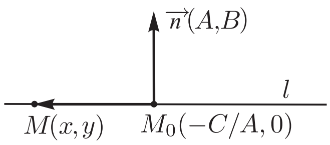

Рис. 7.5.

Соотношение $A(x + C/A) + B(y - 0) = 0$ можно интерпретировать так, что точка $M(x, y)$ попадает в множество l, когда скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ равно нулю, т. е. они перпендикулярны (см. стр. 39). Но это означает, что множество l представляет собой прямую, проходящую через точку $M_0(-C/A, 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}(A, B)$ (рис. 7.5), что мы и хотели доказать.

Проделаем аналогичные преобразования в конкретном примере:

$$3x + 5y + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x + 3) + 5(y - 0) = 0.$$

Здесь $\overrightarrow{n}(3, 5)$, $M_0(-3, 0)$, $M(x, y)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x + 3, y - 0)$. Поэтому последнее соотношение означает равенство нулю скалярного произведения $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M})$, т. е. перпендикулярность соответствующих векторов.

41. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим общее уравнение прямой (7.5) и разрешим его относительно y:

$$l\colon \quad Ax + By + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Обратите внимание, это можно сделать только тогда, когда $B \neq 0$ (в противном случае переменной y в уравнении просто нет).

Введем обозначения: $k = -A/B$, $b = -C/B$ и перепишем уравнение:

$$y = kx + b. \tag{7.6}$$

Получилось так называемое *уравнение прямой с угловым коэффициентом*. Объясним, почему это уравнение называется именно так. Изобразим прямую на рис. 7.6.

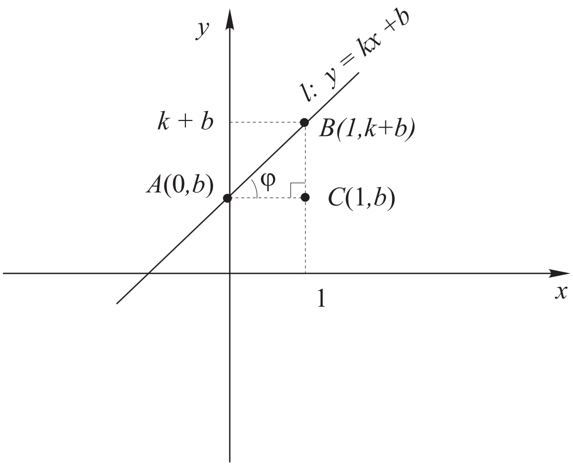

Рис. 7.6. Прямая по уравнению с угловым коэффициентом

Простым вычислением убеждаемся, что этой прямой принадлежат точки $A(0,b)$ и $B(1,k+b)$. Отсюда можно сделать вывод: коэффициент b в уравнении — это ордината точки, в которой прямая пересекает координатную ось Oy. Кроме того, $\overrightarrow{AB}(1,k)$ — направляющий вектор прямой l.

Пользуясь рисунком, вычислим длины отрезков AC и BC:

$$|AC| = 1, \qquad |BC| = k.$$

Отсюда коэффициент k — ни что иное, как

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{|BC|}{|AC|},$$

т. е. тангенс угла наклона прямой l к горизонтали. Именно поэтому уравнение (7.6) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.

42. Уравнение прямой в отрезках

Часто бывает полезно умение выписывать уравнение прямой, которая пересекает оси координат в конкретных точках, отличных от начала координат. Допустим, нам потребовалось уравнение прямой l, пересекающей ось Ox в точке $M(a,0)$, а ось Oy в точке $N(0,b)$ (рис. 7.7). Попытаемся подобрать коэффициенты в общем уравнении $Ax+By+C=0$ прямой так, чтобы получилось уравнение прямой l. Мы знаем координаты двух точек на прямой l. Поэтому можно выписать систему уравнений:

$$\begin{cases} Aa + B0 = -C, \\ A0 + Bb = -C. \end{cases}$$

Однако в этой системе только два уравнения и три неизвестных: A, B и C. Заметим, что если в общем уравнении прямой положить $C=0$, то прямая, описываемая таким уравнением, будет проходить через начало координат, что не согласуется с условием задачи. Поэтому $C \neq 0$ и мы можем разделить на него оба уравнения системы:

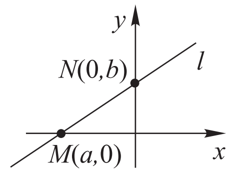

Рис. 7.7. Прямая, проходящая через заданные точки на осях координат

$$\begin{cases} \frac{A}{C}a + \frac{B}{C}0 = -1, \\ \frac{A}{C}0 + \frac{B}{C}b = -1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \frac{A}{C} = -\frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{C} = -\frac{1}{b}$$

и нужное уравнение выглядит как

$$-\frac{1}{a}x - \frac{1}{b}y + 1 = 0$$

$$\text{или} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7.7}$$

Такой вид уравнения называют *уравнением прямой в отрезках.*

43. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим прямую l, заданную уравнением $2x - 3y + 4 = 0$. Если это уравнение умножить на 4, получим еще одно уравнение $8x - 12y + 16 = 0$, которое описывает ту же прямую. Более того, умножая уравнение прямой на произвольную ненулевую константу, будем получать разные уравнения, которые задают одну и ту же прямую. Это, конечно, неудобно. Хотелось бы, чтобы каждой прямой соответствовало только одно уравнение. Достичь этого можно с помощью *нормализации.*

43.1. Определение. Нормальным уравнением прямой называется уравнение вида

$$\alpha x + \beta y - \rho = 0,$$

где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $\rho \geqslant 0$.

Между множествами прямых на плоскости и нормальных уравнений существует взаимно однозначное соответствие. Иными словами, для каждой прямой существует нормальное уравнение, которое ее описывает, причем только одно. Доказательство этого факта мы оставим в качестве полезной задачи (задача 7.37*).

С помощью нормального уравнения можно вычислить расстояние от точки до прямой. Алгоритму этого вычисления посвящены теорема и следствия из нее.

43.2. Теорема. Пусть $\alpha x + \beta y - \rho = 0$ — нормальное уравнение прямой l. Тогда

1) длина нормали $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$ к прямой l равна 1;

2) нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена от начала координат к прямой l, как показано на рис. 7.8, *а*;

3) расстояние от начала координат до прямой l равно ρ.

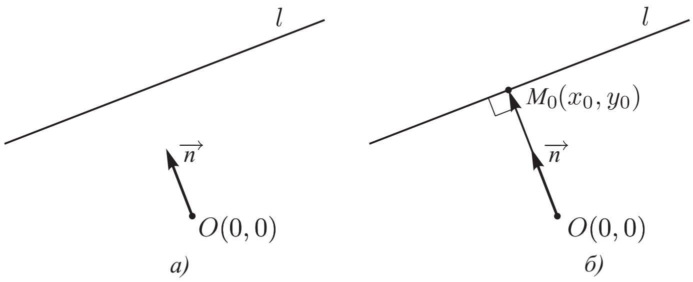

Рис. 7.8. К нормальному уравнению прямой

Доказательство. Заметим, что вектор $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$ действительно является нормалью прямой l (см. стр. 39), т. е. перпендикулярен ей. Длина вектора $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$ вычисляется как $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. По определению нормального уравнения выражение под корнем равно 1. Так что $|\overrightarrow{n}| = 1$.

Для доказательства утверждений 2) и 3) теоремы опустим перпендикуляр из начала координат на прямую l и обозначим его основание через $M_0(x_0, y_0)$ (см. рис. 7.8, *б*). Тогда вектор $\overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0)$ будет параллелен вектору $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$. Значит, их координаты пропорциональны. Иными словами, найдется такое число t, что $x_0 = t\alpha$, $y_0 = t\beta$. Причем $t \geqslant 0$, если эти векторы будут сонаправлены (как на рисунке) и $t < 0$, если они противоположно направлены.

С другой стороны, точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит прямой l, поэтому координаты (x_0, y_0) удовлетворяют уравнению прямой, т. е.

$$\alpha x_0 + \beta y_0 - \rho = 0.$$

Подставим в это соотношение $x_0 = t\alpha$, $y_0 = t\beta$:

$$\alpha t\alpha + \beta t\beta - \rho = 0$$

и вынесем t за скобки:

$$t(\alpha^2 + \beta^2) - \rho = 0.$$

Так как по условию $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то из последнего соотношения следует равенство: $t = \rho$.

Итак, по определению нормального уравнения $\rho \geqslant 0$, значит, и $t \geqslant 0$, т. е. векторы $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{OM_0}$ сонаправлены и нормаль $\overrightarrow{n}$ действительно ориентирована от начала координат к прямой.

Расстояние от начала координат до прямой l — это в точности длина вектора $\overrightarrow{OM_0}$, которая вычисляется через его координаты:

$$|\overrightarrow{OM_0}| = \sqrt{(t\alpha)^2 + (t\beta)^2} = \sqrt{t^2(\alpha^2 + \beta^2)} = |t|1 = \rho. \ \square$$

С помощью только что доказанной теоремы мы можем вычислить расстояние от начала координат до произвольной прямой. См. соответствующий пример 7.4.

Чтобы вычислить расстояние от произвольной точки плоскости до прямой, нужно воспользоваться следствием теоремы (см. пример 7.5).

43.3. Следствие. Пусть $\alpha x + \beta y - \rho = 0$ — нормальное уравнение прямой l. Расстояние $\rho(A, l)$ от точки $A(x_0, y_0)$ до прямой l вычисляется по формуле:

$$\rho(A, l) = |\alpha x_0 + \beta y_0 - \rho|.$$

Доказательство. Заметим, что это утверждение уже доказано, когда координаты точки A — это $(0, 0)$ (см. теорему 43.2). Поэтому введем новую систему координат Auv (рис. 7.9), оси которой параллельны осям исходной системы, а начало координат совпадает с точкой A.

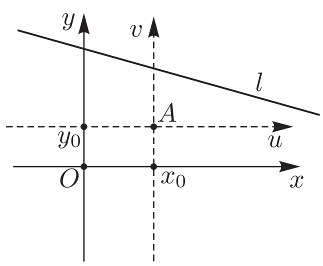

Рис. 7.9. Система координат Auv в системе координат Oxy.

Выясним, как связаны старые и новые координаты. Заметим, что координаты точки A в старой системе — (x_0, y_0), а в новой — $(0, 0)$, иными словами, когда $x = x_0$, то $u = 0$, а когда $y = y_0$, $v = 0$. Несложно сообразить, что зависимость координат выражается следующими формулами:

$$u = x - x_0, \qquad v = y - y_0.$$

Выразим из этих формул x и y:

$$x = u + x_0, \qquad y = v + y_0$$

и подставим в нормальное уравнение прямой l:

$$\alpha(u + x_0) + \beta(v + y_0) - \rho = 0.$$

Мы получили уравнение прямой l в новой системе координат. Раскрывая скобки, получаем

$$\alpha u + \beta v + (\alpha x_0 + \beta y_0 - \rho) = 0.$$

Так как исходное уравнение было нормальным, то $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Так что с точностью до знака уравнение в новой системе координат тоже нормально (нам неизвестен знак свободного члена). Поэтому можно утверждать, что расстояние от начала координат новой системы (т. е. точки A) до прямой l равно $|\alpha x_0 + \beta y_0 - \rho|$. $\square$

44. Взаимное расположение прямых на плоскости

Как мы знаем из курса школьной планиметрии, две прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо быть параллельными, но не совпадающими прямыми, либо совпадать. Сейчас мы будем исследовать взаимное положение пары прямых на плоскости, изучая их уравнения.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:

$$\begin{aligned} l_1: &\qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ l_2: &\qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Если одно уравнение получено из другого умножением на ненулевую константу, то, естественно, $l_1 = l_2$. В этой ситуации все коэффициенты уравнений пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Если прямые параллельны, то параллельны и их нормали (см. рис. 7.10), а значит, их координаты пропорциональны. Так как $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1)$, а $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2)$, то условие параллельности прямых выглядит как

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Обратите внимание, если при этом еще

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

то прямые параллельны, но не совпадают.

Наконец, чтобы прямые на плоскости пересекались, необходимо и достаточно, чтобы их нормали были не параллельны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

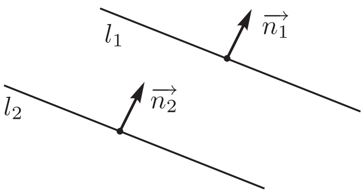

Рис. 7.10. Параллельные прямые

45. Пучок прямых

Слово «пучок» в математике означает примерно то же, что и в разговорном языке, а именно, нечто, состоящее из отдельных, но похожих друг на друга «веточек». В нашем курсе «веточки» — это прямые (пока только на плоскости). Различают два типа пучка прямых: состоящий из всех прямых, проходящих через заданную точку (рис. 7.11, *б*), и из всех прямых, параллельных между собой (рис. 7.11, *а*). В теоретических задачах бывают полезны уравнения таких пучков. Фактически — это уравнение прямой с параметром. Сейчас мы их выведем.

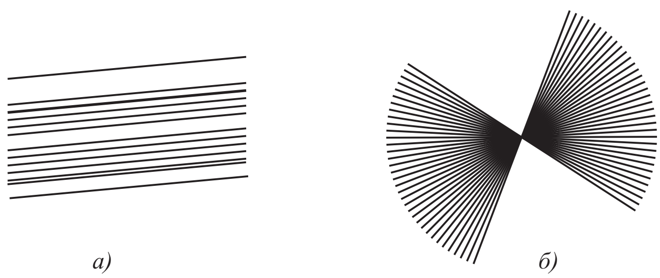

Рис. 7.11. Пучок прямых: *а)* попарно параллельных; *б)* пересекающихся в одной точке

Начнем с пучка параллельных прямых. Зафиксируем вектор $\overrightarrow{a}(p_0, q_0)$ и опишем все прямые с таким направляющим вектором. Здесь нам нужно воспользоваться каноническим уравнением прямой (7.1). Однако нам не дана точка, через которую проходит прямая. Ее координаты и будут параметрами, скажем, $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$. В результате получим:

$$\frac{x-\alpha}{p_0} = \frac{y-\beta}{q_0}.$$

Чтобы было понятнее, возьмем конкретный вектор, например, $\overrightarrow{a}(2,3)$. Тогда уравнение пучка прямых, параллельных этому вектору, выглядит как

$$\frac{x-\alpha}{2} = \frac{y-\beta}{3}.$$

При желании можно избавиться от знаменателей и записать общее уравнение пучка в виде:

$$q_0x - p_0y + (\beta p_0 - \alpha q_0) = 0.$$

Напомним, что (p_0, q_0) в этом уравнении — координаты направляющего вектора, а α и β — произвольные вещественные числа. Поэтому все выражение $\beta p_0 - \alpha q_0$ может принимать любое значение. Взяв его за параметр γ, придем к окончательному виду уравнения *пучка параллельных прямых*:

$$q_0x - p_0y + \gamma = 0. \tag{7.8}$$

Параметр γ, участвующий в уравнении пучка, можно воспринимать как *координату* конкретной прямой из данного пучка. Кроме того, он напрямую связан с расстоянием между прямыми в пучке. Как вычислить расстояние между параллельными прямыми, показано в примере 7.6.

С пересекающимися прямыми дело обстоит несколько интереснее. Пучок прямых, проходящих через одну точку, является моделью *проективной* прямой, о чем речь пойдет в следующем разделе.

Итак, зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ и запишем уравнение прямой, проходящей через нее параллельно какому-нибудь произвольному вектору $\overrightarrow{a}(p,q)$:

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q},$$

или

$$q(x-x_0) - p(y-y_0) = 0. \tag{7.9}$$

Это и есть уравнение *пучка пересекающихся прямых* на плоскости.

Если в полученном уравнении раскрыть скобки и выражение $py_0 - qx_0$ принять за какой-нибудь новый параметр, то мы потеряем информацию о координатах общей точки. Поэтому для уравнения пучка прямых этого делать нельзя!

Уравнение (7.9) позволяет вычислить угол между пересекающимися прямыми (см. пример 7.7).

46*. Проективная прямая

В современной математике (точнее, алгебраической геометрии) существует такое понятие, как «*многообразие модулей*». Под ним подразумевается то, что собой представляет множество каких-то похожих друг на друга объектов с точки зрения геометрии.

В самом начале курса мы уже встречались с этой абстракцией, хотя и не употребляли термин «многообразие модулей». Действительно, мы начали изучение геометрии с множества векторов, каждый из которых — класс эквивалентных направленных отрезков. Было непонятно, что собой представляет это множество до тех пор, пока мы не ввели координаты. Если зафиксировать базис, то каждый вектор будет однозначно определяться координатами своего конца (мы считаем, что начало всех векторов совпадает с началом координат). Таким образом, множество всех векторов на плоскости с точки зрения геометрии — это тоже плоскость!

Следующий пример многообразия модулей — это пучок параллельных прямых, в котором каждая прямая пучка рассматривается как точка нового множества (многообразия модулей). Чтобы представить себе это множество, рассмотрим какой-то пучок параллельных прямых (7.8) и проведем произвольную прямую l, пересекающую каждую прямую пучка (рис. 7.12).

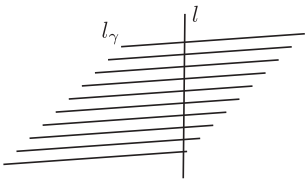

Рис. 7.12. Многообразие модулей пучка параллельных прямых

Тогда каждая прямая l_γ пучка, имеющая уравнение

$$q_0x - p_0y + \gamma = 0,$$

однозначно определяется точкой пересечения с прямой l. Значит, с точки зрения геометрии, пучок параллельных прямых — это просто прямая l. Обратите внимание, что параметр γ прямых в пучке можно считать координатой на многообразии модулей (прямой l).

Теперь обратимся к пучку пересекающихся прямых (7.9), выбрав за общую точку начало координат (рис. 7.13). Тогда уравнение пучка будет иметь вид:

$$qx - py = 0. \tag{7.10}$$

Нам хотелось бы понять, что представляет собой множество, каждая точка которого — это прямая пучка. Проведем произвольную прямую l, не проходящую через начало координат (рис. 7.13). Тогда каждая прямая пучка (кроме одной, которая на рисунке обозначена как l_0) пересечет прямую l ровно в одной точке. Поэтому с точки зрения геометрии пучок пересекающихся прямых — это прямая плюс еще одна точка x_∞, соответствующая прямой l_0! Вопрос в том, как эта точка подклеивается к прямой l. Отметим, что многообразие модулей пучка пересекающихся прямых носит название *проективной прямой* и обозначается как $\mathbb{P}^1$.

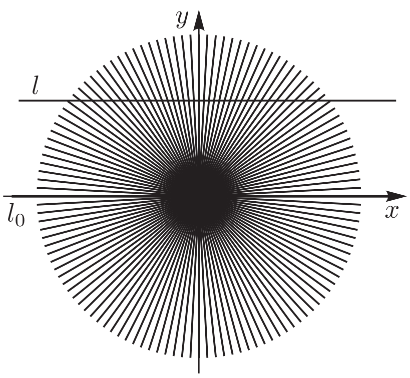

Рис. 7.13. Пучок прямых

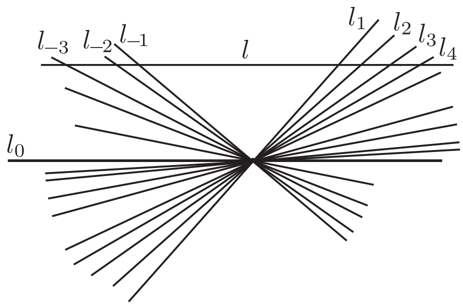

Рис. 7.14. Последовательность прямых

Строя многообразие модулей, придерживаются следующего принципа: близкие прямые пучка (угол между которыми мал) должны изображаться на проективной прямой близкими точками (расстояние между которыми маленькое). Поэтому, чтобы понять место точки x_∞ на проективной прямой, возьмем последовательность прямых $l_1, l_2, \ldots$, приближающихся к l_0 (см. рис. 7.14). Точки пересечения этих прямых с l образуют последовательность, которая уходит вправо в бесконечность. Можно рассмотреть последовательность прямых $l_{-1}, l_{-2}, \ldots$ (см. рис. 7.14), приближающихся к l_0 с другой стороны. Соответствующая последовательность точек на l будет уходить влево в бесконечность. Однако пределом как первой последовательности точек, так и второй должна служить точка x_∞. Значит, чтобы подклеить точку x_∞ к прямой l, нужно отождествить левую и правую «бесконечности» прямой l (рис. 7.15). В результате получится что-то, напоминающее окружность «бесконечно большого радиуса».

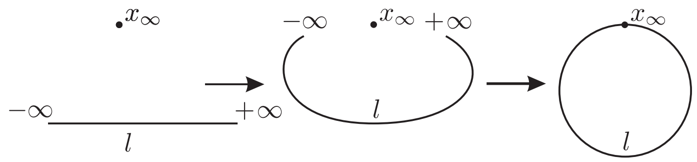

Рис. 7.15. Проективная прямая

Обсудим координаты на проективной прямой. Напомним, что проективная прямая — это многообразие модулей прямых, проходящих через одну точку. Уравнение пучка — это уравнение (7.10), в котором каждая прямая зависит от двух параметров p и q. На первый взгляд эту пару чисел (p, q) и можно было бы взять за координаты. Но проблема в том, что (p, q), $(2p, 2q)$, $(-2p, -2q)$, $\ldots$ в действительности описывают одну и ту же прямую. Поэтому координаты на проективной прямой — это пара чисел с точностью до пропорциональности, что записывается как $(p : q)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 7.1. Выписать уравнение прямой l, проходящей через точку $A(2, 3)$ параллельно вектору $\overrightarrow{a}(-1, 4)$.

Решение. Чтобы решить поставленную задачу, достаточно вспомнить каноническое уравнение прямой (7.1), определить значения параметров x_0, y_0, p и q из условия задачи и подставить их в каноническое уравнение. Параметры x_0, y_0 — это координаты заданной точки, через которую проходит прямая. В нашей ситуации $x_0 = 2$, $y_0 = 3$. Коэффициенты p и q — координаты направляющего вектора; у нас $p = -1$, $q = 4$. Подставляя найденные значения в уравнение (7.1), получаем ответ:

$$l\colon \qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{4}.$$

Все было бы замечательно, если бы не одно «но»! Для решения задачи указанным методом необходимо помнить как каноническое уравнение, так и смысл всех входящих в него параметров. Естественно, запомнить только это не так уж и сложно. Но только в нашем курсе такого сорта формул огромное число, а память нетренированного человека весьма ограниченна. Поэтому мы советуем запоминать минимум «формульной информации», уделяя особое внимание основным идеям рассуждений и геометрическим образам, или картинкам. Так и в этой ситуации правильнее вывести каноническое уравнение для конкретного случая, сформулированного в условии непосредственно.

Начнем с рисунка (рис. 7.16), на котором изобразим искомую прямую, точку $A(2, 3)$, вектор $\overrightarrow{a}(-1, 4)$ и точки $M(x, y)$: на прямой l и вне ее.

Обратите внимание, что рисунок схематичен. Совершенно не обязательно изображать систему координат и отмечать в ней положение точек абсолютно точно. Достаточно, чтобы рисунок *наглядно* представлял исходные данные и концентрировал внимание.

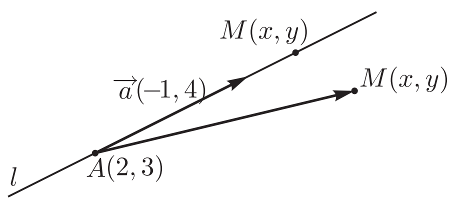

Рис. 7.16. Рисунок к примеру 7.1

Из рисунка абсолютно ясно, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{AM}$ параллельны, а условие параллельности обеспечивается пропорциональностью координат этих векторов, поскольку один из другого можно получить умножением на число (коэффициент пропорциональности). Остается лишь выписать координаты вектора $\overrightarrow{AM}(x-2, y-3)$ и условие их пропорциональности координатам вектора $\overrightarrow{a}(-1, 4)$:

$$l\colon \qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{4}.$$

Получить из канонического уравнения общее — задача элементарной арифметики и мы не будем этим заниматься, надеясь на то, что каждый читатель сможет это сделать самостоятельно!

Пример 7.2. Выписать уравнение прямой l, проходящей через точки $A(2,3)$ и $B(2,7)$.

Решение. Можно воспользоваться выведенным уравнением (7.3), но лучше порассуждать и вывести его в конкретном случае. Начнем с рисунка (рис. 7.17).

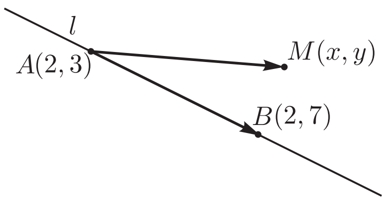

Рис. 7.17. Рисунок к примеру 7.2

Точки $A(2,3)$ и $B(2,7)$, принадлежащие прямой по условию задачи, задают вектор $\overrightarrow{AB}(0,4)$. Возьмем произвольную точку $M(x,y)$ на плоскости и построим вектор $\overrightarrow{AM}(x-2,y-3)$.

Ясно, что точка M будет лежать на прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{AM}$ будет параллелен вектору $\overrightarrow{AB}$, т. е. их координаты будут пропорциональны. Выписывая соответствующую пропорцию, получим ответ:

$$l\colon \qquad \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{4}.$$

Как странно! Кажется, рассуждали верно, арифметических ошибок тоже не допустили, а в знаменателе левой части уравнения стоит нуль. А «на нуль делить нельзя!» — истина, усвоенная еще в школе. Что это? Противоречие в математике или мы все же где-то ошиблись?

На самом деле никакого противоречия нет и ошибка не вкралась в наши вычисления. Дело в том, что пропорцию, которую мы записали, не всегда можно рассматривать как равенство дробей! В данной ситуации ее нужно воспринимать именно как «равное отношение чисел». А чтобы нуль в знаменателе «не резал глаз», воспользуемся свойствами пропорций:

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{произведение средних членов}\\ \text{равно произведению крайних}\end{array}$$
$$\Leftrightarrow 4\cdot(x-2) = 0\cdot(y-3) \Leftrightarrow x-2=0.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой — это $x=2$.

Пример 7.3. Написать уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(-1,0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}(5,2)$.

Решение. Начнем с рисунка (рис. 7.18), на котором отметим все известные данные и точку $M(x,y)$ с произвольными координатами. Очевидно, что точка M будет лежать на искомой прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}(x+1,y)$ будет перпендикулярен вектору $\overrightarrow{n}$.

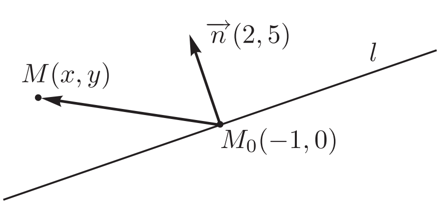

Рис. 7.18. Рисунок к примеру 7.3

Условие перпендикулярности векторов можно записать с помощью скалярного произведения:

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\overrightarrow{n} \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{n})=0.$$

Скалярное произведение $\overrightarrow{n}(5,2)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x+1,y)$ вычисляется через координаты следующим образом:

$$(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{n}) = 5(x+1)+2y.$$

Значит, требуемое уравнение имеет вид:

$$5(x+1)+2y=0.$$

Пример 7.4. Найти расстояние от начала координат до прямой l: $2x-y+4=0$.

Решение. Нам нужно привести уравнение прямой к нормальному виду и воспользоваться теоремой 43.2. Из уравнения прямой находим координаты нормали $\overrightarrow{N}(2,-1)$. Ее длина $|\overrightarrow{N}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Если теперь вектор $\overrightarrow{N}$ поделить на его длину, получим *единичный* вектор $\overrightarrow{n}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$, сонаправленный с $\overrightarrow{N}$.

Если теперь разделить все исходное уравнение прямой l на $\sqrt{5}$, получим уравнение

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{4}{\sqrt{5}} = 0,$$

описывающее ту же прямую, которое имеет почти нормальный вид, так как

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1.$$

Оно отличается от нормального уравнения лишь знаком свободного члена, так как в нормальном уравнении свободный член $-\rho$, где $\rho \geqslant 0$, а у нас $+\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Умножив все уравнение на (-1), получим нормальное уравнение:

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0$$

По теореме 43.2 искомое расстояние равно $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Пример 7.5. Найти расстояние от точки $A(1,2)$ до прямой l: $2x - y + 4 = 0$.

Решение. По следствию 43.3 нам нужно привести уравнение прямой к нормальному виду, подставить в него координаты точки A и взять модуль полученного числа. К нормальному виду уравнение этой прямой было уже приведено в предыдущем примере: $-\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{4}{\sqrt{5}} = 0$. Подставим в него координаты точки A и получим ответ:

$$\rho(A,l) = \left|-\frac{2}{\sqrt{5}}1 + \frac{1}{\sqrt{5}}2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Пример 7.6. Вычислить расстояние между параллельными прямыми:

$$l_1\colon \quad 2x - 3y + 4 = 0, \qquad l_2\colon \quad 2x - 3y + 2 = 0.$$

Решение. В примере 7.4 мы вычисляли расстояние от начала координат до прямой. Аналогичное вычисление можно произвести и в этом примере (рис. 7.19).

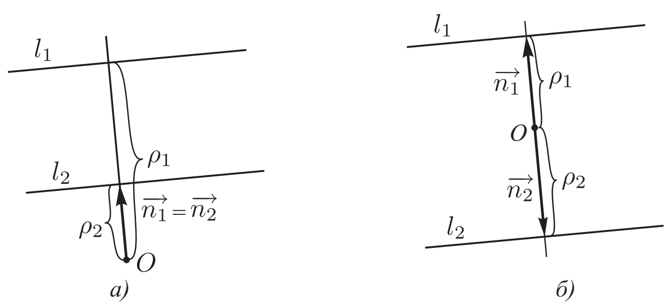

Рис. 7.19. Вычисление расстояния между параллельными прямыми

Нам нужно вычислить расстояние от начала координат до каждой из прямых, а затем сложить или взять модуль разности полученных значений в зависимости от положения начала координат относительно прямых (см. рис. 7.19).

Пока отложим выяснение вопроса о положении начала координат и вычислим расстояние от точки $O(0,0)$ до обеих прямых, пользуясь алгоритмом примера 7.4.

Сначала приведем уравнения прямых к нормальному виду, разделив их на нормирующий множитель $(-\sqrt{13})$:

$$l_1\colon\quad -\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{4}{\sqrt{13}}=0,\qquad l_2\colon\quad -\frac{2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}=0.$$

Отсюда $\rho(O,l_1)=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $\rho(O,l_2)=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Теперь, исходя из нормальных уравнений прямых, мы должны определить: складывать эти расстояния или вычитать. Напомню, что по теореме 43.2 нормаль к прямой, координаты которой стоят как коэффициенты в нормальном уравнении, направлена от начала координат к прямой! В нашей ситуации $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}(-\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}})$. Поэтому начало координат лежит, как показано на рис. 7.19, *а*. Следовательно, расстояние между прямыми получается как разность

$$\rho(l_1,l_2)=\rho(O,l_1)-\rho(O,l_2)=\frac{4}{\sqrt{13}}-\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Пример 7.7. Вычислить угол между прямыми

$$l_1\colon\quad x+3y-4=0,\qquad l_2\colon\quad 2x-y+7=0.$$

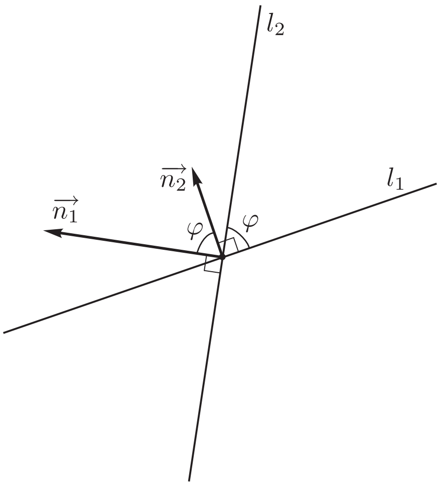

Рис. 7.20. К примеру 7.7

Решение. Пересекающиеся прямые образуют четыре попарно равных угла (рис. 7.20). Напомним, что углом между прямыми называется тот угол φ, величина которого не превосходит $\pi/2$. По уравнениям прямых можно определить координаты нормалей (в нашем случае $\overrightarrow{n_1}(1,3)$ и $\overrightarrow{n_2}(2,-1)$). Может оказаться, что угол между нормалями острый или прямой. Тогда, конечно, угол между прямыми совпадает с углом между нормалями. Однако угол ψ между нормалями может быть тупым. Тогда $\varphi+\psi=\pi$ и $\cos\psi=-\cos\varphi<0$. Но в любом случае, *косинус угла между прямыми равен абсолютной величине косинуса угла между нормалями.*

Вычислим косинус угла между векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Это можно сделать через скалярное произведение:

$$\cos\psi=\frac{(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}.$$

Скалярное произведение векторов, как и их длину, можно вычислять через координаты относительно ортонормированного базиса:

$$(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=1\cdot 2+3\cdot(-1)=2-3=-1;$$
$$|\overrightarrow{n_1}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10};\qquad |\overrightarrow{n_2}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}.$$

Итак, $\cos\psi=\frac{-1}{5\sqrt{2}}$. Так как $\cos\psi$ отрицателен, то угол ψ — тупой. Тогда искомый острый угол $\varphi=\pi-\psi$ и $\cos\varphi=|\cos(\psi)|=\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Следовательно, $\varphi=\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

Пример 7.8. Найти уравнение биссектрисы угла, образованного прямыми

$$l_1\colon\quad x+3y-4=0,\qquad l_2\colon\quad 2x-y+7=0.$$

Решение. Здесь надо воспользоваться одним из определяющих свойств биссектрисы, а именно: биссектриса состоит из точек, равноудаленных от сторон угла. Иными словами, для любой точки $M(x,y)$ на биссектрисе выполнено равенство: $\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)$.

Расстояние от точки до прямой мы уже вычисляли в примере 7.6. Для этого нужно перейти к нормальному уравнению:

$$l_1:\quad \frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{10}}=0,\qquad l_2:\quad -\frac{2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{7}{\sqrt{5}}=0.$$

Теперь

$$\rho(M,l_1)=\left|\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{10}}\right|;\ \rho(M,l_2)=\left|-\frac{2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{7}{\sqrt{5}}\right|.$$

Приравняем эти расстояния:

$$\left|\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{10}}\right|=\left|-\frac{2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{7}{\sqrt{5}}\right|.$$

По свойству биссектрисы точка $M(x,y)$ лежит на искомой биссектрисе тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют последнему соотношению. Однако это равенство не относится ни к одному из известных нам типов уравнений прямых, поскольку содержит модули. Избавимся от них, помня. что $|a|=|b|$ тогда и только тогда, когда $a=\pm b$:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{10}}&=-\frac{2x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}-\frac{7}{\sqrt{5}};\\ \frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{4}{\sqrt{10}}&=\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{y}{\sqrt{5}}+\frac{7}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Получилось два уравнения, что кажется странным. Ведь нам нужно было только уравнение биссектрисы. На самом деле все правильно. Дело в том, что прямые на плоскости образуют не одни угол, а четыре. Поэтому возникает четыре биссектрисы, причем биссектрисы вертикальных углов совпадают. Следовательно, в ответе должно быть два уравнения биссектрис b_1 и b_2.

Конечно, полученные уравнения неплохо было бы упростить:

$$\begin{aligned}b_1&:\quad (1+2\sqrt{2})x+(3-\sqrt{2})y-4+7\sqrt{2}=0;\\ b_2&:\quad (1-2\sqrt{2})x+(3+\sqrt{2})y-4-7\sqrt{2}=0.\end{aligned}$$

Контрольные вопросы

7.1. Сформулируйте основной подход к получению уравнений прямых.

7.2. Запишите общее уравнение прямой на плоскости. Каков смысл коэффициентов, стоящих перед переменными x и y?

7.3. Составьте уравнение прямой по точке, принадлежащей прямой, и направляющему вектору.

7.4. Составьте уравнение прямой по точке, принадлежащей прямой, и вектору нормали.

7.5. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом. Что означают параметры k и b?

7.6. Запишите уравнение прямой в отрезках на осях. Какие прямые не описываются этим уравнением?

7.7. Запишите уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(x_0,y_0)$. Какая прямая, проходящая через точку M_0, не описывается этим уравнением?

7.8. Опишите известные вам способы определения угла между прямыми.

7.9. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Задачи

7.1°. Лежат ли точки $M_1(2,-3)$, $M_2(-2,-3)$, $M_3(2,3)$ на прямой $x-3y+7=0$?

7.2°. Запишите уравнения прямых, проходящих через начало координат и составляющих с положительным направлением оси Ox угол:

а) 45^o; б) 90^o; в) 120^o; г) 135^o.

Постройте эти прямые.

7.3°. Прямая проходит через точку $A(2,0)$ под углом 45^o к положительному направлению оси Ox. Напишите уравнение этой прямой.

7.4°. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2,4)$ и $B(-1,3)$. Какие отрезки на координатных осях отсекает эта прямая?

7.5°. Постройте прямые $x+2y-6=0$; $y=-2x+1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, $2x+5=0$, $y+3=0$. Укажите их угловые коэффициенты.

7.6°. Треугольник задан координатами своих вершин $A(8,-2)$, $B(2,5)$, $C(0,0)$. Составьте уравнения его сторон и укажите углы наклона этих сторон к положительному направлению оси Ox.

7.7°. Прямая проходит через точку $M(1,3)$ параллельно прямой $3x-4y+1=0$. Запишите уравнение этой прямой. Какие отрезки на координатных осях она отсекает?

7.8°. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(-2,1)$ перпендикулярно прямой $2x+3y+5=0$.

7.9°. Найдите координаты точки пересечения прямых $2x-3y-1=0$ и $4x-y+3=0$.

7.10°. Стороны треугольника лежат на прямых, заданных уравнениями $3x-y-2=0$, $y=x-2$, $x-2=0$. Найдите координаты вершин треугольника.

7.11°. Прямая проходит через точки $A(2,0)$ и $B(0,4)$. Через точку $C(1,1)$ проведена прямая, перпендикулярная первой прямой. Напишите уравнения обеих прямых.

7.12°. Прямая проходит через точки $A(1,-1)$ и $B(3,1)$. Через точку $C(3,2)$ проведена прямая, параллельная первой прямой. Составьте уравнения обеих прямых.

7.13°. Прямая отсекает на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=2$ и $b=5$ соответственно. Составьте уравнение этой прямой и найдите ее угловой коэффициент.

7.14. Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку, концами которого служат точки $A(-3,3)$, $B(5,5)$.

7.15. Выпишите параметрические уравнения прямой на плоскости, проходящей через точку $A(1,-1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{a}(2,7)$.

7.16. Известно, что точки $O(0,0)$ и $A(4,0)$ являются вершинами параллелограмма, а его диагонали пересекаются в точке $B(0,2)$. Составьте уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

7.17. Найдите проекцию точки $M(-6,12)$ на прямую $4x+7y+5=0$.

7.18. Найдите проекцию точки $P(-3,6)$ на прямую, проходящую через точки $A(7,-9)$ и $B(0,-5)$.

7.19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,3)$ и отсекающей от координатных осей треугольник площадью $S=3$.

7.20. Диагонали квадрата пересекаются в точке $M(1,6)$, а одна из его сторон лежит на прямой $x+2y=23$. Напишите уравнения трех других сторон этого квадрата.

7.21. Треугольник задан координатами своих вершин $A(-3,4)$, $B(5,2)$, $C(8,2)$. Напишите уравнения медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из вершины B к стороне AC.

7.22. Найдите координаты точки пересечения медиан в треугольнике $\triangle ABC$, если $A(3,0)$, $B(1,-3)$, $C(1,3)$.

7.23. Найдите угол между прямыми, если:
а) $l_1: 3x-y+11=0$; $l_2: x+3y-7=0$.
б) $l_1: 3x+2y-1=0$; $l_2: A(1,4), B(-5,-11)$.
в) $l_1: A(0,1), B(6,-3)$; $l_2: M(3,8), N(-1,2)$.

7.24. Найдите внутренние углы в треугольнике $\triangle ABC$, заданном координатами вершин $A(1,-3)$, $B(0,0)$, $C(3,9)$.

7.25. Определите расстояние от точки $A(2,-5)$ до прямой $3x-y-5=0$.

7.26. Найдите расстояние от точки $M(-8,12)$ до прямой (AB), если $A(2,-3)$, $B(-5,1)$.

7.27. Вычислите расстояние между прямыми $x-2y=3$ и $2x-4y=7$, прежде доказав, что они параллельны.

7.28. Выпишите уравнения прямых, проходящих на расстоянии 4 единиц параллельно прямым:

$$\text{а) } 3x-4y+5=0; \quad \text{б) } y=\frac{3}{4}x+2; \quad \text{в) } x=3; \quad \text{г) } y=-1.$$

7.29. Найдите уравнения прямых, проходящих через точку $A(2,0)$ на расстоянии 3 единиц от точки $B(6,0)$.

7.30. Составьте уравнение прямой, параллельной двум данным прямым l_1 и l_2 и находящейся на одинаковом от них расстоянии, если l_1: $2x-5y+7=0$, $l_2: 4x-10y+9=0$.

7.31. В треугольнике $\triangle ABC$ известны вершина $A(5,-3)$ и уравнения двух высот: $2x-y=0$, $3x-7y+16=0$. Найдите уравнения сторон треугольника.

7.32. В треугольнике $\triangle ABC$ известны вершина $A(2,6)$, уравнение высоты $5x+2y-27=0$ и медианы $4x+5y-8=0$, проведенных из одной вершины. Составьте уравнения сторон треугольника.

7.33. В треугольнике $\triangle ABC$ известны вершина $A(1,3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$, $y-1=0$. Составьте уравнения сторон треугольника.

7.34. Для точки $P(0,10)$ найдите уравнение такой прямой, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми $x-3y+10=0$ и $2x+y-8=0$ делился в точке P пополам.

7.35. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ известны координаты концов гипотенузы $A(2,3)$, $B(1,0)$. Найдите уравнения катетов.

7.36. Даны вершины треугольника $\triangle ABC$: $A(-8,8)$, $B(2,-7)$, $C(-5,-3)$. Напишите уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины A к медиане, проведенной из вершины B.

7.37*. Докажите, что для каждой прямой существует, причем только одно, нормальное уравнение, которое ее описывает.

7.38*. Докажите, что тангенс угла между двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2y+b_2$, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

Тема 8

Плоскость

Следующий по сложности объект после прямой на плоскости — это плоскость в пространстве. Однако все усложнение сводится лишь к дополнительной координате. Поэтому читатель, усвоивший материал предыдущей темы, без особого труда поймет и эту тему.

47. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

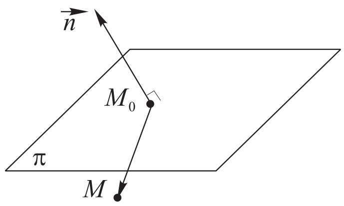

Рис. 8.1. Плоскость, проходящая через заданную точку перпендикулярно вектору

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\overrightarrow{n}(A, B, C)$. Требуется написать уравнение плоскости π, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}$ (рис. 8.1). Как и в случае прямой, возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ и выясним, при каких условиях она будет принадлежать плоскости π.

По условию плоскость π перпендикулярна вектору $\overrightarrow{n}$, поэтому любая прямая, принадлежащая этой плоскости, также ему перпендикулярна. В частности, прямая (M_0M) (а значит, и вектор $\overrightarrow{M_0M}$) перпендикулярна $\overrightarrow{n}$ тогда и только тогда, когда точка M попадает на плоскость π (см. рис. 8.1).

Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ вычисляются стандартным образом: $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, а перпендикулярность векторов равносильна тому, что их скалярное произведение равно нулю: $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид:

$$\pi: \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8.1}$$

В этом уравнении $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ — вектор, перпендикулярный плоскости π, который принято называть *нормалью* к плоскости, а (x_0, y_0, z_0) — координаты точки, через которую проходит плоскость.

48. Общее уравнение плоскости

Если в уравнении (8.1) раскрыть скобки и сгруппировать члены, получим

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0.$$

Так как выражение $(-(Ax_0 + By_0 + Cz_0))$ — просто константа, мы ее можем обозначить через D. В результате уравнение примет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8.2}$$

Такое уравнение называется *общим уравнением плоскости*. Мы помним, что (A, B, C) — координаты нормали к плоскости.

Как обычно, возникает вопрос: любое ли уравнение такого типа описывает некоторую плоскость? Прежде всего заметим, что если $(A, B, C) = (0, 0, 0)$, то уравнение либо не имеет решений (если $D \neq 0$), либо ему удовлетворяет любая точка пространства (если $D = 0$). Поэтому будем считать, что хотя бы одно из чисел A, B, C не равно нулю. Обозначим вектор с координатами (A, B, C) через $\overrightarrow{n}$ и попытаемся найти какую-нибудь точку, координаты которой удовлетворяют уравнению (8.2).

Так как $\overrightarrow{n}(A,B,C)\neq 0$, то одна из его координат обязательно отлична от нуля. Без ограничения общности предположим, что $A\neq 0$. Положив в уравнении $y=z=0$, получим простое соотношение для x:
$$Ax+D=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-D/A.$$
Таким образом, точка $M_0(-D/A,0,0)$ принадлежит множеству решений уравнения (8.2).

Если переписать уравнение (8.2) в виде
$$A(x+D/A)+By+Cz=0,$$
то его левую часть можно интерпретировать как скалярное произведение векторов
$$\overrightarrow{n}(A,B,C) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_0M}(x+D/A,y,z),$$
а само уравнение — как равенство нулю этого скалярного произведение, т. е. перпендикулярность векторов $\overrightarrow{n}(A,B,C)$ и $\overrightarrow{M_0M}(x+D/A,y,z)$. Значит, координаты (x,y,z) точки M удовлетворяют уравнению (8.2) тогда и только тогда, когда
$$\overrightarrow{n}(A,B,C)\perp\overrightarrow{M_0M}(x+D/A,y,z).$$
Но это означает, что точка $M(x,y,z)$ принадлежит плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n}(A,B,C)$.

Итак, мы доказали, что если $\overrightarrow{n}(A,B,C)\neq 0$, то уравнение (8.2) описывает некоторую плоскость, причем $\overrightarrow{n}(A,B,C)$ — нормаль к этой плоскости!

49. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Предположим, нам нужно написать уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, параллельно векторам $\overrightarrow{a}(a_x,a_y,a_z)$ и $\overrightarrow{b}(b_x,b_y,b_z)$. Заметим, что векторы должны быть неколлинеарны, так как в противном случае плоскость определена неоднозначно!

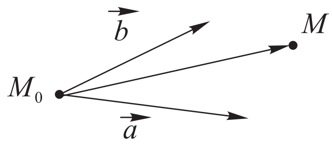

Рис. 8.2. Компланарные векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$

Обратимся к рис. 8.2. На нем изображены исходные данные и произвольная точка пространства $M(x,y,z)$. Задумаемся, при каких условиях точка M будет принадлежать нашей плоскости? Ясно, что это произойдет тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ будут компланарны. Последнее условие равносильно тому, что их смешанное произведение равно нулю. Осталось записать смешанное произведение в координатах и приравнять его нулю:
$$\pi:\qquad \langle\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\rangle=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0. \tag{8.3}$$

Помня о том, как раскрывается определитель, легко преобразовать полученное уравнение к общему виду:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$
$$=(x-x_0)(a_yb_z-a_zb_y)-(y-y_0)(a_xb_z-a_zb_x)+(z-z_0)(a_xb_y-a_xb_y)=0.$$
Однако не следует зубрить последнюю формулу. Лучше осознать алгоритм вывода уравнения (8.3). Более того, отвечая на соответствующий вопрос на экзамене, можно остановиться на

уравнении (8.3), не раскрывая определитель, а приводить уравнение плоскости к общему виду, если только в этом возникает необходимость при решении конкретной задачи (например, если нужно вычислить координаты нормали к этой плоскости).

Неплохо было бы в этот момент задать себе вопрос: а почему, собственно, уравнение (8.3) действительно описывает требуемую плоскость. Давайте убедимся в этом. Прежде всего проверим, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости π, подставив ее координаты вместо переменных (x, y, z) в уравнение. Получим определитель с нулевой строкой

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_0 & y_0 - y_0 & z_0 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

который, конечно, равен нулю. Значит, координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению (8.3), т. е. точка $M_0 \in \pi$.

Возьмем теперь произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ плоскости π и подставим ее координаты в левую часть уравнения (8.3):

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Фактически абсолютная величина этого определителя равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, поэтому он равен нулю тогда и только тогда, когда эти векторы будут параллельны одной плоскости, а именно, плоскости π. Это и означает, что $M_1 \in \pi$.

50. Параметрические уравнения плоскости

Подойдем к решению задачи, сформулированной в начале предыдущего вопроса, несколько иначе. Напомним, что нам нужно выписать уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\overrightarrow{b}(b_x, b_y, b_z)$.

Мы уже выяснили, что точка M будет принадлежать плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны. Кроме того, три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы. С другой стороны, векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ неколлинеарны, т. е. линейно независимы. Поэтому линейная зависимость векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ возможна только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ линейно выражается через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = t_1\overrightarrow{a} + t_2\overrightarrow{b},$$

где t_1 и t_2 — некоторые вещественные числа.

Подставим в последнее соотношение координаты, помня о том, что действия над векторами соответствуют действиям над координатами. Напомним также, что векторы равны тогда и только тогда, когда совпадают их координаты:

$$\begin{aligned}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t_1(a_x, a_y, a_z) + t_2(b_x, b_y, b_z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (t_1a_x, t_1a_y, t_1a_z) + (t_2b_x, t_2b_y, t_2b_z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (t_1a_x + t_2b_x, t_1a_y + t_2b_y, t_1a_z + t_2b_z).\end{aligned}$$

Отсюда параметрические уравнения плоскости можно записать в виде системы:

$$\pi\colon \quad \begin{cases} x = x_0 + t_1a_x + t_2b_x, \\ y = y_0 + t_1a_y + t_2b_y, \\ z = z_0 + t_1a_z + t_2b_z. \end{cases} \tag{8.4}$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) — координаты точки, через которую проходит плоскость, (a_x, a_y, a_z) и (b_x, b_y, b_z) — координаты векторов, которым плоскость параллельна, а t_1 и t_2 — параметры.

51. Уравнение плоскости, проходящей через две данные точки параллельно заданному вектору

Предположим, нам нужно выписать уравнение плоскости π, проходящей через данные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$. Рассмотрим соответствующий рисунок (рис. 8.3, *а*), на котором отметим произвольную точку пространства $M(x, y, z)$.

Поскольку точки M_0 и M_1 принадлежат плоскости π, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ будет ей параллелен (рис. 8.3, *б*). Таким образом, задача сводится к составлению уравнения плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно двум векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$, что мы уже умеем делать (стр. 55).

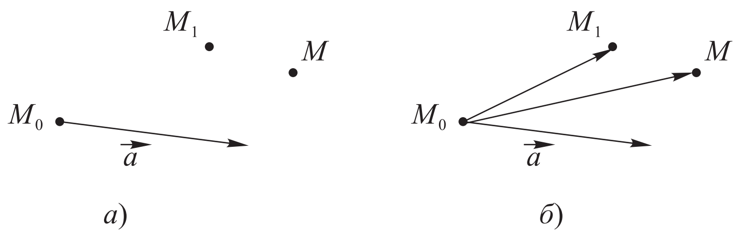

Рис. 8.3. Плоскость, проходящая через две точки параллельно заданному вектору

С другой стороны, полезно еще раз продумать, как получаются такие уравнения. Исследуя рис. 8.3, *б*, легко понять, что точка M попадет на плоскость π тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю.

Для вычисления смешанного произведения потребуются координаты векторов $\overrightarrow{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

Смешанное произведение вычисляется через определитель:

$$\langle \overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{a} \rangle = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Осталось приравнять этот определитель нулю и получить искомое уравнение:

$$\pi: \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0. \tag{8.5}$$

Теперь полезно проверить, что (8.5) действительно является уравнением требуемой плоскости. Проделайте это самостоятельно, следуя рассуждениям, приведенным на стр. 56.

52. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

В этом разделе нам предстоит выписать уравнение плоскости π, если известно, что она проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

В одном из предыдущих вопросов (стр. 55) разобрано, как выписывается уравнение плоскости, если известны координаты параллельных ей векторов и точка, лежащая в плоскости. Такие векторы получатся, если соединить точки M_0 и M_1, M_0 и M_2. Координаты векторов вычисляются стандартным образом:

$$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \quad \overrightarrow{M_0M_2}(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).$$

Введем произвольную точку пространства $M(x, y, z)$ и рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

По аналогии с предыдущими случаями выпишем уравнение:

$$\pi: \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.6}$$

Проверьте, что это уравнение действительно описывает нужную плоскость!

53. Взаимное расположение плоскостей

Из школьного курса геометрии известно, что две плоскости могут пересекаться или быть параллельными. Причем во втором случае они могут совпадать. Иначе говоря, плоскости π_1 и π_2 могут находиться в одном из трех положений:

1) совпадают: $\pi_1 = \pi_2$;

2) параллельны, но не совпадают: $\pi_1 || \pi_2$, $\pi_1 \neq \pi_2$;

3) пересекаются по прямой l: $\pi_1 \cap \pi_2 = l$.

Задача состоит в том, чтобы научиться определять взаимное расположение плоскостей по их общим уравнениям (8.2):

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ \pi_2: &\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что если второе из этих уравнений получается из первого умножением на ненулевое число, то уравнения равносильны, т. е. множества их решений совпадают. Значит, и соответствующие плоскости совпадают. Этот факт можно записать следующим образом:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{8.7}$$

Предположим теперь, что последнее из равенств нарушается:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \tag{8.8}$$

Так как при этом

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

то координаты векторов $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ пропорциональны, а значит, эти векторы коллинеарны. Однако $\overrightarrow{n}_1$ — нормаль к плоскости π_1 (стр. 55), а $\overrightarrow{n}_2$ — нормаль к плоскости π_2 (стр. 55). Значит, они будут параллельны тогда и только тогда, когда сами плоскости параллельны. Поэтому условие (8.8) означает параллельность несовпадающих плоскостей π_1 и π_2.

Наконец, плоскости будут пересекаться тогда и только тогда, когда их нормали непараллельны. Иначе говоря, координаты нормалей должны быть непропорциональны.

54. Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим еще одно уравнение плоскости, позволяющее удобно описывать расположение плоскости относительно координатных осей и координатных плоскостей декартовой системы координат.

54.1. Общий случай уравнения плоскости в отрезках.

Пусть уравнение плоскости π задано общим уравнением (8.2) с $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ и $D \neq 0$. Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = -D \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Введем обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ и перепишем полученное уравнение плоскости в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{8.9}$$

Такое уравнение называют *уравнением плоскости в отрезках.* В уравнении (8.9) параметры a, b, c могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Название уравнения объясняется геометрическим смыслом входящих в него параметров a, b, c. Действительно, полагая $y = 0$, $z = 0$ из уравнения (8.9) получаем точку $P(a, 0, 0)$ — точку пересечения плоскости π с осью Ox (см. рис. 8.4). Аналогично $Q(0, b, 0)$ — точка пересечения плоскости с осью Oy, а $R(0, 0, c)$ — точка пересечения плоскости с осью Oz. Как видно из рис. 8.4, $|a|$, $|b|$ и $|c|$ — длины отрезков, отсекаемых плоскостью π от координатных осей, поэтому уравнение (8.9) называют уравнением плоскости в отрезках.

54.2. Построение плоскости в декартовой системе координат. В предыдущих вопросах мы рассматривали плоскость, заданную теми или иными параметрами. Однако, изобразить плоскость, например, по заданной точке и вектору нормали сложно и требует хорошего воображения. Построить плоскость по трем точкам или по точке и двум векторам плоскости несложно, но такие построения не позволят определить положение плоскости в системе координат. Таким образом, если построение прямой на плоскости (например, по уравнению или по двум точкам) не представляет сложности, то построение плоскости часто вызывает непреодолимые трудности.

Если плоскость задана в отрезках на осях, то, как это было сделано выше на рис. 8.4, изобразить плоскость легко и просто. Действительно, для изображения плоскости π строим точки пересечения плоскости с координатными осями — P, Q, R. Затем, построив прямые (PQ), (QR), (PR), получаем изображение плоскости π.

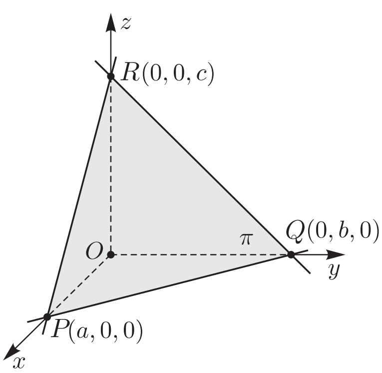

Рис. 8.4. Уравнение плоскости в отрезках

При выводе уравнения (8.9) мы предполагали, что $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ и $D \neq 0$. Рассмотрим *неполные уравнения плоскости*, когда один или пара коэффициентов из A, B, C равны нулю.

Пусть $A = 0$, тогда общее уравнение плоскости (8.2) принимает вид

$$By + Cz + D = 0,$$

а уравнение в отрезках на осях будет

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Так как уравнение плоскости не содержит переменной x, то такая плоскость π параллельна оси Ox.

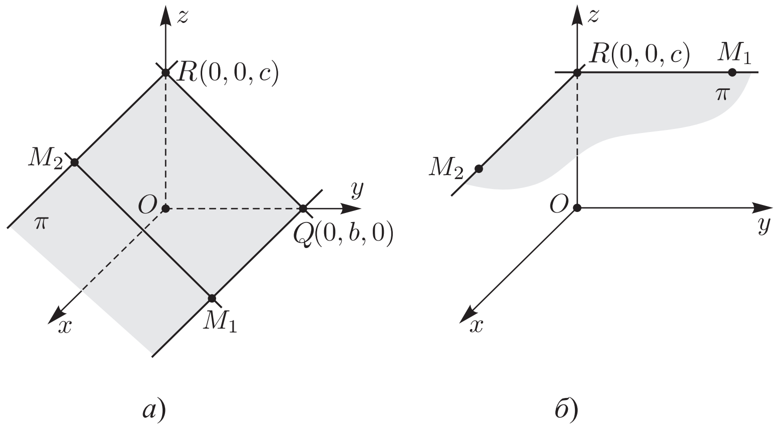

Рис. 8.5. Частные случаи расположения плоскости в системе координат

Для построения плоскости, параллельной оси Ox, отмечаем точки $Q(0, b, 0)$ и $R(0, 0, c)$ пересечения плоскости соответственно с осями Oy и Oz (см. рис. 8.5, *а*). Строим прямую (QR). Далее строим прямые QM_1 и RM_2, проходящие через точки Q и R и параллельные оси Ox. В результате получаем изображение плоскости π, параллельной оси Ox, (см. рис. 8.5, *а*).

При $A = 0$ и $B = 0$ общим уравнением плоскости (8.2) является

$$Cz + D = 0,$$

уравнение в отрезках на осях:

$$\frac{z}{c} = 1.$$

Так как уравнение плоскости не содержит переменных x и y, то такая плоскость π параллельна и оси Ox, и оси Oy, т. е. плоскость π параллельна плоскости Oxy (см. рис. 8.5, *б*).

Для построения плоскости, параллельной плоскости Oxy, через точку $R(0, 0, c)$ пересечения плоскости π с осью Oz строятся прямые (RM_1) и (RM_2), параллельные координатным осям Oy и Oz (лежащие соответственно в координатных плоскостях Oyz и Oxz), как на рис. 8.5, *б*.

Распишите и проиллюстрируйте самостоятельно остальные частные случаи, когда плоскость параллельна другим координатным осям или координатным плоскостям.

Осталось рассмотреть случай, когда $D = 0$ при $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Общее уравнение плоскости (8.2) принимает вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

При $D = 0$ это уравнение нельзя привести к уравнению в отрезках на осях.

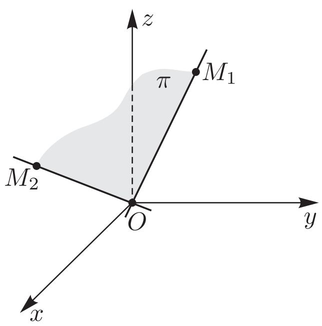

Рис. 8.6. Плоскость, проходящая через начало координат

Так как точка $O(0, 0, 0)$ удовлетворяет полученному уравнению, то плоскость проходит через начало координат. Воспользуемся этим фактом для построения плоскости π.

Вы, наверно, обратили внимание, что на рис. 8.4, рис. 8.5 при изображении плоскости π строились линии пересечения плоскости с координатными плоскостями. Воспользуемся таким же приемом при построении плоскости, проходящей через начало координат.

В координатной плоскости Oyz $x = 0$, поэтому уравнение линии пересечения плоскости π с Oyz имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ By + Cz = 0. \end{cases}$$

Строим эту прямую, которая проходит через начало координат (см. рис. 8.6).

Также строим линию пересечения плоскости π с Oxz:

$$\begin{cases} y = 0, \\ Ax + Cz = 0. \end{cases}$$

Построенные прямые иллюстрируют плоскость π (см. рис. 8.6).

55. Нормальное уравнение плоскости

Теперь нам нужно научиться вычислять расстояние от точки до плоскости, если точка задана своими координатами, а плоскость — уравнением. Здесь также наблюдается полная аналогия с прямой (стр. 42).

55.1. Определение. Уравнение плоскости $\alpha x + \beta y + \gamma z - \rho = 0$ называется *нормальным*, если

1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$;

2) $\rho \geqslant 0$.

Теперь научимся вычислять расстояние от начала координат до плоскости, заданной нормальным уравнением.

55.2. Теорема. Пусть плоскость π задана нормальным уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z - \rho = 0$. Тогда

1) нормаль к плоскости имеет единичную длину $|\overrightarrow{n}| = 1$;

2) нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена от начала координат к плоскости;

3) расстояние от начала координат до плоскости π равно ρ.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из условия теоремы и тех фактов, что нормаль к плоскости имеет координаты $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ (стр. 55), а длина вектора через его координаты вычисляется по стандартной формуле.

Для доказательства последних утверждений из начала координат опустим перпендикуляр на плоскость π и обозначим его основание через M_0. Тогда $M_0 \in \pi$ (рис. 8.7).

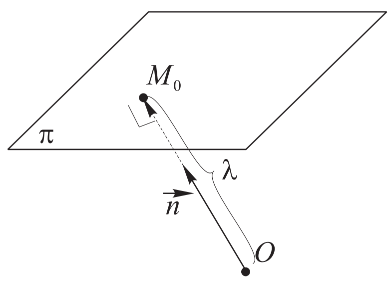

Рис. 8.7. Нормальное уравнение плоскости

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Поскольку $\overrightarrow{OM_0}$ перпендикулярен плоскости π, то $\overrightarrow{OM_0} || \overrightarrow{n}$. Значит, их координаты пропорциональны. Иными словами, найдется такое число λ, что $x_0 = \lambda\alpha$, $y_0 = \lambda\beta$, $z_0 = \lambda\gamma$ (координаты вектора $\overrightarrow{OM_0}$ равны (x_0, y_0, z_0)).

Обратите внимание, что если $\lambda \geqslant 0$, то векторы $\overrightarrow{OM_0}$ и $\overrightarrow{n}$ сонаправлены (как на рис. 8.7), что означает справедливость второго утверждения. Кроме того, $|\lambda|$ — это в точности длина вектора $\overrightarrow{OM_0}$ (так как $\overrightarrow{OM_0} = \lambda\overrightarrow{n}$ и $|\overrightarrow{OM_0}| = |\lambda|\cdot|\overrightarrow{n}| = |\lambda|\cdot 1 = |\lambda|$).

Поскольку точка $M_0 \in \pi$, ее координаты $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma)$ должны удовлетворять уравнению плоскости, т. е. соотношение

$$\alpha(\lambda\alpha) + \beta(\lambda\beta) + \gamma(\lambda\gamma) - \rho = 0$$

является истинным равенством. Преобразуем его:

$$\alpha(\lambda\alpha) + \beta(\lambda\beta) + \gamma(\lambda\gamma) - \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \rho.$$

Итак, мы получили, что $\lambda = \rho \geqslant 0$. Отсюда следует, что, во-первых, расстояние от начала координат до плоскости π равно ρ, а, во-вторых, нормаль $\overrightarrow{n}$ направлена от начала координат к плоскости π, как на рис. 8.7 (почему?). □

Теперь, как и в случае прямой, вычислим расстояние от произвольной точки до плоскости, заданной нормальным уравнением.

55.3. Теорема. Если плоскость π задана нормальным уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z - \rho = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости равно

$$\big|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \rho\big|.$$

Доказательство. Мы знаем, как вычислить расстояние от начала координат до плоскости. Поэтому для решения поставленной задачи стоит ввести новую систему координат M_0uvw, начало которой совпадает с точкой M_0 (рис. 8.8).

Из рисунка видно, что $u = x - x_0$, $v = y - y_0$ и $w = z - z_0$. Выражая отсюда x, y и z и подставляя их в уравнение плоскости π, получаем уравнение плоскости в новой системе координат:

$$\pi\colon \qquad \alpha(x_0 + u) + \beta(y_0 + v) + \gamma(z_0 + w) - \rho = 0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\pi\colon \qquad \alpha u + \beta v + \gamma w - (\rho - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0) = 0. \tag{8.10}$$

Согласно формулировке теоремы, уравнение плоскости π в системе координат $Oxyz$ является нормальным, значит $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Поэтому, если $(\rho - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0) \geqslant 0$, то уравнение (8.10), описывающее ту же плоскость в системе координат M_0uvw, тоже нормальное и расстояние от начала координат этой системы (т. е. от M_0) до π равно $\rho - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0$ (по теореме 55.2). Если же $(\rho - \alpha x_0 - \beta y_0 - \gamma z_0) < 0$, то нормальным будет уравнение

$$\pi\colon \qquad -\alpha u - \beta v - \gamma w - (-\rho + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = 0$$

и тогда искомое расстояние равно $(-\rho + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)$.

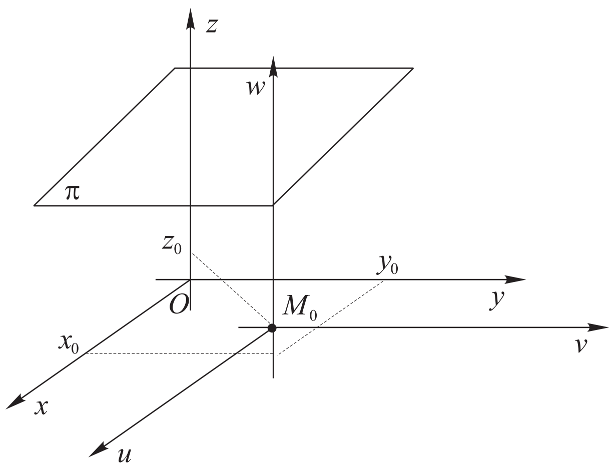

Рис. 8.8. Система координат M_0uvw в системе координат $Oxyz$

Таким образом, в любом случае можно утверждать, что расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной нормальным уравнением $\alpha x + \beta y + \gamma z - \rho = 0$, равно

$$\rho(M_0, \pi) = \big|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - \rho\big|. \ \square \tag{8.11}$$

Примеры решения типовых задач

Пример 8.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,2,-3)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = -3\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-2, z+3).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{n}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, что в координатной форме запишется следующим образом:

$$-3(x-1) + 5(y-2) + 2(z+3) = 0.$$

Отсюда после упрощения получается уравнение плоскости:

$$3x - 5y - 2z + 1 = 0.$$

Пример 8.2. Плоскость проходит через точку $M(0,1,2)$ параллельно векторам $\overrightarrow{l} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{m} = -\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Написать уравнение этой плоскости.

Решение. Из определения векторного произведения вектором нормали к плоскости является вектор

$$\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{l}, \overrightarrow{m}] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}.$$

Дальнейший ход решения полностью соответствует тем действиям, которые были выполнены в предыдущей задаче:

$$5\cdot(x-0) + 1\cdot(y-1) + 1\cdot(z-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + y + z - 3 = 0.$$

Уравнение плоскости получено, задача решена. Тем не менее, рассмотрим решение с другой точки зрения.

Обратите внимание, что сначала было найдено векторное произведение двух векторов, а затем полученный вектор скалярно умножен на вектор $\overrightarrow{AM}$, т. е. фактически вычислено смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AM}(x, y-1, z-2)$, $\overrightarrow{l}(-1,2,3)$ и $\overrightarrow{m}(0,-1,1)$, которые являются компланарными (подумайте, почему). Запишем смешанное произведение компланарных векторов:

$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{l}, \overrightarrow{m} \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\big(2\cdot 1 - 3\cdot(-1)\big) - (y-1)\big(-1\cdot 1 - 3\cdot 0\big) + (z-2)\big((-1)\cdot(-1) - 2\cdot 0\big) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5x + y - 1 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow 5x + y + z - 3 = 0.$$

Итак, получилось такое же уравнение плоскости.

Пример 8.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0,1,2)$ и $B(-2,1,0)$ параллельно вектору $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

Решение. Выберем произвольную точку $M(x,y,z)$, принадлежащую данной плоскости. Запишем координаты следующих векторов:

$$\overrightarrow{AM}(x, y-1, z-2), \quad \overrightarrow{AB}(-2, 0, -2).$$

Векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{s}$ компланарны, а значит, их смешанное произведение равно нулю, что можно записать через определитель:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z + 2 = 0.$$

Обратите внимание, что в полученном уравнении отсутствует переменная y, поэтому данная плоскость параллельна оси Oy.

Пример 8.4. Напишите уравнение плоскости π, проходящей через точки $A(1,2,-1)$, $B(2,1,3)$, $C(0,-2,4)$.

Решение. Пусть $M(x,y,z)$ — текущая точка плоскости. Тогда все четыре точки M, A, B, C лежат в плоскости π. Запишем координаты трех направленных отрезков с общим началом, принадлежащих π, например

$$\overrightarrow{AM}(x-1, y-2, z+1),\ \overrightarrow{AB}(1,-1,4),\ \overrightarrow{AC}(-1,-4,5).$$

Так как векторы, чьими геометрическими реализациями являются эти направленные отрезки, компланарны, то смешанное произведение этих векторов равно нулю:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ 11x - 9y - 5z + 2 = 0.$$

Задача решена.

Пример 8.5. Вычислите расстояние от точки $M(5,-2,0)$ до плоскости $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Решение. Эту задачу, как и многие другие, можно решить несколькими способами. Например, искомое расстояние от точки до плоскости можно найти, записав уравнение заданной плоскости в нормальном виде и применив теорему 55.3.

Тем не менее, для решения ряда задач имеет смысл получить готовую формулу вычисления расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением. Переход от общего уравнения плоскости к нормальному осуществим, поделив правую и левую часть уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

на величину $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, если $D < 0$, или на величину $-\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, если $D \geqslant 0$. В результате одно из уравнений

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

или

$$-\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

является нормальным. Справедливость этого утверждения проверьте самостоятельно с помощью определения 55.1. Для любого полученного уравнения согласно теореме 55.3 расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8.12}$$

Для окончательного решения задачи нам осталось применить формулу (8.12) к исходным данным, т. е.

$$\rho = \frac{|2\cdot 5 + 1\cdot(-2) - 2\cdot 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{12}{3} = 4.$$

Пример 8.6. Даны плоскости π_1: $x - y + 2z - 3 = 0$ и $\pi_2 : 2x - 2y + 4z - 5 = 0$. Выясните, параллельны ли эти плоскости, и если да, то найдите расстояние между ними.

Решение. Сначала изучим взаимное расположение заданных плоскостей. Согласно формуле (8.8), плоскости π_1 и π_2 параллельны, так как коэффициенты в уравнениях при x, y и z пропорциональны:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4}.$$

Отметим, что плоскости π_1 и π_2 не совпадают, так как условие (8.7) не выполняется:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}.$$

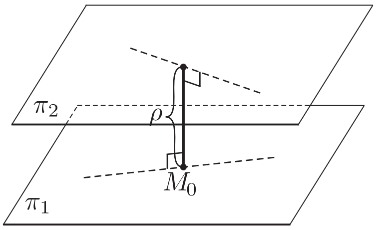

Рис. 8.9. Рисунок к задаче 8.6

Чтобы найти расстояние между плоскостями, выберем точку на одной из плоскостей и найдем расстояние от этой точки до второй плоскости (см. рис. 8.9). На плоскости π_1 возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, для координат которой справедливо равенство

$$x_0 - y_0 + 2z_0 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 - y_0 + 2z_0 = 3.$$

Расстояние от точки M_0 до плоскости π_2 находим по формуле (8.12):

$$\rho = \frac{|2x_0 - 2y_0 + 4z_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|2(x_0 - y_0 + 2z_0) - 5|}{\sqrt{24}}.$$

Подставив полученное выше равенство $x_0 - y_0 + 2z_0 = 3$ в последнее соотношение, получаем

$$\rho = \frac{|2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Есть и другой способ вычисления расстояния между параллельными плоскостями. Он аналогичен методу, с помощью которого вычислялось расстояние между параллельными прямыми на плоскости (стр. 49). Решите задачу этого примера таким способом самостоятельно.

Пример 8.7. Даны плоскости π_1: $x + y + 2z - 3 = 0$ и π_2: $2x - y + 4z - 5 = 0$. Найдите величину двугранного угла между ними.

Решение. Пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла в пространстве. Их величины φ и ψ попарно равны, причем $\varphi + \psi = \pi$. Углом между плоскостями называется величина меньшего из углов φ и ψ.

Возьмем нормали к этим плоскостям $\overrightarrow{n_1}(1, 1, 2)$ и $\overrightarrow{n_2}(2, -1, 4)$. Если угол между ними не превосходит $\pi/2$, то он совпадает с углом между плоскостями (почему?). А если этот угол тупой, то сумма углов между нормалями и плоскостями составит π. В любом случае косинус угла между плоскостями вычисляется как

$$\cos\varphi = \left|\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}})\right|.$$

Угол между векторами вычисляется через скалярное произведение:

$$\cos\varphi = \left|\frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{126}}.$$

Контрольные вопросы

8.1. Запишите уравнение плоскости в общем виде. Каков геометрический смысл коэффициентов, стоящих в этом уравнении перед x, y, z?

8.2. Запишите уравнение плоскости по точке, принадлежащей этой плоскости, и вектору нормали.

8.3. Как составить уравнение плоскости, проходящей через три точки?

8.4. Опишите различные случаи неполных уравнений плоскостей.

8.5. Запишите уравнение плоскости в отрезках. Укажите координаты какой-либо из нормалей к этой плоскости. Какие плоскости не описываются уравнением в отрезках?

8.6. Какое уравнение плоскости называется нормальным? Как определить расстояние от начала координат до плоскости?

8.7. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

8.8. Каким образом можно определить угол между плоскостями?

Задачи

8.1°. Постройте плоскости:

а) $2x + 3y + z = 6$; б) $x - 4y + z - 5 = 0$; в) $x - y - z = 0$;
г) $x + 2y - 3z = 0$; д) $4x + y = 8$; е) $x + z - 2 = 0$;
ж) $x - 3 = 0$; з) $2y = 5$.

В каких точках эти плоскости пересекают координатные оси?

8.2°. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -2, -1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k}$.

8.3°. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 1, 0)$ и параллельной векторам $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ и $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

8.4°. Плоскость проходит через точки $A(-2, 3, 4)$ и $B(1, 0, 1)$ параллельно вектору $\overrightarrow{l}(1, -1, 2)$. Найдите уравнение этой плоскости.

8.5°. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(0, -1, 6)$, $B(1, 1, 5)$ и $C(1, 4, 5)$.

8.6°. Уравнения данных плоскостей запишите в нормальном виде:

а) $2x - 2y + z - 3 = 0$; б) $x + 2y - z + 1 = 0$;
в) $4x - 4y - 2z + 1 = 0$; г) $3y - z + 2 = 0$;
д) $3x + 4z - 1 = 0$; е) $-x + 3 = 0$.

8.7. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, 0)$ и $B(-2, 0, 1)$ параллельно оси Ox.

8.8. Плоскость содержит ось Oy и точку $C(1, 3, 2)$. Запишите уравнение этой плоскости.

8.9. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $D(-2, -3, 1)$ параллельно координатной плоскости Oyz.

8.10. Даны точки $P(4, -7, 2)$ и $Q(5, -3, 1)$. Плоскость проходит через точку P перпендикулярно вектору $\overrightarrow{QP}$. Найдите уравнение этой плоскости.

8.11. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $A(0, 1, -2)$ параллельно плоскости $2x - y - 4z + 3 = 0$.

8.12. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-2, 3, 1)$ и $K(1, 0, 3)$ перпендикулярно плоскости $5x + 2y + z - 1 = 0$.

8.13. Даны уравнения плоскостей:

а) $x - 2y + z + 3 = 0$; б) $4x + 2y - 1 = 0$;
в) $2x - y + 7 = 0$; г) $3x - 6y + 3z + 1 = 0$;
д) $3x - 1 = 0$; е) $z = 2$.

Из этих плоскостей выберите пары параллельных и перпендикулярных плоскостей.

8.14. Плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy, Oz отрезки $1, 5, 4$ соответственно. Составьте уравнение этой плоскости и укажите координаты одной из нормалей к этой плоскости.

8.15. Плоскость параллельна оси Ox и отсекает на осях Oy и Oz отрезки 2 и 3 соответственно. Запишите уравнение этой плоскости.

8.16. Найдите угол между плоскостями:

а) $x + y + 1 = 0,\ y - z + 1 = 0$; б) $x - 3y - 2z + 1 = 0,\ x + y - z + 2 = 0$;
в) $x - y + 1 = 0,\ -4x + 4y + 3 = 0$; г) $z = 1,\ z = x$;
д) $3x - y = 0,\ 2x + y + 2 = 0$; е) $4x + 3z + 7 = 0,\ x + 2y + 2z + 3 = 0$.

8.17. Найдите расстояние от точки $M(5, -2, 0)$ до плоскости $2x + y - 2z + 4 = 0$.

8.18. Определите расстояние между параллельными плоскостями $x - 2y + 2z + 1 = 0$ и $4x - 8y + 8z - 4 = 0$. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от этих плоскостей.

8.19. Напишите уравнения плоскостей, параллельных плоскости $6x - 2y + 3z + 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 2.

8.20. Определите координаты точки пересечения плоскостей $2x - y + z = 2$; $3x + 2y + 2z = -2$; $x - 2y + z = 1$.

8.21. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x - 2y + z = 4$, $2x + 3y - z = 3$ и точку $A(0, 1, 2)$.

8.22. Приведите уравнения плоскостей к нормальному виду и определите расстояние от начала координат до этих плоскостей:

а) $2x + y - 2z + 3 = 0$; б) $3x - y + z + 2 = 0$;
в) $x - y + 2z - 3 = 0$; г) $4x + 2y - z + 2 = 0$.

8.23*. Найдите координаты проекции точки $A(2, -1, 2)$ на плоскость $3x - y + z + 2 = 0$.

8.24*. Вычислите координаты точки Q, симметричной точке $P(2, 1, 1)$ относительно плоскости $x - 2y - z + 3 = 0$.

8.25*. Найдите уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол, образованный плоскостями:

а) $x + y = 0,\ x + z = 1$; б) $2x + 2y + z + 9 = 0,\ 4y + 3z - 1 = 0$.

Указание: точки плоскости, делящей пополам двугранный угол, отстоят от его граней на одинаковых расстояниях.

8.26*. Плоскость $2x - y + 2z = 0$ является биссекторной плоскостью двугранного угла, образованного плоскостью $\pi_1 : 2x + 4y - 4z - 5 = 0$ и плоскостью π_2. Найдите уравнение плоскости π_2.

8.27*. Найдите тот угол между плоскостями $x - 4y - 2z - 8 = 0$ и $-6x - 3y + z - 6 = 0$, в котором лежит точка $A(0, -2, 4)$.

8.28*. Найдите центр шара, вписанного в тетраэдр, заданного вершинами $A(-6, 4, 4)$, $B(-1, 0, -3)$, $C(-3, -2, -2)$ и $D(1, -4, 2)$.

Кулешов Сергей Алексеевич, дфмн, профессор кафедры "Высшая математика" Военно-воздушной Академии имени проф. Н. Е. Жуковского. Email: KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна, кпн, доцент той же кафедры. Email: afsalimova@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович, кфмн, доцент той же кафедры. Email: stav@inm.ras.ru

Информация

От редакции

Электронные ресурсы А. Г. Мякишева

Публикации нашего постоянного автора А. Г. Мякишева можно найти по адресу:

http://www.geometry.ru/persons/myakishev/text.htm

В электронном журнале “Полином”, номер 2 опубликована его статья о треугольных фракталах:

http://www.mathedu.ru/e-journal/

Электронная версия статьи Ю. А. Неретина

Электронная версия статьи Ю. А. Неретина, опубликованной в номере 2(50), 2009 г., находится на сайте

www.polit.ru

Замеченная опечатка в номере 2(50), 2009 г.

На стр. 1 (оглавление), строка 12 снизу:

напечатано: “черырехугольника”; следует читать: “четырехугольника”.

То же на стр. 31, строка 2 сверху.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2009 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2009 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Mathematical Education №4(52), 2009

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776