ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

Год четырнадцатый

№ 2 (54)

апрель – июнь 2010 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 2 (54), 2010 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2010 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.06.2010 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г.Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 6,5 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 2 (54), апрель – июнь 2010 г.

Содержание

Материалы конференции, посвященной 105-летию академика С. М. Никольского

Студентам и преподавателям математических специальностей

Материалы конференции, посвященной 105-летию

академика С. М. Никольского

17-19 мая текущего года на механико-математическом факультет МГУ имени М.В.Ломоносова состоялась Международная научная конференция “Современные проблемы анализа и преподавания математики”, посвященная 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского. Был выпущен сборник тезисов докладов участников конференции. Редакция журнала “Математическое образование”, по договоренности с руководителями секции преподавания математики, предоставила возможность развернутых публикаций для участников секции. Подборка статей открывается программной работой Заслуженного профессора МГУ Николая Христовича Розова “Какой будет школьная математика в 2050 году?”. Далее статьи идут в алфавитном порядке в соответствии с фамилией первого автора. В конце приведены сведения об авторах, в общем алфавитном порядке.

Какой будет школьная математика в 2050 году?

Н. Х. Розов, г. Москва

Наступивший 21-ый век ознаменован радикальным переосмыслением политических, экономических, социальных, общественных, культурных и др. аспектов нашего бытия. Мы стали свидетелями зарождения новой парадигмы образования, внедрения новой его структуризации, разработки новых методик передачи знаний и новых информационно-компьютерных технологий обучения. Сегодня мы с восхищением говорим о выдающихся успехах физики, химии, биологии, техники, об открытиях нанотехнологий, биотехнологий, генной инженерии, о принципиально новой концепции нелинейного мира.

Как же должны эволюционировать содержание программы средней школы и методика преподнесения информации “массовому ученику”, чтобы в полной мере отвечать современным вызовам конкретной личности, общества в целом и быстротекущего времени? Несомненно, что школа должна знакомить учеников — пусть в простейшей форме, пусть описательно и фрагментарно — с новейшими достижениями естественных и гуманитарных наук.

За минувшее столетие математическая наука шагнула необычайно далеко вперед. Она породила новые понятия, обогатилась выдающимися результатами, разрешила важные проблемы. Она все увереннее превращается в мощный и надежный инструментарий для анализа и прогнозирования природных явлений, технических и технологических процессов, общественных ситуаций и гуманитарных вопросов. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров породило принципиально новое направление научного познания — математическое моделирование и математический эксперимент.

В математической науке содержательно изменилось почти все. Но почти ничего содержательно не изменилось в программе математики для школы. Школьники по-прежнему пребывают на рубеже 17-18 веков по алгебре и почти в Древней Греции по геометрии. Бесконечные упражнения в проведении формальных преобразований, не имеющих осязаемых реальных приложений, заполняют львиную долю учебного времени. А имеющие общеобразовательное значение фундаментальные математические понятия по-прежнему остаются неведомы учащимся.

Практически в полной неприкосновенности остается и методика преподавания математики в массовой школе, не смотря на все разговоры о привлечении информационно-компьютерных технологий, о внедрении дифференцированного обучения школьников, о необходимости личностно-ориентированного подхода к каждому учащемуся и проч.

Что же — все так и останется к 2050 году? Или нам, профессиональным математикам и педагогам, уместно уже сейчас поставить перед собой вопрос: как должна меняться программа курса математики общеобразовательной средней школы и методика его преподавания?

Содержание программы. Проблема содержания курса математики общеобразовательной школы — болезненный и неоднозначный вопрос. С одной стороны, оставлять знания школьников на уровне 18 века невозможно. С другой — безумно пытаться внедрить в школу элементы функционального анализа.

Но не будем забывать, что, помимо специфических (чисто математических) понятий, математика создала и важные общеобразовательные понятия, имеющие общекультурное, цивилизационное значение и широко используемые в физике и технике, в социологи и биологи, в философии общественной жизни. И общеобразовательная школа обязана знакомить молодежь с этими понятиями, хотя бы в описательно-наглядном плане.

Сегодня все чаще возникает необходимость быстро провести вычисления для приближенной прикидки интересующей величины. Значит, выпускника школы надо научить простейшим вычислительным алгоритмам, которые можно реализовать с помощью компьютера.

Наконец, школьный курс математики должен быть прагматичен, то есть учить ориентироваться в жизни, разбираться в нестандартных ситуациях, обеспечивать свою безопасность в самом широком смысле.

Бифуркация. Примером одного из важнейших современных понятий является бифуркация в процессе изменения параметра. И с ним уместно знакомить уже в школьном курсе математики — тем более, что ничего нового вводить или добавлять не потребуется: примеры бифуркаций в изобилии можно найти и в алгебре, и в геометрии.

Наблюдайте (мысленно или с помощью картофелины и ножа) за изменением формы сечения куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали, при продвижении этой плоскости от одной вершины куба до другой — вот простейший бифуркационный процесс. Изменение числа корней квадратного уравнения

$$3x^2 - 5x + 2c = 0$$

при “пробегании” параметром c всех действительных значений — другой бифуркационный процесс. Надо только пожелать при изложении материала сделать нужные методологические акценты, привлечь практические примеры.

На наших глазах разрастается эпидемия пособий для школьников по “теории уравнений и неравенств с параметрами” (которая, кстати, не упоминается в учебниках). Задачи на эту тему становятся все более изощренными. Но никто из многочисленных “творцов” этой теории не удосужился хотя бы вскользь рассказать о рядом лежащем общеобразовательном понятии.

Фрактал. Это удивительное понятие математики оказалось средством адекватного отображения природных явлений и описания объектов. Но познакомить учащихся с фракталами необходимо еще и для того, чтобы продемонстрировать непредсказуемые особенности диалектики исторического развития науки. А понимание процесса научного познания мира — одна из важных характеристик образованного и культурного человека.

Фактически понятие фрактала было введено и изучено в конце 10-х годов прошлого века, но работы основоположников никого не заинтересовали — идея пришла слишком рано, не имела должного инструментального и прикладного основания. И лишь более полувека спустя усилиями Б. Мандельброта и благодаря привлечению высокопроизводительной компьютерной техники исследования фракталов и их приложений приобрели большой размах.

В методической литературе много любят писать об эстетическом воздействии математики на школьников, о ее значении для воспитания у них понятия прекрасного. Обычно говорят о "стройности доказательства" теоремы, об "изящности решения" задачи. Но по большому счёту все это доступно и понятно ученику, действительно увлеченному математикой. А для того, кто к ней "глух" — какое наслаждение от решения квадратных уравнений? Фракталы же компьютерной реализацией формул порождают действительно красочные, оригинальные полотна, не уступающие абстрактной живописи (см. [1]).

Хаос. Сейчас "проблема хаоса" привлекает особое внимание физиков и философов, экономистов и медиков, биологов и обществоведов (и даже теоретиков образования), всё чаще говорят о новой области науки — синергетике.

Понятие хаоса сегодня особенно важно для формирования современного представление о "нелинейном мире".

Один из сценариев перехода к хаосу был открыт в 1978 г. М.Фейгенбаумом путем численного анализа буквально "на коленке", на карманном калькуляторе (!) поведения последовательности $\{x_n\}$, порождаемой отображением

$$x_n \to x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

Теория вероятностей и статистика. Будем объективны — процесс перестройки программы школьного курса математики пошел. Наконец-то туда включено знакомство с основными понятиями теории вероятностей и статистики. Спор об этом проходил у нас еще почти век назад, во многих странах мира вопрос решен положительно уже давно. И вот теперь выпускники и наших школ не будут делать изумленные глаза, услышав по ТВ слова "доверительный интервал".

Рассмотрение этих и других математических тем (теория катастроф, многомерность, бесконечность, разностные уравнения, дискретная математика, аттрактор, траектория динамического процесса, устойчивость и управление движением и др.) не только обогатит сам курс математики, сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природы и общества, инструмента моделирования явлений и процессов в природе и обществе, поможет формированию подлинно научных мировоззренческих представлений у молодежи.

Вычислительная тематика. Преподаватели старшего поколения помнят, а молодые могут увидеть в учебнике [2] алгоритм извлечения квадратного корня из числа. Это была трудная тема былой школьной программы — сама формулировка правила занимала целую страницу в книге. Но вот появились калькуляторы, которые считают квадратные корни за долю секунды, и правило исчезло. Однако кто из учеников понимает, как именно выполняет эту операцию калькулятор? И как поступить, если при практическом вычислении, связанном с объемами конкретных тел, надо найти кубический корень из числа?

С точки зрения развития интеллектуального потенциала и жизненных пониманий школьников (но не с точки зрения отработки их формальных математических навыков) трезво сравните важность знания:

– с одной стороны, метода определения взаимного расположения корней двух квадратных уравнений с параметром, которому посвящено множество формальных задач,

– с другой стороны, метода последовательных приближений, являющегося одним из исключительных достижений человеческого разума, но остающегося вне внимания школы.

Вообще вычислительная тематика — падчерица программы школьной математики. Распространено мнение, что эта тематике — прерогатива курса информатики. Но это более чем нелогично! В свое время курс математики гордился прикладными расчетами на логарифмической линейке. Сейчас элементарные и доступные вычислительные математические методы позволили бы ярко демонстрировать прикладное значение математики во многих важных мировоззренческих и содержательных практических проблемах.

Лабораторные работы по математике? Сейчас педагоги и психологи все более настойчиво рекомендуют усиливать в учебном процессе творческое начало, внедрять исследовательские проекты, стимулировать самостоятельный познавательный поиск. Конечно, широко практикуемое решение нестандартных (олимпиадных) задач — это эффективная форма такого поиска. Но лишь одна из возможных. И к тому же здесь почти всегда речь идет о "поиске с предписанным, известным результатом".

А почему мы не предпринимаем шаги для внедрения такой формы преподавания школьной математики, как лабораторные работы? Чтобы ученик изучал некоторое явление или объект не только "головой", но и "руками", подмечал некие закономерности и пытался самостоятельно дать их адекватное математическое описание. Богатые возможности в организации такой деятельности открывают различные компьютерные программы, которые позволяют ставить "математический эксперимент". Кроме того, разнообразный материал для увлекательных лабораторных работ и самостоятельных исследований предоставляет вычислительная математика. Темами для таких работ могли бы быть, например, феномен Фейгенбаума, численная реализация итерационных процессов и последовательных приближений в различных ситуациях, анализ простейших математических моделей и др.

Большое значение лабораторным работам по математике в свое время придавал А. Н. Колмогоров, и в Физико-математической школе при МГУ накоплен большой опыт их проведения. Однако он не получил широкого распространения.

Геометрическая геометрия. Если обстоятельно просмотреть школьный курс, то нетрудно убедиться, что он направлен исключительно на воспитание умения считать, проводить преобразования. В начальной школе в центре внимания — автоматизм в использовании таблицы умножения. Затем идут арифметические вычисления — "чистые" или в "текстовых" задачах. Потом наступает расцвет алгебраических и тригонометрических "тождественных преобразований", включая решение уравнений и неравенств. Даже в геометрии практически все задачи — вычислительного характера (выражаясь старым языком, преобладают "геометрические задачи с применением тригонометрии").

Между тем, человеческое бытие требует еще одного важного навыка — геометрического, или пространственного воображения. Без этого навыка невозможно воспитать современного инженера, невозможно решать многие жизненные вопросы. Но подавляющее большинство выпускников, прошедших горнила школьной математики, не имеют зачастую даже элементарного геометрического воображения. А его необходимо воспитывать, развивать постоянно и непрерывно, с первого до последнего класса. Между тем, весьма полезная идея введения в основной школе продуманного курса "Наглядная геометрия" пока не получила широкой реализации. В старшей школе — в изобилии "геометрические" задачи, для решения которых фактически не нужно ничего, кроме более или менее громоздкого счета с помощью теоремы Пифагора.

Главным условием развития пространственного воображения является именно работа с реальным материалом. Наиболее успешно его формировать можно как раз на математических лабораторных работах, материалом для которых служат как классические объекты, так и другие, в традиционную программу не входящие, но, тем не менее, весьма полезные. Одним из таких объектов, по нашему мнению, являются узлы (см. [5]), работа с которыми (доступная как младшим, так и старшим школьникам и не требующая каких-то специальных технических средств), помимо воспитания пространственного мышления, развития творческих навыков, позволяет выйти на такие важные понятия, как пространственная кривая, левая и правая ориентации, принципы классификации и т.д., и имеет немаловажное житейское применение.

Прагматичность. Неприятно говорить, но катастрофы, связанные с ворами из "МММ" и "Властилины", омрачившие судьбы тысяч наших людей, на совести не только власти, "кинувшей" своих сограждан на произвол судьбы, но и школьного курса алгебры, который не рассматривал такие "мелочи", как финансовые пирамиды, не готовил выпускников к коллизиям жизни, а ориентировался лишь на "высокие материи" цепочек логарифмических и тригонометрических преобразований. Наше "лучшее в мире естественнонаучное образование" показало свою несостоятельность при столкновении с творчески думающими мошенниками, магами, гадалками и проч.

В радикальном переосмыслении нуждается содержание школьного курса геометрии. Математика могла бы быть более эффективным и практичным инструментом для обитания человека в окружающем мире, если бы обучение не ограничивалось скучными окружностями и однообразными кубами, а знакомило учащихся со всем многообразием, изобилием линий и поверхностей, фигур и тел, демонстрировало интереснейшие и практически важные геометрические объекты.

Методика преподавания. Серьезной концептуальной перестройки требует и важнейшая для школы наука — методика преподавания математики. Многие изменения в программе математики общеобразовательной школы невозможно осуществить, если не согласиться с принципиальным положением: отдельные разделы или темы допустимо изучать на описательно-демонстрационном уровне, добиваясь от учеников понимания сути дела без сообщения им формальных доказательств, строгих обоснований и логических рассуждений. Это предложение психологически особенно трудно принять профессионалам, считающим, что преподавание математики в школе всегда должно базироваться на строгой научности и логической доказательности. Разумна ли такая точка зрения?

Во-первых, этого никогда не было: целый ряд моментов школьного курса в принципе невозможно изложить абсолютно строго — приходится прибегать к "убедительным эрзацам". Во-вторых, достаточно просмотреть учебники А. П. Киселева [2 - 4], чтобы заметить "описательно-демонстрационное" изложение многих вопросов (скажем, требующих метода математической индукции). В-третьих, наше образование по физике или химии нисколько не страдает от того, что преподавание этих предметов не содержит всех исчерпывающих доказательств. Наконец, если мы признаем, что в общеобразовательной школе изучается не наука и даже не "основа науки", а нечто совершено иное — "предмет математика", то согласимся, что можно и нужно гибко подходить к стилю преподнесения математического материала.

Возражение против описательно-демонстрационного изложения в принципе основано на широко распространенном убеждении (не подкрепленном никакими научными исследованиями), что математика и только математика может воспитать в школьнике культуру логического мышления, что лишь в ходе "строгого" изучения математики обеспечивается развитие умения правильно рассуждать. Конечно, нельзя отрицать, что в определенном смысле изучение математики "ум в порядок приводит" (М. В. Ломоносов), но и не следует преувеличивать, считая, что это — единственный путь к цели. Действительно ли увлеченная историей девочка, декламируя как стихи зазубренное доказательство теоремы о трех перпендикулярах, осваивает логику? Логике можно учиться иными путями, не связываясь с непривлекательными для школьников-"нематематиков", каких в общеобразовательной школе абсолютное большинство, скучными преобразованиями и формальными рассуждениями. Позвольте в качестве эксперта привлечь выдающегося физика-теоретика Л. Д. Ландау: "Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путем изучения ненужных вещей люди будто бы научаться логически мыслить".

С прискорбием можно констатировать, что, помимо "классических" элементарной и высшей математики, лет 40-20 назад сформировалась еще одна, новая, — "математика вступительных экзаменов". Экзаменаторы вузов и предприимчивые репетиторы создали целую "науку", содержащую теоретическое рассмотрение изощренных задач, не имеющую подчас никакой образовательной ценности. Ладно бы еще речь шла о дополнительных знаниях, необходимых для освоения вузовской программы. Но фактически все эти темы, вопросы, сведения никому потом оказываются не нужны, в вузе их можно (и нужно) просто забыть.

Появление ЕГЭ было, видимо, объективной реакцией на репетиторский беспредел. "Кризис математической подготовки" школьников особенно ярко проявлялся во все более иезуитских задачах приемных экзаменов в вузы, и его надо было преодолевать. Но "получилось, как всегда" — новая "наука" была подхвачена многими авторами и привела к невиданному наукообразию в книгах и публикациях для учащихся и учителей.

Возьмем тему "Абсолютная величина (модуль) действительного числа". Модуль числа — не одно из концептуальных изобретений математической науки, а скорее просто удобное техническое обозначение. В самом школьном курсе он сам по себе имеет весьма узкую сферу приложения. Нет, я не предлагаю исключить модуль из школьной программы. Но я не вижу никаких объективных поводов для того, чтобы создавать для школьников и учителей фундаментальные наукообразные сочинения о модуле или предлагать задачи, для решения которых требуется специальная дрессировка.

Сколько страниц текста нужно написать, чтобы объяснить школьнику, что такое модуль и как с ним работать? Вот "пособие для абитуриентов и старшеклассников" под названием "Решение задач с модулями" — авторы ухитрились разогнать его до ... 304 страниц! Как и полагается научному трактату, книга состоит из двух глав: "Уравнения с модулями" и "Неравенства с модулями". Как известно, в науке самое главное — систематичность. Поэтому 1-ая глава трактата содержит параграфы: "Уравнения с одним модулем", "Уравнения с двумя модулями", "Уравнения с тремя модулями", "Уравнения с четырьмя и большим число модулей". Читатель сам без труда догадается, как называются четыре параграфа 2-ой главы.

А вот фрагмент объяснения школьникам решения одной задачи: "Последнее неравенство следует из того, что для любых чисел a и b

$$\max\{|a+b|, |a-b|\} = |a| + |b|."$$

Вместо того, чтобы искать наиболее доходчивые, прозрачные способы изложения материала школьникам, наши методисты подчас в погоне за "научностью" и "общностью" забывают, для кого все это делается. В качестве примера упомянем проценты, из которых также создали стройную теорию ([6]).

Существует точка зрения, что "математика — это язык". Этим специфическим языком должны в совершенстве владеть профессионалы, но причем здесь массовый школьник? А формальный язык математической науки все более настойчиво и навязчиво завладевает просторами общеобразовательной школы. Авторы пособий для учащихся, методических статей для учителей упорно стремятся заставить детей говорить не на родном, а на "птичьем языке". Как вам нравится такое объяснение для школьников: "Для уравнения $|y| + |z| = a$ применим схему

$$|y| + |z| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} yz \geq 0, \\ |y+z| = a \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} yz \leq 0, \\ |y-z| = a \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad (a \geq 0)\ ."?$$

Почему эта тенденция набирает обороты в пособиях для школьников? Да, такая символика экономит место, создает иллюзию "краткости изложении". Но кто провел исследования, подтвердившие, что "массовый школьник" в состоянии легко читать и прочно усваивать текст, написанный сплошными значками "теоретико-множественного сленга"? Ещё не владея в совершенстве родным языком, ученик должен параллельно изучать и "иностранный язык" — математическую символику, причём в значительном объёме. И остается загадкой — зачем? На этом языке после сдачи ЕГЭ не будут говорить 99% вчерашних школьников.

А вот на каком языке иногда пишут методические пособия для учителей: "Методологической основой системного моделирования содержания математического образования выбран дидактический синтез целого, обеспечивающий структурную связность содержательных единиц не только в рамках данного этапа подготовки, но и предопределяющий взаимоувязывание структурных срезов при движении по этапам".

Литература

1. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. — М., 1993.
2. Киселев А.П. Алгебра. — М.: Физматлит, 2005, 2006.

3. Киселев А.П. Арифметика. — М.: Физматлит, 2002.

4. Киселев А.П. Геометрия. — М.: Физматлит, 2004.

5. Розов Н.Х., Рейхани Э., Боровских А.В. Узлы в школе. Уроки развития пространственного мышления. — М.: КДУ, 2007.

6. Боровских А.В., Розов Н.Х. О бедном проценте замолвите слово... Матем. в школе. 2010. №3. С. 3-15.

Об особенностях математической подготовки по управленческим специальностям

Г. М. Агаян, Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина, г. Москва

Там, где нет общепризнанных
мнений, открывается простор
для изложения личных взглядов.
Г. Штейнгауз [1]

При всём разнообразии и изяществе подходов, применяемых для разрешения управленческих задач, часть из которых использует опыт и интуицию, подготовке специалистов управленческого профиля дóлжно опираться на некоторую общую основу, в которую на равных входит и математическая составляющая, необходимость которой в последнее время особых сомнений уже не вызывает.

Включение математики в набор основных учебных дисциплин факультета управления оправдано тем, что её изучение "совершенствует общую культуру мышления, дисциплинирует её, приучает человека логически рассуждать, воспитывает у него точность и обстоятельность аргументации. Математика учит не загромождать исследование ненужными подробностями, не влияющими на существо дела, и, наоборот, не пренебрегать тем, что имеет принципиальное значение для существа изучаемого вопроса" [2, сс. 43-44].

Правда, временнáя доля математической составляющей в этом общем наборе дисциплин выглядит достаточно скромно. Одной из причин этого, по-видимому, является отнесение управления к гуманитарной сфере знания со сложившимися традициями преподавания, ставящими курсы с математическим наполнением в несколько изолированное положение.

Тем не менее, опираясь на накопленный опыт, можно утверждать, что при известных усилиях это не мешает построению пусть и простого, но достаточно действенного инструментария, позволяющего студентам получать ответы на вопросы, поставленные преподавателем. Однако мы считаем, что студенты управленческих направлений и специальностей, будь то бакалавры или магистры, должны научиться формулировать вопросы самостоятельно, ориентируясь на реальные проблемы, требующие управленческих решений.

Наши наблюдения показывают, что даже в весьма простых ситуациях это оказывается трудной задачей. Причина здесь не только в том, что в довузовской математической подготовке внимание учащихся полностью сосредоточено на отыскании решений уже поставленных задач, к тому же сопровождаемых готовыми ответами, так что до выработки навыков формулирования дело просто не доходит. Как следствие, у большинства учащихся вопросов о том, как ставить задачу, даже не возникает. Здесь скорее другое — содержательная формулировка задачи требует значительных усилий и неотвлекаемого погружения в среду. К тому же, для того чтобы правильно поставить вопрос, "нужно знать бóльшую часть ответа" [3, с. 217]. Ожидать, что этому можно научиться в общеобразовательной школе, было бы неправильно.

Однако студентов, обучающихся на факультетах управленческого профиля, научить формулировать проблемы и корректно ставить вопросы, требующие управленческого участия, совершенно необходимо. По нашему мнению, этого можно добиться, проходя вместе с ними тернистый путь от вербального осознания проблемы до её дельного упрощения, разрешения и осмысления полученных результатов.

В основу построения математического цикла, отбора слагающих его курсов и их наполнения нами положены три ключевых принципа:

доступность (предполагающая известное напряжение в усвоении предлагаемого материала и в овладении необходимыми навыками, носящими технический характер),

обоснованность (вряд ли менеджер, обучавшийся математике путём заучивания немотивированных определений, недоказываемых утверждений и закрепления готовых математических приёмов, взятых неизвестно откуда, будет способен проявлять нестандартный подход при анализе новых управленческих ситуаций),

наглядность (изложение материала должно сопровождаться несложно воспроизводимыми рисунками, чертежами и схемами, способствующими целостности восприятия изучаемых ситуаций и эффективности их анализа).

Мы отдаём себе отчёт в том, что построение и разрешение сложных моделей реальных управленческих ситуаций под силу лишь сложившемуся профессионалу, однако формирование столь необходимых составляющих успешной работы менеджера-аналитика, как навыки адекватной и корректной постановки проблемы, умение работать в тесном контакте со специалистом-математиком, интерпретация полученных результатов, понимание реального смысла ограничений, налагаемых на параметры модели, вполне реализуемо в процессе изучения сравнительно простых математических моделей, при постепенном смещении акцента с рассмотрения готовых моделей на обучение самому процессу моделирования.

Высшая цель цикла математически ориентированных дисциплин — обучение искусству точного вербального описания проблем количественного моделирования реальных жизненных ситуаций, в том числе ситуаций взрывного характера и ситуаций с быстро меняющимися обстоятельствами, разделение ситуационных факторов на существенные и несущественные, абстрагирование от последних и проникновение в суть изучаемых явлений.

“Надо прямо смотреть в глаза фактам и признать, что применение математических методов не полезно, а вредно до тех пор, пока явление не осознано на доматематическом, гуманитарном уровне” [4].

Важно добиться понимания студентами того, что моделирование должно осуществляться как творческий процесс, а не как попытки подгонки конкретной анализируемой ситуации под один из известных случаев. Мы стремимся к тому, чтобы в результате изучения цикла студенты овладели приёмами, позволяющими, создавая необходимый настрой, погружаться в рассматриваемую проблему, навыками правильного формулирования вопросов на каждом этапе её анализа и разрешения, адекватной интерпретации полученных результатов.

При любой направленности обучения математическое образование необходимо фрагментарно. И математическая составляющая при обучении на факультетах управления исключением здесь не является. Отбор фрагментов, ключевую роль в которых играют конкретные задачи, и уровень доступности их изложения во многом зависят от целей, которые ставит перед собой факультет, готовящий кадры для работы в различных сферах управления. Такими фрагментами, как осколками цветного стекла, при желании можно выложить сравнительно цельную содержательную мозаику. Для этого требуется тщательно отобрать нужные осколки и определённым образом положить отобранное на схватывающую основу, которую можно создать только посредством совокупных усилий обеих сторон, участвующих в процессе обучения. Сам же процесс обучения может быть устроен по-разному. Всё зависит от того, кто стремится к поставленной цели качественной подготовки выпускника — только ли преподаватели, или этим же озабочены также и студенты.

“Как вы думаете, в конкурентной борьбе какое предприятие победит: то, в котором за судьбу производства и произведённого товара беспокоятся только руководители высшего уровня, а остальной персонал лишь исполняет должностные инструкции, или же то, в котором весь трудовой коллектив заботится о производстве и реализации произведённого товара?” [5, с. 19].

Восприятие каждого фрагмента зависит от личного опыта студента и при известных обстоятельствах может послужить (а может и не послужить) толчком к его размышлениям, а затем и к необходимому пониманию. Соприкосновение математически окрашенного фрагмента со средой личного опыта имеет любопытное свойство, которое полезно принимать во внимание — эта среда встречает пришельца насторожённо, зачастую с сопротивлением, сила которого определяется отношением к математике, уже сложившимся у студента ещё до поступления на факультет. Заметим, что практически каждый человек склонен отождествлять математику со своим представлением о ней; само же представление, нередко весьма своеобразно складывающееся под напором школьных впечатлений и некоторых часто совсем случайных обстоятельств, необыкновенно устойчиво во времени и при неудачном подборе математического материала способно меняться только в худшую сторону.

Рассмотрение математических фрагментов (конкретных задач) и их разбор — от понимания постановки проблемы до разработки инструментария, необходимого для её разрешения и получения ответа на поставленный вопрос, — ни в коем случае не стоит воспринимать как ознакомление со списком рецептов, фиксирование которого на доступном для воспроизведения носителе (в тетрадке, на дискете, в голове и др.) позволит всякому, встретившемуся с узнаваемой ситуацией, или подогнавшему встретившуюся ситуацию под узнаваемую, находить в этом списке соответствующие случаю рекомендации и, применяя их, разрешать возникшую проблему. Упрощённо говоря, преподавание математической связки нельзя сводить к овладению привлекающим своей доступностью, а потому и весьма распространённым способом действий: раздобыть нужный справочник, отыскать в нём готовую формулу и подставить нужные числа.

Ясно однако, что в своей практической деятельности выпускник факультета управления встретится и не раз с такими обстоятельствами, действия по разрешению которых будут выходить за рамки любого набора известных ему рецептов. И он должен быть подготовлен к тому, чтобы в новых обстоятельствах найти не худшее решение. Поэтому, разбирая конкретные задачи и выстраивая под них несложный, но действенный инструментарий, мы стремимся добиться понимания иного рода, исходя из того, что “большие общие теории появляются обычно после обдумывания маленьких, но глубоких суждений; сами же суждения начинаются с проникновения в конкретные частные случаи” [6, с. 269].

Окончивший факультет управления вряд ли сразу станет топ-менеджером, которому позволено принимать принципиальные управленческие решения, от выполнения которых во многом зависят завтрашние успехи организации, предприятия или фирмы. (Совсем коротко остановимся на том, что здесь понимается под управленческим решением: принимая такое решение, то есть делая выбор из нескольких возможных альтернатив, которые тоже появляются не сами, нужно одновременно тщательно продумать и систему мероприятий, обеспечивающих воплощение этого решения, и достаточно верно оценить последствия его воплощения, в том числе и отдалённые.) Именно к такой ситуации, когда само решение уже принято и необходимо обеспечить скрупулёзное возобновление повторяющейся системы условий, при непременном выполнении которых это решение окажется реализованным, и подключается новоиспечённый менеджер, наряду с другими менеджерами обеспечивающий успешное продвижение решения, предложенного менеджером-аналитиком и принятого топ-менеджером.

“There will always be a need for the efficient manager of a going concern who has no original ideas to contribute, but who can keep things running happily and profitably once they have been devised and started” [7, p. 115].

Обращаясь к проблеме качественной подготовки менеджеров, следует заметить, что при попытке её разрешения важно как можно более действенно использовать, одно явное преимущество, которое подготовка в области управления имеет перед обучением будущих экономистов, являющихся по словам В. В. Леонтьева “просто разновидностью менеджеров” [8, с. 70].

Высшая школа готовит экономистов различного профиля уже довольно давно, и в этой подготовке сложились определённые традиции. Одной из них являются довольно жёсткие требования к отбору и преподаванию будущим экономистам математических дисциплин, попытки уйти от которого, судя по многочисленным учебникам на магазинных полках, практически безнадёжны. Другое дело — подготовка студентов на более молодых факультетах управления. Здесь налицо значительная свобода, которая даёт возможность строить преподавание математической связки учебных курсов по-новому и, как нам кажется, более эффективным образом учитывать четыре особенности — гуманитарный настрой аудитории, изначальную слабость мотивации (поступающие зачастую ориентируются на образ менеджера, сложившийся на основании сведений, почерпнутых из средств массовой информации, где даже слабое подобие математической задачи менеджеру приходится решать весьма редко), разницу в уровне подготовки, отсутствие привычки к напряжению мысли и умения держать мысль. Эта свобода даёт возможность попробовать организовать преподавание математической составляющей так, чтобы у значительной части студентов доступность изложения и возбуждение интереса к предмету сочетались взаимно обогащающим образом.

Кратко опишем общую схему, по которой на факультете государственного управления МГУ имени М. В. Ломоносова ведётся (и предполагается вестись в дальнейшем) преподавание практически всех математически наполненных дисциплин.

Каждая большая тема открывается рассмотрением набора толчковых задач (чаще одной-двумя), содержание которых доступно восприятию любого студента уже при первом прослушивании. Задача предлагается, нередко весьма наглядно, в виде вполне содержательного вопроса, ответ на который нужно найти. При этом возможны два случая: либо уже имеющегося личного опыта студентов достаточно для того, чтобы после определённого упорядочения их представлений приступить к отысканию ответа, либо возникает необходимость разработки подходящего инструментария. Поэтому важно в самом начале выяснить, какая именно ситуация имеет место в данном конкретном случае.

Процесс построения инструментария, разрешающего задачу, способствует уточнению её постановки, а всё более чётко обозначаемый вопрос задачи служит дополнительной мотивацией совершенствования аппарата для построения ответа. Сопутствующие разъяснения организованы так, чтобы внимающий им студент воспринимал основное содержание вопроса без особого труда, но с некоторым напряжением. Изложение материала зачастую таково, что к моменту завершения создания необходимого инструментария проявляется и искомый ответ к задаче.

На этом первый этап завершается: студент знакомится с одной-двумя ключевыми модельными задачами и видит, как постепенно выстраивается метод их решения и как именно применение разрабатываемого подхода приводит к результату (ответу) и его осмыслению.

На втором этапе преподаватель, формулируя необременительный набор общих требований, даёт студенту (студентке) определённую ориентацию, способствующую облегчению поиска, предоставляет ему (ей) возможность и необходимое время для самостоятельной постановки конкретной задачи подобного рода. Источники, из которых студент может черпать нужные сведения, — газеты, журналы, книги, сайты в Internet, — позволят ему (ей): 1) найти подходящую задачу (уже сам характер поиска задачи будет определяться интересом и уровнем подготовки студента (студентки)); 2) убедиться в том, что задачи, разбираемые на занятиях, не надуманы; 3) перевести вербальное описание задачи на язык математических схем и формул и попытаться найти решение, а строя решение задачи, ощутить возможности созданного инструментария.

В качестве примера приведём одно из таких заданий по теме “Иерархии и приоритеты”.

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных исходов нередко приходится сталкиваться с необходимостью анализа сложной системы взаимозависимых составляющих. В задании предполагается исследование сложных систем, элементы которых могут быть объединены в несвязанные группы (кластеры) таким образом, что элементы каждой группы будут находиться под влиянием некоторой другой, вполне определённой группы и, в свою очередь, оказывать влияние на элементы третьей группы, в результате чего возникнет многоуровневая иерархическая система, вершина которой отождествляется с целью процесса принятия решений. Студент сам находит задачу, иерархическая система которой имеет три или четыре уровня (выбор указанного количества уровней оправдан возможностями человека и удерживает его от произвольных сравнений). Затем посредством разобранного на лекциях метода анализа иерархий [9], позволяющего при помощи действительно несложных математических расчётов распределять ресурсы между альтернативами пропорционально их приоритетам или находить лучший из альтернативных вариантов, он определяет (количественно) степени, с которыми различные элементы одного уровня влияют на элементы другого уровня. Для этого путём попарных сравнений строятся обратносимметричные матрицы, которые затем анализируются на согласованность, и составляется столбец приоритетов. На основании полученных количественных результатов студент формулирует соответствующие выводы и даёт необходимые рекомендации.

Очень важно, что при этом более сильный и более заинтересованный студент имеет возможность выбрать для себя задачу потруднее и поинтереснее; это позволит ему лучше понять собственные возможности. Разумеется, содержательность поставленной себе задачи и её оригинальность оцениваются преподавателем соответствующим образом.

В заключение заметим, что эффективное взаимодействие управления и математики невозможно без катализатора ЛПР-ЛФР, составленного из лица, принимающего решения, и лица, формирующего решения. На второе из этих лиц мы и стараемся ориентировать наших выпускников.

Литература

1. Штейнгауз Г. Задачи и размышления. - М.: Мир, 1972.

2. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её изучении. - М.: Наука, 1977.

3. Шекли Р. Избранные произведения: В 2-х томах. Т. 1. - Калуга: Библио, 1992.

4. Вентцель Е.С. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе. - М.: Знание, 1982. СС. 37-54.

5 Пшенников В.В. Японский менеджмент. Уроки для нас. - М.: Издательство "Япония сегодня", 2000.

6. Халмош П. Как писать математические тексты // Успехи математических наук. - 1971. - Т. 26, №5. - СС. 243-269.

7. Jay A. Management and Machiavelli. Discovering a New Science of Management in the Timeless Principles of Statecraft. - Pfeiffer & Company, 1994.

8. О чём думают экономисты: Беседы с нобелевскими лауреатами. - М.: Московская школа управления "Сколково"; Альпина Бизнес Букс, 2009.

9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. - М.: Радио и связь, 1993.

Варианты вступительного экзамена по математике в СУНЦ МГУ (школа им. А. Н. Колмогорова) в 2010 году

Д. В. Алексеев, О. П. Виноградов, г. Москва

В марте и апреле 2010 года проводились экзамены для поступающих в СУНЦ МГУ. В данной статье приводятся условия задач, предлагавшихся на экзамене. Решения задач будут опубликованы в брошюре, которая готовится в настоящее время к публикации в издательстве СУНЦ МГУ (www.pms.ru).

Московский письменный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1

1. Найти натуральное n большее единицы, если известно, что числа 573, 714 и 902 дают одинаковые остатки при делении на n.

2. Пусть a и b — корни уравнения $x^2 + x - 4 = 0$. Известно, что число

$$(1 + 3b + 7b^2)a^3 + 7b^3a^2 + 3b^3a + b^3$$

— целое. Найти это число.

3. Пусть числа x и y удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x-2y & \geq & -10 \\ 2x+y & \leq & -5 \\ x+3y & \geq & -5 \end{cases}$$

Какое наибольшее значение может принять x?

4. Вне прямой L по одну сторону от нее взяты две точки B и D. Точка B является вершиной равностороннего треугольника ABC, основание которого лежит на прямой L. Известно, что $\angle ADC = 105°$, $BC = 4$. Прямые AD и CD пересекают окружность, описанную вокруг треугольника ABC, в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

5. На плоскости Oxy отметить все точки, через которые не проходит ни одна из парабол $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$, где p — любое действительное число.

Московский письменный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение. Март 2010 года. Вариант 1

1. Найти площадь фигуры на плоскости Oxy, которая состоит из точек с координатами (x, y), удовлетворяющими неравенству $|x| \leq 3 + \sqrt{6|y| - y^2}$.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = 3$ и $AD = 4$ на продолжении основания BC за точку C выбрана точка E, так, что прямая AE делит трапецию на две равновеликие (т.е. имеющие одинаковую площадь) части. Найти длину отрезка CE.

3. На плоскости взяты две точки A и B. Через точку A в этой плоскости проведены 20 прямых, а через точку B в этой же плоскости — 11 прямых. Известно, что любые две из этих прямых пересекаются в одной точке, и среди них нет прямой, проходящей одновременно как через точку A, так и через точку B. Сколько различных треугольников образуется при пересечении всех этих прямых?

4. Восьмая степень целого числа n записывается 9-ю цифрами 1, 2, 4, 6, 6, 8, 9, 9, 9, расположенными в некотором порядке. Найти число n.

5. Для всех $n \geq 1$ все члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют условию $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$. Известно, что $a_1 = 2$ и произведение $a_{41}a_{42}...a_{80} = 1$. Найти a_2.

Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Продолжительность 90 минут. Вариант 1.

Для задач 1-4 напишите ответ.

1. Какому числу равно выражение

$$\frac{5}{4}a^2 - 3(a-b)(a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{14b^2 - 5a^2}{4},$$

если $a = 46/15$, $b = 7,5$.

2. На какое наименьшее натуральное число нужно разделить произведение $(4!) \times (5!) \times ... \times (10!) \times (11!) \times (12!)$, чтобы частное было квадратом некоторого натурального числа? ($n! = 1 \times 2 \times ... \times n$).

3. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 8x + 16} \leq 101\,?$$

4. Числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5, полученные в результате измерения одной диагонали и четырех сторон выпуклого четырехугольника, расположены в порядке возрастания. Чему равна длина диагонали?

Для задач 5-7 напишите решение.

5. Числа a_1, a_2, a_3 являются последовательными членами арифметической прогрессии, числа b_1, b_2, b_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 126$, $a_1 + b_1 = 85$, $a_2 + b_2 = 76$, $a_3 + b_3 = 84$. Найти члены обеих прогрессий.

6. Длины 2-х сторон параллелограмма относятся друг к другу как 5 : 8, длина меньшей диагонали равна 28. Найти длины сторон параллелограмма, если его один угол больше другого в два раза.

7. Пусть x, y, z означают различные цифры. Известно, что

$$\overline{xx} \times \overline{yz} \times \overline{xyz} = \overline{xyzxyz}.$$

Чему равно $x - y + z$?

Московский устный экзамен в 10-й класс. Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Вариант 1

1. Саша получил пятерок в 3-ей четверти на 5% меньше, чем во 2-ой четверти, а в 1-ой четверти на 20% больше, чем в 3-ей. На сколько процентов Саша получил пятерок больше в 1-ой четверти, чем во 2-ой четверти?

2. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника, если длина отрезка OC равна 5.

3. Из чисел 7, 8, 9, ... , 153, 154 выбирают одно число, а затем из оставшихся чисел выбирают еще одно число. Сколько существует так составленных различных пар чисел, у которых второе выбранное число делится на 3?

4. Пусть a_n является n-м членом арифметической прогрессии. Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + ... + \frac{1}{a_{2009} a_{2010}},$$

если $a_1 = 1$, а разность прогрессии равна 3.

5. Число $\sqrt{2000 \times 2001 \times 2002 \times 2003 + 1}$ является целым. Найдите это число.

Московский устный экзамен в 11-й класс. Физико-математическое отделение. Апрель 2010 года. Вариант 1

1. Число a больше числа b на $x\%$, а число b меньше числа a на $(\frac{4}{5}x\%)$. Найдите x.

2. Ветви параболы $y(x) = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, а вершина находится в точке $(1, 1)$. Расстояние от начала координат до точки пересечения графика параболы с осью OY равно 3. Напишите уравнение этой параболы.

3. Внутри треугольника ABC с основанием $AC = 30$см и высотой $BH = 10$см расположен равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию, вершина прямого угла лежит на AC, а вершины острых углов лежат на AB и BC. Определите стороны вписанного треугольника.

4. Сколько существует натуральных трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, у которых любые две цифры отличаются друг от друга не меньше чем в два раза, а сумма цифр больше 10?

5. Найдите все $a > 1/2$, для которых интервал $(4a + 1; 6a)$ содержит внутри себя ровно одну целую точку.

Работа О. П. Виноградова выполнена при содействии РГНФ, грант №08-06-00144а.

Как обучать построению графиков функций в средней школе

К. Е. Воказе, г. Астана, Казахстан

Изучение функции в средней школе не ограничивается лишь введением определения этого понятия и умения учащихся распознать функцию и описать ее свойства. Одним из важных моментов в изучении функции является наглядное представление функции — ее геометрическая интерпретация, которая дается посредством понятия графика функции.

Согласно принятой в республике Казахстан (РК) программе, в курсе математики 6-го класса и алгебры 7-9 классов определение графика функции обычно не дается. Понятие графика функции воспринимается учащимися на интуитивной основе, простым сообщением, что графиком линейной функции является прямая, квадратичной — парабола, обратной пропорциональности — гипербола. Полное исследование и построение графика функции изучается в 10-11классах.

Переход в 2000 году к Единому Национальному Тестированию (ЕНТ) в РК имеет последствием формальное изучение вопроса построения графиков (справедливости ради скажем, "и не только"). При подготовке к ЕНТ от школьных учителей требуется лишь развитие навыков быстрого (в течении 1,5 минут) решения задач, а так как в тестовых заданиях не требуется построения графиков, то этот аспект изучения функции остается без должного внимания. Пробелы в умении построения и преобразования графиков, графического исследования функций сказываются при изучении курса высшей математики поступившими в вузы вчерашними школьниками.

Навыки работы с графиками функции целесообразно формировать у учащихся в процессе изучения функции в соответствующих классах. Для этого требуется арифметизация плоскости — введение координатной системы [1, стр.71].

Эта конструкция позволяет упорядоченной парой чисел однозначно определить местонахождение точки на плоскости. И наоборот, для любой точки на координатной плоскости найти пару чисел, однозначно определяющих эту точку.

Итак, возьмем две числовые прямые с одинаковыми (равными) единичными отрезками. Одну из них возьмем произвольно, а другую расположим перпендикулярно первой так, чтобы совпадали их начала отсчета — точки 0. Первую из них назовем *осью абсцисс* (ось Ох), а вторую — *осью ординат* (ось Оу), их точку пересечения — *началом координат*, а всю конструкцию — *системой координат* (ХОУ), рис. 1.

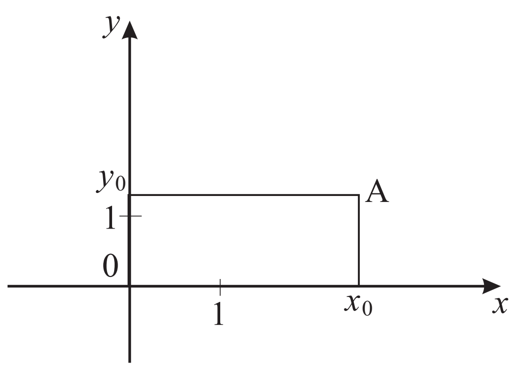


Рис. 1.

Теперь, проведя из любой точки А плоскости перпендикуляры к осям координат, учитывая их порядок, находим пару чисел (x_0, y_0), которую назовем *координатами точки A* и обозачим $A(x_0, y_0)$.

Обратно, по упорядоченной паре чисел (x_0, y_0) можно найти соответствующую ей единственную точку на координатной плоскости. Для этого найдем точки x_0 и y_0 соответственно на осях Ох и Оу, восстановим в них перпендикуляры и точку их пересечения и обозначим $A(x_0, y_0)$.

Каждая функция интересна своими свойствами, наглядное представление о которых нам и дает график функции.

Графиком функции f называют множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где x — всевозможные значения аргумента из множества определения, а $f(x)$ — соответствующие им значения функции (рис. 2).

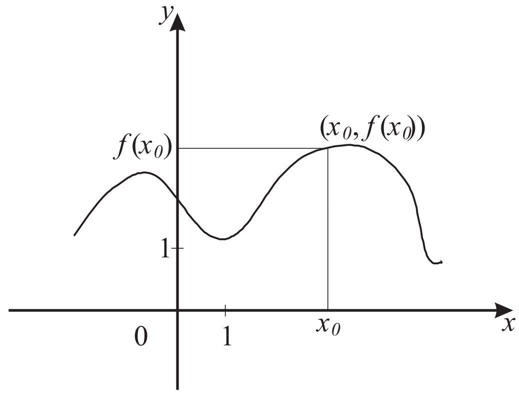


Рис. 2.

Как невозможно точно измерить длину отрезка, точно так же невозможно точно построить график функции, так как возможно посчитать значения функции, заданной на конечном множестве, но невозможно найти все значения функции, заданной на бесконечном множестве. Поэтому при построении графика функции по некоторым, характерным для данной функции точкам, мы можем говорить лишь об *эскизе* графика функции.

Для развития навыков построения графиков функций необходимо научить учащихся хорошо и быстро строить графики основных школьных функций — линейной, квадратичной функции, обратной пропорциональности. Лишь только после этого можно приступать к развитию навыков построению графиков функций путем преобразования графиков уже известных нам функций.

Преобразование графиков функции сначала проводится в модельной ситуации — для линейной, квадратичной функции, обратной пропорциональности.

Пусть нужно построить график функции $f(x) = (x-2)^2$.

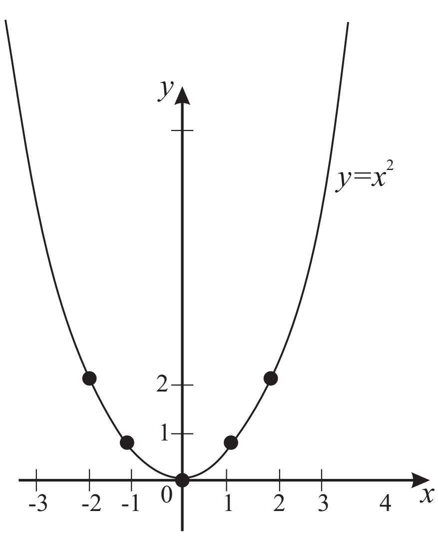
Для построения графика функции $f(x) = x^2$ составим таблицу некоторых значений

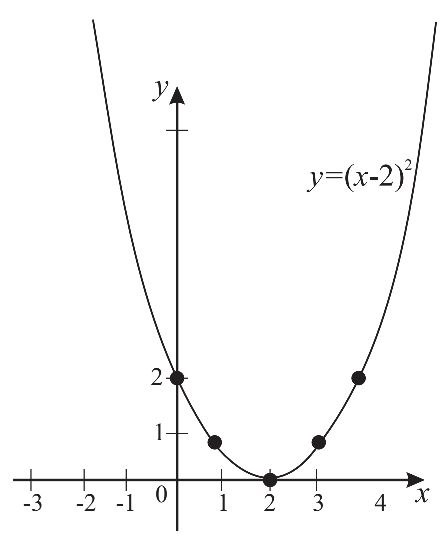
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Теперь составим таблицу значений для функции $f(x) = (x-2)^2$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	1	0	1	4

Построим эскизы графиков и сравним их:





Аргументы для второй функции взяты со сдвигом на 2 единицы, но значения функции получились те же самые. График второй функции можно получить из первого путем параллельного переноса на 2 единицы вдоль оси Ох.

Рассмотрим пример построения графика функции $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Преобразуем данную функцию: $f(x) = -2x^2 + 8x - 6 = -2(x-2)^2 + 2$.

Теперь можно прописать порядок построения графика данной функции:

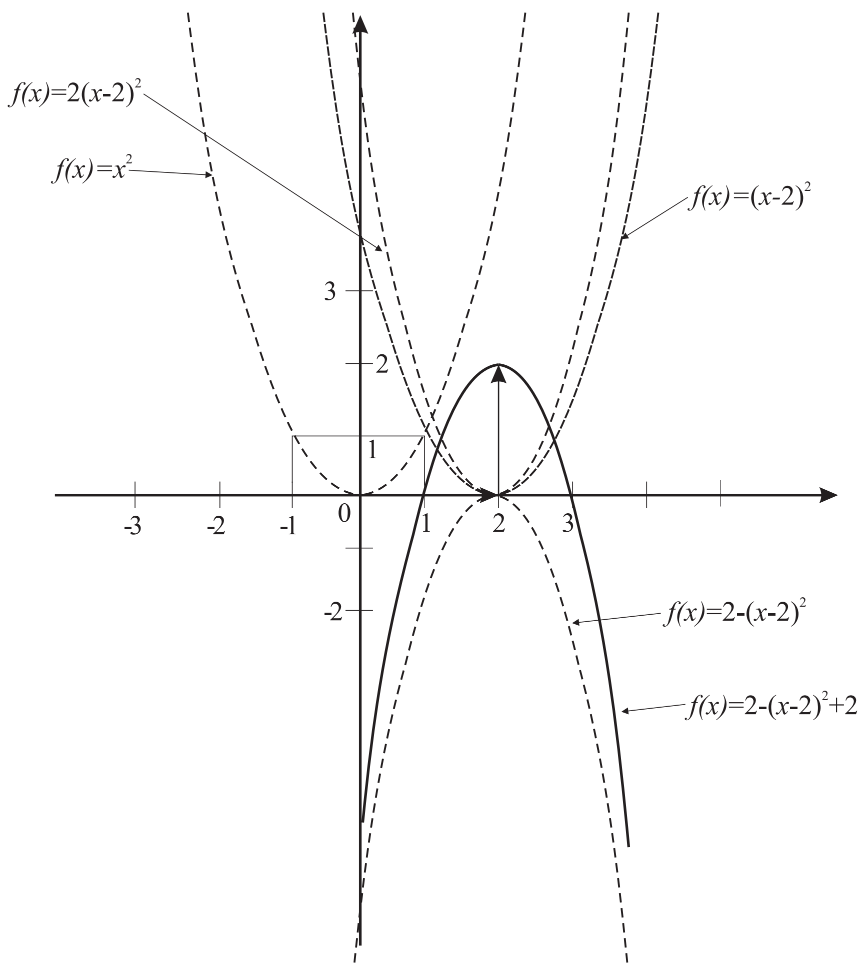
1. Строим первый график — график функции $f(x) = x^2$.

2. Для построения графика функции $f(x) = (x-2)^2$ перенесем график функции $f(x) = x^2$ на 2 единицы вправо.

3. Для построения графика функции $f(x) = 2(x-2)^2$ растянем график функции $f(x) = (x-2)^2$ в 2 раза вдоль оси Оу.

4. Для построения графика функции $f(x) = -2(x-2)^2$ отразим график функции $f(x) = 2(x-2)^2$ от оси Ох.

5. Для построения графика функции $f(x) = -2(x-2)^2 + 2$ перенесем график функции $f(x) = -2(x-2)^2$ на 2 единицы вверх вдоль оси Оу.



Затем, на основе продемонстрированных наглядных представлений, описывается общий случай.

Если $g(x) = f(x - A)$, при $A > 0$, то график функции $g(x)$ получается путем параллельного переноса графика функции $f(x)$ вправо вдоль оси Ох на A единиц, при $A < 0$ — влево вдоль оси Ох на $|A|$ единиц.

Аналогично, для $g(x) = f(x) + B$, при $B > 0$ так же осуществляется параллельный перенос вдоль оси Оу на B единиц вверх, при $B < 0$ — на $|B|$ единиц вниз.

График функции $g(x) = af(x)$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения вдоль оси Оу в a раз, если $a > 1$, так как значения функции $g(x) = af(x)$ получаются из соответствующих значений функции $f(x)$ умножением на a. При $0 < a < 1$ график функции $g(x) = af(x)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия вдоль оси Оу в $1/a$ раз.

В случае $a = -1$ значения функций $f(x)$ и $-f(x)$ отличаются друг от друга лишь знаком, поэтому график функции $-f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражением от оси Ох.

Особо нужно отметить случай преобразований графика функций, содержащих знак модуля.

Если функция $g(x)$ имеет вид $|f(x)|$, то верхняя часть графика (относительно оси Ох) функции $f(x)$ сохраняется, а нижняя часть графика заменяется симметричным отображением нижней части графика $f(x)$ относительно оси Ох, так как для отрицательных значений функции $f(x)$ значения $|f(x)|$ имеют противоположный знак.

А в случае $g(x) = f(|x|)$ правая часть графика (относительно оси Оу) функции $f(x)$ сохраняется, а левая удаляется и затем к правой части графика добавляется ее симметричное отображение относительно оси Оу. Практические же навыки преобразований графиков приобретаются в ходе решения задач.

Рассмотрим построение графиков следующих функций путем преобразований:

$$a) f(x) = \frac{x-2}{x+2}; \;\; б) f(x) = |x+1|^3 - 2; \;\; в) f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{если } |x| \le 1 \\ \frac{2}{|x|}, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Построение графика функции разобьем на этапы и покажем этапы построения графика:

$$a) f(x) = \frac{x-2}{x+2}$$

1. Выделим целую часть:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x+2)-4}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$$

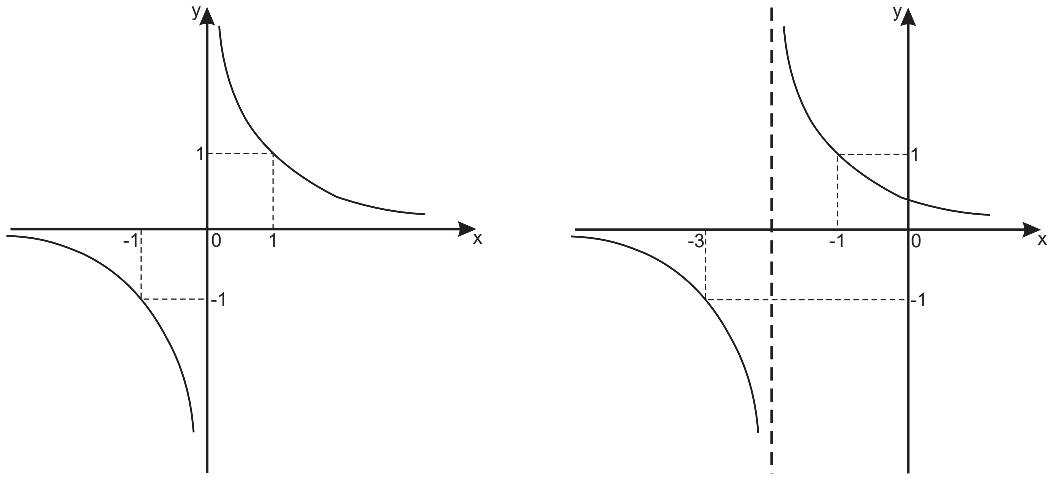
2. Построим график функции $f(x) = 1/x$.

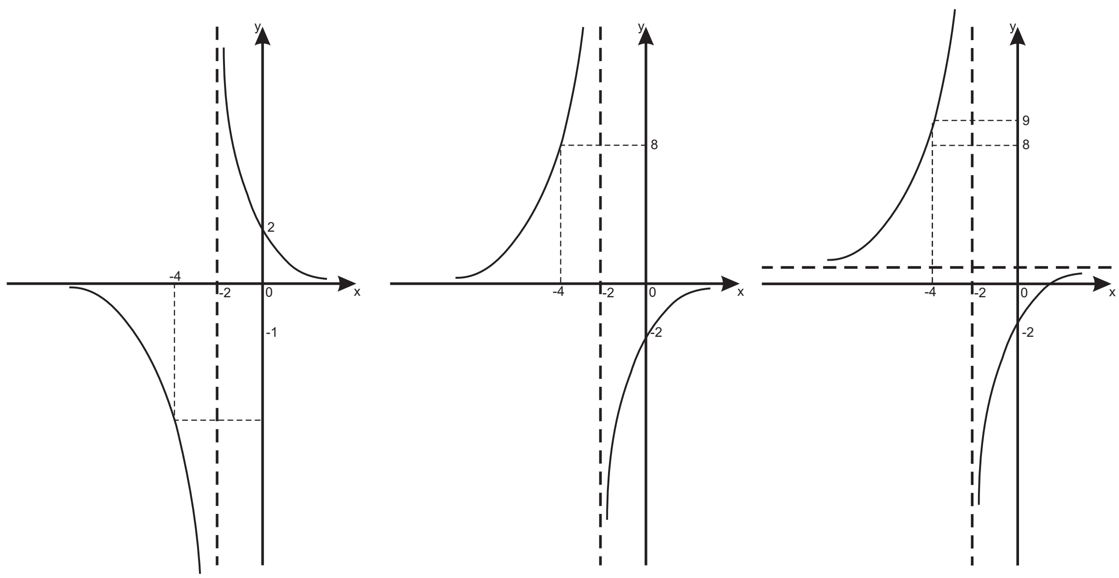
3. Перенесем график функции $f(x) = 1/x$ вдоль оси Ох параллельно на 2 единицы влево.

4. Растянем график функции $f(x) = 1/(x+2)$ вдоль оси Оу в 4 раза.

4. Отразим график функции $f(x) = 4/(x+2)$ относительно оси Ох.

5. Перенесем график функции $f(x) = -4/(x+2)$ вдоль оси Оу на 1 единичный отрезок.





Для остальных случаев ограничимся лишь описанием преобразований, которые нужно выполнить для построения искомого графика.

$$\textit{б)}\, f(x) = |x+1|^3 - 2$$

1. График функции $f(x) = x^3$ перенесем вдоль оси Ох на 1 единичный отрезок влево.

2. Часть графика функции $f(x) = (x+1)^3$, расположенная выше оси Ох, остается без изменений, а часть, расположенная ниже оси Ох, отражается от оси Ох.

3. Перенесем график функции $f(x) = |x+1|^3$ вдоль оси Оу на 2 единицы параллельно вниз.

$$\textit{в)}\, f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{если } |x| \leq 1 \\ \frac{2}{|x|}, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Функция задана кусочно, поэтому будем рассматривать данную функцию на каждом из заданных промежутков.

1. Для $-1 \leq x \leq 1$:

а. Отразим график функции $f(x) = x^2$ относительно оси Ох.

б. Перенесем график функции $f(x) = -x^2$ вдоль оси Оу на 3 единицы параллельно вверх.

2. Для $x < -1$ и $x > 1$

а. Часть графика функции $f(x) = 1/x$, расположенная выше оси Ох, остается без изменений, а часть, расположенная ниже оси Ох, отражается от оси Ох.

б. Растянем график функции $f(x) = 1/|x|$ вдоль оси Оу в 2 раза.

Нам представляется, что отождествление действительных чисел и точек прямой относится к методически очень трудным темам школьной математики.

Наши предложения по теме "Графики функций" базируются на методических решениях проблемы арифметизации прямой и плоскости, разработанной в учебнике [1, стр. 27-28, стр. 71-72].

Литература

1. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К., Алгебра и начала анализа для X-XI классов, Алматы, "Жазушы", 2002.

Применение общего определения функции при определении некоторых основных элементарных функций

К. Е. Боказе, М. А. Жайнибекова, г. Астана, Казахстан

Основными функциями, рассматриваемые в школе, являются числовые функции числового аргумента. Поэтому очень важно в старших классах систематизировать понятие числа. Разделяются понятия: есть числа и есть их записи, наподобие того, что есть слова и есть письменность — записи слов.

Роль слов играют числа, роль букв в записи чисел — цифры. Равно как по записи буквами читают слова, так и по записи цифрами читают числа.

Числа делятся на рациональные и иррациональные. Задачи измеримости отрезков привели к появлению этих чисел. Если длина отрезка есть рациональное число, то его длина или его часть уложится целое число раз в отрезке единичной длины. В этом случае единичный отрезок и измеряемый отрезок будут называться *соизмеримыми*. Если длина отрезка есть иррациональное число, то ни он сам, ни его часть не уложатся целое число раз в единичном отрезке. Такие отрезки называются *несоизмеримыми*.

Имеются пять особых чисел: 0 (нейтральный элемент по отношению к операции сложения: $0 + a = a$ для любого числа a), 1 (нейтральный элемент по отношению операции умножения: $1 \cdot a = a$ для любого числа a), π, e, $i = \sqrt{-1}$.

После введения понятия числа в школьной математике вводится понятие степени. Степень нужно понимать как действие над числами: необходимо научить учащихся понимать записи $2^0, 2^3, 2^{-13}, 2^{1/17}, 2^{-1/21}, 2^{\sqrt{23}}, 2^{-\sqrt{3}}$.

Сначала вводится понятие степени с целыми и рациональными показателями, затем определение степени переносится на случай действительного показателя. В школьном курсе определение в полном объеме не дается, так как это понятие требует применения сложного понятия предела.

Для введения действительной степени числа наряду с теоретическими сведениями, большую пользу принесут вычисления: нахождение точных значений или выписывание нескольких первых значащих цифр данных степеней.

Вывод шести свойств степени в общем случае выходит за рамки школьной программы. Достаточно ограничиться наглядным и простым случаем для целых неотрицательных степеней.

Определение степени числа применяется при введении понятия логарифма действительного положительного числа. А именно, данное положительное число x записывается в виде степени a^c с заданным основанием a, ($a > 0$, $a \neq 1$).

Например, если за основание a взять число 2, тогда можно записать
число $x = 2$, $2 = 2^1$, то есть $c = 1$,
число $x = 1/2$ как $1/2 = 2^{-1}$, то есть $c = -1$,
число $x = 1/4$ как $1/4 = 2^{-2}$, то есть $c = -2$,
число $x = 8$ как $8 = 2^3$, то есть $c = 3$,
число $x = 1/8$ как $1/8 = 2^{-3}$, то есть $c = -3$.

Точно так же, если взять за основание a число 9, то аналогично можно записать
число $x = 3$ как $3 = \sqrt{9} = 9^{1/2}$, то есть $c = 1/2$,

число $x = 1/3$ как $1/3 = 1/\sqrt{9} = \sqrt{1/9} = 1/9^{1/2} = 9^{-1/2}$, то есть $c = -1/2$,

число $x = 9$ как $9 = 9^1$, то есть $c = 1$,

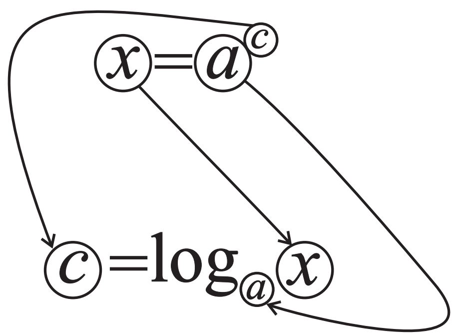
число $x = 1/9$ как $1/9 = 9^{-1}$, то есть $c = -1$,

число $x = 81$ как $81 = 9^2$, то есть $c = 2$,

число $x = 1/81$ как $1/81 = 9^{-2}$, то есть $c = -2$.

Во всех указанных случаях показатель степени c и есть определяемый логарифм числа x.

Итак, пусть $a > 0$, $a \neq 1$ и $x.0$. Действительное число c, для которого выполняется равенство $a^c = x$ называется *логарифмом* числа x по основанию a и обозначается $c = \log_a x$.



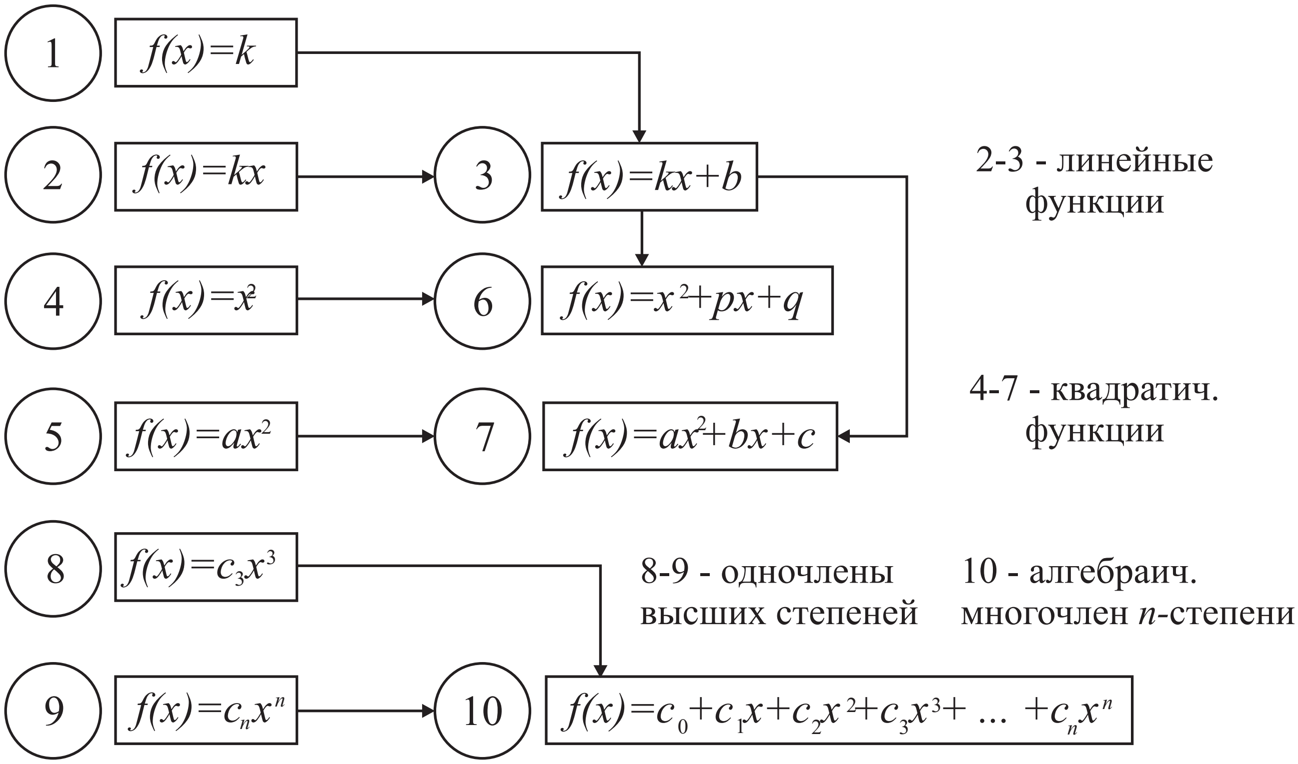
После основательной проработки понятия степени числа такое введение логарифмов станет более легким и понятным для восприятия. Основные свойства логарифмов выводятся на основании свойств степени.

Числовые функции числового аргумента, изучаемые в школе, имеют алгоритмический характер: выписывается вполне определенная последовательность действий, которая для данного числа x — значения аргумента функции — приводит к соответствующему значению функции.

Определение числовой функции вводится через рассмотрение функции (правила, алгоритма) на числовом множестве определения и так же числовом множестве значения. Заметим тут, что в определении функции используется термин “множество определения”, т.к. в математике термин “область” имеет другой смысл.

Согласно определению функции в [1, стр. 58] даём определение постоянной функции (правило f, по которому каждому числу x ставится в соответствие число k: $f(x) = k$), прямой пропорциональности ($f(x) = kx$), линейной ($f(x) = kx + b$), квадратичной функции. Заметим, что квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ полностью определяется заданием трех чисел a, b, c и последовательным нахождением чисел ax^2, bx, а затем и итоговым нахождением суммы трех чисел ax^2, bx и c.

Алгоритм построения числовых функций указан в приведенной схеме.

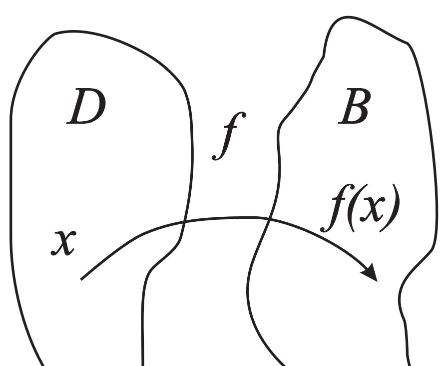


В частности, для определения первых трех элементарных функций — степенной, показательной и логарифмической — используется подробно изученное определение степени числа.

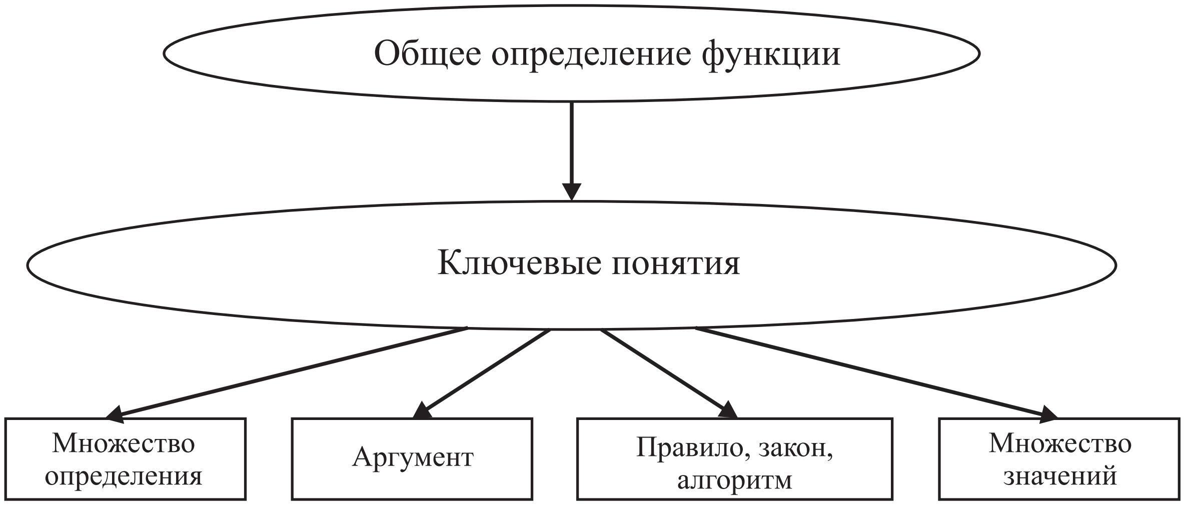
Тогда в определении степени, фиксируя показатель степени и беря основание в виде аргумента, получаем степенную функцию, поступая наоборот — показательную. В логарифме, считая записываемое в виде степени число за аргумент, получаем логарифмическую функцию.

Вспомним общее определение функции [1, стр.58]:

Пусть даны два множества D и B произвольной природы. Правило (закон, алгоритм) f, согласно которому каждому (произвольному) элементу x из множества D ставится в соответствие точно один элемент из B (этот элемент обозначают $f(x)$, как символическую запись того, что к элементу x применено правило f и результат есть $f(x)$) называют функцией, определенной на множестве D и принимающей значения из множества B.



При введении понятия функции детальная проработка определения по каждому ключевому понятию, входящему в определение, дает возможность учащимся понять смысл понятия функции.



А при определении степенной, показательной и логарифмической функций очень важно хорошо уяснить, что именно является аргументом, множеством определения, множеством значений, в чем заключается правило (закон, алгоритм).

В каждом из этих случаев правило f действительной переменной (аргументу) x ставит в соответствие число $f(x)$, определяемое как степень числа или как показатель числа.

Остановимся на каждом из этих определений.

Определение 1. Пусть дано действительное число c. Множество D состоит из всех чисел x, для которых определена степень c числа x.

Правило f, по которому каждому x из множества D ставится в соответствие число x^c, называется *степенной функцией* и обозначается $f(x) = x^c$.

Разных степенных функций ровно столько, сколько действительных чисел c.

В случае, когда $c = 0$, множество D состоит из всех чисел $x \neq 0$ и для всех таких x $f(x) = x^0 \equiv 1$.

Свойства функции, определенной определением 1, зависят от знака c (мы не будем на них останавливаться, так как целью нашей статьи стоит лишь определение функций).

Определение 2. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Правило f, по которому любому x ($x \in (-\infty; +\infty)$) ставится в соответствие значение степени a^x называется *показательной функцией* и обозначается $f(x) = a^x$ или $y = a^x$.

Для любого числа $x \in (-\infty; +\infty)$ и фиксированного числа a, удовлетворяющего указанным выше условиям, всегда найдется действительное число a^x, и поэтому заданная таким образом функция всегда определена. Свойства этой функции зависят от того, что $a > 1$ или $0 < a < 1$.

Определение 3. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Правило f, по которому каждому $x > 0$ ставится в соответствие число $\log_a x$ называется *логарифмической функцией* и обозначается $f(x) = \log_a x$ или $y = \log_a x$.

Свойства этой функции аналогичны свойствам показательной функции.

Итак, согласно определению функции [1, стр.58] в каждом из рассмотренных случаев правило f действительной переменной (аргументу) x ставит в соответствие не просто какое-то число, а соответственно

- действительную степень α числа x , т.е. $f : x \mapsto x^\alpha$ для степенной функции
- степень x действительного числа a ($a \neq 1$, $a > 0$), т.е. $f : x \mapsto a^x$ для показательной функции
- логарифм положительного действительного числа x по основанию a ($a \neq 1$, $a > 0$), т.е. $f : x \mapsto \log_a x$ для логарифмической функции

Литература

1. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. Алматы, “Жазушы”, 2002.

Задачи как средство формирования профессиональных навыков у студентов сельскохозяйственных специальностей

Г. В. Воронина, г. Орел

Современное профессиональное образование развивается с учетом процессов, протекающих в обществе. Современный уровень развития производства, изменения в социально-экономической жизни общества диктуют необходимость развития интеллектуальных умений, творческих способностей обучаемых. Цели обучения математике в аграрном вузе:

- Развитие и становление личности, подразумевающее собой: развитие мышления, мировоззрения, самоорганизации, воспитание нравственности и культуры общения.

- Формирование знаний, умений и навыков, способствующих решению прикладных задач, а именно: знаний, необходимых математических фактов (определений, свойств, теорем, методов, алгоритмов, моделей); умений свести прикладную задачу к математической (построить математическую модель или выбрать готовую из существующих) и выбрать или построить алгоритм для ее решения.

На основе этих целей должна строиться система образования в вузе, позволяющая мотивировать обучение математике, формировать прочные базовые знания, достаточные для профессиональной деятельности. Специалист в области сельского хозяйства ежедневно сталкивается с рядом проблем, и по тому, как он справляется с решением этих проблем, насколько творчески мыслит, можно судить об уровне его подготовленности.

Низкий уровень знаний, умений и навыков студентов-аграриев при обучении математике обусловлен рядом причин:

- непонимание значений методов математики для изучения специальных дисциплин;

- незнание или непонимание психолого-педагогических особенностей студентов-аграриев, которые необходимо учитывать при выборе содержания, методов, форм и средств обучения математике;

- недостаток или полное отсутствие эффективного учебно-методического обеспечения для изучения математики студентами агрономических факультетов вузов в условиях крайнего дефицита времени, отведенного на изучение этой дисциплины.

Объектом настоящего исследования является процесс обучения математике студентов сельскохозяйственных специальностей. К сельскохозяйственным мы будем относить специальности, овладение которыми дает возможность выпускнику вуза вести профессиональную деятельность, связанную с решением сельскохозяйственных задач. В рамках нашего исследования будем рассматриваем следующие сельскохозяйственные специальности: 110201 “Агрономия” и 110102 “Агроэкология”.

В соответствии с образовательными стандартами агрономы и агроэкологи в области математики должны:

- иметь представление о математике как особом способе познания мира, общности ее понятий; о математическом моделировании; об информации, методах ее хранения, обработки и передачи;

- знать и уметь использовать основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, математические модели простейших систем и процессов в естествознании, вероятностные модели для конкретных процессов , проводить расчеты в рамках построенной модели;

- иметь опыт употребления математической символики для выражения количественных и качественных отношений объектов; использования основных приемов обработки экспериментальных данных; аналитического и численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений; постановки и решения задач оптимизации; программирования и использования возможностей вычислительной техники и программного обеспечения.

На курс математики у студентов специальностей "Агрономия" и "Агроэкология" отведено 380 часов. Тем не менее, для изучения спецдисциплин используется знания из следующих разделов математики: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятностей и математическая статистика. Данный перечень разделов математики представлен в качестве минимума образовательной программы, но даже этот минимум не "вписывается" в рамки отведенных учебных часов. Поэтому перед преподавателями математики стоит основная задача: в рамках отведенных часов сформировать необходимый уровень профессиональных знаний, умений и навыков.

Процесс формирования профессиональных знаний, умений и навыков осуществляется эффективно, если обучение носит профессионально-ориентированный характер. Для студентов важно уже с первых дней учебы в вузе видеть взаимосвязь изучаемых дисциплин с будущей профессиональной деятельностью. Как показало анкетирование, только 32% студентов 1-2 курсов считают знания математики необходимыми в будущей профессиональной деятельности. Поэтому преподавателю математики аграрного вуза прежде всего необходимо развить интерес студентов к своему предмету и показать его значимость для их будущей профессии.

Специфика математики в том, что ее основным методом обучения является решение задач. Рассматривая вопросы активизации обучения математике в высшей школе, методисты особо выделяют так называемые прикладные задачи. Однозначного определения этого понятия нет, например, под прикладной понимается задача, "поставленная вне математики и решаемая математическими средствами" [2, с. 7] или под прикладной понимается сюжетная задача, которая "описывает реальную или приближенную к реальной ситуацию и содержит вопрос в том виде, в котором он обычно задается на практике" [3]. На наш взгляд, второе определение более удачное. Итак, практика профессионального обучения доказала эффективность использования в процессе изучения курса математики прикладных задач.

В сельскохозяйственных вузах математика относится к дисциплинам общенаучной подготовки и изучается на 1-2 курсах, в то время как специальные дисциплины, связанные с будущей профессией — на старших курсах, что создает определенные трудности преподавателю математики: ему необходимо разработать систему профессионально-ориентированных задач, решаемых математическими методами. Составление такой системы прикладных математических задач предполагает установление неформальных междисциплинарных связей. Не случайно Б. В. Гнеденко [1, с. 18] подчеркивает, что необходимо так строить преподавание, чтобы студент постоянно ощущал, что, изучая математику, он приближается к более глубокому пониманию своей специальности. Использование информации, необходимой в будущей профессиональной деятельности, активизирует действия студента, вызывает его профессиональный интерес. Поэтому для студентов важно уже с первых дней учебы в вузе видеть взаимосвязь математики с будущей профессией. При обучении математике следует систематически использовать агрономические понятия, термины, идеи, модели и задачи. При таком подходе студенты уже на начальном этапе обучения вовлекаются в сферу профессиональной деятельности.

С целью развития интереса к предмету важно, чтобы при решении прикладных задач студенты-аграрии кроме математических знаний и умений получали полезную информацию из фабулы задачи. Приведем пример стандартной прикладной задачи. Приведены данные об урожайности (т/га) двух сортов гороха: для 1-го - 4,4; 3,6; 3,1; 4,9; 4,7; 3,7; для 2-го- 3,1; 3,6; 4,1; 3,7; 4,9; 4,7. Определите основные статистические характеристики данного показателя. Ее фабула содержит минимум профессиональной информации и вряд ли вызовет их интерес. Изменим условие задачи: во Всероссийском научно-исследовательском институте зернобобовых и крупяных культур Орловской области в 2003 году включены в Госреестр высокопродуктивные сорта гороха “Мультик” (основные достоинства: высокая устойчивость к полеганию и осыпанию, высокий коэффициент размножения, короткостебельность, потенциальная продуктивность, ср.урожайность 2,9 т/га), и “Шустрик” (основные достоинства: высокая устойчивость к полеганию, раннеспелость, высокая семенная продуктивность, ср. урожайность 2,9 т/га). На основании данных об урожайности (т/га) этих сортов за отчетный период: “Мультик”: 4,4; 3,6; 3,1; 4,9; 4,7; 3,7;. “Шустрик”:3,1; 3,6; 4,1; 3,7; 4,9; 4,7. Рассматривают вопрос о посеве только одного сорта гороха. Какое решение следует принять? Такого рода задачи вызывают интерес у студентов. Когда возникает интерес, преподаватель математики укажет метод, с помощью которого фермер может сделать правильный выбор посадочного материала. Цель решения — поиск значения показателя, от результата которого будет приниматься решение о посеве только одного сорта гороха. Для получения ответа студенту необходимо самостоятельно определить, какие средние характеристики необходимо вычислить и выбрать ту, которая показывает более эффективный результат

Приведем еще пример. Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры в хозяйствах Орловской области, составляет 4100 га, резерв минеральных удобрений - 3100 ц д.в. и имеется 14600 чел.-дней затрат живого труда. Найти оптимальный вариант структуры посевов трех данных культур по критерию — максимальная масса прибыли, если известно: урожайность озимой пшеницы 24 ц/га, проса — 14 ц/га, гречихи — 12ц/га; затраты труда чел.-ч/ц: озимая пшеница — 0,4; просо — 0,5; гречиха — 0,8; затраты удобрений, ц д.в./га: озимая пшеница — 0,6; просо — 0,4, гречиха — 0,8; прибыль, руб/ц: для озимой пшеницы 2,0; проса — 3,0; гречихи — 4,0.

Таким образом, помещая в фабулу математической задачи профессиональную информацию для аграриев: например, селекционеры, основные характеристики, показатели качества, достоинства, зона возделывания и др., будущий специалист осознанно усваивает математические знания, видит реальное применение этих знаний в профессиональной деятельности. Наш опыт показывает, что формирование профессиональных навыков в процессе обучения математике становится более успешным и эффективным при использовании прикладных задач, несущих полезную профессиональную информацию.

Литература

1. Гнеденко Б.В. Математическое образование в вузах. -М.: Высшая школа, 1984. - 74 с.

2. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики. Книга для учителя. М.: Просвещение, 1990. - 96 с.

3. Колмакова Н.Р. Прикладные задачи как средство пропедевтики основных понятий математического анализа в школе. Дисс. канд. пед. наук, Красноярск, 1991. - 169 с.

Дополнительное математическое образование школьников

М. М. Галламов, г. Москва

Введение

Дополнительное образование школьников в любой сфере закладывает первые профессиональные навыки. Пригодятся или не пригодятся обучаемому полученные знания в системе дополнительного образования? Ответ на поставленный вопрос является определяющим в выборе предмета обучения — особенно это актуально в настоящее время. Выбор специализации по дополнительному образованию в крупных центрах основан, как правило, на мнении старших, а в глубинке этот выбор определяется необходимостью — вынуждены выбирать из того множества, что сохранилось (конечно, если оно непусто).

В данной статье рассматривается вопрос о реализации дополнительного математического образования с точки зрения автора. Прежде, чем приступать к обсуждению этого вопроса назовем *основные цели* такого специализированного математического образования:

- Первая основная цель: *Формирование основ математической культуры.*
- Вторая основная цель: *Воспитание исследовательских качеств.*

Чтобы методы достижения основных целей выглядели естественно, вначале разберемся, в какой форме начинающий постигает математику. Школьник сталкивается в основном со следующими формами обучения математике:

1) Школьная математика.
2) Компьютерная математика.
3) Развлекательная математика.
4) Олимпиадная математика.
5) Абитуриентская математика.
6) Исследовательская математика.

(Конечно, не каждый, да далеко не со всеми перечисленными формами обучения математике соприкасается учащийся.)

Наиболее значимыми в формировании профессиональных навыков являются олимпиадная и исследовательская математики. Эти формы обучения в то же время являются и *антагонистами.*

Олимпиадная математика сродни профессиональному спорту. В спорте ребенок с самого раннего возраста должен жить по определенному распорядку и посещать двухчасовые тренировки не менее пяти раз в неделю. Причем это он должен делать в течение нескольких лет, чтобы достичь высоких результатов. Такое напряжение не по плечу даже взрослому, а некоторые дети справляются и становятся великими спортсменами.

Что позволяет ребенку преодолеть такое напряжение? Кроме физиологической потребности к физическим нагрузкам в силу развивающегося организма ребенка, основным фактором является психологический — *честолюбие*, которое складывается как из маленьких, так и больших побед и подогревается неудачами. В результате тренируется не только тело, но и дух. Кто-то подумает, что при этом страдает развитие интеллекта, конечно, это не так. Ведь переносить такое длительное физическое и психологическое напряжение без знаний, способствующих укреплению этих качеств, долго профессиональным спортом заниматься не сможешь. В качестве примера, приведу случай с гимнасткой Светланой Граздовой. В четырнадцать лет её посадили на диету, которая помимо всего содержала животный белок. Чтобы не набирать лишний вес она исключила из своего рациона животный белок, через полгода заболела дистрофией. Конечно, её вылечили, и в большом спорте она осталась, но приобретенные ей знания дались трудным путем. Как правило, многие спортсмены знакомы с основами биомеханики, чтобы можно было не только максимально использовать свои физические данные, но и избежать травм. Так, например, баскетболист часто бросает мяч правой рукой, что может привести к миопии левого глаза вследствие растяжения нервов. Чтобы не приобрести травм такого сорта, необходим комплекс определенных упражнений. Напомню, что культуризм появился как лечебная гимнастика спортивных травм. Те, кто курирует спортсменов они, вольно и невольно, передают ту сумму знаний своим подопечным, которая формирует и воспитывает вполне социально адаптированных людей в современном обществе.

В чем схожесть спорта и олимпиадной математики?

Это, во-первых, эксплуатация такого не сформировавшегося качества ребенка, как честолюбия.

Во-вторых, ограниченность в средствах и методах достижения результатов на турнирах.

В спорте это выглядит естественным образом и эти минусы с избытком компенсируются другими положительными факторами от занятия спортом — укреплением здоровья, дисциплинированностью, организованностью, высокой работоспособностью, закалкой воли и духа, а также приобретением знаний по физиологии и психологии человека. Чем же могут быть компенсированы эти минусы при занятии олимпиадной математикой? Этот вопрос требует глубокой проработки. В основных чертах влияние олимпиадной математики на обучаемого проще всего описать через примеры.

Типы олимпиадных задач, а также идеи и приемы их решения ограничены различными факторами. Придумать хорошую олимпиадную задачу не так просто. Если такая задача и придумана, то не факт, что её выставят на какой-то олимпиаде, ибо задача должна быть такова, чтобы кто-нибудь из участников олимпиады в принципе её мог решить. Как известно, даже на международной олимпиаде не включают, так называемые задачи-“гробы”. К тому же участники математических олимпиад не все находятся в равных условиях по той причине, что некоторые участники в течение нескольких лет обучаются у тех преподавателей, которые составляют олимпиадные задачи. Эти преподаватели индуцируют свою математическую культуру на обучаемых — в результате чего они на олимпиаде находятся в более благоприятной среде в отличие от тех, кто не прошел такой школы обучения. Для них каждая задача олимпиады становится источником множества вопросов исследовательского уровня, многие из них пытаются провести исследование прямо на самой олимпиаде, но фактор времени лишает их этой возможности, а разбор задач после олимпиады многих из них только отталкивает от исследовательского рвения. Для первых участников олимпиады благоприятная среда дает только один плюс в виде успешного выступления на олимпиаде, что лелеет честолюбие и способствует его развитию — далеко не лучшего качества — что закладывает “мину замедленного действия”. Так идя по проторенному пути, они на многие сопутствующие вопросы, возникающие при решении задач, смотрят “замыленным глазом”, что никак не способствует развитию исследовательских качеств. При обучении олимпиадной математике этот минус можно компенсировать только тем, что в период обучения глубокие идеи и принципиально важные технические приемы прорабатываются с разных точек зрения, да вкупе с ними предлагают исследовательские задачи, а не только беглое знакомство с ними через разбор задач после олимпиады.

Поговорим теперь об *исследовательской математике*. Как таковой, исследовательской математики в чистом виде не существует. Вопросы исследовательского характера могут возникнуть на любом этапе изучения математики. Так, например, первое знакомство с принципом математической индукции у многих вызывает чувство не удовлетворенности в строгости такого метода доказательства и это чувство естественно. Основная задача преподавателя не заглушить это чувство неудовлетворенности, а по возможности его сохранить у обучаемого в первоначальном состоянии и по мере необходимости его развивать. Это кропотливая и трудоемкая работа, требующая не только высокого профессионализма, но и деликатных педагогических навыков.

Не забывайте, что существует *интуиционистская математика*, в которой принцип математической индукции не признается средством математического доказательства. В интуиционистской математике основным критерием истинности является интуитивная убедительность возможности построения мысленного эксперимента, связываемого с этими суждениями. Вследствие чего в интуиционистской математике отвергается теоретико-множественный подход к определению математических понятий, а также некоторые способы рассуждений, принятые в классической логике, в частности, метод исключенного третьего. Вследствие последнего не работают классические методы доказательства как теорем существования, так и метод от противного. Сомнения об абсолютном характере законов классической логики можно найти как в глубокой древности, так и у классиков математики, как К. Гаусс (1777 — 1855), Л. Кронекер

(1821 — 1891), А. Пуанкаре (1854 — 1912), А. Лебег (1875 — 1941), Э. Борель (1871 — 1956). Это были первые идеологические ростки интуционисской математики. Свое развитие интуиционистская математика получила в работах Л. Брауэра (1881 — 1966), А. Н. Колмогорова (1903 — 1987, построил интерпритацию интуиционистской логики как исчисления задач), В. И. Гливенко (1897 — 1940, показал, что интуиционистская логика содержит изоморфный образ классической логики), А. Гейтинга (1898 — 1980, создал интуиционистскую логику), К. Геделя (1906 — 1978, доказал независимость логических связок и невозможность представления интуиционистской логики высказываний в виде конечнозначной логики), С. Клини (1909 — 1994), предложил новый вариант интуиционистского понимания арифметических суждений, основанный на развитой в 1930-е годы теории алгоритмов и получивший известность под именем рекурсивной реализуемости (1945)) и многих других. Дальнейшая разработка научной школой А. А. Маркова (1903 — 1979) методологии С. Клини и связанных с ним идей привела к возникновению современной *конструктивной математики.*

Здесь уместно также упомянуть о другом пути преодолении антимоний — *формализме* Д. Гильберта (1862 — 1943). К 1922 г. у Д. Гильберта сложился обширный план обоснования математики путем её полной формализации с последующим математическим доказательством непротиворечивости формализованной математики.

Появление интуционистской и конструктивиской математик говорит об универсолизме математических абстракций, знания о которых мы можем получать посредством разных логик, а не только классической. *Истинность полученного знания о математических абстракциях не зависит от выбора средств доказательства. Это одно из фундаментальных явлений математической культуры, необходимо чаще его использовать при обучении математики, в особенности, в исследовательских задачах.* Здесь стоит отметить, что законы вывода классической логики были получены эмпирическим путем из рассуждений, применяемых к конечному числу объектов и далее эти законы были перенесены на бесконечную совокупность объектов, причем вначале их применения они показали свою дееспособность, а далее математики столкнулись с антимониями (парадоксами) — два взаимно исключающие друг друга результата, получены без нарушений правил вывода при их доказательстве. Истинность первых полученных результатов не пострадала после радикальной перестройки оснований математики — законов математического доказательства. Все это говорит о том, что правила вывода математических результатов, основанные на классической логике (правила рассуждения, применяемые к конечному числу объектов) дают истинность результата, несмотря на то, что они применяются к качественно другим объектам. Эти методы доказательства перестают работать тогда, когда посредством их получают парадоксы. Тогда математики берутся скрупулезно изучать и перестраивать свои основания, пока не будут преодолены антимонии. При такой перестройке математики по-прежнему продолжают свои исследования, и они уверены в том, что истинность их результатов никак не пострадает от нее. Изложенное выше это есть результат проявления *другого фундаментального явления математической культуры, как самоочищения математики, при котором все, что было получено ранее, остается в сохранности, но только при этом методы получения математических результатов становятся более универсальными.* Такое явление самоочищения математики также необходимо использовать в процессе обучения. В качестве примера проявления такого самоочищения математики являются модели геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости. В определенном смысле геометрия Лобачевского построена на отрицании постулата о параллельных прямых, что с логической точки зрения говорит о несовместимости этих геометрий, но математические методы доказательства позволяют создать посредством объектов евклидовой плоскости конструкцию, на которой выполнены аксиомы геометрии Лобачевского. Впервые такую процедуру проделал Э. Бельтрами (1835 — 1900) только на поверхности отрицательной кривизны и в 1863 г. в своей книге “Опыт истолкование неевклидовой геометрии” опроверг сомнения относительно логической непротиворечивости геометрии Лобачевского; с этого момента она получила всеобщее признание и стала быстро развиваться. Появление геометрии Лобачевского не создало в математике антимоний, в ней была изменена аксиома параллельности на противоположную, а правила вывода остались прежними.

Вернемся к сомнениям обучаемого в отношении методов математического доказательства. Какова природа, породившие сомнения такого сорта у начинающего изучать математику? Совершающий первые шаги в математике обладает мышлением, свободным от жестких рамок рассуждений классической логики, законы которой, как показал Л. Брауэр в начале XX века, не носят ни априорного, ни абсолютного характера. Они выведены прямым обобщением законов работы с небольшими конечными совокупностями устойчивых во времени объектов. Затем они были незаконно перенесены на оперирование с бесконечно большими совокупностями и стали, соответственно, неадекватны. Эта неадекватность не осознавалась длительное время и, в конце концов, завела математику в громадный тупик, из которого классическая матемаика выбралась пересмотром отдельных аксиом и созданием интуционистской математики, построенной на законах доказательства, отличных от классической математики. (Математическое образование осуществляется на основании классической математики). Детское мышление чувствительно реагирует на переходы в рассуждениях при изменении природы объектов, к которым применяются рассуждения. Так, например, некоторые задачи на составление уравнений для ребенка проще решить посредством рассуждений, чем перевести это условие на язык алгебры, а затем решить полученные уравнения. Для взрослого все наоборот. Это происходит по той причине, что ребенок должен применить свои рассуждения к объектам другой природы, и он не осознает, что задача, смоделированная посредством изоморфизма на языке объектов другой природы, требует таких же логических приемов в рассуждении, что и в первоначальном случае. Для взрослого это переход происходит естественным образом в силу приобретенного опыта — изоморфность моделей для него очевидна, хотя эту очевидность не каждый взрослый в состоянии формализовать. *Один из основных факторов в воспитании исследовательских качеств обучаемого — это развитие и укрепление первородной чувствительности мышления при рассуждениях над объектами различной природы.*

Теперь сформулируем принципы, на основании которых достигаются основные цели.

- Первый принцип: *Обучение на основании всеобъемлющей программы по элементарной математике.*

- Второй принцип: *Систематичность обучения.*

Ниже приводится обоснование и необходимость в этих принципах при достижение заявленных целей.

Первый принцип: *Обучение на основании всеобъемлющей программы по элементарной математике*

Этот принцип выдвинут по причине того, что наиболее полная программа по элементарной математике поможет ориентироваться как преподавателям, так и ученикам в наследии, которым на данный момент обладает элементарная математика, ибо без представлений о её *целостности* трудно впитать математическую культуру, да и без неё не так легко ориентироваться в выборе исследовательских тем. Сразу отметим, что эта программа служит путеводителем, а не программой для обучения, ибо то, что предлагается включить в такую программу, физически невозможно усвоить в школьные годы. С этой целью по возможности полно опишем желаемую программу.

Данная программа включает в себя материал по элементарной математике, не вошедший как в Госстандарт, так и на изучение которого в Госстандарте выделено недостаточное количество часов. Программа рассчитана на учащихся 5 — 11 классов. Каждый раздел и тему можно изучать в течение всех семи лет обучения, что дает возможность не перегружать обучаемых и достаточно глубоко изучить ту или иную тему или раздел. Как правило, наибольший интерес вызывают те темы и разделы программы, которые связаны с олимпиадной математикой. При реализации программы это необходимо учитывать. Обучение по данной программе осуществляется в три этапа.

- I этап: *обучение учащихся 5 — 6 классов и семиклассников первого полугодия.*

Обучение на первом этапе длится 2,5 года. На этом этапе основной целью являются: 1) *выработка и развитие элементарных представлений, образов о необходимых абстрактных математических понятиях для дальнейшего изучения*; 2) *овладение простыми способами и приемами решения нестандартных задач*; 3) *выявление индивидуальных особенностей и качеств обучаемого, а также их развитие и воспитание необходимых навыков*; 4) *знакомство с олимпиадной математикой.*

Изучаются *элементарные принципы, методы, способы, технические приемы, а также происходит ознакомление с принципами математических рассуждений, элементами математической культуры, историей математических открытий и биографиями математиков.*

- II этап: *обучение учащихся с середины седьмого класса по девятый класс.*

Обучение на втором этапе также длится 2,5 года. Это самый важный и напряженный этап обучения. Основная цель этого этапа: *формирование начальных профессиональных навыков*. Обучение на этом этапе включает в себя: 1) знакомство с элементами некоторых теорий; 2) овладение приемами математических доказательств; 3) выработка навыков математического мышления; 4) приложения математики; 5) историю математики; 6) олимпиадную математику.

- III этап: *обучение учащихся 10 — 11 классов.*

Обучение на третьем этапе длится 2 года. На этом этапе основной целью являются: 1) *подготовка к будущей профессии через исследовательские проекты, связанные с теоретическими исследованиями не только в области самой математики, но и её применении в физике, информатике, экономике, криптографии, химии, биологии, экологии, медицине, философии, юриспруденции, искусстве, архитектуре, музыке, астрономии, технике, строительстве и т. д.*; 2) *участие в турнирах, по результатам которых зачисляют в вуз.*

На этом этапе обучение осуществляется через самостоятельную работу, подкрепленную консультациями и необходимыми аудиторными занятиями.

Количество часов на изучение каждой темы отводится по необходимости — в зависимости от реальных условий: подготовленности и интересов аудитории и преподавателя.

Программа состоит из одиннадцати разделов: I. Арифметика; II. Алгебра; III. Математический анализ; IV. Дискретная математика; V. Элементарная теория вероятностей и элементы математической статистики; VI. Планиметрия; VII. Стереометрия; VIII. Дискретная геометрия; IX. Комбинаторная геометрия; X. Топология; XI. Математические рассуждения. Каждый раздел включает в себя подразделы, которые представлены темами, а некоторые темы в свою очередь делятся на подтемы. Для более глубокого понимания некоторых математических явлений в программу включены некоторые понятия из высшей математики, то есть такие, которые являются предметом изучения в высшей школе. Такие, например, как теория построения действительного числа как с применением аксиомы Архимеда, так и без нее, элементы p-адического анализа, решение уравнений в радикалах (теория Галуа), элементы теории групп, алгебраической геометрии и топологии, основания геометрии и различные аксиоматические построения её, а также и другие элементы высшей математики. Прейдем к необходимым пояснениями по разделам.

- *Раздел арифметика.*

Раздел арифметика состоит из четырех подразделов: I.1. Классическая арифметика; I.2. Абстрактная арифметика; I.3. Элементарная теория чисел; I.4. Диофантовы уравнения. В трех подразделах ясно чему можно обучать и что могут почерпнуть школьники, кроме подраздела “Абстрактная арифметика”. Этот подраздел включает в себя различные способы обобщения натурального ряда с максимально возможным сохранением его свойств. Он состоит из следующих тем: I.2.1. Натуральные числа. Целые числа. Рациональные числа; I.2.2. Комплексные, дуальные и двойные числа; кватернионы; I.2.3. p-адические числа; I.2.4. Целые комплексные числа Гаусса. Этот раздел очень важен, так как он дает первое знакомство с основами математической культуры и при этом знакомстве обучение опирается не на жизненный опыт обучаемого, а на математические абстракции в виде натурального ряда и его свойств. При этом также окрывается простор для исследовательской работы с самого первого года обучения, ибо арифметика p-адических чисел имеет много общего с арифметикой натурального ряда (см. [1]).

Стержнем при обучении арифметике является формирования желания, а лучше потребности у обучаемого *познакомиться лично с каждым натуральным числом.* Истоком этого служит высказывание Г. Харди (1877 — 1947) о Сринивасе Рамануджане Айенгоре (1887 — 1920): “Он знаком лично с каждым натуральным числом”.

- *Раздел алгебра.*

Раздел алгебра состоит из шести подразделов: II.1. Элементарная алгебра; II.2. Многочлены; II.3. Линейная алгебра; II.4. Элементы алгебраической геометрии; II.5. Неравенства; II.6. Абстрактная алгебра. Здесь, как и выше сделаем пояснения только относительно одного подраздела, а именно “Абстрактная алгебра”. Этот раздел включает в себя следующие темы: II.5.1. Необычные алгебры: алгебра множеств, алгебра логики; II.5.2. Отношения и его интерпретация на различных структурах; II.5.3. Упорядоченные множества. Первое знакомство с абстрактным алгебраическим понятием — решетки; II.5.4. Преобразования и перестановки; II.5.5. Понятие группы. Группы подстановок. Изоморфные группы. Теорема Келли. Циклические группы. Группы самосовмещений. Инвариантные подгруппы. Гомоморфные отображения. Разбиение группы на классы по данной подгруппе. Факторгруппа; II.5.6. Поля. Кольца; II.5.7. Группы Галуа; II.5.8. Алгебры над полем действительных чисел (алгебраические методы построения числовых систем).

Путеводной звездой в обучении алгебры может служить *принцип координатизации*, предложенный Г. Вейлем (см. по этому поводу введение к книге академика И. Р. Шафаревича [2]). Воспитание алгебраической культуры с этой точки зрения закладывает ту необходимую алгебраическую культуру, которая поможет обучаемому при дальнейшем изучении математики естественным образом погрузится в современную алгебраическую геометрию. При изучении математики его не будут мучать такие вопросы, как, а зачем нужны такие абстракции как кольца, тела, модули, группы, идеалы, алгебры, категории и многие другие абстракции, ибо обучаемый будет понимать, что эти инструменты служат для выявления более тонких свойств геометрических объектов, чем, например, методы математического анализа. (Для преподавателей: по этому поводу см. [2]). Обучение алгебре на основе принципа координатизации пробуждает мотивы к исследовательским работам с использованием абстрактных понятий более высокого уровня, чем из школьной математики.

- *Раздел математический анализ.*

Математический анализ — часть математики, в которой функции и их обобщения изучаются методом пределов. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что математический анализ изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых величин.

Математический анализ представляет собой обширнейший раздел математики. По этому поводу см. статью академика С. М. Никольского “Математический анализ” в [4]. Здесь хотелось отразить те вопросы, которые указали бы направленность программы. Раздел “Математический анализ” насчитывает десять подразделов: III.1. Элементарные функции и их графики; III.2. Пределы; III.3. Действительное число и модели его реализации; III.4. Дифференцирование; III.5. Элементы теории меры и интегрирование; III.6. Ряды; III.7. Численные методы; III.8. Элементарные функции комплексного переменного; III.9. Математический анализ на целочисленных решетках; III.10. Элементарные методы дифференциальных уравнений.

Подраздел “Элементарные функции и их графики” дает возможность познакомится с аксиоматическим методом построения элементарных функций, что позволяет эту технологию применить к решению, отпугивающих многих, функциональных уравнений.

Основная цель подраздела “Пределы” — знакомство с природой фундаментальной математической операций *пределом*, через которую познается содержательная часть таких понятий, как действительное число, непрерывность, измеримость множеств, дифференцирование, интегрирование, сходимость рядов и аппроксимация.

Отметим, что операция предел является основным отличием математического анализа от алгебры. Ели мы сопоставим подраздел III.1 “Элементарные функции и их графики” с подразделами II.1 — 2 “Элементарная алгебра” и “Многочлены” раздела “Алгебра”, то мы найдем много общих тем. Эти темы изучаются в алгебре с точки зрения операций, применяемых к данным функциям, которые основаны на свойствах функций. Последнее обосновано посредством математического анализа. Вследствие чего логично, конечно, было бы раздел “Математический анализ” ставить перед алгеброй, но это дань историческому развитию и традициям.

Заметим, что операцию дифференцирования для некоторого сорта объектов, как например, многочленов или функций, заданных в узлах целочисленной сетки, можно построить чисто алгебраическими методами, не используя операции предела.

Построение операции дифференцирования на основе предела дает прекрасные и к тому же обоснованные геометрическую и физическую интерпретации производной как углового коэффициента касательной и мгновенной скорости, а также приближенных численных вычислений. Операция предела оказалась эффективна и при построении определенного интеграла как предела верхней и нижней интегральных сумм, введенных О. Коши (1789 — 1857).

Подраздел “Математический анализ на целочисленных решетках” посвящен теории функций дискретного аргумента, что является прекрасной моделью для овладения техническими навыками в таких областях математики, как дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, функции комплексного переменного и многих других без предварительной подготовки.

Подраздел “Действительное число и модели его реализации” состоит из следующих тем: “Различные способы построение теории действительного числа”, “Построение действительного числа на основании p-адических чисел” и “Построение действительного числа на основании нестандартного анализа”. Эти темы включены не столько для обучения, сколько для осознания, как величины, являющиеся результатом нашей практической деятельности, отражаются в математических абстракциях в виде действительного или p-адического числа, а также в других абстракциях с структурой порядка или без неё (архимедовы и неархимедовы поля).

- *Раздел дискретная математика.*

Дискретная математика — область математики, занимающаяся изучением свойств структур конечного характера, которые возникают как в самой математике, так и в области её применений. К числу таких конечных структур могут быть отнесены, например, некоторые алгебраические системы, конечные группы, графы, комбинаторика, некоторые метаматематические модели преобразователей дискретной информации, такие как конечные автоматы, машины Тьюринга и другие, а также некоторые виды вычислительных сред и т. п.

В отличие от дискретной математики, классическая математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает — дискретную или непрерывную. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой — часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих одновременно как дискретными и, так и непрерывными свойствами. Кроме того, в математике существуют подразделы, использующие средства дискретной математики для изучения непрерывных моделей, и, наоборот, часто средства и постановки задач классического анализа используются при исследовании дискретных структур. Это указывает на известное слияние рассматриваемых областей.

Дискретная математика представляет собой важное направление в математике, имеющее характерные для неё предмет исследования, методы и задачи, специфика которых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа от основополагающих понятий классической математики — предела и непрерывности — и тем, что для многих задач дискретной математики сильные средства классической математики оказываются, как правило, мало приемлемыми. Наряду с выделением дискретной математики путем указания ее предмета, методов и задач, можно также охарактеризовать дискретную математику посредством перечисления подразделов, составляющих её. К ним, в первую очередь, относятся комбинаторный анализ, теория графов, теория кодирования и декодирования, теория функциональных систем, занимающаяся изучением функций, описывающих работу дискретных преобразователей, и некоторые другие. Здесь необходимо отметить, что за счет расширения понимания в её круг вопросов возможно причисление и других разделов математики, таких как математическая логика, теория чисел, алгебра, вычислительная математика, дискретная геометрия и теория вероятностей и многие другие разделы математики, в которых изучаемый объект носит дискретный характер.

Для наших целей в раздел дискретная математика включено семь подразделов: IV.1. Комбинаторика; IV.2. Развлекательная математика: игры, головоломки, ребусы, турниры и другое; IV.3. Графы; IV.4. Вычислительная математика и алгоритмы; IV.5. Математическая логика и нормальные дизъюнктивные формы; IV.6. Кодирование. IV.7. Компьютерная математика. Многие из этих подразделов являются источником нетипичных формулировок олимпиадных задач. Темы, составляющие подразделы, могут быть использованы на протяжении всего обучения в системе ДМО, а также являются заповедником многих исследовательских задач. Как правило, для многих наибольший интерес представляет комбинаторика.

С целью осознания содержания этого раздела воспроизведем полностью часть программы подраздела “комбинаторика”. Подраздел IV.1. Комбинаторика состоит из трех тем и одиннадцати подтем:

IV.1.1. Классические задачи комбинаторики: 1. Магические квадраты. 2. Задача Г. Лейбница о числе разбиений натурального числа (1669). 3. Задача Л. Эйлера о 36 офицерах. 4. Задача Л. Эйлера о кенигсбергских мостах (1736). 5. Игра “Кругосветное путешествие” У. Гамильтона (1859). 6. Задача Р. Киркмана (1806 — 1895) о 15 школьницах. 7. Задача о супружеских парах. 8 . Задача о встречах. 9. Задача размещения n различных предметов в m различных ячейках с заданным числом r пустых ячеек.

IV.1.2. Задачи и методы комбинаторики. Комбинаторные конфигурации (КФ) и их простейшие примеры: перестановки, сочетания и размещения. Существование КФ (принцип Дирихле и другие методы). Алгоритмы построения КФ (метод рекуррентных соотношений и другие). Оптимизация алгоритмов построения КФ (задача о коммивояжере и другие). Задачи перечисления: в частности, определения числа конфигураций данного класса.

IV.1.3. Элементы комбинаторики.

Подтемы (основные понятия и методы комбинаторики):

IV.1.2.2. Метод упорядоченных наборов. IV.1.2.2. Независимость выбора в комбинаторных задачах. IV.1.2.3. Применение арифметических операций в комбинаторике. IV.1.2.4. Технический прием вычисление вариантов — “шары и перегородки”. IV.1.2.5. Формула “включений и исключений”. IV.1.2.6. Применение формулы “включений и исключений”. IV.1.2.7. Алгебраические методы в комбинаторике: рекуррентные соотношения, производящие функции, ладейные многочлены. IV.1.2.8. Комбинаторные тождества. IV.1.2.9. Геометрические методы в комбинаторике: диаграммы, траектории и другие. IV.1.2.10. Геометрические задачи комбинаторики. IV.1.2.11. Примечательные числа комбинаторики: сочетания, размещения, перемещения; числа: Фибоначчи, Люка, Стирлинга, Каталана и другие.

- *Раздел элементарная теория вероятностей и элементы математической статистики.*

Следуя Андерею Николаевичу Колмогорову, под элементарной теорией вероятностей мы также понимаем ту её часть, в которой приходится иметь дело с вероятностями лишь конечного числа событий (см. [4, I. Элементарная теория вероятностей, с. 4]). Многие результаты, которые имеют место в элементарной теорией вероятностей, справедливы также по отношению вероятностей с бесконечным числом событий. Однако при изучении последней применяются существенно новые принципы.

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для изучения и практических выводов. При этом статистическими данными называются сведения о числе объектов в какой-нибудь более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками.

Статистическое описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по её общим свойствам, совсем не требующих расчленения на отдельные объекты, с другой стороны. Такое положение математической статистики является отличительной чертой от теории вероятностей, которая характеризуется общими свойствами обезличенных объектов. Образно говоря, математическая статистика является переходным мостиком от реальных объектов к их вероятностным абстракциям. К элементам математической статистики мы отнесем её простейшие приемы статистического описания такие, как статистическое распределение численностей (частот) элементов, входящих в классы разбиения изучаемой совокупности, по какому-либо качественному признаку; относительные частоты, гистограммы; количественные характеристики статистического распределения, как среднее и средне квадратическое отклонение и другие.

Данный раздел насчитывает восемь подразделов: V.1. Различные подходы к построению теории вероятностей. V.2. Аксиоматическое построение теории вероятностей по Колмогорову. V.3. Цепи Маркова и их применение. V.4. Элементы математической статистики. V.5. Вероятность и информация. V.6. Вероятность в физике. V.7. Вероятность в биологии. V.8. Парадоксы теории вероятностей и математической статистики.

Программа по данному разделу ориентирована как на знакомство с различными подходами к построению теории вероятностей, так и её применениями. Последнее способствует достижению второй основной цели обучения (см. С. 27), а вместе первое и второе вкупе с математической статистикой — формированию такой вероятностной культуры, при которой только укрепится чувствительность и разовьется интуиция, способствующие уловить расхождение между априорной (до проведения опыта) и апостериорной (после проведения опыта) вероятностями.

Отметим, что математическая теория вероятностей применяется к областям науки, которые не имеют отношения к понятиям случая и вероятности в собственном смысле этого слова. Так, например, появление каждого последующего десятичного знака в десятеричном разложении иррационального числа в десятеричную дробь не носит вероятностного характера в прямом понимании этого слова, а с точки зрения математичкой теории вероятностей оно является случайным событием. При обучении математической теории вероятностей желательно заложить основы такой вероятностной культуры, что при применении теории вероятностей не произошло "выплескивание с водой самой вероятности (в собственном смысле этого слова)".

Дальнейшее описание оставшихся разделов программы осуществлять нецелесообразно, так как они находятся в стадии разработки.

Второй принцип: ***Систематичность обучения***

Систематичность обучения достигается на базе такой организационной структуры как школа дополнительного математического образования (ШДМО). Общие положения, организационная структура, формы обучения в которой приводятся ниже.

- *Общие положения.*

1) ШДМО представляет собой одну из форм дополнительного математического образования

мотивированных учащихся 5 —11 классов, в организационную основу которой кладется принцип *обучения, а не отбора*, а воспитание осуществляется через *созидание*.

2) Полное обучение в ЩДМО составляет 7 лет, начиная с пятого класса. Несмотря на это учащийся может приступить к занятиям в школе в любой момент в первые три года обучения. Через 2 – 3 года обучаемый приобретает такие навыки самостоятельной работы, что дальше вполне может продолжать свое обучение по индивидуальной программе.

3) Программа школы ориентирована на качественное и глубокое математическое образование вне зависимости от места проживания обучаемого — в мегаполисе или глухой деревушке, а также его уровня подготовки.

4) Основой обучения являются систематические и регулярные занятия, рассчитанные на прилежание и трудолюбие обучаемого.

- *Организационная структура.*

1) Учебный год в ЩДМО состоит из двух частей: Первая часть учебного года состоит из 30 учебных недель с сентября по май следующего года, вторая часть представляет собой выездную математическую школу: зимнюю и летнюю продолжительностью соответственно 12 — 14 и 21 — 25.

2) Группы формируются по классам из 15 — 20 человек. В каждой группе не менее двух преподавателей.

3) Ведется учебный журнал группы, в котором отражаются результаты текущей работы обучаемых, их посещаемость, а также фиксируются тема проводимого занятия и индивидуальные задания.

4) За каждую четверть обучаемому выдается ведомость, оценивающая его результаты работы в четверти по каждому виду работы. 5) По результатам работы в выездных математических школах выдаются отдельные ведомости. 6) Преподаватель обязан представлять изложенные темы и индивидуальные задания в электронном виде.

- *Формы обучения: очная, очно -заочная, дистанционная.*

Очная форма обучения осуществляется посредством пяти видов занятий: 1) аудиторные занятия, 2) консультации и прием индивидуальных заданий, 3) исследовательская работа, 4) олимпиадная математика и 5) выездная математическая школа как летняя, так и зимняя.

Аудиторные занятия проходят один раз в неделю: для 5 — 6 классов 2 часа в неделю, 7 класс 3 часа в неделю и 8 — 9 класс 4 часа в неделю.

Консультации и прием индивидуальных заданий два раза в неделю: 5 — 6 класс 4 часа в неделю, 7 класс 6 часов в неделю и 8 — 9 класс 8 часов в неделю. Они могут проводиться как индивидуально, так и коллективно.

Исследовательская работа проводится в следующем виде — каждому обучаемому выдается тема доклада и список литературы. В конце учебного года обучаемый должен выступить с докладом на конференции. На подготовку каждого доклада ученика к конференции за руководство в 5 — 6 классе 4 часа, в 7 классе 6 часов и в 8 — 9 классах 8 часов.

Олимпиадная математика представляет собой вид занятий, включающий в себя математические турниры различного вида (письменная и устная олимпиады, математический бой, математическая регата и другие). Математические турниры должны проводиться не менее 5 раз в учебном году и не реже одного раза в четверть. На учебный год за подготовку и проведение математических турниров выделяется в 5 — 6 классах — 50 часов, в 8 классе — 60 часов и в 8 — 9 классах — 70 часов.

Выездная математическая школа — особо важный вид занятий, как для обучения, так и для воспитания. Количество часов, выделяемое на такую школу лучше проводить из расчета на один день. 5 — 6 классы 3 часа аудиторных занятий, 3 часа консультаций и прием индивидуальных занятий и 2 часа на воспитательные мероприятия, если же в этот день проводиться математический турнир, то 10 часов. Итого в общей сложности 8 или 10 часов. 7 — 9 классы

4 часа аудиторных занятий, 4 часа консультаций и прием индивидуальных занятий и 2 часа на воспитательные мероприятия, если же в этот день проводиться математический турнир, то 12 часов. Итого в общей сложности 10.

Другие формы обучения требуют специального обсуждения, так как одним из основных факторов достижения основных целей (см. с. 27) в процессе обучения является передача (индуцирование) как математической, так и исследовательской культуры преподавателя своему подопечному. Как это можно сделать без достаточного индивидуального общения, не очень понятно.

В конце отметим, что в процессе обучения особое внимание необходимо обращать на завершение обучаемым полученного задания, ибо при завершении трудоемкой задачи или исследовательского проекта возникает множество подводных камней.

Рассмотрим два фактора, влияющих на это обстоятельство — 1) напряженность и длительность выполнения такого задания; 2) значительная часть исследований обучаемым проводится самостоятельно. Эти два фактора способствуют глубокому пониманию обучаемым поставленной перед ним задачи, вследствие чего вырабатывается самостоятельное восприятие её не только в техническом её осуществлении, но и в целом, то есть, как решаемая задача связана с другими вопросами и какое место она занимаем в общей системе знаний обучаемого. Последнее у обучаемого порождает психологическую уверенность, что теперь он в любой момент может завершить свою решаемую задачу — самое трудное позади. Эти же два фактора способствуют появлению таких явлений, как утомляемость и потеря свежести восприятия исследуемого вопроса. При завершении требуются более филигранные средства, но увы, сил-то не осталось, и обучаемый пытается это завершение проделать прежними средствами, в результате работа получается оляпистая, а не изящная. Так в этот момент преподавателю и необходимо уделить наибольшее внимание и оказать максимум помощи, и тогда будет меньше специалистов, которые все понимают, а ничего сделать не могут, так как у них в процессе обучения не сформировали определенной культуры и не воспитали в них осознание того, что завершение требует более высокого исполнительского мастерства, чем предшествующая деятельность, что вызывает большее напряжение, вследствие чего необходимо большее усилие воли и духа. Последнее требует больше сил, которые быстро иссякают при первом энтузиазме, а далее выходит на первый план культура и мастерство, которыми обладает специалист. Этот процесс профессионального завершения интеллектуального труда принципиально противоположен завершению, о котором говорят: “Чтобы пыль в глаза пустить”.

Литература

[1] Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский. Математические беседы. Москва Ижевск: РХД, 2002. — 260 с.

[2] И. Р. Шафаревич. Основные понятия алгебры. Ижевск: НИЦ ”Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. — 452 с.

[3] С. М. Никольский. Математическая энциклопедия: Гл. редактор И. М. Виноградов, т. 3, М.: Советская энциклопедия.

[4] А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис, 1998. — 129с.

О преподавании элементов теории вероятностей и статистики в дистанционной школе

Н. А. Горбачева, Т. А. Зорина, Л. Н. Посицельская, г. Москва

Описывается методика преподавания элементов теории вероятностей и математической статистики, разработанная и опробованная в Центре образования "Технологии обучения". Обсуждается опыт проектной деятельности по данной дисциплине на примере ученического проекта "Социологическое исследование отношения учащихся к учебе и школе".

Преподавание теории вероятностей и статистики в средних школах России с недавнего времени стало обязательным. В стандарте математического образования, принятом в 2004 году, изложены как темы, необходимые для изучения, так и умения и навыки учащихся по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. Известно, что за рубежом в программу школ данная тематика входит уже давно. В нашей стране учащиеся знакомились с комбинаторикой, вероятностью, статистическими характеристиками только в классах физико-математического профиля или в кружках и на факультативах, то есть учитель работал с мотивированными учащимися. Теперь же изучение данных тем стало обязательным для всех, а с нынешнего года задачи по теории вероятностей и статистике входят и в государственный экзамен за основную школу. В этой связи важно не только познакомить каждого учащегося с новыми для него понятиями, но и научить его оперировать ими, решать задачи, применять на практике.

В данной статье описывается методика, которая была разработана и опробована в Центре образования "Технологии обучения" — дистанционной школе для детей с ограниченными возможностями здоровья [1]. В настоящее время на постоянной основе в ней учатся более 200 учащихся, кроме этого около 1000 детей занимаются на разнообразных дополнительных курсах. Дистанционная форма обучения, в отличие от традиционной, позволяет каждому ученику работать в индивидуальном темпе. При благоприятных условиях (достаточная степень мотивации, нормальное самочувствие) школьник может, например, за один учебный год освоить материал двух лет обучения. Среди математических курсов нашей школы есть как общеобразовательные, так и курсы, нацеленные на развитие творческих способностей учащихся. Математические курсы школы полностью обеспечивают содержание образования по математике, предусмотренное стандартом.

Реализация любой темы в школьном курсе сталкивается с рядом проблем. Одной из них является проблема содержания материала: а именно, что конкретно и в каком объеме изучать. Так как школьный курс строго ограничен временными рамками, то приходится выбирать необходимый минимум, достаточный для достижения поставленных целей обучения и соответствующий содержанию, указанному в стандартах образования.

Основными целями включения в школьную программу элементов теории вероятностей и статистики являются следующие: дать понятие о данном разделе математики и его связи с окружающим изменчивым миром; воспитать осознанное представление о случайных событиях; научить пользоваться приемами описания массивов данных; привить критическое отношение к статистическим выводам и обобщениям, умение правильно истолковывать статистическую информацию.

Проанализировав все имеющиеся на сегодняшний день учебные пособия для средней школы по статистике и теории вероятностей, мы разработали отдельный дистанционный курс "Статистика и теория вероятностей" (http://iclass.home-edu.ru/course/view.php?id=150). Он включает в себя все темы, содержащиеся в стандартах и рекомендованные для изучения. В курсе используются интерактивные лекции, компьютерные тесты, тренажеры, дидактические игры, инструменты для виртуальных экспериментов и моделирования. Это позволяет сделать обучение наглядным и вариативным как по подаче изучаемого материала, так и по формам контроля.

Учащиеся могут выбрать курс в качестве элективного или профильного. В настоящее время на нем занимаются не только учащиеся нашей школы, но и школьники других регионов страны, так как школа “Технологии обучения” является главной площадкой для реализации проекта “Дистанционное образование для детей с ограниченными возможностями”. Это делает возможным изучение школьниками теории вероятностей и в тех регионах, где, возможно, пока недостаточно бумажных учебных пособий.

Однако многие наши ученики в силу различных причин (здоровье, перегруженность) не могут проходить курс целиком, поэтому было решено изучать отдельные темы курса непосредственно в курсах алгебры. Это стало возможным, так как курс имеет модульную структуру. Отбор тем для каждого класса был очень тщательным, учитывался и возраст детей, и порядок прохождения тем, и наполненность основного курса.

Поддерживая методику введения понятий теории вероятностей до комбинаторики [2], мы, тем не менее, считаем, что комбинаторика является не только инструментом для подсчета вероятностей, но и средством развития мышления. Поэтому уже в 5-ом классе дети знакомятся с логикой перебора, построением дерева возможных вариантов. Учащиеся решают несложные комбинаторные задачи, где не так много элементов, но важна сама суть перебора всех вариантов. Использование интерактивных игр делает усвоение новых понятий более легким. Свои решения многие наши ученики выполняют в программе “Живая математика”, которая позволяет сделать работу менее трудоемкой. Несмотря на свою простоту и доступность, операция перебора служит основой для формирования у детей комбинаторных понятий и хорошей подготовкой к освоению в дальнейшем формул и закономерностей.

Очень важным элементом стохастики является анализ данных, а начальным этапом анализа данных является работа с таблицами и диаграммами, которую мы начинаем в 6-ом классе. Учащиеся анализируют таблицы и диаграммы, учатся извлекать из них всю необходимую информацию. Так как для наших школьников компьютер является привычным рабочим инструментом, то для построения диаграмм и таблиц по данной информации они часто используют такие программы как Excel, Word, NeoOffice [3]. Таким образом, межпредметные связи между математикой и информатикой становятся более тесными.

Основы описательной статистики рассматриваются в 7-ом классе. Вводятся такие характеристики, как среднее арифметическое, мода, медиана, размах. Решая задачи, дети учатся применять их для анализа информации, понимать их практический смысл и то, что для описания наборов чисел можно и нужно использовать разные показатели. При изучении статистических характеристик ученик проводит на курсе собственные виртуальные эксперименты. Наборы данных, предлагаемые школьникам, вначале невелики по объему. И хотя учащиеся к этому времени уже знакомы с программами Excel и NeoOffice, но применение программных средств обработки данных происходит после того, как усвоены сами понятия.

Работы психологов утверждают, что человек изначально плохо приспособлен к вероятностной оценке, к осознанию и верной интерпретации вероятностно-статистической информации, однако наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений возраст 11-12 лет. В нашей школе учащиеся знакомятся с понятием вероятности в 7-ом классе. Они узнают, что такое случайный опыт, элементарное событие, равновозможные события, решают несложные задачи на вычисление вероятности события. Иллюстрации к текстам, дидактические игры делают изложение материала более живым и доступным для учащихся.

Темы 8-го и 9-го классов расширяют знания школьников по теории вероятностей. Вводятся понятия несовместных и независимых событий, решаются задачи с использованием правил сложения и умножения вероятностей. На этом этапе обучения учащиеся знакомятся с основными формулами комбинаторики. Они учатся применять формулы подсчета возможных комбинаций для решения вероятностных задач, так как без использования формул иногда невозможно перечислить все элементарные события. Понятие геометрической вероятности позволяет закрепить навыки нахождения вероятности, попутно повторяя свойства различных геометрических фигур. Изучение схемы испытаний Бернулли дает возможность не только познакомиться с простой и полезной моделью независимых опытов с двумя возможными исходами, но и повторить и закрепить многое из уже пройденного материала.

Наш опыт показывает, что детям интереснее вычислять и анализировать числовые показатели для реальных, а не вымышленных данных. К сожалению, пока у нас нет, как в других странах, банка числовых данных, доступных для школьников. Учителя могут использовать данные интернет-сайтов, конечно, после тщательного анализа и отбора, причем, возможно потребуется дополнительная работа с данными, прежде чем их можно будет предложить учащимся.

Другой путь, более сложный и трудоемкий, но и более интересный — это статистическая обработка информации, полученной в результате самостоятельной проектной работы учащихся. Примером такой работы является проект ученицы 10 класса "Социологическое исследование отношения учащихся к учебе и школе". Цель проекта — использование описательной статистики для исследования психологического состояния детей, изучения степени выраженности и причин школьной тревожности, эмоциональных особенностей отношений школьника со сверстниками и учителями. Тревожность личности — распространенный психологический феномен нашего времени. В настоящее время увеличилось число тревожных детей, отличающихся повышенным беспокойством, неуверенностью, эмоциональной неустойчивостью. Поэтому было интересно посмотреть, как ведет себя показатель тревожности в нашей школе. Для проведения исследования выбран опросник уровня школьной тревожности Филлипса [4], но число вопросов было сокращено до 17. Примеры вопросов: 1) Сильно ли ты волнуешься при ответе или выполнении задания? 2) Трудно ли тебе получать такие отметки, какие ждут от тебя родители? 3) Доволен ли ты тем, как к тебе относится учитель? Ответом на каждый вопрос служило целое число от 1 до 5, показывающее степень выраженности того или иного индекса тревожности. В опросе участвовали учащиеся с 6-го по 11-й класс. Обработка велась в программе "Живая Статистика". Ученица подсчитала средние характеристики, построила диаграммы. Результаты оказались довольно интересными и во многом неожиданными. Статистическая информация, полученная в ходе исследования, будет использована для информирования работающих с детьми учителей об особенностях тревожных состояний учеников и дальнейшей психологической работы с учениками, направленной на снижение тревожности.

Изучение стохастики, которое происходит с опорой на процессы окружающего мира, на жизненный опыт ребенка, повышает интерес к математике, что и наблюдают учителя в нашей школе. Некоторые дети, которые уже смирились с тем, что уравнения, неравенства — это трудно и непонятно, впервые проявляют заинтересованность, почувствовав вкус к решению задач по этой "новой математике", что, возможно, поможет учителю в работе с этими учениками по другим темам. Мы думаем, что было бы целесообразно регулярно решать на уроках математики наряду с текстовыми также и вероятностные задачи, включать их в текущие контрольные работы. Кроме того, полезно продумать и более глубокую интеграцию стохастических тем в курсы математики. Это позволит избежать обособленности подобных задач, и, несомненно, будет способствовать развитию мышления учащихся.

Литература

1. Посицельская Л.Н., Николаева К.А., Горбачева Н.А. Обучение математике в дистанционной школе для детей с ограниченными возможностями //Информатизация обучения математике и информатике: педагогические аспекты. - Минск: БГУ, 2006. С. 366-370. (Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию Белорусского государственного университета, Минск, 25-28 октября, 2006 г.)

2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. - М.: МЦНМО: ОАО "Московские учебники", 2008.

3. Посицельская Л.Н., Горбачева Н.А., Зорина Т.А. Информационные технологии как средство индивидуализации обучения. // Международная конференция "Современные проблемы математики и механики", посвященная 70-летию академика В.А.Садовничего, 2009. С. 345.

4. Методика диагностики уровня школьной тревожности Филлипса.
http://azps.ru/tests/tests_philips.html

Интегралы Стилтьеса для кватернионов

Е. А. Горин, Т. Н. Казарихина, г. Москва ©2010

Обсуждается вопрос о критерии существования интеграла Стилтьеса в ситуации, когда значения обеих функций суть кватернионы.

The Stieltjes Integrals for the Quaternions. ©2010. By E.A.Gorin, T.N.Kazarihina

The problem of the existence of the Stieltjes integral for the quaternion–valued functions is discussed.

1. Интеграл Стилтьеса возник в конце XIX–го века в связи с непрерывными дробями и проблемой моментов. Стилтьес интегрировал вещественные непрерывные функции на отрезке $X = [a, b]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ по вещественным функциям ограниченной полной вариации. В этом случае проблема существования интеграла практически не возникает.

Интерес к интегралу Стилтьеса возрос, когда Ф. Рисс 15 лет спустя установил, что при таких интегрирующих функциях интеграл Стилтьеса реализует все непрерывные линейные функционалы в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на отрезке. Заметим, что в дальнейшем теорема Рисса была распространена (например) на случай произвольного (метрического) компакта X с заменой интеграла Стилтьеса интегралом Лебега по борелевскому заряду конечной полной вариации.

В случае отрезка привлечение интеграла Лебега позволяет установить естественное биективное соответствие между непрерывными функционалами и борелевскими мерами ограниченной полной вариации. Этот и похожие примеры провоцируют идею вообще отказаться от интегралов Римана и Стилтьеса. Однако такой отказ может приводить к неприятностям в живых конкретных ситуациях, в частности потому, что для интеграла Лебега формула интегрирования по частям, вообще говоря, исчезает, тогда как для интеграла Римана-Стилтьеса она сохраняется (практически по определению).

В связи с этим вопрос существования интеграла Стилтьеса, в частности, вопрос о сводимости интеграла Лебега по мере к интегралу Стилтьеса приобретает не только академический интерес.

Хотя до сих пор (по умолчанию) речь шла о вещественных интегрируемых и интегрирующих функциях, эти вопросы сохраняют смысл, когда значения обеих функций принадлежат полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел или даже телу $\mathbb{H}$ кватернионов.

В случае интеграла Римана среди критериев интегрируемости наиболее выразительно выглядит критерий Лебега: интеграл существует тогда и только тогда, когда подынтегральная функция ограничена на отрезке и непрерывна почти всюду по мере Лебега. Поэтому можно ожидать, что в предположении существования интеграла Лебега-Стилтьеса для существования интеграла Римана-Стилтьеса аналогичную роль может играть сопутствующая мера Лебега. Мы покажем, что это ожидание оправдывается (даже при расширении исходного поля скаляров до тела кватернионов), в связи с чем будем считать, что читатель знаком со схемой Колмогорова (например, по [1], [2] или [3]). Кроме того, мы предполагаем известными основные факты, связанные с функциями ограниченной вариации, основные понятия, связанные с интегралом Стилтьеса (например, по [4]) и гиперкомплексными числами (например, по [5]), хотя кое–что напомним.

Как это принято, в основном мы распределяем нагрузку дополнительных условий между интегрируемой и интегрирующей функциями, считая последнюю непрерывной слева функцией ограниченной вариации, хотя некоторые утверждения, например, формула интегрирования по частям, остаются справедливыми для произвольных пар.

Заметим, что в [1] и [4] авторы намеренно отказываются от поиска критериев интегрируемости. Рисс в [6, с.137] указывает необходимое условие, а затем отмечает, что “в том случае, когда (подвергающаяся интегрированию) функция f ограничена, указанное условие и достаточно для существования интеграла”.

В [2, с.45] ограниченность f включается в число необходимых условий, однако, это верно не для всех g (например, при $g = 0$ годится *любая функция* f).

В данном сочинении мы дадим критерий интегрируемости f по g. Основное наблюдение состоит в том, что f обязана быть ограниченной, *но лишь в некоторой окрестности носителя меры,* отвечающей вариации функции g, и тогда дополнительное условие по существу совпадает с условием Лебега, однако с заменой классической меры Лебега мерой, отвечающей вариации. Эти условия по отдельности являются необходимыми, а в совокупности — достаточными, и, таким образом, мы получаем уточнение и усиление названных выше результатов. Заметим, что в последнее время интерес к гиперкомплексному анализу возрос (среди прочего в связи с приложениями).

Несомненно, что методический акцент в этом тексте не может не занимать заметного места: трудно предположить, что об интеграле Стилтьеса, особенно в достаточно стандартных предположениях, можно сказать что–нибудь новое, не считая приложений. Вместе с тем, в легко доступных источниках *критерия* интегрируемости, хотя бы в вещественной ситуации, нам найти не удалось.

Комплексный случай был рассмотрен в нашей статье [7]. Там же намечены приложения к проблеме восстановления меры по её потенциалу в некоторых бесконечномерных банаховых пространствах. Здесь исходные леммы оформлены несколько иначе. Однако ни приложениями, ни проблемой выхода за рамки кватернионов мы заниматься не будем. Кроме того, мы не будем уходить с отрезка, хотя, как это сделать для вещественных функций в евклидовом пространстве, указано уже Риссом (см. выше), небрежное рассмотрение абстрактной ситуации предпринято, например, в [8], и т.д. Случай кватернионов был упомянут в нашем докладе [9].

2. Тело кватернионов $\mathbb{H}$ можно определить как совокупность 2×2–матриц

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

При таком определении комплексным числам сопоставляются матрицы с $\beta = 0$.

Обозначим через j матрицу с $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Тогда каждый кватернион q получает однозначно определенное представление вида $q = z_1 + z_2 j$ с комплексными z_1, z_2 и правилами умножения $j^2 = -1$ и $zj = j\overline{z}$ (и это, пренебрегая строгостью, можно принять за определение кватернионов). Полагая $k \stackrel{\text{def}}{=} ij$, мы получим стандартное представление. В качестве векторного пространства над $\mathbb{R}$ пространство $\mathbb{H}$ имеет размерность 4. Норма кватерниона может быть определена равенством $|q|^2 = \det(q)$, так что $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|$.

3. Пусть $[a, b]$ — конечный отрезок вещественной оси. *Разбиением* T отрезка называется конечная последовательность

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n = b$$

точек отрезка. Число $\partial(T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_k |x_{k+1} - x_k|$ называется *диаметром разбиения.*

Пусть теперь f и g — две произвольные функции на $[a, b]$ со значениями в $\mathbb{H}$. Формально определение интеграла не отличается от классического, однако здесь приходится различать “левый” и “правый” интегралы, так как в $\mathbb{H}$ нет коммутативности.

Левый интеграл есть “предел” левых интегральных сумм

$$\sum_k f(\xi_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k))$$

при $\partial(T) \to 0$. Здесь (как обычно) $x_k \le \xi_k \le x_{k+1}$. Этот предел обозначается $\int_a^b f dg$.

Если порядок сомножителей поменять местами, то аналогично возникает правый интеграл $\int_a^b (dg) f$.

Формула интегрирования по частям приобретает вид

$$\int_a^b f dg - \int_a^b (df) g = f(b)g(b) - f(a)g(a), \tag{1}$$

причем оба интеграла слева в (1) одновременно существуют или нет.

Если формально в левом интеграле разложить f и g на компоненты и выполнить арифметические операции, то возникнет 16 вещественных интегралов, существование которых очевидно влечет за собой существование исходного. Ниже среди прочего мы покажем, что верно и обратное.

Среди других необходимых условий интегрируемости можно отметить тот факт, что f и g не могут иметь общих точек разрыва. Далее, если $g(\alpha) \neq g(\beta)$ и $0 < \beta - \alpha < \delta$, где δ достаточно мало, то функция $|f|$ ограничена на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, если $g(\alpha) = g(\beta)$ и $|\beta - \alpha|$ достаточно мало, то выполняется хотя одно из условий: либо $g|[\alpha, \beta] = \mathrm{const}$, либо функция $|f|$ ограничена на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $\Delta = (\alpha, \beta)$ — открытый интервал, то через $\overline{\Delta}$ мы обозначаем его замыкание и через $\overrightarrow{\Delta}$ — стрелку $[\alpha, \beta)$. Среди прочего мы будем использовать конечно–аддитивную меру (заряд), определенную на стрелках формулой $\nu([\alpha, \beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$.

Наша ближайшая цель — получить аналог простейшего критерия интегрируемости по Риману.

Пусть E — конечномерное вещественное банахово пространство размерности m. Базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ в E называется базисом Ауэрбаха, если существует такой базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\}$ в сопряженном пространстве, что $\|e_i\| = \|\varphi_i\| = \varphi_i(e_i) = 1$ при всех i и $\varphi_i(e_k) = 0$ при $i \neq k$. Например, стандартный базис в $\mathbb{R}^m$ является базисом Ауэрбаха. Хотя мы могли бы обойтись этим очевидным фактом, заметим, что базис Ауэрбаха существует в каждом конечномерном банаховом пространстве (этот классический результат был установлен Ауэрбахом на заре развития функционального анализа в 1935 г. и обычно именуется леммой Ауэрбаха).

Лемма 1. *Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — такие векторы в банаховом пространстве размерности m, что при любом выборе знаков*

$$\Big\|\sum_k \pm u_k\Big\| \le \varepsilon$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\sum_k \|u_k\| \le m\varepsilon$$

(причем m — точная константа на классе банаховых пространств).

Доказательство. Из условия сразу следует, что $\sum_k |\varphi(u_k)| \le \varepsilon$ для каждого функционала φ с нормой ≤ 1. Остается перебрать в качестве φ функционалы φ_i, фигурирующие в лемме Ауэрбаха, сложить полученные неравенства, переставить порядок суммирования и заметить, что $\|u\| \le \sum_i |\varphi_i(u)|$ для каждого вектора u. Наконец, если в $\mathbb{R}^m$ в качестве нормы взять максимум из модулей координат, то финальное неравенство сведется к равенству. □

Лемма 2. *Если (левый) интеграл Стилтьеса $\int_a^b f\, dg$ существует, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будет иметь место импликация*

$$\partial(T) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)|\nu(\overrightarrow{\Delta}_i)| < \varepsilon, \tag{2}$$

где $\Delta_i = (x_i, x_{i+1})$ и $\omega_f(\overline{\Delta}_i)$ — колебание функции f на отрезке $\overline{\Delta}_i$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Если интеграл существует, то при подходящем $\delta > 0$ из $\partial(T) < \delta$ и $\xi_i, \eta_i \in \overline{\Delta}_i$ будет вытекать неравенство

$$\Big|\sum_i (f(\xi_i) - f(\eta_i))(g(x_{i+1}) - g(x_i))\Big| < \varepsilon, \tag{3}$$

и фактически нам остается “внести” знак нормы под знак суммы.

Пусть u_i — общий член суммы в (3). По смыслу исходного условия, мы имеем право в некоторых членах суммы поменять местами ξ_i и η_i с сохранением неравенства. Однако, при такой замене фактически меняется знак исходного слагаемого. Поэтому будет выполняться условие леммы 1. Следовательно, используя мультипликативность нормы и варьируя промежуточные точки, мы получим неравенство (3), правда, с заменой ε на 4ε. $\square$

5. Начиная с этого пункта мы будем (по умолчанию) предполагать, что g — функция ограниченной полной вариации, непрерывная слева. Кроме того, в некоторых случаях удобно считать, что $g(x) = g(a)$ при $x \le a$ и $g(x) = g(b)$ при $x \ge b$. В этом случае ν продолжается до счетно–аддитивной кватернионной борелевской меры конечной полной вариации и с ограниченным (в $\mathbb{H}$) множеством значений.

Положим $v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{var}_a^x(g)$. Тогда v — неубывающая непрерывная слева неотрицательная функция, так что функция, определенная на стрелках равенством $\mu([\alpha,\beta)) = v(\beta) - v(\alpha)$, продолжается до неотрицательной (счетно–аддитивной) борелевской меры. Ясно, что $|\nu(A)| \le \mu(A)$ для всех борелевских множеств $A \subset [a,b]$.

Каждая из вещественных компонент ν_r меры ν обладает аналогичным вещественным продолжением и мажорантой μ_r. Сумма этих мажорант оценивает сверху меру μ. Вместе с тем, каждая из них не превосходит μ.

Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на компакте X. Легко убедиться, что среди открытых подмножеств отрезка X имеется максимальное открытое подмножество G_μ нулевой μ–меры. Дополнительное множество S_μ называется (замкнутым) *носителем меры* μ. Ясно, что $\zeta \in S_\mu$ тогда и только тогда, когда $\mu(U) > 0$ для каждого открытого множества U, содержащего точку ζ.

Возвращаясь к отрезку, легко показать, что этот критерий почти дословно сохраняется при замене μ на ν. Мы сформулируем соответствующий факт в виде следующей леммы, доказательство которой опустим.

Лемма 3. *$\zeta \in S_\mu$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность интервалов $\Delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$, что*

$$\zeta \in \Delta_k, \ \ \nu(\Delta_k) \ne 0 \ \ \text{и} \ \ 0 < \beta_k - \alpha_k \to 0.$$

Точки α_k и β_k можно считать точками непрерывности функции g. $\square$

Следующая простая лемма имеет принципиальный характер.

Лемма 4. *Если (левый) интеграл Стилтьеса существует, то функция f ограничена в некоторой окрестности компакта S_μ.*

Доказательство. Достаточно установить ограниченность в некоторой окрестности фиксированной точки $\zeta \in S_\mu$. Возьмем какое–нибудь $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta > 0$, чтобы каждая интегральная сумма с $\partial(T) < \delta$ отличалась от значения интеграла не более, чем на ε.

Согласно лемме 3 существуют такие α, β, что $\alpha < \zeta < \beta$, $g(\alpha) \ne g(\beta)$ и $\beta - \alpha < \delta$. Будем считать отрезок $[\alpha, \beta]$ отрезком $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения T с $\partial(T) < \delta$.

Теперь предположим, что ограниченности нет. Тогда найдется такая последовательность $\{t_r\}$, что $t_r \to \zeta$ и $|f(t_r)| \to \infty$. Можно считать, что все члены этой последовательности принадлежат интервалу α, β.

При $k \neq i$ выберем и зафиксируем какие–нибудь точки $\xi_k \in \Delta_k$, а в качестве ξ_i будем последовательно перебирать точки t_r. Ясно, что возникающая последовательность сумм Римана-Стилтьеса будет неограниченной, и получается противоречие с интегрируемостью. $\square$

Заметим, что произвольное изменение функции f вне некоторой окрестности компакта S_μ не влияет на существование интеграла и не меняет его значения. Поэтому в силу леммы 4 мы можем считать, что $f(x) = 0$ *вне некоторой окрестности компакта* S_μ *и что* $|f(x)| \leq c = \mathrm{const} < \infty$ *при всех* x.

В предположении счетной аддитивности меры ν лемма 2 допускает следующее усиление.

Лемма 5. *Если интеграл Стилтьеса* $\int_a^b f\,dg$ *существует, то выполняется* (ε, δ)*–импликация:*

$$\partial(T) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)\mu(\overrightarrow{\Delta}_i) < \varepsilon.$$

Доказательство. По лемме 2, при данном $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, чтобы выполнялась импликация (2). Кроме того, мы можем считать, что при $\partial(T) < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_i |\nu(\overrightarrow{\Delta}_i)| > -\varepsilon + \mu(X). \tag{4}$$

Теперь мы фиксируем разбиение T с условием $\partial(T) < \delta$.

Пусть $\varepsilon_i > 0$. Представим стрелку $\overrightarrow{\Delta}_i$ в виде объединения непересекающихся стрелок $\overrightarrow{\Delta}_{ik}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_k |\nu(\overrightarrow{\Delta}_{ik})| > -\varepsilon_i + \mu(\overrightarrow{\Delta}_i). \tag{5}$$

Положим

$$\delta_i = -|\nu(\overrightarrow{\Delta}_i)| + \sum_k |\nu(\overrightarrow{\Delta}_{ik})|.$$

Ясно, что $\delta_i \geq 0$.

Длина каждой из стрелок $\overrightarrow{\Delta}_{ik}$ не превосходит δ. Поэтому для них выполняется неравенство, аналогичное неравенству (4). Из этих двух неравенств вытекает, что

$$\sum_i \delta_i < \varepsilon.$$

Напомним, что по предположению $|f| \leq c$. Поэтому $\omega_f(\overline{\Delta}) \leq 2c$ для каждого отрезка $\overline{\Delta}$.

Сопоставляя эти неравенства, мы получим

$$\begin{aligned}
\sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)\mu(\overrightarrow{\Delta}_i) &< \sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)\{\varepsilon_i + \sum_k \bigl|\nu(\overrightarrow{\Delta}_{ik}\bigr|\} && \text{(по неравенству (5))}\\
&< \sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)\{\varepsilon_i + \delta_i + \bigl|\nu(\overrightarrow{\Delta}_i)\bigr|\} && \text{(по определению чисел } \delta_i)\\
&\leq 2c \sum_i (\varepsilon_i + \delta_i) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

6. В этом пункте мы приведем критерии существования интеграла Стилтьеса для $\mathbb{H}$–значных функций. Необходимые условия по существу собраны в приведенных выше леммах.

Если f — вещественная функция и $\nu = \mu$, то необходимое условие, приведенное в лемме 5, является и достаточным. Действительно, как и в классической ситуации, достаточно рассмотреть суммы Дарбу. Это условие будет достаточным и для каждой пары вещественных функций: дело сводится к предыдущему замечанию, так как $g = v - (v - g)$.

Следующий результат получается путем сопоставления сформулированных выше лемм и замечаний.

Теорема 1. *Приводимые ниже утверждения эквивалентны:*
(a) *(Левый) интеграл Стилтьеса* $\int_a^b f\,dg$ *существует.*
(b) *Выполняется* (ε, δ)*–импликация*

$$\partial(T) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_i \omega_f(\overline{\Delta}_i)\mu(\overrightarrow{\Delta}_i) < \varepsilon.$$

(c) *Существуют все сопутствующие вещественные интегралы Стилтьеса.* □

Леммы 2–5 дословно переносятся с левого интеграла на правый. В частности, оба эти интеграла *одновременно существуют или нет.*

В заключение мы приведем аналог критерия Лебега существования интеграла Римана. Введенные выше обозначения сохраняются.

Пусть X — метрическое пространство и $\{V_\rho\}$ — открытое покрытие пространства X. Вещественное число $\lambda > 0$ называется *лебеговым числом* покрытия, если каждый шар радиуса $\leq \lambda$ целиком содержится в некотором V_ρ. Каждое открытое покрытие компакта (но не только) обладает лебеговым числом, и это легко доказать от противного.

Теперь мы вернемся на отрезок. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\Delta_\varepsilon = (-\varepsilon + \zeta, \varepsilon + \zeta)$. Для каждой функции f существует предел

$$\omega_f(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_f(\Delta_\varepsilon).$$

Этот предел называется колебанием функции в точке ζ. Функция f тогда и только тогда непрерывна в точке ζ, когда $\omega_f(\zeta) = 0$. Очевидно, что при каждом $b > 0$ множество $\{x \mid \omega_f(x) < b\}$ открыто.

Теорема 2. *Левый (правый) интеграл Стилтьеса существует тогда и только тогда, когда функция f непрерывна μ–почти всюду и ограничена в некоторой окрестности носителя S_μ меры μ.*

Эскиз доказательства. Пусть интеграл существует. Фиксируем $\alpha > 0$ и заметим, что множество $A_\alpha = \{x \mid \omega_f(x) \geq \alpha\}$ замкнуто (и поэтому μ–измеримо).

При $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, чтобы имело место (b) из теоремы 1. Будем считать, что $\partial(T) < \delta$ и, кроме того, что каждая точка x_i является точкой непрерывности функции g. В таком случае $\mu(\{x_i\}) = 0$ при каждом i. Это позволяет при оценке μ–меры множества A_α пренебречь точками x_i и считать, что мы имеем дело с объединением

$$(\Delta_1 \cap A_\varepsilon) \cup (\Delta_2 \cap A_\varepsilon) \cup \ \ldots$$

множеств без общих точек. Мера объединения не изменится, если удалить пустые пересечения. Для каждого из остальных i имеется очевидная оценка снизу: $\omega_f(\overline{\Delta_i}) \geq \alpha$. Поэтому $\mu(A_\alpha) < \varepsilon/\alpha$. Ограниченность обсуждалась выше.

С другой стороны, пусть $\varepsilon > 0$. Так как множество точек разрыва функции f (которую можно считать ограниченной) имеет нулевую μ–меру, то оно покрывается счетной системой интервалов $\{\Delta_r\}$ с $\sum_r \mu(\Delta_r) < \varepsilon$. Далее, каждую точку непрерывности ζ покроем таким интервалом Δ_ζ, чтобы колебание функции f на этом интервале было $< \varepsilon$. В совокупности интервалы $\{\Delta_r\}$ и $\{\Delta_\zeta\}$ образуют открытое покрытие отрезка X, и в качестве δ остается взять лебегово число этого покрытия.

Это рассуждение почти не отличается от классических образцов, и поэтому мы позволили себе опустить некоторые детали. □

Литература

[1] Колмогоров А.Н. и Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., "Наука", 1977.

[2] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. *Теоремы и задачи функционального анализа.* М., "Наука", 1988.

[3] Горин Е.А. *Введение в теорию множеств и теорию меры.* М., МПГУ, 2005.

[4] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* М., "Наука", 1974.

[5] Фаддеев Д.К. *Лекции по алгебре.* М., "Наука", 1984.

[6] Рисс Ф. и Сёкефальви–Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М., "Мир", 1979.

[7] Горин Е.А., Казарихина Т.Н. *Об интеграле Стилтьеса.* Математика, информатика, физика и их преподавание. Сб. к 75–летию кафедры мат. анализа МПГУ. М., МПГУ, 2009, с. 69–79.

[8] Яковлев М.К. *Интеграл Римана как функция области интегрирования.* Математическое образование, 2(25), 2003, с.89–102.

[9] Горин Е.А., Казарихина Т.Н. *Проблема существования интеграла Римана-Стилтьеса.* Материалы межд. конф., посвященной 105–летию С.М.Никольского. М., МГУ, 2010, с. 103.

Как вводить понятие функции в средней школе

М. А. Жайнибекова, г.Астана, Казахстан

Понятие функции относится к центральным понятиям математики вообще и, в частности, школьного курса математики.

История развития понятия функции пронизывает всю историю развития математики от античности до времен Дедекинда (1887г.), Н. И. Лобачевского (1834г.), Дирихле (1837г.), а по некоторым воззрениям (напр., А. Чёрча (1960г.), это понятие надлежит отнести к первоначальным или неопределяемым. Все это еще раз подчёркивает всю сложность обучения понятию функции, тем более в условиях средней школы.

Учителями средних школ и преподавателями вузов советских и постсоветских времен накоплен различный опыт в преподавании этой темы. Как нам представляется, распространенный способ определения функции в последовательности: переменная как нечто меняющееся, независимая переменная, зависимая переменная и функция как определенная связь между переменными, по замыслу предназначенная для упрощения, на деле создает труднопреодолимые препятствия для понимания.

При определении функции в средней школе ключевыми являются слова "переменная", "независимая переменная", "зависимая переменная", "зависимость".

С благой целью сделать доступным это одно из центральных понятий математики, во многих учебниках обращаются к таким описательным объяснениям, которые, как мы сейчас покажем, только запутывают обучающегося. Сюда же относится по сути бессмысленное, потому даже мешающее правильному восприятию понятие зависимой переменной (см. обо всем этом [1]).

Так например, М. И. Башмаков в учебнике "Алгебра и начала анализа 10-11" [2] дает определение : "*Переменная — это общий термин для обозначения различных меняющихся величин. Для нас в дальнейшем термин переменная будет означать просто букву, причем будет указано множество значений, которое она может принимать. ...*

Пусть даны две переменные x и y. **Говорят, что переменная y является функцией от переменной x, если задана такая зависимость между этими переменными, которая позволяет для каждого значения x однозначно определить значение y.**"

Здесь введены две переменные, каждая из которых меняется. При таком их обозначении не видно связи между ними, каждая переменная рассматривается отдельно, как самостоятельная переменная.

Хотя автор [2] в определении функции рассматривает зависимость между переменными, в комментарии к определению рассуждает так

"*Для того, чтобы задать функцию, нужно:*

1) указать множество всех возможных значений переменной x. Это множество, которое мы будем обозначать D, называют областью определения функции;

2) указать правило, по которому числу x из множества D сопоставляется число y, определяемое числом x. Это число y называется значением функции в точке x. Переменную x называют аргументом.

Функция обычно обозначается одной буквой, например f. Значение функции f в точке x обозначается $f(x)$.

Итак, если задана функция f, то задано множество чисел D и каждому числу $x \in D$ сопоставлено число $y = f(x)$".

Хотелось бы отметить, что определение нового понятия должно быть строго однозначное, как например в [1] :

Пусть даны два множества D и B произвольной природы. Правило (закон, алгоритм) f, согласно которому каждому (произвольному) элементу x из множества D ставится в соответствие точно один элемент из B (этот элемент обозначают $f(x)$ как символическую запись того, что элементу x применено правило f и результат есть $f(x)$) называют функцией, определенной на множестве D и принимающей значения из множества B (рис. 1).

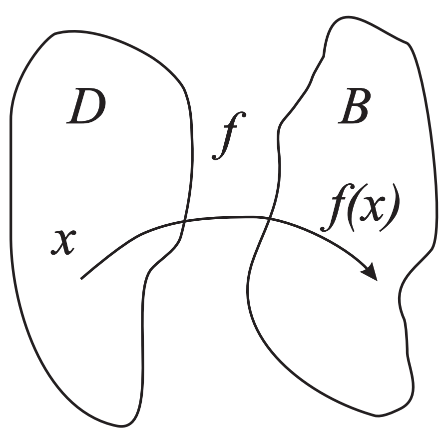


Рис. 1.

Элемент $f(x)$ множества B называют *значением функции* f в точке x.

Обсудим ключевые понятия, выделенные в данном определении последовательно буквами D, x, f и B.

Множество D задано и произвольно — этим всё сказано.

Множество D называют *множеством определения или задания (областью определения)* функции f.

Следующая мысль "каждому элементу из множества D" требует специального обозначения, поскольку к нему должно быть "применено правило f". В приведенной формулировке определения произвольный элемент множества D обозначен *буквой x*. Выбранный символ называют *аргументом функции* или же *независимой переменной*.

На правило f также нет никаких ограничений, кроме его действенности, то есть применимости ко всякому элементу из D и *единственности* на каждом элементе, заключенных в словосочетании “точно один элемент”.

Правило (или закон) f также названо алгоритмом, т.е. “определенной последовательностью действий, производимых над каждым элементом из D”. В связи с этим заметим, что основной набор функций, изучаемых в школе, имеет *подчеркнуто выраженный* алгоритмический характер.

Роль множества B в данном определении состоит лишь в том, что $f(x)$ есть элемент из B. Тем самым, множество B является условием (ограничением) на само правило f.

Отметим, что не каждый элемент множества B обязан быть значением функции f.

Для отработки ключевых понятий определения функции в [1] можно рекомендовать рассмотреть следующие примеры (см. [1], стр. 58-59):

Пример 1. *Пусть D есть множество всех государств, а B есть множество всех городов на Земле. Тогда можно определить функцию f, которая каждому государству ставит в соответствие его столицу, например, f(Республика Казахстан) = Астана.*

Пример 2. *Пусть D есть множество всех живущих на данный момент людей, а B есть множество всех имен. У каждого человека есть одно имя (в предположении, что имя никогда не меняют). Этим самым определяется функция: каждому человеку ставится его собственное имя.*

Пример 3. *Пусть дан отрезок, длину которого приняли за единицу измерения, D есть множество всех отрезков на данной плоскости, а B есть множество всех положительных чисел. Каждому отрезку поставим в соответствие положительное число — его длину относительно выбранной единицы измерения. Это правило тоже есть функция (это правило обычно применяется за одну из аксиом при построении геометрии).*

Для закрепления понятий можно предложить учащимся такие упражнения, для решения которых по данному правилу нужно записать функцию и наоборот, по данной записи функции нужно определить правило, которым задана данная функция:

Упражнение 1. Даны следующие соответствия:

A) человек – имя его отца; B) человек – дата его рождения; C) город – численность его населения

В каком из этих случаев мы можем говорить о функции? Укажите множество определения и множество значения функции.

Упражнение 2. Даны следующие функции: $f(x) = 3 \cdot x$, $g(y) = 3 \cdot y$, $\varphi(b) = 3 \cdot b$.

1) Сколько здесь задано функций?

2) По данным формулам сформулировать правило в словесной форме.

3) Указать аргументы.

Упражнение 3. Правило состоит в том, что действительное число возводится в квадрат, затем из него вычитается число 1 и извлекается квадратный корень.

1) Требуется записать правило с помощью математических символов.

2) Найти множество определения.

3) Найти множество значений.

Упражнение 4. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8}$. Требуется указать алгоритм задания функции.

Упражнение 5. Пусть X_1, X_2, X_3 — треугольник, d — прямая в плоскости треугольника, рассматриваемая как ось симметрии. Каждой точке X из $\{X_1, X_2, X_3, X_4, ...\}$ лежащей внутри или на сторонах треугольника, ставим в соответствие точку Y из $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, ...\}$, определенную указанным преобразованием симметрии.

1) Указать заданную функцию $y = f(x)$.

2) Найти множество определения.

3) Найти множество значений.

4) Начертить соответствующий чертеж.

Указания к решению упражнения 5: функция — преобразование осевой симметрии; множество определения — множества точек из $\{X_1, X_2, X_3, X_4, ...\}$, лежащих внутри или на сторонах треугольника, множества значений — множество $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, ...\}$, состоящее из точек, лежащих внутри или на сторонах симметричного треугольника. Соответствующий чертеж дан на рис. 2.

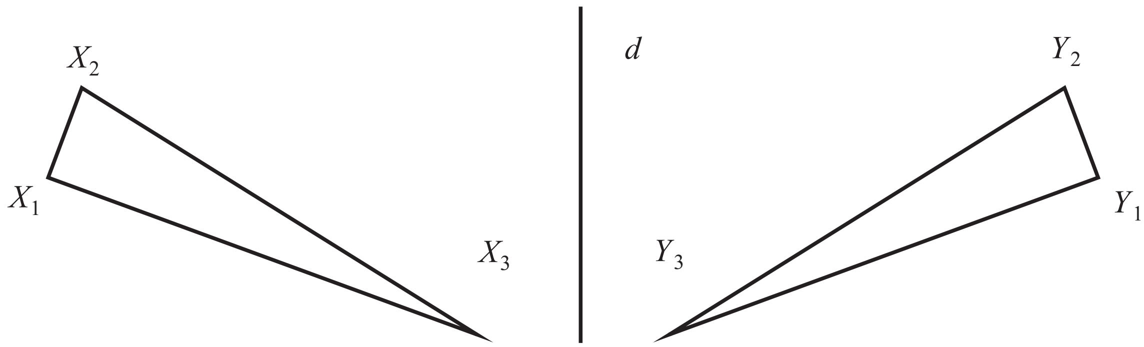


Рис. 2.

Наша цель состоит в пояснении определения функции как правила, алгоритма, закона, примененного к аргументу x. Мы воздерживаемся от понятия "зависимая переменная" и разрабатываем подробный поурочный план прямого применения в соответствии с [1] по нашей схеме, являющейся синтезом аналогичных схем из газеты "Первое сентября", журналов "Математика в школе", "ИФМ", "МФ" и др.

Мы предлагаем изучение темы "Функция" в следующем порядке:

1) На урок готовится наглядный материал: схема введения определения функции (определение → ключевые понятия → множество определения, аргумент, правило (закон, алгоритм), множество значений), таблица, содержащая краткие сведения из истории развития понятия функции, её обозначений.

2) Перед тем, как начать изучение материала, нужно повторить определения множества, его элемента, числового множества, примеры числовых множеств, их расширение.

3) Затем переходим к объяснению темы урока. Объяснение начинаем с введения определения функции. Здесь целесообразно по таблице рассказать об истории развития понятия функции.

4) Рассматриваем ключевые понятия, содержащиеся в формулировке определения по схеме.

5) Рассматриваются примеры, в которых учащиеся должны уметь четко указать для каждого случая множество значений, аргумент, правило задания функции, множество значений.

6) Для закрепления понятий предлагается учащимся самим составить задачи.

В ходе отработки навыков работы с определением функции у учащихся устанавливается четкое и правильное восприятие понятия функции.

С целью сделать более доступным пониманию учащихся это сложное понятие математики, остановимся на основных моментах, которые необходимо, по нашему мнению, учесть при изучении функций в средней школе.

1. При введении определения функции необходимо обсудить каждое ключевое понятие (аргумент x, правило f, значение функции $f(x)$, множество определения, множество допустимых значений), входящее в определение [1, стр. 24].

2. "Правило" — это то же самое, что и закон, и алгоритм, и соответствие.

3. Научить учащихся по аналитической записи функции формулировать правило, которым задана функция, а так же и наоборот, по словесной формулировке правила уметь записать его аналитически.

4. Алгоритмическое определение функции целесообразно использовать при задании изучаемых в школе числовых функций.

5. При правильном изучении понятия функции учащиеся свободно могут привести примеры функции из окружающей реальности.

6. Учащиеся должны распознавать среди соответствий те, которые являются и не являются функциями.

7. Наглядное представление функции — ее геометрическая интерпретация — дается более подробным изучением координатной системы в связке число-точка.

8. Необходимо развить у учащихся навыки работы с графиками функций, построение их с помощью преобразований.

В ходе отработки навыков работы с определением функции у учащихся устанавливается четкое и правильное восприятие понятия функции.

Литература

1. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Алматы, “Жазушы”, 2002.

2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. М.: “Просвещение”, 1992.

Практика и теория многовариантности решения тригонометрических уравнений

Т. И. Кузнецова, г. Москва

Когда одна задача решается несколькими способами, могут получиться ответы, не похожие друг на друга. Особенно это относится к тригонометрическим уравнениям. В таких случаях возникает проблема их идентификации. В этом может помочь компьютер.

Рассмотрим уравнение

$$5\sin x - \cos x = 5. \tag{1}$$

В учебных пособиях для подготовительных факультетов оно решается с помощью универсальной подстановки (I). Однако это уравнение можно решить методом введения вспомогательного угла (II), методом возведения обеих частей уравнения в квадрат (III). Будем считать отдельным способом перенесение $\cos x$ в правую часть и дальнейшее возведение в квадрат обеих частей уравнения в новом виде (IV). Наша задача заключается в сравнении полученных ответов:

I ответ (при I способе решения):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},\ \ x_2 = 2arctg\frac{3}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

II ответ (при II способе решения):

$$x = arctg\frac{1}{5} + (-1)^m arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} + \pi m, m \in \mathbf{Z}.$$

III ответ (при III способе решения):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},\ \ x_2 = arctg(-2,4) + \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

IV ответ (при IV способе решения):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},\ \ x_2 = arccos(-\frac{5}{13}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

С первого взгляда эти ответы разные. Наша цель — доказать, что они определяют одно и то же множество чисел. Для начала можно построить эскизы с использованием тригонометрической окружности и осей синусов, косинусов и тангенсов — они покажут правдоподобность нашего предположения. Однако это нельзя считать доказательством. Следующий этап — более точный — сравнение ответов с помощью компьютера. Для такого метода сравнения выразим арксинус (во II ответе) и арккосинус (в IV ответе) через арктангенс. В результате III и IV ответы примут один вид. Далее, учтем то, что для решения поставленной задачи сравнения ответов достаточно ограничиться одним оборотом, т. е. в этих ответах можно отбросить периоды и рассмотреть только "главные" значения, которые для дальнейшего удобства мы обозначили разными буквами (X_1 и X_2 — для I ответа, Y_1 и Y_2 — для II ответа, Z_1 и Z_2 — для III и IV ответов):

$$\mathrm{I}\left[\begin{array}{lcl} X_1 & = & \frac{\pi}{2} \\ X_2 & = & 2arctg\frac{3}{2} \end{array}\right. \quad \mathrm{II}\left[\begin{array}{lcl} Y_1 & = & arctg\frac{1}{5}+arctg5 \\ Y_2 & = & arctg\frac{1}{5}-arctg5+\pi \end{array}\right. \quad \mathrm{III-IV}\left[\begin{array}{lcl} Z_1 & = & \frac{\pi}{2} \\ Z_2 & = & arctg(-2,4)+\pi \end{array}\right.$$

Составим программу для вычисления "главных" значений X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 (число π обозначается PI):

ПРОГРАММА 1

```
10 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТВЕТОВ ТРИГОН. УРАВНЕНИЯ 5sin x − cos x = 5
20 PRINT "ВВЕДИТЕ PI"
30 INPUT PI
40 X1=PI/2
50 X2=2*ATN(3/2)
60 Y1=ATN(1/5)+ATN(5)
70 Y2=ATN(1/5)-ATN(5)+PI
80 Z1=PI/2
90 Z2=ATN(-2.4)+PI
100 PRINT "PI=";PI,"X1=";X1,"X2=";X2,"Y1=";Y1,"Y2=";Y2, "Z1="; Z1, "Z2=";Z2
110 END
```

Набрав эту программу и введя значение PI = 3.1416, получаем

PI=3.1416 X1=1.5708 X2=1.965587 Y1=1.570796 Y2=1.965595 Z1=1.5708 Z2=1.965595

Отсюда видно, что значения X1, Y1, Z1, как и значения X2, Y2 и Z2, близки. Если эти значения округлить до пяти значащих цифр, то получим полное совпадение:

X1 $\approx$ 1, 5708; Y1 $\approx$ 1,5708; Z1 $\approx$ 1,5708; X2 $\approx$ 1,9656; Y2 $\approx$ 1,9656; Z2 $\approx$ 1,5708.

Такой результат дает основание предположить, что

X1 = Y1 = Z1 и X2 = Y2 = Z2. (2)

Взяв более точные значения числа $\pi = 3{,}141592653589793238462643$: [1; с. 456] и введя их в компьютер, получаем "компьютерное" подтверждение этого предположения:

PI = 3.14159 X1=1.570795 X2=1.965587 Y1=1.570796 Y2=1.965585 Z1=1.570795 Z2=1.965585

PI = 3.141593 X1=1.570796 X2=1.965587 Y1=1.570796 Y2=1.965588 Z1=1.570796 Z2=1.965588

PI = 3.1415927 X1=1.570796 X2=1.965587 Y1=1.570796 Y2=1.965587 Z1=1.570796 Z2=1.965587

PI = 3.14159265 X1=1.570796 X2=1.965587 Y1=1.570796 Y2=1.965587 Z1=1.570796 Z2=1.965587

Если продолжить этот процесс далее, результаты не будут изменяться. Таким образом, проведенные вычисления дают возможность сделать вывод о большой вероятности совпадения всех трех ответов, что означает большую вероятность того, что ответы, полученные в результате всех четырех решений данного уравнения (1), совпадают в одном:

$$5\sin x-\cos x=5 \quad \left[\begin{array}{lcl} x_1 & = & 1,5708+6,2838\cdot k \\ x_2 & = & 1,9656+6,2838\cdot n \end{array}\right. \quad k,n\in\mathbf{Z}.$$

Осталось только строго доказать (2). После этого можно констатировать истинность следующих равенств:

$$arctg\frac{1}{5}+arctg5=\frac{\pi}{2};\;\; arctg\frac{1}{5}-arctg5=2arctg1,5-\pi=arctg(-2,4). \qquad (3)$$

Последние равенства сами по себе представляют особую ценность и могут рассматриваться как самостоятельный красивый результат проведенного исследования.

Аналогия и обобщение. В работе [2] проводится аналогия уравнения $3\sin x - \cos x = 3$ с уравнением (1) и делается обобщение: исследование проводится и для уравнения

$$t\sin x - \cos x = t. \tag{4}$$

В результате решений этого уравнения, аналогично решениям I и II способами уравнения (1), при $t > 0$ получаем следующие ответы:

I ответ (при I решении):

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \text{ или } x_2 = \begin{cases} 2arctg\frac{t+1}{t-1} + 2\pi n, \ t \neq 1 \\ \pi + 2\pi n, \ t = 1 \end{cases} \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{5}$$

II ответ (при II решении):

$$\left[\begin{array}{lcl} y_1 & = & arctg\frac{1}{t} + arctgt + 2\pi s \\ y_2 & = & arctg\frac{1}{t} - arctgt + \pi + 2\pi s \end{array} \right. \quad s \in \mathbf{Z}. \tag{5'}$$

Далее, отбросив периоды, опять получаем два различно выглядящие ответа, “главные” значения которых имеют следующий вид:

I

$$X_1 = \frac{\pi}{2} \text{ или } X_2 = \begin{cases} 2arctg\frac{t+1}{t-1}, \ t \neq 1 \\ \pi, \ t = 1 \end{cases} \tag{6}$$

II

$$\left[\begin{array}{lcl} y_1 & = & arctg\frac{1}{t} + arctgt \\ y_2 & = & arctg\frac{1}{t} - arctgt + \pi \end{array} \right. \tag{6'}$$

Заметим, что если в этих формулах вместо t подставить 5, а затем 3, то получим уже доказанные ранее соотношения (для 5 — это соотношения (3)). Для компьютерной проверки совпадения I и II ответов составим программу для вычисления “главных” значений X1, X2, Y1, Y2, аналогичную Программе 1:

ПРОГРАММА 2

```
10 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТВЕТОВ ТРИГОН. УРАВНЕНИЯ t sin x − cos x = t, t > 0
20 PRINT “ВВЕДИТЕ t, PI”
30 INPUT t, PI
40 PRINT “PI=”; PI
50 X1=PI/2
60 IF t=1 THEN 90
70 X2=2*ATN((t+1)/(t-1))
80 GO TO 100
90 X2=PI
100 Y1=ATN(1/t)+ATN(t)
110 Y2=ATN(1/t)-ATN(t)+PI
120 PRINT “t=”;t, “X1=”;X1, “X2=”;X2, “Y1=”;Y1, “Y2=”;Y2
130 END
```

Можно использовать и более совершенную программу, в которой используется оператор цикла. Чтобы получить такую программу из Программы 2, достаточно изменить строки 20, 30 и вставить в нее строки 45 и 125:

```
20 PRINT “ВВЕДИТЕ PI, t1, t2”
30 INPUT PI, t1, t2
45 FOR t = t1 TO t2
125 NEXT t
```

Сделаем отладку этих программ (или любой одной из них), задав PI = 3,14193 и проверив их работу при t, равном 5 и 3. Совпадение полученных результатов гарантирует правильность программ. Теперь, подставляя различные положительные значения t, получаем "главные" значения ответов к I и II решениям уравнения (4). Так, для примера введем в компьютер значения t, равные 1, 2, 4. В результате получаем:

PI=3.141593
t=1 X1=1.570796 X2=3.141593 Y1= 1.570796 Y2= 3.141593
t=2 X1=1.570796 X2=2.498091 Y1= 1.570796 Y2= 2.498092
t=4 X1=1.570796 X2=2.060754 Y1= 1.570796 Y2= 2.060754

Полученная таблица значений подтверждает большую вероятность совпадения "главных" значений (6), (6′) ответов, а следовательно, и ответов, заданных формулами (5), (5′). Доказав равенство ответов теоретически, можно в полной мере быть уверенными в формулах решения уравнения (4) для только что рассчитанных ответов:

$$t=1 \quad \sin x-\cos x=1 \quad \left[\begin{array}{l} x_1=1,5708+6,2832\cdot k \\ x_2=3,1416+6,2832\cdot n \end{array}\right. \quad k,n\in \mathbf{Z}$$

$$t=2 \quad 2\sin x-\cos x=2 \quad \left[\begin{array}{l} x_1=1,5708+6,2832\cdot k \\ x_2=2,4981+6,2832\cdot n \end{array}\right. \quad k,n\in \mathbf{Z}$$

$$t=4 \quad 4\sin x-\cos x=4 \quad \left[\begin{array}{l} x_1=1,5708+6,2832\cdot k \\ x_2=2,0608+6,2832\cdot n \end{array}\right. \quad k,n\in \mathbf{Z}$$

Итак, мы рассмотрели методику идентификации ответов при решении конкретных тригонометрических уравнений разными способами. Продолжая линию информатики, составим программу для вычисления главных значений решения уравнения (фактически для моментального решения) (4). При этом из полученных совокупностей формул для вычисления "главных" значений достаточно взять любую, например, вторую:

ПРОГРАММА 3
```
10 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО РЕШЕНИЯ ТРИГ. УР-Я t sin x − cos x = t
20 PRINT “ВВЕДИТЕ t, PI”
30 INPUT t, PI
40 X1 = ATN(1/t ) + ATN(t)
50 X2 = ATN(1/t ) - ATN(t) + PI
60 PRINT “t =”; t, “PI =”; PI, “X1 =”; X1, “X2 =”; X2
120 END
```

Теоретические результаты. Записав выведенные при этом теоретические результаты, получаем [2]:

$$arctg\frac{1}{t}+arctgt=\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2},\ \text{если } t>0 \\ -\frac{\pi}{2},\ \text{если } t<0 \end{array}\right. \tag{7}$$

$$arctg\frac{1}{t}-arctgt=arctg\frac{1-t^2}{2t}=\left\{\begin{array}{l} 2arctg\frac{t+1}{t-1}-\pi,\ \text{если } t>0,\ t\neq 1 \\ 0,\ \text{если } t=1 \\ 2arctg\frac{t+1}{t-1},\ \text{если } t<0 \end{array}\right. \tag{8}$$

Чтобы утвердиться в правильности только что сделанного вывода и полученных при этом формул, составим программу для вычисления числовых значений их частей, а затем сравним их при различных числовых значениях t. Обозначим через t_1 и t_2 границы изменения t.

ПРОГРАММА 4
```
10 REM ПРОВЕРКА СООТНОШЕНИЙ (7), (8)
20 PRINT “ВВЕДИТЕ PI, t1, t2”
30 INPUT PI, t1, t2
40 PRINT “PI=”; PI
50 FOR t = t1 TO t2
```

```
60 V1= ATN(1/t) + ATN(t)
70 W1=ATN(1/t) - ATN(t)
80 W2=ATN((1-t * t)/(2 * t))
90 IF t< 0 THEN 160
100 V2=PI/2
110 IF t=1 THEN 140
120 W3=2*ATN((t+1)/(t-1)) - PI
130 GO TO 180
140 W3=0
150 GOTO 180
160 V2= -PI/2
170 W3=2*ATN((t+1)/(t-1))
180 PRINT "t=";t, "V1=";V1, "V2=";V2, "W1=";W1, "W2=";W2, "W3="; W3
190 NEXT t
200 END
```

Подставляя PI = 3,14193, t1 = -5, t2 = -1, а затем t1 = 1, t2 = 5, получаем следующие таблицы значений частей соотношений (7) и (8): V1 и V2 - соответственно левая и правая части (7), W1, W2 и W3 - соответственно левая, средняя и правая части (8):

```
PI=3.141593
t= -5 V1= -1.570796 V2= -1.570796 W1= 1.176005 W2= 1.176005 W3= 1.176005
t= -4 V1= -1.570796 V2= -1.570796 W1= 1.080839 W2= 1.080839 W3= 1.080839
t= -3 V1= -1.570796 V2= -1.570796 W1= .9272952 W2= .9272952 W3= .9272952
t= -2 V1= -1.570796 V2= -1.570796 W1= .6435011 W2= .6435011 W3= .6435011
t= -1 V1= -1.570796 V2= -1.570796 W1= 0 W2= 0 W3= 0
PI=3.141593
t=1 V1=1.570796 V2=1.570796 W1= 0 W2= 0 W3= 0
t=2 V1=1.570796 V2=1.570796 W1= -.6435011 W2= -.6435011 W3= -.6435015
t=3 V1=1.570796 V2=1.570796 W1= -.9272952 W2= -.9272952 W3= -.9272956
t=4 V1=1.570796 V2=1.570796 W1= -1.080839 W2= -1.080839 W3= -1.080839
t=5 V1=1.570796 V2=1.570796 W1= -1.176005 W2= -1.176005 W3= -1.176005
```

Округлив все значения до пяти значащих цифр, получим V1 = V2 и W1 = W2 = W3, что подтверждает соотношения (7) и (8). Итак, начав с идентификации разных по внешнему виду ответов одного тригонометрического уравнения, мы вместе со студентами подготовительного факультета получили программу для вычисления главных значений решений этого уравнения, а заодно — интересные и красивые тригонометрические соотношения. Вершина проведенной работы — программа для решения уравнения с параметром (4) и соответствующие общие тригонометрические тождества (7), (8). Таким образом, студенты внесли свою лепту в теорию науки тригонометрии (во всяком случае, на уровне изучаемого учебного пособия [3]). Что касается методов проведения настоящего исследования, необходимо отметить триаду:

графическая гипотеза →

компьютерное подтверждение →

теоретическое доказательство

Предлагаемые методические разработки могут принести пользу преподавателям в преподавании математики и информатики как на уровне предвузовского, так и среднего образования, полностью применимы в самостоятельной работе учащихся старших классов средней школы, а также в условиях среднего специального образования естественно-математического направления.

Литература

1. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров; Ред. кол.: С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. - М.: Сов. энциклопедия, 1988.

2. Кузнецова Т.И. Коммуникационный подход к многовариантности решения математических задач // Вестник ЦМО МГУ. Филология. Культурология. Педагогика. Методика. 2010, №2.

3. Лазарева Е.А., Зверев Н.И., Пацей И.П. Степени. Логарифмы. Тригонометрия: Учебное пособие по математике для студентов-иностранцев подготовительных факультетов. - М.: Ред.-Изд. Совет МОЦ МГ, 2003. - 123 с.

Лабораторные работы по дисциплине “Теория игр и исследование операций”

Л. Н. Посицельская, г. Москва

Описывается комплект лабораторных работ по теории игр, разработанный и опробованный при обучении студентов по специальности «прикладная математика» в Московском автомобильно-дорожном государственном техническом университете.

Рассматриваемый комплект лабораторных включает следующие разделы: «Матричные игры», «Биматричные игры», «Конечные многошаговые игры». Часть заданий для лабораторных работ создана на основе материалов книг [1,2,3], другие являются новыми.

Лабораторная работа №1

Решение матричных игр методом перебора квадратных подматриц

Цель работы

Изучить свойства оптимальных смешанных стратегий матричных игр, необходимые условия для крайних оптимальных смешанных стратегий и алгоритм решения матричной игры комбинаторного типа, основанный на переборе квадратных подматриц.

Теоретические сведения

Пусть дана матричная игра с матрицей выигрышей A размерности $m \times n$, v — цена игры, а x, y — смешанные стратегии игроков. Обозначим функцию выигрыша $M(x, y)$. Для сокращения записи будем использовать обозначения:

$$M(x, e^j) = M(x, j);\ (1 \le j \le n); \quad M(e^i, y) = M(i, y);\ (1 \le i \le m),$$

где e^i — чистые стратегии игроков: $e^i = (e^i_1, e^i_2, \dots, e^i_{l_k})$, $(k = 1, 2)$; $e^i_j = 1$ при $i = j$, $e^i_j = 0$ при $i \ne j$, $l_1 = m$, $l_2 = n$.

Т е о р е м а 1 (Неймана). Любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Т е о р е м а 2 (критерий оптимальности смешанных стратегий). Для того, чтобы число v было ценой игры, а векторы x^*, y^* — оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$M(i, y^*) \le v \le M(x^*, j) \text{ при всех } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \tag{6}$$

Т е о р е м а 3 (свойство дополняющей нежесткости). Пусть x^*, y^* — оптимальные смешанные стратегии игроков, а v — цена игры. Тогда

$$1.\ x^*_i > 0 \implies M(i, y^*) = v\ (1 \le i \le m); \tag{7}$$
$$2.\ y^*_j > 0 \implies M(x^*, j) = v\ (1 \le j \le n). \tag{8}$$

Описание алгоритма

Первый этап. Выясняем, имеет ли матрица игры седловую точку, то есть существует ли решение игры в чистых стратегиях. Для этого проверяется равенство верхней и нижней цены игры: $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Другой способ: (i_0, j_0) — седловая точка матрицы тогда и только тогда, когда $a_{i_0 j_0}$ есть наименьший элемент в строке с номером i_0 и наибольший элемент в столбце с номером j_0. В этом случае (e^{i_0}, e^{j_0}) — пара оптимальных чистых стратегий, а $a_{i_0 j_0}$ — цена игры.

Второй этап. Перебираем все невырожденные квадратные подматрицы $\overline{K}$ размерности $l \times l$, начиная с $l = 2$. Для каждой подматрицы решаем относительно $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_l)$, v систему уравнений

$$\overline{K}\overline{p} = \overline{v}; \quad \sum_{i=1}^{i=l} p_i = 1; \quad \overline{q}\overline{K} = \overline{v}; \quad \sum_{i=1}^{i=l} q_i = 1,$$

где $\overline{v}$ — вектор, все компоненты которого равны v. Если система не имеет решения или некоторые компоненты векторов $\overline{p}$ или $\overline{q}$ отрицательны, то переходим к следующей подматрице. Если все компоненты неотрицательны, то определяем вектор x, полагая равными нулю координаты вектора с номерами строк, не входящих в подматрицу $\overline{K}$, а остальные компоненты приравнивая последовательно компонентам вектора $\overline{p}$. Аналогично, определяем вектор y, полагая равными нулю координаты вектора с номерами столбцов, не входящих в подматрицу $\overline{K}$, а остальные компоненты приравнивая последовательно компонентам вектора $\overline{q}$. Теперь для тройки (x^*, y^*, v) проверяем выполнение неравенств (6). Если они выполнены, то искомое решение игры (x^*, y^*, v) найдено. В противном случае переходим к следующей подматрице.

Содержание работы

Решить данную матричную игру с помощью алгоритма перебора квадратных подматриц. Для нахождения решений систем линейных уравнений рекомендуется использовать программный пакет Scientific WorkPlace, позволяющий не только произвести вычисления, но и оформить отчет о лабораторной работе.

Лабораторная работа №2

Графо-аналитический метод решения матричных игр

Цель работы

Изучить свойства оптимальных смешанных стратегий матричных игр и графо-аналитический метод решения матричных игр.

Теоретические сведения

Т е о р е м а 4. Дана матричная игра с матрицей A размерности $m \times n$. Пусть $M(x, y)$ — функция выигрыша, x^*, y^* — оптимальные стратегии игроков, v — цена игры. Тогда

$$v = \min_y \max_{1 \le i \le m} M(i, y) = \max_x \min_{1 \le j \le n} M(x, j). \tag{9}$$

Т е о р е м а 5 (следствие из свойства дополняющей нежесткости). Пусть x^*, y^* — оптимальные смешанные стратегии игроков, а v — цена игры. Тогда

$$1.\ M(i, y^*) < v \implies x_i^* = 0\ (1 \le i \le m); \tag{10}$$

$$2.\ M(x^*, j) > v \implies y_j^* = 0\ (1 \le j \le n). \tag{11}$$

Описание алгоритма

Дана матричная игра с матрицей размерности $2 \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — стратегия первого игрока. Положим $x_1 = t$, $x_2 = 1 - t$. Тогда

$$M(x, j) = a_{1j}t + a_{2j}(1-t) = (a_{1j} - a_{2j})t + a_{2j} = f_j(t), \quad 1 \le j \le n;\ t \in [0,1].$$

По теореме 4 цена игры равна:

$$v = \max_x \min_{1 \le j \le n} M(x, j) = \max_{t \in [0,1]} \min_{1 \le j \le n} f_j(t).$$

Изобразим на одном чертеже графики всех линейных функций $f_j(t)$ на отрезке $[0,1]$. Получится n отрезков прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Нижняя огибающая этих отрезков будет графиком функции $m(t) = \min\limits_{1 \le j \le n} f_j(t)$. График функции $m(t)$ есть вогнутая ломаная. Пусть $M_0(t_0, f_0)$ — точка этого графика, имеющая максимальную ординату. Тогда $v = f_0$ — цена игры, а оптимальная стратегия x^* первого игрока имеет вид $x^* = (t_0, 1 - t_0)$. Для точного вычисления цены и оптимальных стратегий определим по графику номера k и l прямых, пересекающихся в точке M_0. Затем найдем t_0 как решение уравнения $f_k(t) = f_l(t)$ и вычислим цену игры $v = f_k(t_0)$. Найдем теперь оптимальную стратегию y^* второго игрока. Поскольку M_0 принадлежит нижней огибающей графиков функций $f_j(t)$, то $M(x^*, j) \ge v$, причем $M(x^*, k) = M(x^*, l) = v$. Если при $j \ne k$, $j \ne l$ неравенства строгие, то по теореме 5 $y_j^* = 0$ $(j \ne k,\ j \ne l)$. В этом случае y_k^* и y_l^* можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{1k}y_k^* + a_{1l}y_l^* = v \\ a_{2k}y_k^* + a_{2l}y_l^* = v \end{cases}$$

Матричная игра с матрицей размерности $m \times 2$ решается графо-аналитическим методом аналогично.

Содержание работы

Решить данную матричную игру $2 \times n$ или $m \times 2$ графо-аналитическим методом. Для построения графиков и решения систем линейных уравнений рекомендуется использование программного пакета Scientific Work Place.

Лабораторная работа №3

Итеративные методы решения матричных игр: алгоритм Брауна и монотонный алгоритм

Цель работы

Познакомиться с итеративными методами решения матричных игр и приобрести опыт их использования для проведения математических экспериментов с целью выяснения свойств игр с ограничениями.

Описание алгоритма Брауна

Метод состоит в многократном фиктивном разыгрывании матричной игры, при котором игроки в k-й партии выбирают чистые стратегии, максимизирующие выигрыш против смешанной стратегии противника, составленной из частот, с которыми противник выбирал чистые стратегии в предыдущих $k-1$ партиях. Частотные векторы игроков сходятся к их оптимальным смешанным стратегиям. Недостатком алгоритма является малая скорость сходимости, которая к тому же уменьшается с ростом размерности матрицы выигрышей.

Описание монотонного алгоритма [3]

Алгоритм позволяет находить (в общем случае приближенно) оптимальную стратегию 1-го игрока и цену игры. Обозначим $x^{N-1} = (x_1^{N-1}, \ldots, x_n^{N-1})$ — N-е приближение оптимальной стратегии первого игрока и $c^{n-1} = (c_1^{N-1}, \ldots, c_n^{N-1})$ — вспомагательный вектор на N-м шаге работы алгоритма.

Шаг 1. Игрок 1 выбирает произвольную чистую стратегию $x^0 = e^{i_0}$ и вспомогательный вектор $c^0 = a_{i_0}$, где a_{i_0} — строка матрицы A с номером i_0.

Шаг N. Векторы x^{N-1} и c^{n-1} построены. Положим $\underline{v}^{N-1} = \min\limits_{1\le j\le n} c_j^{N-1}$ и пусть J^{N-1} — множество индексов, на которых минимум достигается. Решим вспомогательную игру с матрицей $\overline{A}$, состоящей из столбцов матрицы A с номерами из множества J^{N-1}. Пусть $\tilde{x}^N$ — оптимальная стратегия 1-го игрока в этой игре и $\tilde{c}^N = \tilde{x}^N A$. Найдем теперь оптимальную стратегию первого игрока в игре размерности $2\times n$, матрица которой имеет стороки c^{N-1} и $\tilde{c}^N$. Пусть это вектор $(\alpha_N,\, 1-\alpha_N)$ $(0\le\alpha_N\le 1)$. Вычисляем теперь векторы x^N и c^N по итерационным формулам:

$$x^N = (1-\alpha_N)x^{N-1} + \alpha_N\tilde{x}^N;\quad c^N = (1-\alpha_N)c^{N-1} + \alpha_N\tilde{c}^N.$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не получится $\alpha^N = 0$ или не будет достигнута требуемая точность.

Т е о р е м а 6 (о сходимости монотонного алгоритма). Пусть $\{\underline{v}^N\}$, $\{x^N\}$ — итеративные последовательности, построенные в ходе работы алгоритма. Тогда

1) последовательность $\{\underline{v}^N\}$ строго возрастает;
2) $\lim\limits_{N\to\infty}\underline{v}^N = v$, где v — цена игры;
3) $\lim\limits_{N\to\infty} x^N = x^*$, где x^* — оптимальная стратегия 1-го игрока.

Содержание работы

Составить и отладить программы, реализующие алгоритм Брауна и монотонный алгоритм. Пользуясь этими программами, решить данную матричную игру с заданной точностью. Для найденного решения проверить, с какой точностью выполняется неравенства (6). На основе найденного приближенного решения сформулировать и проверить гипотезу о свойствах точного решения.

Лабораторная работа №4

Решение биматричных игр методом перебора квадратных подматриц

Цель работы

Изучить свойства ситуаций равновесия биматричных игр и алгоритм решения биматричной игры комбинаторного типа, основанный на переборе квадратных подматриц.

Теоретические сведения

Дана биматричная игра с матрицами выигрышей A и B размерности $m\times n$. Пусть α, β — смешанные стратегии игроков. Обозначим функции выигрыша игроков $M_j(\alpha,\beta)$ $(j=1,2)$. Для сокращения записи будем использовать обозначения:

$$M_j(\alpha, e^j) = M_j(\alpha, j);\ (1\le j\le n);\quad M(e^i,\beta) = M(i,\beta);\ (1\le i\le m),$$

Т е о р е м а 7 (Неймана–Нэша). В любой биматричной игре существует ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Т е о р е м а 8. Пусть дана биматричная игра с матрицами выигрышей A и B размерности $m\times n$. Для того, чтобы пара стратегий (α^*,β^*) была ситуацией равновесия по Нэшу необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$A\beta^* \le \overline{v}_1;\qquad \alpha^* B \le \overline{v}_2, \tag{12}$$

где $v_1 = (\alpha^*, A\beta^*)$; $v_2 = (\alpha^* B, \beta^*)$; $\overline{v}_j$ — вектор, все компоненты которого равны v_j $(j=1,2)$.

Т е о р е м а 9 (свойство дополняющей нежесткости). Пусть дана биматричная игра с матрицами выигрышей A и B размерности $m\times n$. Если (α^*,β^*) — ситуация равновесия по Нэшу, то:

$$M_1(i,\beta^*) < M_1(\alpha^*,\beta^*) \implies \alpha_i^* = 0\ (1\le i\le m); \tag{13}$$
$$M_2(\alpha^*,j) < M_2(\alpha^*,\beta^*) \implies \beta_j^* = 0\ (1\le j\le n). \tag{14}$$

Описание алгоритма

Первый этап. Выясняем наличие ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Для этого в матрице A находим наибольшие элементы в каждом столбце, а в матрице B — наибольшие элементы в каждой строке. Если $a_{i_0j_0}$ — максимальный элемент в столбце j_0 матрицы A, а $b_{i_0j_0}$ — максимальный элемент в строке i_0 матрицы B, то (i_0, j_0) — ситуация равновесия.

Второй этап. Перебираем пары квадратных подматриц $\overline{A}$, $\overline{B}$ размерности $k \times k$, начиная с $k = 2$, содержащие одни и те же строки и столбцы исходных матриц, и решаем систему уравнений

$$\overline{A}\overline{q} = \overline{v}_1; \quad \sum_{i=1}^{i=l} p_i = 1; \quad \overline{p}\overline{B} = \overline{v}_2; \quad \sum_{i=1}^{i=l} q_i = 1.$$

относительно $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_l)$, v_1,v_2. Если система не имеет решения или некоторые компоненты векторов $\overline{p}$ или $\overline{q}$ отрицательны, то переходим к следующей паре подматриц. Если все компоненты неотрицательны, то определяем вектор α^*, полагая равными нулю координаты вектора с номерами строк, не входящих в подматрицу $\overline{A}$, а остальные компоненты приравнивая последовательно компонентам вектора $\overline{p}$. Аналогично, определяем вектор β^*, полагая равными нулю координаты вектора с номерами столбцов, не входящих в подматрицу $\overline{A}$, а остальные компоненты приравниваем последовательно компонентам вектора $\overline{q}$. Теперь для пары (α^*, β^*) проверяем выполнение неравенств (12). Если неравенства выполнены, то искомая ситуация равновесия (α^*, β^*) найдена. В противном случае переходим к следующей подматрице.

Содержание работы

Найти ситуации равновесия данной биматричной игры с помощью алгоритма перебора квадратных подматриц. Для решения систем линейных уравнений рекомендуется использовать математический пакет Scientific Work Place.

Лабораторная работа №5

Графо-аналитический метод решения биматричных игр

Цель работы

Изучить свойства ситуаций равновесия биматричных игр и графо-аналитический метод их нахождения.

Описание алгоритма

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — стратегия первого игрока. Положим $\alpha_1 = t$, $\alpha_2 = 1 - t$. Тогда

$$M_2(\alpha, j) = b_{1j}t + b_{2j}(1-t) = (b_{1j} - b_{2j})t + b_{2j} = f_j(t), \quad 1 \le j \le n;\ t \in [0,1].$$

Изобразим на одном чертеже графики всех линейных функций $f_j(t)$ на отрезке $[0,1]$. Получится n отрезков прямых $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Точки излома верхней огибающей этих отрезков соответствуют парам k, l, для которой существует решение системы уравнений

$$\begin{cases} b_{1k}t + b_{2k}(1-t) = v_2 \\ b_{1l}t + b_{2l}(1-t) = v_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее неравенству $0 \le t \le 1$ и условию

$$b_{1j}t + b_{2j}(1-t) = v_2, \quad j \ne k,\ l.$$

Поэтому последовательно перебираем точки излома верхней огибающей и решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_{1k}\beta_k^* + a_{1l}\beta_l^* = v_1 \\ a_{2k}\beta_k^* + a_{2l}\beta_l^* = v_1 \\ \beta_k^* + \beta_l^* = 1 \end{cases}$$

Если эта система имеет решение, удовлетворяющее условию $\beta_k^* \geq 0$, $\beta_l^* \geq 0$, то полагая $\alpha_1^* = t$, $\alpha_2^* = 1 - t$ и дополняя нулями недостающие компоненты вектора β^*, получаем ситуацию равновесия α^*, β^*.

Содержание работы

Найти ситуации равновесия данной биматричной игры графо-аналитическим способом. Для построения графиков и решения систем линейных уравнений рекомендуется использование математического пакета Scientific Work Place.

Лабораторная работа №6

Конечные многошаговые антагонистические игры

Цель работы

Познакомиться с конечными многошаговыми антагонистическими играми в развернутой и нормальной форме, изучить их свойства и методы решения.

Теоретические сведения

Т е о р е м а 10 (Цермело). Всякая многошаговая антагонистическая игра с полной информацией имеет решение в чистых стратегиях.

С л е д с т в и е. Матрица многошаговой антагонистической игры с полной информацией имеет седловую точку.

Содержание работы

Группа студентов получает задание в виде словесного описания многошаговой антагонистической игры. Задачи, предлагаемые студентам, отличаются только структурой информационных множеств. Для данной игры требуется построить дерево игры, отметить информационные множества; составить матрицу нормальной формы игры; решить игру двумя способами: как матричную одним из изученных методов и как позиционную, используя метод динамического программирования; сравнить и интерпретировать полученные результаты. После выполнения работы студенты обсуждают найденные решения и анализируют влияние информации на сложность задачи и исход игры.

Включение лабораторных работ на компьютере в курс «Теория игр и исследование операций» для специальности «прикладная математика» позволяет изучить основные методы и алгоритмы решения задач теории игр и исследования операций; научиться подбору алгоритма решения с учётом особенностей задачи; приобрести опыт проведения математического эксперимента с использованием компьютера; научиться коллективно работать над большой задачей путём разбиения её на подзадачи с последующим сведением воедино полученных результатов.

Литература

1. Васин А.А., Краснощёков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. — М.: Академия, 2008, 463 стр.

2. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Фёдоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: КД Либроком, 2009, 287 стр.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998, 300 стр.

4. Посицельская Л.Н., Злобина С.В. Система задач для дисциплины «Теория игр и исследование операций»// Математика в высшем образовании, №4, 2006 г. С. 27-36.

Проблемы постановки и преподавания математических дисциплин в высшей школе

А. А. Пунтус, г. Москва

Содержанием данной статьи является накопленный автором многолетний опыт преподавания отдельных разделов высшей математики на факультете прикладной математики и физики

Московского авиационного института (МАИ). Успешная реализация цели усвоения материала курсов высшей математики достигается тремя путями: использование современных методов преподавания математических дисциплин, привлечение наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе и, наконец, оправдавшая себя такая эффективная форма, как обучение студентов по индивидуальному учебному плану.

Примером современного метода преподавания математических дисциплин может служить преподавание автором курса обыкновенных дифференциальных уравнений путём достаточно строгого изложения теории и методов отдельных разделов данного курса в современной векторно-матричной и операторной форме. Так, в данной форме нормальная система дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$y' = A(x)y + f(x),$$

где y, $f(x)$ — векторы, $A(x)$ — функциональная матрица, или в эквивалентной операторной форме $L(y) = f(x)$, где $L(y) = y' - A(x)y$ — линейный оператор. В этой форме достаточно наглядно и строго легко доказываются как свойства решений соответствующей линейной однородной системы, так и данной неоднородной. При такой форме изучения свойств решений системы дифференциальных уравнений обязательно проводится сравнительное рассмотрение понятия и определения оператора с понятием и определением функции и функционала (их определённая общность и различие).

С использованием такой формы нормальной системы дифференциальных уравнений даётся краткое и строгое доказательство теоремы существования и единственности решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений и её важнейших следствий, а также проводится исследование свойств гладкости этих решений и их зависимости от параметров, начальных данных и правой части системы. При изложении в данном курсе объединённого раздела линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений даётся наглядное и строгое обоснование возможности сведения задачи интегрирования одного из данных объектов к задаче интегрирования другого из них. Излагаемые методы интегрирования иллюстрируются примерами, решаемыми с достаточно подробными комментариями.

Кажется, что привлечение студентов к научно-исследовательской работе меньше всего связано с усвоением материала различных математических курсов. Возможности для взаимодействия научного и учебного процессов, в первую очередь, открываются в традиционных, в том числе математических, курсах, входящих в цикл фундаментальной общеинженерной подготовки. Кроме того, целый ряд возможностей открывается при этом не только с точки зрения соединения научного и учебного процессов, но и появляется вероятность более глубокого усвоения традиционных учебных курсов, входящих в цикл фундаментальной подготовки. Здесь, прежде всего, используются самые широкие возможности для иллюстрации связи учебного процесса с практическим применением получаемых в учебном процессе знаний, используемых в практической научно-исследовательской деятельности. В данном случае, при преподавании фундаментальных математических дисциплин постоянно включаются примеры приложений методов данных дисциплин в прикладных задачах механики, физики и техники.

Опыт привлечения наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, т.е. реализации процесса активного взаимодействия учебного и научного процессов на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института показал, что главной целью такого взаимодействия учебной и научной деятельности является привитие будущим инженерам навыков научного подхода к решаемым инженерным задачам. Наряду с совершенствованием учебного процесса, весьма эффективным средством практического приложения полученных физико-математических знаний является широкое привлечение студентов к творческой деятельности - научно-исследовательской работе студентов (НИРС). Этой конечной цели и должны быть подчинены различные формы соединения учебного и научного процессов. Участвуя в НИРС, будущий специалист убеждается в необходимости самостоятельного поиска путей постановки и решения задач, построения и исследования математических моделей поставленных задач, приобретает навыки творчества. Нормой его поведения становится осознанное отношение к активной трудовой деятельности, что обеспечивает его готовность к самостоятельной профессиональной деятельности.

На современном этапе развития НИРС, многообразии её форм и методов термин НИРС стал собирательным. Он включает в себя самые различные стороны учебной, научной, воспитательной и организационной деятельности вуза, которая обеспечивает:

- условия успешного овладения студентами своей специальностью;
- подготовку студентов к самостоятельной творческой деятельности;
- развитие навыков использования полученных физико-математических и других знаний в практической работе;
- формирование потребности и умения постоянно накапливать и совершенствовать знания;
- расширение научно-технического кругозора;
- воспитание всесторонне развитой личности.

Для решения этих задач необходимо постоянно увеличивать сложность и объём знаний, умений и навыков, приобретаемых студентами в учебное и внеучебное время, обеспечивать преемственность методов и форм подготовки специалистов при переходе от одних знаний к другим, от курса к курсу. Решить вопросы совершенствования творческой подготовки студентов можно только на основе всё большего соединения НИРС с учебным процессом, когда НИРС становится его полноправной формой, а учебный процесс, в свою очередь, помогает решать научно-исследовательские, научно-технические и общественно-воспитательные задачи вуза.

Активному взаимодействию учебного и научного процессов в значительной мере способствует такой вид самостоятельной работы студентов на базе научно-исследовательских работ, как лабораторные и курсовые работы. Это наиболее удобная форма учебных занятий, позволяющая включать в эти работы элементы исследовательской деятельности. А именно, этому способствует тот факт, что элементы поиска в лабораторных и курсовых работах дают возможность каждому студенту испытать себя в качестве исследователя. В соответствующие курсовые и лабораторные работы включаются различные виды учебно-исследовательского подхода к решению в этой работе поставленной задачи, а именно, анализ состояния вопроса, проведение расчёта и обработка его результатов, оформительские работы и планирование очередного этапа анализа и расчёта до получения окончательного результата. Чтобы в большей степени способствовать развитию у студентов навыков в выполнении научно-исследовательской работы, как лабораторная, так и курсовая работа, должны содержать познавательную часть, которая способствует лучшему усвоению соответствующего раздела курса. Кроме того, эти работы должны содержать также, в определенной степени, исследовательскую часть, связанную, например, с обоснованным выбором для данной задачи математического вычислительного алгоритма с последующим выполнением её расчётной части. Желательно, чтобы соответствующие курсовые и лабораторные работы базировались на тематике и возможно материальной части научных разработок коллектива кафедры. При выполнении таких лабораторных и курсовых работ студентам разъясняется цель соответствующих исследований при их выполнении и методика проведения в них расчётной части. Каждая группа студентов получает задание, в котором учитываются индивидуальные склонности и интересы студентов, а также их научная работа на предшествующих младших учебных курсах. При выполнении студенческих научно-исследовательских работ в рамках выполнения заданий учебных лабораторных и курсовых работ студенту задаются необходимые соответствующие условия работы исследуемой системы и указываются возможности самостоятельного выбора её структуры и элементов. Студенту рекомендуется методика исследования с рекомендуемым подбором определённой дополнительной литературы, для чего в этом случае в методические указания по соответственно лабораторным или курсовым работам включаются индивидуальные задания по тематике рекомендуемых творческих научных исследований. Студенты, выполняя по таким работам некоторый объём необходимых исследований и расчётов, имеют возможность при необходимости пользоваться консультациями преподавателя по данной дисциплине или специально выделяемого с такой целью руководителя. Таким образом, в результате выполнении учебных лабораторных и курсовых работ не только закрепляются теоретические знания, но и приобретаются навыки проведения самостоятельных научно-практических исследований. Опыт выполнения таких работ показал, что проведение учебно-исследовательских лабораторных и курсовых работ наиболее рационально, когда отдельные соответствующие работы выполняются в логической последовательности и объединяются в общий учебно-методический практикум с единым учебно-научным исследовательским заданием.

Более широкие возможности для развития связи учебного и научного процессов открывают различные учебные специальные математические курсы, которые разрабатываются на выпускающих кафедрах по направлению специализации подготовки её выпускников и включаются решением Совета факультета в учебный план. Лекции по предметам спецкурсов, с одной стороны, предоставляют возможность преподавателю разработать актуальную область научных и прикладных знаний. С другой стороны, это позволяет кафедрам реализовать по данным спецкурсам подготовку специалистов с учётом возможности проведения соответствующих научных исследований. Разрабатывая соответствующий специальный курс, преподаватель не только вносит в учебный процесс новую область знаний, но и обучая студентов, привлекает их к освоению данной учебной дисциплины, способствует реализации их практических навыков в этой новой для них области науки и практики. В таких лекционных специальных курсах часто находят отражение результаты выполненных, а иногда и только еще проводимых на кафедре научно-исследовательских работ по актуальной научно-прикладной тематике. Таким образом, студенты оказываются вовлеченными в святая святых науки - “кухню” научных исследований. При этом одновременно открываются возможности для привлечения желающих студентов к проводимым научно-прикладным исследованиям. Всегда полезно, чтобы, если не по каждому специальному курсу, то хотя бы по двум-трём родственным специальным курсам проводились специальные семинары для студентов, на которых, как студенты, так и преподаватели, участвующие в данном семинаре, делали научные доклады. Эти доклады могут быть как реферативного плана, так и сообщениями по результатам выполненных или, в порядке соответствующего обсуждения, выполняемых научно-исследовательских работ.

Примером выполненных студентами научно-исследовательских работ могут служить работы, выполненные в МАИ под моим руководством, представленные на Всероссийский конкурс студенческих научных работ и получившие соответственно Медаль и Диплом данного конкурса (Приказ Министерства образования и науки РФ №641 от 15.06.2009 “О награждении лауреатов открытого конкурса 2008 г. на лучшую научную работу студентов”). Привожу краткую аннотацию примера постановки одной из данных работ, выполненной студенткой Нораевой Е.С.

Е. С. Нораева, А. А. Пунтус (научный руководитель) “Математическая модель двухконтурного гидравлического сервопривода”

В данной работе строится математическую модель, обеспечивающая оптимальность параметров контура управления, учитывающая основные нелинейности и максимально приближенная по значению выходного сигнала к идеальной модели. С точки зрения системы управления полётом самолёта рулевые приводы являются исполнительными устройствами этой системы, перемещающими органы управления летательного аппарата в соответствии с командными сигналами лётчика или автопилота. Структура системы дистанционного управления в общем виде представлена на рис.1. На ручке управления лётчика установлены электрические датчики, измеряющие приложенные к ней усилия или перемещения, сигналы от которых поступают прямо к многоканальному аналоговому или цифровому вычислителю. Вычислительные системы управления бывают механические и дистанционные электрические. В электрических системах механическая связь между рычагами управления лётчика и приводами аэродинамических поверхностей летательного аппарата и других органов управления полётом заменена электрическими связями (аналоговыми или цифровыми). В структурном плане рулевые приводы представляют собой следящие системы с обратной связью по положению выходного звена, которое механической передачей связано с рулевой поверхностью. Важным обстоятельством, характеризующим качество рулевых приводов, является их быстродействие, которое оценивается по фазовым частотным и амплитудным искажениям на определенных частотах синусоидальных сигналов управления. Указанные оценки динамических свойств рулевых приводов приближенно могут быть получены математическими методами линейной теории управления по передаточной функции привода. Параметры передаточной функции зависят от конструктивных размеров механизмов привода, свойств рабочего тела и коэффициентов передачи электрических цепей сигналов управления.

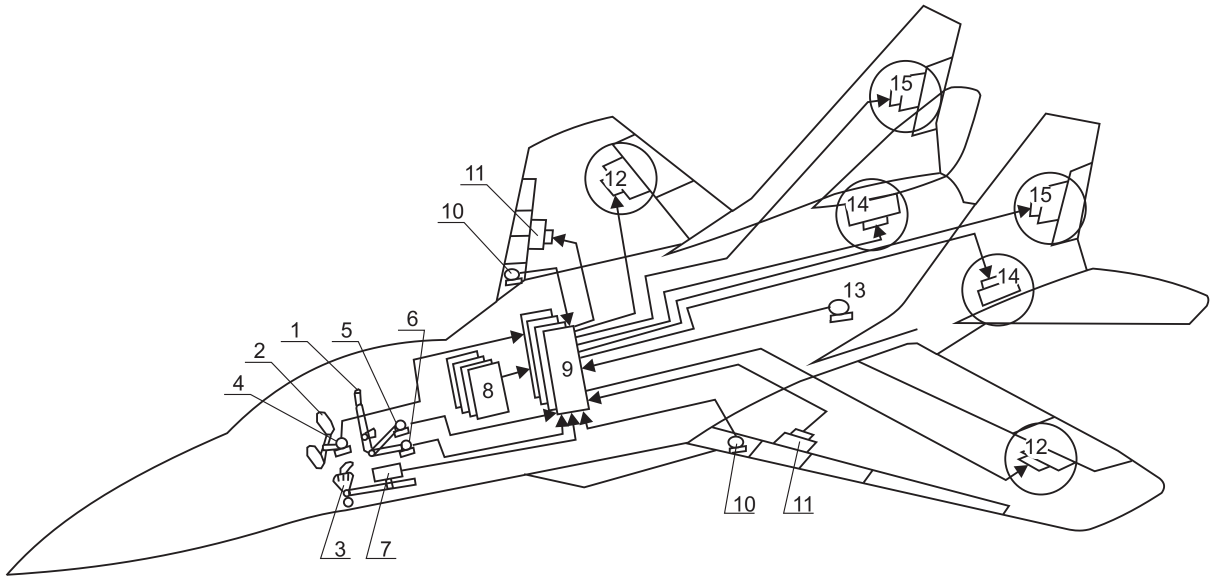


Рис. 1. Система управления самолётом

1 – ручка управления самолётом; 2 – педали; 3 – рукоятка управления двигателями; 4 – датчик положения педалей; 5 – датчик положения ручки управления по крену; 6 – датчик положения ручки управления по тангажу; 7 – привод автомата тяги; 8 - датчики первичной информации; 9 – цифровой резервированный вычислитель КСУ с блоками питания; 10 – датчик положения адаптивных носков крыла; 11 – агрегат управления носками крыла; 12 – электрогидравлический рулевой привод канала крена; 13 – датчик положения тормозного щитка; 14 – электрогидравлический рулевой привод канала тангажа; 15 – электрогидравлический рулевой привод канала курса.

Для современных летательных аппаратов актуален переход от аналоговых систем управления к цифровым, позволяющий обеспечивать динамическую корректировку параметров системы управления самолётом в полёте. Роль рулевого привода в контуре управления самолётом всегда была определяющей, поскольку требуемые статические, динамические и энергетические характеристики рулевого привода, в конечном счёте, определяют его конструктивный облик и возможности системы управления.

При регулировке системы на земле, путем подачи специального входного управляющего воздействия, определяются начальные значения основных параметров рулевого привода, которые заносятся в основную память цифрового вычислителя. Применение корректируемого алгоритма управления приводом позволяет добиться значительного улучшения характеристик замкнутой системы самолёт – система дистанционного управления – привод. Это улучшение характеристик состоит в уменьшении гармонических искажений выходного сигнала; снижении влияния нелинейностей контура управления; повышении динамических характеристик системы путём снижения перерегулирования и компенсации зоны нечувствительности. В результате применения математических аналитических, а также численных исследований и применения математических численных методов расчёта к рассматриваемой математической модели с учётом конструктивных, физических и механических особенностей показано, что имеется зависимость параметров движения выходного звена от наличия нелинейностей, которые приводят к изменению амплитуды и фазового запаздывания выходного сигнала. В то же время они снижают чувствительность контура управления, подавляя малые колебания, и тем самым исключая "дрожь" управляющих поверхностей самолёта в полёте.

Приведенный пример самостоятельной научно-исследовательской работы студентки иллюстрирует факт достаточно уверенного применения изученных методов математических курсов к исследованию сложной математической модели — в данном случае управления летательным аппаратом.

Дальнейшим развитием системы учебных специальных курсов является внедрение в практику кроме обязательных математических специальных курсов достаточного количества таких курсов по выбору самих студентов, которые они могли бы посещать и изучать независимо от того, выпускниками какой кафедры являются. При этом число посещаемых каждым конкретным студентом специальных курсов не должно ограничиваться, но экзамены студенты могут сдавать по определенному числу этих курсов, свободно ими выбираемых. Программа таких специальных курсов должна быть достаточно гибкой и, в частности, допускающей возможность частичного изменения содержания по просьбе тех студентов, которые эти специальные курсы изучают. При такой системе специальных курсов появляется возможность установления более тесных контактов между преподавателями и организациями, по договорам с которыми проводятся научно-исследовательские работы. В результате взаимного обогащения идеями и задачами расширяются возможности содержания совместных научных исследований, повышается заинтересованность студентов участвовать в научных исследованиях, проводимых по такой совместной тематике. В итоге такого взаимодействия более эффективным становится выполнение студентами содержательных и практически достаточно актуальных по своему научному или научно-прикладному уровню дипломных работ.

Современная область научно-практической деятельности требует подготовки специалистов, владеющих математическими методами решения сложных технических задач с помощью современных вычислительных устройств. Решению данной проблемы в вузе способствуют выполняемые студентами задания по вычислительной, исследовательской и преддипломной практикам. Выполнение этих заданий, как правило, требует применения современной вычислительной техники. Вычислительная, исследовательская и преддипломная практики студентов являются одним из важнейших видов учебного процесса, направленных на практическую подготовку студентов к будущей профессиональной деятельности. Они обеспечивают получение студентами навыков самостоятельного решения научно-практических задач в соответствии с квалификационной характеристикой, учебным планом и программой соответствующей практики.

Вычислительная практика призвана закрепить и расширить у студентов навыки составления программ и проведения расчётов на компьютере. Во время вычислительной практики студенты знакомятся с современным вычислительным оборудованием, работают на индивидуальных персональных компьютерах или в дисплейных классах. Каждый студент выполняет индивидуальное задание, предусматривающее составление программы и проведение расчётов с использованием вычислительной техники. Результаты выполнения задания данной практики, как и последующих практик, фиксируются в "Техническом отчёте по практике" с обязательным приложением полученных студентами результатов вычисления. Вычислительная практика имеет целью также подготовить студентов к слушанию специальных курсов и способствовать приобретению знаний и навыков, необходимых при решении конкретных инженерно-математических задач.

Индивидуальные задания студентов на учебную исследовательскую практику предусматривают знакомство с необходимым теоретическим материалом, разработку методов и алгоритмов решения поставленной задачи, являющейся составной частью определённой инженерно-технической проблемы. Во время исследовательской практики студенты приобретают опыт самостоятельной разработки научно-технического метода исследования поставленной задачи, то есть приобретают способность к упорядочению собранного исходного материала, к составлению математической модели поставленной задачи, затем составлению алгоритма её решения, разработке соответствующей программы и проведению расчёта с использованием вычислительной техники. После этого студенты проводят качественный анализ полученных результатов расчёта и формулируют по ним необходимые выводы.

Преддипломная практика проводится после завершения полного теоретического и практического курса обучения непосредственно перед выполнением дипломной работы. Во время преддипломной практики студенты приобретают опыт самостоятельной практической инженерно-технической деятельности, расширяют кругозор в области применения прикладных методов освоенных учебных дисциплин и современной вычислительной техники в конкретных инженерных задачах, расширяют свой творческий научно-технический кругозор, в большей степени самостоятельно подбирают и осваивают необходимый материал для выполнения дипломной работы. Основное направление работы студента на практике по содержанию и объёму определяется темой дипломной работы, которая формируется перед началом практики, и соответствующим заданием на преддипломную практику.

Изучая или выбирая метод решения поставленной задачи прикладного характера, студент знакомится как с отечественной, так и зарубежной литературой по данному вопросу, при этом он должен проанализировать достоинства и недостатки выбранного для решения поставленной задачи метода, сравнивая его с другими возможными методами решения задачи. Выполняя необходимое построение или модернизацию математического обеспечения для реализации исследования поставленной задачи, студенту необходимо представлять современные возможности и принципы создания математического обеспечения в аналогичных ситуациях. Кроме того, студент рассматривает и различные варианты построения необходимого математического обеспечения, из которых следует выбрать лучший и обосновать данный выбор. Обязательным является построение во время практики некоторого программного модуля для решения поставленной задачи и реализация его с использованием современной вычислительной техники.

Важнейшую роль по результатам каждой из практик при подведении их итогов играет организация смотров-конкурсов на лучшую студенческую работу во время практики, а также проведение соответствующих кафедральных или факультетских конференций. Лучшие работы студентов по рекомендации кафедры и руководителя работы студента могут быть представлены к участию в конкурсе студенческих научно-исследовательских работ, а также, в случае высокого уровня работы, к участию в научных или научно-практических конференциях и семинарах факультета, института и конференциях более высокого уровня. Таким образом, студенты по итогам практики имеют возможность участвовать в различных студенческих научных конференциях, в конкурсах студенческих научно-исследовательских работ, и, кроме того, студенты могут представлять законченные научные результаты к публикации в виде научных статей.

Важную роль в совершенствовании процесса соединения учебного и научного процессов в вузе составляет практически достаточно результативно оправдавшая себя индивидуальная форма обучения студентов, проявивших способности к самостоятельной творческой научно- исследовательской деятельности, активно участвующих в НИРС. Данная индивидуальная форма учебного плана обучения студентов была введена в Московском авиационном институте в 1987 году. Это способствовало дальнейшему развитию существовавших к этому времени эффективных учебных и учебно-научных форм подготовки квалифицированных специалистов, в том числе и на реальной базе научно-исследовательских работ, а также отвечало требованиям времени по индивидуализации и интенсификации процесса обучения, органичному соединению в учебном процессе самостоятельной и научно-практической работы студентов. Индивидуальная форма подготовки способствует также своевременному выявлению наиболее талантливых и творчески одаренных студентов, которым необходимо дополнительное внимание и обеспечение необходимых условий для более эффективного творческого их развития в соответствующем направлении, воспитанию из них профессионально подготовленных творческих специалистов с активной жизненной позицией. С другой стороны, данная форма обучения решает проблему активизации ресурса самостоятельной работы студентов, особенно в свете решения актуальной проблемы соединения учебного и научного процессов в сочетании с временным ресурсом студента. Реализация данной индивидуальной формы подготовки предполагает привлечение к этой форме обучения студентов как с первых шагов учебы в институте, так и с любого из последующих курсов. Каждый из таких студентов, как правило, подключается к научно-исследовательской работе на кафедре, достигает заметных успехов в учёбе и научной деятельности, принимает активное участие в различных конкурсах, олимпиадах, выполняет творческую научную работу под руководством преподавателя или научного сотрудника кафедры. Индивидуальная форма обучения студентов создает все необходимые условия к тому, чтобы обеспечить подготовку квалифицированных специалистов в соответствующей области, способных к полностью самостоятельной научно-исследовательской или научно-практической деятельности, так как сопровождается более интенсивным соединением учебного процесса с научной работой. Эта форма обучения позволяет ввести в учебный план, как наряду, так и вместо позиций стандартного учебного плана, дисциплины, повышающие знания студентов и дополнительные элементы самостоятельной работы студентов, в том числе и на основе выполняемых научно-исследовательских работ. Это обеспечивает больший удельный вес самостоятельной работы студента. Кроме того, реализуется тесный контакт обучающегося студента с его научным руководителем, передающим не только свои знания и навыки активной самостоятельной работы, но и умение работать с необходимой учебной и научной литературой. Эффективность реализации данной индивидуальной формы обучения студентов в Московском авиационном институте характеризуется следующим показателем. Только на одном факультете прикладной математики и физики в последние годы подавляющее большинство выпускников, поступивших в аспирантуру, будучи студентами, сочетали успешную учебу с научной работой на основе индивидуальной формы обучения.

В период завершения своей учёбы в институте студенты выполняют, как правило, свои задания и лабораторные работы по специальным курсам с широким привлечением элементов исследований по тематике специализации в учебных и научных подразделениях профилирующих кафедр. Данные задания и работы выполняются с использованием современной вычислительной техники. Завершением всего периода обучения является выполнение дипломного проекта или дипломной работы, базирующихся, как правило, на реальной тематике соответствующей кафедры института или базовой организации. Они представляют собой в большинстве случаев законченный творческий научно-исследовательский практический результат, составляющий основу некоторого реального законченного научно-технического исследования, научной статьи, конкурсной студенческой научно-исследовательской работы, и характеризуют студента-дипломника — выпускника института, как сложившегося квалифицированного специалиста, способного к самостоятельной научно-практической творческой деятельности.

Существенным шагом в направлении соединения учебного процесса с научно-исследовательской работой студентов — основы совершенствования в институте подготовки современных специалистов — является естественное формирование на выпускающих кафедрах учебно-научно-исследовательских творческих коллективов, практически научных центров, которые по содержанию своей научно-практической деятельности соответствуют той специализации, по которой данная выпускающая кафедра готовит специалистов высокой квалификации. Основу такой подготовки специалистов, реализующей взаимодействие учебного и научного процессов, составляют признанные и достаточно широко развитые научные творческие коллективы кафедр института. Эти коллективы представляют собой объединения преподавателей, сотрудников, аспирантов и инженеров-практиков, проводящих на кафедре фундаментальные или прикладные научные исследования в соответствующей области с привлечением современной вычислительной техники. С первых дней учебы, оказываясь в таких коллективах — научных центрах, студенты проходят ознакомление с будущей специальностью, присутствуя на научных семинарах при проведении обсуждений текущей научной деятельности коллектива. Кроме того, студенты иногда принимают активное участие в работе такого семинара, выступая с докладом или сообщением по результатам своей научной деятельности. Таким образом, студенты познают основы будущей специальности не только на основе лекций по специальным предметам, а непосредственно проникаясь содержанием практической деятельности в соответствующей области. В процессе обучения и активного участия в работе такого учебно-научно-исследовательского коллектива студенты имеют возможность постоянного общения с его сотрудниками как при выполнении учебных домашних заданий, расчетно-графических, курсовых и лабораторных работ, заданий по практике и, наконец, дипломных работ, так и при проведении научно-исследовательских работ группового или индивидуального характера. Студент, как правило, имеет научного руководителя-куратора из числа преподавателей, сотрудников или аспирантов коллектива данной кафедры, обеспечивающего целенаправленную творческую учебно-научную исследовательскую работу студента в определенном научном или прикладном направлении в рамках данной специализации, по которой проводится подготовка специалистов этой кафедрой. Выпускник института, получивший подготовку в таком коллективе, становится сложившимся квалифицированным специалистом, практически выросшим до уровня сотрудника этого коллектива, способным без особых дополнительных усилий к практической работе в нём, как его равноправный член. При этом пополнение рядов аспирантов, а, следовательно, в последующем преподавателей и сотрудников коллективов кафедр вуза практически может полностью обеспечиваться его выпускниками.

Некоторые методические аспекты приема заданий по высшей математике

О. А. Пыркова, г. Долгопрудный

Меняющиеся социальные условия, бурное развитие информационных технологий и ориентация на компетентностный подход требуют постоянной модернизации и учебного процесса. Главной задачей высшего образования как сферы воспроизводства общественного интеллектуального опыта является подготовка высокопрофессиональных конкурентноспособных специалистов естественно-математических специальностей, способных к инновационной деятельности на основе овладения фундаментальными знаниями и самостоятельному принятию ответственных решений на различных этапах деятельности. Формирование этих навыков у студентов требует не столько нового предметного содержания, сколько иных образовательных технологий. Совершенствование качества подготовки специалистов вузами становится одной из важнейших государственных задач.

Согласно [2], современная образовательная технология представляет собой комплекс из трех взаимосвязанных составляющих:

- современные методы обучения — активные методы обучения, предполагающие акцент на взаимодействие обучающихся и их активное вовлечение в учебный процесс;

- актуальное содержание, которое передается обучающимся и предполагает не только предметные знания, но и компетенции, адекватные современной жизненной практике;

- современные технические средства, которые включают информационную и коммуникационную инфраструктуру, средства мультимедиа, эффективное использование дистанционных форм обучения.

Курс "Уравнения математической физики" (в дальнейшем УМФ) занимает одну из ключевых позиций в процессе обучения студентов физико-математических специальностей. Основной курс рассчитан на два семестра в большинстве потоков, промежуточный контроль знаний проводится на зачете по УМФ в зимнюю экзаменационную сессию, что позволяет студентам скорректировать свою учебную деятельность, увеличив при необходимости усилия, затрачиваемые на изучение данного предмета. Вариативный курс рассчитан на семестр. Итоговый контроль знаний по обоим курсам проводится в весеннем семестре на основе письменной контрольной работы и устного экзамене. Элементы блочно-модульного обучения (дробления учебного материала на модули — определенные дозы, дидактические единицы, системно связанные и логически обособленные, с конкретными четко определенными целями, задачами) реализуются при помощи разделения курса на две основные части в семестре. Контроль усвоения знаний по каждой из них проводится с помощью приема заданий, т.е. проверки приобретенных студентом навыков решения задач на определенные темы и умения применять теорию для построения и обоснования алгоритмов решения предложенных задач. Традиционно для получения зачета по заданию студент должен предоставить преподавателю на проверку тетрадь с решениями заранее предложенных задач (одних и тех же для всего потока) и написать небольшую контрольную работу по темам, входящим в задание, зачет по которому он стремится получить.

В современных условиях неизбежной глобализации информационного пространства возрастает и информационное давление на личность. Перенасыщенность информационного потока ведет к дезориентации учащихся: уделяется мало внимания второстепенной с точки зрения студента информации, что приводит к потере темпа приобретения и качества новых знаний из-за недостаточного усвоения изучавшегося ранее материала.

Результаты обучения надо оценивать не только количеством излагаемой информации, которое неизбежно растет с развитием современной науки, но и качеством усвоения студентами пройденного материала и умением грамотно использовать его. Целостный процесс обучения достигает желаемого результата только при высокой образовательной активности учащихся, самостоятельности их работы, индивидуализации их обучения. Нельзя рассчитывать на успех, если педагог активно преподает, а обучающийся не участвует в процессе усвоения знаний и умений, или участвует в них пассивно. Качество подготовки выпускников технических вузов к инновационной деятельности зависит, в том числе и от качества образовательных технологий. Помимо этого, компетентностный подход предъявляет свои требования к таким компонентам образовательного процесса, как средства контроля и оценки. Предлагаемая здесь методика проведения контрольных работ по приему заданий, опирающаяся на личностно-ориентированный подход, рассчитана на активизацию самостоятельной работы студентов с учетом индивидуального темпа освоения нового материала, что способствует как количественному, так и качественному росту приобретаемых учащимися знаний.

По каждому заданию на группу студентов, например, из двадцати человек, предлагается 21 вариант контрольных работ, что обеспечивает необходимость самостоятельного решения предложенных задач. Темы задач не являются неожиданными, будучи заранее выложены на личном учебном Web-сайте http://pyrkova.fizteh.ru [1]. Однако номер варианта, который достанется на контрольной работе, студентам заранее неизвестен. При этом более четко определяется круг вопросов и задач, знания по которым студент должен продемонстрировать при сдаче задания, и, помимо этого, удовлетворяется естественная потребность студентов к интеграции информационных технологий с источниками знаний. Не стоит опасаться снижения качества знаний, если студент попытается заранее прорешать один или несколько вариантов.

- Во-первых, проявление самостоятельности в работе студентов в любой из ее форм достойно поощрения.

- Во-вторых, решение нескольких дополнительных задач по теме задания только способствует приобретению практических навыков решения задач по изучаемой теме.

- В-третьих, студент, почувствовав затруднения при ответе на вопросы или при решении задач на некоторые темы, может своевременно обратиться либо к конспекту лекций, либо к учебникам, либо к пособию по решению основных задач, выложенному на том же сайте: во-первых, учитывается стремление современных студентов использовать Интернет как источник в том числе и учебной информации, и, во-вторых, это существенно экономит время учащихся, не ущемляя их навыков самостоятельной работы. Тем самым реализуется поэтапное формирование и развитие навыков учебного труда с переходом к воспитанию внутренней потребности к саморазвитию и самовоспитанию.

- В-четвертых, варианты контрольных, выложенные на сайте, содержат больший объем вопросов и задач, чем студентам будет предложено решить на семинаре в процессе приема задания. Более подробно это будет обсуждаться ниже.

- В-пятых, если у преподавателя возникнет подозрение, что студенту попался вариант с заранее известным ему решением, вариант всегда можно заменить на аналогичный. Если же при подготовке к сдаче задания студент разобрал решение нескольких вариантов, то этот факт только можно приветствовать.

Рассмотрим методику приема задания по УМФ на примере индивидуальной контрольной работы для сдачи 2-го задания весеннего семестра для ФАКИ (факультета аэрофизики и космических исследований). Каждое задание в свою очередь делится на модули. Так, для сдачи этого задания надо изучить четыре темы: 1. Задача Коши в $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ для уравнения теплопроводности. 2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье. 3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в круге и кольце. 4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое. Каждая тема содержит теоретические вопросы в рамках экзаменационной программы по рассматриваемому предмету для данного потока и задачи двух уровней сложности: задачи, дававшиеся на тестах для допуска к переэкзаменовке (1-й уровень), и более сложные задачи экзаменационных контрольных работ прошлых лет (2-й уровень).

Ниже приведен примерный вариант для сдачи 2-го задания по УМФ:

УМФ 3 курс, 5 семестр **2 задание**

1. Задача Коши в $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ для уравнения теплопроводности.

1. Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности в $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ (указать условия на гладкость всех входящих в нее функций).

2. Решить задачу Коши: $9u_t = \Delta u$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; $u|_{t=0} = (xy)^2$.

3. Решить задачу Коши: $u_t - \Delta u = cos(3t+x+y+z)$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $t > 0$; $u|_{t=0} = xyz \cdot cos\, x$.

2. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье.

1. Найти все собственные функции $f(x)$ для оператора $-d^2/dx^2$ на отрезке $[0; 2]$, удовлетворяющие условиям: $f(0) = 0$, $f(2) = 0$.

2. Записать общий вид решения задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0, \qquad\qquad 0 < x < \pi \\ u|_{t=0} = f(x), & u_t|_{t=0} = g(x), \quad u|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=\pi} \end{cases}$$

в виде функционального ряда. Указать необходимые условия на гладкость всех входящих в постановку задачи функций.

3. Методом разделения переменных решить смешанную задачу: $u_{tt} = u_{xx} + x^2 - \pi x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u|_{t=0} = x$, $u_t|_{t=0} = -1$, $0 \le x \le \pi$; $u|_{x=0} = -t$, $u|_{x=\pi} = \pi - t$, $t \ge 0$.

3. Краевые задачи для уравнения Пуассона в круге и кольце.

1. Поставить внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $\mathbf{R}^3$ и указать, при каких условиях она имеет решение.

2. Решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R \\ u|_{r=R} = \cos^4 \varphi \end{cases}$$

записать в виде функционального ряда, указав в нем общий вид функций ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\, cos\, \varphi$, $y = r\, sin\, \varphi$).

3. Решить краевую задачу $\Delta u = 9r$, $1/2 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $x = r\, cos\, \varphi$, $y = r\, sin\, \varphi$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $u|_{r=1/2} = -7/8 + 2cos^2\varphi$, $u_r|_{r=1} = 3 + sin\, \varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

4. Краевые задачи для уравнения Пуассона в шаре и шаровом слое.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r, φ, θ) ($(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $x = r\, cos\, \varphi\, sin\, \theta$, $y = r\, sin\, \varphi\, sin\, \theta$, $z = r\, cos\, \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$).

2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $x = r\, cos\, \varphi\, sin\, \theta$, $y = r\, sin\, \varphi\, sin\, \theta$, $z = r\, cos\, \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$):

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R \\ u|_{r=R} = \cos \theta \end{cases}$$

3. Решить задачу ($(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, $x = r\,cos\,\varphi\,sin\,\theta$, $y = r\,sin\,\varphi\,sin\,\theta$, $z = r\,cos\,\theta$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $\theta \in [0;\pi]$):

$$\Delta u = 0,\ 1 < r < 2,\ u|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta\cos 2\varphi,\ u|_{r=2} = 31\sin 2\theta\sin\varphi$$

Следует отметить, что темы 1-го, 2-го и 3-го модулей входят не только в устный экзамен, но навыки решения задач на заданные темы проверяются предварительно на письменном экзамене.

Для приема задания учебным планом выделяется одна пара, т.е. 1 час 20 минут. За это время преподаватель должен успеть проверить результаты контрольной работы, побеседовать со студентом по пройденному материалу, проверить выполнение домашнего задания (решение заранее предложенных задач). К сожалению этого времени явно недостаточно, и приходится проводить дополнительные занятия по приему заданий. Для решения этой проблемы без существенных затрат дополнительного времени как преподавателя, так и студентов, предлагается следующая методика.

1. Все студенты, приступившие к сдаче задания должны иметь тетрадь с самостоятельно выполненным заданием. Как показывает анкетирование, проведенное на сайте http://pyrkova.fizteh.ru (опрошено более 780 учащихся), 41% студентов не уделяют должного внимания этому важному этапу обучения.

2. Всем студентам предлагается решить в отведенное для этого время любые две задачи из предложенных: 1.3, 2.3 и 3.3. Таким образом, до некоторой степени можно определить уровень подготовки студента к экзаменационной контрольной работе и скорректировать его в случае необходимости.

Дальнейший сценарий развития приема задания предусматривает три основные траектории.

I. Сильным студентам, как правило, достаточно 40 минут, чтобы справиться с заданием. Если студент правильно решает две или все три задачи, то после краткой беседы по его тетради с домашним заданием, тем не менее позволяющей лучше понять индивидуальные особенности и возможности студента по сравнению с обычной проверкой тетради, ему проставляется зачет по данному заданию. Во время беседы одного из студентов с преподавателем, остальные продолжают решать предложенные им задачи.

II. Если студент за пару решает правильно только одну из предложенных задач, то вторая и третья задачи ему остается на дом. После того как он ее решит, ему будет предложено более подробно рассказать, как он решал на эту тему задачи из домашнего задания.

III. К студентам, не решившим ни одной задачи за пару, применяется накопительно рейтинговая система оценки знаний: предлагается решить весь вариант дома, ответив на предложенные теоретические вопросы с последующим зачетом каждого пункта индивидуальной контрольной работы для сдачи задания, что способствует ликвидации пробелов в знаниях, воспрепятствовавших выполнить намеченный объем работы в отведенные сроки. После успешного выполнения контрольной работы студента ждет обстоятельная беседа по тетради с домашним заданием.

Предлагаемая методика приема заданий, как показала многолетняя практика ее применения, помогает успешно освоить большой объем математических знаний студентами с различным уровнем подготовки и заинтересованности в получении предметных знаний, учитывая индивидуальные потребности и темп обучения, стимулирует соревновательный дух, активизирует самостоятельную познавательную деятельность. Применение новых образовательных технологий в учебном процессе приводит и к изменению функций самого преподавателя. Он становится не только носителем и единственным транслятором [2] знаний, но и организатором учебного процесса, который и сам развивается в ходе него.

Работа поддержана АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект 2.1.1/500 и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009 – 2013 годы.

Литература

1. Пыркова О.А. Использование Интернета в процессе обучения.// Международная научная конференция “Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство”, г. Плоцк, Польша, 2008. - С. 769-774.

2. Шоптенко В.В., Конанчук Д.С., Кайсина О.С., Кайсин Д.В. Передний край бизнес-образования: инновации в методах и технологиях // Экономическая политика №4(8), 2007. - С. 140-166.

О теории и методике обучения математике в высшей технической школе

С. А. Розанова, г. Москва

Проблема повышения качества математической подготовки будущих инженеров всегда волновала многие поколения исследователей.

Исторический аспект

Осмысление становления и развития математического образования и математической культуры в России ([1,2] и другие) позволяет сделать следующие выводы:

1. К настоящему времени российское математическое образование обладает:

   - богатым опытом создания локальных образовательных систем (школ, гимназий, колледжей, техникумов, семинарий, университетов, академий);
   - содержательными педагогическими и методическими идеями, воплощенными в продукты деятельности их творцов (учебники, методические пособия, научно-популярные статьи, речи, книги);
   - рядом выдающихся исторических личностей-математиков, математиков-педагогов прошлого и настоящего.

   Все это вместе составляет математическую культуру как часть интеллектуальной культуры общества.

2. Идеи мыслителей прошлого о необходимости:

   - сильного профессионального образования с доминирующей математической составляющей как основы экономического, политического, интеллектуального развития общества;
   - профессионально-прикладной направленности математических курсов;
   - остаются актуальными для большинства современных учреждений профессионального образования.

3. Политические, экономические, социальные потрясения, охватившую нашу большую державу, не могли не отразиться негативно на состоянии культуры нашего народа.

Современное состояние математического образования и математической культуры в вузах инженерно-технического профиля

Уровень и качество математической подготовки специалистов-выпускников вузов рассматриваемого профиля в настоящее время нуждается в совершенствовании. Среди существующих многих причин выделим несколько основных:

- понижение уровня математической подготовки в школах и техникумах;
- отсутствие действенного механизма профессиональной ориентации в школе, в результате чего значительная часть молодежи оказывается не определившей своего призвания и формально приобретает специальность;

- учебный процесс по математике в большинстве технических вузов, а также в некоторых вузах других профилей, направлен на изложение “чистой” математики при недостаточном внимании к её приложениям; в результате студенты, видя оторванность математики от их профессии, считают её изучение ненужным или необязательным, теряют к ней интерес;

- общетехнические и специальные кафедры часто нарушают принцип преемственности, например, в курсовых и дипломных проектах недостаточно используют математические методы; не учат студентов математическому моделированию профессиональных задач (впрочем, так же, как и математические кафедры);

- отсутствие у многих преподавателей математических, общетехнических, специальных и других кафедр психолого-педагогической подготовки.

Так сложилось в нашей стране, что преподаватели вузов, многие из которых окончили вузы такого же профиля, не имели в учебных программах ни педагогики, ни психологии. В таких случаях выручают самообразование и здравый смысл, а также накопленный арсенал педагогических знаний. Но таким знаниям, при всех их достоинствах, не хватает системности. На такой основе возникает личная педагогическая система преподавателя, имеющая чаще всего не научно-теоретический, а интуитивно-эмпирический характер, главный прием которой — метод проб и ошибок. Такие знания нуждаются в системности, в логическом стержне, выверенных и четких ориентирах. С реализацией этого момента деятельность вузовского педагога может подняться на новую, более высокую ступень, следовательно, стать более эффективной.

Основные идеи в области теории и методики обучения математике в технической школе

Основные идеи совершенствования процесса обучения математике в высшей технической школе, предложенные в монографиях, докторских и кандидатских диссертациях, статьях и докладах многих исследователей можно условно классифицировать по следующим направлениям:

1. Обеспечение фундаментальности математического образования в технических вузах должны заниматься математические кафедры, прикладными аспектами — специальные и общепрофессиональные кафедры.

2. Усиление профессиональной направленности обучения математике на математических кафедрах через:

    - содержательный компонент (математическое моделирование профессиональных задач, создание банка задач межпредметного характера);
    - методический компонент (проблемное, контекстное обучение, самостоятельная исследовательская деятельность, сочетание коллективных и индивидуальных форм обучения);
    - мотивационно-ценностный компонент.

3. Оптимальное сочетание фундаментальности и профессиональной направленности математических курсов в технических вузах.

4. Формирование математической культуры студентов технических вузов.

5. Совершенствование содержания курса высшей математики.

6. Компьютеризация обучения математики.

7. Различные виды организации самостоятельной работы студентов, развитие познавательной самостоятельности с помощью WEB-технологий.

8. Интенсификация учебного процесса по математике.

9. Формирование математической элиты технического вуза, работа с одаренными студентами.

Все это многообразие важных и нужных исследований пока не привело к созданию теории и методики обучения математике в высшей технической школе, хотя соответствующие шаги и предпосылки содержатся во всех работах по упомянутым направлениям. Следуя В. А. Гусеву [1], отметим, что

1. К настоящему времени есть большое число разнообразных исследований по проблеме совершенствования преподавания математики в высшей технической школе и накоплен огромный опыт.

2. Теория обучения математике в высшей технической школе необходима, так как без неё невозможно оценить эффективность обучения студентов и обучать психолого-педагогическим методам преподавателей математики с учетом специфики технических вузов.

3. Необходимо обобщить результаты исследований, осмыслить их и понять, как должна быть устроена теория обучения математике в высшем учебном техническом заведении.

Для будущих преподавателей математики в школах созданы курсы методики преподавания математики и написано много книг: "Педагогика математики" А. А. Столяра, "Дидактика математики" Н. В. Метельского, "Педагогика геометрии" И. М. Смирновой, "Психолого-педагогические основы обучения математике" В. А. Гусева, "Методика преподавания математики в школе" Ю. М. Колягина, "Методика обучения математике в средней школе" Г. И. Саранцева, "Методика и психология обучения математике в средней школе: курс лекций" Н. Л. Стефановой и д.р.

Но В. А. Гусев указывает во введении своей книги [1] ("Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования" М. Дрофа, 2010):

"К сожалению, приходится отметить, что в этой книге нам вряд ли удастся создать теорию обучения математике, но сделать существенный шаг в направлении этой теории мы будем стараться".

Следовательно, даже для средней школы, где количество методик, монографий, учебников и методических разработок на порядок превышает высшую школу, создание такой теории ещё в начальной стадии.

Однако, к созданию методик, которые бы были рекомендованы и использовались в технических вузах разного уровня (то есть с количеством часов по математике до 300 час; более 300 до 600-700 часов; от 700 часов и выше) следовало бы стремиться и, в конечном итоге, — к разработке теории обучения математике во втузе.

Попробуем описать некоторые, необходимые с нашей точки зрения, основные направления теории обучения математике. Прежде всего, эта теория должна содержать следующие аспекты:

- исторические; философские; психологические; логические; дидактические.

Исторический аспект

Краткий экскурс в историю зарождения математического образования, математической культуры, методики преподавания математики в России и за рубежом. Великие методисты, педагоги. Глубокий анализ накопившихся работ, основных направлений исследований.

Философский аспект

Философия математического образования. Философия математической культуры.

Психологический аспект

Психология интеллекта, мышление, его виды. Математическое мышление. Инженерное (техническое) мышление. Развитие мышления. Возможно ли развитие инженерного мышления при обучении математике?

Дидактические аспекты

Содержание курса высшей математики. Принципы обучения (общедидактические, частные). Закономерность. Основные понятия и определения. Дидактическая модель (возможно, модели) обучения математике в техническом вузе.

Логические аспекты

Необходимость и достаточность. Логические внутрипредметные и межпредметные связи. Нужна ли логика будущему инженеру?

Возможные элементы теории и обобщенной дидактической модели обучения математике в техническом вузе

Ниже предлагается один из возможных подходов к созданию элементов теории обучения математике в техническом вузе, основанный на следующих положениях [2]:

- математическая культура — неотъемлемая часть общечеловеческой, профессиональной культуры;
- преподаватель математики — носитель и проводник математической культуры;
- формирование математической культуры студентов — **закономерность** учебного процесса по математике в современном вузе рассматриваемого профиля, базирующаяся на следующих дидактических принципах:

- оптимального сочетания фундаментальности и прикладной направленности;

***- целенаправленности**, (обеспечение связи математических курсов с соответствующей специальностью (принцип целенаправленности);*

***- преемственности** (изучение математических методов на протяжении всего периода обучения и использования их в курсах специальных и общепрофессиональных дисциплин, а также в дипломных работах);*

***- моделирования** (формирование математического мышления (абстрактного, логического, образного, алгоритмического и др), с помощью которого обучаемый выявляет причинно-следственные связи не только в самой математике, но и в профессиональной и другой социокультурной деятельности – общественной, политической, экономической, семейно-хозяйственной);*

***- развития математической интуиции**;*

***- мотивации** (определение содержания курса математики, форм и методов учебного процесса, обеспечивающих повышение заинтересованности студентов в изучении математики: введение профессиональной и гуманитарной составляющих; наглядность с помощью технических средств обучения (ТСО) и персональных компьютеров);*

***- неформальной строгости** (преподавание математики студентам на уровне неформальной строгости, т.е. выделение ядра математического курса с сохранением строгости и точности рассуждений и части курса, в которой акцент делается на геометрические иллюстрации и прикладной смысл);*

***- универсальности** (организация учебного процесса по математике с введением профессионально-прикладной составляющей, формирующей представление об универсальности математических формул и методов);*

***- уровня развития интеллекта** (организация учебного процесса по математике, обеспечивающего развитие интеллекта обучаемого);*

***- самообучения и самовоспитания** (развитие способности студента к саморазвитию я), в том числе, с использованием WEB-технологий.*

Часть из перечисленных десяти принципов — целенаправленности, преемственности, мотивации и моделирования, подробно рассмотрены в диссертационной работе [3]; принцип математической интуиции — в [4]. Принцип неформальной строгости, универсальности, уровня развития интеллекта, самообучения и самовоспитания введены автором данной статьи в [2]. Использованию WEB-технологий в самостоятельной работе студентов посвящена, например, работа [5].

Такое видение учебного процесса по математике позволит:

- обеспечить единство математического, профессионального, духовно-нравственного и интеллектуального развития личности;
- создать целостную методическую систему, направленную на улучшение качества образовательного процесса в вузах указанного профиля.

Учитывая, что математика необходима практически всем профессиям, прежде всего связанным с естественными науками, техникой, экономикой, но также в современном мире — и лингвисту, историку, социологу, врачу, политику, приходим к необходимости ввести следующий универсальный понятийный аппарат.

Математическая культура студента высшего учебного заведения — приобретенная система математических знаний, умений и навыков, позволяющая использовать их в быстро меняющихся условиях профессиональной и общественно-политической деятельности, повышающая духовно-нравственный потенциал и уровень развития интеллекта.

Формирование математической культуры — это целенаправленно организованный и систематически осуществляемый процесс овладения ею.

Так сформулированные понятия математической культуры и её формирования позволяют ввести в рассмотрение, кроме деятельности профессиональной, аспект общественно-политической и духовно-нравственной деятельности личности и учесть развитие интеллекта с помощью математики.

Под уровнем развития интеллекта будем понимать умение принимать правильные решения в условиях дефицита или избытка информации; скорость принятия решений рассмотрим как один из критериев его оценки.

Уровень развития интеллекта зависит от сформированности многих факторов: математического мышления, профессионального мышления, нравственного и эстетического развития, мировоззрения, способности к саморазвитию и семи качеств ума (счетная способность, речевая гибкость, речевое восприятие, пространственная ориентация, память, способность к рассуждению, скорость восприятия информации и принятия решения).

Чем более сформированы посредством математики указанные факторы и развиты качества ума, тем выше интеллект.

Математическое мышление (абстрактное, логическое, образное, алгоритмическое и др.) — способность к оперированию совокупностью математических, логически взаимосвязанных, понятий и суждений, различными структурами, знаковыми системами математического языка, а также к пространственным представлениям, запоминанию, систематизации и воображению.

Математическая составляющая профессионального мастерства специалиста — комплекс качеств личности, знаний, умений и навыков, научного мировоззрения, сформированных посредством обучения математике при решении профессиональных задач, возникающих в его практической деятельности.

Профессионально-прикладная составляющая учебного процесса по математике в техническом вузе — это специально организованное обучение, результатом которого является овладение студентами математической составляющей профессионального мастерства специалиста.

Профессиональные аналоги классических математических задач и формул — их профессиональная формулировка.

Учебные профессиональные задачи с элементами математического моделирования — задачи с профессиональной формулировкой, известной математической моделью и методами решений.

Учебно-исследовательские профессиональные задачи — задачи с профессиональной формулировкой, известной математической моделью и поиском математических методов решения (частичный поиск).

Научно-исследовательские профессиональные задачи — задачи с профессиональной формулировкой и неизвестными математическими моделью и методами решений (полный поиск).

Гуманитарная составляющая учебного процесса по математике — это специально организованное обучение, результатом которого является приобретение студентами совокупности знаний, умений и навыков, формулируемых средствами математики, её истории, элементами философии, искусства, литературы, психологии и педагогики, направленное на развитие интеллектуальных, духовно-нравственных, эстетических, мировоззренческих аспектов личности студента.

Творчество — высшая форма активной и самостоятельной деятельности обучающегося.

Творческие работы — это работы с элементами творчества: творческая задача, реферат, эссе, курсовая работа, дипломный проект.

Творческая задача — задача, идея которой порождает в студенте желание поиска нового, неизвестного ему способа действия (способа решения).

Реферат— вид констатирующей творческой работы, в которой выражаются общепринятые научные, исторические, мировоззренческие, философские взгляды.

Математическое эссе — вид творческой работы, в которой анализируется проблема, связанная с математикой, с применением математических понятий, методов в других областях и выражается индивидуальное впечатление и отношение к данной проблеме.

Конечно, здесь остается выяснить важный вопрос о влиянии развития математического мышления на формирование инженерного мышления. Исследование этой проблемы пока оставим за рамками данной статьи.

Перейдем к конструированию обобщенной дидактической модели обучения математике в вузах инженерно-технического профиля на основе элементов теории, представленной выше. Этот вопрос в значительной степени был решен в работах [6,7] для группы специальностей радиоэлектроинженерного профиля.

В этих работах теоретически обоснована и практически реализована дидактическая модель профессиональной направленности обучения математике в техническом вузе на основе выявления интегративно-модульного компонента.

Для описания этой модели используются понятия интегративно-модульного компонента профессиональной направленности обучения математике будущих инженеров, интегративного математического спецкурса, а также понятие потенциала содержания обучения математике в техническом вузе.

Интегративно-модульный компонент профессиональной направленности обучения математике будущих инженеров (ИМК) — это вариативная часть содержания математической подготовки студентов, отражающая внутри- и межпредметные связи выделенных модулей содержания математических, общепрофессиональных и специальных дисциплин.

В потенциал содержания включается отражение внутри- и межпредметных связей математики, общепрофессиональных и специальных дисциплин, которые не реализованы в программах изучаемых дисциплин или недостаточно раскрыты и имеют резерв для своей реализации.

В потенциал содержания входят интегративно-модульные элементы: 1) профессионально направленное содержание обучения математике будущих инженеров; 2) расширение математического аппарата в общепрофессиональных дисциплинах; 3) расширение математического аппарата в специальных дисциплинах. Каждый интегративно-модульный элемент в зависимости от своей внутренней структуры обеспечивает реализацию внутри- и межпредметных связей потенциала содержания обучения математике. В результате **в математике усиливается профессиональная составляющая, а в общепрофессиональных и специальных дисциплинах математическая часть.**

В дальнейшем из потенциала содержания выделяется интегративно-модульный компонент, который является его частью и может быть осуществлен с помощью математики на основе интеграции ряда модулей программ по математике как в их базовой и вариативной частях, так и с некоторыми модулями общепрофессиональных и специальных дисциплин.

Для реализации ИМК необходимо разработать: 1) содержание профессионально направленного углубления базовой и вариативной составляющих математической подготовки (теоретическая и практическая части); 2) механизмы реализации компонента (ИМС, т.е. интегративно-модульные спецкурсы, ресурсные занятия, лекции, семинары, практические занятия, типовые расчеты, курсовые работы и др.); 3) методику проектирования и реализации ИМС. После инновационного обучения проводится контроль качества результатов обучения и корректировка компонента.

Рис. 1. Дидактическая модель профессиональной направленности обучения математике в техническом вузе на основе выявления интегративно-модульного компонента.

Дидактическая модель профессиональной направленности обучения математике в техническом вузе на основе выявления интегративно-модульного компонента, представленная на рис. 1, включает следующие основные блоки:

- модули программ по высшей математике для определенных групп специальностей (например, “Техника и технология” УГС 090000 и 20000023000; “Техника и технология” УГС 120000-190000 и 240000280000 и “Сельское и рыбное хозяйство” УГС 110000; “Экономика и управление” (менеджмент) УГС 080000 и др.), разделенную на базовую и вариативную части (внутренний аспект);

- модули программ общепрофессиональных и специальных дисциплин, из которых выделен блок модулей, влияющих на формирование профессиональных компетенций и требующих усиления математической подготовки для выделенной группы специальностей (внешний аспект);

- после анализа внутриматематических и межпредметных связей математики с выделенным блоком модулей общепрофессиональных и специальных дисциплин выделяется блок “потенциал”; этот блок динамичен, он зависит от конкретной группы специальностей, учебных программ данного вуза и других факторов;

- из блока “потенциал” выделяется ИМК.

Реализация дидактической модели для группы специальностей (200800.65; 220100.65; 200100.65; 200300.65) радиоэлектротехнического профиля технических вузов приведена в [6, 7].

Предлагается следующая **методика проектирования и реализации комплекса ИМС**, основными компонентами которой являются: 1) анализ модели подготовки специалиста в техническом вузе с учетом специфики интегрируемых дисциплин; цели обучения; 2) разработка педагогического задания на проектирование ИМС, определение его места в общей системе профессиональной подготовки студентов технического вуза; 3) отбор модулей содержания ИМС в соответствии с целями обучения; 4) формирование, структурирование и отбор содержания ИМС на основе предложенных выше комплексов общедидактических и специальных принципов и критериев; 5) тематическое и хронологическое согласование учебных программ интегрируемых дисциплин; определение оптимальной последовательности изучения учебного материала интегрируемых дисциплин; 6) составление рабочей программы курса; 7) подбор блока профессиональных задач и классифицирование их по уровням сложности, где под *профессиональными* задачами понимаются задачи, для составления и решения которых необходимо привлекать учебный материал, заложенный в общепрофессиональных и специальных дисциплинах; 8) решение профессионально-ориентированных задач методом математического моделирования ведется по известной трехэтапной схеме, состоящей из этапа формализации, этапа решения задачи внутри модели аналитическими и компьютерными методами, этапа профессиональной интерпретации; 9) компьютерное моделирование профессиональных задач с помощью математических пакетов (например, Mathcad); 10) создание педагогических условий, обеспечивающих математическую и профессиональную мотивацию: наличие интересной инженерно-технической фабулы в спецкурсе, организация поиска математических моделей и методов их решения, информационно-технологическая поддержка, наличие творческой среды; 11) организация самостоятельной работы с применением ИКТ; 12) анализ результатов и корректировка разработанного комплекса ИМС.

Методика проектирования и реализации комплекса ИМС реализована в комплексе ИМС “Комплексные числа и символический метод расчёта электрических цепей”, “Линейные пространства графов и матрично-топологические методы расчёта электрических цепей”.

Таким образом, ИМС являются эффективным средством реализации интегративно-модульного компонента профессионально направленной математической подготовки будущих инженеров и способствуют достижению оптимального сочетания фундаментальности и профессиональной направленности в учебном процессе по математике в техническом вузе.

Эта модель универсальна и потому может быть применена для других групп специальностей технических вузов. Работы в этом направлении продолжаются.

Заключение

Работая много лет в НМС по математике, академик С. М. Никольский не только с большим энтузиазмом занимается своим любимым детищем — секцией средней школы, которую сам создал и возглавляет, но и значительное внимание уделяет проблемам математического образования в вузах инженерно-технического профиля. Он неоднократно высказывал мысль о том, что преподавать математику инженерам нужно иначе, чем будущим математикам в классических университетах, сохраняя при этом фундаментальность образования. Эта идея С. М. Никольского привела меня к рассмотрению поставленной проблемы. Ее исследование приводит к следующим выводам.

1. Необходимо изучить и обобщить накопленный опыт работ, идей, концепций, подходов многих известных отечественных и зарубежных ученых в разных научных областях. В значительной степени полная классификация существующих теорий приведена в работе [5]:

- *теория учебно-познавательной деятельности* (С. И. Архангельский, Ю. К. Бобанский, В. В. Давыдов, В. И. Загвязинский, И. Я. Лернер, П. И. Пизкасистый, М. И. Рожков, Л. Ф. Спирин, Н. Ф. Талызина, В. Д. Шадриков и др.);

- *теория деятельностного подхода* (Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, О. Б. Епишева, М. С. Коган, А. Н. Леонтьев, С. Л. Рубинштейн, Н. Ф. Талызина и др., системного подхода (И. В. Блауберг, М. А. Данилов, М. И. Махмутов, В. А. Сластенин, Н. Ф. Талызина, В. Д. Шадриков, Т. Э. Юдин и др.);
- *теория личностно-ориентированного обучения* (Е. В. Бондаревская, В. В. Сериков, И. С. Якиманская и др.);
- *концепция профессиональной компетентности специалиста* (Т. В. Кудрявцев, Б. Ф. Ломов, С. Е. Моторная, А. М. Новиков, С. А. Татьяненко и др.);
- *теория профессионально-ориентированного обучения* (Н. А. Бакшаева, А. А. Вербицкий, Е. П. Ильин, Ю. П. Поваренков, Н. П. Фетискин, В. Д. Шадриков и др.);
- *положения и выводы современной теории развития познавательной самостоятельности* (И. Я. Лернер, М. С. Каган, Н. А. Половникова, Г. И. Саранцев, Н. Ф. Талызина, Т. И. Шамова и др.);
- *концепция информатизации общества и образования* (В. Н. Алдушонков, Я. А. Ваграменко, Б. С. Гершунский, С. П. Грушевский, В. М. Демин, А. П. Ершов, Т. В. Капустина, А. А. Кузнецов, Е. И. Машбиц, В. М. Монахов, А. М. Новиков, Н. И. Пак, Ю. А. Первин, И. В. Роберт, О. Б. Тыщенко, Е. К.Хеннер и др.);
- *вопросы интеграции математического образования* (А. К. Артемов, М. И. Зайкин, В. И. Крупич, С. Г. Манвелов, Л. М. Наумова, Г. И. Саранцев, А. В. Хуторской и др.);
- *теория самоактуализации и самореализации в педагогике и психологии* (Л. Г. Брылева, И. А. Витин, А. Маслоу, П. И. Пидкасистый, К. Роджерс, Л. М. Фридман и др.);
- *технологии наглядно-модельного обучения* (Г. И. Буракова, Д. С. Карпов, Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина, Н. В. Скоробогатова, Е. И. Смирнов и др.);
- *вопросы теории и методики обучения в вузе* (В. В. Афанасьев, С. И. Архангельский, В. А. Кузнецова, В. С. Леднев, Г. Л. Луканкин, В. М. Монахов, А. Г. Мордкович, С. А. Розанова, В. С. Секованов, Е. И. Смирнов, С. А. Татьяненко, В. А. Тестов, А. В. Ястребов и др.);
- *концептуальные положения методики обучения математике* (В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев, М. Клякля, Ю. М. Колягин, А. Г. Мордкович, Г. И. Саранцев, и др.).

Обозначена необходимость: создания целостной теории обучения математике в высшей технической школе, разработки обобщенно-дидактической модели для такого обучения.

Предложенный подход следует рассматривать как некое приближение для создания целостной теории обучения математике в высшей технической школе.

Литература

[1] Гусев В.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования. – М.:Дрофа, 2010.

[2] Розанова С.А. Математическая культура студентов технического университета.-М.: Физматлит, 2002.

[3] Булдык Г.М. Формирование математической культуры экономиста в вузе. Автореферат диссертации доктора пед. наук. – Минск: издательство Белорусского университета, 1997.

[4] Петрова В.Т. Научно-методические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам в высших учебных заведениях: Диссертация доктора пед. наук. – М., 1998.

[5] Катержина С.Ф. Развитие познавательной самостоятельности студентов технического вуза при обучении математике с использованием WEB-технологий.: Автореферат диссертации канд. пед. наук. – Ярославль, Издательство Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского, 2010.

[6] Исмагилова Е.И., Розанова С.А. Интегративно-модульный компонент профессиональной направленности обучения математике будущих инженеров радиоэлектротехнических специальностей. рославский педагогический вестник.- Ярославль: Издательство ЯГПУ, 2009.- №1- с.40-48 (Журнал входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ).

[7] Исмагилова Е.И. Интегративно-модульный компонент профессиональной направленности обучения математике будущих инженеров радиоэлектротехнических специальностей: Автореферат диссертации канд. пед. наук. Ярославль. Издательство Ярославского педагогического университета им. К. Д. Ушинского, 2009.

Математическая культура мышления как социально-значимое явление

В. С. Сенашенко, г. Москва; В. А. Кузнецова, В. С. Кузнецов, г. Ярославль

Состояние системы образования в России в последние десятилетия не соответствует требованиям перехода страны на инновационный курс развития. Качество образования продолжает падать, резко снижается уровень образованности населения. Немаловажную роль в этом процессе играет ситуация с математикой как наукой и предметом обучения. И если современное положение с математическими исследованиями в России еще можно назвать удовлетворительным, хотя и здесь уже стоит задача восстановления лидирующего положения в мире, воссоздания отечественных математических школ, сохранения молодых научных кадров, то в области математического образования и математической культуры населения ситуация вызывает серьезную озабоченность. Речь идет не о значении математики как пласте общечеловеческой культуры, а о социальной значимости математической культуры членов общества для его развития и, более того, об опасных возможных последствиях ее отсутствия у работников в различных сферах деятельности.

Под математической культурой человека понимаем его способность применять в профессиональной, общественно-политической, духовно-нравственной деятельности знания, умения и навыки, выработанные посредством изучения математики на разных образовательных ступенях. Указанное истолкование близко примыкает к определению математической культуры студента технического университета, представленному в [1]. В нашем рабочем определении больший упор делается на способность человека применять систему знаний, умений и навыков и осуществлять это адекватно уровню полученного образования. В частности, для абитуриента вуза его математическая культура — это в первую очередь способность применить систему полученных в школе математических знаний, умений и навыков для дальнейшего обучения в высшей школе.

Заметим, что понятие математической культуры, хотя и взаимосвязано, но не совпадает с понятием математического мышления, которое часто упоминается в различных публикациях математиков. “Математическое мышление (абстрактное, логическое, алгоритмическое и математическая интуиция) — способность к оперированию совокупностью математических, логически взаимосвязанных, понятий и суждений, различными структурами, знаковыми системами математического языка, а также способность к пространственным представлениям, запоминанию, систематизации и воображению” [1]. Следовательно, человек может обладать математической культурой, но не обладать математическим мышлением. Однако отношение между этими понятиями не столь тривиально. Человек, обладающий математической культурой, все-таки должен обладать хотя бы некоторыми самыми простейшими приемами математического мышления, например, осуществлять простейшие логические умозаключения и доказательства, в отдельных случаях выполнять абстрагирование и обнаруживать аналогии. В этом смысле мы говорим о математической культуре мышления.

Для рационального поведения не требуется высокого уровня математических знаний, но важно то, что математика во многом развивает умение правильно рассуждать, понимать получаемую информацию, обрабатывать ее и делать правильные прогнозы. В сущности, речь идет о формировании интеллекта. Разумеется, его формирует не только математика. Достаточно вспомнить наших знаменитых отечественных писателей, литераторов и других деятелей, которые были далеки от математики, но в то же время были личностями высочайшего интеллекта и умели широко взглянуть на проблемы любого уровня, вплоть до прогнозов развития страны.

Математическая культура начинает воспитываться с детства и ею в определенной степени должен обладать каждый выпускник средней школы независимо от профиля его будущей деятельности. Между тем и из высшей (не считая отдельных специальных факультетов), и из средней школы, по существу, исчез в качестве работающего термин “понимание” как интегрирующий инструмент в сфере образования и необходимая база для создания новшества в любой сфере деятельности. “Понимание — осознание связей и отношений между предметами и явлениями реального мира. Один из процессов мышления. В зависимости от того, какие связи раскрываются в процессе познания, существуют различные уровни понимания. Отнесение воспринимаемого предмета к соответствующей категории предметов есть первая ступень понимания. В процессе познания раскрываются все более сложные и многообразные отношения между предметами и явлениями, устанавливаются причинно-следственные и другие закономерные связи. Осознание этих внутренних, недоступных непосредственному восприятию связей и отношений предметов и явлений реального мира есть понимание наиболее глубокое, раскрытие сущности предметов и явлений действительности” [2]. Это общее определение, примененное к математике, означает осознание смысла и логических взаимосвязей между математическими объектами, понятиями, и самими логическими связками, которые, хотя и являются лишь идеализацией предметов и явлений реального мира, но составляют предметы исследования. Для понимания в математике характерно ясное “видение” внутренней связанности, причинно-следственных упорядоченностей между фактами.

Термин “понимание” не является синонимом термина “знание”. Знание как умение запомнить и воспроизвести необходимую информацию математиками воспринимается как первоначальный этап к пониманию материала, которым нельзя ограничиваться при обучении. Проблема математического образования и, как следствие, формирования элементарной математической культуры часто состоит в том, что понимание подменяется формальным знанием определений, формул без осознания их смысла, узнаванием знакомой информации, умением применить ее к решению конкретных задач. Многие студенты не в состоянии осознать сам факт непонимания материала, они не умеют отличить то, что они понимают, от того, что не понимают. Они не умеют думать, предпочитая осмыслению прочитанного его механическое заучивание. Л. Д. Кудрявцев еще в 2002 году писал: “Люди, которые не научились правильно думать, логически рассуждать, которые считают, что они понимают то, что на самом деле они не понимают, могут представить серьезную опасность для общества при самых их добрых намерениях. Весьма вероятно, что бедственное положение России, в котором она оказалась в настоящее время, не является следствием сознательных действий кого-то, а произошло благодаря людям, которые не понимали, что они делают, так как в свое время их не научили отдавать себе отчет в том, что они в действительности понимают и чего не понимают, что они в действительности знают и чего не знают” [3]. В студенческой среде и в обществе в целом во многом потеряна мотивация на повышение интеллекта, чему в значительной степени способствуют СМИ и, иногда, даже сами работники сферы образования. Молодежи внушается, что успех в жизни только в незначительной степени определяется интеллектом, а существенно больше он связан с другими факторами. Культ интеллекта в обществе подменяется культом финансового благополучия. На рынке труда образовался сектор, ориентированный на ту категорию людей, кому предлагается труд низкой квалификации, они заведомо лишены карьерных перспектив, им предлагается "просто жить и развлекаться". Примером тому может быть стремление охранных агентств формировать свой состав из лиц, имеющих диплом о высшем образовании, независимо от полученной ими квалификации.

Все большее распространение получает идея, согласно которой задачи высшей школы сводятся в основном к задачам подготовки исполнителей, пользователей чьими-то результатами без знания того, почему их надо применять и каковы могут быть последствия. Достаточно вспомнить концепцию создания так называемого прикладного бакалавриата. Наметилась тенденция, в основе которой просматривается переход к более примитивному образованию, ориентированному на решение прикладных задач "бытового уровня", лишая отечественное высшее образование свойств научности и фундаментальности. Основными составляющими этой тенденции становятся следующие:

- научить знать, т.е. научить узнавать;
- научить основам общежития, т.е. освоить правила сосуществования и сотрудничества;
- научить действовать, т.е. научить овладевать умениями;
- научить сознавать себя, т.е. научить выработке азов мировоззрения.

Подчеркнем, что отсутствие элементарной математической культуры и неумение мыслить опасно не только для будущих специалистов естественнонаучных и технических профилей. Не меньшую негативную роль оно может сыграть и для гуманитариев, во многих сферах деятельности которых требуется умение анализировать информацию, вычленять сущность вопроса, владеть логикой рассуждений, обобщать обширный статистический материал, правильно интерпретировать политическую ситуацию и т. д. Формируя дисциплину мышления, математика, по мнению В. А. Успенского, развивает три важнейших умения: умение отличать истину от лжи, смысл от бессмыслицы, понятное от непонятного [4]. В процессе преподавания математики приходится постоянно сталкиваться не только с этими тремя ситуациями, но и с другими, когда пример или иллюстрация воспринимаются как доказательство или импликация с очевидным заключением выдается за определение какого-то понятия. Например, студенты задают "уточняющий" вопрос: "Доказательство равенства множеств проводить с помощью диаграмм Эйлера-Венна?", не понимая различия между иллюстрацией и доказательством. При попытке дать определение системы линейно-независимых векторов не редкое исключение представляет следующий "критерий": если все коэффициенты линейной комбинации векторов равны нулю, то линейная комбинация равна нулю (нуль-вектору). В последние годы у студентов снизилась способность к осмыслению утверждений, полученных результатов, причем это относится не только к студентам-гуманитариям. Этот процесс в полной мере коснулся и естественно-математических факультетов. У гуманитариев он просто заметен более выпукло. У них чаще понимание подменяется заучиванием определений как стихотворения, формул без осознания их смысла. В дальнейшем результаты деятельности таких выпускников могут иметь самые негативные социально-значимые последствия.

Обладание минимальным уровнем математической культуры мышления есть необходимое условие любого образованного человека независимо от специфики его профессиональной деятельности. Именно поэтому в действующих государственных стандартах ВПО математика присутствует при подготовке по любой специальности и любому направлению. Однако в принимаемых в настоящее время новых документах — Федеральных госстандартах ВПО положение существенно меняется, причем не в лучшую сторону. Например, в проектах ФГОС ВПО для направления "Юриспруденция" блок МЕН — "Математика, естественные науки" по существу отсутствует, в нем представлена лишь "Правовая информатика". В других направлениях ФГОС (например, психология) блок МЕН содержит вместе с математикой еще такое количество дисциплин, что отведенное на блок число зачетных единиц не дает возможности каждой из этих обязательных дисциплин предоставить хотя бы по 2 зачетные единицы, как предусмотрено нормативными документами. Кроме того, начавшаяся в вузах при переходе к новой оценке трудоемкости борьба за зачетные единицы (а значит — за ставки), на гуманитарных факультетах иногда усиленная воинствующим убеждением в отсутствии необходимости математической подготовки их студентов, наносит еще больший урон математическому образованию выпускников. При этом заметим, что при обучении математике с целью формирования математической культуры мышления не должен работать принцип максимизации объема передаваемых знаний — "чем больше всевозможных знаний, тем лучше". В большинстве случаев педагог-математик слово "знание" связывает со словом "понимание" и реализует принцип "чем больше понимания, тем лучше". Однако в среде вузовской педагогической общественности наблюдаются разные подходы к понятию "знание" и роли понимания в профессиональной подготовке специалиста. Так, в [5] автор статьи пишет, что знание неразрывно связано с понятием действия и определяется глаголами: "описать", "перечислить", "вычислить", "проанализировать" и т.д., а отнюдь не глаголами: "знать", "понимать", "усвоить", "иметь представление" и т.д. Такой подход, возможно, применим к медицине (сфера деятельности автора статьи), но не к подготовке в университете, например, математика, физика или социолога.

Решение вопроса о повышении математической культуры, как и других социально важных проблем, требует значительных интеллектуальных и материальных ресурсов, нацеленности общества на значимость результатов для его успешного развития. К сожалению, приходится констатировать практически отсутствие каких-либо положительных подвижек в этом направлении. Приведем несколько вроде бы частных и даже внешне не взаимосвязанных примеров. По результатам ЕГЭ по математике в 2010 году в стране с работой не справился каждый 20-ый выпускник школы. Теперь рассмотрим динамику тиражей журнала "Математика в школе": 1991 год, №5 — 337475 экземпляров; 2000 год, №4 — 33000 экземпляров; 2009 год, №7 — 15000 экземпляров. Эта убывающая функция красноречиво свидетельствует об отсутствии заботы о качественной подготовке в средней школе. В высшей школе осуществляется широкомасштабный переход на четырехлетнее образование для подавляющего большинства обучающихся (шестилетняя магистратура — для незначительного количества студентов). Во многом реализуется имитация процесса повышения качества, прикрываемая словами о компетентностном подходе, а в то же время число ставок преподавательского состава зависит от реального контингента студентов в текущем году, а не от плана приема абитуриентов, то есть наказываются вузы за отсев студентов, не справившихся с учебным планом. Приведенные примеры различны, но являются звеньями одной цепи...

Первыми шагами в решении задачи могут быть следующие:

- осуществление в высшей школе планомерной работы по реальному повышению качества образования, переосмысление содержания и технологии преподавания математических дисциплин, а не формализованное введение компетентностного подхода и попытка превратить бакалавриат в профессиональную урезанную подготовку по специальности;

- развертывание через СМИ широкой работы по формированию в обществе адекватной оценки научных ценностей в жизни страны, вплоть до возрождения существовавших на телевидении полвека назад математических передач;

- обеспечение финансовой поддержки увеличения тиражей научно-популярных и методических журналов, в частности, журнала "Математика в школе".

Литература

1. Розанова С.А. Формирование математической культуры студентов технических вузов // Дис. д-ра пед. наук: 13.00.02, Москва, 2003, 327с.

2. Малая советская энциклопедия, третье издание, Гос. науч. изд-во "Большая сов. энциклопедия", 1960, т.7, с.415.

3. Кудрявцев Л.Д. О реформах образования в России //Образование, которое мы можем потерять. Сборник под общей редакцией В. А. Садовничего, Москва: Московский госуниверситет, Институт компьютерных исследований, 2002, с. 45-70.

4. Успенский В.А. Математика для гуманитариев: философия преподавания // Математика

в высшем образовании, научно-метод. журнал, Н. Новгород, 2005, №3, с.91-104.

5. Шестак Н.В. Профессиональное образование и компетентностный подход // Высшее образование в России, 2010, №3, с.38-43.

Об использовании информационных технологий на уроках математики в средней школе

Т. В. Сергеева, г. Ярославль

За два последних десятилетия компьютеры прочно вошли в учебный процесс. Разработаны многочисленные электронные учебные пособия по различным предметам школьной программы, в том числе — по математике. Рассмотрим существующие возможности использования информационных технологий применительно к обучению математике.

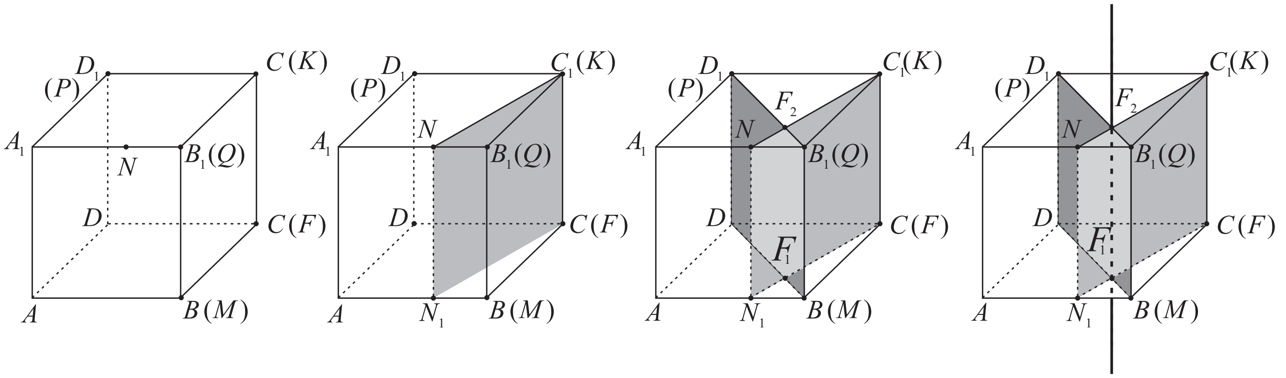
Традиционная форма "компьютерного" урока, которую учителя начали применять с появлением первых компьютерных классов, подразумевает две ситуации. Это — работа в парах (так как наполняемость класса вдвое больше количества ученических рабочих мест в компьютерном классе) или сменный вид работы, когда половина учащихся выполняют задания за партами, а остальные — на ПК, а затем учащиеся меняются местами. К достоинствам "компьютерных" уроков математики отнесем возможность осуществления оперативного контроля усвоения учебного материала на уроке, увеличение количества вариантов заданий, наглядность. Однако существенным недостатком такой организации учебного процесса является проведение уроков вне кабинета математики, что неудобно учителю и непривычно учащимся. Кроме того, не всегда есть возможность попасть в кабинет информатики к моменту изучения определенного материала. У такой формы работы есть сторонники, но большее количество педагогов пользуются ею редко, мотивируя тем, что тестового контроля в компьютерном виде недостаточно для качественного изучения темы. Также при введении нового материала учителю трудно следить за реакцией школьников, если они занимаются в парах. В данной ситуации темп работы индивидуальный, а комментарии учителя общие.

Появление в школах мультимедийных проекторов и интерактивных досок является следующим этапом внедрения информационных технологий в школьную практику. Персональный компьютер в кабинете математики позволяет учителю включать фрагменты презентаций на любом этапе урока. Выделим наиболее целесообразные моменты такой организации занятия: устная работа, повторение, актуализация знаний, объяснение нового материала, проверка решений по образцу.

Презентации обычно создаются в программе PowerPoint. Возможности этого программного средства позволяют на уроках геометрии наглядно и четко демонстрировать школьникам этапы доказательства теорем. Например, дополнительные построения, наложения, движения.

Решение задач на построение, особенно на построение сечений многогранников, вызывают затруднения у многих учащихся. Именно на этом этапе может помочь использование презентации. Преимущество, которое дает применение компьютера, заключается, во-первых, в возможности возврата к предыдущим шагам решения, что неудобно при построении на доске. Во-вторых, не все учащиеся при построении чертежа обращают внимание на характер расположения точек, через которые проходит секущая плоскость. При этом они не могут справиться с решением, так как сечение получается "не как у всех". С помощью нескольких слайдов можно наглядно показать, что будет получаться в таком случае.

Рассмотрим задачу 4.031 из учебного пособия по геометрии Е. В. Потоскуева: "Постройте линию пересечения секущей плоскости NKF с плоскостью PQM, которые заданы точками, расположенными на ребрах и в вершинах куба" [1, с.61]. Решение этой задачи оформлено в виде презентации. Это часть домашнего задания, проверка которого с использованием компьютера более эффективна, чем в традиционном случае при построении на доске, так как виден и соответственно устно объяснен каждый шаг.



Уточним, что на рисунке представлена последовательность решения задачи. В действительности при показе слайдов идет “наслоение”, учащиеся видят появление каждой точки, линии и устно обосновывают их.

Для создания чертежа в PowerPoint школьники применяют режимы “Фигура”, “Линия”, “Полилиния”, “Овал”, приемы анимации. В настоящей статье использована работа ученика 10 “А” класса МОУ СОШ №58 г. Ярославля Е. Киселева. Изображение отрезков DP и DB на чертеже выполнено в режиме “Полилиния”, поэтому на приведенном рисунке выглядит сплошным. При показе слайдов оригинальной презентации такой накладки нет.

Требования к исполнению “геометрической” презентации оговариваются заранее. Это — графическое указание условия задачи; обозначение вершин, точек пересечения прямых; четкая последовательность шагов, позволяющая воспроизвести действия в тетради; настройка анимации в соответствии с порядком действий; правильность изображения линий.

Таким образом, использование информационных технологий на уроках математики увеличивает темп урока, позволяет более наглядно показать изучаемый материал.

Литература

1. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 класс: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики/ Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич.-3-е изд., стереотип .- М.: “Дрофа”, 2006. - 250 с.

Психолого-педагогические условия реализации личностно-ориентированного подхода при обучении решению сюжетных задач

Е. Ф. Фефилова, г. Архангельск

Современное образование, рассматриваемое как социальный институт, система, процесс, результат, представляет собой единство обучения и воспитания, которые реализуют основные принципы смены его парадигмы с информационной (сообщающей) на развивающую, самостоятельную познавательную активность ученика. Направления обучения в образовательном процессе отражают поиск путей оптимизации этого процесса. Одним из таких эффективных направлений оптимизации является личностно-ориентированный подход.

В примерных программах основного общего образования отмечается, что изучение математики в основной школе направлено на достижение целей в направлении личностного развития, в метапредметном направлении и в предметном направлении, среди которых отмечаются, например, следующие: “формирование представлений о математике как форме общечеловеческой культуры; развитии представлений о математике как форме и методе познания действительности; создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования; формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности” [3, с. 5]. Как видно, в общей характеристике примерной программы по математике и требованиях к результатам обучения и освоения содержания курса в неявном виде отражается целесообразность реализации личностно ориентированного подхода в обучении математике.

Категория “подход” при анализе учебного процесса традиционно рассматривается с позиции обучающего, т.е. учителя, преподавателя. В этом контексте личностно-ориентированныйй подход к обучению, сформулированный к середине 80-х годов, разрабатывался преимущественно как субъектно ориентированная организация и управление учителем учебной деятельностью школьника при решении им специально организованных учебных задач разной сложности и проблематики. Эти задачи развивают не только предметную и коммуникативную компетентность обучающегося, но и его самого как личность. В то же время отметим, что личностно-ориентированный подход может рассматриваться и с позиции ученика. Основываясь на определении учебной деятельности Д. Б. Эльконина, согласно которому ее специфика состоит в том, что она направлена на развитие и саморазвитие субъекта этой деятельности, был поставлен вопрос о двойственной направленности личностно ориентированного подхода: с позиции педагога и с позиции ученика. В исследованиях И. С. Якиманской, А. К. Марковой, Л. Б. Орлова и др. обоснована неоспоримость значения не только учета, но и специальной организации в процессе обучения целого ряда индивидуально-психологических характеристик обучающегося: мотивации, адаптации, способностей, коммуникативности, уровня притязаний, самооценки, когнитивного стиля и т.д. Как подчеркивал С. Л. Рубинштейн, “в психическом облике личности выделяются различные сферы, или черты, характеризующие разные стороны личности; но при всем своем многообразии, различии и противоречивости основные свойства, взаимодействуя друг с другом в конкретной деятельности человека и взаимопроникая друг в друга, смыкаются в единстве личности”, [5].

В реализации личностно-ориентированного подхода обеспечивается согласование двух основных источников познания — обучения и учения. Сущность его состоит “в создании психолого-педагогических условий для проявления и обогащения субъектного опыта ученика, его “окультуривания” в ходе социально организованного обучения. Выражаясь фигурально, можно сказать, что процесс познания организуется в направлении “с детьми к предмету”, а не “с предметом к детям” [4, с.10].

Таким образом, в самой общей форме личностно ориентированный подход в совокупности его компонентов (и особенно личностного) означает с позиции обучающего:

1. Организацию и управление целенаправленной учебной деятельностью ученика в “общем контексте его жизнедеятельности — направленности интересов, жизненных планов, ценностных ориентации, понимания смысла обучения для развития творческого потенциала личности” [1].

2. Переориентацию учебного процесса на постановку и решение школьниками конкретных учебных задач (познавательных, исследовательских, преобразующих, проективных и т.д.). Естественно, что при личностно ориентированном подходе педагогу предстоит определить учебные задачи и действия, их иерархию, форму предъявления и организовать выполнение этих действий обучающимися при условии овладения ими ориентировочной основой и алгоритмом их выполнения.

Центральным звеном в изучении математики, несомненно, являются задачи. Особое место в основной школе занимают сюжетные задачи, функции которых в обучении школьника многогранны и значительны. Важным условием реализации личностно ориентированного подхода при обучении решению сюжетных задач выступает целесообразным образом организованная деятельность учащихся, направленная на проявление инициативности, активности и личностного становления, основанные на самостоятельном выборе ценностей самосовершенствования и саморазвития и позволяющие создавать жизненно-практические ситуации и положительный эмоциональный настрой на получение качественного математического образования. А это требует от учителя умения [4]:

- строить работу по выявлению субъектного опыта ученика, использованию его на всех этапах обучения, в том числе и на всех этапах обучения решению сюжетных задач;

- организовывать, поддерживать рефлексию ученика на оценку не только результата, но и процесса его достижения;
- поощрять работу не только с образцами, но и с предлагаемыми учениками способами работы (их выявлять, обсуждать, оценивать в ходе урока и внеурочной деятельности);
- разнообразить дидактический материал с учетом индивидуальной избирательности учащихся по содержанию, виду сюжетных задач, приема поиска их решения, а также способам и методам решения задач, различающихся: уровнем сложности задач, характером используемых логических операций, требованием к активизации сенсорных каналов, креативностью предлагаемых заданий, сочетанием различных психических процессов для успешного решения задач; что и создает условия для осознания учеником личностной значимости решения задачи “узнать что-то новое для себя”;
- давать позитивную оценку познавательным усилиям ученика.

3. При реализации личностно ориентированного подхода в обучении математике целесообразно опираться на психолого-педагогические закономерности, требования и принципы, обеспечивающие ее единство и целостность. Важная задача такого подхода в обучении решению задач — возбудить в ученике “интерес к самому себе, как мыслящей личности” [6, с.3].

Рассмотрим, как выделенные основные психолого-педагогические условия могут быть реализованы в процессе обучения решению сюжетных задач в курсе школьной математики, которые выполняют различные функции в обучении школьников.

В психолого-педагогических исследованиях по теории и методике обучения математике, а также в методической литературе выделяют два основных типа умения решать задачи: умение решать задачи определенного вида (частное умение) и общее умение решать задачи (универсальное умение). Общие умения решения задач наиболее эффективно формируются в процессе обучения решению сюжетных задач. Это обусловлено тем, что в процессе обучения решению сюжетных задач можно опереться на субъектный опыт ученика. При этом, в процессе обучения происходит обогащение жизненного и приобретенного опыта учащегося, связанного с 1) с достижением ими определенного учебного результата; 2) постижением личностного смысла знаний и умений; 3) процессом обучения, при котором идут от накопления опыта решения типовых сюжетных задач к обучению общим приемам и методам; 4) организацией процесса самообучения; 5) рефлексией своей деятельности.

Таким образом, к основным условиям реализации личностно ориентированного подхода при обучении решению сюжетных задач, можно отнести:

1. Формирование общих умений решать задачи требует включения в содержание математического образования общих теоретических знаний о задаче, ее структуре, приемах поиска решения задач и методов решения сюжетных задач.

При выявлении структуры сюжетной задачи мы обратились к исследованиям Ю. М. Колягина, В. И. Крупича, А. М. Сохора, Л. М. Фридмана, О. Б. Епишевой и др., в которых авторами проведено обстоятельное изучение компонентов структуры задачи. Рассматривая сюжетную задачу, целесообразно выделять внешнюю и внутреннюю структуру. При этом, компонентами внутренней структуры сюжетной задачи являются: 1) элементы задачи: известные и неизвестные (неконкретные, неявно заданные), к которым относят — искомые и промежуточные или вспомогательные величины (нахождение которых не требуется, но они должны быть найдены в процессе поиска решения задачи); 2) тип взаимосвязей между элементами (прямой, косвенный и др.); 3) основное отношение между величинами; 4) ситуации. В методической литературе чаще говорят о логической структуре сюжетной задачи, т.е. о структуре ее решения, что позволяет определить методы и способы решения задач и каждому ученику выбрать свой способ или метод решения.

2. Для реализации личностно ориентированного подхода в процессе обучения решению сюжетных задач необходимо нивелировать “рассогласование” между рекомендованными приемами

выполнения учебного действия (продумывает учитель) и способом учебной работы, которым пользуется ученик, ибо способ входит в содержание его субъектного опыта познания, часто складывается стихийно, неосознанно и “может помогать этому процессу или тормозить его” [4, с.12]. Отметим, что способ учебной работы имеет сложную структуру и включает в себя: личностное отношение к объекту познания; интеллектуальную основу действий; эмоциональный настрой. Поэтому, при отборе сюжетных задач и организации деятельности учащихся по решению данного типа задач необходимо учитывать потребностно-мотивационную, операциональную, эмоциональную составляющие личности ученика.

С этой целью целесообразны, например, следующие задания для учащихся [7]:

1). Дан текст сюжетной задачи: а) выделите структуру текста задачи; б) определите известные величины задачи; в) определите искомые величины задачи; г) выявите промежуточные или вспомогательные величины задачи, если это возможно сделать сразу без переформулирования задачи; д) определите основное отношение между величинами; е) приведите модели на этапе анализа условия задачи.

2). Даны тексты сюжетных задач. Сравните тексты задач. Чем они похожи? Чем они отличаются? Составьте новую задачу, которая бы сохранила существенные сходства с исходными задачами (“лучше придумать самому одну математическую задачу, чем решить десять из задачника” [9, с.24]). Прочитайте задачи и скажите, какая задача, на Ваш взгляд, “лишняя” и почему? Как надо изменить содержание “лишней” задачи, чтобы она соответствовала выделенному признаку? Сформулируйте свой вопрос к задаче. Что изменится в процессе ее решения?

3). Составьте сюжетную задачу, содержание фабулы которой определено условием задания (дано условие, дано требование задачи, дана система предложений (может быть, задачная ситуация), дан сюжет, дана схема с готовыми ключевыми словами (без готовых ключевых слов), дана иллюстрация, приведено решение, приведено несколько записей решения задачи). Например, составить обратные задачи к следующей задаче: “Моторная лодка прошла 39 км по течению реки и 28 км против течения реки за то же время, за которое она могла пройти 70 км в стоячей воде. Какова скорость моторной лодки в стоячей воде, если скорость течения реки 3 км/ч?”.

4). Дана задача с недостающими данными, например; “Из деревни вышел пешеход. Через несколько часов вслед за ним выехал автомобиль. Через сколько часов после своего отъезда автомобиль догонит пешехода?” [7,С.108]. Измените условие задачи с недостающими данными так, чтобы ее можно было решить. Выберите данные, которыми можно дополнить условие задачи, чтобы ответить на поставленный в ней вопрос. Обоснуйте свой выбор.

5). Дана задача с избыточными данными, например, “Спортсмен расстояние в 10 км пробежал со скоростью 8км/ч, а спортсменка это же расстояние пробежала со скоростью на 2 км/ч меньше. На сколько быстрее пробежал дистанцию спортсмен, если спортсменка преодолела ее за 1,5ч” [7, с.109]. Найдите в сюжетной задаче лишние данные, противоречивые данные и др.

6). Дана задача с альтернативным условием, те задача, в ходе решения которой необходимо рассматривать несколько возможных вариантов условия, например, при решении следующей задачи: “От одной пристани по реке отправляются одновременно два катера. Один движется со скоростью 17 км/ч, а второй - со скоростью 19 км/ч. На каком расстоянии друг от друга они будут находиться через 2 часа, если скорость течения реки равна 2 км/ч?”, требуется рассмотреть движение катеров в одном и противоположных направлениях.

7). Решите задачу: “Между двумя городами A и B через возвышенность ходит автобус. При подъеме он идет со скоростью 25 км/ч, а при спуске — со скоростью 50 км/ч. От A до B автобус идет 3,5 часа, а от B до A — 4 часа. Найдите расстояние между A и B” [7, с.122] разными способами. При этом важно обратить внимание на процессуальную сторону решения, на причины трудностей при индивидуальном поиске решения, проанализировать ту позитивную информацию, которую может принести решение данной задачи или анализ ее решения.

Личностный смысл образования во многом зависит от мотива, которым руководствуется ученик. А. Н. Леонтьев подчеркивал, что если значение является средством связи человека с реальностью, то смысл связывает его с реальностью собственной индивидуальной жизни в этом мире. Личностный смысл, по Леонтьеву, — это значение, опосредованное мотивом, следовательно, смыслообразующие мотивы образования ученика, влияющие на его мировоззрение и жизненные позиции, оказываются действеннее и значимее мотивов и стимулов, побуждающих к конкретным действиям. “Личностный смысл — индивидуализированное осознаваемое отражение действительного отношения личности к объектам его деятельности” [8, с.142]. Как показали наши исследования, учащиеся не любят решать сюжетные задачи, так как они не интересны, они их не умеют решать, и запись решения по требованию учителя занимает много времени. Кроме того, исследования показали, что у учащихся к концу 5 класса уровень познавательной мотивации значительно падает.

Сюжетные задачи, исходя из их особенностей, создают благоприятные возможности для развития познавательных мотивов школьников, например:

1). Решение задач с интересным содержанием, необычным вопросом. Например:

За десять лет пират Ерема
Способен выпить бочку рома.
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

2). Демонстрация “красивого” метода, способа решения, например, решение предлагаемой задачи арифметическим методом: “Из Москвы и Архангельска, расстояние между которыми 1188 км, одновременно навстречу друг другу выехали два поезда. Московский поезд шел со скоростью 60км/ч, а архангельский — 48 км/ч. В момент отправления второго поезда из него вылетел почтовый голубь и со скоростью 80 км/ч полетел навстречу московскому поезду, а затем повернул назад и летел до встречи с архангельским поездом. Так он летал, пока не встретились поезда. Можно ли определить расстояние, которое пролетел голубь?”

3). Решение исторических задач, например, задача Э. Безу: “Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 4 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается, за какую сумму он ее купил?”

4). Решение задач прикладного и практического характера, например: “Стоимость хода корабля складывается из стоимости расходуемого двигателями горючего и остальных расходов. Установлено, что стоимость горючего пропорциональна третьей степени скорости корабля. Остальные расходы от скорости корабля не зависят, их можно считать постоянными. Необходимо определить скорость корабля, при которой расходы на каждом километре пройденного пути будут наименьшими”.

5). Показ практических приложений изученных математических понятий, правил, методов, например, задача на применение знаний о прогрессиях: “Бассейн наполнен водой несколькими насосами разной производительности, которые включались в работу один за другим через равные промежутки времени. Первый насос перекачал воды на V больше последнего. Если промежутки времени между включениями насосов уменьшить втрое, то время наполнения бассейна уменьшится на 10%. Какой объем воды перекачает каждый насос при наполнении бассейна, если одновременно включить все насосы?”

3. Определяющей человеческую деятельность характеристикой является ее целенаправленность. Цель деятельности, точнее, действий, входящих в нее, есть ее интегрирующее и направляющее начало. В общеметодологическом плане цель характеризует предвосхищение в мышлении результата деятельности и ее реализации с помощью определенных средств. Так, например, если школьник решает сюжетную задачу для того, чтобы узнать что-то новое, понять, уяснить себе то, о чем в ней говорится, то такой процесс может быть назван в строгом смысле этого слова деятельностью. Она направлена на содержание задачи и процесс ее решения. Именно содержание задачи в данном случае выступает внутренним мотивом этой деятельности. Если же школьник решает задачу только для того, чтобы выполнить домашнюю работу, например, то

предмет этого процесса — содержание задачи и его мотив — “выполнить домашнее задание” не совпадают. Такой процесс “может характеризоваться только как совокупность действий”, [2].

Таким образом, когда непосредственная цель действия (его предмет), например содержательный ответ ученика на вопросы учителя, совпадает с мотивом, с потребностью самого ученика поделиться своей мыслью с учителем (а учитель сможет удовлетворить эту потребность), то это действие ответа перерождается в деятельность развернутого личностно-значимого, мотивированного высказывания. Это именно те условия, которые служат наилучшей предпосылкой отработки этого действия, и в процессе решения сюжетных задач формирования деятельности по решению задач.

Так как знания и умения формируются в процессе прямого или косвенного управления, то это накладывает определенные методические требования к заданиям, как средству прямого управления деятельностью учащихся по решению задач:

- задание должно быть направлено не только на результат, но отражать варианты выполнения задания обучаемыми (решить одним или несколькими методами одну и ту же задачу, составить одну или несколько сюжетных задач, для группы задач определить способ их решения, найти ошибку в предлагаемом решении задачи и т.д.);
- каждое последующее задание должно явно или неявно включать знания, полученные школьниками при выполнении предыдущих заданий;
- серии заданий, соответствующих каждому из этапов процесса решения сюжетной задачи, должны быть ориентированы на индивидуальные особенности работы обучаемых (темп, внимание, интерес, способности и т.п.), что позволит выявить и преодолеть стереотипы учебного опыта школьников при поиске способа решения знакомого им типа задач и развить интерес к решению данного вида задач.

4. При организации личностно ориентированного подхода при обучении математике учащиеся, как субъекты собственного развития, анализируют свой процесс учебно-познавательной деятельности, обогащают себя приобретенным опытом и т.д. Следовательно, в процессе обучения решению сюжетных задач требуется специальным образом организовать работу с уже решенной задачей, ведь именно на этом этапе обучения решению задач, когда над учеником не давлеет задание — решить задачу (найти ответ) — происходит осознание процесса решения задачи, а также обобщение задачи и ее решения, выявление возможности переноса приобретенного опыта решения задачи на другую задачу, и, как следствие, формирование общих подходов к процессу решения задач.

Осмысливая собственную образовательную деятельность, ученик обращает внимание как на структуру знаний, так и на саму деятельность, которая ведет его к конкретному результату в процессе познания. Применительно к осознанию содержания деятельности А. Н. Леонтьев разграничивает понятия “актуально осознаваемого” и “лишь оказывающегося” в сознании. Для анализа этой особенности любой деятельности, и учебной деятельности в частности, существенно положение, что актуально осознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной активности субъекта, т.е. занимает структурное место непосредственной цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности. Например, ученик младших классов по уровню своего развития не всегда может рефлексировать и актуально осознавать содержание учебного предмета как цель своей деятельности. Значит, одна из задач учителя — создание условий постепенного формирования у школьника такой цели.

Организуя рефлексивно-оценочную деятельность учащихся в процессе обучения решению сюжетных задач, мы условно выделяем следующие виды работы с решенной задачей:

- анализ своего решения по отношению к другим решениям;

- анализ собственного решения (без посторонней помощи): бывает полезно, чтобы каждый подумал о своем учебном опыте и сделал выводы (это может быть самоконтроль, поиск ошибки в своем решении и др.);
- анализ собственных действий на каждом этапе работы с задачей, включая анализ условия, поиск решения, само решение;
- анализ собственного развития: ученикам предлагается проанализировать свою деятельность в аспекте своего личностного развития.

Например, письменный анализ учебной деятельности в процессе решения сюжетных задач может включать ответы на следующие вопросы:

- В чем причины твоих неудач при решении сюжетных задач (если они имеются)?
- Какие задачи ты хотел бы научиться решать?
- Развитию каких твоих личностных качеств помогло решение данных сюжетных задач (задачи)?

На данные вопросы учащиеся (из анкет учащихся) чаще всего отвечают, что они не любят решать сюжетные задачи, так как они не интересны, очень много приходится писать по ходу их решения, и просто потому, что они не умеют их решать.

5. Включение в учебный процесс по решению сюжетных задач метапредметного (от греч. "мета" — то, что стоит "за") содержания. Именно метапредметное содержание определяет системообразующую основу общего образования, как по вертикали, на уровне отдельных ступеней обучения, так и по горизонтали, на уровне межпредметных связей. Исходя из этого, включение в процесс обучения решению сюжетных задач метапредметного содержания, представляет собой многофункциональный и универсальный по своему характеру и степени применимости процесс, он является надпредметным и междисциплинарным. Например, такая задача: "Предложите способ нахождения центра тяжести а) треугольника; б) параллелограмма; в) произвольного выпуклого четырехугольника; г) выпуклого многоугольника. Решите задачу а) математическими; б) физическими методами".

Чтобы обеспечить механизм саморазвития каждому ученику как уникальной, неповторимой индивидуальности, учитель "должен выявить его личностные (познавательные) особенности, дать им развиться, устояться, устойчиво проявиться" [4, с.21]. При этом, педагог должен опираться на позитивные стороны индивидуального развития, не "подгоняя" его к типовому варианту, и направлять свои усилия как на преодоление трудностей в работе ученика, так и на поощрение его достоинств: стремление усовершенствовать, найти оптимальный вариант решения; преодолевать ситуацию неопределенности, риска и т.п. В этих условиях "учитель выступает не только как носитель, транслятор социокультурных образцов, но и прежде всего как фасилитатор, координатор усилий самих учеников", [4, с. 22]. Это требует от него особой открытости по отношению к детям, уважительного отношения к ним, стремления не подавлять их своим авторитетом, а прислушиваться к их желаниям, познавательным потребностям, учебным интересам. Таким образом, можно выделить следующие (основные) педагогические условия: ученик — субъект обучения; при отборе содержания обучения целесообразно ориентироваться на индивидуальные возможности и особенности ученика (по возможности, определять индивидуальную траекторию обучения школьника); а также в качестве ведущей технологии обучения должна стать технология сотрудничества.

Литература

1. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход.- М., 1991.
2. Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения.- М., 1983.-Т.1,2.
3. Примерные программы основного общего образования. Математика.- М., 2009.

4. Психолого-педагогические условия становления индивидуальных стратегий обучения школьников /Под научн. ред. И. С. Якиманской.- М., 2007.

5. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии.- М., 1973.

6. Тихомиров В. О значении математики и целях математического образования //Математика. Приложение ИД "Первое сентября".- М., 2007, №4.-с.2-6.

7. Фефилова Е.Ф. Теория и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач: Учебное пособие.- Архангельск: Поморский университет, 2004.

8. Хуторской А.В. Современная дидактика. Учебное пособие. 2-е изд., перераб. - М.: 2007.

9. Школа -2100 /Под ред. А. А. Леонтьева. Вып. 3.- М., 1999.

Сведения об авторах

Агаян Галина Михайловна, старший научный сотрудник факультета государственного управления МГУ им. М. В. Ломоносова, кандидат физ.-мат. наук.

Email: agagal@rambler.ru

Алексеев Дмитрий Владимирович, старший научный сотрудник лаборатории ПТК механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, доцент кафедры математики СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: dvalex@rambler.ru

Виноградов Олег Павлович, профессор кафедры Теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, заведующий кафедрой математики СУНЦ МГУ им. М. В. Ломоносова, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: ovinogradov@mail.ru

Воказе Кульдрайхан Есетаевна, старший преподаватель кафедры высшей математики и методики математики Евразийского Национального Университете им. Л. Н. Гумилева.

E-mail: vokaze61@mail.ru

Воронина Галина Валерьевна, ассистент кафедры математики Орловского государственного аграрного университета.

E-mail: VoroninAG@yandex.ru

Галламов Мансур Муллагаянович, доцент кафедры элементарной математики МПГУ, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: gallamov@gmail.com

Горбачева Нина Александровна, учитель математики ГОУ Центр образования "Технологии обучения", г. Москва.

E-mail: gorbacheva@i.home-edu.ru

Горин Евгений Алексеевич, профессор Московского педагогического государственного университета, доктор физ.-мат. наук.

E-mail: evgeny.gorin@mtu-net.ru

Жайнибекова Мехрибану Абдысадыковна, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики Евразийского Национального Университете им. Л. Н. Гумилева, кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: vokaze61@mail.ru

Зорина Татьяна Александровна, учитель информатики и информационных технологий ГОУ Центр образования "Технологии обучения", г. Москва.

E-mail: zorina@i.home-edu.ru

Казарихина Татьяна Николаевна, старший преподаватель Московского Педагогического Государственного Университета (МПГУ).

E-mail: tn_k@hotbox.ru

Кузнецова Татьяна Ивановна, доцент кафедры естественных наук Центра международного образования МГУ имени М. В. Ломоносова, доктор пед. наук.
E-mail: KUZ@topgen.net

Посицельская Любовь Наумовна, профессор кафедры высшей математики Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), заместитель директора ГОУ Центр образования "Технологии обучения", г. Москва, кандидат физ.-мат. наук.
E-mail: posicelskaja@i.home-edu.ru

Пунтус Артур Агафонович, профессор кафедры "Дифференциальные уравнения" факультета "Прикладная математика и физика" Московского авиационного института (государственного технического университета), председатель Совета по НИРС факультета, кандидат физ.-мат. наук, член Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ.
E-mail: artpuntus@yandex.ru

Пыркова Ольга Анатольевна, доцент Московского физико-технического института (государственного университета), кандидат физ.-мат. наук.
E-mail: omukha@mail.ru

Розанова Светлана Алексеевна, профессор кафедры высшей математики Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета), доктор пед. наук.
E-mail: srozanova@mail.ru

Розов Николай Христович, декан факультета педагогического образования МГУ имени М. В. Ломоносова, заведующий кафедрой образовательных технологий, профессор механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, доктор физ.-мат. наук, Член-корреспондент Российской Академии Образования (РАО), Заслуженный профессор МГУ, Заслуженный работник высшей школы РФ.
E-mail: nicolas_rozov@mail.ru

Сергеева Татьяна Владиславовна, учитель математики МОУ СОШ №58 с углубленным изучением предметов естественно-математического цикла (г. Ярославль), аспирантка кафедры общей математики ЯрГУ им. П.Г.Демидова.
E-mail: tsergeeva1968@yandex.ru

Фефилова Елена Федоровна, декан факультета повышения квалификации ГОУ ВПО "Поморский государственный университет имени М. В. Ломоносова", доцент, кандидат пед. наук, Почетный работник высшего профессионального образования.
E-mail: fefilova.helen@mail.ru

Шикин Евгений Викторович, профессор факультета государственного управления МГУ имени М. В. Ломоносова, заведующий кафедрой, доктор физ.-мат. наук, Заслуженный профессор МГУ, Заслуженный работник высшей школы.
E-mail: shikin@spa.msu.ru

Шикина Гузель Евгеньевна, доцент факультета государственного управления МГУ имени М. В. Ломоносова, кандидат физ.-мат. наук.
Email: guzel.shikina@mail.ru

Теория одного класса Пуассоновских процессов. Подход к определению временных характеристик (продолжение)

П. Г. Лахманов

В предыдущей статье [1], "Математическое образование", №3(51), 2009 г., было начато рассмотрение одного класса (дискретно непрерывного) Пуассоновских процессов. Выведено основное уравнение для процесса и получено решение этого уравнения в виде так называемого ряда Эджворта.

Знание выведенной в работе [1] функции распределения выходного сигнала $g(z\delta)$ или $w(x)$ (или $w(x,t)$) не решает всех вопросов, связанных с временными характеристиками рассматриваемого процесса. Это объясняется тем, что возможны пересечения одного и того же уровня (порога) как снизу вверх («срабатывание»), так и сверху вниз («отпускание»).

Поэтому принципиально новым обстоятельством здесь является статистика срабатываний (отпусканий). Для построения такой статистики необходимо ввести в рассмотрение ряд новых функций.

Сначала определим функцию $w_0(x_1,x,t)$ «, физический» (и естественно вероятностный) смысл которой следующий: $w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x$ — вероятность того, что в момент времени t «выходной сигнал» имеет значения от x до $x+\,\mathrm{d}x$ и не пересекал до этого времени пороговое значение x_1.

При выводе уравнения для $w_0(x_1,x,t)$ в диапазоне $0 \div x_1$, может быть использован тот же подход, который применялся при выводе основного уравнения [1]. Не повторяя всех выкладок запишем сразу уравнение переноса вероятности (основное уравнение [1]) для $w_0(x_1,x,t)$.

$$\frac{\partial w_0(x_1,x,t)}{\partial t} = nw_0(x_1,x-1,t) - nw_0(x_1,x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\tau}w_0(x_1,x,t)\right). \tag{1}$$

Предположив, что в момент времени $t=0$ произошло скачкообразное изменение средней частоты следования импульсов от 0 до n, получим начальное условие

$$w_0(x_1,x,0) = \delta(x). \tag{2}$$

Рассмотрим систему, принимающую в момент времени $t+\,\mathrm{d}t$ значение выходного сигнала x_1, и сигнал не пересекал до этого уровень x_1.

Очевидно что в этом состоянии система может оказаться только в результате прихода импульса в диапазоне времени от t до $t+\,\mathrm{d}t$ т. е.

$$w_0(x_1,x_1,t+\,\mathrm{d}t) = w_0(x_1,x_1-1,t)n\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

и следовательно $w_0(x_1,x_1,t)=0$. Из определения $w_0(x_1,x,t)$ следует также

$$w_0(\infty,x,t) = w(x,t), \qquad w_0(x_1,x,\infty) = 0. \tag{4}$$

Напомним, что областью определения $w_0(x_1,x,t)$ фактически является только диапазон $0 \le x < x_1$ ($w_0(x_1,x,t) \equiv 0$ при $x \ge x_1$).

Введенная функция $w_0(x_1,x,t)$ позволяет определить основные временные (пороговые) характеристики процесса: быстродействие (среднее время первого пересечения порога — «срабатывание»), дисперсию среднего времени срабатывания, более высокие временные моменты распределения срабатываний, статистическую надежность и т. д.

Действительно, вероятность того, что первое срабатывание произошло за время от t до $t+\mathrm{d}t$, равна:

$$\int\limits_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,n\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

а так как срабатывание когда-нибудь произойдет, то:

$$\int\limits_0^\infty n \int\limits_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{(нормировка)}. \tag{6}$$

Быстродействие (среднее время первого срабатывания) и его дисперсия запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered} \bar{t} = \int\limits_0^\infty nt \int\limits_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ D_{\bar{t}} = \int\limits_0^\infty (t-\bar{t})^2 n \int\limits_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{gathered} \tag{7}$$

Для распределения срабатываний имеем.

$$P(x_1,t) = n \int\limits_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Статистическая надежность, т. е. в данном случае вероятность того, что порог x_1 не будет достигнут, равна

$$Q(x_1,t) = n \int\limits_0^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

$P(x_1,t)$ и $Q(x_1,t)$ связаны вполне естественным соотношением:

$$\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial t} = -P(x_1,t). \tag{10}$$

Последнее соотношение следует также из основного уравнения (1).

Для рассмотрения случая повторных пересечений порога x («снизу-вверх») введем в рассмотрение ещё группу функций $w_i(x_1,x,t)$ $(i = 1,2,3,\ldots)$, определяемых следующим образом: $w_i(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x$ — вероятность того, что «выходной сигнал» в момент времени t имеет значение от x до $x+\mathrm{d}x$, пересекая до этого порог x_1 i раз.

При выводе уравнений для $w_i(x_1,x,t)$ опять же, как и для $w_0(x_1,x,t)$ может быть использован тот же самый подход, который применялся при выводе уравнения для $w(x,t)$ [1]. Здесь, однако, имеет место один нюанс в послепороговой области $x_1 \le x < x_1+1$. В ней разностный член (функция источника) запишется в виде $nw_{i-1}(x_1,x-1,t)$, так как попадание в интервал $[x_1,x_1+1)$ за счет единичного скачка может произойти только из области, где было $i-1$ пересечений порога.

Таким образом, для $w_i(x_1,x,t)$ задача будет выглядеть так (уравнение переноса вероятности для $w_i(x_1,x,t)$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_i(x_1,x,t)}{\partial t} =& n w_i(x_1,x-1,t) - n w_i(x_1,x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\tau} w_i(x_1,x,t)\right),\\
&\text{для } 0 \le x < x_1,\ x_1+1 \le x < \infty,\\
\frac{\partial w_i(x_1,x,t)}{\partial t} =& n w_{i-1}(x_1,x-1,t) - n w_i(x_1,x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\tau} w_i(x_1,x,t)\right),\\
&\text{для } x_1 \le x < x_1,\ i = 1,2,3\ldots
\end{aligned} \tag{11}$$

Из определения $w_i(x_1,x,t)$ должны выполняться след начальные и краевые условия

$$\begin{aligned}
&w_i(x_1,x,0) = 0, \quad w_i(x_1,x,\infty) = 0,\\
&w_i(\infty,x,t) = 0, \quad w_i(x_1,0,t) = 0,\\
&w_i(x_1,\infty,t) = 0, \quad i = 1,2,3,\ldots
\end{aligned} \tag{12}$$

Совершенно очевидно также, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_i(x_1,x,t) = w(x,t). \tag{13}$$

Просуммировав уравнения задач для $w_i(x_1,x,t)$ $(i = 0,1,2,3,\ldots)$ получим основное уравнение для $w(x,t)$ [1].

Ещё должны выполняться следующие соотношения

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} w_i(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} w(x,t)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{(нормировка)}$$

и как следствие

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} w_i(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\right) = 0. \tag{14}$$

Значение всей совокупности функций $w_i(x_1,x,t)$ дает ответ на вопрос о вероятности к срабатываний за время t (статистика срабатываний). В самом деле,

$$\int_0^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x$$

— вероятность того ,что за время t не произойдет ни одного срабатывания (статистическая надежность);

$$n \int_0^{t} \int_{x_1-1}^{x_1} w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

— вероятность того, что за время t произойдет хотя бы одно срабатывание;

$$n \int_0^{t} \int_{x_1-1}^{x_1} w_1(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

— вероятность строго двух срабатываний за время t и т. д. Следовательно:

$$n \int_0^{t} \left(\int_{x_1-1}^{x_1} \left[w_0(x_1,x,t) - w_1(x_1,x,t)\right]\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t$$

— вероятность строго одного срабатываний за время t;

$$n\int\limits_0^t\left(\int\limits_{x_1-1}^{x_1}[w_0(x_1,x,t)-w_2(x_1,x,t)]\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t$$

— вероятность строго двух срабатываний за время t;

. . . .

$$n\int\limits_0^t\left(\int\limits_{x_1-1}^{x_1}[w_0(x_1,x,t)-w_k(x_1,x,t)]\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t$$

— вероятность строго k срабатываний за время t.

Для $w_i(x_1,x,t)$ справедливы ещё следующие соотношения:

$$n\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{x_1-1}^{x_1}w_i(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t=1$$

— когда-нибудь произойдет по крайней мере i срабатываний;

$$n\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{x_1-1}^{x_1}[w_0(x_1,x,t)-w_k(x_1,x,t)]\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t=0$$

— вероятность строго k срабатываний при $t\to\infty$ стремится к 0.

Кроме того, могут быть определены все временные характеристики многократных срабатываний, такие как, например:

$$R(x_1,t)=n\int\limits_{x_1-1}^{x_1}w_k(x_1,x,t)\,\mathrm{d}x$$

— функция распределения k срабатываний.

С введением функций $w(x,t)$ ($w(z,t)$ или $g(z,\delta)$) и $w_i(x_1,x,t)$ полностью формализована постановка задачи по определению вероятностных и временных характеристик рассматриваемого Пуассоновского процесса. Теперь приступим к их определению. Вероятностные параметры, связанные с $w(x,t)$, достаточно известны и подробно изложены в работах [1, 2].

Гораздо менее изучены временные характеристики, связанные с $w_i(x_1,x,t)$.

Разберем методы аналитического решения уравнений с $w_0(x_1,x,t)$.

Одним из основных приемов явилось введение временных моментов функции $w_0(x_1,x,t)$, определяемых как

$$\beta_k(x_1,x)=\int\limits_0^\infty t^k w_0(x_1,x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{15}$$

В этом случае имеем после интегрирования уравнения (1), умноженного на t^k, от 0 до ∞ цепь уравнений:

$$
\begin{aligned}
&-\delta = n\beta_0(x_1, x-1) - n\beta_0(x_1, x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\beta_0(x_1, x)\right);\\
&-\beta_0 = n\beta_1(x_1, x-1) - n\beta_1(x_1, x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\beta_1(x_1, x)\right);\\
&-2\beta_1 = n\beta_2(x_1, x-1) - n\beta_2(x_1, x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\beta_2(x_1, x)\right);\\
&-3\beta_2 = n\beta_3(x_1, x-1) - n\beta_3(x_1, x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\beta_3(x_1, x)\right);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&-k\beta_{k-1} = n\beta_k(x_1, x-1) - n\beta_k(x_1, x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}\beta_k(x_1, x)\right);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Проинтегрировав цепь рекуррентных уравнений (16) по x от 0 до x, получим

$$
\begin{aligned}
&n\int\limits_{x-1}^{x}\beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{\tau}\beta_0(x_1, x) = 1;\\
&n\int\limits_{x-1}^{x}\beta_1(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{\tau}\beta_1(x_1, x) = \int\limits_{0}^{x}\beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x;\\
&n\int\limits_{x-1}^{x}\beta_2(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{\tau}\beta_2(x_1, x) = 2\int\limits_{0}^{x}\beta_1(x_1, x)\,\mathrm{d}x;\\
&n\int\limits_{x-1}^{x}\beta_3(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{\tau}\beta_3(x_1, x) = 3\int\limits_{0}^{x}\beta_2(x_1, x)\,\mathrm{d}x;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n\int\limits_{x-1}^{x}\beta_k(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{\tau}\beta_k(x_1, x) = \int\limits_{0}^{x}\beta_{k-1}(x_1, x)\,\mathrm{d}x;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Одним из способов решения уравнений (16) и (17) явился метод последовательных приближений, основанный на разложении в ряд Тейлора интегрального члена $\int\limits_{x-1}^{x}\beta_k(x_1, x)\,\mathrm{d}x$ [3]:

$$
\int\limits_{x-1}^{x}\beta_k(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \beta_k(x_1, x) - \frac{1}{2}\beta_k'(x_1, x) + \frac{1}{6}\beta_k''(x_1, x) - \cdots \tag{18}
$$

I приближение

$$
\int\limits_{x-1}^{x}\beta_k(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \beta_k(x_1, x). \tag{19}
$$

Для первого из уравнений (17) имеем:

$$
n\beta_0(x_1, x) - \frac{x}{\tau}\beta_0(x_1, x) = 1 \quad \text{и} \quad \beta_0 = \frac{1}{n - x/\tau}. \tag{20}
$$

Для среднего времени первого пересечения порога (срабатывание) получим в соответствии с (7)

$$\bar{t} = n \int\limits_{x_1-1}^{x_1} \left(\int\limits_0^\infty t w_0(x_1, x, t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = n \int\limits_{x_1-1}^{x_1} \beta_1(x_1, x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} \beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_{-1/\delta}^{z_1} \frac{\tau}{z}\,\mathrm{d}z = -\tau \ln |z_1 \delta|, \quad (21)$$

где

$$z = \frac{x - n\tau}{\sqrt{n\tau/2}}.$$

Для второго из уравнений (17) имеем:

$$n\beta_1(x_1, x) - \frac{x}{\tau}\beta_1(x_1, x) = \int\limits_0^x \beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x$$

и для дисперсии среднего времени срабатывания в соответствии с (7) и третьим из уравнений (17)

$$D_{\bar{t}} = \sigma_{\bar{t}}^2 = 2 \int\limits_0^{x_1} \beta_1(x_1, x)\,\mathrm{d}x - \left(\int\limits_0^{x_1} \beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x \right)^2 = 0. \quad (22)$$

Как видно из полученных результатов, для быстродействия и дисперсии времени срабатывания первое приближение соответствует случаю регулярного (генераторного) входного сигнала или идеальной статистики ($D_{\bar{t}} = 0$ и $\bar{t} \to \infty$ при $z_1 \to 0$).

II приближение

$$\int\limits_{x-1}^{x} \beta_k(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \beta_k(x_1, x) - \frac{\beta_k'(x_1, x)}{2}. \quad (23)$$

Для первого из уравнений цепи (17) имеем

$$(\beta_0)_z' + z\beta_0 + \tau = 0, \qquad z = \frac{x - n\tau}{\sqrt{n\tau/2}}. \quad (24)$$

Решая это уравнение с учетом того, что $\beta_0(z_1, z) = 0$ получаем

$$\beta_0(z_1, z) = \tau e^{-z^2/2} \int\limits_z^{z_1} e^{z^2/2}\,\mathrm{d}z. \quad (25)$$

Последнее выражение известно под названием интеграла Досона [5].

Для среднего времени срабатывания (среднее время первого достижения порога):

$$\bar{t} = \int\limits_0^{x_1} \beta_0(x_1, x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1/\delta}^{z_1} \beta_0(z_1, z)\,\mathrm{d}z = \tau \int\limits_{-1/\delta}^{z_1} \left(e^{-z^2/2} \int\limits_z^{z_1} e^{z^2/2}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}z, \quad (26)$$

где $\delta = 1/\sqrt{2n\tau}$, а $z = -1/\delta$ соответствует $x = 0$ и т. д. для последующих уравнений цепи.

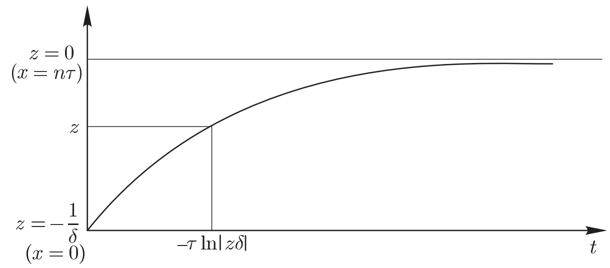


Рис. 1. График среднего значения процесса как функции времени

В качестве примера рассмотрим расчет среднего времени срабатывания для случая «идеальной» статистики ($\delta = 0$) и порога, соответствующего предельному значению средней реализации процесса ($z = 0$). В соответствии с (26)

$$\bar{t} = \tau \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} \left(\int\limits_{z}^{0} e^{z^2/2}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \tau \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} \left(\int\limits_{z}^{0} \left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{z^2}{2}\right)^n + \cdots \right)\right) \mathrm{d}z =$$

$$= \tau \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} \left(z + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \frac{z^5}{2!2^2\cdot 5} + \frac{z^7}{2}3!2^3\cdot 7 + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{n!2^n(2n+1)} + \cdots \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \tau \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{2n+1}}{n!2^n(2n+1)}, \quad (27)$$

где

$$I_{2n+1} = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = 2^n \cdot n!.$$

С учетом последнего выражения

$$\bar{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \tau \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots \right) \to \infty,$$

что соответствует асимптотическому приближению «средней линии» к предельному значению (см. рис. 1).

Более подробный анализ результатов I и II приближений представлен в работах [3, 4]. Там же приведены результаты экспериментальной проверки полученных результатов.

Для получения более точных значений временных характеристик можно обращаться к приближениям более высокого порядка, чем второй.

Подчеркнем то обстоятельство, что переход от первого приближения ко второму является переходом от регулярного сигнала к нерегулярному. Переход же от второго приближения к третьему и приближениям более высокого порядка означает лишь только повышение точности и связан со значительными математическими трудностями (решение дифференциальных уравнений высших порядков, не всегда решаемых в квадратурах).

В связи с этим подобный путь повышения точности был признан нецелесообразным.

Следует также отметить, что метод последовательных приближений, представляя определенный интерес, тем не менее, явился своего рода побочной линией во всем теоретическом построении. Явной доминантой здесь следует считать, как уже отмечалось выше [1], метод интегральных характеристик — моментов (и ряда других) выходного сигнала и временных. Так, через моменты выходного сигнала удалось построить решение основного уравнения в виде ряда Эджворта [1]. Метод интегральных характеристик стал основным приемом и для точного нахождения временных характеристик.

В связи с вышеизложенным рассмотрим ещё один способ решения основного уравнения —

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = nw(x-1,t) - nw(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\tau}w(x,t)\right) \quad \text{— общий случай}$$

и

$$nw(x-1) - nw(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{\tau}w(x)\right) = 0 \quad \text{— стационарный режим при } t \to \infty. \tag{28}$$

Или

$$\frac{w(z-2\delta)}{2\delta} - \frac{w(z)}{2\delta} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z\delta+1)w(z)] = 0$$

— через интегральное преобразование Лапласа.

Использование преобразования Лапласа позволяет перейти в данном случае от разностного уравнения к неразностному и решить его непосредственно. Применив к уравнению (28) для стационарного режима работы преобразование Лапласа, имеем:

$$ne^{-p}F(p) - nF(p) - \frac{p}{\tau}\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = 0, \qquad F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px}w(x)\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Решая уравнение (29), находим

$$F(p) = e^{n\tau\int_0^p \frac{e^{-p}-1}{p}\,\mathrm{d}p}, \tag{30}$$

$F(0) = \int\limits_0^\infty w(x)\,\mathrm{d}x = 1$ — условие нормировки,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^k F(p)}{\mathrm{d}p^k}\right)_{p=0} = (-1)^k \alpha_k^x.$$

Таким образом, $F(p)$ является производящей функцией моментов.

Основное уравнение (28) в единицах z для стационарного режима, подвергнутое двустороннему преобразованию Лапласа, выглядит следующим образом:

$$\frac{e^{-2\delta p}F(p) - F(p)}{2\delta} + pF(p) - p\delta\frac{\mathrm{d}F(p)}{\mathrm{d}p} = 0, \quad F(p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-pz}w(z)\,\mathrm{d}z. \tag{31}$$

Решая уравнение (31), находим

$$F(p) = e^{\frac{1}{\delta}\int\limits_0^p\left(1+\frac{e^{-2\delta\rho}-1}{2\delta\rho}\right)\mathrm{d}\rho}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^k F(p)}{\mathrm{d}p^k}\right|_{p=0} = (-1)^k\alpha_k^z, \tag{32}$$

$F(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(z)\,\mathrm{d}z = 1$ — условие нормировки. Выполняя обратное преобразование Лапласа, имеем для $w(x)$ и $w(z)$ компактный вид:

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{1/(2\delta^2)\int\limits_0^p\frac{e^{-\rho}-1}{\rho}\,\mathrm{d}\rho}\cdot e^{px}\,\mathrm{d}p, \\ w(z)&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{1/\delta\int\limits_0^p\left(1+\frac{e^{-2\delta\rho}-1}{2\delta\rho}\right)\mathrm{d}\rho}\cdot e^{pz}\,\mathrm{d}p. \end{aligned} \tag{33}$$

Можно показать, что последнее выражение приводится к ряду Эджворта. Для этого представим изображение $F(p)$ в следующем виде:

$$F(p,\delta) = e^{1/\delta \int\limits_0^p \left(1+\frac{e^{-2\delta\rho}-1}{2\delta\rho}\right) \mathrm{d}\rho} = e^{\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{n-1}}{n\cdot n!}\delta^{n-2}p^n};$$

$$F(p,\delta) = F(p,0) + \frac{\mathrm{d}F(p,0)}{\mathrm{d}\delta}\delta + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F(p,0)}{\mathrm{d}\delta^2}\delta^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^nF(p,0)}{\mathrm{d}\delta^n}\delta^n + \cdots = \tag{34}$$

$$= e^{p^2/2} - \frac{2^2p^3}{3\cdot 3!}e^{p^2/2}\delta + \frac{2^3p^4}{4\cdot 4!}e^{p^2/2}\delta^2 - \cdots = e^{p^2/2}\left(1+\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}p^n}{n\cdot n!}\delta^{n-2}\right).$$

После обратного преобразования Лапласа для $F(p,\delta)$ имеем ряд Эджворта для стационарного режима работы:

$$w(z) = g(z,\delta) = \varphi(z) - \frac{2}{9}\varphi^{(3)}(z)\delta + \left(\frac{1}{12}\varphi^{(4)}(z) + \frac{2}{81}\varphi^{(6)}(z)\right)\delta^2 - \\ - \left(\frac{2}{75}\varphi^{(5)}(z) + \frac{1}{54}\varphi^{(7)}(z) + \frac{4}{2187}\varphi^{(9)}(z)\right)\delta^3 + \cdots, \tag{35}$$

где $\varphi(z) = 1/\sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}$.

Для получения временных характеристик подвергнем преобразованию Лапласа первое из уравнений цепи (16), имеем:

$$ne^{-p}\Phi_0(x_1,p) - n\Phi_0(x_1,p) - \frac{p}{\tau}\frac{\mathrm{d}\Phi(x_1,p)}{\mathrm{d}p} = -1, \quad \Phi_0(x_1,p) = \int\limits_0^\infty \beta_0(x_1,x)e^{-px}\,\mathrm{d}x$$

или

$$\frac{e^{-2\delta p}\Phi_0(z_1,p) - \Phi_0(z_1,p)}{2\delta} + p\Phi_0(z_1,p) - p\delta\frac{\mathrm{d}\Phi_0(z_1,p)}{\mathrm{d}p} = -2\delta^2\tau = -\frac{1}{n} \\ \Phi_0(z_1,p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\beta_0(z_1,z)e^{-pz}\,\mathrm{d}z. \tag{36}$$

Отметим, что при нулевой правой части уравнения мы имели бы опять изображение основного уравнения.

Решая последнее уравнение стандартным методом Бернулли, получаем:

$$\Phi_0(z_1,p) = F(p)\left(\frac{1}{n\delta}\int\frac{\mathrm{d}p}{pF(p)} + C\right), \tag{37}$$

где $F(p)$ — изображение ряда Эджворта (32).

Выполняя обратное преобразование Лапласа и используя граничное условие $\beta_0(z_1,z_1) = 0$, находим константу C и устанавливаем окончательный вид временного момента $\beta_0(z_1,z)$, через который находим среднее время первого срабатывания (7).

Аналогично находятся последующие временные моменты из (16), а вместе с ними и все временные характеристики рассматриваемого случайного процесса.

Литература

[1] Лахманов П.Г.«Теория одного класса Пуассоновских процессов», Математическое образование № 3(51), стр. 39–45, июль-сентябрь 2009 г.

[2] Крейндлин И. И., Лахманов П. Г., Скобло Ю. А., Терентьев В. П. «К расчету функции распределения выходного сигнала интегратора аналоговых радиационных релейных приборов», ВАНТ, серия Радиационная техника, 1984 г., вып. 2(28), с. 14–20.

[3] Крейндлин И. И., Лахманов П. Г., Скобло Ю. А., Терентьев В. П. «Расчет времени срабатывания аналоговых радиоизотопных релейных приборов», ВАНТ, серия Радиационная техника, 1984 г., вып. 2(28), с. 3–14

[4] Лахманов П. Г., Скобло Ю. А., «Измерение временных характеристик аналоговых радиационных релейных приборов», ВАНТ, серия Радиационная техника. 1985 г., вып. 1(29), с. 23–26

[5] Справочник по специальным функциям, Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979 г.

Лахманов Петр Георгиевич
доцент кафедры высшей математики
Московского государственного
вечернего металлургического института
кандидат технических наук.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров 1-4 за 2010 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2010 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экз. соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >