ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год четырнадцатый

№ 3-4 (55-56)

июль – декабрь 2010 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3-4 (55-56), июль – декабрь 2010 г.

Содержание

Применение компьютеров в математике

Э. Т. Аванесов

Развитие исследований по применению компьютеров в математике, в частности, по теории чисел представляет собой важную и актуальную задачу.

Эра приложений компьютеров в исследовании различных вопросов высшей арифметики составляет 50-60 лет, и постоянное совершенствование широкомасштабного использования компьютеров оказало глубокое влияние на все области теории чисел.

Во многом это объясняется тем, что

1) теория чисел имеет дело с дискретными объектами,

2) многие специалисты по теории чисел осознают, в некотором смысле слова, эту ветвь математики как экспериментальную науку и

3) сами экспериментальные исследования осуществляются достаточно легко.

Не следует забывать, что и само существование компьютеров дает психологическую уверенность исследователю при анализе и решении трудных задач.

Кроме того, нужно заметить, что многие проблемы теории чисел оказываются разрешенными благодаря

1) мощному развитию электронно-вычислительной техники,

2) совершенствованию искусства программирования,

3) построению и развитию языков программирования высокого уровня.

Обычный предварительный подход к рассмотрению теоретико-числовой проблемы предполагает вычисление обширных таблиц, относящихся к самой задаче. Такое непосредственное построение грандиозного числа конкретных фактов практически немыслимо для исследователя, не вооруженного компьютером, но оно, в сочетании с сопутствующей тщательной статистической обработкой полученного информационного массива, может привести к идее некоторого предполагаемого доказательства.

Итак, в тех случаях, когда необходимы обширные и утомительные вычисления, быстродействие и мощность современных компьютеров создают предпосылки создания такой программы, которая может на основе полученных расчетов показать (дать идею), как перейти к доказательству некоторого гипотетического факта.

Разумеется, и сами таблицы в ряде случаев порождают новые идеи, и проблемное решение их приводит к необходимости составления новых алгоритмов, а это неизбежным образом ведет к новым расчетам-таблицам и т.д.

Такая зависимость 1) таблиц, 2) идей и гипотез и 3) алгоритмов указана еще Шенксом, и ясно, что накопление информационных знаний в любом из указанных пунктов естественным образом влечет к соответствующему увеличению в других пунктах тезиса Шенкса.

Очевидно, такая схема — не единственный путь помощи компьютера специалисту по теории чисел. Существует, например, ряд задач, формулируемых для определения факта существования (или несуществования) математического объекта с заданными свойствами или отсутствия специальных свойств некоторого объекта.

Поставленная цель достигается построением контрпримеров, поиск которых выполняется компьютерами.

Имеются и тонкие пути привлечения компьютера для развития теории чисел.

Отметим чрезвычайно плодотворную (в связи с компьютерами) линию на разработку тестов простоты, а также алгоритмов и методов разложения больших целых чисел и целых чисел специального вида на множители.

Ввиду повышенного интереса к проблемам разложения и большой активности развития исследований в этом направлении приведем краткую характеристику состояния этого вопроса.

Изложим некоторые примеры-аспекты использования компьютеров, иллюстрирующие, как они помогли и могут помочь специалисту по теории чисел (в том числе и по элементарной теории чисел), для которых компьютерный поиск сыграл и играет существенную роль.

Это

I группа

1) построение алгоритма Евклида, НОД и НОК натуральных чисел,

2) линейные и квадратичные сравнения, их решения, квадратичные вычеты,

3) исследование и свойства функции Эйлера и прочих теоретико-числовых функций, их итерации,

4) разложение целых чисел на множители и тесты простоты, в том числе:

- подсчет и поиски больших простых пар близнецов, триплетов и квадруплетов; в настоящее время наибольшими близнецами считается пара чисел $338a + 821$ и $338a + 823$, где

$$a = \Pi_{p_i<300} p_i;$$

- конструкция чисел Кармайкла с k ($k = 3$, $k \geq 13$ и т.д.) множителями, наибольшее содержит 321 цифру;

- числа Серпинского $k \cdot 2^n + 1$;

- простые числа вида

$$\frac{a^n - 1}{a - 1}, \;\; 3 \leq a \leq 12, \;\; 2 \leq n \leq 100 \;\; (n = 10, \; n \leq 2000);$$

характер чисел $k| \pm 1$ и $2 \cdot 3 \cdot ... \cdot p \pm 1$, а также

чисел Фибоначчи F_n и Люка $\mathcal{L}_n$ с индексами $n \leq 385$;

простые числа как значения полинома $n^n + 1$, $n \leq 10^4$;

простые числа в арифметической прогрессии (знаменитая прогрессия $a_n = a_1 + nd$, где $a_1 = 8297644387$ и $d = 4180566390$ при $n = 0, 1, 2, ..., 18$ определяет только простые числа).

5) числа-палиндромы и их разыскание, числа-палиндромы специального вида;

6) натуральные числа, представление их суммами специального вида, распределение цифр популярных чисел $e, \pi, \sqrt{2}$ и т.д.;

7) первообразные корни по простому модулю p;

8) совершенные, недостаточные и избыточные числа, дружественные числа;

9) поиск простых чисел Ферма и Мерсенна;

10) непрерывные дроби и их применение;

11) случайные числа и их генерирование.

II группа

1) разложение простых чисел в числовых и функциональных полях;

2) приводимость полиномов над числовыми полями;

3) обобщенные треугольные и тетраэдральные числа;

4) арифметические свойства линейных рекуррентностей;

5) циклотомия и первый множитель в циклотомических полях;

6) неоднородные минимумы;

7) тройки Штейнера;

8) перечисление совершенных форм;

9) совершенные коды и их существование;

10) поиск тождеств типа Роджерса-Рамануджана;

11) великая теорема Ферма;

12) гипотеза Римана о нулях дзета-функции, характер нулей и критическая прямая, подсчет нулей и линейные соотношения, связывающие мнимые части нулей;

13) диофантовы уравнения, существование решений и построение бесконечной серии их;

14) гипотеза Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$;

15) алгебраическая теория числовых полей n-го порядка;

16) арифметика квадратичных полей;

17) эллиптические и гиперэллиптические кривые, поиск решений;

18) бирациональные преобразования алгебраических кривых;

19) определение группы кручения эллиптических кривых над квадратичными полями;

20) вычисление эллиптических кривых достаточно высокого ранга над полем рациональных чисел;

21) нахождение группы рациональных точек эллиптических кривых в конечных полях;

22) p-адическая арифметика.

Приведенная в заключении нашего обзора библиография частично отражает достижения по указанному комплексу вопросов.

Обзоры проблематики, методов и последних успехов в развитии теоретико-числовых исследований с привлечением компьютеров содержатся в работах [2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 14, 17, 20, 23, 24, 29, 30, 31, 32, 33].

Отметим, что программная реализация и полный расчет для таких элементарно формулируемых задач требуют весьма большого машинного времени.

Так, например, в работе F. Hirzenbruch, The signature theorem reminescences and recreation, Annals of Math. Studies, 1971, v.70, p.1-31 изучена связь топологии с теорией чисел (точнее, с η-функцией и суммами Дедекинда) и приведена одна довольно сложная диофантова задача, которая в частном случае выглядит так:

пусть x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — попарно взаимно простые натуральные числа ≥ 1. Рассмотрим диофантово уравнение

$$45\prod_{i=1}^{5} x_i = 7\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 - 5\left(\sum x_i^2 x_j^2\right)^2.$$

ЗАДАЧА: найти все решения этого уравнения.

Очевидно, исследуемое уравнение элементарным образом можно свести к эквивалентному виду

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^4 + \prod_{i=1}^{5} x_i = 5\sum x_i^2 x_j^2.$$

Легко определяются тривиальные решения

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 1, 1, 2)$$

и их перестановки.

Дон Цагир в Бонне на IBM-7090 нашел новое решение $(2, 7, 19, 47, 59)$, и это единственное нетривиальное решение в целых числах $\leq N = 100$.

О степени сложности проведенных расчетов говорят следующие данные: используя симметричный вид уравнения, всякое возможное решение можно записать в виде неубывающей последовательности 5 чисел. Если N — граница расчета для каждого из неизвестных x_i, то возможному решению взаимно однозначно сопоставим пятизначное число в системе счисления с основанием $g = N$.

Тогда количество M пятерок целых чисел $< N$, которое необходимо подвергнуть испытанию на компьютере, равно

$$M = \varphi(m \cdot N^n) - \varphi(m \cdot N^{n-1}),$$

где, очевидно, $m = 1, n = 5$, N — граница расчета,

$$\varphi(m \cdot g^n) = C_{g+n}^{1+n} - C_{g+n-m}^{1+n} - 1.$$

Полагая границу расчета равной 100 и учитывая что все $x_i \not\equiv 0 \pmod 5$, а значит, $N = 80$, находим:

$$M = 29401920.$$

Если увеличить вдвое границу расчета при условиях: все $x_i \not\equiv 0 \pmod 5$, а количество четных x_i равно 0, 1 или 2, получим:

$$M = 447102396.$$

Особо остановимся на задачах разложения целых чисел на множители и проверки больших чисел на простоту.

Основные методы решения этих задач, ориентированные на компьютеры, и вопросы их наиболее эффективного сочетания привлекают внимание многих исследователей.

В последние годы искусство разложения целых чисел на простые множители существенно продвинулось благодаря мощному развитию компьютерной техники.

Такое развитие осуществлялось, в основном, по двум важнейшим направлениям.

Первое из них определялось тщательным анализом и модификациями существующих теоретических методов и известных алгоритмов, в качестве примера можно привести работу, посвященную классическому методу разложения, основанному на алгоритме непрерывных дробей, предвосхищенном еще Лежандром и развитом Крайчиком и Лемером.

Второй путь обусловлен появлением новых идей и алгоритмов. Искусное и умелое применение всех известных к настоящему времени приемов и конструкций устанавливает в качестве практической верхней границы возможность разложения, с помощью современных компьютеров, целых чисел, имеющих порядка 70 цифр.

1) Первый метод разложения — тривиальное деление, включающее непосредственное деление данного натурального числа N на малые простые числа p. Оно требует $\sim \sqrt{N}$ арифметических действий, и многие остроумные усовершенствования лишь дают те же $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ операций.

2) При поиске делителей N может быть использован и алгоритм Евклида: если разыскиваются простые множители p, $n_1 \le p \le n_2$, то предварительно вычисляется вспомогательное произведение, а затем уже приступают непосредственно к алгоритму Евклида для чисел N и p.

3) Метод Ферма является наряду с тривиальным делением старейшим систематическим методом, и хотя он, вообще говоря, не очень эффективен, однако представляет несомненный практический интерес.

4) Сравнение Лежандра описывается процедурой нахождения нетривиального решения сравнения

$$x^2 = y^2 \pmod N$$

и последующего нахождения общего наибольшего делителя чисел $x - y$ и N алгоритмом Евклида.

5) Метод Эйлера применим лишь к целым числам, представимым формой $a^2 + Db^2$. Для известного тождества Лежандра

$$(x^2 + Dy^2)(u^2 + Dv^2) = \begin{cases} (xu + Dyv)^2 + D(yu - xv)^2 \\ (xu - Dyv)^2 + D(yu + xv)^2 \end{cases}$$

Эйлер доказал обобщение: если N имеет два различных представления $N = a^2 + Db^2$ и $N = c^2 + Dd^2$ при $(bd, N) = 1$, то N есть произведение двух чисел такого же вида.

6) Метод исключения Гаусса лежит в основе многих методов разложения, использующих решето.

   Используемая при этом процедура получения квадратичных вычетов достаточно громоздка, но она может быть заменена конструкцией метода Мориссона-Брильхарта, которая исходит из определения большого числа малых квадратичных вычетов числа N с последующим разложением их на простые множители.

7) Метод Лежандра, опирающийся на непрерывные дроби, лег в основу многих модификаций для разложения.

8) Метод Шенкса, восходящий к Гауссу, малая теорема Ферма и числа Кармайкла, метод Полларда и др.

Для успешной кружковой работы нами предлагаются некоторые специальные проблемы теории чисел, анализ которых осуществляется эффективно в связи с привлечением компьютеров.

Это 1) вопросы распределения цифр в степенях целых чисел, а именно: степени, содержащие полные наборы из 10 (или из 9 значащих) цифр, либо степени, допускающие в систематической записи лишь две различные цифры;

2) задача разыскания натуральных чисел, представимых суммой некоторого целого числа и суммы его цифр (задача Капрекара);

3) изучение итераций различных теоретико-числовых функций, подробный анализ известной проблемы Штейнгауза, эффективно осуществляемый на компьютерах;

4) проблема существования рациональных тетраэдров, то есть тетраэдров, имеющих целые ребра, грани и объем; найдена конструкция, порождающая пятерки рациональных тетраэдров специального вида;

5) анализ чисел Ферма и их обобщений, изучение возможных делителей их приводит к общеизвестным числам Серпинского

и т.д.

Литература

[1] Акушский И.Я., Бурцев В.М. Реализация тестов простоты для для чисел Мерсенна и Ферма // Вестник АН Каз. ССР, 1986, №1, с. 52-59.

[2] Биллевич К.К. Численные методы в задачах теории алгебраических полей n-го порядка / Сев.-Кав. горно-металл. ин-т, Орджоникидзе, 1985, 190 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.10.85, №7174.

[3] Боро В., Цагир Д., Рольфе Ю., Крафт Х., Янцен Е. Живые числа, пять экскурсий – М.: Мир, 1985, 123 с.

[4] Глазунов Н.М. Алгорифмы и программы для исследований в диофантовой геометрии (препринт) / Киев: ИК АН УССР, 1973, №№73-76, 26 с.

[5] Калужнин Л.А., Стогнин А.А., Глазунов Н.М., Сущанский В.И. Вопросы развития алгебраических исследований с привлечением ЭВМ // Кибернетика, 1983, Вып. 2, с. 1-10.

[6] Нивергельт Ю., Фаррар Дж., Рейнголд Э. Машинный подход к решению математических задач - М.: Мир, 1977, 351 с.

[7] Adelman L., Pomerance C., Rumely R. On distinguishing prime numbers from composite numbers // Ann. Math., 1983, V.117, №1, p.173-206.

[8] Brewer D.H. Factorizing large numbers // Indag. Math., 1973, V.35, №5, I, 410-423, II, 424-433.

[9] Cohen H., Lenstra H.W. Primality testing and Jacobi sums // Math. Comput., 1984, V.42, №165, p. 293-300.

[10] Dejmel J., Jones L., Jones M. Finding pluperfect digital invariants: techniques, results and observations // Journ. Recreat. Math., 1981-1982, V.14, p. 87-108.

[11] Dixon J. Factorization and primality tests // Amer. Math. Monthly, 1984, V.91, №5, p. 333-352.

[12] Guy R. Unsolved problems in number theory – Berlin e.a.: Springer, 1981, 156 p.

[13] Huang Ming-Deh A. On a simple primality testing algorithm // Lect. Notes Comput. Sci., 1984, V.174, p. 321-332.

[14] Lehmer D.H. Computer technology applied to the theory of numbers // Math. Assoc. Amer. – Prentis Hall, 1969, p. 117-151.

[15] Lenster H.W. Primality testing algorithms // Lecture Notes in Math., 1981, V.90, p. 243-257.

[16] Miller J. Riemann's hypothesis and test for primality // Comput. and Syst. Sci., 1976, V.13, №3, p. 310-317.

[17] Mordell L.J. On the integer solutions of the equation $ey^2 = ax^3 + bx^z + ex + d$ // Proc. Lond. Math. Soc., 1923, V.21, №6, p. 415-419.

[18] Nagell T. Zur algebraischen Zahlentheorie // Math. Zeitschr., 1932, V.34, p. 183-193.

[19] Pollard J.M. Theorem of factorization and primality testing // Proc. Cambr. Philos. Soc., 1974, V.76, №3, p. 521-528.

[20] Pomerance C., Smith J., Wagstaff S. New ideas for factoring large integers // Adv. Cryptol.: Proc. Crypto 83. Proc. Workshop Theor. and Appl. Cryptogr. Techn., Santa Barbara, Calif., Aug. 21-24, 1983 – New York e.a. 1984, p. 81-85.

[21] Poole G.D. Integers and the sum of the factorials of their digits // Math. Mag., 1971, V.44, p.278-279.

[22] Remark R. Elementare Abschätzungen von fundamental Einheiten und Regulators eines algebraischen Zahlkörpers // J. reine angew. Math., 1931, V.165, p. 159-179.

[23] Riele te H.J. New very large amicable pair // Lecture Notes in Math., 1984, V.1068, p. 210-215.

[24] Robinson J. Existential definability in arithmetics // Trans. Amer. Math. Soc., 1952, V.72, №3, p. 437-449.

[25] Schroppel and Brillhart // Computing. 1983, V.30, №2, p. 91-110.

[26] Schnorr C., Lenstra H.W., A Monte-Carlo factoring algorithm with linear storage // Math. Comput., 1984, V.43, №167, p. 283-311.

[27] Shamir A. Factoring numbers in $\mathcal{O}(\log n)$ arithmetic steps // MIT Lab. Comput. Sci. Techn. Memo, 1977, №91.

[28] Shanks D. Class numbers, a theory of factorization, and genera // Proc. of Symp. in Pure Math., 1971, V.20, Amer. Math. Soc., Providence R.I.

[29] Stroeker R. On a diophantine equation of E. Bombiery // Indag. Math. 1977, V.39, №2, p. 131-139.

[30] Williams H.C. Primality testing on a computer // Ars Combinatoria, 1978, V.5, p. 127-185.

[31] Williams H.C. The influence of computers in the development of number theory // Comput. Math. Appl., 1982, V.8(2), p. 75-83.

[32] Zimmer H. Some computational aspects of and the use of computers in algebraic number theory // Computing, 1971, V.8, №3-4 , p. 363-381.

[33] Zimmer H. Algorithms in algebraic number theory // SIGSAM Bull., 1984, V.1, №2, p. 25-26.

Дополнительная литература

1) Computers in number theory. Ed. A. Atkin and B. J. Birch, London, Acad. Press, 1977.

2) Аванесов Э.Т., Гусев В.А., Борокенская А.Л. Компьютеры в теории чисел. Пятигорск, РИА-КМВ, 2008.

3) Аванесов Э.Т., Гусев В.А. К преподаванию теоретико-числовых проблем в курсе математики. Materials of the conference, МГУ, 2009.

4) Аванесов Э.Т., Гусев В.А. Компьютеры в математике. Materials of the conference, МГУ, 2010.

Аванесов Эдуард Тигранович
профессор кафедры математики
Пятигорского государственного
технологического университета.

eduard.avanesov@gmail.com

Гусев Владимир Алексеевич
профессор кафедры программного
обеспечения компьютерных систем
Ивановского государственного
энергетического университета.

dekan@ivtf.ispu.ru

Информация об авторах

1. В оглавлении предыдущего номера 2(54), 2010г., в строке 10 снизу должны быть указаны три автора: В. С. Сенашенко, В. А. Кузнецова, В. С. Кузнецов.

2. Приводим сведения об этих авторах, не попавшие по техническим причинам в названный номер:

Кузнецова Валентина Анатольевна, заведующая кафедрой общей математики Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова, профессор, доктор педагогических наук.
E-mail: vskuzn@uniyar.ac.ru

Кузнецов Владимир Степанович, доцент Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова, кандидат физико-математических наук.
E-mail: vskuzn@uniyar.ac.ru

Сенашенко Василий Савельевич, профессор Российского университета дружбы народов, доктор физико-математических наук.
E-mail: vsenashenko@mail.ru

Семь доказательств одного геометрического неравенства (материал для внеклассной работы)

П. В. Чулков

В статье приведены различные способы доказательства одного интересного геометрического неравенства, приведен ряд сопутствующих упражнений. Для работы в профильных классах и факультативах.

Математики нередко один и тот же результат доказывают и передоказывают много раз. И это не потому, что сомневаются в результате, и не потому, что "доказательства первооткрывателей неуклюжи" (Д. И. Литлвуд), но чтобы лучше понять значение полученного результата, выявить его взаимосвязи с другими.

Знакомство с различными способами решения известных задач полезно школьникам: "то, что взаимосвязано, легче изучается и легче удерживается" (Г. Фрейденталь).

В заметке приведено семь доказательств одного известного геометрического неравенства и набор упражнений, знакомство с которыми (на различных этапах обучения, но не единовременно!) позволяет рассчитывать, что учащиеся смогут найти эти доказательства самостоятельно (при минимальной помощи учителя).

Материал предназначен для организации занятий с математическими (профильными) классами, система упражнений может быть расширена.

Постановка задачи

Неравенством Вейзенбёка называют неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}s, \tag{1}$$

где a, b, c и s — длины сторон и площадь произвольного треугольника, причем равенство достигается лишь в случае равностороннего треугольника[1].

Историческая справка

Считается, что впервые в такой формулировке неравенство опубликовал Вейзенбёк (Weizenbock, Weitzenböck) в 1919 году, поэтому его иногда и называют неравенством Вейзенбёка [11, 43]. В 1914 году М. Софронов (Уральск) опубликовал в журнале "Вестник опытной физики и элементарной математики"[2] задачу, по ходу решения которой доказал указанное неравенство. Таким образом, правильнее называть неравенство (1) *неравенством Софронова – Вейзенбёка*. В дальнейшем задача многократно публиковалась, а в 1961 году предлагалась участникам III международной математической олимпиады.

[1]Здесь и в дальнейшем принята традиционная для отечественной литературы система обозначений для элементов треугольника. Например, A, B и C — углы треугольника ABC, m_a — медиана, проведенная к стороне a и т.п.

[2]Условие: Задача 179 // Вестник опытной физики и элементарной математики. Вторая серия I семестр, 8 (608), 1914. С.239. Решение: // То же. Вторая серия II семестр, 11-12 (623-624) 1914. С. 286.

Доказательства основного неравенства

Приведенные доказательства не требуют для своего понимания знаний, выходящих за рамки основной школы.

Первое доказательство — основано на вариации формулы Герона (см. упражнения 1-4).

Перепишем формулу площади в виде:

$$a^4 + b^4 + c^4 + 16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \tag{2}$$

Воспользуемся неравенством

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \tag{3}$$

(упражнение 7). Сначала в левой части тождества (2) заменим выражение $a^4 + b^4 + c^4$ на $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Получим неравенство:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 16S^2. \tag{4}$$

Затем в правой части тождества заменим выражение $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$ на $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$. Получим неравенство:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2. \tag{5}$$

Умножим неравенство (4) на 2 и сложим с (5). Получим требуемое.

Второе доказательство. Возведем обе части неравенства в квадрат. Получим:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 48S^2,$$

что равносильно

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 \geq 3\left(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4\right).$$

Тогда разность левой и правой части:

$$4a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4c^2a^2 = 4\left(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2\right) \geq 0,$$

что следует из неравенства упражнения.

Третье доказательство (сравните [2, задача 63]).

Для учащихся математических классов естественно поискать решение, основанное на неравенстве Коши. Вот, что из этого может получиться:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{3} \geq \sqrt[3]{(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)}$$

Следовательно:

$$\frac{(a+b+c)\,(a+b+c)^3}{27} \geq (a+b+c)\,(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b) = 16s^2,$$

откуда

$$\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \geq 4s, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq 4\sqrt{3}s,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Для доказательства нам потребовалось неравенство $a^2+b^2+c^2 \geq (a+b+c)^2/3$ (см. упражнение 8).

Четвертое доказательство. Простое решение получается, если применить теорему косинусов.

Рассмотрим разность:

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}s=a^2+b^2+\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)-2\sqrt{3}ab\sin C.$$

Получим:

$$2a^2+2b^2-4ab\left(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)=2\left(a^2+b^2-2ab\cos\left(C-60^\circ\right)\right)\geq 2\left(a-b\right)^2\geq 0.$$

Равенство достигается, если $C=60^\circ$ и $a=b$, то есть $a=b=c$.

Комментарий. Можно обойтись и без знания формулы “косинус суммы” (сейчас ее не проходят в основной школе). Докажем, что

$$\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\leq 1.$$

Воспользуемся утверждением:

$$\cos\left(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}\right)=\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{|m|}\cdot\overrightarrow{|n|}}\leq 1\quad \text{или,}\quad \text{иначе :}\quad \overrightarrow{|m|}\cdot\overrightarrow{|n|}\geq\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}.$$

Рассмотрим векторы:

$$\overrightarrow{m}\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \overrightarrow{n}\left(\cos C,\sin C\right).$$

Получим:

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\leq\overrightarrow{|m|}\cdot\overrightarrow{|n|}=\sqrt{\sin^2 C+\cos^2 C}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1.$$

В основе *Пятого доказательства* — формула, связывающая длину медианы треугольника с длинами его сторон:

$$4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2.$$

Начнем с очевидного неравенства. Раскроем скобки:

$$\left(a^2+b^2+c^2-3a^2\right)^2\geq 0,\quad \left(a^2+b^2+c^2\right)^2-6\left(a^2+b^2+c^2\right)a^2+9a^4\geq 0.$$

Преобразуем неравенство и воспользуемся тем, что $m_a\geq h_a$.

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\geq 3a^2\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\geq 3a^2\cdot 4m_a^2\geq 3a^2\cdot 4h_a^2,\ \text{откуда}$$

$$a^2+b^2+c^2\geq 2ah_a\sqrt{3}=4\sqrt{3}s.$$

Равенство достигается, если $h_a=m_a$, откуда $b=c$ и так далее.

Доказательство достаточно просто, но как его придумать? Это предмет отдельного разговора.

Шестое доказательство.

Пусть $a=m+n$, $b=n+k$, $c=k+m$. Если p - полупериметр, то $m=p-b$, $n=p-c$, $k=p-a$.

$$a^2+b^2+c^2=(m+n)^2+(n+k)^2+(k+m)^2\geq 4\,(mn+nk+km)$$

Воспользуемся неравенством $(a+b+c)^2\geq 3\,(ab+bc+ca)$. Получим:

$$4\,(mn+nk+km)\geq 4\sqrt{3}\sqrt{mn\cdot nk+nk\cdot km+km\cdot mn}=4\sqrt{3}\sqrt{mnk(n+k+m)}$$

Следовательно,

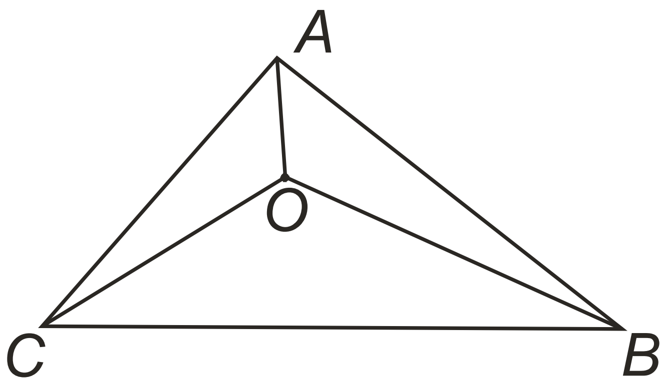
$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}=4\sqrt{3}s.$$

Комментарий. Прием, примененный здесь, носит универсальный характер и основан на утверждении: a, b, c длины сторон треугольника, тогда и только тогда, когда $a=m+n$, $b=n+k$, $c=k+m$, где m, n и k — положительные числа. Прием хорошо работает при доказательстве неравенств для сторон треугольника (упражнения 13-31).

Седьмое доказательство. Рассмотрим два случая.

1) В треугольнике ABC величины углов не превышают 120°.

Тогда существует точка такая, что $\angle AOC=\angle AOB=\angle BOC=120^\circ$ (её называют точкой Торричелли).



Пусть теперь $AO=m$, $BO=n$, $CO=p$. Найдем площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников AOB, AOC, BOC. Получим:

$$\begin{cases} S_{AOB}=\frac{1}{2}mn\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}mn,\\ S_{AOC}=\frac{1}{2}np\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}np,\\ S_{BOC}=\frac{1}{2}pm\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}pm \end{cases}$$

Следовательно:

$$S=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\,(mn+np+pm)\,,\ \text{откуда}\quad mn+np+pm=\frac{4S}{\sqrt{3}}.$$

С другой стороны, из теоремы косинусов следует:

$$\begin{cases} a^2=p^2+n^2-2pn\sin 120^\circ=p^2+n^2+pn,\\ b^2=m^2+p^2-2mp\sin 120^\circ=m^2+p^2+mp,\\ a^2=n^2+m^2-2mn\sin 120^\circ=n^2+m^2+mn. \end{cases}$$

Сложим полученные равенства. Получим:

$$a^2+b^2+c^2=m^2+p^2+n^2+pn+mn+mp\geq 3\,(pn+mn+mp)=3\cdot\frac{4S}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}S.$$

Равенство достигается, если $m = n = p$, что соответствует случаю равностороннего треугольника.

2) В треугольнике величина одного из углов превышает 120°.

Пусть, например, $\angle AOB > 120^\circ$. Тогда: $c^2 > a^2 + b^2$, $a^2 + b^2 + c^2 > 2\left(a^2 + b^2\right) \ge 4ab$. То есть, в треугольнике с углом α, большим 120°:

$$s = \frac{1}{2}ab\sin\alpha < \frac{1}{2}ab\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ab, \text{откуда} \quad ab > \frac{4}{\sqrt{3}}s.$$

Следовательно, $a^2 + b^2 + c^2 > 4ab = \frac{16}{\sqrt{3}}s > 4\sqrt{3}s$.

Комментарий. Единственная трудность – выяснить существование точки внутри треугольника, из которой каждая сторона видна под углом 120°. Для этого достаточно знать свойства вписанных углов.

Заключение. Конечно, здесь приведены не все доказательства основного неравенства. Критерий отбора — использовать “по максимуму” материал, доступный для девятиклассников. Но исходная задача хороша тем, что с её помощью можно рассказать много интересного и в 10 классе. Например, о тригонометрии треугольника, выпуклых функциях, угле Брокара и так далее, но об этом другой раз.

Упражнения

Докажите тождества для элементов треугольника (задачи 1-6).

1. $1 - \cos A = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$ **2**. $1 + \cos A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

3. $16s^2 = 4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2$ **4**. $16s^2 = a^2\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + b^2\left(a^2 + c^2 - b^2\right) + c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)$

5. $16s^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$

6. $16s^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$

Докажите неравенства для всех действительных чисел (задачи №№7-11):

7. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ **8**. $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}$ **9**. $\frac{(a+b+c)^2}{3} \ge ab + bc + ca$

10. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \ge \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ **11.** $a^4 + b^4 + c^4 \ge abc(a + b + c)$**.**

Докажите неравенства для всех неотрицательных чисел (задачи №№12-15).

12. $\sqrt{a+b} \ge \frac{\sqrt{2a}+\sqrt{2b}}{2}$ **13.** $a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$ **14.** $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ **15.** $(a + b + c)^3 \ge 27abc$

Докажите неравенства для элементов треугольника (задачи №№16-34)[3].

16. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 > a^4 + b^4 + c^4$ **17.** $2ab + 2bc + 2ca > a^2 + b^2 + c^2$

18. $abc \ge (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ **19**. $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 16S^2$ **20.** $a^4+b^4+c^4 \ge 16S^2$

21. $abc\,(a + b + c) \ge 16S^2$ **22.** $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}s$ **23.** $2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2 \ge 4\sqrt{3}s$

24. $a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 4\sqrt{3}s$ **25.** $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \ge 3$

26. $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ **27.** $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) + 3$

28. $a^4 + b^4 + c^4 + a^2bc + ab^2c + abc^2 \ge 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$ **29.** $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \le \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

30. $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > p$ **31.** $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \le \frac{9}{a+b+c}$

32. $a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc$ **33.** $a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$**.**

[3]Некоторые из неравенств 13-31 верны не только для элементов треугольника.

34. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$

Решения, указания, комментарии

В некоторых случаях к задачам приводится несколько решений. Повторим, что приводятся решения, опирающиеся на материал, доступный девятиклассникам.

1. Непосредственно следует из теоремы косинусов:

$$1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

2. Аналогично предыдущему:

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

3-6. Формулы равносильны. Поэтому достаточно доказывать какую-нибудь одну из них. Сделаем это тремя способами.

Способ 1. Исключим тригонометрические функции из системы:

$$\sin A=\frac{2S}{bc},\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \sin^2 A+\cos^2 A=1$$

Получим:

$$\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1,\quad \frac{16S^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}=1$$

Следовательно,

$$16S^2=4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2.$$

Способ 2. Выразим наибольшую сторону треугольника через высоту, проведенную к ней и две другие стороны. Получим:

$$a=\sqrt{c^2-h_a^2}+\sqrt{b^2-h_a^2},\ \text{откуда}\quad a^2=c^2+b^2-2h_a^2+2\sqrt{c^2-h_a^2}\sqrt{b^2-h_a^2},$$

$$a^2-c^2-b^2+2h_a^2=2\sqrt{c^2-h_a^2}\sqrt{b^2-h_a^2},\quad \left(a^2-c^2-b^2+2h_a^2\right)^2=4\left(c^2-h_a^2\right)\left(b^2-h_a^2\right),$$

$$\left(a^2-c^2-b^2\right)^2+4h_a^2\left(a^2-c^2-b^2\right)+4h_a^4=4h_a^4-4h_a^2\left(c^2+b^2\right)+4c^2b^2,$$

$$\left(a^2-c^2-b^2\right)^2+4h_a^2a^2=4c^2b^2\ \text{ и }\quad 16S^2=4c^2b^2-\left(a^2-b^2-c^2\right)^2.$$

Способ 3. Перемножим равенства из упражнений 1-2. Получим:

$$\sin^2 A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}{4b^2c^2},$$

$$4b^2c^2\sin^2 A=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a),$$

$$16s^2=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a).$$

Комментарий. Школьники, как правило, хорошо помнят и даже доказывают формулу Герона, но редко помнят формулы из упражнений 3-6 . Доказывая формулу Герона, они в буквальном смысле "проходят мимо" других формул площади.

7. *Способ* 1. Сложим неравенства $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0$. Раскроем скобки и получим требуемое неравенство. Равенство достигается, если $a=b=c$.

Способ 2. Разность левой и правой части неравенства можно представить в виде:

$$f(a) = a^2 - a(b+c) + b^2 + c^2 - bc.$$

Дискриминант не больше нуля, следовательно, $f(a) \geq 0$ для любого a, что и требовалось доказать.

8-9. Рассмотрите разности: сводится к неравенству упражнения 7.

10-11. Неравенства сводятся к неравенству упражнения 7 (метод замены).

12. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$a+b \geq \frac{2a+2b+4\sqrt{ab}}{4}.$$

Рассмотрим разность:

$$a+b-\frac{2a+2b+4\sqrt{ab}}{4} = \frac{2a+2b-4\sqrt{ab}}{4} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0.$$

13. Следует из тождества:

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$ и неравенства упражнения 7.

14. Следует из неравенства упражнения 13 (замена переменных).

15. Следует из неравенства упражнения 14, если возвести в куб.

16. (Польская олимпиада, 1955-1956).

Способ 1. Воспользуемся вариацией формулы Герона:

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16s^2 > 0.$$

Способ 2. Если почему-то сходу не удалось связать задачу с формулой Герона, естественно попытаться доказать, что:

$$a^4 - 2\left(b^2+c^2\right)a^2 + \left(b^2-c^2\right)^2 < 0.$$

Корни квадратного трехчлена:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm \sqrt{\left(b^2+c^2\right)^2 - \left(b^2-c^2\right)^2} = b^2 + c^2 \pm 2bc = (b \pm c)^2 \quad ,$$

что приводит к разложению на множители (см. упражнение 5) и так далее.

17. *Способ* 1. "Из пушки по воробьям". Универсальная подстановка:

$$2(x+y)(y+z) + 2(y+z)(z+x) + 2(z+x)(x+y) > (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 .$$

Разность левой и правой частей неравенства равна $4(xy+yz+zx)$, что больше нуля.

Способ 2. Воспользуемся теоремой косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B.$$

Сложим полученные равенства:

$$2ab\cos C + 2bc\cos A + 2ca\cos B = a^2 + b^2 + c^2.$$

Заменим косинусы на единицу и получим требуемое неравенство.

Способ 3. Рассмотрим треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, с площадью s_1, тогда: $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = 16s_1^2 > 0$.

Комментарий. Необходимо доказывать, что треугольник со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ существует. Например, так: пусть $a \geq b \geq c$ и $a < b < c$. Докажем, что $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Пусть $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$, но $a < b + c + 2\sqrt{bc}$. Противоречие.

Способ 4. Неравенства $a+b > c$, $b+c > a$, $c+a > b$ соответственно равносильны неравенствам $ac + bc > c^2$, $bc + ca > a^2$, $cb + ab > b^2$. Сложим полученные неравенства и получим требуемое неравенство.

Способ 5. Неравенства $a > |c - b|$, $b > |a - c|$, $c > |b - a|$ соответственно равносильны неравенствам $a^2 > c^2 - 2bc + b^2$, $b^2 > a^2 - 2ac + c^2$, $c^2 > b^2 - 2ab + a^2$. Сложим полученные неравенства, приведем подобные и получим требуемое неравенство.

Способ 6. Пусть $a \leq b \leq c$ и $f(c) = 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2$. Перепишем последнее равенство в виде: $f(c) = c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2$. Докажем, что при $a \leq b \leq c < a + b$, $f(c) < 0$. Для этого достаточно доказать, что $f(b) < 0$ и $f(a+b) < 0$. Действительно:

$$f(a+b) = (a+b)^2 - 2(a+b)^2 + (a-b)^2 = -4ab < 0, \quad f(b) = b^2 - 2(a+b)b = -2ab - b^2 < 0$$

18. *Способ* 1. Воспользуемся универсальной подстановкой. Пусть $a = m + n$, $b = n + k$, $c = k + m$.

$$(m+n)(n+k)(k+m) \geq 8mkn,$$

что равносильно

$$(m+n)(n+k)(k+m) \geq 2\sqrt{mk} \cdot 2\sqrt{kn} \cdot 2\sqrt{mn}.$$

Способ 2. Перемножим очевидные неравенства:

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2, \quad b^2 \geq b^2 - (c-a)^2, \quad c^2 \geq c^2 - (a-b)^2.$$

Разложим на множители. Получим:

$$a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2, \text{и так далее.}$$

Комментарий. Неравенство верно для произвольных неотрицательных чисел, поскольку из чисел $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ отрицательным может быть только одно.

19-20. См. первое доказательство основного неравенства.

21. Домножим обе части неравенства упражнения 18 на $(a + b + c)$.

22. Воспользуемся неравенствами упражнений 20 и 21. Сложим неравенства:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 16S^2 \text{и} \quad 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 \geq 32S^2.$$

Получим:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 48S^2 \text{и так далее.}$$

Комментарий. Неравенство является усилением основного неравенства.

23. Неравенство Финслера-Хадвигера (1938). Универсальная подстановка. Получим:

$$(m+n)^2+(n+p)^2+(p+m)^2-(m-p)^2-(p-n)^2-(n-m)^2 \geq 4\sqrt{3}s$$

$$4mn+4np+4pm \geq 4\sqrt{3}s, \quad mn+np+pm \geq \sqrt{3}s, \quad mn+np+pm \geq \sqrt{3mnp\,(m+n+p)},$$

$$(mn+np+pm)^2 \geq 3mnp\,(m+n+p)\,, \quad (mn)^2+(np)^2+(pm)^2 \geq (mn)\,(np)+(np)\cdot(pm)+(pm)\cdot(mn)\,.$$

Последнее неравенство следует из неравенства $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Комментарий. Как уже говорилось (см. упражнение 17),

$$2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2=16s_1^2,$$

где s_1 — площадь треугольника со сторонами $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Следовательно, неравенство Финслера-Хадвигера можно переформулировать так:

$$s_1^2 \geq \frac{\sqrt{3}}{4}s, \text{где} \quad s \quad - \text{площадь треугольника со сторонами} \quad a, \quad b \quad \text{и} \quad c.$$

24. Неравенства 23 и 24 равносильны и могут быть получены друг из друга алгебраическими преобразованиями левой части.

25. Универсальная подстановка приводит к неравенству:

$$\frac{m+n}{2k}+\frac{n+k}{2m}+\frac{k+m}{2n} \geq 3,$$

что равносильно

$$\left(\frac{m}{k}+\frac{k}{m}\right)+\left(\frac{n}{k}+\frac{k}{n}\right)+\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right) \geq 6 \text{ и так далее.}$$

26. Универсальная подстановка:

$$\sqrt{2m}+\sqrt{2n}+\sqrt{2k} \leq \sqrt{m+n}+\sqrt{n+k}+\sqrt{k+m}.$$

Полученное неравенство следует из неравенства упражнения 12.

27. (Задачник “Кванта”, М1107). Применим универсальную подстановку, но сначала домножим обе части неравенства на abc и немного преобразуем:

$$2\left(a^2c+b^2a+c^2b\right) \geq a^2b+b^2c+c^2a+3abc,$$

$$a^2c+b^2a+c^2b \geq \left(a^2b+abc-b^2a\right)+\left(b^2c+abc-c^2b\right)+\left(c^2a+abc-a^2c\right),$$

$$a^2c+b^2a+c^2b \geq ab\,(a+c-b)+bc\,(b+a-c)+ca\,(c+b-a)\,,$$

$$(m+n)^2\,(p+m)+(n+p)^2\,(m+n)+(p+m)^2\,(n+p) \geq (m+n)\,(n+p)\,p+(n+p)\,(p+m)\,m+$$

$$+\left(p+m\right)\left(m+n\right)n\left(p+m\right)\Big(\left(m+n\right)^2-\left(m+n\right)n\Big)+\left(m+n\right)\Big(\left(n+p\right)^2-\left(n+p\right)p\Big)+$$

$$+\left(n+p\right)\Big(\left(p+m\right)^2-\left(p+m\right)m\Big)\geq 0,$$

$$\left(p+m\right)\left(m^2-mn\right)+\left(m+n\right)\left(n^2-pn\right)+\left(n+p\right)\left(p^2-pm\right)\geq 0$$

После преобразований получим неравенство:

$$m^3+n^3+p^3+m^2p+n^2m+p^2n\geq 2m^2n+2p^2m+2n^2p.$$

Рассмотрим разность левой и правой части неравенства:

$$\left(m^3-2m^2n+n^2m\right)+\left(n^3-2n^2p+np^2\right)+\left(p^3-2p^2m+m^2p\right)=$$

$$=m\left(m-n\right)^2+n\left(n-p\right)^2+p\left(p-m\right)^2\geq 0.$$

28. (Московская математическая олимпиада, 1982; Московская областная олимпиада, 2001).

Способ 1. Преобразуем неравенство:

$$a^2bc+ab^2c+b^2ac\geq 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4,$$

то есть

$$abc\left(a+b+c\right)\geq 16S^2,$$

что доказано в упражнении 18.

Способ 2 [8, задача 261]. Рассмотрим неравенства

$$\left(a+b\right)^2>c^2,\quad \left(a+b\right)^2\left(a-b\right)^2>\left(a-b\right)^2c^2.$$

Раскроем скобки:

$$a^4-2a^2b^2+b^4\geq a^2c^2+2abc^2+b^2c^2.$$

Аналогично:

$$b^4-2b^2c^2+c^4\geq b^2a^2-2bca^2+c^2a^2,\quad c^4-2c^2a^2+a^4\geq c^2b^2-2cab^2+a^2b^2.$$

Сложив полученные неравенства, получим требуемое.

29. Воспользуемся тем, что $m_a\geq h_a$, $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$. Получим:

$$h_a^2+h_b^2+h_c^2\leq m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

30. (XI турнир математических боев им. А. П. Савина).
Способ 1. Рассмотрим разность:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\frac{a+b+c}{2}=\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}-a-b-c}{2}=16s_1^2,$$

где s_1 — площадь треугольника со сторонами $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{b}$, $\sqrt[4]{c}$.

Комментарий. Необходимо доказать, что такой треугольник существует. См. комментарий к упражнению 17.

Способ 2. Предположим, что $a \geq b \geq c$, тогда:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \geq b + c > \frac{a+b+c}{2}.$$

31. Применим универсальную подстановку. Получим:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \geq \frac{9}{m+n+k}, \quad \frac{m+n+k}{m} + \frac{m+n+k}{n} + \frac{m+n+k}{k} \geq 9,$$

$$\frac{n+k}{m} + \frac{m+k}{n} + \frac{m+n}{k} \geq 6, \quad \left(\frac{m}{k} + \frac{k}{m}\right) + \left(\frac{n}{k} + \frac{k}{n}\right) + \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right) \geq 6 \quad \text{и так далее.}$$

32. (Международная математическая олимпиада, 1964).

Способ 1. Перепишем формулу упражнения 2 в виде:

$$16s^2 = a^2(b+c+a)(b+c-a) + b^2(a+c+b)(a+c-b) + c^2(a+b+c)(a+b-c)$$
$$-2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2$$

$$16s^2 = a^2(b+c+a)(b+c-a) + b^2(a+c+b)(a+c-b) + c^2(a+b+c)(a+b-c) - 2abc(a+b+c)$$

Получим:

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) - 2abc,$$

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) - abc = a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) - 3abc.$$

Воспользуемся результатом упражнения 18:

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) - abc \leq 0.$$

Следовательно, неравенство доказано.

Комментарий. Последнее неравенство верно для всех неотрицательных a, b и c, тогда и доказываемое неравенство верно для всех неотрицательных a, b и c.

Способ 2 . Пусть $a \geq b \geq c$, тогда разность между правой и левой частью неравенства равна:

$$3abc + a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2a - a^2c - b^2c - c^2b - c^2a =$$

$$\left(a^2 - b^2\right)(a-b) - c(a-b)^2 + c(c-a)(c-b) = (a-b)^2(a+b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

Способ 3 [2, задача 82]. Сложим почленно очевидные неравенства:

$$(b-c)^2(b+c-a) \geq 0, \quad (c-a)^2(c+a-b) \geq 0, \quad (a-b)^2(a+b-c) \geq 0.$$

Раскроем скобки. Получим:

$$6abc - 2a^2(b+c-a) - 2b^2(c+a-b) - 2c^2(a+b-c) \geq 0,$$

откуда получим требуемое неравенство.

Способ 4 [9, задача 341].

Применим универсальную подстановку. Получим:

$$m^2n + mn^2 + n^2p + hp^2 + p^2m + pm^2 \geq 6mnp,$$

что можно получить из неравенства упражнения 14:

$$m^2n + mn^2 + n^2p + hp^2 + p^2m + pm^2 \geq 2mn\sqrt{mn} + 2np\sqrt{np} \geq 2pm\sqrt{pm} \geq 6mnp$$

(или из неравенства Коши для шести переменных).

Комментарий. Способы 3 и 4 пригодны только для сторон треугольника.

33. (Международная математическая олимпиада, 1984).

Применим универсальную подстановку и рассмотрим разность:

$$a^2b\,(a-b) + b^2c\,(b-c) + c^2a\,(c-a) =$$

$$= (m+n)^2\,(n+p)\,(m-p) + (n+p)^2\,(p+m)\,(n-m) + (p-m)^2\,(m-n)\,(p-n)$$

и, после преобразований, получим:

$$2m^3p + 2n^3m + 2p^3n - 2m^2np - 2n^2pm - 2p^2mn = 2mp\,(m-n)^2 + 2mn\,(n-p)^2 + np\,(p-m)^2 \geq 0.$$

34. (Венгерская олимпиада, 1972).

Способ 1. Перепишем неравенство в виде:

$$4abc > a^3 - a\,(b-c)^2 + b^3 - b\,(c-a)^2 + c^3 - c\,(a-b)^2\,,$$

$$4abc > a\left(a^2 - (b-c)^2\right) + b\left(b^2 - (c-a)^2\right) + c\left(c^2 - (a-b)^2\right),$$

$$4abc > a\,(a-b+c)\,(a+b-c) + b\,(b-c+a)\,(b+c-a) + c\,(c-a+b)\,(c+a-b)\,.$$

Применим универсальную подстановку. Получим:

$$(x+y)\,(y+z)\,(z+x) > (x+y)\,xy + (y+z)\,yz + (z+x)\,zx,$$

$$z^2x + z^2y + 2xyz + x^2y + y^2x + y^2z + zx^2 > x^2y + yx^2 + y^2z + zy^2 + z^2x + xz^2.$$

Разность левой и правой части равна $2xyz > 0$. Неравенство доказано.

Способ 2. [4, задачи 294-295] Можно немного иначе. Достаточно доказать тождество:

$$a\,(a-b+c)\,(a+b-c) + b\,(b-c+a)\,(b+c-a) + c\,(c-a+b)\,(c+a-b) =$$

$$= (a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c) > 0.$$

Это означает, что исходное выражение равно

$$4abc + (a-b+c)\,(a+b-c)\,(-a+b+c) > 0.$$

Литература

[1] Зетель С.И. *Неравенство Финслера и Хадвигера и следствия из него* // Математика в школе, №3, 1965. *О неравенстве Финслера и Хадвигера* // Там же, №2, 1967.

[2] Морозова Е.А., Петраков И.С. *Международные математические олимпиады. Задачи. Решения. Итоги.* – М., 1967.

[3] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум.* – М., 1970.

[4] Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. *Венгерские математические олимпиады.* – М., 1976.

[5] Страшевич С., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады.* – М., 1978.

[6] Шарыгин И.Ф. *Задачи по геометрии (планиметрия)* – М., 1982.

[7] Кушнир И. *Альтернативные методы решения задач (Геометрия).* – Киев, 2006.

[8] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математические олимпиады Московской области. – М., 2006.

[9] XI турнир математических боев им. А. П. Савина. – М., 2006.

[10] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии: Учебное пособие.* – М., 2007.

[11] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović and P. M. Vasiж. *Geometric inequalities*, Groningen 1968.

[12] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads*: 1959-2004, Springer, 2006.

Чулков Павел Викторович,
доцент кафедры элементарной математики МПГУ,
учитель математики ГОУ СОШ с углубленным
изучением физики и математики №2007 г. Москвы
Заслуженный учитель РФ.

E-mail: chulkov@logic.ru

К понятию действительного числа

В. В. Цукерман

Статья о представимости действительных чисел десятичными дробями без 9 в периоде составлена из фрагментов книги автора "Действительные числа и основные элементарные функции", М., Издательство Икар, 2010.

Преобразование рационального числа в бесконечную десятичную дробь и измерение длины отрезков исключает возможность появления "девятки" в периоде. Это обстоятельство является одним из фактов, мотивирующих определение действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби без "девятки" в периоде. Доказательство указанных фактов является целью этой статьи.

1. Рациональное число и бесконечная десятичная дробь

Вопрос о представлении рационального числа $a = \frac{p}{q}$ (где $p \in Z,\ \ q \in N$) десятичной дробью рассматривается в средней школе. Если в несократимой дроби знаменатель q содержит в качестве простых делителей только 2–ки и 5–ки, то $\frac{p}{q}$ записывается в виде конечной десятичной дроби. Например, $\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 7}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{14}{10^2} = 0,14$. Такую конечную десятичную дробь можно рассматривать как бесконечную с периодом, равным нулю: $\frac{7}{50} = 0,1400... = 0,14(0)$.

Если в несократимой дроби $\frac{p}{q}$ знаменатель q содержит простые множители, отличные от 2 и 5, то соответствующая десятичная дробь оказывается бесконечной периодической. Рассмотрим примеры. Для рационального числа $\frac{83}{35} = 2\frac{13}{35}$ соответствующее представление имеет вид: $2,\alpha_1\alpha_2...$, где $0,\alpha_1\alpha_2...$ — представление десятичной дробью дробной части числа $\frac{83}{35} - 2$, то есть числа $\frac{13}{35}$. Для числа $-\frac{83}{35}$ соответствующее представление имеет вид $-2,\alpha_1\alpha_2...$, где $-0,\alpha_1\alpha_2...$ — представление числа $-\frac{13}{35}$.

Для числа $-\frac{83}{35}$ представление десятичной дробью можно получить в иной форме: $-\frac{83}{35} = -2\frac{13}{35} = -2 - \frac{13}{35} = (-2-1) + \left(1 - \frac{13}{35}\right) = -3 + \frac{22}{35}$, и тогда числу $-\frac{83}{35}$ соответствует представление $\overline{3},\beta_1\beta_2...$, где $0,\beta_1\beta_2...$ представление десятичной дробью числа $\frac{22}{35}$($\overline{3} = -3$ – целая часть числа $-\frac{83}{35}$, а сама запись $\overline{3},\beta_1\beta_2...$ аналогична записи десятичного логарифма в виде суммы характеристики и мантиссы, где характеристика может быть любым целым числом, а мантисса — неотрицательное число, меньшее единицы).

Представление рационального числа в виде $b_0,\beta_1\beta_2...$, где b_0 — целая часть числа $\frac{p}{q}$, а $0,\beta_1\beta_2...$ — представление дробной части рационального числа $\frac{p}{q}$ в виде десятичной дроби, автор считает основным. Оно единообразным образом сопоставляет десятичную дробь как положительным, так и отрицательным рациональным числам. Из сказанного следует, что рассмотрение достаточно ограничить положительными рациональными числами, меньшими единицы, то есть числами $\frac{p}{q}$, где $p \in N,\ \ q \in N,\ \ p < q$ и дробь $\frac{p}{q}$ несократима. В этом случае рациональному числу $\frac{p}{q}$ соответствует десятичная дробь $a_0,\alpha_1\alpha_2...$, где $a_0 = 0$ и $\alpha_1,\ \alpha_2\ldots$ — последовательность цифр из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Конкретная запись $a_0,\alpha_1\alpha_2...$ возникает в результате деления "столбиком" числа p на q. Так для $\frac{13}{35}$ имеем

$$\begin{array}{l|l}
13 & \underline{35} \\
-\,130 & 0{,}3714285714285... \\
\underline{\ \ 105} & \\
\ \ -\,250 & \\
\ \ \ \ \underline{245} & \\
\ \ \ \ \ -\,50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \underline{35} & \\
\ \ \ \ \ \ -\,150 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{140} & \\
\ \ \ \ \ \ \ -\,100 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{70} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ -\,300 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{280} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -\,200 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{175} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 250 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots &
\end{array}$$

Таким образом, $\frac{13}{35} = 0,3\,(714285)$. Соответствующая бесконечная десятичная дробь оказывается периодической, так как с того момента, когда остаток от деления повторится (остатки выделены), начнут повторяться и возникающие цифры как результат деления.

Для дроби $\frac{p}{q}$ ($p \in N,\ q \in N$, дробь $\frac{p}{q}$ несократима) остатками могут быть числа $1, 2, 3, \ldots,$ $q-1$, то есть длина периода не может превышать $q-1$ цифр. Для числа $\frac{p}{q} = \frac{13}{35}$ период (как выяснилось при вычислении) состоит из шести цифр.

Покажем, что в общем случае $a = \frac{p}{q}$ ($p \in N,\ q \in N,\ p < q$) представление $a = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$ $(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}...\alpha_{k+l})$ не может иметь периода, равного (9), то есть невозможно представление $\frac{p}{q} = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k 99... = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k\,(9)$.

Прежде всего, отметим, что по самому способу сопоставления $\frac{p}{q} = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$ ($p \in N$, $q \in N,\ p < q$) десятичная дробь $0,\ \alpha_1$ есть наибольшая конечная десятичная дробь, с одним десятичным знаком, не превышающая $\frac{p}{q}$, то есть

$$0,\ \alpha_1 \le \frac{p}{q} < 0,\ \alpha_1 + \frac{1}{10}.$$

Соответственно

$$0,\ \alpha_1\alpha_2 \le \frac{p}{q} < 0,\ \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2},$$

$$0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \le \frac{p}{q} < 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{10^3},$$

....

$$0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n \le \frac{p}{q} < 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n + \frac{1}{10^n},$$

....

Рассмотрим теперь формальную бесконечную десятичную дробь (символ) $a_0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$, где $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...)$ — последовательность цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без всяких ограничений. Сопоставим этой формальной десятичной дроби две последовательности конечных десятичных дробей:

$$(a_n) = (a_0,\ a_1,\ a_2, ...,\ a_n, ...)\,,$$

где $a_0 = 0$; $a_1 = 0,\ \alpha_1$; $a_2 = 0,\ \alpha_1\alpha_2$; ... ; $a_n = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ и

$$(a'_n) = (a'_0,\ a'_1,\ a'_2, ...,\ a'_n, ...)\,,$$

где $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n}$, то есть $a'_0 = a_0 + \frac{1}{10^0} = 0 + 1 = 1$; $a'_1 = a_1 + \frac{1}{10} = 0,\alpha_1 + \frac{1}{10}$; $a'_2 = a_2 + \frac{1}{10^2} = 0,\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}$; ...; $a'_n = a_n + \frac{1}{10^n} = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n}$.

Ясно, что для каждого натурального n выполняется соотношение $a_{n+1} \geq a_n$, причем $a_{n+1} = a_n$ в случае, если $\alpha_{n+1} = 0$.

Действительно, $a_{n+1} - a_n = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1} - 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = 0,00...0\alpha_{n+1}$. Таким образом, (a_n) — неубывающая последовательность.

Несколько труднее устанавливается, что $a'_{n+1} \leq a'_n$, причем $a'_{n+1} = a'_n$ только в случае $\alpha_{n+1} = 9$. Действительно,

$$a'_{n+1} = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}} = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} =$$
$$= 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}+1}{10^{n+1}} \leq 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{10}{10^{n+1}} = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \frac{1}{10^n} = a'_n$$

Знак “$\leq$” раскрывается как “$=$” в случае, если только $\alpha_{n+1} = 9$ и $\alpha_{n+1} + 1 = 10$. Таким образом, (a'_n) — невозрастающая последовательность.

Если бы $\frac{p}{q} = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k999... = 0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_k(9)$ и $\alpha_k \neq 9$ (допускается, что $k = 0$, тогда $a_0 = 0 \neq 9$), то в силу показанного выше:

$$a'_k = a'_{k+1} = a'_{k+2} = ... = a'_n = ..., \text{ то есть } a'_n = a'_k \text{ при } \quad n \geq k.$$

Учтем, что при каждом $n \in N$ $a_n \leq \frac{p}{q} < a'_n$. Тогда при $n \geq k$

$$0 < a'_k - \frac{p}{q} = a'_n - \frac{p}{q} \leq a'_n - a_n = \frac{1}{10^n} \qquad (*)$$

В соотношении $(*)$ важно, что оно имеет место при любом натуральном n, не меньшем k, и $a'_k - \frac{p}{q}$ — постоянное положительное число.

Соотношение $(*)$, на самом деле, невозможно, так как $\frac{1}{10^n}$ для достаточно больших номеров n становится меньше любого положительного числа, в том числе, например, меньше, чем $\frac{1}{2} \cdot \left(a'_k - \frac{p}{q}\right)$. Число n можно выбрать таким, чтобы одновременно выполнялось неравенство $n \geq k$. Тогда

$$0 < a'_k - \frac{p}{q} \leq \frac{1}{10^n} < \frac{1}{2}\left(a'_k - \frac{p}{q}\right)$$

И, следовательно, $0 < a'_k - \frac{p}{q} < \frac{1}{2}\left(a'_k - \frac{p}{q}\right)$. Отсюда, поскольку $a'_k - \frac{p}{q} > 0$, получаем, что $1 < \frac{1}{2}$ или $2 < 1$.

Соотношение $(*)$ получено в предположении возможности “9” в периоде при представлении рационального числа бесконечной десятичной дробью. Противоречие показывает, что этого быть не может.

Осталось показать, что для любого положительного числа a существуют натуральные числа n, для которых $\frac{1}{10^n} < a$. (Здесь достаточно считать a рациональным положительным числом.)

Возникает соблазн провести доказательство прямым решением неравенства $\frac{1}{10^n} < a$ относительно n: получаем $10^n > \frac{1}{a}$, отсюда $n > \lg \frac{1}{a}$.

Однако такое доказательство методически не имеет смысла. Дело в том, что оно обесценивает сам результат: отсутствие “9” в периоде. Ранее было указано, что это существенно для введения действительных чисел как бесконечных десятичных дробей без “9” в периоде. И тогда множество рациональных чисел оказывается включенным в множество действительных чисел.

В свою очередь, теория действительных чисел предшествует развитой теории основных элементарных функций и, в частности, логарифмической, использованной для получения соотношения $n > \lg \frac{1}{a}$.

Решение неравенства $\frac{1}{10^n} < a$ относительно n может быть получено, не опираясь на теорию элементарных функций, а используя "архимедово" свойство положительных рациональных чисел: для любых положительных рациональных чисел a и b существует натуральное число n, что $na > b$ или, что равносильно, $\frac{b}{n} < a$.

Доказательство проводится следующим образом:

$$a = \frac{p_1}{q_1}, \;\; b = \frac{p_2}{q_2} \;\; (p_1, \; q_1, \; p_2, \; q_2 \in N),$$

$$na > b \;\; \Rightarrow \;\; n\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} \;\; \Rightarrow \;\; n > \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2}.$$

Так как $p_1 q_2 \geq 1$ и $\frac{1}{p_1 q_2} \leq 1$, то при $n > p_2 q_1$ имеем:

$$na > p_2 q_1 a \geq \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} a = \frac{p_2 q_1}{p_1 q_2} \cdot \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = b.$$

В цепочке неравенств первое является строгим, следовательно, $na > b$.

Далее при любом натуральном n справедливо неравенство $10^n > n$, и тогда для натуральных n таких, что $na > b$, и подавно $10^n a > b$, и следовательно, $\frac{b}{10^n} < a$ (в частности при $b = 1$ получаем соотношение $\frac{1}{10^n} < a$).

Неравенство $10^n > n$, $n \in N$, кажется очевидным, но n– элемент бесконечного множества натуральных чисел, и для каждого n неравенство не может быть проверено непосредственно. Указанное неравенство может быть доказано разными способами. Воспользуемся известным и легко доказываемым соотношением:

$$b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + ... + ba^{n-2} + a^{n-1}\right), \;\; n \geq 2,$$

в последней скобке n слагаемых. Тогда

$$10^n - 9^n = 10^{n-1} + 10^{n-2} \cdot 9 + 10^{n-3} \cdot 9^2 + ... + 10 \cdot 9^{n-2} + 9^{n-1} > n \cdot 9^{n-1}, \;\; n \geq 2,$$

то есть $10^n - 9^n \geq n \cdot 9^{n-1}$, $n \in N$ (при $n = 1$ имеет место равенство).

Таким образом, $10^n \geq 9^n + n \cdot 9^{n-1} > n$.

Вывод показывает, что при натуральных n и k неравенство $10^k > n$ может быть справедливо при значениях k, много меньших, чем n. Это уточнение неравенства $10^n > n$ здесь не существенно, так для основного доказательства этой статьи важно лишь, что для любого положительного рационального числа a существуют такие натуральные числа n, что $\frac{1}{10^n} < a$.

Схема проведенного здесь основного доказательства широко используется в книге, указанной в аннотации к статье, но в данном случае отсутствие "девятки" в периоде может быть легко установлено из самого алгоритма деления "столбиком" $p : q, \;\; p \in N, \;\; q \in N, \;\; p < q$.

Пусть p_1 - первый остаток, за которым при делении возникает цифра 9. Это произойдет тогда, когда целая часть: $\left[\frac{10p_1}{1}\right] = 9$. Девятка может быть и первой цифрой, полученной в процессе деления, если $\left[\frac{10p}{1}\right] = 9$. Преобразуем выражение $\frac{10p_1}{1} = 9$ таким образом, чтобы условие того, что $\left[\frac{10p_1}{1}\right] = 9$, выступало в явном виде:

$$\frac{10p_1}{q} = \frac{10\left(q - (q - p_1)\right)}{q} = \frac{9q + \left(q - 10\left(q - p_1\right)\right)}{q}.$$

Очевидно, что неравенство $10(q - p_1) \leq q$ является таким условием. Если $10(q - p_1) = q$, то рациональное число $\frac{p}{q}$ представляется конечной десятичной дробью

$$\frac{p}{q} = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k\alpha_{k+1} = 0,\ \alpha_1\alpha_2...\alpha_k 9$$

и $a_{k+1} = 9$ — первая девятка среди цифр a_1, a_2,..., a_k, a_{k+1}. В любом случае новый остаток — $p_2 = q - 10(q - p_1)$ и тогда $q - p_2 = 10(q - p_1)$. Чтобы следующей цифрой деления была снова девятка, необходимо выполнение условия

$$10(q - p_2) = 10^2(q - p_1) \leq q.$$

Количество рядом стоящих девяток будет равно $l(l \in N)$, если

$$10^l(q - p_1) \leq q, \text{ а } 10^{l+1}(q - p_1) > q.$$

Существование такого конечного числа l опять же гарантируется архимедовым свойством рациональных чисел.

2. Измерение отрезков

Названием "архимедово" свойство обязано геометрическому аналогу этого свойства: для любых прямолинейных отрезков a и b существует натуральное число n, что $na > b$ или $\frac{b}{n} < a$ (возможность деления отрезка на n равных частей основана на теореме Фалеса). Справедливость геометрического аналога (в отличие от числового свойства) не может быть доказана и принимается в качестве аксиомы, указывающей на соответствующее свойство прямолинейных отрезков. Из древнегреческих источников известно, что это свойство впервые было указано Евдоксом, но работы самого Евдокса не сохранились. Однако это соотношение имеется в сохранившейся работе Архимеда, и потому оно получило название аксиомы Архимеда (реже аксиомы Евдокса). Аксиома Архимеда (Евдокса) является основой теории измерения отрезков и возможности превращения прямой в координатную прямую, когда каждой точке прямой (при выборе отрезка единичной длины и положительного направления на прямой) отвечает ее определенная координата — действительное число.

В этой статье доказывается лишь то, что измерение отрезков приводит к десятичным дробям без "девятки" в периоде.

Для произвольного отрезка a на основе аксиомы Архимеда найдется натуральное число n такое, что $ne > a$, где e — отрезок, длина которого принята за единицу.

Из отрезков $0e$, e, $2e$, $3e$, $\ldots$, $(n-1)e$ выбираем наибольший отрезок $a_0 e \leq a < (a_0 + 1)\, e$.[1] Так получаем целые числа a_0, $a_0^{'}(0 \leq a_0 < a_0 + 1 = a_0')$.

Из отрезков a_0, $0e$; a_0, $1e$; a_0, $2e$; a_0, $3e$; $\ldots$; a_0, $\alpha_1 9e$ выбираем наибольший

$$a_0, \alpha_1 e \leq a < \left(a_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right) e.$$

Вводим обозначения: $a_1 = a_0$, α_1, $a_1' = a_1 + \frac{1}{10} = a_0$, $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ и $a_1 = a_1 e$, $a_1' = a_1' e$. Тогда $a_1 \leq a < a_1' = a_1 + \frac{e}{10}$.

Затем из отрезков a_0, $\alpha_1 0e$; a_0, $\alpha_1 1e$; a_0, $\alpha_1 2e$; a_0, $\alpha_1 3e$; $\ldots$; a_0, $\alpha_1 9e$ выбираем наибольший

$$a_0, \alpha_1\alpha_2 e \leq a < \left(a_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right) e$$

и вводим обозначения $a_2 = a_0$, $\alpha_1\alpha_2$; $a_2' = a_2 + \frac{1}{10^2} = a_0$, $\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10^2}$; $a_2 = a_2 e$, $a_2' = a_2' e$. Тогда $a_2 \leq a < a_2' = a_2 + \frac{e}{10^2}$.

Этот процесс теоретически может быть неограниченно продолжен. В итоге возникает бесконечная десятичная дробь a_0, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$.... Вводя рациональные числа

[1] Под отрезком $0e$ понимают "нулевой" отрезок (точку), по определению меньший любого другого отрезка.

$$a_n = a_0,\ \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n,\ a_n,\ a'_n = a_n + \frac{1}{10^n} = a_0,\ \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

(в виде десятичных дробей) и отрезки

$$a_n = a_n e,\ a'_n = a'_n e = \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right) e,$$

получаем для каждого натурального n

$$a_n \leq a < a'_n = a_n + \frac{e}{10^n}.$$

Покажем, что рассмотренный процесс сопоставления отрезку a десятичной дроби $a_n = a_0$, $\alpha_1\alpha_2$ $...\alpha_n...$ не может привести к “девятке” в периоде. Будем откладывать от некоторой точки O прямой в одну сторону отрезки $a_n = a_n e$, a, $a'_n = a'_n e$ (см. рисунок).

Имеем $a_n = OM_n$, $a = OA$, $a'_n = ON_n$. Если бы возникла “9” в периоде, то есть если бы a_0, $\alpha_1\alpha_2... = a_0$, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k 99...$, то $\alpha'_k = \alpha'_{k+1} = \alpha'_{k+2} = ...$ и точка N_n оставалась бы неизменной при $n \geq k$. Тогда $AN_k = AN_{k+1} = AN_{k+2} = ... = AN_n = ... = c$ есть постоянный ненулевой отрезок. Имеем

$$\frac{e}{10^n} = M_n N_n \geq AN_n = c \text{ при } \quad n \geq k.$$

Это противоречит аксиоме Архимеда, так как при достаточно большом n (его можно взять и таким, чтобы одновременно было $n \geq k$) $\frac{e}{10^n} < c$.

Процесс сопоставления произвольному отрезку a на основе аксиомы Архимеда десятичной дроби a_0, $\alpha_1\alpha_2$ $...\alpha_n...$ в начальных шагах аналогичен процессу измерения реального физического отрезка, но отличается от него тем, что длится бесконечно (если только не окажется, что при некотором n выполняется равенство $a = a_n$. Реальный процесс измерения в силу физических причин останавливается на некотором шаге и дает всегда приближенную длину отрезка с той или иной точностью.

Аналогично тому, как это проделано для рациональных чисел, возможен и прямой метод доказательства отсутствия “9” в периоде в теоретическом процессе измерения отрезков. Рассуждения идентичны, нужно только указать геометрические аналоги остаткам в алгоритме деления “столбиком” $p : q$ ($p \in N$, $q \in N$, $p < q$), $p \sim a$; $q \sim e(a < e)$. Если первая “9” в записи a_0, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}... = a_0$, $\alpha_1\alpha_2...\alpha_k 9\alpha_{k+2}...$ встречается на $(k+1)$-ом месте, то

$$p_1 : p_1 = 10^k(a - a_k).$$

При этом $10p_1 = 9e + (e - 10\,(e - p_1))$ и $10(e - p_1) \leq e$. Детальный разбор этого второго способа для случая измерения отрезков предоставляется читателям.

Цукерман Виталий Владимирович,
профессор кафедры высшей математики
Московского государственного открытого
педагогического университета им. М. А. Шолохова,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: tsuckerman@front.ru

О стабилизации цепочки множеств при построении минимальной выпуклой оболочки

А. И. Пучкова

Данная статья посвящена построению минимальной выпуклой оболочки множества. Особое внимание уделяется вопросу о стабилизации последовательности множеств специального вида, которая используется для построения минимальной выпуклой оболочки множества в E^n. Перед формулировкой основного результата приведем необходимые определения и утверждения.

Определение 1. *Минимальной выпуклой оболочки* $convF$ *множества* $F \subset E^n$ *называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество* F.

Определение 2. *Точка* x *называется выпуклой комбинацией точек* $x_1, \ldots, x_m \in E^n$ *если существуют числа* $\lambda_i, i = 1, \ldots, m$, *удовлетворяющие соотношениям* $\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$, *такие, что выполняется равенство*

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m.$$

Определение 3. *Пусть* x, y — *точки пространства* E^n. *Отрезком* $[x, y]$ *с концами* x, y *называется множество*

$$[x, y] = \{z \in E^n : z = \lambda x + (1 - \lambda) y, \quad \lambda \in [0, 1]\},$$

или

$$[x, y] = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda x + (1 - \lambda) y\}.$$

Существует два способа построения минимальной выпуклой оболочки. Первый связан с именем Каратеодори. Он основывается на следующих двух утверждениях, доказательство которых см. в [2].

Лемма 1. *Для любого множества* $F \subset E^n$ *существует минимальная выпуклая оболочка* $conv\ F$, *которая совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций точек из множества* F.

Лемма 2 (теорема Каратеодори). *Пусть* $F \subset E^n$. *Любая точка* $x \in convF$ *представима в виде выпуклой комбинации не более чем* $n+1$ *точек из множества* F, *где* n — *размерность пространства* E^n.

Второй способ построения минимальной выпуклой оболочки можно назвать геометрическим. Он базируется на лемме 3, доказательство которой можно найти в [1].

Лемма 3 (о построении минимальной выпуклой оболочки). *Для любого множества* $F \subset E^n$ *существует минимальная выпуклая оболочка* $convF$, *которую можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность множеств*

$$F_0, \quad F_1, \quad \ldots, \quad F_m, \quad \ldots, \tag{1}$$

где

$$F_0 = \quad F$$

$$F_1 = \bigcup_{x, y \in F_0} [x, y],$$

$$F_2 = \bigcup_{x,y \in F_1} [x,y],$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$

$$F_m = \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y],$$

$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$

Тогда $convF = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m$.

Построенная в лемме 3 последовательность множеств обладает свойством монотонности по включению, то есть

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_m \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} F \equiv convF.$$

Для выпуклого множества F имеем $F_0 = F_1 = ... = convF$, поэтому $F = convF$. Для множества, состоящего из двух точек в E^n, выпуклой оболочкой будет отрезок, соединяющий эти точки, $convF = F_1$.

а) F_0=F б) F_1=conv$F$

Рис. 1. Построение минимальной выпуклой оболочки для двух точек.

Для сферы в E^n выпуклой оболочкой является шар, $convF = F_1$.

Следующая теорема показывает, что для $n = 1$, 2 и 3 процесс построения минимальной выпуклой оболочки заканчивается за конечное число шагов.

Теорема 1. *В пространстве* E^n при $n = 1$, 2 и 3 *цепочка множеств (1) стабилизируется, то есть существует номер* $s(F)$*, начиная с которого,*

$$F_s = F_{s+1} = ... = convF,$$

$$s(F) \leq 1 \text{ при } \quad n = 1; \quad s(F) \leq 2 \text{ при } \quad n = 2, \quad 3.$$

Доказательство.

1. Случай $n = 1$. Покажем, что $convF = F_1$. Учитывая, что $F_1 \subset convF$, остается доказать включение $convF \subset F_1$. Пусть $x \in convF$, тогда

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

где

$$x_1, x_2 \in F; \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Точка $x \in F_1$ по построению множества F_1.

2. Случай $n = 2$. Возьмем точку $x \in convF$, тогда

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

где

$$x_1, x_2, x_3 \in F; \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ и $x = x_3$. Учитывая свойство монотонности по включению, имеем $x = x_3 \in F \subset F_1 \subset F_2$, то есть $x \in F_2$. Далее будем считать, что $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1$. Перепишем x в виде

$$x = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right) + \lambda_3 x_3.$$

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \in F_1,$$

так как

$$x = x_3 \in F = F_0; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \geq 0, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \geq 0; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1.$$

$$x_3 \in F \subset F_1.$$

Получаем

$$x = (\lambda_1 + \lambda_2) y + \lambda_3 x_3.$$

Окончательно имеем, что $x \in F_2$, так как

$$y, x_3 \in F_1; \quad \lambda_1 + \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 \geq 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Следовательно, $convF = F_2$.

3. Случай $n = 3$. Покажем, что $convF \subset F_2$. Пусть $x \in convF$, тогда по теореме Каратеодори

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$

где

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in F; \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

Если $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и точка x имеет вид

$$x = \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$

где

$$x_3, x_4 \in F; \quad \lambda_3 \geq 0, \quad \lambda_4 \geq 0; \quad \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

Тогда $x \in F_1 = F_2$. При $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$ аналогичными рассуждениями получаем, что $x \in F_2$. Далее считаем, что $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 + \lambda_4 \neq 0$. Перепишем x в виде

$$x = (\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2\right) + (\lambda_3 + \lambda_4)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_4} x_3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} x_4\right).$$

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \in F_1,$$

так как

$$x_1, x_2 \in F = F_0; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1.$$

Аналогично

$$z = \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} x_3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} x_4 \in F_1,$$

так как

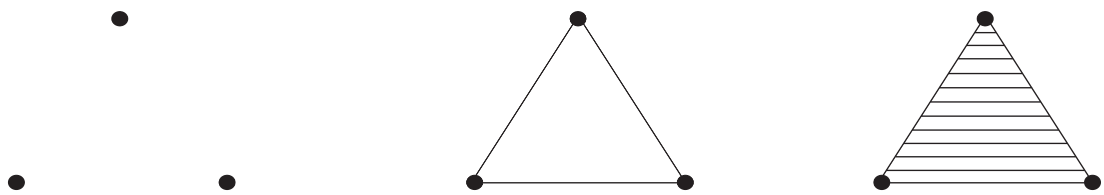
$$x_3, x_4 \in F = F_0; \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} \geq 0, \quad \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} \geq 0; \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\lambda_4} + \frac{\lambda_4}{\lambda_3+\lambda_4} = 1.$$

Получаем, что точка $x = (\lambda_1+\lambda_2)y + (\lambda_3+\lambda_4)z$. Тогда $x \in F_2$, так как

$$y, z \in F_1; \quad \lambda_1+\lambda_2 > 0, \quad \lambda_3+\lambda_4 > 0; \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1$$

Теорема 1 доказана.

Для множества F, состоящего из трех различных точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, $n = 2$, $s(F) = 2$.



а) F_0=F б) F_1 в) F_2=conv$F$

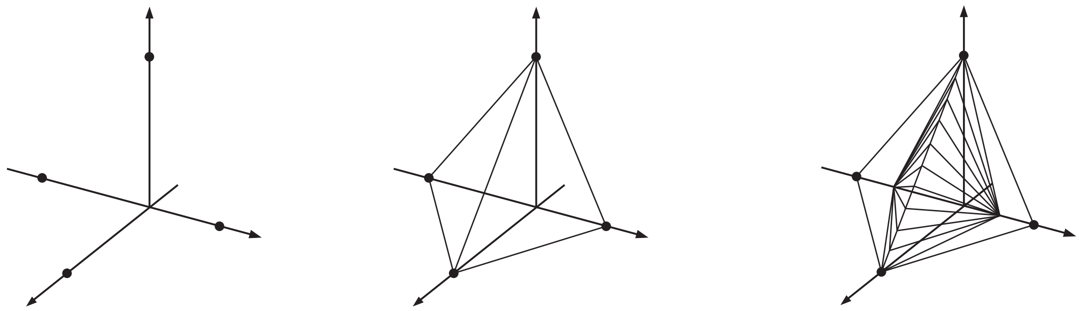
Рис. 2. Построение минимальной выпуклой оболочки для трех точек на плоскости.

Для параллелепипеда $n = 3$, $s(F) = 1$ (под параллелепипедом здесь понимается поверхность, а не тело, ограниченное этой поверхностью).

а) F_0=F б) F_1=conv$F$

Рис.3. Построение минимальной выпуклой оболочки для параллелепипеда.

Для множества F, состоящего из четырех различных точек в пространстве, не лежащих в одной плоскости, $n = 3$, $s(F) = 2$.



а) F_0=F б) F_1 в) F_2=conv$F$

Рис.4. Построение минимальной выпуклой оболочки для четырех точек в пространстве.

Сформулируем теорему в общем случае. Доказательство этой теоремы см. в [3].

Теорема 2. *В n–мерном пространстве E^n цепочка множеств (1) стабилизируется, то есть существует номер $s \equiv s(n, F)$, зависящий от размерности n пространства E^n и от множества F, такой, что*

$$F_s = F_{s+1} = ... = convF,$$

Более того, для любого множества $F \subset E^n$ имеет место следующая оценка сверху для $s(n, F)$:

$$s(n, F) \leq S(n) \equiv [\log_2 n] + 1 \qquad (2)$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Литература

[1] Киселёв Ю.Н. Оптимальное управление. Издательство МГУ, 1988.

[2] Благодатский В.И. Введение в оптимальное управление, М.: Высшая школа, 2001.

[3] Пучкова А.И., Киселёв Ю.Н., Кулевский А.В., Орлов М.В. Об одном подходе к построению минимальной выпуклой оболочки. Вестник Московского университета. Сер. 15. ВМиК. 2010 (в печати).

[4] Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия: Учебник для 10-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992.

Пучкова Алена Ивановна,
аспирантка факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

E-mail: apuchkova@gmail.com

Уравнение Пелля, представимость чисел суммой двух квадратов и алгоритм Евклида

А. И. Щетников

В статье единым методом, основанным на алгоритме Евклида, проводятся доказательство существования нетривиального решения уравнения Пелля и представимости числа суммой двух квадратов.

Введение

В статье А. Ю. Эвнина (2009) рассматривается доказательство существования нетривиального решения уравнения Пелля, найденное Н. Вайлдбергером (Wildberger 2008); при этом замечается, что “этот способ доказательства значительно проще ранее известных”. Я хотел бы заметить, что этот же самый метод доказательства был предложен ранее в статье (Щетников 2004) в связи с попыткой установить, каким образом существование нетривиального решения могли доказывать Архимед и Ферма. Как известно, Архимед предложил своим александрийским коллегам знаменитую задачу о быках (Архимед 1962, с. 372–377). Эта задача сводится к уравнению Пелля с таким N, что его наименьшее нетривиальное решение просто невозможно выписать физически. С моей точки зрения, такой вызов предполагал ответ, в котором доказывалось бы, что решение существует, но оно слишком велико. О том, что Ферма умел доказывать существование нетривиального решения для любого N, свидетельствует ряд его писем, в том числе письмо к Каркави, написанное в августе 1659 г.: “Каждое неквадратное число обладает тем свойством, что существует бесконечно много квадратов, которые при умножении на данное число образуют квадрат без единицы. Я доказал это методом спуска, применённым совершенно особым способом” (Ферма 1992, с. 79). Как могли Архимед и Ферма доказывать это утверждение, не пользуясь ни цепными дробями, ни алгебраическими операциями с иррациональными числами? Вот вопрос, на который я пытался ответить в своей статье; предложенный ответ основывался на приложении к неизвестным, входящим в уравнение Пелля, алгоритма Евклида в форме взаимного вычитания.

В рамках семинара “Теория чисел и её история”, который я вёл в весеннем семестре 2010 года с новосибирскими старшеклассниками, я предложил применить этот же метод к доказательству теоремы Ферма-Эйлера о представлении натуральных чисел суммой двух взаимно простых квадратов. А именно, с помощью этого метода легко и красиво доказывается ключевая для этой теоремы лемма о том, что числа, представимые суммой двух взаимно простых квадратов, суть в точности все те числа, для которых –1 является квадратичным вычетом (иначе говоря, в точности все те числа, которые являются делителями чисел вида $q^2 + 1$).

Построенное доказательство тесно связанно с рассмотренным ранее (Щетников 2008) пифагорейским алгоритмом “получения всех числовых отношений из отношения равенства как из матери и корня”; усложнённая версия этого алгоритма описана в обзорных сочинениях двух древнегреческих математиков — Никомаха Геразского (2009) и Теона Смирнского (2009). Занятно, что это древнее построение ныне принято называть деревом Калкина-Вилфа по статье Calkin, Wilf (2000); см. также Айгнер, Циглер (2006, с. 105–108).

В этом же ключе построено и второе доказательство леммы о представимости чисел суммой двух взаимно простых квадратов — на этот раз, основанное на конструкции дерева Штерна-Броко (см. Грэхем, Кнут, Паташник 2006, с. 139–146).

Доказательство существования нетривиального решения уравнения Пелля для произвольного неквадратного N

ТЕОРЕМА. Уравнение

$$1 = x^2 - Ny^2 \tag{1}$$

для любого неквадратного натурального N помимо тривиального решения (1, 0) имеет бесконечно много целочисленных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для предложенного N существует нетривиальное решение (x, y). Очевидно, что НОД $(x, y) = 1$. Числа в паре (x, y) нам неизвестны, но мы знаем, какое из них больше, а какое меньше. Применим к ним алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя, отнимая на каждом шаге от большего числа меньшее. В силу взаимной простоты (x, y) после какого-то очередного вычитания оба числа окажутся равными 1, а на следующем шаге одно из них станет равным 0.

На первом шаге, очевидно, $x > y$, и поэтому мы делаем подстановку $x \to y + x$. При этом уравнение (1) преобразуется к виду

$$1 = x^2 + 2xy + (1 - N)y^2.$$

На втором шаге нужно опять сравнить между собой x и y. Равенство $x = y$ возможно лишь в случае $x = y = 1$; при этом сумма коэффициентов в правой части должна быть равна 1. Если же эта сумма не равна 1, то по её знаку мы выясняем, какую подстановку надо сделать.

Дальнейшее удобно изложить следующим образом. В правой части получающейся последовательности уравнений стоят квадратичные формы $ax^2 + bxy + cy^2$. Мы будем представлять их набором коэффициентов (a, b, c). Исходная квадратичная форма в уравнении (1) имеет вид $(1, 0, -N)$.

На каждом шаге мы сравниваем между собой неизвестные x и y (критерием сравнения выступает знак суммы $a + b + c$), представляем большее из них в виде "меньшее + добавка", и строим очередную форму по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
&\text{если}\quad a+b+c<0,\quad \text{то}\quad x\to y+x \quad \text{и}\quad (a,b,c)\to(a,b+2a,a+b+c),\\
&\text{если}\quad a+b+c>0,\quad \text{то}\quad y\to y+x \quad \text{и}\quad (a,b,c)\to(a+b+c,b+2c,c).
\end{aligned}$$

У всех форм построенной последовательности первый коэффициент будет оставаться положительным (он либо сохраняется, либо заменяется на положительную сумму), третий — отрицательным (он либо заменяется на отрицательную сумму, либо сохраняется), второй — чётным.

Заметим, что дискриминант квадратичной формы $D = (b/2)^2 - ac$ является инвариантом рассматриваемого преобразования:

$$\begin{aligned}
(b/2+a)^2 - a(a+b+c) &= (b/2)^2 - ac,\\
(b/2+c)^2 - c(a+b+c) &= (b/2)^2 - ac.
\end{aligned}$$

Поскольку дискриминант исходной формы уравнения (1) равен N, тем самым и для всех форм построенной последовательности он будет равен N.

Отсюда следует, что ни на каком шаге не может быть $a+b+c = 0$. Ведь если одновременно выполнены условия $a+b+c = 0$ и $(b/2)^2 - ac = N$, то тем самым $(a-c)^2 = 4N$; но N не является квадратным числом.

Поскольку знаки первого и третьего коэффициентов всегда противоположны, из инвариантности дискриминанта следует, что для каждого D имеется конечное число соответствующих ему квадратичных форм рассматриваемого класса. Тем самым процесс построения последовательных форм на каком-то очередном шаге с необходимостью зацикливается.

Осталось показать, что полученный цикл не имеет предпериода. У формы $(a,\ b,\ c)$ могут иметься две формы-предшественницы:

$$\begin{array}{ccc} (a-b+c,\ b-2c,\ c) & & (a,\ b-2a,\ a-b+c) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (a,\ b,\ c) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (a,\ b+2a,\ a+b+c) & & (a+b+c,\ b+2c,\ c) \end{array} \tag{2}$$

но лишь у одной из них первый коэффициент положителен и третий отрицателен, что определяется знаком $a - b + c$:

$$\text{если} \quad a-b+c<0, \quad \text{имел место переход} \quad (a, b-2a, a+c-b) \to (a,b,c),$$

$$\text{если} \quad a-b+c>0, \quad \text{имел место переход} \quad (a+c-b, b-2c, c) \to (a,b,c).$$

Тем самым мы доказали, что, стартуя с формы $(1,0,-N)$, мы за конечное число шагов вернёмся к форме $(1,0,-N)$ и воспроизведём исходное уравнение (1).

Полученное на последнем шаге уравнение имеет тривиальное решение $(1,\ 0)$. Тем самым исходное уравнение имеет нетривиальное решение, которое находится обратным восхождением по подстановкам.

Спуску вниз на n оборотов цикла соответствует отыскание n-ого решения; при этом все решения в построенной цепочке последовательно получаются друг из друга одной и той же линейной подстановкой — той самой, которая переводит тривиальное решение в наименьшее нетривиальное решение. Эта последовательность решений содержит все решения уравнения (1), поскольку алгоритм Евклида завершается только при полном обороте цикла.

Представление чисел суммой двух квадратов: первое доказательство леммы

Применим развитую в предыдущем разделе технику для доказательства теоремы Ферма-Эйлера о представлении натуральных чисел суммой двух квадратов. А именно, докажем с помощью этой техники следующую лемму:

ЛЕММА. Натуральные числа, представимые суммой двух взаимно простых квадратов — это в точности все те числа, для которых –1 является квадратичным вычетом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть некоторое число N представимо суммой двух взаимно простых квадратов:$N = x^2 + y^2$. Мы не знаем, каковы числа $x,\ y$; но каковы бы они ни были, мы можем применить к ним алгоритм Евклида в форме последовательного взаимного вычитания. Поскольку по предположению НОД $(x,\ y) = 1$, на каком-то очередном шаге взаимного вычитания оба остатка окажутся равными 1, а на следующем шаге один из них станет равен 0.

Применяя правую и левую подстановки преобразования (2) к исходной квадратичной форме $(1,\ 0,\ 1)$ и ко всем порождённым из неё формам, построим бинарное дерево квадратичных форм, верхние уровни которого изображены на рис. 1.

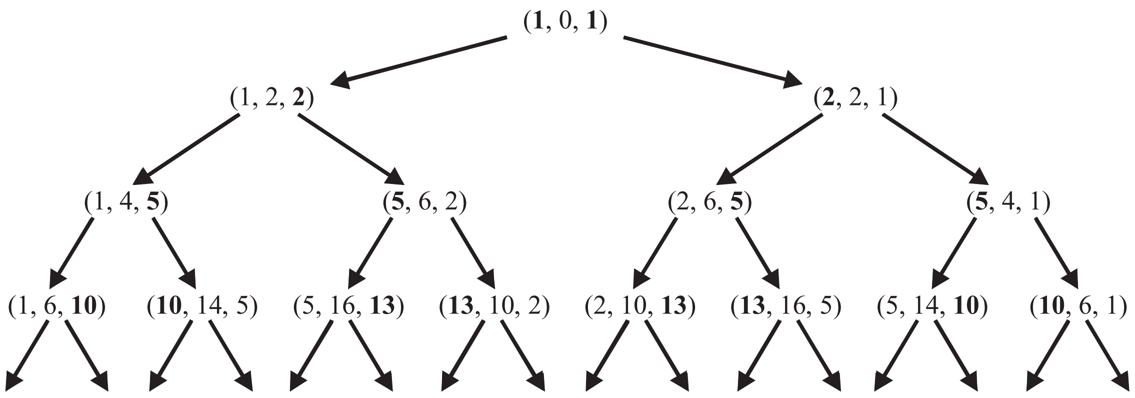


Рис. 1

Каждый узел построенного дерева может соответствовать остановке алгоритма, когда одно из чисел обратилось в ноль. Поэтому суммой двух взаимно простых квадратов представимы в точности все те числа, которые являются крайними коэффициентами квадратичных форм этого дерева.

Все квадратичные формы, содержащиеся в построенном дереве, имеют дискриминант $D = (b/2)^2 - ac = -1$ и положительные коэффициенты. Докажем теперь, что все квадратичные формы с положительными коэффициентами и дискриминантом $D = -1$ содержатся в построенном дереве.

Пусть $(a,\ b,\ c)$ — квадратичная форма с положительными коэффициентами, для которой $(b/2)^2 = ac - 1$. Равенство $a = c$ выполняется только для формы $(1,\ 0,\ 1)$. Без ограничения общности будем считать, что $a > c$. Тогда коэффициент a равен сумме коэффициентов формы-предшественницы, и тем самым предшественницей формы $(a,\ b,\ c)$ будет форма $(a-b+c,\ b-2c,\ c)$. Покажем, что коэффициенты этой формы положительны. В самом деле,

$$a - b + c = a + c - 2\sqrt{ac-1} > a + c - 2\sqrt{ac} = (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 > 0,$$

$$b - 2c = 2\sqrt{ac-1} - 2c \geq 2(\sqrt{(c+1)c-1} - c) \geq 0,$$

причём в последнем случае знак равенства выполняется только для формы $(2,\ 2,\ 1)$, предшественницей которой является форма $(1,\ 0,\ 1)$.

Заметим, что сумма коэффициентов формы-предшественницы всегда меньше суммы коэффициентов формы-последовательницы. Тем самым для всякой формы с положительными коэффициентами и дискриминантом $D = -1$ может быть построена последовательность форм-предшественниц с убывающей суммой коэффициентов. Эта последовательность содержит конечное число форм, и тем самым она должна иметь начальную форму. Но начальной формой может быть только форма $(1,\ 0,\ 1)$. Отсюда следует, что все квадратичные формы дискриминанта $D = -1$ содержатся в построенном дереве.

Соединяя всё сказанное выше, заключаем, что суммой двух взаимно простых квадратов представимы в точности все те числа, которые являются крайними коэффициентами форм дискриминанта $D = -1$ с положительными коэффициентами.

Поскольку $(b/2)^2 = ac - 1$, тем самым $(b/2)^2 \equiv -1 (mod a)$. В итоге заключаем, что суммой двух взаимно простых квадратов представимы в точности все те числа, для которых -1 является квадратичным вычетом.

Представление чисел суммой двух квадратов: второе доказательство леммы

Рассмотрим ещё одно доказательство леммы из предыдущего раздела, основанное на применении конструкции, известной как дерево Штерна-Броко. Построение этой конструкции начинается с цепочки нулевого уровня, состоящей из двух числовых пар (1, 0), (0, 1). На следующих шагах построения между парами уже имеющейся цепочки вставляются новые числовые пары, так что между парами (p, q) и (r, s) вставляется пара $(p + r, q + s)$. Верхние уровни этой иерархии показаны на рис. 2.

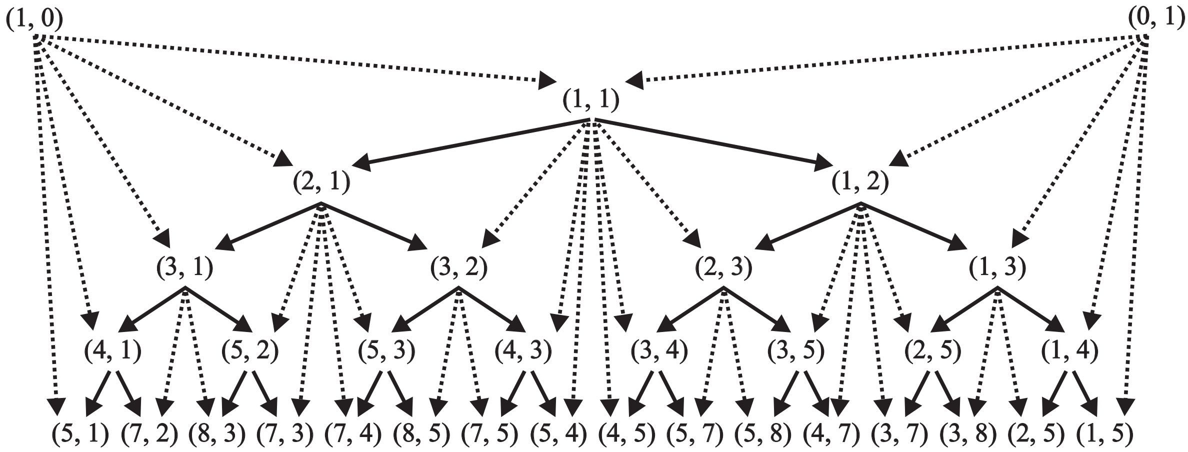


Рис. 2

Описанное построение удобно истолковать геометрически: мы берём исходный единичный квадрат на векторах $\{(1, 0), (0, 1)\}$, проводим в нём диагональ (1, 1), строим параллелограммы на векторах $\{(1, 0), (1, 1)\}$ и $\{(1, 1), (0, 1)\}$, проводим в них диагонали (2, 1) и (1, 2), и т. д. (рис. 3).

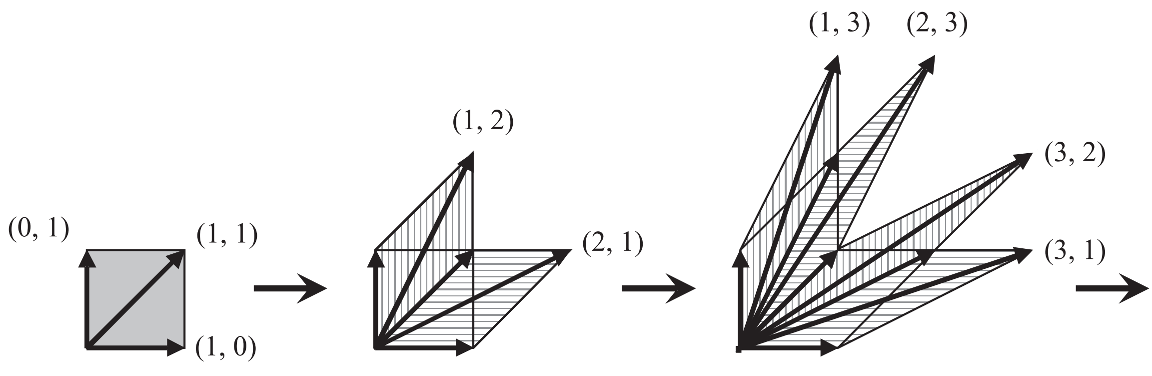


Рис. 3

Параллелограммы каждого шага получаются разрезанием параллелограммов предыдущего шага по диагонали и перекладыванием треугольников, и поэтому всегда имеют единичную площадь. Тем самым, если (p, q), (r, s) — две стороны одного из параллелограммов, то

$$ps - qr = 1.$$

Докажем теперь, что все числовые пары, стоящие в вершинах построенной иерархии — различные и взаимно простые. То, что все пары различны, следует из того, что все построенные векторы очевидным образом неколлинеарны. Допустим, теперь, что какая-то пара $(p,\ q)$ с предками $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ — не взаимно простая. Это означает, что на диагонали параллелограмма единичной площади, построенного на векторах $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$, имеется точка с целочисленными координатами. Переведём его обратными сдвигами в единичный квадрат на векторах $(1,\ 0)$ и $(0,1)$. Каждый такой сдвиг переводит целочисленную точку в целочисленную точку. Получается, что внутри единичного квадрата имеется точка с целочисленными координатами, что нелепо.

Теперь докажем, что всякая пара взаимно простых чисел содержится в построенной иерархии. Пусть какие-то пары не содержатся; выберем из них пару $(p,\ q)$ с наименьшей суммой чисел. Найдём её предков $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$, решив уравнения

$$aq - bp = 1 \ \ (a < p, b < q),$$

$$dp - cq = 1 \ \ (c < p, d < q);$$

эти уравнения разрешимы в силу взаимной простоты $(p,\ q)$. Числа в каждой из пар (a, b) и (c, d) тоже взаимно простые, и их суммы меньше $p+q$. Если оба предка находятся в иерархии, то там же находится и их общий потомок. Получается, что кто-то из предков не находится в иерархии, что противоречит предположению.

ЛЕММА. Натуральные числа, представимые суммой двух взаимно простых квадратов — это в точности все те числа, для которых –1 является квадратичным вычетом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в узлах дерева Штерна-Броко расставлены все упорядоченные пары взаимно простых чисел, построим ещё одно дерево, в каждом узле которого запишем сумму квадратов чисел из соответствующего узла дерева Штерна-Броко (рис. 4). В узлах этой диаграммы записаны в точности все числа, представимые суммой двух взаимно простых квадратов, причём каждое число записано столько раз, сколькими способами (с учётом порядка слагаемых) оно может быть представлено.

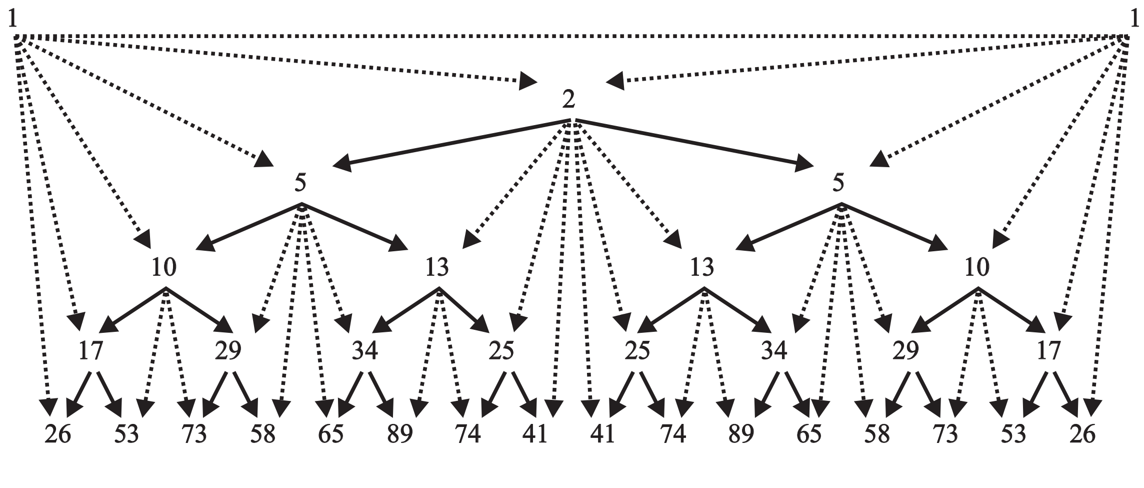


Рис. 4

Рассмотрим два числа a_1, a_2, связанные на рис. 4 стрелкой. К этой стрелке примыкают два треугольника, в вершинах которых стоят ещё два числа ω_1, ω_2. Выведем соотношение, связывающее эти четыре числа. Если a_1, a_2 — квадраты сторон параллелограмма единичной площади, то ω_1, ω_2 — квадраты диагоналей этого параллелограмма. Пусть u_1, u_2 — стороны параллелограмма, l_1, l_2 — его диагонали, α — угол между сторонами, S — площадь. Тогда

$$l_{1,2}^2 = u_1^2 + u_2^2 \pm 2u_1u_1 \cos\alpha = u_1^2 + u_2^2 \pm 2\sqrt{u_1^2u_2^2(1-\sin^2\alpha)} = u_1^2 + u_2^2 \pm 2\sqrt{u_1^2u_2^2 - S^2}.$$

Подставив $S = 1$ и заменив квадраты соответствующими числами, получаем

$$\omega_{1,2} = a_1 + a_2 \pm 2\sqrt{a_1 a_2 - 1} \tag{3}$$

Поскольку квадраты диагоналей всегда целочисленны, квадратный корень здесь всегда извлекается нацело. А потому для всех чисел, представимых суммой двух взаимно простых квадратов, –1 является квадратичным вычетом.

Осталось доказать, что все числа, для которых –1 является квадратичным вычетом, содержатся в построенной иерархии. Пусть положительные целые числа a_1, a_2 и неотрицательное целое число Q удовлетворяют соотношению

$$a_1 a_2 = Q^2 + 1.$$

Построим новые числа

$$\omega_{1,2} = a_1 + a_2 \pm 2\sqrt{a_1 a_2 - 1} \tag{4}$$

В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеет место цепочка неравенств

$$2\sqrt{a_1 a_2 - 1} < 2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2,$$

а потому целые числа ω_1, ω_2 также положительны. Заметим, что

$$a_{1,2}\omega_{1,2} = a_{1,2}^2 + a_1 a_2 \pm 2a_{1,2}Q = a_{1,2}^2 + Q^2 + 1 \pm 2a_{1,2}Q = (a_{1,2} \pm Q)^2 + 1.$$

Тем самым -1 является квадратичным вычетом не только для чисел a_1, a_2, но также и для чисел ω_1, ω_2. Это даёт нам возможность построить иерархию положительных чисел, для которых -1 является квадратичным вычетом (рис. 5).

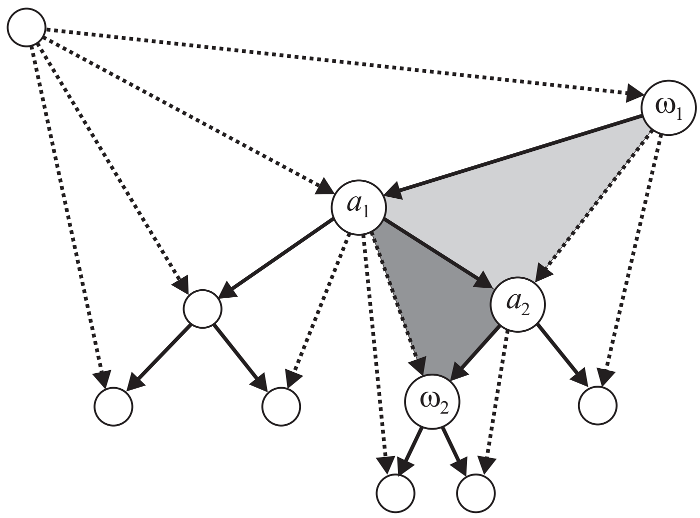


Рис. 5

Спуск по этой иерархии заканчивается, только когда $Q = 0$ и тем самым $a_1 = a_2 = 1$. Стало быть, наше построение от любой исходной пары чисел всегда придёт к двум корневым единицам. Поэтому все числа, для которых -1 является квадратичным вычетом, содержатся в одной иерархии. Но формулы (3) и (4) совпадают. А потому иерархия чисел, представимых суммой двух взаимно простых квадратов, совпадает с иерархией чисел, для которых -1 является квадратичным вычетом.

Завершающие шаги доказательства

Завершающие шаги доказательства теоремы Ферма-Эйлера общеизвестны, но в образовательных целях имеет смысл их здесь привести.

Если составное число a представимо суммой двух взаимно простых квадратов, то тогда в силу доказанной леммы представим и каждый его делитель. Обратно, если каждый из двух чисел представимо суммой двух квадратов, то представимо и их произведение, что следует из тождества Брахмагупты

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2) = (mp+nq)^2 + (mq-np)^2.$$

Отсюда, суммой двух взаимно простых квадратов представимы те и только те числа, все простые сомножители которых представимы.

Очевидно, число $2 = 1^2 + 1^2$ представимо. Вопрос о представимости простых чисел вида $4n+1$ и $4n-1$ может быть решён разными способами; наиболее естественным и полезным в образовательном плане мне представляется следующий. Если расставить полную систему вычетов простого модуля p по циклу степеней некоторого первообразного корня, в этом цикле –1 будет стоять напротив +1. Если $p = 4n+1$, число шагов между +1 и −1 равно $2n$; это число — чётное, и −1 будет квадратичным вычетом. Если же $p = 4n+3$, число шагов между +1 и −1 равно $2n+1$; это число — нечётное, и −1 будет квадратичным невычетом.

Литература

[1] Айгнер М., Циглер Г. *Доказательства из Книги. Лучшие доказательства со времён Евклида до наших дней.* М.: Мир, 2006.

[2] Архимед. *Сочинения.* М.: Физматгиз, 1962.

[3] Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* М.: Мир, 2006.

[4] Никомах Геразский. Введение в арифметику. ΣΧΟΛΗ, 3, 2009, с. 99–160.

[5] Теон Смирнский. Изложение математических предметов, полезных при чтении Платона. ΣΧΟΛΗ, 3, 2009, с. 466–558.

[6] Ферма П. *Исследования по теории чисел и диофантову анализу.* М.: Наука, 1992.

[7] Щетников А. И. Задача Архимеда о быках, алгоритм Евклида и уравнение Пелля. *Математика в высшем образовании*, 2004, №2, с. 27–40.

[8] Щетников А. И. Алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и идеальные числа Платона. ΣΧΟΛΗ, 2, 2008, с. 55–74.

[9] Эвнин А. Ю. Уравнение Пелля. *Математика в высшем образовании*, 2009, 7, с. 89–94.

[10] Calkin N., Wilf H. Recounting the rationals. *Am. Math. Month.*, 107, 2000, p. 360–363.

[11] Wildberger N. J. Pell's equation without irrational numbers. // arXiv: 0806.2490 (June 2008)

Щетников Александр Иванович,
руководитель проекта "Школа Пифагора".
Центр образовательных проектов "Сигма",
Новосибирск.

E-mail: pythagor@ngs.ru

Рассуждение в элементарной математике[1]

Джонатан П. Селдин

В статье приведена реконструкция возможного пути, которым в элементарную геометрию и алгебру, в процессе их возникновения и развития в античности, вводились рассуждения различных типов.

Многим начинающим изучать алгебру может показаться, что она сводится к формальным манипуляциям. Но это не так. Как Мидлмис указывает в предисловии к своей книге (1953), утверждение о том, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственный корень $x = a$, эквивалентно доказательству того, что

$$\text{если} \quad f(x) = g(x), \quad \text{то} \quad x = a.$$

Более того, проверка $f(a) = g(a)$ эквивалентна доказательству обратной теоремы.

Начинающим это можно показать и без символов:

ЗАДАЧА. *Если число умножить на три и прибавить пять, получится двадцать; найдите число.*

РЕШЕНИЕ. Предположим, что существует такое число, что если его умножить на три и затем прибавить пять, то получится двадцать. Вычитая по пяти с каждой стороны, получим, что утроенное искомое число равно пятнадцати. Тем самым искомое число равно пяти.

ПРОВЕРКА: *Если пять умножить на три и прибавить пять, получится двадцать.*

Решение алгебраических задач таким способом может помочь учащимся, имеющим трудности с алгебраической символикой; эту проблему обсуждает Гершкович (1989).

Всё это показывает, что алгебра отнюдь не сводится к манипулированию символами. В действительности она отличается от арифметики в двух существенных моментах:

I. В алгебре мы пользуемся *рассуждениями* для того, чтобы решить задачу косвенным путём, если не можем решить её прямо.

II. Здесь мы имеем дело с *общими* свойствами чисел наравне с частными (и доказываем эти свойства посредством рассуждений).

Однако математическое рассуждение зачастую совсем не схоже с рассуждениями в других областях. Оно скорее похоже на те рассуждения, которыми пользовались софисты, как пишет об этом Де Лонг (1970):

> ...Мы знаем, что имелись учителя, называвшие себя софистами. Подобно странствующим трубадурам, они путешествовали из города в город, за определённую плату обучая своих учеников убедительно говорить на различные темы. Софисты учили и тому, как отражать доводы любого оппонента в публичном споре. Сами споры нередко бывали очень острыми, а доводы —- весьма театральными, так что мы можем понять, почему прибытие в город известного софиста заставляло публику волноваться, и почему софисты зачастую просили за свои услуги немалую плату.
>
> Протагор, которого часто называют самым выдающимся софистом, несомненно считался бы и крупным мыслителем, если бы его работы сохранились. Более всего он известен своим изречением “человек есть мера всех вещей” и своим гуманизмом, представляющимся нам непривычно современным. Следующая античная история о нём, пусть она и является апокрифом, демонстрирует нам словесную пиротехнику, на которую софисты были большими мастерами.

[1]Перевод выполнен А. И. Щетниковым по изданию: Jonathan P. Seldin. Reasoning in the Elementary Mathematics. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics. Université Laval*, 1989.

> Протагор подрядился учить Еватла риторике с тем, чтобы тот мог выступать в суде. Еватл заплатил авансом половину условленной платы, и они договорились, что вторая половина будет выплачена, когда Еватл выиграет своё первое дело в суде. Однако Еватл не спешил начать свою судебную практику. Протагор, равно озабоченный и своей репутацией, и получением денег, решил возбудить против него дело. В суде Протагор заявил следующее: “Еватл утверждает, что он не должен платить мне, но это абсурдно. Предположим, что он выиграет это дело. Поскольку это его первое дело в суде, он должен будет заплатить мне по нашему договору. Предположим теперь, что он проиграет дело. Тогда он должен будет заплатить мне по решению суда. Тем самым ему придётся платить в любом случае, проиграет он или выиграет”. Еватл, как способный ученик, противопоставил доводам Протагора аналогичные собственные: “Протагор утверждает, что я должен заплатить ему, но это абсурдно. Предположим, что он выиграет это дело. Поскольку я не выиграл своё первое дело в суде, я не должен буду платить ему по нашему договору. Предположим теперь, что он проиграет дело. Тогда я не должен буду платить ему по решению суда. Тем самым я не должен буду платить в любом случае, проиграет он или выиграет” (стр. 9—10).

Вообразите подобный случай в современной классной комнате!

С другой стороны, в математике мы пользуемся доводами такого рода постоянно. И даже если рассказанной истории и не случилось на самом деле, она всё равно служит хорошей иллюстрацией, показывающей различия между рассуждением в математике и рассуждениями в других областях.

Другое различие состоит в том, что математика интересуется доказательствами в том числе и интуитивно очевидных результатов. Этот интерес также восходит к древним грекам, как это отмечает Эрик Стениус (1978):

> Если “приводить доказательство” означает “доказывать неочевидное исходя из очевидного”, то тогда греческие математики не были первыми, кто стал доказывать теоремы; но весьма правдоподобным выглядит утверждение, что греки были первыми, кто стал искать доказательств для очевидных фактов. Поэтому я утверждаю: действительно оригинальная и революционная идея греческих геометров заключалась в их стремлении отыскивать доказательства очевидных фактов.

Разницу между доказательством неочевидного посредством очевидного и доказательством очевидного можно показать на примере теоремы о сумме углов треугольника. Пифагорейцы пользовались известным чертежом (рис. 1), который можно найти и во многих современных учебниках. Если мы проведём прямую DCE, параллельную AB (здесь слово “параллельная” употреблено скорее в эпистемологическом смысле “проходящая рядом с другой прямой”, нежели в евклидовом смысле “не пересекающая другой прямой”), то теорема станет очевидна, если только посмотреть на чертёж правильным образом. Ведь очевидно, что равны накрестлежащие углы в паре DCA и CAB, равно как и накрестлежащие углы в паре ECB и CBA. Если заметить, что с одной стороны DCE равен трём углам DCA, ACB, BCE, с другой же стороны —- двум прямым углам, то теорема там самым станет очевидной.

Но если мы попробуем доказать, что упомянутые накрестлежащие углы являются равными, то эта попытка доказывать очевидное столкнётся с разного рода трудностями, которые, как это известно математикам, привели 2000 лет спустя к низвержению евклидовой геометрии как системы “математических истин” (стр. 258—259).

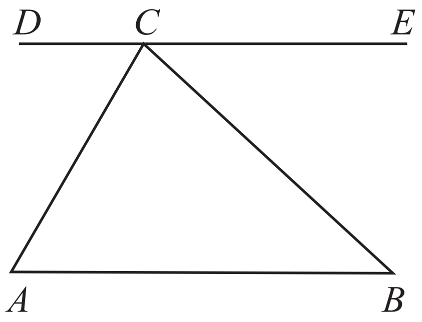


Рис.1

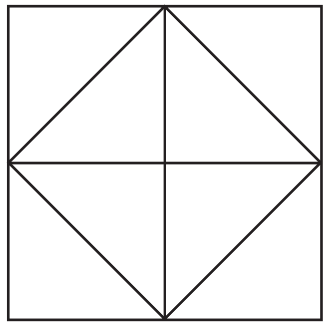


Рис.2

Другой пример такого рода доказательства (неочевидного на основе очевидного, когда требуется посмотреть на чертёж правильным образом), имеется в диалоге Платона *Менон*, где Сократ пользуется следующим чертежом (рис. 2), чтобы показать, что квадрат на диагонали квадрата вдвое больше исходного квадрата по площади.

Ещё один пример даёт нам следующее доказательство теоремы Пифагора (рис. 3). Это доказательство называют иногда “доказательством с помощью перекладывания”.

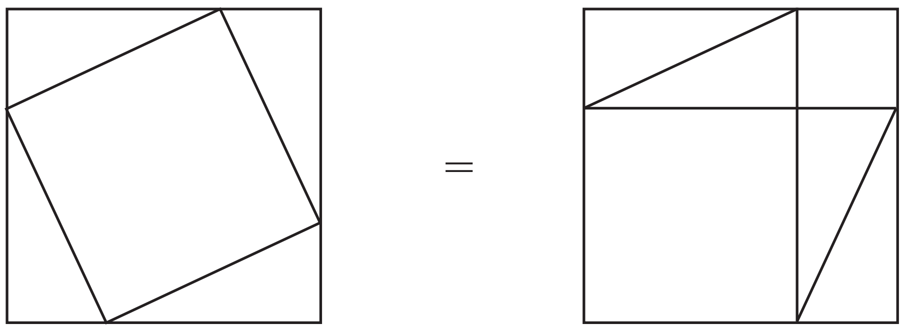


Рис. 3

Согласно Торетти (1978), вскоре после Фалеса (ок. 639—546 до н. э.) греки начали развивать новый способ доказательства, в котором понимание основывалось не на рассмотрении чертежа, но на работе со значениями употребляемых терминов. Это были первые дедуктивные доказательства в математике. В целом это утверждение согласуется со старейшим фрагментом дедуктивной математики, представленным в 21—34 предложениях IX книги *Начал* Евклида, основывающихся на определениях VII книги (особенно на 6 и 7). Для каждого из этих доказательств приводится чертёж, но он не служит основой для понимания. Чтобы понять доказательство, нужно понимать смысл употребляемых слов и следить за этим смыслом. Как отмечает Торетти,

> Если бы греческие математики не приняли этот метод точного, сильного и неинтуитивного мышления, они никогда не смогли бы установить существование несоизмеримых величин, каковыми являются, к примеру, два отрезка, не являющиеся кратными никакому другому отрезку, каким бы малым он ни был.

Далее Торетти цитирует Б. Л. Ван-дер-Вардена:

> Имея дело с эмпирически рассматриваемыми и измеряемыми отрезками, никому не придёт в голову спрашивать, имеют ли они общую меру; толщина волоса уложится целое число раз в любой линии, которую мы только сумеем провести. Вопрос о соизмеримости является осмысленным только для таких отрезков, которые являются объектами мысли.

(Именно эту точку зрения на математику и следует донести до учащихся.)

Греки уже знали, что существуют несоизмеримые величины. Их открытие обычно приписывается Пифагору либо его ученикам. Хизс (1981) пишет об этом так:

> Метод, с помощью которого пифагорейцы доказали, что $\sqrt{2}$ несоизмерим с единицей, несомненно совпадает с методом, описанным Аристотелем [Первая аналитика 41a26—27], когда посредством доказательства от противного показывается, что если бы диагональ квадрата была соизмерима с его стороной, то тогда одно и то же число было бы и чётным, и нечётным. Это несомненно то же самое доказательство, что и интерполированное в текст Евклида доказательство X.117.
>
> Предположим что диагональ квадрата AC соизмерима с его стороной AB; пусть их отношение выражено наименьшей парой чисел $\alpha : \beta$. Тогда $\alpha > \beta$, и по необходимости $\alpha > 1$. Тогда $AC^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$; и поскольку $AC^2 = 2AB^2$, то и $\alpha^2 = 2\beta^2$. Тогда α^2, и тем самым α, будет чётным. Раз отношение $\alpha : \beta$ выражено наименьшей парой чисел, тем самым β будет *нечётным*. Положим $\alpha = 2\gamma$. Тогда $4\gamma^2 = 2\beta^2$, и тем самым $2\gamma^2 = \beta^2$. Поэтому β^2, и тем самым β, будет *чётным*. Но β является также нечётным: а это невозможно. Тем самым диагональ AC не может быть соизмеримой со стороной AB.

Отметим, что хотя это доказательство и может сопровождаться чертежом, на котором изображены квадрат и его диагональ, чертёж ничего не даёт нам для его понимания. От предложений IX книги *Начал* Евклида оно принципиально отличается тем, что является *косвенным*. Как объяснить преобразование греческой математики из визуальной и интуитивной науки в абстрактную, основывающуюся на понимании значений терминов и смысла рассуждений, в которых эти термины используются? Наше объяснение должно по возможности касаться того, почему это преобразование совершили именно греки, а не кто-нибудь ещё. И было бы хорошо, чтобы оно давало нам такой материал, с помощью которого мы могли бы объяснить своим ученикам, чем занимается математика.

Можно начать с того, что греки любили спорить, как об этом рассказывает Де Лонг в истории о Протагоре и Еватле. Кроме того, в отличие от других ранних античных обществ они не имели всемогущего класса жрецов. Поэтому у них не было таких вопросов, на обсуждение которых было бы наложено табу.

Однако эта любовь к спору ради спора ещё недостаточна для того, чтобы объяснить изменения, произведённые греками в математике. Ведь это изменение касается не только путей установления истины. Оно относится также и к переходу от практической деятельности к чистому умозрению. Математика, известная нам по египетским и вавилонским источникам, всегда была связана с такими видами практической деятельности, как землемерие и архитектура. И только греки стали заниматься ей теоретически, не имея в виду непосредственной практической выгоды, о чём говорит следующая история, которую приводит Хизс (1981):

> Один ученик, который только что начал учиться геометрии у Евклида, спросил, едва только разобрав первое предложение: “А какую пользу я получу от изучения этого?” Евклид подозвал раба и сказал: “Дай ему обол, ибо он хочет извлекать выгоду из того, что изучает”.

Поскольку почти все фрагменты доевклидовой греческой математики сегодня утрачены, мы не можем быть полностью уверены в том, какая именно причина привела к подобному изменению. Однако имеется есть ряд предположений на этот счёт.

Одно из таких предположений высказал Арпад Сабо. В своей работе (1978) он утверждает, что это изменение произошло под действием внешних для математики факторов, в частности, под влиянием философской школы элеатов. Это была школа Парменида (начало 5 века до н. э.) и его ученика Зенона (ок. 490 — ок. 430 до н. э.). Последний известен своим парадоксами движения. Сабо обрисовывает философию элеатов так:

> Их философию отличает отказ от практического опытного знания и от опоры на чувственное восприятие. ПАРМЕНИД провозгласил, что истина не может быть постигнута с помощью чувственного восприятия, которое ошибочно, но единственно лишь с помощью разума. Чтобы прояснить, что он понимал под “разумом”, я приведу здесь один из его аргументов, в котором говорится о том, что сущее на могло возникнуть, но было всегда:
>
> “Предположим, что оно возникло; тогда оно могло возникнуть либо из того, что было, либо из того, чего не было; третьей возможности здесь нет. Если оно возникло из того, что было, то оно существовало уже до того, как возникло; поэтому бессмысленно утверждать, что оно возникло таким образом. Если же предположить, что оно возникло из того, чего не было, то это немедленно приведёт к противоречию. То, что есть, никогда не могло быть тем, чего не было; поэтому оно не могло возникнуть и этим путём.”
>
> Косвенные доводы несомненно играли в философии элеатов важную роль. Без них нельзя было бы обосновать учение о том, что не существует *движения*, *возникновения*, *исчезновения*, *пространства* и *времени*. Это учение противоречит свидетельствам наших чувств; однако элеаты, поддерживаемые своей верой в то, что разум является единственным проводником к истине, приняли его. Более того, вся диалектика элеатов представляет собой метод косвенного доказательства, поэтому АРИСТОТЕЛЬ и объявил ЗЕНОНА изобретателем диалектики. < ... > Однако нет никакой существенной разницы между диалектикой ЗЕНОНА и доводами ПАРМЕНИДА. Их самая достопримечательная общая черта состоит в применении косвенного доказательства. Итак, я считаю, что влияние философии элеатов привело как к устранению эмпиризма и зрительной очевидности из греческой математики, так и к внедрению в неё косвенных доказательств.

Концепция САБО сводится к тому, что математика стала теоретической дисциплиной в результате попыток сделать её предмет приемлемым для философов Элейской школы. Это было весьма затруднительно, поскольку эти философы отвергали множественность (без которой заведомо нельзя обойтись в арифметике) и пространство (необходимое в геометрии). Согласно САБО, приемлемость арифметики была достигнута за счёт определения единицы по сути дела таким же образом, как ПАРМЕНИД определял сущее; прочие же числа были представлены как особая разновидность множественности, не встречающаяся в чувственно воспринимаемом мире. Вслед за этим были предприняты попытки чисто теоретического, дедуктивного построения геометрии; однако сделать её полностью приемлемой для элеатов не удалось. Именно поэтому, считает САБО, геометрия в результате оказалась отдельной наукой.

К сожалению, как пишет об этом ТОРЕТТИ (1978), доводы САБО не являются “полностью приемлемыми”. К примеру, САБО настаивает на том, что теория несоизмеримости (т. е. иррациональных величин), изложенная в X книге *Начал* ЕВКЛИДА, была завершена ещё до эпохи ПЛАТОНА, поскольку ПЛАТОН в своих диалогах употребляет её технические термины таким образом, который свидетельствует о том, что его аудитория была с ними хорошо знакома. Однако ПЛАТОН дожил до своего 80-летия в 347 г. до н. э.; и его жизнь был достаточно долгой, чтобы эти технические термины приобрели широкую известность за её время, и даже за часть этого времени. Г. Б. КАРРИ, студентом которого я был, отметил своё 62-летие в тот год, когда П. Дж. КОЭН ввёл термин “форсинг” в доказательстве независимости континуум-гипотезы, поэтому за оставшиеся годы своей жизни (а он дожил до 81 года) он мог употреблять этот термин перед аудиторией математиков, занимающихся математической логикой и теорией множеств, предполагая, что эта аудитория полностью понимает его смысл.

Альтернативная концепция, представляющаяся существенно более приемлемой, была предложена КНОРРОМ (1975). (Эта концепция в действительности была предложена позднее теории САБО, поскольку книга последнего (1978) является переводом книги, опубликованной на немецком языке в 1969 году.) Согласно этой концепции, превращение в теоретическую дисциплину произошло в рамках изучения несоизмеримости. Knorr сформулировал этот тезис, представив реконструкцию развития этой теории.

Knorr начинает с рассмотрения арифметики поздних пифагорейцев в V веке до н. э. Он утверждает, что использовавшиеся здесь "чертежи" представляли собой фигуры, выложенные рядами камешков, так что теоремы о чётных и нечётных числах из 21—34 предложений IX книги *Начал* Евклида могли основываться на рассмотрении этих фигур. К примеру, рассмотрим фигуры для предложений 21 (рис. 4) и 22 (рис. 5) и сравним их с текстом:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21.

Если складывается сколько угодно чётных чисел, то целое будет чётным.

Пусть сколько угодно чётных чисел, AB, BC, CD, DE, складываются вместе; я утверждаю, что целое AE будет чётным. Действительно, поскольку каждое из чисел AB, BC, CD, DE является чётным, оно имеет половину; [VII. Опр. 6] поэтому и целое AE также имеет половину. Но чётное число делится на две равные половины; [id.] поэтому AE является чётным. Что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22.

Если складывается сколько угодно нечётных чисел, и их количество является чётным, то целое будёт чётным.

Пусть сколько угодно нечётных чисел, AB, BC, CD, CE, в чётном количестве, складываются вместе; я утверждаю, что целое AE будет чётным. Действительно, поскольку каждое из чисел AB, BC, CD, DE является нечётным, если от каждого из них отнять единицу, остатки будут чётными; [VII. Опр. 7] поэтому их сумма будет чётной. [IX. 21] Но количество единиц также является чётным. Поэтому целое AE является чётным. [IX. 21] Что и требовалось доказать.

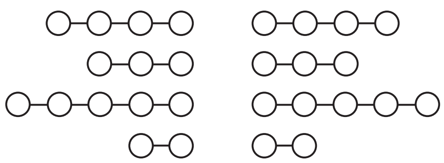


Рис. 4

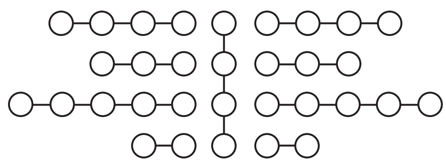


Рис. 5

Насколько больше дают для понимания этих доказательства фигуры Knorra по сравнению с чертежами, приводимым в изданиях Евклида!

Заметьте, что важной составляющей понимания этих доказательств при правильном рассматривании фигур является понимание того, что выводы будут истинными не только для данной конкретной фигуры, но для любой фигуры, удовлетворяющей условиям предложений.

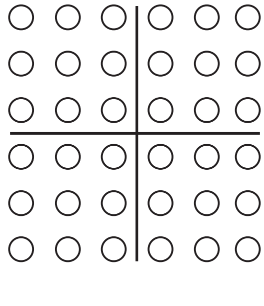


Рис. 6

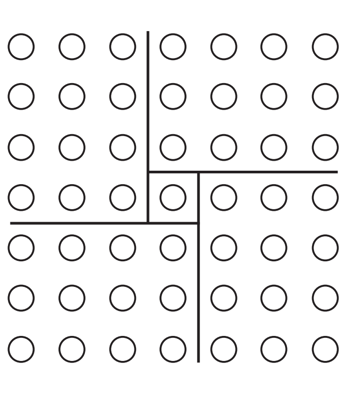


Рис. 7

Для изучения свойств квадратных чисел камешки укладываются в квадраты. Таким образом можно доказать, что квадрат чётного числа является чётным, и даже делится на четыре (рис. 6). И опять мы можем пользоваться одним чертежом для квадрата любого чётного числа.

Аналогичный чертёж (рис. 7) используется для того, чтобы доказать, что квадрат любого нечётного числа является нечётным, а остаток за вычетом единицы делится на четыре части. Заметим, что четыре прямоугольника на схеме всегда будут такими, что одна их сторона будет на единицу больше другой; тем самым эти прямоугольники всегда являются чётными, поэтому мы приходим к более сильному заключению о том, что *квадрат нечётного числа за вычетом единицы делится на восемь.*

Эти результаты получаются и алгебраически: $(2n)^2 = 4n^2$ и $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Поскольку либо n, либо $n + 1$ будет чётным, чётным будет и их произведение.

Если мы применим эти результаты к проблеме отыскания троек чисел, которые служили бы катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника в свете теоремы Пифагора, мы незамедлительно придём к следующим результатам:

1. Если гипотенуза чётная, то чётными будут и оба катета.

2. Если гипотенуза нечётная, то один катет будет чётным, а другой нечётным.

Ключ к этим результатам состоит в том, что сумма двух нечётных квадратов не может делиться на четыре. Алгебраически: $(8n+ 1) + (8m+ 1) = 4(2n + 2m) + 2$.

Кнопп предположил, что несоизмеримость стороны и диагонали квадрата была открыта тогда, когда эти результаты были приложены к практической проблеме определения отношения диагонали квадрата к его стороне, или, что то же самое, отношения гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника к его катету. Эта попытка приводит в неожиданный тупик. Ведь если гипотенуза будет чётной, то тогда чётными будут и оба катета, и поэтому мы сможем разделить их пополам и получить новые равнобедренные прямоугольные треугольники в половину от исходного. Повторяя эту процедуру раз за разом, мы опять и опять будем получать равнобедренные прямоугольные треугольники с чётной гипотенузой. Такой процесс будет бесконечным, а в области чисел это невозможно. Если же гипотенуза будет нечётной, то тогда один катет будет чётным, а другой нечётным. Но поскольку треугольник является равнобедренным, нам придётся заключить, что чётное число равно нечётному, что абсурдно. Выход из тупика состоит единственно в том, чтобы признать наше рассуждение за косвенное доказательство того, что диагональ и сторона квадрата не имеют общей меры.

Заметим, что это косвенное доказательство уже не может быть понято посредством рассматривания чертежа. Согласно Кноппу, именно в этой ситуации в греческой математике появились косвенные доказательства и такие доказательства, в которых понимание смысла доказательства требует точного понимания значений всех используемых терминов. (По Кноппу, это произошло около 430 г. до н. э. Это слишком поздно для того, чтобы внедрение косвенных доказательств шло прямо от элеатов, однако оно могло быть связано с элеатами опосредованно через других философов.)

Соблазнительно думать, что это открытие вызвало сильный кризис в математике и философии, поскольку пифагорейцы считали, что всё во Вселенной может быть выражено с помощью целых чисел. Более того, в самой математике отношение было определено для чисел, так что общая теория подобия осталась без основания. Но этого не произошло. Математики и философы продолжали заниматься своим делом; в частности, геометры продолжали пользоваться теорией подобных фигур. (Нечто схожее произошло в начале XX века, когда были открыты парадоксы в основаниях теории множеств; большинство математиков продолжали пользоваться этой теорией, будто ничего не случилось.) Похоже, что единственное заметное изменение в математике, вызванное этим открытием, состояло во введении доказательств от противного и доказательств, требующих скорее абстрактного рассуждения, нежели рассмотрения чертежей.

Согласно Кноппу, следующий шаг развития был сделан Феодором из Кирены (годы расцвета с 410 по 390 до н. э.), решившим изучать несоизмеримость. Кнопп реконструировал то, как Феодор доказывал несоизмеримость стороны единичного квадрата со сторонами квадратов, площадь которых равна 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 единицам; в этой реконструкции геометрия и теория чисел используются в том же объёме, который требовался для доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Этот метод доказательства отказывал для числа 17 (поскольку 17 за вычетом единицы делится на 8). Эта реконструкция делает правдоподобным интерпретацию диалога Платона *Теэтет* в качестве общего воззрения на историю развития математической теории. В диалоге, действие которого происходит в 399 г до н. э., Теэтет (414 —- 369 до н. э.) рассказывает о том, как его учитель Феодор, объясняя свою теорию, остановился, дойдя до числа 17. (Как указывает Кнорр, текст следует читать так, что число 17 привело Феодора в замешательство.)

Диалог продолжается утверждением Теэтета о том, что квадратный корень любого целого числа, которое не является точным квадратом, является иррациональным. Кнорр реконструировал, как Теэтет (одновременно с Архитом Тарентским, около 390 до н. э.) доказал этот результат; это доказательство требует развития как теории чисел, так и геометрии. Более того, поскольку теория чисел прикладывалась к геометрии, числа стали теперь представлять отрезками, а не фигурами из камешков (Кнорр говорит, что это произошло во время Феодора). Это представление заметно заслоняет собой тот факт, что доказательства первоначально предполагали разглядывание фигур; теперь математика стала чисто теоретической дисциплиной.

Одним из приписываемых Теэтету результатов было определение отношения и пропорции для несоизмеримых величин. (Кнорр настаивает на том, что Феодор не имел такого определения и не нуждался в нём. Кнорр говорит здесь о теории пропорций, однако Фаулер (1979) показал, что в действительности это была теория отношений. Слово "отношение" у Евклида по сути дела не определяется.) Эта теория была не той, что изложена в V книге *Начал* Евклида, но более ранней, не описанной ни в каких сохранившихся источниках, так что её пришлось реконструировать по отдельным следам.

Теэтет работал в Академии Платона в Афинах. После его смерти к Академии присоединился Евдокс (395 — 340 до н. э.), и математики продолжали там свою работу. Кнорр полагает, что в это время Платон побуждал математиков излагать свои теории в таком виде, который мы могли бы назвать аксиоматическим, когда все используемые в доказательствах теоремы (исключая аксиомы, постулаты и определения) строго доказываются. Согласно Кнорру, Евдокс попытался доказать теорему о том, что если $A : C = B : C$, то $A = B$, ранее принимавшуюся без доказательства. Доказать её на основе определения отношения, данного Теэтетом, оказалось исключительно трудно. Поэтому, когда Евдокс нашёл более простое доказательство этого же результата на основе определения, известного как 5 определение V книги *Начал* Евклида (оно является определением пропорции, а не отношения), он смог заменить теорию Теэтета более простой теорией. В конечном счёте теория Теэтета оказалась полностью забытой.

Эта историческая реконструкция, выполненная Кнорром, показывает, что математика стала теоретической дисциплиной, основанной на аксиоматическом подходе, в результате математических (а не философских) требований, исходивших от центральной теории, изучавшейся в это время, а именно от теории несоизмеримости. Более того, приведённый выше обзор этой реконструкции, начиная от косвенного доказательства несоизмеримости стороны квадрата с его диагональю, легко может быть представлен учащимся, начинающим изучать алгебру.

Это приводит нас к мысли о некоторых изменениях в начальном курсе алгебры. Я предполагаю начать с примера рассуждения без символов, представленного в начале статьи (или аналогичного ему), чтобы показать, что алгебра отличается от арифметики использованием непрямых рассуждений для решения задач и доказательством результатов в общем виде. Затем я выведу элементарные формулы для площадей фигур, используя чертежи. Формулу для площади прямоугольника можно вывести пересчитыванием квадратов; я начну с прямоугольников, стороны которых являются целыми числами, а затем перейду к прямоугольникам, стороны которых выражаются рациональными дробями. (На этой стадии я опущу всякое упоминание о иррациональных сторонах.) Затем я докажу формулы для площади параллелограмма (рис. 8) и треугольника (рис. 9).

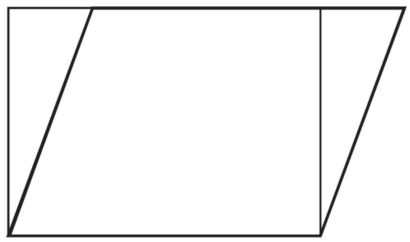


Рис. 8

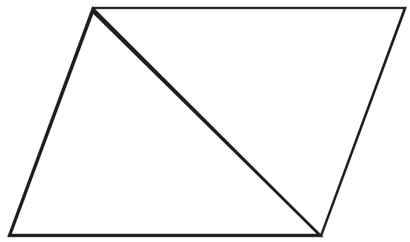


Рис. 9

Теорему Пифагора можно доказать с помощью чертежа, приведённого выше. Можно использовать камешки для доказательства элементарных теорем о чётных и нечётных числах, а далее перейти к теоремам о пифагоровых тройках и к предложенной Кнорром версии доказательства несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

Здесь я выберу время для критики прежнего подхода к прямоугольникам с рациональными сторонами. Эта критика будет проистекать из беспокойства о том, что имеются случаи, не охваченные нашим доказательством. В других предметах часто используется критика того, что было принято на предыдущих ступенях, и я думаю, что математика не должна быть исключением. Затем я перейду к использованию алгебраических обозначений для решения простейших уравнений и прочим традиционным вопросам.

Позднее в этом курсе хорошо будет поставить вопрос о площади круга. Я представлю результат в той форме, как он был доказан Архимедом: площадь круга равна площади треугольника, основание которого равно длине окружности, а высота —- радиусу. Я использую следующий чертёж (рис. 10).

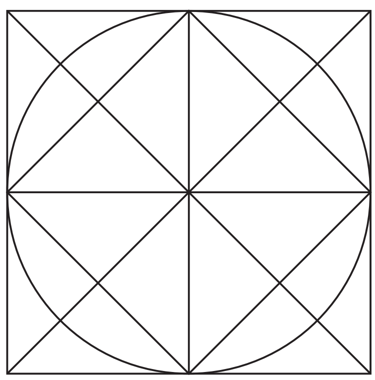


Рис. 10

Здесь изображена окружность со вписанным и описанным квадратами. Каждый квадрат разделен на четыре треугольника, основания которых образуют периметр, а вершины находятся в центре круга. Внимательно рассматривая чертёж, можно заметить, что площадь каждого квадрата равна площади треугольника, высота которого равна высотам четырёх треугольников, а основание равно периметру. В случае вписанного квадрата периметр меньше длины окружности и высота меньше радиуса; в случае описанного квадрата периметр больше длины окружности и высота равна радиусу. Если мы удвоим число сторон вписанного и описанного многоугольников, упомянутые неравенства сохранятся, согласно формуле для площади правильного многоугольника. Периметры же и площади станут заметно ближе друг к другу. Представив себе непрерывное удвоение числа сторон, мы должны будем прийти к площади круга. Это делает теорему Архимеда гораздо более понятной. Однако проблема отыскания более тщательного доказательства приводит к понятию предела, и обсуждение этой проблемы может помочь в подготовке путей к более углубленным курсам.

Литература

[1] Архимед. *Сочинения.* Пер. и комм. И. Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.

[2] Ван-дер-Варден Б. Л.. *Пробуждающаяся наука.* М.: Физматгиз, 1959.

[3] Евклид, *Начала.* Пер. и комм. Д. Д. Мордухай-Болтовского. В 3 т. М.: Изд-во АН СССР, 1948—51.

[4] DeLong H. *A Profile of Mathematical Logic.* Addison-Wesley, Reading: MA, 1970.

[5] Fowler D. H. Ratio in early Greek mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* n.s., **1**, pp. 807—846, 1979.

[6] Heath T. L. *A History of Greek Mathematic*s, 2 vols, NY: Dover, 1981.

[7] Herscovics N. Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In: *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebr*a, 4. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1989, pp. 60—86.

[8] Knorr W. R. *The Evolution of the Euclidean Element*s. Dordrecht: Reidel, 1975.

[9] Middlemiss R.. R. *College Algebra.* NY: McGraw-Hill, 1953.

[10] Stenius E. Foundations of mathematics: ancient Greek and modern. *Dialectic*a, 32, pp. 255—290, 1978.

[11] Szabø A. *The Beginnings of Greek Mathematics.* Dordrecht: Reidel, 1978. (См. также Сабо А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования. *Историко-математические исследования*, 12, 1959, с. 321—392.)

[12] Toretti R. *Philosophy of Geometry from Reimann to Poincaré.* Dordrecht: Reidel, 1978.

Джонатан П. Селдин,
Факультет математики и информатики,
Университет города Летбридж,
Альберта, Канада.

E-mail: jonathan.seldin@uleth.ca

Лекции по аналитической геометрии

С. Кулешов, А. Салимова, С. Ставцев

Заканчиваем публикацию лекций по аналитической геометрии, прочитанных курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н. Е. Жуковского. В настоящем номере содержится тема 11. Темы 9 и 10 опубликованы в номере 1(53), 2010 г.

Тема 11

Поверхности второго порядка

В этой теме нам предстоит познакомиться с поверхностями второго порядка, т. е. поверхностями, заданными в прямоугольной системе координат уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0.$$

В курсе «Аналитическая геометрия» для математических специальностей доказывается теорема о классификации поверхностей второго порядка, имеющая важное теоретическое значение для вещественной геометрии. В нашем же курсе мы ограничимся лишь знакомством с этими поверхностями. Основная цель — научить читателя схематически изображать поверхность второго порядка по ее уравнению, используя метод сечений, без чего очень сложно выполнять упражнения по математическому анализу из раздела «Кратные интегралы».

Метод сечений состоит в том, что мы рассекаем поверхность плоскостями, параллельными координатным, получая что-то вроде горизонталей на топографической карте — линий, проходящих по точкам, расположенным на одной высоте относительно уровня моря. Имея по крайней мере два набора таких горизонталей, уже можно представить себе поверхность.

1. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка, описываемая в подходящей прямоугольной системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geqslant b \geqslant c > 0).$$

(Здесь и далее уравнения поверхностей приводятся в каноническом виде.) Исследуя уравнение, легко заметить, что каждая координата входит в него во второй степени, что свидетельствует о симметрии эллипсоида относительно координатных плоскостей. Действительно, если точка с координатами (x_0, y_0, z_0) принадлежит поверхности, то ей же принадлежат точки с координатами $(\pm x_0, \pm y_0, \pm z_0)$.

Изобразим эллипсоид, применив метод сечений. Рассечем нашу поверхность плоскостью $z = h$, где h — произвольная константа. На языке уравнений это записывается в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — это проекция сечения на координатную плоскость $z = 0$, которая представляет собой эллипс[1]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \ \Leftrightarrow \ \frac{x^2}{[a(h)]^2} + \frac{y^2}{[b(h)]^2} = 1$$

с полуосями $a(h) = \dfrac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$ и $b(h) = \dfrac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$. Проекции изображены на рис. 11.1, *а*. Эллипс наибольшими полуосями a и b будет получаться при сечении эллипсоида плоскостью $z = 0$. Затем с увеличением $|h|$ полуоси проекций будут уменьшаться до тех пор, пока в сечении плоскостями $|z| = c$ не получится точка. Если же $|h| > c$, то плоскость $z = h$ вообще не пересекает поверхность. Это говорит о том, что эллипсоид расположен между горизонтальными плоскостями $z = -c$ и $z = c$.

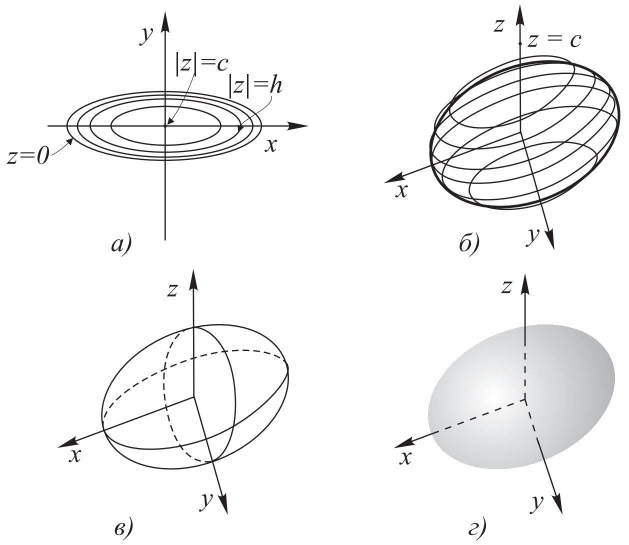


Рис. 11.1. Эллипсоид

Чтобы представить себе поверхность, надо понять, как расположены исследованные сечения друг относительно друга в пространстве, для чего посмотрим на сечение какой-нибудь вертикальной плоскостью, например $y = 0$. При этом получим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

который на рис. 11.1, *б* изображен жирной кривой.

Теперь форма эллипсоида становится абсолютно понятна (рис. 11.1, *в* и *г*). Обратите внимание, что эта поверхность получила свое название потому, что среди ее сечений плоскостями появляются только эллипсы.

2. Конус

Среди поверхностей второго порядка есть особая поверхность, которая называется *конусом*. Особенность поверхности заключается в наличии *особой точки*, т. е. точки, в которой

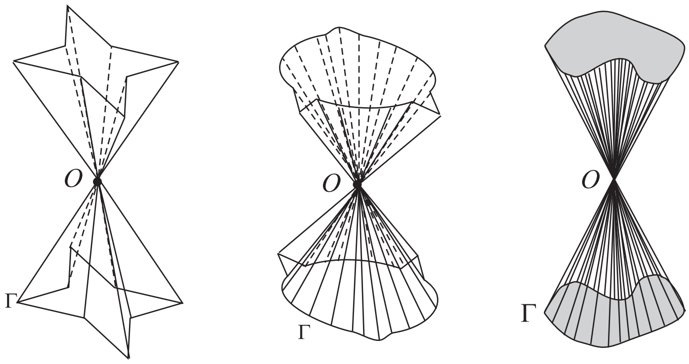
[1] Уравнения проекций кривых на координатную плоскость будут записываться как уравнения плоских кривых, даже если кривые расположены в пространстве.

невозможно провести касательную плоскость к поверхности. В наш курс не входит обсуждение касательных плоскостей и особых точек поверхности, поэтому подробно останавливаться на этом мы не будем.

Любопытно, что обыденное представление о конусе сводится к привычному эллиптическому конусу, т. е. именно к той поверхности второго порядка, с которой нам нужно познакомится. Однако бывает очень много различных конусов, вид которых практически ничем не напоминает эллиптический конус (рис. 11.2). Общее определение конуса выглядит следующим образом.

2.1. Определение. Пусть дана кривая Γ и точка O, не лежащая в плоскости кривой Γ, если кривая плоская. Конусом с *направляющей* Γ называется поверхность, заметаемая прямыми (образующими), проходящими через *вершину* O и все точки на кривой Γ.

Рис. 11.2. Общий конус



2.2. Определение. *Эллиптическим конусом* называется поверхность второго порядка, которая в подходящей системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad a\geqslant b>0,\ c\geqslant 0.$$

Направляющая эллиптического конуса (или просто конуса) — это эллипс, который получается при пересечении поверхности плоскостью $z=c$. Его уравнение в плоскости Oxy Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Его вершина расположена в начале координат $O(0,0,0)$.

Убедимся в том, что наш конус действительно образован прямыми, проходящими через вершину O и точки эллипса Γ. Возьмем произвольную точку $M(x_0,y_0,c)$, принадлежащую Γ. Ее координаты должны обращать уравнение эллипса в тождество, т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1. \tag{11.1}$$

Рассмотрим прямую, проходящую через вершину и точку M_0. Ее параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x=tx_0, \\ y=ty_0, \\ z=tc, \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Действительно, точки $O(0,0,0)$ и $M_0(x_0,y_0,c)$ принадлежат прямой. Значит ее направляющий вектор $\overrightarrow{a}(x_0,y_0,c)$, что дает приведенные выше параметрические уравнения.

Подставим координаты произвольной точки нашей прямой в уравнение конуса:

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2}+\frac{(y_0t)^2}{b^2}-\frac{(ct)^2}{c^2}=0.$$

Полученное соотношение сокращается на t^2 и получается тождество

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}=0,$$

поскольку $M_0(x_0, y_0, c)$ принадлежит эллипсу. Следовательно, наша прямая действительно лежит на конусе и является его образующей.

После этого анализа легко изобразить эллиптический конус (рис. 11.3).

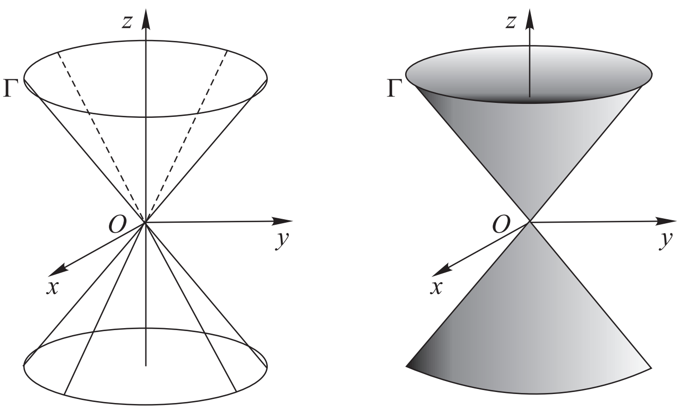


Рис. 11.3. Эллиптический конус

3. Гиперболоиды

Гиперболоиды бывают двух типов: двуполостные и однополостные. Начнем с двуполостного гиперболоида.

3.1. Двуполостный гиперболоид. Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, в подходящей прямоугольной системе координат описываемая уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (a \geqslant b > 0,\ c > 0).$$

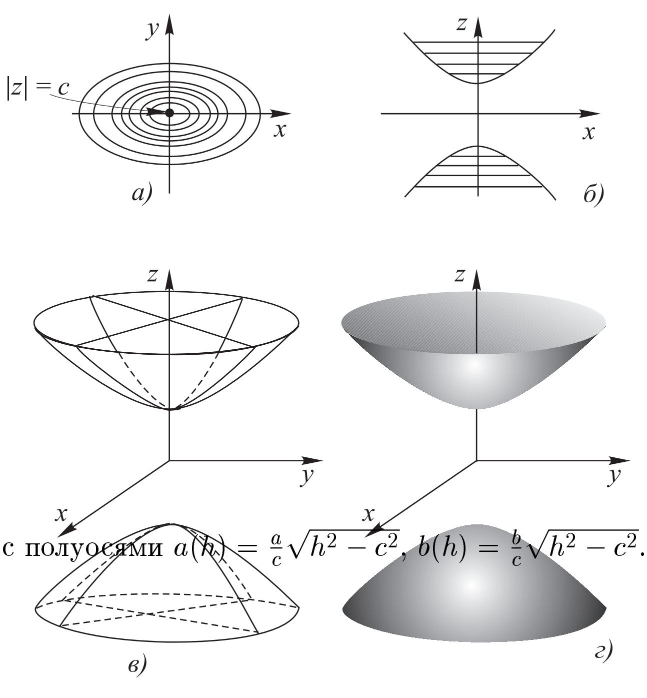


Рис. 11.4. Двуполостный гиперболоид

Здесь, как и в уравнении эллипсоида, координаты входят во вторых степенях. Значит, эта поверхность симметрична относительно всех трех координатных плоскостей.

Начнем ее исследование с горизонтальных сечений плоскостями $z = h$. Проекция такого сечения на плоскость $z = 0$ описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1,$$

что можно переписать как каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{[a(h)]^2} + \frac{y^2}{[b(h)]^2} = 1,$$

с полуосями $a(h) = \frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}$, $b(h) = \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2}$.

В этой ситуации плоскость $z = h$ не пересекает исследуемую поверхность, если $|h| < c$. Плоскости $z = \pm c$ отсекут от двуполостного гиперболоида только по точке. А затем, с ростом $|h|$ полуоси эллипсов в сечении будут расти до бесконечности при $|h| \to \infty$. Горизонтальные сечения представлены на рис. 11.4, *а*.

Чтобы «склеить» горизонтальные сечения вместе, проведем вертикальную плоскость $y = 0$. Она рассечет двуполостный гиперболоид по гиперболе, описываемой уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Гипербола вместе с проекциями горизонтальных сечений отражена на рис. 11.4, *б*. Полностью двуполостный гиперболоид показан на рис. 11.4, *в* и *г*.

3.2. Однополостный гиперболоид. Однополостным гиперболоидом называют поверхность, которая в подходящей прямоугольной системе координат описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a \geqslant b > 0,\ c > 0).$$

В это уравнение координаты входят во вторых степенях, что свидетельствует о симметрии поверхности относительно координатных плоскостей.

Рассекая однополостный гиперболоид горизонтальными плоскостями $z = h$, получаем эллипсы, проекции которых на плоскость Oxy задаются уравнениями

$$\frac{x^2}{[a(h)]^2} + \frac{y^2}{[b(h)]^2} = 1,$$

где $a(h) = \frac{a}{c}\sqrt{h^2 + c^2}$, $b(h) = \frac{b}{c}\sqrt{h^2 + c^2}$. Мы видим, что любая горизонтальная плоскость при пересечении этого гиперболоида даст эллипс. Самый маленький, с полуосями a и b, получится в пересечении с плоскостью $z = 0$. Проекции сечений показаны на рис. 11.5, *а*

Проведем теперь плоскость $x = 0$. Она рассечет однополостный гиперболоид по гиперболе

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

которая вместе с проекциями горизонтальных сечений представлена на рис. 11.5, *б*.

Имея горизонтальные и вертикальное сечения, можно представить себе, как выглядит однополостный гиперболоид (он изображен на рис. 11.5, *в* и *г*).

Обратите внимание, что среди сечений гиперболоидов присутствуют только эллипсы и гиперболы. Это облегчит процесс отождествления поверхности с ее названием. Кроме того, однополостный гиперболоид отличается от двуполостного тем, что в нем лишь одна часть (полость), в то время как в двуполостном их две.

У однополостного гиперболоида есть еще одно замечательное свойство, заключающееся в том, что на нем лежат прямые. Действительно, рассечем гиперболоид плоскостью $y = b$. Получим кривую, которая описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = b, \\ \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}. \end{cases}$$

Ясно, что эта кривая состоит из двух пересекающихся прямых:

$$l_1\colon \begin{cases} y = b, \\ \frac{x}{a} = \frac{z}{c}; \end{cases} \qquad l_2\colon \begin{cases} y = b, \\ \frac{x}{a} = -\frac{z}{c}. \end{cases}$$

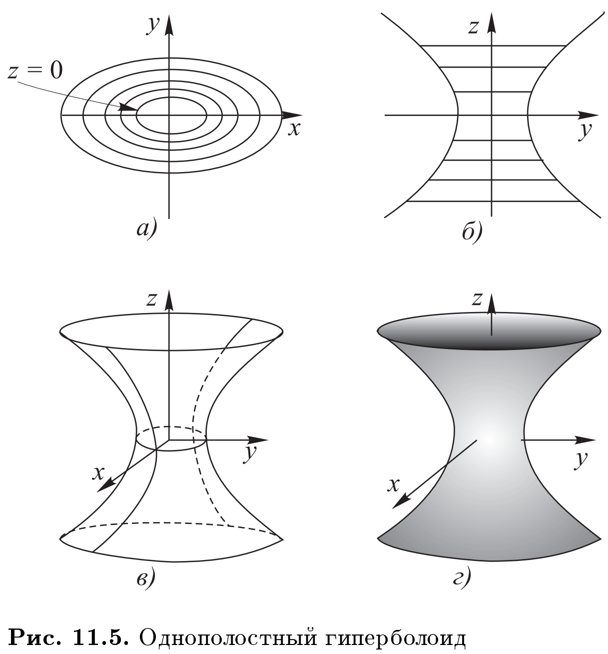


Рис. 11.5. Однополостный гиперболоид

На самом деле на однополостном гиперболоиде лежит не одна пара прямых, а бесконечно много пар, но мы оставим это замечание в качестве трудной, но интересной задачи.

4. Параболоиды

К параболоидам относятся поверхности второго порядка, среди плоских сечений которых присутствуют параболы. Различают два типа параболоидов: эллиптический и гиперболический.

4.1. Эллиптический параболоид. *Эллиптическим параболоидом* называют поверхность, которая в подходящей прямоугольной системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad p > 0,\ q > 0.$$

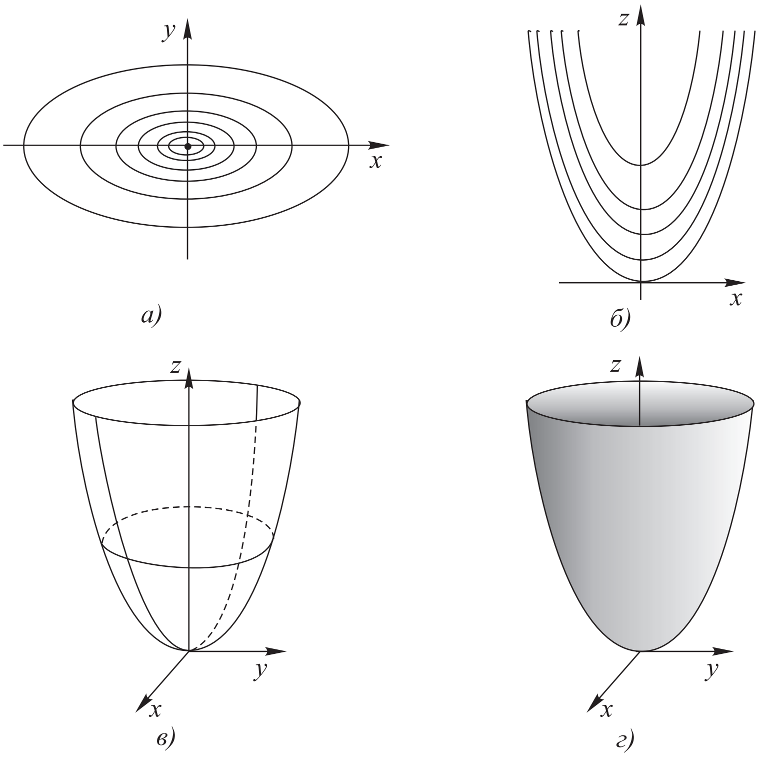


Рис. 11.6. Эллиптический параболоид

Заметим, что данная поверхность симметрична относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz, поскольку переменные x и y входят в ее уравнение во вторых степенях.

Исследуем сечения эллиптического параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$. Поскольку левая часть уравнения принимает только неотрицательные значения, то при $h < 0$ плоскость $z = h$ не пересекает нашу поверхность. Значит, вся поверхность расположена выше плоскости $z = 0$, которая при пересечении параболоида дает точку с координатами $(0, 0, 0)$. Если $h > 0$, то в сечении будет получаться эллипс, чья проекция на плоскость Oxy описывается уравнением

$$\frac{x^2}{2hp} + \frac{y^2}{2hq} = 1.$$

Поэтому полуоси эллипса $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$ увеличиваются с ростом h. Проекции этих сечений изображены на рис. 11.6, *а*.

Займемся вертикальными сечениями плоскостями $y = h$. Проекции сечений на плоскость Oxz описываются уравнениями

$$\frac{x^2}{p} + \frac{h^2}{q} = 2z$$

и являются параболами с вершиной в точке $(0, h^2/q)$, причем ветви парабол направлены вверх. Их изображение представлено на рис. 11.6, *б*. Набор сечений позволяет представить себе поверхность целиком. Она нарисована на рис. 11.6, *в* и *г*.

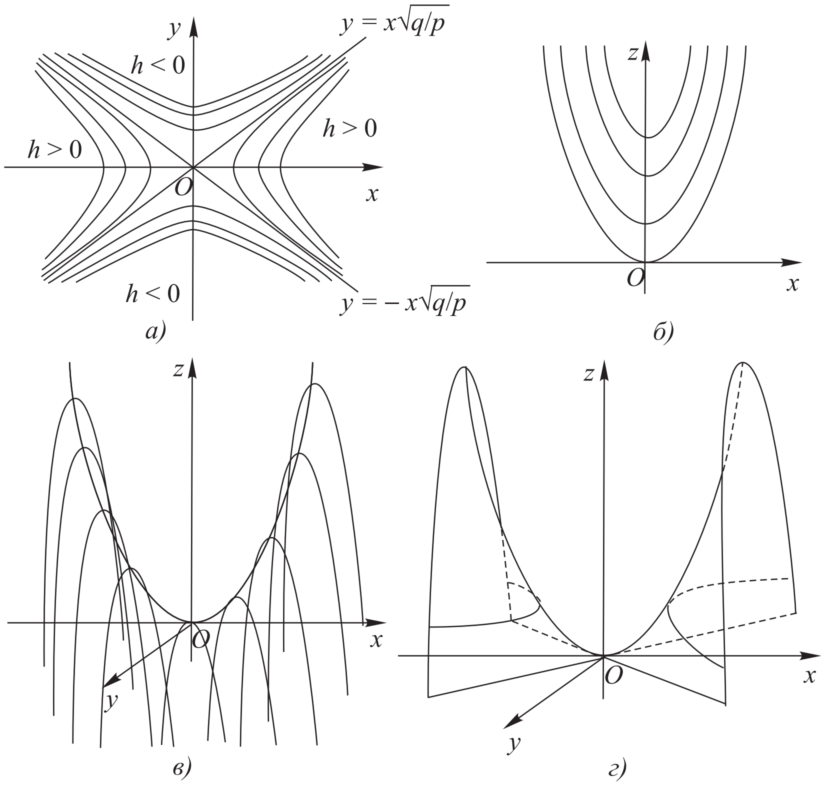
4.2. Гиперболический параболоид. Гиперболическим параболоидом называют поверхность, среди плоских сечений которой присутствуют как параболы, так и гиперболы. Она задается уравнением

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \qquad p > 0,\ q > 0$$

и симметрична относительно плоскостей Oxz и Oyz, но в отличие от эллиптического параболоида у нее есть точки как над плоскостью $z = 0$, так и под ней.

Как обычно, начнем исследовать гиперболический параболоид с горизонтальных сечений плоскостями $z = h$. Если $h > 0$ (рис. 11.7, *а*), то в сечении получается гипербола с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$. Обратите внимание, что вершины ее проекции на плоскость $z = 0$ лежат на оси Ox. По мере уменьшения «высоты» сечения вершины получающихся гипербол все ближе и ближе подходят к оси Oz, а ветви гипербол становятся все более «прямыми». В результате при $h = 0$ в сечении вместо гипербол появляется пара прямых, описываемых уравнениями $y = \pm\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}x$. Наконец, при $h < 0$ вновь получим гиперболы с полуосями $\sqrt{2p|h|}$ и $\sqrt{2q|h|}$ и вершинами проекций, расположенными на оси Oy. Иными словами, гиперболы при проходе через плоскость $z = 0$ поменяют свою ориентацию, что конечно, удивительно, но дает слабое представление о поверхности.

Рис. 11.7.
Гиперболический параболоид



Возьмем вертикальное сечение плоскостью $y = 0$. Тут уже получается парабола

$$P_{y=0}\colon x^2 = 2pz, \qquad y = 0, \tag{11.2}$$

вершина которой попадает в начало координат, а ветви направлены вверх. Обозначим эту параболу через $P_{y=0}$. Заметьте, что если брать сечения, параллельные этому, то мы снова будем получать параболы с ветвями, направленными вверх, но их вершины будут подниматься над плоскостью $z = 0$ (рис. 11.7, *б*).

Обратимся к плоскостям $x = h$. Они также рассекают гиперболический параболоид по параболам $P_{x=h}$, но их ветви направлены вниз: $-\dfrac{y^2}{q} = -\dfrac{h^2}{p} + 2z$. Заметим, что вершина такой параболы имеет пространственные координаты $\left(h, 0, \frac{h^2}{2p}\right)$. Подставив эти координаты в уравнение (11.2), легко убедиться, что вершина любой параболы $P_{x=h}$ попадает на параболу $P_{y=0}$. Из этого можно сделать вывод, что наша поверхность образована точками парабол $P_{x=h}$, которые катаются по параболе $P_{y=0}$ (рис. 11.7, *в*). Гиперболический параболоид изображен на (рис. 11.7, *г*). Эту удивительную поверхность часто называют «обезьяньим седлом» (рис. 11.8).

5. Цилиндры

Последний тип поверхностей, с которыми нам предстоит познакомиться, называется цилиндром. Как и в случае конуса, понятие «цилиндр» намного более широкое, чем просто «труба». Общее определение цилиндра выглядит так.

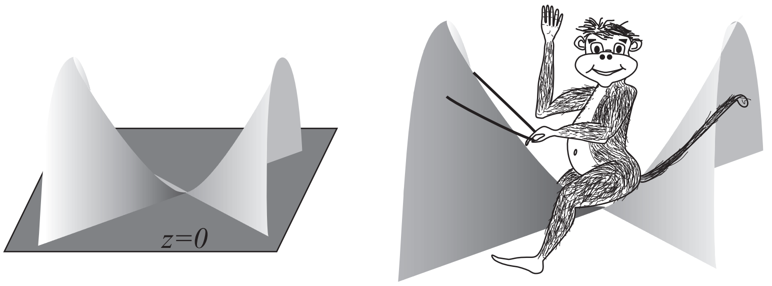


Рис. 11.8. Обезьянье седло

5.1. Определение. Пусть дана плоская кривая Γ. Цилиндром с направляющей Γ называется поверхность, которую заметут все прямые, проведенные через каждую точку кривой Γ перпендикулярно плоскости, в которой лежит эта кривая.

Обратите внимание, что любую плоскость тоже можно считать цилиндром (почему?).

Обсудим, каким уравнением может задаваться цилиндр. Для этого в плоскости направляющей Γ зафиксируем прямоугольную систему координат Oxy и дополним ее до прямоугольной системы координат пространства $Oxyz$. Предположим, что кривая Γ в системе координат Oxy описывается уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{11.3}$$

Подумаем, что представляет собой множество точек пространства (x, y, z), удовлетворяющих этому уравнению.

Заметьте, что в уравнение (11.3) не входит переменная z. Поэтому, если пара чисел (x_0, y_0) обращает это уравнение в тождество, то для любого значения $z = h$ тройка (x_0, y_0, h) является решением уравнения (11.3). Это означает, что вместе с каждой точкой (x_0, y_0, h), принадлежащей множеству решений уравнения (11.3), в это множество входит целая прямая

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если рассматривать уравнение (11.3) как уравнение поверхности в трехмерном пространстве, то получается цилиндр.

Нас интересуют цилиндры, чьи направляющие — кривые второго порядка. К ним относятся эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры (см. рис. 11.9):

эллиптический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$
параболический цилиндр	$y^2=2px,$
гиперболический цилиндр	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

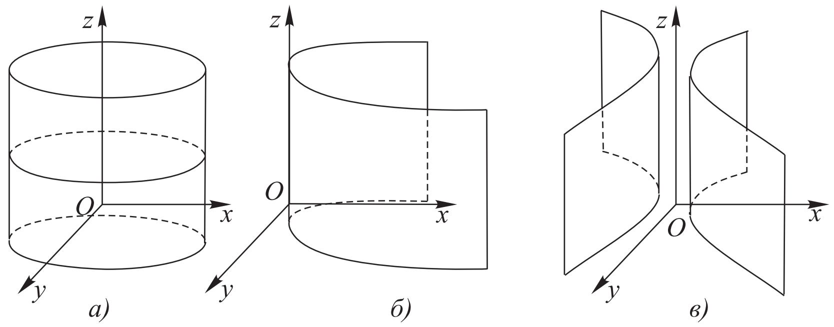


Рис. 11.9. Цилиндры: *а)* эллиптический; *б)* параболический; *в)* гиперболический

Примеры решения типовых задач

Пример 11.1. Найти центр и радиус сферы $x^2+y^2+z^2=6x-8z$.

Решение. Для решения задачи выделим полный квадрат относительно переменных x и z:

$$x^2+y^2+z^2=6x-8z \;\Leftrightarrow\; x^2-6x+y^2+z^2+8z=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-6x+9)-9+y^2+(z^2+8z+16)-16=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+y^2+(z+4)^2=25.$$

Таким образом, центром сферы является точка $A(3,0,-4)$, а ее радиус $r=5$.

Пример 11.2. Определить тип поверхности, заданной уравнением $x^2=z-1$. Изобразить эту поверхность.

Решение. Обратим внимание, что в уравнении отсутствует переменная y, поэтому поверхность является цилиндром с образующей, параллельной оси Oy. Тогда для исследования и изображения поверхности достаточно исследовать ее сечением плоскости $y=0$, т. е. рассмотреть линию, описываемую системой

$$\begin{cases} x^2=z-1, \\ y=0. \end{cases}$$

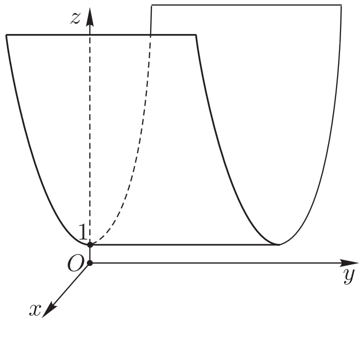


Рис. 11.10. К примеру 11.2

Из уравнения $z=x^2+1$ видно, что этой линией является парабола, лежащая в плоскости Oxz, ветви которой направлены вдоль оси Oz, а вершина расположена в точке $A(0,0,1)$. Поэтому для изображения поверхности строим в плоскости Oxz параболу, а затем с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy изображаем заданную поверхность (см. рис. 11.10).

Пример 11.3. Изобразить поверхность $y=-\sqrt{x^2+z^2}$.

Решение. Для решения задачи обратим внимание на уравнение, похожее на (11.1):

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0, \tag{11.4}$$

которое также является уравнением конуса с осью симметрии Oy. Однако уравнение (11.4) равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} y = \sqrt{x^2+z^2}, & \text{для} \quad y > 0; \\ y = -\sqrt{x^2+z^2}, & \text{для} \quad y \leqslant 0. \end{array}\right.$$

Нам задано только второе уравнение $y = -\sqrt{x^2+z^2}$, справедливое только для $y \leqslant 0$. Поэтому нам достаточно изобразить часть конуса (для $y \leqslant 0$) с осью симметрии Oy, как это сделано на рис. 11.11.

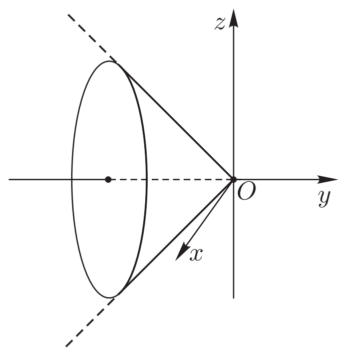


Рис. 11.11. К примеру 11.3

Пример 11.4. Методом сечений исследовать поверхность, заданную уравнением $z = 2 - x^2 - y^2$, и построить эту поверхность.

Решение. Для изображения этой поверхности применим один из наиболее универсальных методов построения поверхности — метод сечений. Для этого исследуем сечения поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям, т. е.

1) плоскостью, параллельной Oxy;

2) плоскостью, параллельной Oxz;

3) плоскостью, параллельной Oyz.

1) Так как плоскость, параллельная Oxy, задается уравнением $z = h$, то уравнение линии пересечения поверхности с плоскостью имеет вид

$$\begin{cases} 2 - x^2 - y^2 = h, \\ z = h. \end{cases}$$

Если $h > \sqrt{2}$, то из первого уравнения системы $x^2 + y^2 = 2 - h < 0$ следует, что общих точек у плоскости и поверхности нет.

Если $h \leqslant \sqrt{2}$, то система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - h, \\ z = h \end{cases}$$

задает окружность, лежащую в плоскости $z = h$, с центром в точке $M(0,0,h)$ и радиусом $r = \sqrt{2-h}$. При $h = 0$ радиус окружности $r = \sqrt{2}$, а при $h = 2$ окружность вырождается в точку (см. рис. 11.12, a).

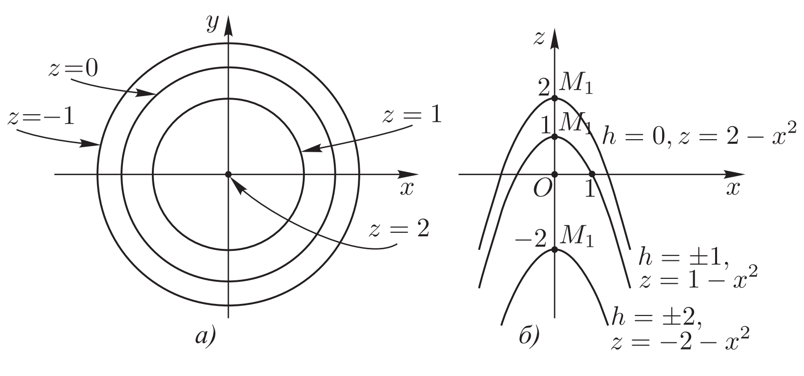


Рис. 11.12. Сечения поверхности в примере 11.4

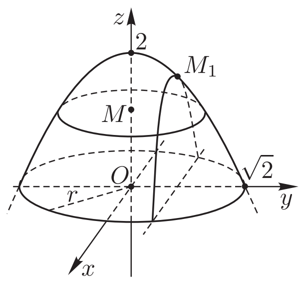


Рис. 11.13. Поверхность из примера 11.4

2) Линия пересечения поверхности плоскостью $y = h$ определяется системой

$$\begin{cases} z = 2 - h^2 - x^2, \\ y = h. \end{cases}$$

Линия пересечения представляет собой параболу, лежащую в плоскости $y = h$. Ветви параболы направлены против оси Oz, а вершина расположена в точке $M_1(0, h, 2 - h^2)$ (см. рис. 11.12, *б*, рис. 11.13).

3) Сечение поверхности плоскостью, параллельной Oyz, рассмотрите самостоятельно (сечения аналогичны сечениям из п. 2).

Суммируя результаты, полученные из анализа сечений, рисуем поверхность (см. рис. 11.13).

Заметим, что эту поверхность можно получить вращением ветви параболы вокруг оси Oz. Этот факт можно заметить непосредственно из самого уравнения, так как $z = f(x^2 + y^2)$.

Пример 11.5. Изобразить область, заданную системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, \\ 3z \geqslant x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. Оно задает шар с центром в начале координат и радиусом 2.

Границей области, задаваемой вторым неравенством системы, является эллиптический параболоид с вершиной в начале координат. Осью симметрии параболоида является ось Oz.

Для изображения области необходимо найти линию пересечения параболоида $3z = x^2 + y^2$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Для этого из первого уравнения величину $x^2 + y^2$ подставим во второе уравнение: $3z + z^2 = 4$.

Решив получившееся квадратное уравнение относительно z, получаем $z_1 = 1$ и $z_2 = -4$. Так как сфера имеет радиус, равный 2, то, очевидно, по линии при $z_2 = -4$ сфера и параболоид пересекаться не могут. Таким образом, линия пересечения двух поверхностей задается системой

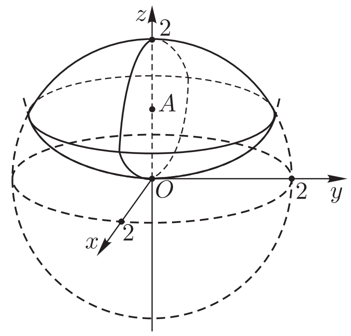


Рис. 11.14. К примеру 11.5

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z = 1. \end{cases}$$

Эта линия представляет собой окружность с центром в точке $A(0, 0, 1)$ и радиусом $\sqrt{3}$ (см. рис. 11.14).

Обратим внимание, что координаты точки $A(0, 0, 1)$ удовлетворяют неравенству $3z \geqslant x^2 + y^2$, поэтому это неравенство задает ту область пространства, которая ограничена поверхностью $3z = x^2 + y^2$ и в которой лежит точка A (см. рис. 11.14).

Учитывая все наши рассуждения, строим область, заданную системой неравенств так, как показано на рис. 11.14.

Контрольные вопросы

11.1. В чем состоит метод сечений?

11.2. Запишите уравнение эллипсоида в каноническом виде.

11.3. Какие линии получаются при изображении эллипсоида методом сечений?

11.4. Запишите уравнения гиперболоидов в каноническом виде.

11.5. Какие линии получаются при изображении однополостного гиперболоида методом сечений?

11.6. Какие линии получаются при изображении двуполостного гиперболоида методом сечений?
11.7. Что называется конусом и направляющей конуса?
11.8. Запишите уравнение эллиптического конуса.
11.9. Запишите уравнения параболоидов в каноническом виде.
11.10. Какие линии получаются при изображении эллиптического параболоида методом сечений?
11.11. Какие линии получаются при изображении гиперболического параболоида методом сечений?
11.12. Дайте определение цилиндра с направляющей Г.
11.13. Запишите уравнения цилиндров — эллиптического, гиперболического и параболического.
11.14. Изобразите эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры с образующими, параллельными оси Ox.
11.15. Изобразите эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры с образующими, параллельными оси Oy.

Задачи

11.1°. Изобразите поверхности:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; б) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 = 16$; г) $z = y^2$;
д) $y^2 - z^2 + 1 = 0$; е) $y^2 = x^2$.

11.2°. Изобразите поверхности:

а) $x^2 = y^2 + z^2$; б) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$; в) $z^2 = 2x^2 + 2y^2 - 6$; г) $z^2 = 1 + x^2 + 3y^2$;
д) $x^2 + y^2 + 5z = 0$; е) $z^2 = x^2 + y$.

11.3. Приведите уравнения к каноническому виду и определите тип поверхности, которые они описывают:
а) $y^2 = 4x + 8y$; б) $3x = 4\sqrt{y^2 + z^2}$;
в) $x^2 + 4y^2 - z^2 + 4 = 0$; г) $x^2 + y^2 + z^2 = x + 2y + 3z$;
д) $4z^2 = x^2 + y^2$; е) $2x^2 + 3y^2 + z - 2 = 0$;
ж) $y = -\sqrt{100 - 4x^2 - 100z^2}$;
з) $x^2 + 4y^2 - z^2 + 4x + 8y - 6z = 0$;
и) $y^2 - x^2 + 8z + 2x = 0$.

11.4. Изобразите тела, ограниченные поверхностями:
а) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 2$;
б) $x = \sqrt{y}$, $x = 2\sqrt{y}$, $y + z = 6$, $z = 0$;
в) $x^2 = 2y$, $y = 2$, $x + z = 3$, $z = 0$;
г) $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$;
д) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

11.5. Изобразите тела, заданные системами неравенств:
а) $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, $z \geqslant 0$, $z \leqslant 1$, $y \geqslant x$;
б) $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \leqslant 1$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

11.6. Изобразите линию пересечения поверхностей $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4x$ (кривая Вивиани). Найдите ее проекцию на координатную плоскость Oxy.

11.7*. На однополостном гиперболоиде $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$ выбрана точка $M(3, 2, 4)$. Найдите уравнения двух прямых, целиком лежащих на гиперболоиде и проходящих через точку M.

11.8*. Проверьте, что через каждую точку эллипса

$$\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0\right\}$$

проходят ровно две прямые, целиком лежащие на однополостном гиперболоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. (Указание: подставьте параметрические уравнения прямой $\{x=x_0+\alpha t,\ y=y_0+\beta t,\ z=\gamma t\}$ в уравнение гиперболоида, учитывая, что точка $(x_0,y_0,0)$ принадлежит гиперболоиду, и выясните, при каких условиях на коэффициенты α, β и γ получается тождество относительно параметра t.)

11.9*. Докажите, что через каждую точку параболы

$$\left\{x_0^2=2pz_0,\ y=0\right\}$$

проходят ровно две прямые, целиком лежащие на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$. (Указание: подставьте параметрические уравнения прямой $\{x=x_0+\alpha t,\ y=\beta t,\ z=z_0\gamma t\}$ в уравнение гиперболического параболоида, учитывая, что точка $(x_0,0,z_0)$ принадлежит этому параболоиду, и выясните, при каких условиях на коэффициенты α, β и γ получается тождество относительно параметра t.)

Кулешов Сергей Алексеевич, дфмн, профессор кафедры “Высшая математика” Военно-воздушной Академии имени проф. Н. Е. Жуковского. E-mail: KuleshovSergej@rambler.ru

Салимова Альфия Фаизовна, кпн, доцент той же кафедры. E-mail: afsalimova@mail.ru

Ставцев Станислав Леонидович, кфмн, доцент той же кафедры. E-mail: stav@inm.ras.ru

Занимательная математика

Ладные квадраты и игра ЛАДОКА

Б. А. Тарасенко

Начиная с 2004 г. журналист и математик-любитель Борис Алексеевич Тарасенко проводит в рамках работы Школьного выездного кружка занимательной математики (ШВКЗМ) ознакомительные уроки-конкурсы игры ЛАДОКА. Материалом занятий служат ладные квадраты (подобие магических), состоящие из простых чисел, а также специальные равенства на их основе. (Аналогия с названием популярной числовой игры СУДОКУ — чисто внешняя.) В ряде библиотек города Королева Московской области есть книга автора "Ладные квадраты", в 2010 г. вышла книга "ЛАДОКА на одинока" (тираж 100 экз.). Адрес для писем и предложений: 141070 Королев Московской обл., ул. Октябрьская, 10, школа №1, для Тарасенко Б.А.

Весьма интересны числовые квадраты размером 3×3 клетки, состоящие из разных по величинам и однотипных чисел, в которых суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы. Такие квадраты известны с глубокой древности. Квадрат Ло-шу "чудесным образом" явлен в Китае 3200 лет тому назад правителю Поднебесной Вэнь-Вану (Ло-шу — это запись из [реки] Ло). Древний "китаец" заполнен начальным отрезком натурального ряда чисел:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Мною предложено называть бесконечное множество конструкций с *простыми числами* "ладными квадратами". Далее показан первый ладный квадрат в бесконечном ряду ранжированных и пронумерованных подобных квадратов:

71	5	101
89	59	29
17	113	47

Из ладных квадратов можно "собирать" интересные равенства, например,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 433 & 199 & 631 \\ \hline 619 & 421 & 223 \\ \hline 211 & 643 & 409 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 269 & 167 & 353 \\ \hline 347 & 263 & 179 \\ \hline 173 & 359 & 257 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 163 & 31 & 277 \\ \hline 271 & 157 & 43 \\ \hline 37 & 283 & 151 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Все три ладных квадрата в левой части показанного равенства составлены из простых чисел.

Пять вариантов развивающих занимательных математических игр с ладными квадратами третьего порядка я называю объединены мною под одним названием ЛАДОКА. ЛАД — от слова "ладный", ДОКА — "знаток, специалист"; вместе — игра и игрок. Вот пример задания в одном из вариантов игры. Найдите повторяющееся число Z для квадрата справа, а также простые числа для пустых клеток слева, зная, что все квадраты обладают свойством ладности (со своей ладной суммой для каждого квадрата):

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 193 & 19 & \\ \hline 199 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 101 \\ \hline & 281 & 107 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline Z & Z & Z \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Веками считалось, что магические квадраты приносят счастье. Опыт проведения занятий ШВКЗМ показывает, что игра ЛАДОКА пробуждает у школьников интерес к математике, позволяет увидеть красоту числовых соотношений и приносит им радость математического творчества.