ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятнадцатый

№ 1 (57)

январь – март 2011 г.

Москва

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (57), январь – март 2011 г.

Содержание

О далекой точке прикосновения

Т. Ю. Веселяева

"При изучении наук примеры полезнее правил".
Исаак Ньютон

В статье описан подход к преподаванию математики в рамках системно-деятельностной парадигмы. Подробно рассмотрено одно из ключевых понятий этого подхода — ориентировочная основа действия (ООД). На базе известной классификации ООД предложен способ визуализации, когда учащийся может увидеть тип используемой им ООД. Рассмотрены многочисленные примеры. Высказывается мнение, что новые государственные образовательные стандарты должны в большей мере опираться на психологические закономерности и структуру познавательной деятельности учащихся.

Как следует учить математике? Этот вопрос неоднократно обсуждался среди профессиональных математиков и был одним из ключевых на Съезде учителей математики, вновь созванном после длительного перерыва по инициативе ректора МГУ В. А. Садовничего. Как учить так, чтобы не только способные, а буквально все ученики приняли и полюбили этот предмет, убедились в том, что математика — это просто и красиво? Ответ на этот вопрос теснейшим образом связан с другим ключевым вопросом: чему учить? В одном из пунктов своей резолюции съезд предлагает провести профессиональное обсуждение содержания школьного математического образования. Но ответ на вопрос о содержании математического образования для профессионального математика часто естественным образом следует из того, что же представляет собой современная математика. Например, А. Я. Хинчин считал, что "без всякого сожаления и без всяких колебаний нужно изгнать из школьных программ все архаизмы" [1:17], и "одной из основных забот новой программы должна стать забота ... о том, чтобы преподавание велось в точном согласии с установками современной науки..." [1:19]. Одним из таких архаизмов школьных программ А. Я. Хинчин считал арифметические задачи, развивающие сообразительность, поскольку на уроках алгебры ребенок "научится решать те же задачи легко, естественно, почти механически" [1:167]. Возможно ли вообще, учить математике "в точном согласии с установками современной науки"? Математика настолько обширна, что "ни один математик не в состоянии проследить это развитие во всех подробностях, даже если он посвятит этому всю свою деятельность. Многие из математиков устраиваются в каком-то закоулке математической науки, откуда они и не стремятся выйти, и не только почти полностью игнорируют все то, что не касается предмета их исследований, но не в силах даже понять язык и терминологию своих собратьев, специальность которых далека от них" [2:245]. Тем не менее, группой французских математиков, известной под псевдонимом Николя Бурбаки (Nicolas Bourbaki) были выделены единый предмет математики, названный математической структурой, и общий для всей математики метод — аксиоматический [2]. Действительно, заключительный этап развития любой математической теории — формализация: выбор неопределяемых понятий и отношений между ними, перечисление аксиом (требований к этим отношениям). Необходимость формализации математической теории возникает из стремления к строгости в доказательствах, сам же аксиоматический метод породил сильнейшие обобщения — математические структуры. Но результаты обучения во французской школе, исходя из принципов Бурбаки, до возникновения у школьников потребности в строгих рассуждениях и обобщениях, печальны. Это неоднократно и очень ярко описывал В. И. Арнольд (см., например, [3]). Реформы математического образования, проводимые одним из крупнейших отечественных математиков 20-го века А. Н. Колмогоровым, были не приняты даже его учениками. В. М. Тихомиров считает, что "именно на этом поприще Андрей Николаевич потерпел большую и, пожалуй, единственную во всей его необыкновенно счастливой творческой жизни неудачу" [4]. В. И. Арнольд так писал о педагогических идеях Колмогорова: "Мой учитель, Андрей Николаевич Колмогоров, очень меня убеждал, когда он начинал свою реформу, принять участие в этой реформе и переписывать все учебники, делать их по-новому и излагать, как он хотел, бурбакизировать школьную математику и так далее. Я категорически отказался, прямо чуть не поссорился с ним, потому что, когда он мне стал рассказывать свою идею, это был такой вздор, про который мне было совершенно очевидно, что пропускать его к школьникам нельзя. К сожалению, после него еще несколько академиков пропустили, и они сделали еще хуже, чем он. Я боюсь этим заниматься, сейчас я не берусь за это дело, в частности, пользуясь вот этим всем опытом. Уважаемые мною люди, А. Д. Александров, Погорелов, Тихонов, Понтрягин — все приняли участие и все написали плохо" [5]. Возникает вопрос: почему плохо? Казалось бы, приоритетная цель математического образования самоочевидна: интеллектуальное развитие (см., например, статью [6]). Приоритет этой цели еще раз подтвержден участниками недавнего съезда. Почему же идти к этой цели получается лишь с одаренными учениками? Видимо, ответ на этот вопрос следует искать в той области знания, к которой относится понятие: интеллектуальное развитие. И этой областью знания является психология. Поэтому грамотная реализация стандартов общего образования второго поколения, в основу которых положен не только пришедший с запада компетентностный, но и отечественный системно-деятельностный подход, может вернуть математике ее основное предназначение. Но для этого нужно понять психологические основы стандартов.

Рассмотрим одну из центральных категорий деятельностной теории — действие: "Действие — это целостная система взаимосвязанных между собой элементов. В ходе выполнения действия эти элементы обеспечивают три основные функции: ориентировочную, исполнительскую, контрольно-корректировочную... В процессе учебной деятельности каждая из частей действия может стать и самостоятельным действием... Исполнительская часть тоже может стать самостоятельным действием, если учитель выполнит за ученика ориентировочную часть... чисто исполнительские функции должны быть по возможности исключены из учебного процесса, потому, что они формируют механические навыки, не обеспечивают понимания" [7:98-99]. Значит, определяющую роль для понимания играет именно ориентировочная часть действия, которая заключается в построении так называемой ориентировочной основы действия (ООД) или попросту ориентировки. На основе ориентировки (хорошо или плохо построенной) происходит дальнейшее управление исполнительской и контрольно-корректировочной частями действия: "Ориентировочная основа действия — это система условий, на которую реально опирается человек при выполнении действия" [8:55]. В математике в состав ООД могут входить формулы, теоремы, определения, алгоритмы. Ориентировочная основа действия может совпадать с системой условий, объективно необходимой для выполнения действия, а может и не совпадать с ней. Например, для решения уравнения школьники часто используют неподходящий алгоритм, поскольку не включают в свою ориентировочную основу действия определения, необходимые для распознавания типа уравнения. Или включают в нее лишнее условие. И тогда, например, увидев квадратный трехчлен, немедленно приравнивают его к нулю и решают квадратное уравнение, хотя для выполнения задания этого и не требуется. Какая же ориентировочная основа действия с точки зрения психологов наиболее продуктивна? Н. Ф. Талызиной [8:88] по трем характеристикам, определенным П. Я. Гальпериным (обобщенности, полноте и способу получения) теоретически выделены восемь типов ориентировочной основы действия (первые три столбца таблицы 1).

Характеристика ООД по обобщенности	Характеристика ООД по полноте	Характеристика ООД по способу получения	Тип ООД
Конкретная	Неполная	Составлена самостоятельно	I (0;0;1)
Конкретная	Полная	Дается готовая	II (0;1;0)
Обобщенная	Полная	Составлена самостоятельно	III (1;1;1)
Обобщенная	Полная	Дается готовая	IV (1;1;0)
Обобщенная	Неполная	Дается готовая	V (1;0;0)
Обобщенная	Неполная	Составлена самостоятельно	VI (1;0;1)
Конкретная	Полная	Составлена самостоятельно	VII (0;1;1)
Конкретная	Неполная	Дается готовая	VIII (0;0;0)

Таблица 1. Восемь типов ориентировочной основы действия

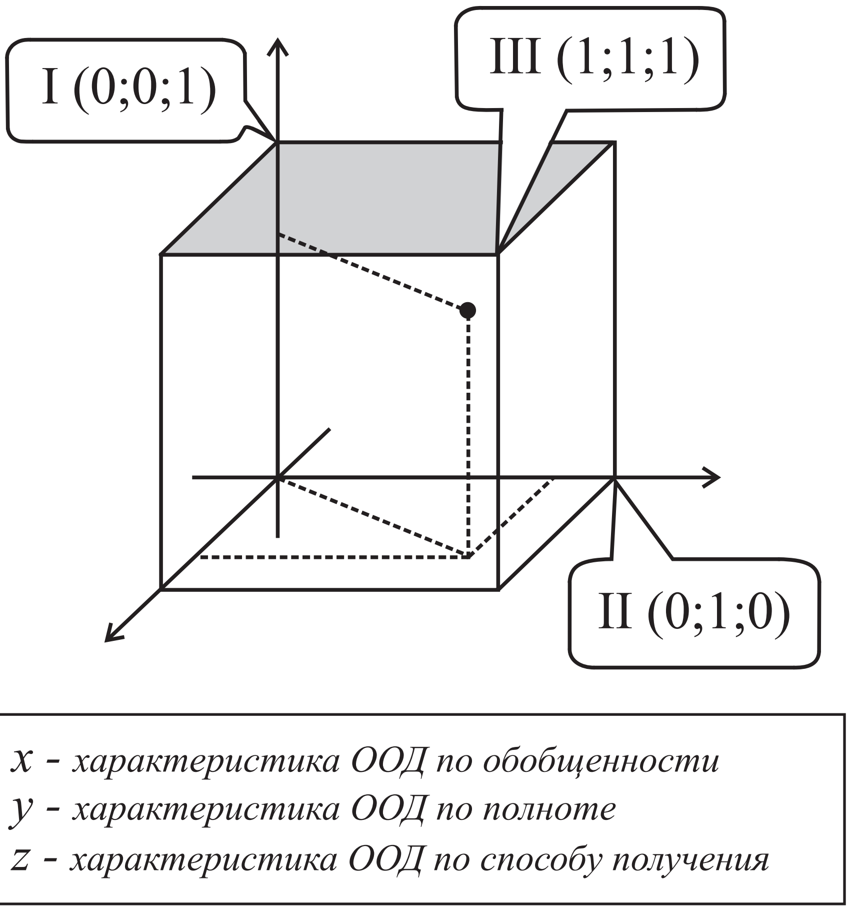

Рис. 1

Построим геометрическую модель для визуализации типа ООД. Введем следующие обозначения: неполная – 0, полная – 1; конкретная – 0, обобщенная – 1; дается готовая – 0, составлена самостоятельно – 1. Будем записывать единицу или ноль, соответствующую характеристике каждого типа ООД по порядку (соответственно последовательности характеристик в столбцах таблицы) в кортеж. Тогда каждый из восьми теоретически возможных типов ООД может быть задан кортежем длины три, составленным из нулей и единиц. Добавим столбец кортежей, задающих типы ООД, в таблицу 1. Нанесем оценки трех характеристик ООД на координатные оси пространственной системы координат: на ось абсцисс — оценку обобщенности, на ось ординат — оценку полноты, на ось аппликат — оценку самостоятельности (способа получения). Тогда восемь теоретически выделенные Н. Ф. Талызиной типов ООД изобразятся вершинами куба (рис. 1).

Закрасим верхнюю грань куба, подчеркивая, что первостепенное значение имеет степень самостоятельности при построении ООД. Если для ООД определены приблизительные оценки трех характеристик, то она может быть изображена на модели точкой пространства, в той или иной степени приближенной к одной из вершин этого куба. При оценке конкретной реальной ООД можно говорить только о ее степени близости к одному из восьми теоретических. Пример такой оценки показан на рисунке 1. Она, конечно же, субъективна, поскольку критериев присвоения баллов по трем характеристикам нет. Но, такая визуализация помогает ученикам включиться в управление своей учебной деятельностью, а учителю сравнить свою ООД с ООД учеников. Проанализируем, насколько возможно приближение к наиболее продуктивному, с точки зрения психологов [8:99], третьему типу ориентировки — к вершине куба с координатами (1,1,1). Что значит, например, "ООД составлена учеником самостоятельно"? Доля участия преподавателя в этом процессе все равно есть: в лучшем случае ООД возникает в совместно-разделенной деятельности учителя и ученика. Рассмотрим далее такую характеристику ООД, как полноту. Если приоритетной целью является интеллектуальное развитие, необходимо ставить задачу активизации продуктивной составляющей мышления. З. И. Калмыковой доказано, что "развитие собственно продуктивного мышления начинается с его интуитивно-практического компонента" [9:190]. Значит, нельзя предлагать ученику сразу включить в свою ООД полную систему условий, необходимую для верного выполнения действия. Наоборот, нужно чаще вынуждать его действовать в условиях неопределенности. Тогда он будет, полагаясь на интуицию, достраивать свою ориентировку до полной уже в процессе исполнительской и контрольно-корректировочной частей действия. И, наконец, такая характеристика ООД, как обобщенность, перекликается с понятием "гештальт", используемым М. Вертгеймером. Именно он сформулировал определение продуктивного мышления [10:270-271], аксиоматическое по своей сути, а значит, понятное математикам. Основное его требование к возникающим психическим новообразованиям — целостность. Решение проблемы — это перестройка ситуации, в результате которой отдельные ее элементы обретают связи и образуют целостную структуру (гештальт), позволяющую решить проблему. Поставить перед учениками определенную проблему и тем самым вывести их сразу на наиболее обобщенную известную учителю ООД бывает просто невозможно: часто эти системы (гештальты, общности) лежат за пределами их понимания — в физике, в высшей математике. Приведем пример определения, предложенного будущим учителям для распознавания понятия площади многоугольника: "Говорят, что установлено измерение площадей многоугольников, если определено отображение $S: M \to R_+^*$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) Если многоугольники F и F' равны, то $S(F) = S(F')$.

2) Если $F = F_1 + F_2$, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

3) $S(P_0) = 1$, где P_0 — квадрат, построенный на единичном отрезке как на стороне.

Положительное число $S(F)$ называется мерой или площадью многоугольника F" [11:315].

Как следует из этого определения, площадь — понятие, вводимое аксиоматически. Аксиомы, определяющие свойства этой величины, по своей сути едины для трех понятий: длины, площади и объема (определения длины и объема аналогичны). Но с понятием площади плоской фигуры ученики знакомятся очень рано, уже в начальной школе. И естественно, что речь идет о формировании интуитивного представления о площади, а не о применении строгого аксиоматического определения этого понятия. Для формирования такого интуитивного представления должна использоваться палетка, то есть, в терминологии деятельностной теории учения, совершаться материальное действие. Этот инструмент для измерения площадей редко применяется сейчас в школе. Чаще всего площади фигур школьники находят по формулам, которые даются им готовыми. Аналогичное по сути с понятием площади, понятие длины у школьников интериоризировано именно по той причине, что с инструментом для измерения этой величины — линейкой — знакомы все.

Преподаватель нередко имеет ООД более обобщенную, чем его ученики. Например, если ученикам 9-го класса предложена задача на нахождение абсциссы вершины параболы, в схему ООД для них входит формула: $x_0 = -b/2a$, и уравнение, задающее произвольную квадратичную функцию: $y = ax^2 + bx + c$. Учитель может также пользоваться этой схемой, но может найти абсциссу вершины параболы и с помощью производной — методом поиска точек экстремума любой функции. Второй способ учитель чаще всего и использует при проверке результата, полученного учеником. Обучающиеся нередко вообще пропускают контрольно-корректировочный этап действия, поскольку не владеют для этого надежными средствами. Дело в том, что они и на этом этапе обращаются к той же самой ООД, что и на исполнительском, поскольку она у них одна. Преподаватель может выполнять контрольную функцию с помощью другой ООД, как, в приведенном выше примере. Тогда при проверке результата увеличивается шанс найти ошибку.

Когда же возможно построить с учениками ориентировочную основу действия, приближенную к третьему типу? У П. Я. Гальперина читаем: "Третий тип ориентировки и учения требует гораздо более глубокой переработки учебных предметов. Выделение основных единиц материала, метода их анализа и общих правил их сочетания требует совсем иного размещения и освещения материала, чем то, что принято в современной методике. Такая переработка учебного материала составляет главную трудность в реализации третьего типа" [12, с. 32]. Для примера обратимся к одному из немногих известных таких построений в области математики. В статье [13] предлагается для осознания строения десятичной системы счисления изучать ее в сравнении с другими позиционными системами счисления, выделив существенные инвариантные признаки их построения (меняется лишь мера счета). В программу традиционного курса математики тема "Системы счисления" до сих пор не входит. Эта тема входит в программу школьного курса информатики, но при этом ученикам предлагаются готовые алгоритмы перевода из одной системы счисления в другую. Задача обоснования этих алгоритмов или обоснования алгоритмов арифметических действий над числами не ставится. В младших классах школы ученикам продолжают показывать образцы выполнения арифметических операций над многозначными числами. Но, сами алгоритмы этих действий так и не получают обоснования (ни в начальной, ни в средней школе), поскольку это невозможно без осознания принципов построения позиционной системы счисления. И на протяжении всего времени обучения ученики выполняют арифметические операции автоматически, по неосознанным правилам. Проходит некоторое время, и они начинают путать эти правила между собой или, вообще, забывать. Постоянное использование калькуляторов способствует этому. В результате даже некоторые студенты оказываются не в состоянии выполнить без калькулятора простейшие вычисления, например, при делении 21 на 2 получают 1,5. Обосновывая полученный результат, они приводят такую последовательность действий: $21 : 2 = 2 : 2 + 1 : 2 = 1,5$, что показывает именно непонимание ими роли разрядной единицы в записи числа. Занятия по теме "Позиционные системы счисления" с реализацией всех этапов теории поэтапного формирования умственных действий, начиная с этапа материализованных действий с помощью разрядной сетки, неоднократно проводилось автором настоящей статьи, как со школьниками, так и со студентами. Результаты этих занятий превзошли все ожидания. Все без исключения (и школьники, и студенты) пришли к осознанию принципов строения позиционных систем счисления. Более того, многие из них поняли системность предложенного подхода: "Почему нас раньше неправильно учили?!". В результате анализа этих занятий получили дальнейшее развитие идеи Н. Г. Салминой. В частности, ошибки обучаемых в обозначениях единиц разрядов разными символами (единицы первого разряда — крестиками, второго — квадратиками, третьего — кружочками, четвертого — треугольниками) привели к осознанию того, что существенным признаком разрядной единицы является лишь ее место в разрядной сетке, а вид символа, которым обозначается единица того или иного разряда, не существенен. Поэтому эти знаки были заменены одним символом. Заметим, что тогда разрядную сетку можно неограниченно продлевать как влево (для работы с тысячами, миллионами, миллиардами и так далее), так и вправо (для работы с дробями). В результате разрядная сетка преобразовалась, стала симметричной и более обобщенной. Еще одно затруднение обучаемых было в записи результата вычисления, выполненного с помощью разрядной сетки, цифрами. Забывая сделать переход в следующий разряд, они часто использовали цифру, которой не располагала данная система счисления: при записи чисел в двоичной системе счисления они пытались использовать двойку, в шестеричной — шестерку и т. д. Это затруднение побудило обратиться к истокам возникновения разрядной сетки. Оказалось, что предлагаемая авторами статьи [13] разрядная сетка — схема счетного прибора, называемого абак (см., например, [14: 84-88]). Одним из видов абака являются счеты. "На некоторых старых изображениях русских счетов на каждой проволоке имеется не десять, а девять косточек. Некоторые авторы, писавшие о русских счетах, считали такие счеты с 9 косточками на каждой проволоке дефектными. Однако здесь мы имеем дело не с дефектом, а со счетами, в которых идея десятичной нумерации доведена до конца". [14: 89]. Использование разрядной сетки, основанное на идее счет с девятью косточками, устранило ошибки при записи результата вычисления цифрами. Колонка каждого разряда была разбита на клетки, число которых было на единицу меньшее, чем основание системы счисления. После договоренности, что в каждой клетке может быть не больше одного символа, ошибки в записи результата операции символами были исключены. Например, для троичной системы счисления разрядная сетка приобрела вид:

...	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	...

Таблица 2. Разрядная сетка троичной системы счисления

Если исходить из того, что предложенная авторами статьи [13] ориентировка — третьего типа, то дальнейшие продвижения (не только по обобщенности, но и по полноте) изображены на рисунке 2. Тогда нужно менять единицу измерения и по первой, и по второй координатной оси, поскольку найдена новая единица — общность — и усовершенствована разрядная сетка. Вообще, поскольку для любой системы можно найти систему, в которую предыдущая входит как подсистема, единицы измерения при оценке обобщенности, возможно, придется менять неоднократно.

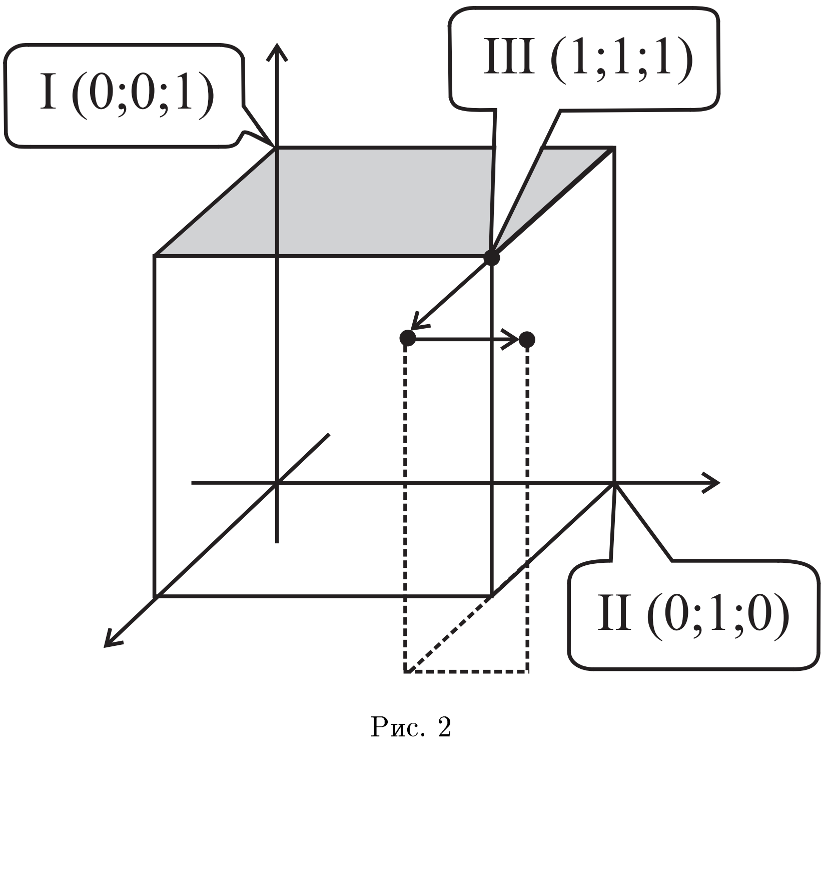

Рис. 2

Итак, одно из препятствий на пути к осознанию алгоритмов арифметических действий (непонимание принципа строения позиционной системы счисления) может быть успешно устранено. Но для осознания этих алгоритмов нужно владеть еще и законами действий над числами. С точки зрения формальной математики — это аксиомы кольца. Школьники законы действий над числами могут постигнуть только неполной индукцией. До появления калькуляторов эти законы интериоризировались еще в начальной школе при отработке навыков устного счета. Не стоит ли для овладения ими вернуться к этому "анахронизму"?

Из всего "арсенала" математики: формул, алгоритмов, теорем, определений, наибольшие сложности у школьников вызывает использование последних. С относительно строгими определениями учеников начинают знакомить в курсе геометрии, начиная с седьмого класса. Но они часто вообще не понимают, что определения можно включать в состав своей ООД. В качестве ООД при построении или доказательстве они неосознанно выбирают рисунок, размещенный рядом с определением. Но рисунок — это всегда частность. Поэтому ошибки при варьировании условия неизбежны. Лишь немногие из современных школьников смогут построить, например, все три высоты в любом треугольнике. Если треугольник тупоугольный, жди классической ошибки. Как же подвести школьника к определению понятия высоты? Опишем формирующий эксперимент, проведенный с семиклассниками. Мы обратились к ментальному опыту детей. Как они понимают, что такое высота? Где встречались с этим понятием? Кто знаком с дорожными знаками? В каких случаях ставится знак: "Ограничение габаритной высоты"? Ответ был получен: перед туннелями, низко висящими проводами и т. д. Отсюда и вытекает задача измерения высоты. Некоторые дети были уже знакомы и с таким инструментом, как отвес. Обычная канцелярская скрепка, прикрепленная к нитке, и инструмент для измерения высоты картонного треугольника готов. Это нехитрое приспособление произвело сильное впечатление на детей. Пройдет ли треугольник в туннель? Как измерить его высоту? Ошибок в этом материальном действии замечено не было: конец нити прикреплялся к вершине треугольника, отвес (как ему и положено) занимал вертикальное положение по отношению к горизонтально расположенному основанию, т. е. перпендикулярно. Нужно заметить, что это действие годится для введения понятия высоты и других геометрических фигур, как планиметрических (параллелограмм, трапеция), так и стереометрических (пирамида, призма), т. е. легко обобщается. Для описания того, что они делают, ученикам приходилось оперировать геометрической терминологией: основание, вершина, перпендикуляр. Вывод: "высота перпендикулярна основанию" был сделан легко. А если за основание треугольника взять другую его строну? И другая сторона занимает горизонтальное положение, к противоположной ей вершине прикрепляется нить. А если опрокинуть треугольник на нужное основание нельзя? Можно ли иначе измерить его высоту? Какой есть еще инструмент для того, чтобы построить перпендикуляр? С чертежным треугольником знакомы все. Следующее задание: на листе бумаги изображены треугольники. Требуется построить все их высоты. В случае ошибок детям предлагалось представить, как расположится в каждом из случаев отвес. При затруднениях разрешалось возвращаться к материальному действию: манипулировать с листом бумаги поворачивая его так, чтобы основание треугольника занимало горизонтальное положение, прикреплять отвес, пользоваться чертежным треугольником. От материального действия перешли к перцептивному: отвес отложили в сторону, лист бумаги поворачивали только мысленно. Совместными усилиями появилась и формулировка определения высоты треугольника.

На введение понятий медианы, биссектрисы и высоты треугольника выделен только один урок. Как сделать так, чтобы определение медианы треугольника стало хотя бы ориентировочной основой действия второго типа? Решили: не показывать рисунок, предложить ученикам только формулировку определения и дать задание: пользуясь этой формулировкой, построить все медианы данного треугольника. Понятие вершины треугольника, противоположной стороны были уже освоены. Для того чтобы воспользоваться предложенным определением, оставалось только вспомнить, что такое середина отрезка. После этого медианы треугольника были успешно построены. По сравнению с высотой, медиана вообще не произвела какого-либо впечатления на детей (бесполезная вещь). Учительница пожаловалась: много потратили времени на возню с отвесом, после этого неохотно строили медиану (наверное, сначала надо было построить медиану по готовой ориентировке), в классе было шумно, дети перевозбудились от материальных действий с отвесом, в результате не успели ввести им понятие биссектрисы. Что же важнее? Восторг детей при осознании ими внутренней сущности геометрического понятия и построенная ими самостоятельно в результате этого осознания ориентировочная основа действия или соблюдение формальных программных требований? А насколько они оправданы? Почему все три понятия: медианы, биссектрисы и высоты надо вводить именно на одном уроке? Понятие биссектрисы угла треугольника можно ввести естественным образом, решая задачу построения центра вписанной в треугольник окружности при поиске множества точек, равноудаленных от сторон угла. И место этой задаче — совершенно в другом разделе учебника. Этот пример показывает, что даже малейшая попытка применить деятельностную теорию на практике "требует совсем иного размещения и освещения материала, чем то, что принято в современной методике" [12, с. 32]. Еще один эксперимент перестройки содержания обучения геометрии описан в статье [15].

Обратимся также к опыту преподавания высшей математики. Одним из ее самых абстрактных разделов, содержащих сильнейшие обобщения, является топология. И даже сами топологи часто не знают, что послужило источником таких обобщений. Сложность применения предлагаемых в курсе топологии определений состоит еще и в том, что в них используется терминология, уже имеющая для обучаемого житейский смысл (например, точка прикосновения, внутренность, граница). Поэтому часто студенты при решении задач имеют ООД, лежащую не в области математики. В таких случаях необходимо распредмечивание. Приведем примеры задач для распредмечивания таких топологических понятий, как открытый шар и точка прикосновения.

Задача 1. Пусть E_2 — евклидова плоскость с введенной на ней прямоугольной системой координат и метрикой, определяемой формулой: $\rho(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, где (x_1, x_2), (y_1, y_2) — координаты точек X и Y соответственно. Выяснить, что является в этом случае открытым шаром с центром в начале координат и радиусом равным единице. Для студентов понятие открытый шар уже несет смысловую житейскую нагрузку. Это понятие также известно им из курса математического анализа. Поэтому они нередко рассуждают так: "В пространстве открытый шар, а на плоскости тогда будет открытый круг" и изображают открытый шар так, как на рис 3а.

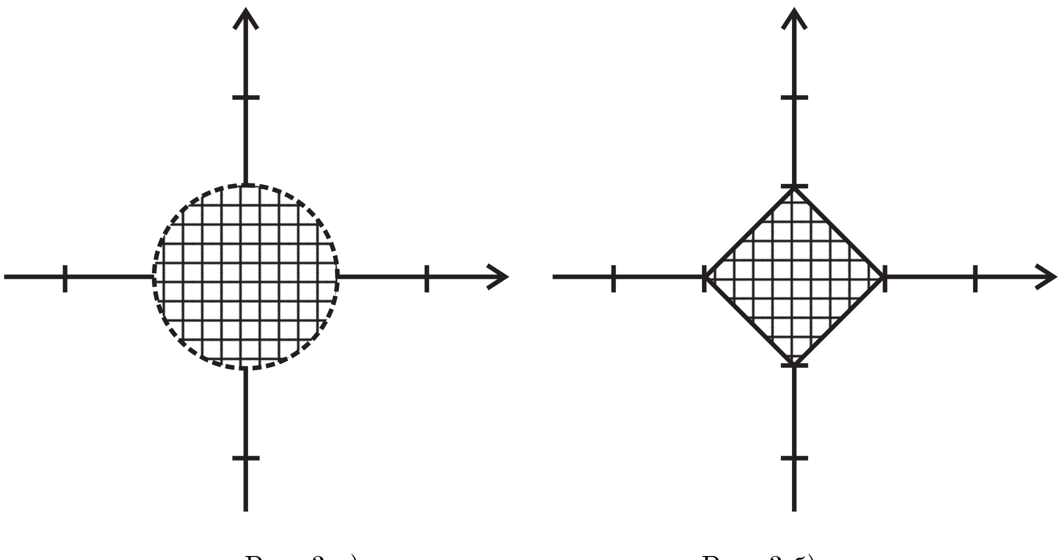

Рис. 3 а) Рис. 3 б)

Но, если воспользоваться формальным определением открытого шара в метрическом пространстве: $B^r_{x_0} = \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}$, получим, что открытым шаром с центром в начале координат и радиусом равным единице в этом случае является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $|x_1| + |x_2| < 1$, и он будет выглядеть так, как показано на рис. 3б. Этот квадратный шар обычно поражает студентов, и они начинают осознавать степень обобщенности определений топологических понятий. После этого их уже не так удивляют шары одноточечные (состоящие из одного центра).

Задача 2. На множестве $X = \{(x, y) \in E_2 : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1\}$ топология задана базой, состоящей их четырех множеств: $A = \{(x, y) \in X : x \geq 0, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in X : x \geq 0, y < 0\}$, $C = \{(x, y) \in X : x < 0, y < 0\}$, $D = \{(x, y) \in X : x \leq 0, y > 0\}$. Найти замыкание (множество всех точек прикосновения) множества А. При выполнении этого задания студенты, используя в качестве схемы ООД определение точки прикосновения [11:144], убеждаются, что точки множеств B, C и D не являются точками прикосновения множества А. Это не расходится с их житейским представлением о прикосновении, и они получают результат: $[A] = A$. Но, если для проверки этого результата использовать в качестве ООД теорему: “Множество А в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда это множество совпадает со своим замыканием” [11:145], то условие $[A] = A$ означает замкнутость множества А, что противоречит определению замкнутого множества, поскольку его дополнение не открыто. Сокращая перебор, студенты упускают точку $(-a, 0)$, которая является точкой прикосновения множества А, и в понимании житейском должна находиться рядом с ним, а находится далеко от этого множества (рис. 4).

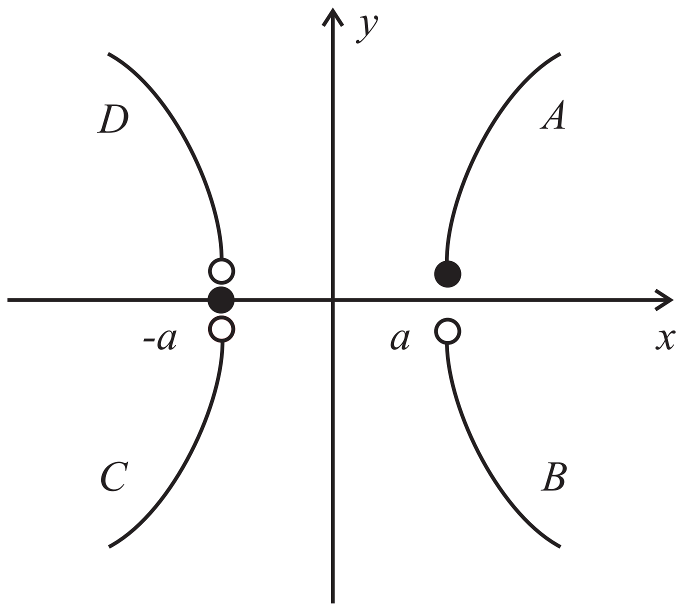

Рис. 4

Таким образом, к верному решению предложенных задач ведет только строгое использование формальных определений с полным пренебрежением житейским опытом. Понимание студентами, что при этом надо использовать ООД четвертого типа, способствует верному применению определений.

Итак, при обучении математике выбор типа ООД зависит от целей. Первый тип предпочтительнее второго в случае, когда вопросы важнее ответов (например, при проблемном обучении). Построения ООД третьего типа являются редкими “жемчужинами” методических построений, и они не всегда возможны. Использование при обучении математике только готовых ориентировок в своем чисто формализованном обобщенном виде (без соответствующих конкретизаций), действительно, чревато. В результате такого “обучения” ученики не понимают смысл своих действий, а значит, практически ничего и не запоминают из школьного курса математики. Но, после того как некоторые из ориентировок ученики строят самостоятельно, они воспринимают предлагаемые им готовые ООД как конечный продукт такой же деятельности, только чужой, и успешно осваивают их, конкретизируя собственными примерами для проникновения в их сущность. Таким образом, необходимо "смещение акцентов" с исполнительской на ориентировочную часть действия.

Пути совершенствования математического образования нужно искать не только в науке математике. Возможно, что психология и есть та далекая от профессиональных математиков "точка прикосновения", которую они упускали в пылу своих реформ. Вряд ли психолог возьмется за построение содержания математики как учебного предмета. Но человек, имеющий опыт деятельности в области математики, может освоить любую другую науку, в том числе и психологию. Было бы желание.

Список литературы

[1] Хинчин А.Я. Педагогические статьи. М.: URSS, 2006. 208 с.

[2] Бурбаки Н. Архитектура математики. Очерки по истории математики. М.: Ин. лит., 1963. С. 245-259.

[3] Арнольд В.И. Путешествие в хаосе// Наука и жизнь. - 2000. - №12. - С. 3-10.

[4] Тихомиров В.М. Гений, живший среди нас// Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999. 256 с.

[5] Арнольд В.И. Нужна ли в школе математика? Доклад на Всероссийской конференции "Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков" в Дубне 21 сентября 2000 года. М.: МЦНМО, 2001.

[6] Тихомиров В.М. О некоторых проблемах математического образования// Вестник высшей школы. - 2000. - №8. - С.21-26.

[7] Талызина Н.Ф. Педагогическая психология. М.: Академия, 2006. 288 с.

[8] Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний. М.: МГУ, 1984. 345 с.

[9] Калмыкова З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости. М.: Педагогика, 1981. 200 с.

[10] Вертгеймер М. Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987. 336 с.

[11] Атанасян Л.С., Базылев В.Т., Геометрия. Ч. 2. - М.: Просвещение, 1987. 352 с.

[12] Гальперин П.Я. Основные результаты исследований по проблеме "Формирование умственных действий и понятий". - М., 1965. - 50 с.

[13] Салмина Н.Г., Колмогорова Л.С. Усвоение начальных математических понятий при разных видах материализации объектов и орудий действия// Вопросы психологии. - 1980. - №1. - с. 47-56.

[14] Депман И.Я. История арифметики. - М. : Гос. уч.-пед. из-во Мин-ва просвещения РСФСР, 1959. - 424 с.

[15] Веселяева Т.Ю. Куда ведет третий тип ориентировки? (история организации учебного исследования школьников по элементарной геометрии)// Вестник МГУ. Серия 20. Педагогическое образование. - 2010. - №2. С. 15-27.

Веселяева Татьяна Юрьевна,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Северо-Восточного государственного университета,
кандидат физ.-мат. наук.

Email: veselyaeva.tatyana@inbox.ru

Конкурсы и дополнительное математическое образование школьников

М. М. Галламов

В статье на примере математического образования рассматривается вопрос о роли конкурсов для школьников в их дополнительном образовании. Материал подобран на основе личного опыта автора.

Многие конкурсы, к сожалению, созданы не для реализации дополнительного образования школьников, а для пиар-акции тех, кто занимается дополнительным образованием. На конкурсах в основном все зависит от умения участника, а также и его руководителя, подать себя и свой проект экспертам, а у последних нет времени глубоко вникать в содержание проделанной работы. Это одна сторона. С другой стороны, если эксперт попался дотошный и пытается вникнуть в суть работы, то, зачастую, от этого возникает у многих головная боль и таких экспертов руководители конкурсов стараются более не привлекать. По этой причине работы оцениваются по внешним факторам — умению авторов в короткий промежуток времени зажечь и воспламенить эксперта, т.е. воздействовать на его эмоционально-психологические функции; если этого не удается, то наиболее влиятельные руководители конкурсантов лоббируют свои детища. Как сами понимаете, все это зависит от многих случайных параметров. В итоге эти случайности становятся стержневым фактором для оценивания результатов авторов проекта. Но несмотря на такую игру случайности с авторами и их работами, конкурсы играет огромную воспитательную функцию. Покажу это на примере математики.

Тему проекта по математике выбрать не так просто, а после ее выбора оказывается еще трудней реализовать этот проект. Таких примеров предостаточно — не будем приводить. Общее количество работ по математике огромно, а по другим предметам еще больше. Многие выбранные проекты так и не реализованы не по той причине, что они не дошли до конкурса, а по своему содержанию. На некоторых конкурсах работы не допускаются на первоначальном этапе — отсеиваются при первой же экспертизе. Все, конечно, зависит от уровня конкурса, но при этом руководителям и экспертам необходимо помнить, что на конкурсе должна быть предоставлена возможность участия работ учебно-исследовательского характера. Для школьника, совершающего свой первый неуверенный шаг в направлении изучения непознанного, важно, чтобы этот шаг, по крайней мере, не вызывал у него страха, и это уже будет некоторым достижением. Здесь может показаться, что автор перегнул палку. Когда в шаговой доступности имеются специалисты экстра-класса, а, в особенности, когда им является сам руководитель, в той области, которой занялся школьник, то все сказанное не совсем адекватно. А когда школьнику из глухой провинции попалась какая-нибудь книжечка, из которой он почерпнул то, что для него показалось важным и он об этом пожелал сообщить на конкурсе, то вряд ли экспертов, умудренных огромным опытом познания, этим можно удивить, как бы не наоборот: какое конкурсант проявил невежество! Но и такие работы не хотелось бы оставлять без внимания.

Целый ряд работ больше определяется возрастными качествами юного интеллекта, развивающегося мышления и формирующегося сознания, чем самим предметом, в частности, математикой. Здесь имеются в виду работы об истории того или иного научного открытия, биографиях великих математиков, математическом образе жизни, симметрии, золотом сечении, по искусству и даже написание задачников (жаждущему все по плечу). Проекты по этим темам, согласно их аннотациям, а также по результатам общения с авторами проектов, больше посвящены методологическим вопросам теории познания, чем математике, хотя этого сами авторы не замечают. Желание авторов как-то систематизировать известные знания, а также предложить свои методы и более эффективные способы приобретения новых знаний — понятно. Также стремление к глубоким и серьезным исследованиям порождает неудержимый порыв авторов к созданию собственного, завершенного и значимого труда, в котором отразились бы его внутренние эстетические потребности в красоте, гармонии и целостности. Этому математика очень способствует, как по форме, так и по содержанию — для этого юному человеку необходимо изучать математику, но при этом не обязательно быть математиком.

Многие задаются вопросом: "В чем же воспитательная функция математики?". Так она, именно, в том и состоит, что порождает стремление и дает возможность воплощения своих внутренних эстетических потребностей в красоте, гармонии и целостности. Об этом хорошо сказал основоположник современной гидро- и аэромеханики Николай Егорович Жуковский (17.01.1847 – 17.03.1921), рассчитавший подъемную силу крыла (при помощи функции Жуковского): "В математике тоже есть своя красота, как в живописи и поэзии. Это красота проявляется иногда в отчетливых, ярко очертанных идеях, где на виду всякая деталь умозаключений, а иногда поражает она нас в широких замыслах, скрывающих в себе кое-что недосказанное, но многообещающее". Вот это недосказанное и пленило юных авторов, а многообещающее превратило их энергию в представленные на конкурс работы.

Теперь опишем качество работ конкурсантов с позиций эксперта по математике. К сожалению, такие работы, согласно аннотациям и беседам с участниками конкурса, имеют недостатки, так как авторами не отражена та математическая часть, которая была заявлена. Еще раз отмечу, что работы, представленные на конкурс, имеют огромное воспитательное значение в формировании мышления, сознания, эстетических качеств юного человека и в становлении личности; умение реализовать проект — это его техническая часть. Она преодолевается через обучение, поэтому не стоит огорчаться, необходимо дальше дерзать: трудно в учении — легко в бою.

Но были проекты, которые представляли собой итог многолетней работы как учеников, так и их руководителей. В таких случаях, как правило, руководитель занимался со своими подопечными в математическом кружке, начиная с пятого класса и при необходимости приглашались нужные специалисты, либо дети выезжали в летние математические школы или на какие-нибудь другие мероприятия, где они могли получить соответствующие знания. Это как раз и есть одна из форм дополнительного математического образования. При таком подходе усилиями обычных школьных учителей математики вполне можно подготовить проекты на конкурс, удовлетворяющие самым высоким требованиям экспертов.

Коснусь трудностей, с которыми столкнулись как сами конкурсанты, так и их руководители. Недостаток знания тех разделов математики, которым посвящены проекты, имеет философскую сторону — нельзя объять необъятное. Основным недостатком представленных проектов является следующее.

Математические понятия трактуются совершенно произвольным образом — с ними оперируют, как с обычными словами из бытовой речи. В результате чего трудно применить математические методы. Поэтому конкурсанты прибегают к иллюстрациям понятий-слов (то есть того, что должно быть математическими терминами) в своих проектах посредством примеров, которые вроде бы связаны с математикой, но к исследованию их никак нельзя применить математику, ибо зерна не отделены от плевел. Здесь как руководители, так и ими ведомые сталкиваются с серьезной математической проблемой — описать реальные объекты в математических понятиях, иначе говоря, с задачей моделирования. Чтобы были ощутимы те трудности, которые возникают у руководителей и авторов проектов, приведем пример.

Все знакомы с задачами на составление уравнений. Часто бывает трудно записать условие задачи в виде алгебраических соотношений, то есть перевести на язык алгебры. Так же в геометрии, решая геометрическую задачу на языке геометрии, то есть геометрическими методами, бывает трудно, а порой и невозможно, найти дополнительное геометрическое построение. Найдя его, какое испытываешь чувство восторженности, гармонии, красоты, а самое главное — удовлетворения от целостного восприятия того, что еще только мгновение назад не было нам ведомо. Это и есть миг озарения.

Темы проектов требуют перевода рассматриваемых задач на многие математические языки, в частности, на геометрический, языки логики, комбинаторики, теории графов, теории групп, множеств, анализа и т. д. Формулировка задачи на определенном математическом языке — это только первый шаг в решении проблемы, а именно: постановка задачи. Второй шаг — это её решение, для этого необходимо владеть математической теорией, которая излагается на соответствующем языке. Как видим, трудно "грызть" гранит науки, как руководителям, так и их подопечным.

В заключение хочется сказать о важности математического знания. "Человек, не знающий математики, не способен ни к каким другим наукам. Более того, он даже не способен оценить уровень своего невежества, а потому не ищет от него лекарства" (Роджер Бэкон (ок. 1214 – после 1294)). Отсюда следует, что необходимым условием для преодоления невежества в обществе является организация серьезного математического образования на всех ступенях знания. К сожалению, за редким исключением эту проблему не осознают те, кто имеет достаточно большое влияние на эти процессы. По этой причине организацией должного математического образования необходимо заниматься снизу. Будем надеяться, что зерна, брошенные в благодатную почву, дадут добрые всходы. Уважаемые руководители проектов — это Вашими руками сеются зерна математического знания, а при каких условиях эти зерна будут произрастать — все зависит не от Вас и не от нас — экспертов...

Здесь также уместно поговорить о критериях оценки проектных работ. Автором предлагаются следующие критерии оценки работ. На некоторых конкурсах оценивают не сами работы на первоначальном этапе, а аннотации к этой работе. На заключительном этапе конкурса сам конкурсант представляет свою работу. Конечно, при трехминутном общении с работой познакомиться невозможно. По этой причине предлагается форма, согласно которой готовится аннотация, тогда конкурсант и эксперт в какой-то степени будут готовы к общению по заявленному проекту.

Форма аннотации проекта для старшеклассников.

1. *Результаты работы.*

В этом пункте желательно отразить следующее.

(a) Необходимые основные понятия.

(b) Необходимые малоизвестные теоретические результаты.

(c) Формулировка основного результата.

(d) Основная идея решения задачи.

(e) Метод решения.

2. *Новизна результата.*

Под новизной понимается получение нового результата в виде теоремы, изобретение нового способа доказательства, создание технического приема для решения задач какого-нибудь типа (например, задачи на переливание, задачи с параметрами), некоторой классификации математических фактов с указаниями соответствующих методов (например, геометрические задачи, решаемы принципом Дирихле с применением группы симметрий), эквивалентной формулировки, обобщения, построения модели, интерпретации, представления (например, представление натуральных чисел в числовой системе счисления с основанием e или π), применение тех или иных математических результатов к определенным вопросам и т.д. и т.п. В противном случае переходите к пункту 1, что может быть вполне естественно, если работа носит учебно-исследовательский характер.

3. *Оригинальность метода решения.*

Небольшие пояснения. Оригинальность отличается от новизны тем, что раннее известное в какой-то своей части усовершенствовано или изложено с другой точки зрения. Как правило, это относится к исследованиям реферативного характера, то есть таким проектам, которые посвящены какому-то известному результату. Например, решение известного уравнения в целых числах или доказательство именной теоремы. В этом пункте желательно отразить следующее.

(a) В какой части и как было усовершенствовано доказательство, метод решения.

(b) Изложение известных математических результатов с другой точки зрения.

Это осуществляется следующим образом. Доказательство теоремы или решение задачи выполнено с применением теоретических знаний, которыми школьник не обладает, тогда он переводит это доказательство на свой уровень знаний, конечно, если это возможно. Работа такого сорта, как правило, не дает новых фактов, но появляется новая точка зрения на известный результат. Так, например, относится ли этот результат к высшей или элементарной математике? Допускает ли геометрическое или комбинаторное доказательство, если было известно, например, только алгебраическое доказательство?

4. *Заключение.*

Изложение личного мнения автора работы — возникшие трудности при работе над проектом, выводы, перспективы, пожелания и т. п.

5. *Литература.*

Если в аннотации используются не общеизвестные для школьников математические понятия и результаты, обязательно указывать ссылку на конкретный источник с указанием раздела, главы, параграфа и страниц.

Критерии оценки аннотаций, написанных согласно этой форме, становятся такими же естественными, как при проверке контрольной работы. Ибо становится ясно, что надо оценивать пункты 2 или 3, а остальные пункты служат вспомогательной информацией, которая позволяет сориентироваться эксперту в проекте и дать полезные советы автору. По этой причине такие аннотации необходимо оценивать только одной оценкой по пятибалльной системе или какой-нибудь другой шкале. Для специалистов, участвующих в работе такого сорта ясно, что эти критерии применимы к самой работе, а не только к аннотации.

Необходимость в разработке критериев оценки должна исходить из возраста конкурсантов. Более того, конкурс разделить на два уровня: для учащихся до 7 класса и других.

Предложенная выше форма написания аннотации, конечно, приемлема только для учащихся не ниже восьмого класса. В конкурсах по математике принимают участие и учащиеся, начиная со второго класса. Вследствие чего форму аннотации для младших классов необходимо разрабатывать с учетом специфики не только возрастных качеств, но и с учетом школьной программы по математике.

Принципы разработки формы аннотации проектов для младшеклассников.

1. *Проект должен быть посвящен изучению темы, не входящей в школьную программу.*

2. *Четкое описание задачи, которой посвящен проект.*

Для реализации этого принципа необходимо следующее.

(a) *Изложение основных понятий и теоретических результатов для проекта.*

(b) *Формулировка основной задачи проекта.*

(c) *Идея, на которой построен проект.*

(d) *Метод реализации проекта.*

Например, проект может быть реализован на компьютере, в виде построения модели объекта (развертка многогранника и т.п.), объяснения фокуса, построения диаграмм или схем, а также чертежей, проведения опыта и др.

3. *Изложение примеров, демонстрирующих владение изученным материалом, методами и способами.*

Поговорим об *образовательной функции конкурса.* Образовательная деятельность на первоначальном этапе должна быть посвящена изучению возможностей выбора тем для реализации проектов. С этой целью необходимо организовать консультационные пункты на постоянной основе для руководителей проектов. Вторым и основным этапом образовательной деятельности должна стать выездная многопредметная школа, где проявившие себя конкурсанты получают соответствующее обучение и продолжают дальнейшее исследование по теме проекта. При таких условиях можно тогда говорить о полноценном и качественном образовании, которое стимулируют конкурсы.

Почему школьники-спортсмены показывают выдающиеся результаты на крупных соревнованиях? Да, только по той причине, что у них выездные сборы на подготовку к соревнованиям не менее четырех раз в год, не считая двух разовых тренировок в день, которые совершаются шесть раз в неделю.

На практике автор наблюдал образовательную функцию конкурсов только в виде общения с авторами проектов и их руководителями, в основном, в виде рецензии на аннотацию. Как показала практика, эти рецензии до основного контингента авторов проектов не доходят, а те авторы, кто получил рецензию, её никак не учитывают, и обычно их проект, а также повторная аннотация остаются без учета тех пожеланий, которые были высказаны в рецензии. Следовательно, такая форма взаимодействия эксперта и, с другой стороны, участников конкурса и их руководителей, неоправданна и нежизнеспособна.

В заключение отметим, что конкурс должен стать *завершающим этапом* в дополнительном образовании школьников. Поэтому первым этапом конкурса должно стать обучение будущих участников конкурса и тесное взаимодействие научных консультантов с их руководителями. С этой целью необходимо разработать полноценную программу системы дополнительного образования школьников, включая все предметы, представленные на конкурсе. Не надо забывать, что суть образовательной деятельности сводится не к поиску детей, потенциально могущих подготовить хороший проект без должного внимания к ним, а к организации такой формы обучения, при которой каждый обучаемый мог бы себя реализовать на произвольно выбранном конкурсе и не только по математике.

Галламов Мансур Муллагаянович,
доцент кафедры элементарной математики МПГУ,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: gallamov@gmail.com

Учащимся и учителям средней школы

Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тэйлора

А. Г. Мякишев

Дмитрию Пантелеймоновичу Мавло —
на его 60-летие.

В статье приведен обзор связей замечательных точек, линий и окружностей треугольника, начиная от классической окружности Эйлера до красивых и сложных конструкций, изобретенных совсем недавно.

§1. Иного мира сотворенье в сердцах двоих. Обожествленье всего живого. Становленье союза нового. Рожденье иных высот и просветленье[1]

Наверное, каждый ценитель элементарной геометрии при встрече с тем или иным изящным результатом нередко задается вопросами вроде следующих: *А как же автор задачи сумел до всего этого додуматься? Неужто им двигало одно только озарение свыше?*

Увы, сами авторы[2] почему-то, как правило, не слишком любят делиться с широкой публикой секретами ремесла[3].

В этой статье я попробую, рассмотрев один конкретный пример, на эти и им подобные вопросы ответить[4].

Начнем с некоторых общих предложений.

Естественно, как и в других творческих сферах деятельности, — в геометрии, для того, чтобы придумывать новые задачи, необходимы и талант, и вдохновение и просто удача. Но, на 95 процентов[5], это — труд, включающий в себя изучение классического наследия, современных достижений и практически непрерывные усилия, направленные на создание какой-нибудь оригинальной конструкции[6]. Нужно настроить мозг на геометрическую волну и не отвлекаться ни на что другое — т.е. блюсти своего рода аскезу (по крайней мере, периодически), умея отрешиться от суетных забот.

Если же говорить более определенно, то довольно часто свежий факт появляется на свет приблизительно так:

Вы сталкиваетесь с какой-то содержательной задачей, уже известной геометрическому сообществу. Задача понравилась и возникает желание, выражаясь возвышенно, постичь идеи, вдохнувшие в творение жизнь.

[1]— Странное, однако, название параграфа для научно-популярной статьи по геометрии. С чего бы это? — вправе поинтересоваться изумленный (а то и возмущенный) читатель. — Действительно, странное — будет ответ, — но, в данном случае, надеюсь, уместное. Дело в том, что заголовок и этого, и всех последующих разделов — строчки, заимствованные из *стихотворений Д. П. Мавло.* Круглая дата — прекрасный повод слегка нарушить сухую и казенную манеру изложения.

[2]Самых выдающихся из которых справедливо было бы называть *корифей, мэтр, маэстро, гроссмейстер* (элементарной геометрии).

[3]Встречаются, впрочем, и счастливые исключения. Сошлюсь, для примера, на статью великого *Игоря Федоровича Шарыгина*, которая так прямо и называется: *Откуда берутся задачи?* (см. [6]). Большое количество рецептов по приготовлению задач содержатся также в книжках воистину *подвижника* элементарной геометрии *Исаака Аркадьевича Кушнира* (см. [3,4]).

[4]Разумеется, применительно к данному примеру. Было бы безумием пытаться дать исчерпывающие ответы во всей полноте.

[5]Таково, думается, процентное отношение для меня лично. У других, ясное дело, оно может быть другим.

[6]И здесь уже в корзину отправляется 99,9 %. Как писал Маяковский: *Поэзия — та же добыча радия. В грамм добыча, в год труды. Изводишь единого слова ради тысячи тонн словесной руды.*

Вертите ее так и сяк, по разному разбирая на части и вновь складывая, пытаясь проникнуть как можно глубже в механизм. Случается, через какое-то время возникает желание одну детальку заменить, другую переделать, третью — дополнить и т.д. И внезапно Вы понимаете — вот оно, свершилось! Начальная конструкция, как по волшебству, преобразилась в иную, своеобразную, но тоже симпатичную и обогащенную совсем другими, в сравнении с отправными, идеями. В таких счастливых случаях исходную задачу будем называть *задача-родитель*, а ее трансформера — *задача-отпрыск.*

Причем, в отличие от распространенной поговорки "*Яблоко от яблони не далеко падает*", усмотреть стороннему наблюдателю внешнее (да и внутреннее) сходство геометрически кровных родственников бывает подчас крайне сложно.

И тут, наконец, наступило время предъявить обещанный пример. Который, надеюсь, убедит читателя в том, что все вышесказанное — не просто пустые, маскирующие отсутствие сути, фразы.

Задача 1 (*родитель*).

Среди трех дуг, которые отсекают стороны (или их продолжения) произвольного треугольника от его окружности Эйлера[7]*, обязательно найдется одна, равная сумме двух других.*

Так, для треугольника, изображенного на рис. 1, выполняется равенство: $\omega_a = \omega_b + \omega_c$.

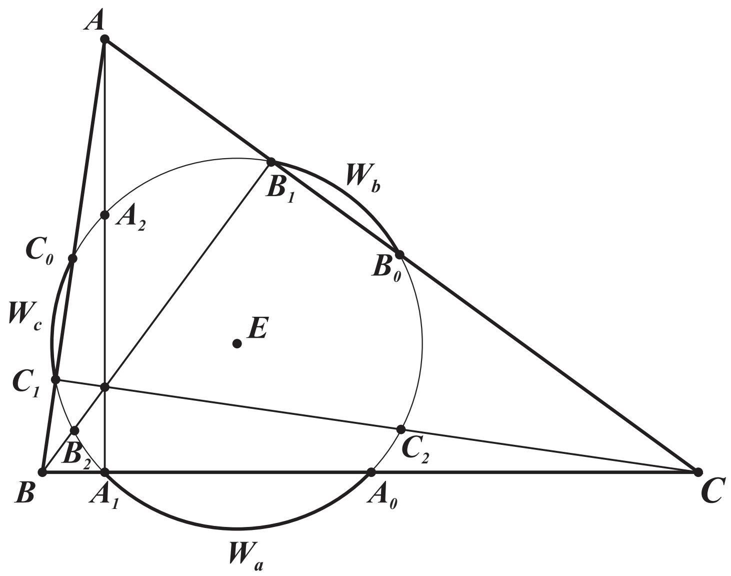

Рис. 1

Задача 2(*отпрыск*).

а) *В произвольном треугольнике рассмотрим три прямые, каждая из которых проходит через середину высоты параллельно соответствующему радиусу описанной окружности, проведенному к вершине треугольника* (см. рис. 2).

Тогда эти прямые <u>*конкурентны*</u> (т.е. пересекаются в одной точке).

[7]Все же напомним, порядка ради, что *окружностью Эйлера* (или *окружностью девяти точек*) произвольного треугольника называют окружность, содержащую середины сторон и основания высот этого треугольника, а также середины отрезков, соединяющих *ортоцентр* (точку пересечения высот) с его вершинами.

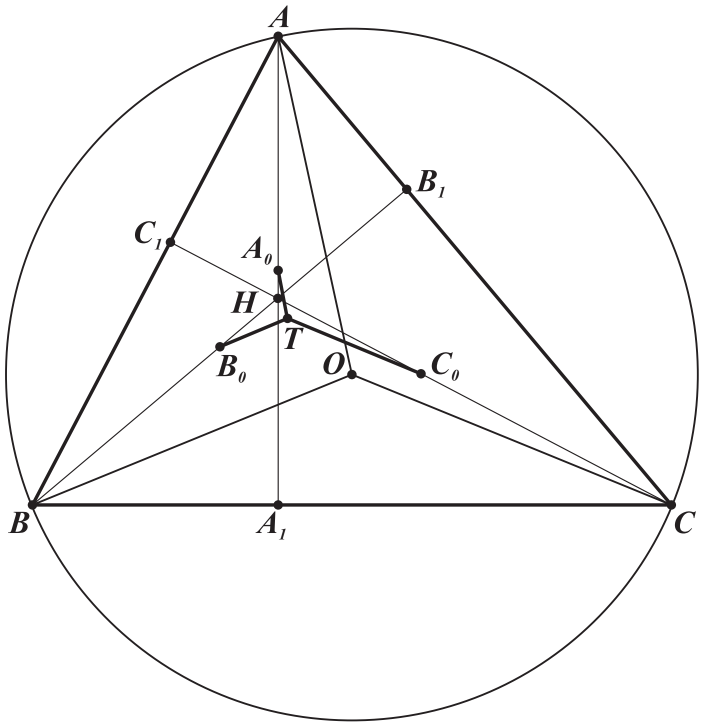

Рис. 2

б) *Точка пересечения T описанных выше прямых есть центр так называемой* <u>*окружности Тейлора*</u>[8] (см. рис. 3).

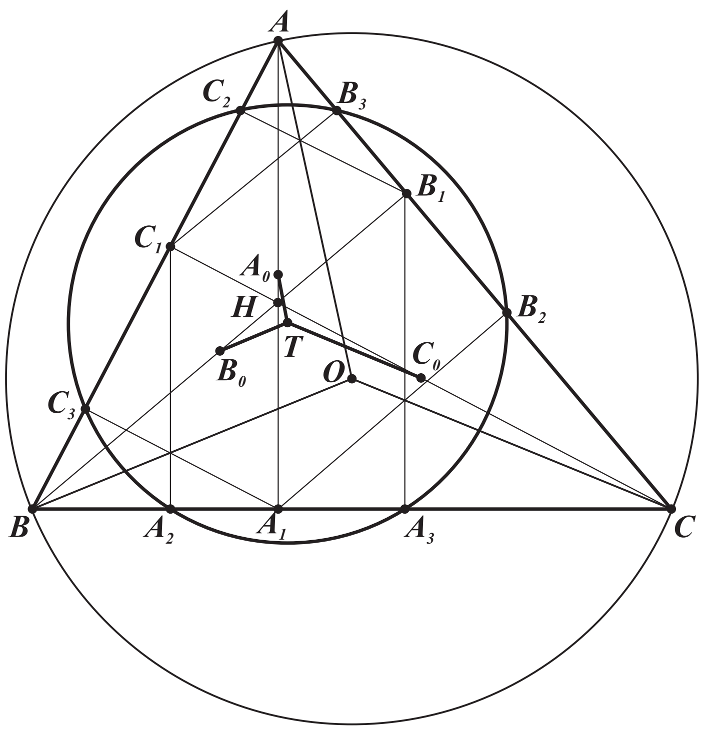

Рис. 3

[8] *Окружность Тэйлора* произвольного треугольника — эта окружность, которая содержит основания перпендикуляров, опущенных из оснований высот на прямые, содержащие стороны треугольника (всего, стало быть, имеем шесть точек). Подробнее мы поговорим о ней в заключительном параграфе, а сейчас только отметим, что в отечественной геометрической литературе она практически не упоминается (хотя и остается желанной гостьей во многих зарубежных пособиях).

Любезный читатель! Сравни теперь формулировки обеих задач. Пожалуй, следует признать, что (по крайней мере, на первый взгляд) между ними нет ничего общего, никаких вообще связей.

Но, как скоро убедимся, это впечатление — ложное.

Вообразим на секунду невероятное: кого-нибудь из многочисленных героев многочисленных *бандо-менто* сериалов, внимательно, с интересом и со знанием дела изучающего настоящие заметки. Тогда, добравшись до конца предыдущего абзаца, он с полным правом мог бы воскликнуть: — *вот с этого места, пожалуйста, поподробнее*[9]!

§2. А, может, Вечность притаилась на кончике пера?

Вот как все начиналось.

В мае 2006 мне довелось поучаствовать в семинаре для преподавателей математики г. Зеленограда. Семинар этот был не простой, а выездной и проходил на черноморском побережье в поселке Флуераш, сравнительно недалеко от Одессы. Для краткого[10] знакомства с *Жемчужиной у моря* был выделен специальный день. Тогда-то и приобрел я в одном из местных книжных подлинную *геометрическую жемчужину*, а точнее, целое жемчужное ожерелье — см. [4][11].

А одна из самых крупных и чистых отыскалась на стр. 265 (где воспроизводится статья Д. П. Мавло “Красивые свойства замечательных тел”[12]). Там речь как раз и идет о **задаче 1**.

Дадим ее более точную формулировку, сопроводив теперь надлежащим названием.

Теорема Мавло.

Среди трех дуг, которые отсекают стороны (или их продолжения) произвольного треугольника от его окружности Эйлера, обязательно найдется одна, равная сумме двух других.

Упорядочим углы треугольника в порядке возрастания. Если, к примеру, $\angle C \le \angle A \le \angle B$ (или $\angle B \le \angle A \le \angle C$), то $\omega_a = \omega_b + \omega_c$.

В случае тупоугольного треугольника дуги могут перекрываться, но равенство все равно остается в силе.

Доказательство, впрочем, несложное — если только знать следующее свойство окружности Эйлера:

$$\angle A_1A_2A_0 = |\angle B - \angle C|\,;\ \angle B_1B_2B_0 = |\angle C - \angle A|\,;\ \angle C_1C_2C_0 = |\angle A - \angle B|\,.$$

(Оно уже является хорошо известным, так как имеется, скажем, в классической книжке *Коксетера* — см. [2], стр. 33, упр. 5 и решение его на стр. 191. См. также [3], стр. 324, з. 14 и [7], з. 5.134)[13].

[9]Фраза сия необычайно полюбилась сценаристам означенных сериалов. Или сценаристу? Сериалов-то много, но как-то не чувствуется, что сценарии к ним пишутся разными людьми.

[10]но не короткого!

[11]Признаюсь со стыдом — так состоялась моя первая встреча с творчеством до этого момента совершенно мне неведомого И. А. Кушнира. Однако достаточно было, еще стоя у прилавка, на вскидку пробежать глазами пару произвольных страниц, чтобы понять: автор геометрию безумно любит, много о ней знает, и вообще, как нынче принято выражаться в инетовских пространствах, *жжот*. Книжку просто нельзя было не купить.

Прибавлю, что прочитав ее, я стал форменным *фаном* Исаака Аркадьевича и усердным коллекционером его многочисленных произведений.

[12]Опубликованная в украинском журнале “Математика в школі”, №3, 2004 ([4], стр.265-269).

[13]У меня не было необходимости заглядывать во все эти книжки или изобретать что-то самому, поскольку как-то раз сильный геометр *Евгений Дмитриевич Куланин* объяснил мне, что этот факт немедленно вытекает из следующего: угол между высотой и радиусом описанной окружности, проведенных из одной и той же вершины, равен модулю разности углов при двух других вершинах. Затем следует рассмотреть гомотетию с центром в ортоцентре H, и коэффициентом $\frac{1}{2}$, переводящую описанную окружность в окружность Эйлера.

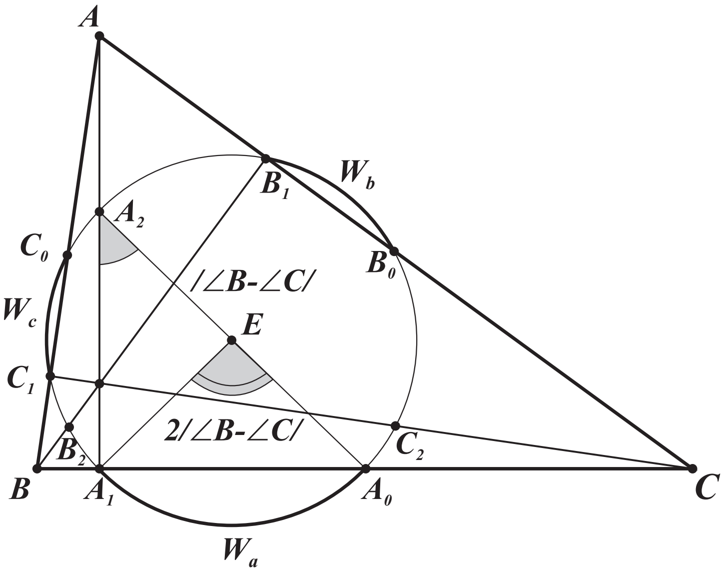

Рис. 4

Действительно, поскольку длина дуги есть произведение соответствующего центрального угла на радиус, то в случае, например, $\angle C \leq \angle A \leq \angle B$ достаточно проверить, что $\angle A_1EA_0 = \angle B_1EB_0 + \angle C_1EC_0$ (где E — центр окружности девяти точек). Поскольку центральный угол вдвое больше вписанного, все моментально сводится к тождеству $2\,(\angle B - \angle C) = 2\,(\angle A - \angle C) + 2\,(\angle B - \angle A)$ (см. рис. 4).

Тем не менее, хотелось бы подчеркнуть:

Окружность Эйлера и множество ее разнообразнейших свойств известны человечеству[14] вот уже несколько столетий. И все же Д.П. посчастливилось подметить новую[15] и яркую особенность окружности девяти точек, причем с простой и естественной формулировкой. Однажды познакомившись с теоремой Мавло, ее уже трудно позабыть.

Словом, как не крути, а результат впечатляющий. Правда, интуиция подсказывала мне, что он допускает некие продвижения. Окружность Эйлера — окружность номер один в геометрии треугольника, лидирует с большим отрывом — но она потому и одинокая такая. А хотелось понять, есть ли шанс отличиться (в указанном выше смысле) у какой-нибудь окружности позаурядней, с не столь внушительным послужным списком[16]. Или же *найти какую-нибудь эквивалентную формулировку, уже не связанную с длинами дуг.*

Но все не хватало времени (или особого желания) основательно взяться за это дело. Чувствовалось, что усилия могут потребоваться нешуточные. Однако не потребовались.

Помог случай[17].

[14]Имеется в виду, всему *прогрессивному* — т.е. несгибаемым любителям чистой геометрии. А также и некоторым другим культурным людям. Понятно, чем "навороченнее" свойство, тем уже круг компетентных лиц. Страшно ли далеки они от народа? Пожалуй.

[15]Во всяком случае, пока что *ни в каких более ранних источниках* никому еще не удалось обнаружить какого-либо упоминания о теореме, открытой Мавло.

[16]Сразу скажу — вопрос этот остается открытым. Найти какую-нибудь другую окружность, связанную с треугольником и обладающую *аддитивным свойством*, мне не удалось. Читатель, ау! откликнись: вся надежда только на тебя.

[17]Вообще, если вдуматься, во всей этой истории много случайного, а стало быть, и загадочного. Цепочка случайных событий, достаточно протяженная, неумолимо ведет (как это ни смешно) к появлению на свет **задачки 2**. Настолько неумолимо, что вспоминается фраза из одного (весьма посредственного) детектива:

— *Ваши случайности пидпорядку напевни закономерностям.* (Ну, как-то так — искаженный украинский).

Можно вспомнить в этой связи и более серьезное произведение: "*Мост короля Людовика Святого*" Торнтона Уайдлера.

Наверное, все же лучше не вдумываться в такие вещи.

§3. Оставь мне случая улыбки, пусть даже если по ошибке он осчастливит невзначай.

Этим Рождеством мой хороший знакомый Е. Д. Куланин внезапно расщедрился и совершенно по-царски одарил меня подшивкой журналов The American Mathematical Monthly.

Перелистывая их, в одном из номеров (см. [8]) как-то раз я наткнулся на небольшую заметку *Виктора Тебо*[18], озаглавленную “A Note on Orthopolar Triangles”, где и обнаружились следующие две теоремы.

Теорема 1.

Даны два треугольника ABC и *$A_1B_1C_1$, оба вписанные в окружность ω.*

Тогда, если стороны треугольника ABC имеют *общий ортопол относительно треугольника $A_1B_1C_1$*[19]*, то и стороны треугольника $A_1B_1C_1$* имеют *общий ортопол относительно треугольника ABC, причем оба ортопола совпадают друг с другом и являются серединой отрезка, соединяющего ортоцентры обеих треугольников.*

Теорема 2.

Два треугольника ABC и *$A_1B_1C_1$, вписанные в одну и ту же окружность ω, взаимно ортополярны тогда и только тогда, когда сумма*[20] *направленных дуг AA_1, BB_1, CC_1 равна нулю: $\omega_a + \omega_b + \omega_c = 0$*[21].

— Сумма дуг равна нулю. Так-так-так, что-то знакомое. Это “жжж”, как говаривал Винни-Пух, явно неспроста. Где-то я уже видел что-то подобное. Ага! **Теорема Мавло**! — вот что, помнится, подумалось. Слегка смущали только термины: *ортопол*, *ортополярные треугольники.* Помогла разобраться книжка [9] (ее одиннадцатая глава так и называется: Orthopole). Там показана корректность нижеследующего определения, а также разбирается ряд красивых утверждений, связанных с этим понятием.

Определение ортопола.

Проведем в плоскости треугольника ABC произвольную прямую l. Пусть A_1 — основание перпендикуляра, опущенного на эту прямую из вершины A. Точки B_1, C_1 определим аналогично. Затем проведем три перпендикуляра, опущенные: из точки A_1 — на прямую BC, из B_1 — на CA и из C_1 — на BC. Тогда они пересекаются в некоторой точке P, которая называется ортополом прямой l относительно треугольника ABC (см. рис. 5).

Кстати, существование ортопола вытекает из более общей теоремы, так называемой *теоремы Штейнера* (см. [1], стр. 240, [7], з. 5.126).

Скажем, что треугольник ABC *ортологичен* треугольнику $A_1B_1C_1$ ($\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1$), если перпендикуляры из A — на прямую B_1C_1, из B — на C_1A_1 и из C — на B_1C_1 пересекаются в одной точке (*ортологический центр*).

Теорема Штейнера заключается в том, что $\Delta ABC \perp \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \Delta A_1B_1C_1 \perp \Delta ABC$.

---

[18] Еще один, звездной величины, титан элементарной геометрии, опубликовавший только в Math. Monthly около 600 оригинальных задач.

[19] В таком случае говорят, что треугольник ABC *ортополярен* треугольнику $A_1B_1C_1$.

[20] Направленная длина дуги — приблизительно то же, что и направленная длина отрезка. Именно, зафиксируем направление обхода окружности, — например, против часовой стрелки. Длина дуги AA_1 будет положительной, если сначала на пути попадется точка A, и затем — A_1. В противном случае длину считают отрицательной.

[21] Согласно Тебо, автор **Теоремы 1** — некто *M. Absolome* (1907г.), а **Теоремы 2** — *R. Godeau* (1927). (И потому можно смело утверждать, что **Задача 1** *дождалась*-таки своего *Годо*, т.е., в данном случае, эффектного в своей неожиданности переосмысления). Тебо также указывает, что обе теоремы имеют короткие *синтетические* (т.е. геометрические) доказательства. Настоятельно рекомендую читателю попробовать их воспроизвести. Я этим заниматься не стал, т.к. мне нужно было лишь “навести мосты” между задачами, а спортивный интерес с годами как-то поиссяк. Полагаю, доказательства не должны быть сложными и труднонаходимыми. Все необходимые определения, информация и, уверен, идеи содержатся в статье.

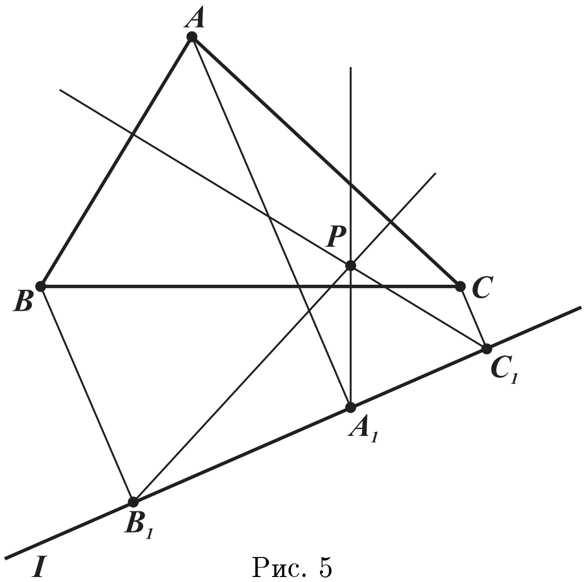

Рис. 5

В случае ортопола проекции вершин треугольника ABC на прямую l — точки A_1,B_1, C_1 — можно считать вершинами *вырожденного* треугольника, а параллельные перпендикуляры — пересекающимися в *бесконечно удаленной точке* (подробнее см. [5], стр. 7).

Вот он и наступил, наконец, долгожданный *момент истины*: появление *нового персонажа* на сцене.

Задача 02-а). *В произвольном треугольнике рассмотрим три перпендикуляра к сторонам его ортотреугольника, каждый из которых проходит через середину соответствующей высоты. Тогда эти перпендикуляры конкурентны* (см. рис. 6).

В самом деле, из **задачи 1** и **теоремы 2** вытекает, что *серединный* и *орто- треугольники* данного треугольника *взаимно ортополярны*. Тогда, по **теореме 1**, соответствующие стороны серединного треугольника имеют *общий ортопол* относительно ортотреугольника. Но, очевидно, перпендикуляр, опущенный из вершины ортотреугольника на соответствующую среднюю линию, совпадает с высотой треугольника и пересекает среднюю линию в точке, совпадающей с серединой высоты. А перпендикуляр, опущенный из этой середины на соответствующую сторону ортотреугольника, содержит ортопол этой средней линии.

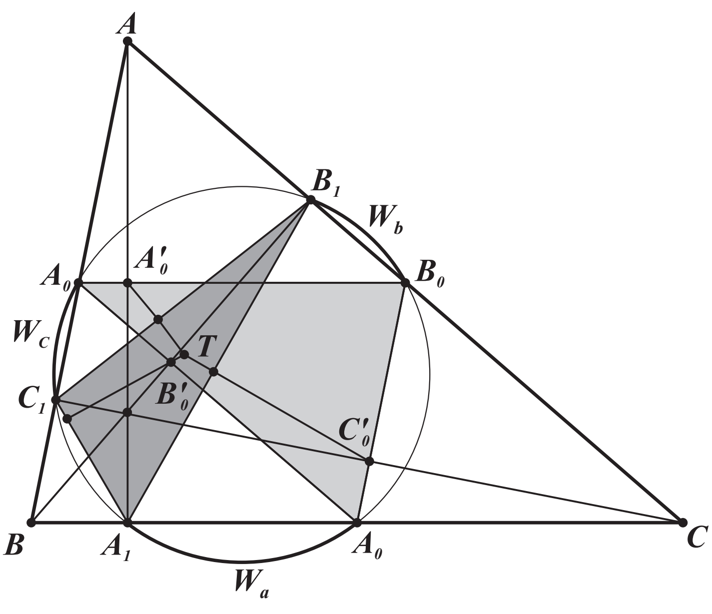

Рис. 6

Утверждение доказано.

Правда, это не совсем еще **задача 2-а)** (потому-то и поставлен нулик перед двойкой).

Задачу 2-а) получим, если воспользуемся тем, что радиус, проведенный в вершину треугольника, перпендикулярен *антипараллелям* к соответствующей стороне треугольника, а соответствующая сторона ортотреугольника как раз и будет одной из таких антипараллелей (см. рис. 7).

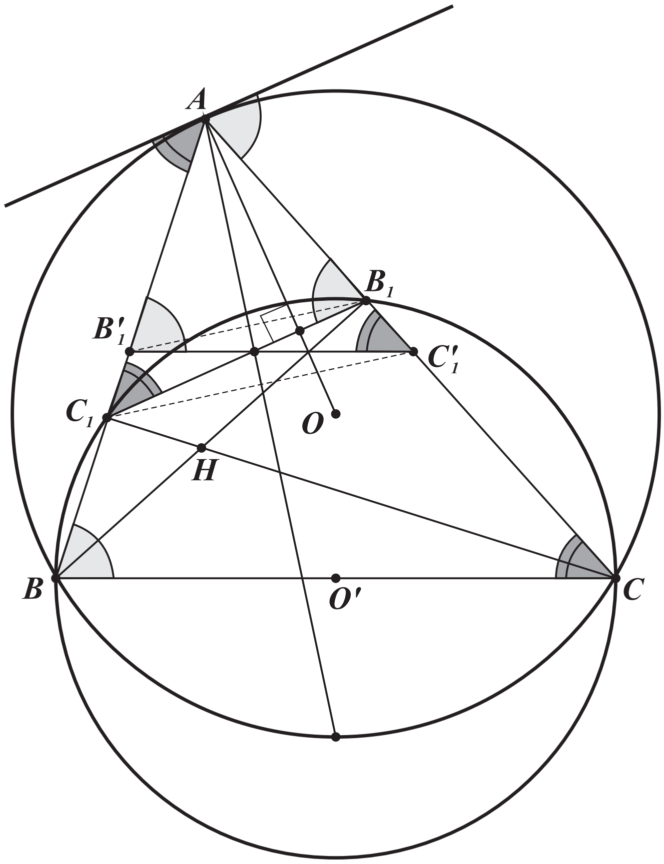

Рис. 7

Антипараллельность встретится нам и дальше, поэтому освежим в памяти некоторые факты, связанные с этим понятием.

Итак, говорят, что отрезок B_1C_1, где точки B_1и C_1 лежат на лучах AC и AB (или, одновременно, на продолжениях этих лучей), *антипараллен* стороне BC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ и $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$.

Очевидно, что при симметрии относительно биссектрисы угла BAC антипараллельный отрезок переходит в отрезок, параллельный стороне BC. (Это — эквивалентное определение антипараллельности).

Далее, если BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, то отрезок B_1C_1 (сторона ортотреугольника) антипараллен стороне BC, поскольку около четырехугольника BC_1B_1C можно описать окружность (имеем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой), а сумма противоположных углов во вписанном треугольнике равна 180^0.

И, также, касательная к описанной окружности в вершине A будет параллельна соответствующей антипараллели, как это следует из теоремы об угле между касательной и секущей и признака параллельности прямых по равенству накрест лежащих углов.

Отсюда вытекает, в свой черед, перпендикулярность радиуса описанной окружности, проведенного в вершину треугольника, соответствующей стороне его ортотреугольника.

§4. Здесь в каждом шаге откровенье, и глянец с таинств сорван вон.

В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A, и параллельна OA. Аналогично определяются прямые b и c. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

Именно в такой формулировке **задача 2-а)** была включена в *шестую устную олимпиаду по геометрии* (Москва, апрель 2010г.)[22].

Но прежде, чем ее куда-то включать, еще нужно было отыскать *геометрическое* решение, доступное школьникам и не особенно громоздкое[23]. И такое решение нашлось, притом даже и не одно.

Начнем с авторского[24].

Решение 1. Только что мы освежили в памяти (см. заключительную часть предыдущего параграфа), что отрезки, соединяющие вершины треугольника с центром его описанной окружности, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника. Значит, и прямые в условии обладают тем же свойством.

Рассмотрим треугольник $A_2B_2C_2$ с вершинами в серединах отрезков, соединяющих центр описанной окружности с основаниями соответствующих высот. Тогда B_2C_2 — средняя линия треугольника OC_1B_1 и потому параллельна прямой B_1C_1. С другой стороны, A_0A_2 — средняя линия треугольника AA_1O, а значит, параллельна AO, т.е. совпадает с данной в условии прямой a и является высотой треугольника $A_2B_2C_2$, опущенной из вершины A_2.

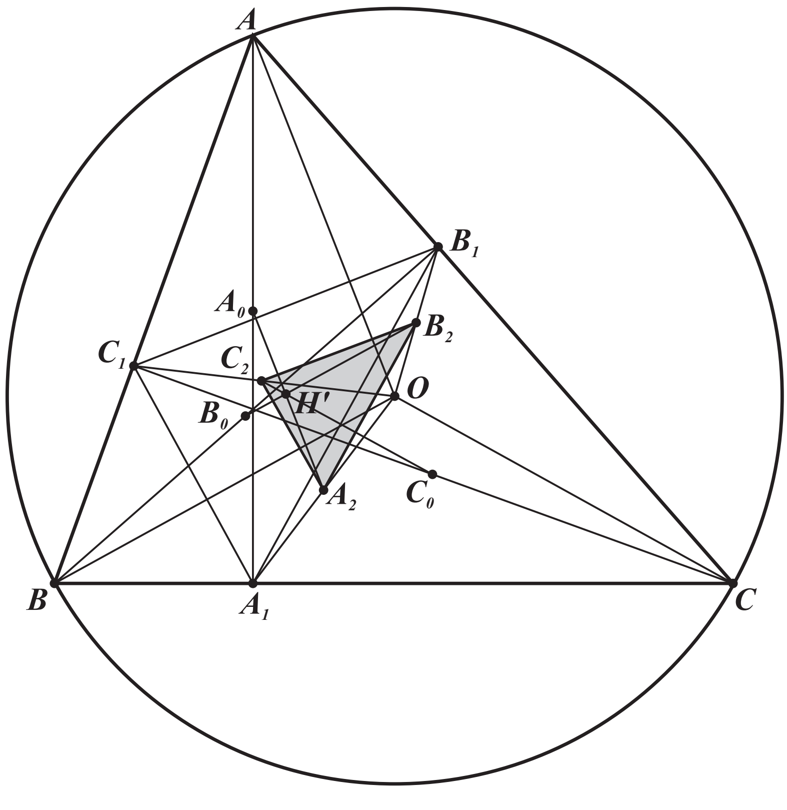

Рис. 8

[22]И, хочется верить, *много-много радостей детишкам принесла.* Не всем, правда. Из 58-ми решавших ее человек с ней справились лишь пятеро.

[23]Не имелось никаких сомнений: такое решение, не зависящее от **теоремы 1** и **теоремы 2,** существует.

(Не говоря уже о том, что любое подобного рода утверждение легко пробивается *барицентрическими координатами* (см. [5], стр. 17, [7], гл. 14). Однако эти самые координаты — где-то все же *не наши методы.* В том смысле, что содержательная геометрическая задача взывает и к содержательному геометрическому решению, обходящемуся минимальным количеством выкладок алгебраического толка).

[24]Как говорится, *хоть маленький, убогенький — а свой.*

Аналогично, прямые b и c будут двумя другими высотами рассматриваемого треугольника. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, наше утверждение доказано (см. рис. 8).

Решение 2.

Прямые a', b', c', проведенные через A_1, B_1, C_1 параллельно соответственно OA, OB, OC, являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$; обозначим точку их пересечения через H' (см. рис. 9).

Пусть T — середина отрезка OH'. Прямая, параллельная AO, проходящая через T, делит пополам любой отрезок с концами на параллельных прямых AO и a', в частности проходит через середину отрезка AA_1, т.е. совпадает с прямой a. Таким образом, a проходит через T. Аналогично, прямые b и c проходят через T.

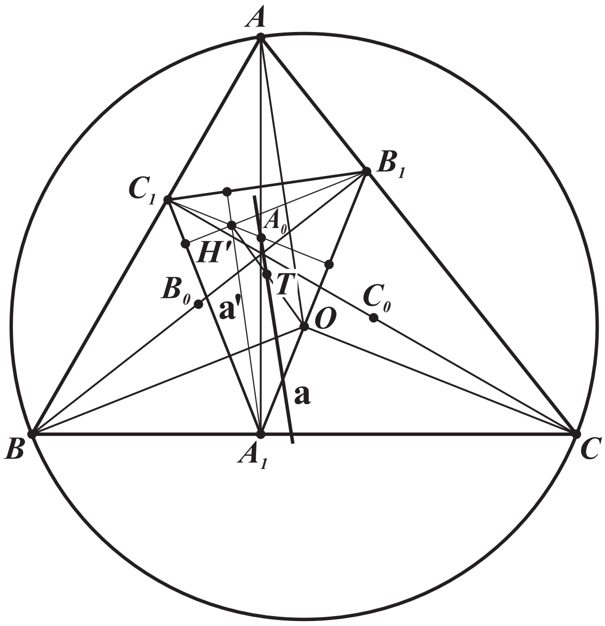

Рис. 9

Это доказательство принадлежит молодому московскому геометру *Юрию Блинкову* и оно получше будет, нежели чем авторское, ибо локализует местонахождение точки пересечения как середину отрезка с концами в известных точках, допускающих *классическое* описание[25].

Но, как вскоре выясним, на самом деле эта точка T имеет и совсем уже *замечательную* геометрическую суть.

Здесь представляется уместным сказать несколько слов о *замечательных точках треугольника* вообще.

Строгого математического определения замечательной точки треугольника не существует.

Имеется, правда, вполне научное определение так называемой *центральной точки* (см. [5], стр. 23) — но, во-первых, под это определение не попадают многие точки, безусловно замечательные в интуитивном смысле, а во-вторых, попадают многие, которые скорее хотелось бы назвать *ничем не примечательными*. Говоря неформально, **"степень замечательности" той или другой точки можно оценить дробью, в числителе которой — количество нетривиальных свойств, связанных с этой точкой, а в знаменателе — "сложность" ее построения.**

Американский математик *Кларк Кимберлинг* уже многие годы собирает центральные точки. Свою коллекцию (*Encyclopedia of Triangle centers*, сокращенно *ETC*) он разместил на сайте —

[25]А поскольку центр описанной окружности O совпадает с *ортоцентром серединного треугольника*, то точка пересечения есть еще и середина отрезка, соединяющего *ортоцентры* двух ортополярных треугольников, вписанных в одну и ту же окружность (в нашем случае — в окружность *Эйлера*), как это и предсказывала **теорема 1.**

см. [10]. Точке там присваивается порядковый номер, даются ее барицентрические координаты и приводятся основные геометрические свойства.

Благодаря усилиям энтузиастов, без преувеличения можно сказать, всего мира (большое спасибо современным средствам связи и современным же геометрическим программам), в настоящее время[26] количество центров в ETC достигло внушительной цифры 3587.

У читателя, не знакомого с ETC, может возникнуть вполне естественный вопрос: а как все же проверить, значится ли потенциально новая точка в списках? Неужели сравнивать координаты с более чем 3500 других? Да и сами координаты не всегда так уж просто вычислить. Согласитесь, довольно удручающая вырисовывается перспектива: считали-считали, сосчитали, наконец — затем начали сравнивать — и вдруг, шаге на 3000-ом, обнаружили совпадение с известной точкой.

Но вот что придумал хитроумный Кимберлинг.

В его Энциклопедии каждой точке, помимо порядкового номера и координат, присвоено еще и некое число. Это число — *расстояние от данной точки*[27] *до прямой, содержащей сторону BC треугольника ABC со сторонами* BC=6, CA =9, AB =13.

К примеру, мы открыли, что медианы пересекаются в одной точке, но не знаем, есть ли такая в ETC.

Тогда вычислим соответствующее расстояние[28] (см. рис. 10) и заглянем в Энциклопедию.

Мы увидим два столбца — в правом находится расстояние (таблица упорядочена именно по возрастанию расстояний), а в левом — порядковый номер. В нашем случае мы довольно быстро найдем нужную нам строчку:

2	2.629368792488

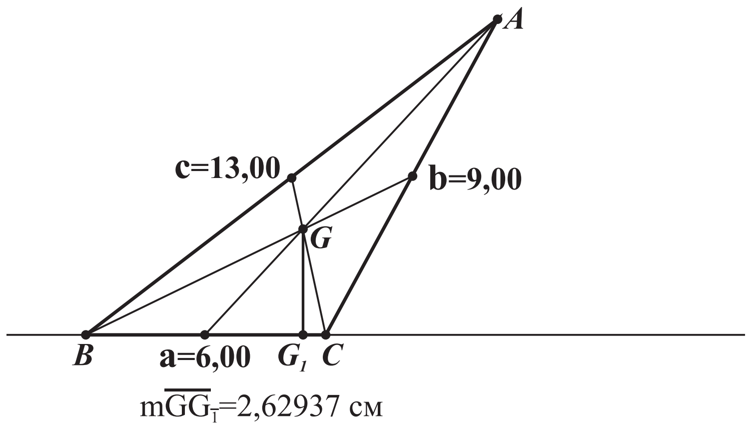

Рис. 10

А затем уже открываем список точек по номерам, и видим, что точка под номером 2 — так называемый центроид. (Если же, вдруг, найденное число в списках не значится, значит — точка новая и нужно срочно писать письмо Кимберлингу. Он с удовольствием добавит ее в коллекцию и, более того, окрестит Вашим именем.)

[26]По состоянию на июнь 2010 г.

[27]Взятое со знаком “+”, если точка находится “над” прямой BC, и со знаком “-” в противоположном случае. Это расстояние — не что иное, как *нормированная трилинейная координата точки* (первая). Можно также показать, что *центральная* точка ей однозначно определяется.

[28]С помощью программы типа *Geometrical Sketchpad* или *Cabri*.

§5. Всем льстят победы дух и привкус новизны.

И когда возникло сильное желание разобраться с точкой T, я поступил описанным выше способом, воспользовавшись ETC. Меня ожидал приятный сюрприз — точкой T оказался *центр окружности Тэйлора*. На этой окружности лежат шесть оснований перпендикуляров, опущенных из оснований высот треугольника на прямые, содержащие пары остальных сторон.

(*Практикум по Кимберлингу: Узнайте точку*!

Поскольку мы показали, что треугольник $A_0B_0C_0$ с вершинами в серединах высот треугольника ABC *ортологичен* его ортотреугольнику $A_1B_1C_1$, то, в силу **теоремы Штейнера** — см. **§4** — должно выполняться и обратное утверждение, т.е. перпендикуляры, проведенные из вершин ортотреугольника $A_1B_1C_1$ к соответствующим сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, будут пересекаться в некоторой точке P — см. рис. 11.

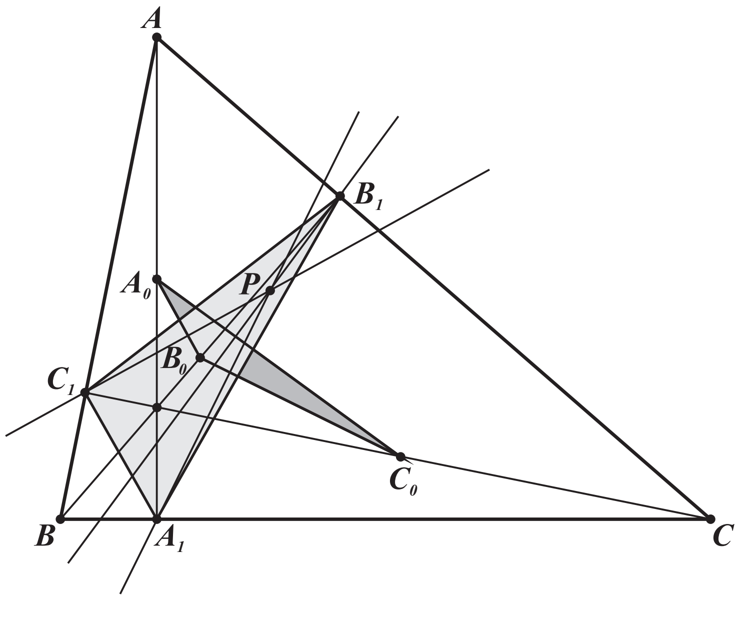

Рис. 11

Отыщите ее в Кимберлинге, действуя по указанной процедуре. Ответ приведен в конце статьи.)

Теорема о точке *T*.

Считая факт существования окружности Тэйлора известным, легко понять, что наша точка T и есть ее центр.

Доказательство:

В самом деле, рассмотрим хорду этой окружности B_2C_2, соединяющую основания перпендикуляров, опущенных на стороны из точки A_1 — основания соответствующей высоты (см. рис. 12).

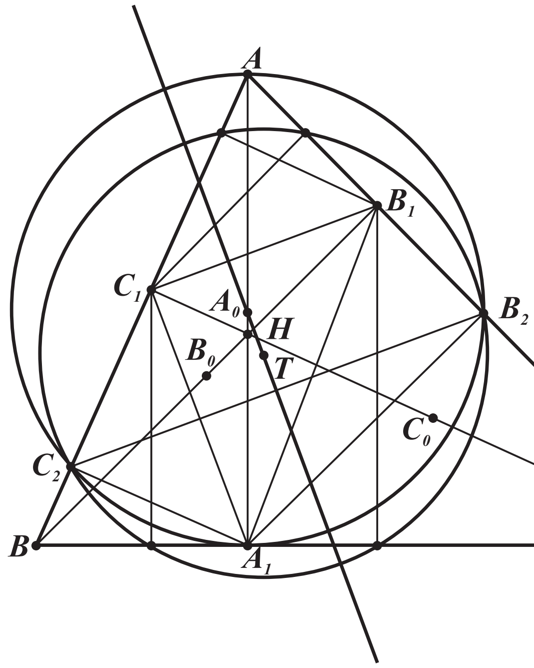

Рис. 12

Понятно, что серединный перпендикуляр к этой хорде проходит через центр окружности Тейлора T. С другой стороны, он же проходит через точку A_0 — середину высоты AA_1, поскольку точка эта есть центр окружности, описанной около четырехугольника $AC_2A_1B_2$, образованного двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой AA_1, и B_2C_2 — также хорда и этой окружности. Остается только заметить, что прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны (получаются одна из другой соответствующей гомотетией с вершиной A и коэффициентом $k = \frac{AH}{AA_1}$). А потому рассмотренный перпендикуляр совпадает с прямой a. И аналогично для двух других прямых.

Поговорим теперь об окружности Тэйлора подробнее — она того заслуживает.

Оказывается, она является частым случаем так называемых *окружностей Тукера*. В свой черед, окружность Тукера — это окружность, описанная около *шестиугольника Тукера*, который может быть построен следующим образом (см. рис. 13).

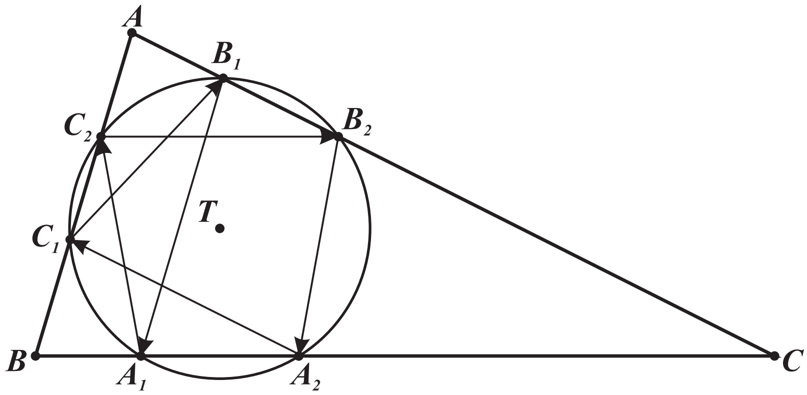

Рис. 13

На стороне BC (или ее продолжении) произвольного треугольника ABC выбираем случайным образом некую точку A_1 и из нее проводим *антипараллель*[29] (об антипараллелях — см.

[29]Впрочем, начинать можно и с *параллели*. Затем пойдет *антипараллель* и т.д.

§4) к стороне AC. Пусть она пересекает сторону AB (или ее продолжение) в некоторой точке C_2. Из этой точки проведем *параллель* к BC и отметим точку B_2 ее пересечения с AC. Далее, чередуя антипараллели с параллелями, получим еще три точки на сторонах (или их продолжениях) треугольника ABC, причем шестой шаг *обязательно* вернет нас в исходную точку A_1 (т.е. процесс замыкается на ней). Полученный шестиугольник и есть шестиугольник Тукера. Около него *всегда* можно описать окружность (разумеется, Тукера), а его три антипараллели обязательно равны друг другу.

Обо всем этом и о многих других свойствах окружностей Тукера и Тэйлора — см. [1], стр. 169; [7], з. 5.159, 5.160, 5.161; [9], гл. 9.

Но приведенное ниже новое и поистине *очаровательное* доказательство (из тех, которые Хонсбергер называет *a Real Jam*[30]) существования окружности Тэйлора в этих книгах (и, наверное, ни в каких других) не сыскать. Дело в том, что оно родилось буквально вот только что, весною 2010 г., и устанавливает неожиданную связь классической окружности Тэйлора с ее лишь недавно явившейся свету коллегой: так называемой *окружностью Конвея.*

Автор доказательства — еще один молодой московский геометр *Дмитрий Прокопенко.*

Однако обо всем по порядку.

В 1998 году знаменитый математик *Джон Конвей* порадовал любителей элементарной геометрии следующей любопытной конструкцией (см. рис. 14).

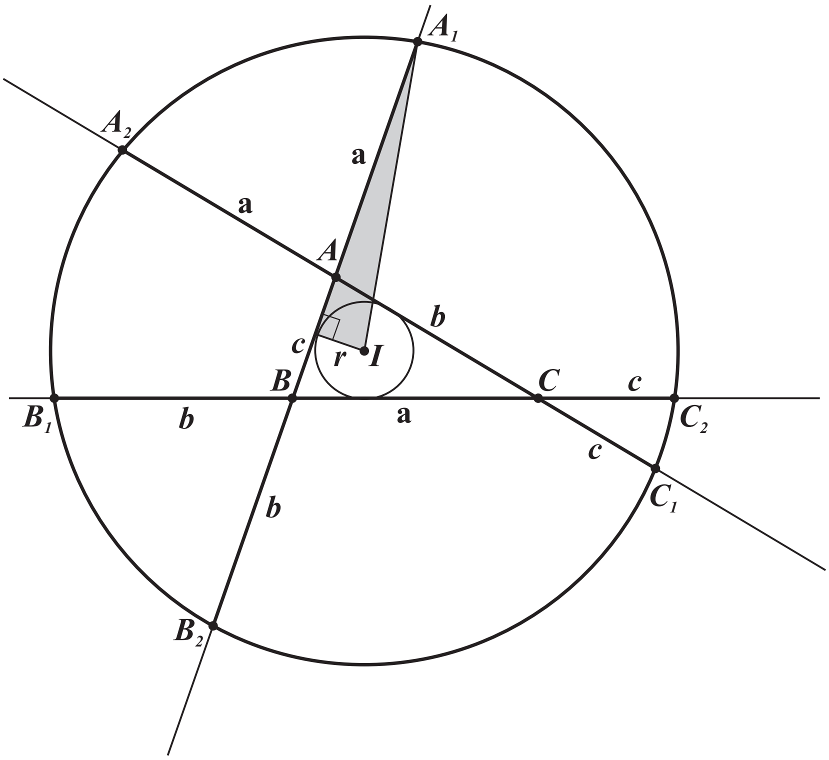

Рис. 14

В произвольном треугольнике ABC на прямых AB и AC отложим (*вовне* относительно треугольника) от точки A отрезки, равные стороне BC. Концы этих отрезков, отличные от вершины, дают две новые точки A_1 и A_2. Аналогично построим точки B_1, B_2, C_1, C_2. Несложно показать, что все шесть построенных таким образом точек лежат на одной окружности. Центр ее совпадает с центром вписанной в треугольник окружности, а радиус равен $\sqrt{r^2+s^2}$, где r — радиус вписанной в треугольник окружности; s — полупериметр. (Так как один из катетов выделенного на рисунке прямоугольного треугольника есть r, а второй равен $(s-a)+a=s$). При этом три хорды окружности имеют одинаковую длину: $A_1B_2 = A_2C_1 = B_1C_2 = 2s = a+b+c$.

[30]Полное удовольствие; пальчики оближешь — *прим. ред.*

Обратим внимание на то, что *центр вписанной* в треугольник *окружности* имеет *трех ближайших родственников — центры окружностей вневписанных*. Точки, допускающие подобное "расщепление", Конвей предложил именовать "*weak points*", т.е. *слабыми*[31].

А поскольку только что рассмотренная окружность концентрична вписанной, возникает подозрение, что и у нее должны найтись *три сестрицы — добавочные окружности Конвея,* концентричные соответствующим вневписанным окружностям.

И так оно и есть на самом деле. К примеру, чтобы получить добавочную окружность Конвея с центром в I_a (вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжения двух других), нужно действовать следующим образом: из вершины A отложить на прямые, содержащие стороны треугольника, отрезки, равные противолежащей стороне, не вовне, а *вовнутрь*. При вершине B — один отрезок *вовне*, другой *вовнутрь* и аналогично при вершине C. Несложно убедиться в том, что получается окружность с центром в I_a и радиуса $\sqrt{r_a^2 + (s-a)^2}$ (где r_a — радиус соответствующей вневписанной окружности). Также справедливо равенство $A_1B_2 = A_2C_1 = B_1C_2 = 2(s-a) = b + c - a$ (см. рис. 15).

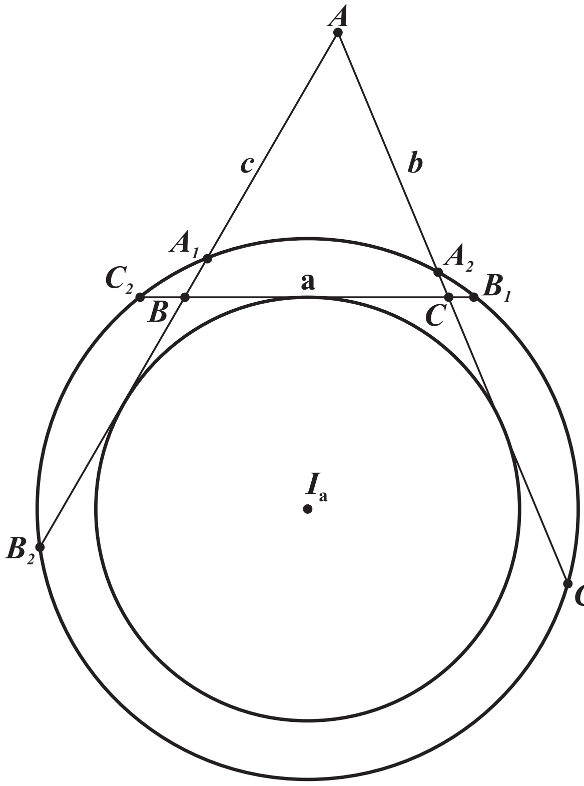

Рис. 15

Мне лично окружности Конвея дороги особенно, т.к. имел честь их переоткрыть в 2003 г., отстав от первопроходца всего-то лишь на пять годочков.

"Повторение пройденного" — в элементарной геометрии совершенно типичная, *обыкновенная история.*

Так, *юбиляру* однажды "переоткрылась" *приятная во всех отношениях окружность Фурмана*[32]. Поскольку в отечественной литературе она фактически нигде не *фигурирует*, немножко *пройдемся* (название статьи к этому подталкивает) и по ней.

[31]Как альтернативный вариант перевода, вполне возможно сочное слово *квелый*. Согласно *Далю*, ***Квелый*** (***кволый, квилкий***) — хилый, слабый, нежный, болезненный; болький, чувствительный; жалобный, писклявый, недотрога.

[32]Вильгельм Фурман (1833-1904) — немецкий математик.

Рассмотрим некоторый треугольник ABC и опишем около него окружность. Середины соответствующих дуг (вторые точки пересечения внутренних биссектрис треугольника с описанной окружностью) обозначим[33] W_1, W_2, W_3, а точки, им симметричные относительно соответствующих сторон треугольника — W_1', W_2', W_3'. Тогда эти симметричные точки лежат на *окружности с диаметром* HN, (где H — ортоцентр треугольника, а N — его точка *Нагеля*[34]). Ее и называют окружностью Фурмана, см. рис. 16.

Превосходное геометрическое доказательство и обсуждение прочих любопытных свойств этой окружности имеется в [9], гл. 6.

А теперь, внимание, вопрос. (Ответ — в конце статьи).

Сообразить на троих или Добавочные окружности Фурмана.

Точка Нагеля N, очевидно, является слабой[35]. Значит, слабым объектом является и окружность Фурмана.

Нарисуйте "портреты" трех ее сестер.

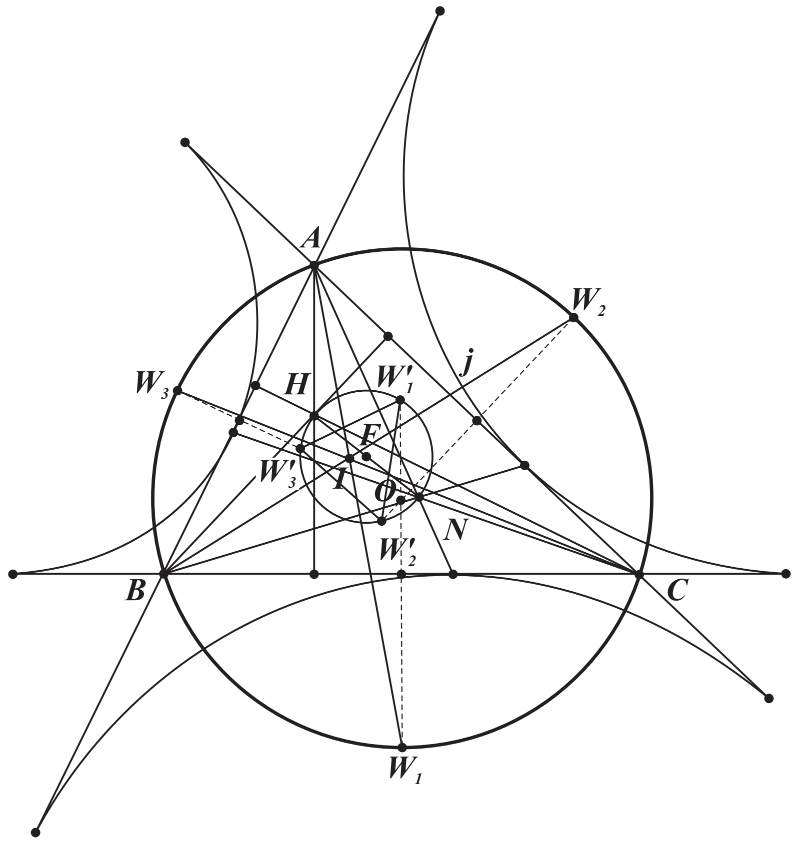

Рис. 16

Наконец, обещанный *эксклюзив*.

[33]Следуя И.А. Кушниру. Эти точки — одни из его любимейших.

[34]Точка конкурентности прямых, соединяющих вершины треугольника с им противолежащими точками касания соответствующих вневписанных окружностей со *сторонами*.

[35]Чтобы построить первую добавочную точку Нагеля N_a, нужно отметить точку A_1 касания вписанной окружности со стороной BC, точку B_1 касания соответствующей вневписанной окружности с продолжением стороны AC *за* точку A и точку C_1 касания другой вневписанной окружности с продолжением стороны AB также *за* точку A. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в искомой точке.

Теорема Прокопенко.

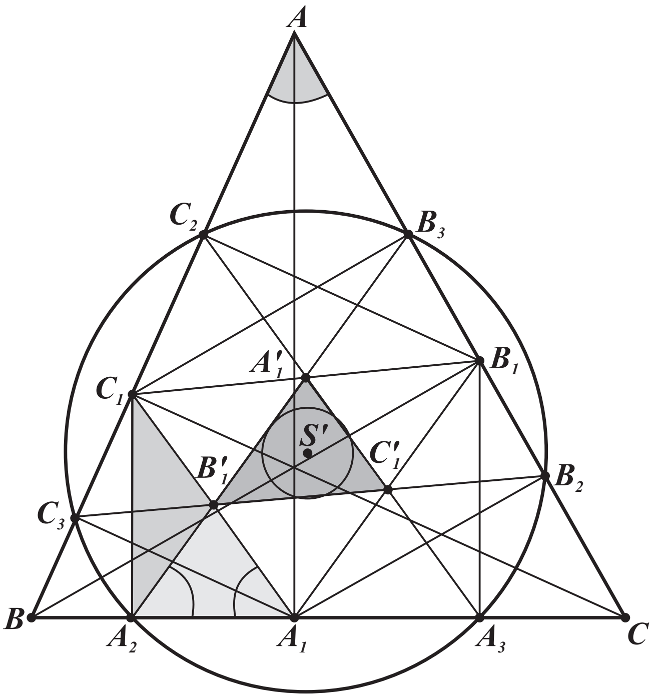

Рис. 17

Если треугольник ABC — остроугольный, то его окружность Тэйлора совпадает с окружностью Конвея серединного треугольника ортотреугольника исходного треугольника (см. рис. 17).

В случае тупоугольного треугольника окружность Тэйлора совпадает с соответствующей добавочной окружностью Конвея (см. рис. 18, где тупым выбран угол при вершине B).

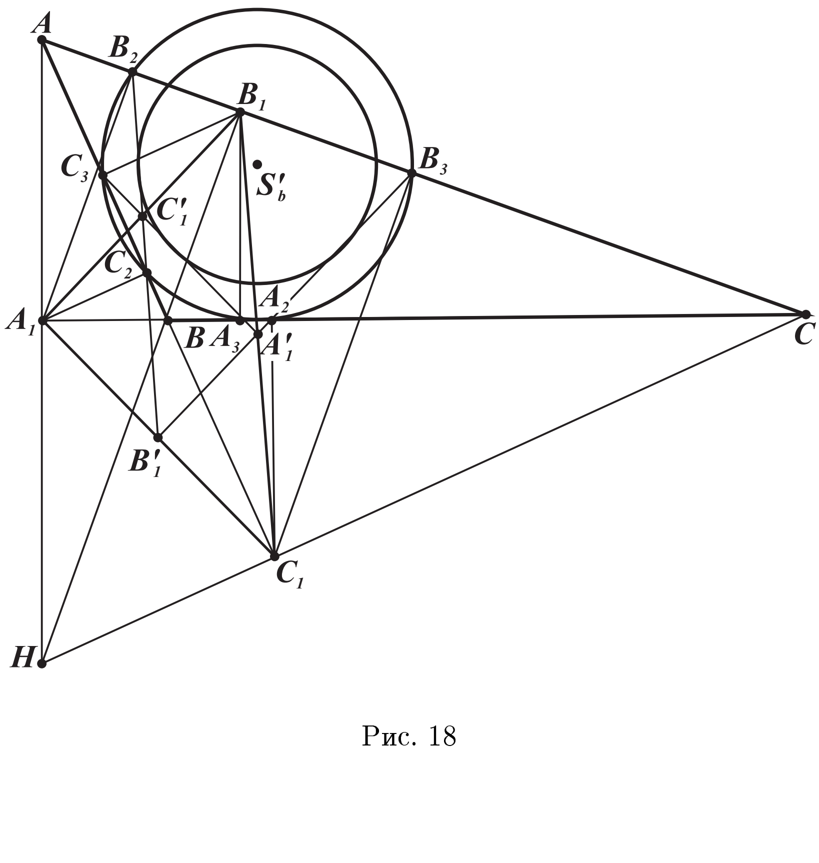

Рис. 18

Доказательство (см. рис. 17).

Ограничимся случаем остроугольного треугольника ABC (для тупоугольного треугольника доказательство аналогично).

Пусть A_1', B_1', C_1' — середины сторон ортотреугольника A_1, B_1, C_1.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1A_2C_1$. Поскольку точка B_1' — середина его гипотенузы A_1C_1, то $A_2B_1' = A_1B_1' = \frac{1}{2}A_1C_1 = A_1'C_1'$ (как средняя линия).

Отсюда, в частности, следует, что треугольник $A_1B_1'A_2$ — равнобедренный. Кроме того, нам известно, что A_1C_1 — антипараллель к AC (см. окончание §**4**). Поэтому $\angle B_1'A_2C = \angle B_1'A_1B = \angle BAC$.

Но, как было установлено при доказательстве **теоремы о точке $\boldsymbol{T}$** (см. начало §**5**), отрезок A_2B_3 есть антипараллель к стороне AB, и потому $\angle B_3A_2C = \angle BAC$. Антипараллелью к этой же стороне является отрезок A_1B_1, параллельный средней линии $A_1'B_1'$.

Отсюда заключаем, что отрезок A_2B_3 *содержит* внутри себя отрезок $A_1'B_1'$. И, так как $A_2B_1' = A_1'C_1'$, то, стало быть, точка A_2 принадлежит рассматриваемой окружности Конвея. Для остальных пяти точек окружности Тэйлора проходят те же рассуждения, нужно только циклически переставить в нужных местах буковки и индексы.

Итак, доказано, что из существования окружности Конвея вытекает существование окружности Тэйлора.

Замечание-следствие:

Центр окружности Тейлора как *точка Шпикера ортотреугольника*.

Точкой Шпикера произвольного треугольника называют центр окружности, вписанной в его серединный треугольник.

Центры же вневписанных окружностей доставляют нам так называемые добавочные точки Шпикера.

Поскольку окружности Конвея концентричны с соответствующими вписанными-вневписанными окружностями, только что мы еще и доказали утверждение:

Если треугольник ABC — остроугольный, то *центр окружности Тэйлора совпадает с точкой Шпикера* его *ортотреугольника*.

В случае тупоугольного треугольника центр окружности Тэйлора совпадает с соответствующей добавочной точкой Шпикера его *ортотреугольника.*

Предельный тренинг.

Все исходные треугольники этого параграфа по умолчанию предполагались либо остроугольные, либо тупоугольные.

А что же происходит в случае *прямоугольного треугольника*?

Понятно, что в таком треугольнике *ортотреугольник вырождается* в *высоту*, опущенную на гипотенузу из вершины прямого угла.

И тогда возникает ряд вопросов, но одного толка. А именно, что и почему в этом случае следует считать:

— окружностью Тэйлора и ее центром;

— многоугоугольником Тэйлора;

— серединным треугольником ортотреугольника и его окружностями Конвея;

— точками Шпикера ортотреугольника.

Призываю читателя поразмыслить над всем этим. (Ответы — через страницу).

В заключение нашего путешествия давайте глянем, как представлено главное действующее лицо данного раздела в ETC[36]:

X(389) = CENTER OF THE TAYLOR CIRCLE (центр окружности Тэйлора)

[36] Два "крайних" свойства, выделенные жирным цветом, уже давно прописались в Энциклопедии. Именно их и доказали Прокопенко с Блинковым — очень, надо отдать должное, оригинальным и самобытным образом.

А "среднее", как видим, добавлено сравнительно недавно. (Для удобства читателя приводим перевод на русский язык — *прим. ред.*)

Trilinears (трилинейные координаты)

$$cosA - cos2Acos(B-C) : cosB - cos2Bcos(C-A) : cosC - cos2Ccos(A-B)$$

Barycentrics (барицентрические координаты)

$$a[cosA - cos2Acos(B-C)] : b[cosB - cos2Bcos(C-A)] : c[cosC - cos2Ccos(A-B)]$$

If ABC is acute then X(389) is the Spieker center of the orthic triangle (если треугольник ABC остроугольный, то X(389) является точкой Шпикера ортотреугольника). Peter Yff reports (Sept. 19, 2001) that since X(389) is on the Brocard axis, there must exist T for which X(389) is (Peter Yff 19 сентября 2001г. сообщил, что поскольку X(389) лежит на оси Брокара, должно существовать T, для которого X(389 имеет координаты))

$$sin(A+T) : sin(B+T) : sin(C+T), \text{ and that (а также) } tan(T) = -cotAcotBcotC.$$

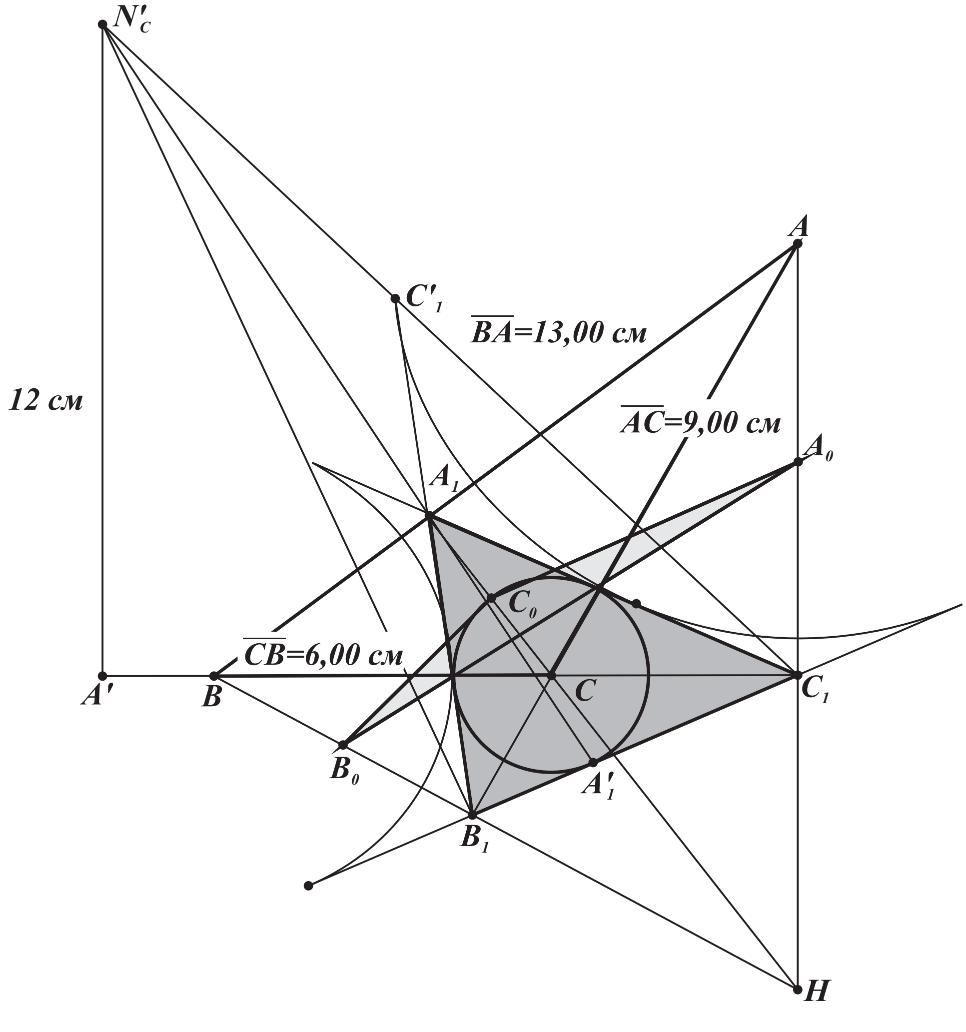

Рис. 19

Let $\mathbf{H}_A$ be the A-altitude of triangle ABC, and let A' be the midpoint of segment $\mathbf{AH}_A$. Let $\mathbf{L}_A$ be the line through A' parallel to AO, where O denotes the circumcenter. Define $\mathbf{L}_B$ and $\mathbf{L}_C$ cyclically. The lines $\mathbf{L}_A$, $\mathbf{L}_B$, $\mathbf{L}_C$ concur in X(389). (Construction by Alexei Myakishev, March 24, 2010.) (Пусть H_A — высота из вершины A треугольника ABC, A' — середина отрезка AH_A. L_A — прямая, проходящая через точку A' параллельно AO, где O — центр описанной окружности. Аналогично циклически определим прямые L_B и L_C. Тогда прямые L_A, L_B и L_C пересекаются в точке X(389). Это конструкция Алексея Мякишева, 24 марта 2010г.)

If you have The Geometer's Sketchpad, you can view **X(389)**. (Если у вас есть программа The Geometer's Sketchpad, вы можете увидеть точку X(389).)

X(389) lies on these lines (X(389) лежит на этих прямых):

3,6 4,51 24,184 30,143 54,186 115,129 217,232 517,950

X(389) = midpoint of X(I) and X(J) for these (I,J) (X(389) — середина отрезков X(I)X(J) для следующих (I,J)): (3,52), (4,185), (974,1112)

X(389) = reflection of X(1216) in X(140) (X(389) — отражение точки X(1216) относительно точки X(140))

X(389) = inverse-in-Brocard-circle of X(578) (X(389) — инверсия точки X(578) относительно окружности Брокара)

X(389) = crosspoint of X(4) and X(54)

X(389) = crosssum of X(I) and X(J) for these (I,J): (3,5), (6,418)

Ответы.

Практикум по Кимберлинг: Узнайте точку!

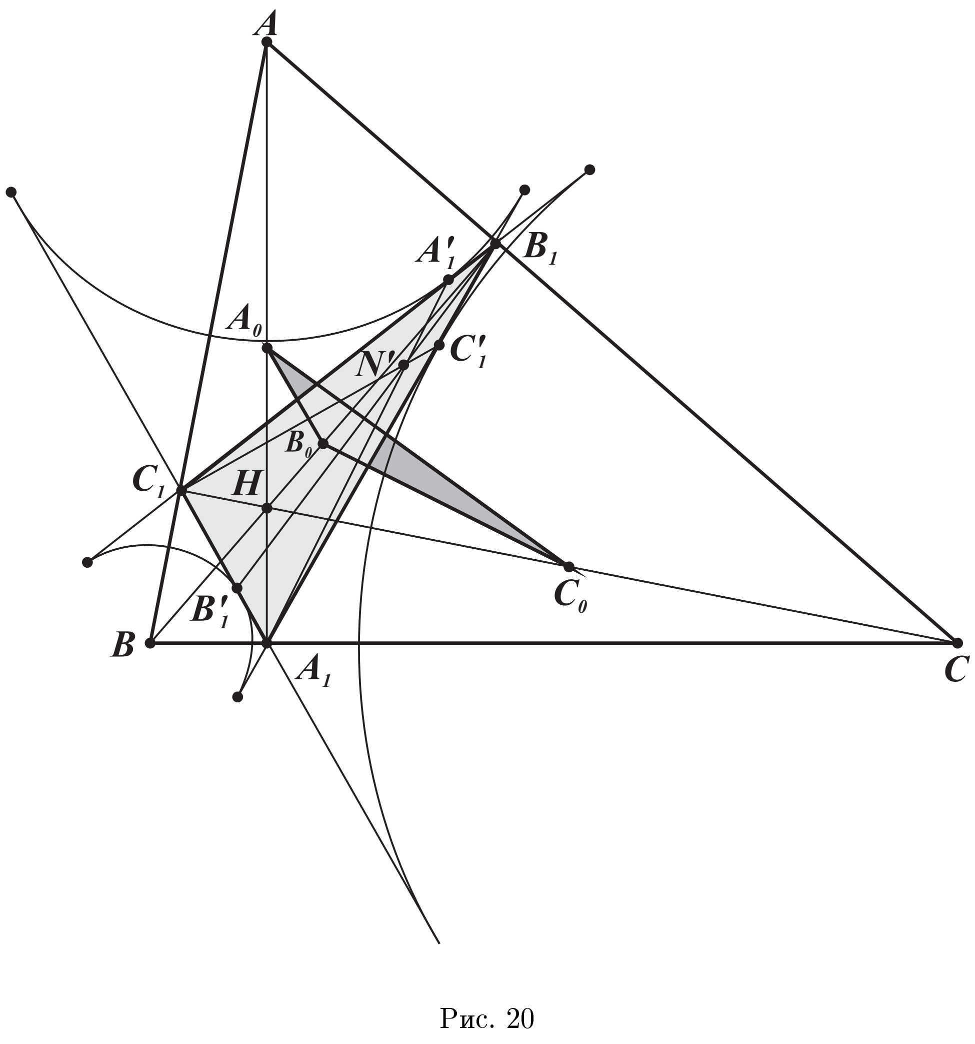

Рис. 20

Неукоснительно придерживаясь инструкции (см. рис. 19), выйдем к точке X(185) = NAGEL POINT OF THE ORTHIC TRIANGLE (точка Нагеля ортотреугольника), как она именуется в Энциклопедии. Однако рисунки 19 и 20 свидетельствуют о вкравшейся неточности: точка Нагеля получается, если исходный треугольник остроугольный (рис. 20). Если же треугольник тупоугольный (рис. 19) — то речь должна идти о добавочной точке Нагеля[37].

Так, используя научно-технический прогресс, мы установили, где именно пересекаются перпендикуляры.

Оставляю читателю в качестве заключительного упражнения — отыскать не особо сложное геометрическое тому обоснование.

Сообразить на троих или Добавочные окружности Фурмана.

Первая добавочная окружность Фурмана строится на отрезке с концами в первой добавочной точке Нагеля и в ортоцентре, как на диаметре. Как и прежде, она содержит одну из точек, симметричных точкам пересечения внутренних биссектрис с описанной окружностью относительно соответствующих сторон. И еще две точки, симметричные точкам пересечения внешних биссектрис двух других углов относительно оставшихся сторон (см. рис. 21).

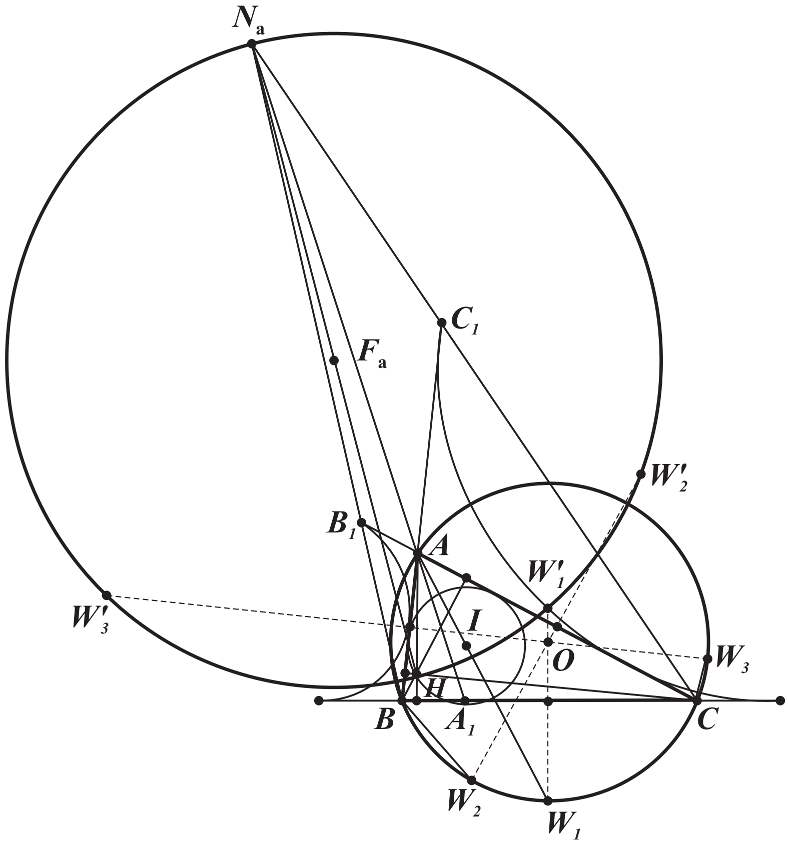

Рис. 21

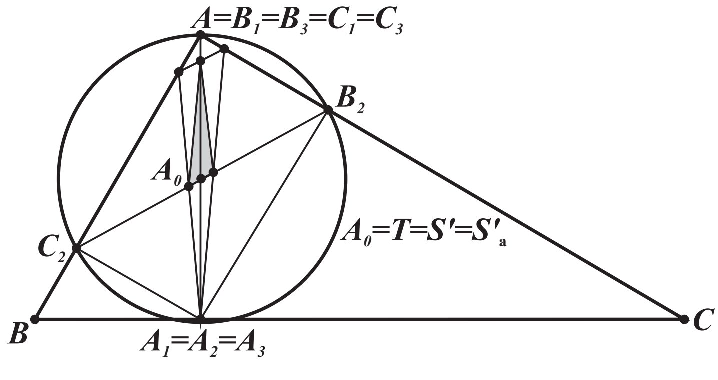

Рис. 22

[37]О чем тотчас же, по обнаружении неувязки (конец июня 2010), было доложено электронной почтой *самому*. Кимберлинг отвечал, что поправит.

Предельный тренинг.

Рассмотрим остроугольный треугольник, близкий к прямоугольному и устремим соответствующий угол к прямому (см. рис. 22). Тогда очевидно, что ортотреугольник вырождается в “треугольник”, у которого две стороны совпадают с высотой, опущенной из вершины прямого угла, а третья равна нулю. Серединный же его треугольник будет стремится к “равнобедренному треугольнику” CA_0, в котором две стороны равны половине высоты, а третья — нулевая (бесконечно малая), но направленная вдоль антипараллели B_2C_2 (поскольку, из предельных соображений, есть вырожденная антипараллель к BC). Центром вписанной окружности такого треугольника в пределе будет, понятно, точка S', совпадающая с серединой высоты A_0. Поскольку в прямоугольнике $A_1C_2AC_1$ диагонали равны и делятся точкой пересечения A_0 пополам, то $AA_0 = A_1A_0 = A_0C_2 = A_0B_2$ и окружность Конвея для вырожденного серединного треугольника совпадет с окружностью, описанной около этого прямоугольника. Эта же окружность (в чем можно убедится непосредственно, опять-таки из предельных соображений) и будет (немного, конечно, вырожденной) окружностью Тейлора прямоугольного треугольника. А взяв старт с треугольника тупоугольного (близкого к прямоугольнику), придем к аналогичным выводам относительно добавочной окружности Конвея. (Она, конечно, в пределе совпадет с основной окружностью).

Приложение. Центр коники Мякишева

Приводим описание центра коники Мякишева в ETC.

X(3588) = CENTER OF THE MYAKISHEV CONIC (центр коники Мякишева).

Trilinears (трилинейные координаты) $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$, where (где)

$$f(a, b, c) = a2(b+c)[a4(b+c) - b4(c+a) - c4(a+b) + b2c2(b+c) + c2a2(a-c) + a2b2(a-b) - 2ab2c2]$$

Barycentrics (барицентрические координаты) $af(a, b, c) : bf(b, c, a) : cf(c, a, b)$

In 2008, Alexei Myakishev gave the following construction of a conic. On rays AB and AC, let C_A and B_A be points on line AB ordered as C_A, B, A, and B_A and satisfying $|BC_A| = |CB_A| = |BC|$. Define points A_B, C_B, B_C, A_C cyclically. The six points C_A, B_A, A_B, C_B, B_C, A_C lie on a conic. Myakishev's proof is by Carnot's theorem, since

$$[c/(c+a)][(a+b)/b][a/(a+b)][(b+c)/c][b/(b+c)][(c+a)/a] = 1.$$

(В 2008г. Алексей Мякишев предложил следующую конструкцию коники. На лучах AB и AC пусть C_A и B_A — точки на прямой AB, упорядоченные в порядке C_A, B, A и B_A, удовлетворяющие условию $|BC_A| = |CB_A| = |BC|$. Определим точки A_B, C_B, B_C, A_C циклически. Шесть точек C_A, B_A, A_B, C_B, B_C, A_C лежат на одной конике. Доказательство Мякишева основано на теореме Карно, поскольку

$$[c/(c+a)][(a+b)/b][a/(a+b)][(b+c)/c][b/(b+c)][(c+a)/a] = 1.$$

For details, in Russian, visit Item 4 at Geometry.ru, (подробности, на русском языке, имеются в пункте 4 на сайте Geometry.ru).

Peter Moses found that X(3588) is the point of concurrence of three lines constructed from points numbered (Peter Moses обнаружил, что X(3588) — точка пересечения трех прямых, построенных по точкам с номерами) 1, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, as follows (следующим образом):

$X(3588) = X(8)X(573) \cap X(2269, 3053)$,

where (где)

$X(573) = X(3)X(6) \cap X(4)X(9)$,
$X(2269) = X(8)X(9) \cap X(1)X(573)$,
$X(3057) = X(1)X(3) \cap X(10)X(11)$.

X(3588) lies on these lines (лежит на этих прямых):
8,573 37,1953 42,181 71,594 213,2347 1824,2354 2225,2264 3059,3198

Литература

[1] Д. Ефремов. Новая геометрия треугольника. Одесса, Матезис, 1902. В электронном виде книга доступна по адресу: htpp://mirror1.mccme.ru/ilib/djvu/ngt/ngt.htm

[2] Г. Коксетер, С. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. Москва-Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.

[3] И. Кушнир. Геометрия на баррикадах. Киев, Факт, 2009.

[4] И. Кушнир. Триумф школьной геометрии. Киев, Наш час, 2005.

[5] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. (Библиотека "Математическое просвещение", выпуск 19). Москва, МЦНМО, 2009.

[6] Игорь Федорович Шарыгин. К семидесятилетию со дня рождения. (Составители: А. Заславский, В. Протасов, Д. Шарыгин). Москва, МЦНМО, 2007.

[7] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Москва, МЦНМО, 2007.

[8] The American Mathematical Monthly. Volume 59, number 8, October, 1952.

[9] Honsberger R. Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

[10] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers.
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Май 2006, Одесса — Июнь 2010, Москва.

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, г. Москва.

Email: alex_geom@mtu-net.ru

О законах Кеплера и Ньютона

А. И. Рубинштейн

В статье, при помощи дифференциального исчисления, показано, что законы Кеплера согласуются с законом всемирного тяготения Ньютона. Статья доступна студентам первого курса технического ВУЗа, а также школьникам, обучающимся в школах с углубленной программой по физике и математике.

В школьных курсах природоведения, физики, астрономии сообщается о строении солнечной системы, о движении Земли (T) вокруг Солнца (S). Приводится формулировка законов Кеплера, по которым это движение происходит, и даже упоминается, что эти законы следуют из закона всемирного тяготения и “второго” закона Ньютона.

Иоганн Кеплер (1571—1630) сформулировал первые два закона движения планет в 1609 году в книге “Новая астрономия или физика неба, излагаемая в комментариях к движению планеты Марс”. Вот они.

Первый закон: планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце (рис. 1).

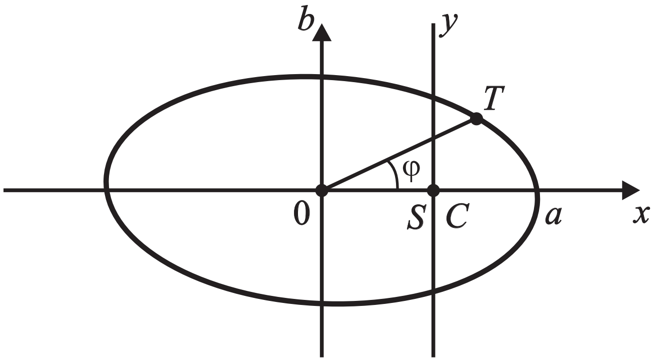

Рис. 1

Второй закон: радиус-вектор Солнце-планета в равные промежутки времени заметает равные площади (рис. 2).

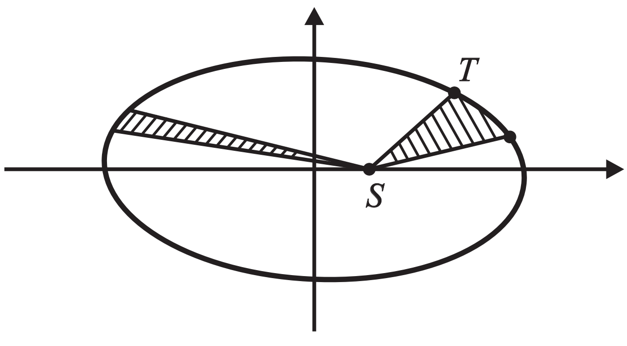

Рис.2

Кеплер установил эти законы феноменологически, путем осмысления результатов многочисленных точнейших (по тому времени) наблюдений Тихо Браге (1546—1601).

В 1665 году величайший ученый Исаак Ньютон (1643—1727) нашел закон всемирного тяготения:

на каждую из двух (точечных) масс m и M действует сила $\vec{F}$, направленная встречно по прямой, соединяющей массы, равная по величине

$$\left|\vec{F}\right| = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

где r — расстояние между массами, а γ — коэффициент — постоянная всемирного тяготения.

Однако книга Ньютона “Математические начала натуральной философии”, содержащая и формулировку закона всемирного тяготения, и методы дифференциального и интегрального исчисления, была опубликована лишь в 1687 году. А мысль, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между массами $\left(\sim \frac{1}{r^2}\right)$ в 1683 году была высказана Робертом Гуком, Христофером Реном и Эдмундом Галлеем. Книгу же об основах дифференциального и интегрального исчисления на несколько лет ранее Ньютона опубликовал Готфрид Лейбниц.

В книге “Математические начала натуральной философии” Ньютон геометрическим путём выводил из законов Кеплера закон всемирного тяготения и наоборот[1]. Проделаем это (скорее всего в энный раз) с помощью дифференциального исчисления. Точнее, покажем, что законы Кеплера согласуются с законом всемирного тяготения. Знаниями, необходимыми для понимания последующего, обладают студенты первого курса технического ВУЗа и даже школьники, обучающиеся в школах с углубленной программой изучения физики и математики.

Выберем прямоугольную систему координат (x, y) в плоскости эклиптики (плоскость движения Земли) так, что эллипс орбиты в ней имеет уравнение в каноническом виде. В одном из фокусов этого эллипса находится Солнце (первый закон Кеплера). Строго говоря в рамках “задачи двух тел” система Земля-Солнце движется вокруг общего центра масс. Но так как масса Солнца равна $\frac{1}{3} \cdot 10^6$ масс Земли, радиус Солнца $\approx 7 \cdot 10^5$ км, а расстояние от Земли до Солнца около $15 \cdot 10^7$ км, то центр масс системы Земля-Солнце отстоит от центра Солнца менее, чем на 500 км и вполне можно принять первый закон Кеплера. Тогда закон движения Земли даётся соотношениями

$$\begin{cases} x = x(t) = -c + a\cos\varphi(t) \\ y = y(t) = b\sin\varphi(t) \end{cases}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{1}$$

где $a > b$ — величины полуосей эллипса, а $\varphi(t)$ — закон изменения во времени полярного угла Земли относительно центра эллипса, см. рис. 1.

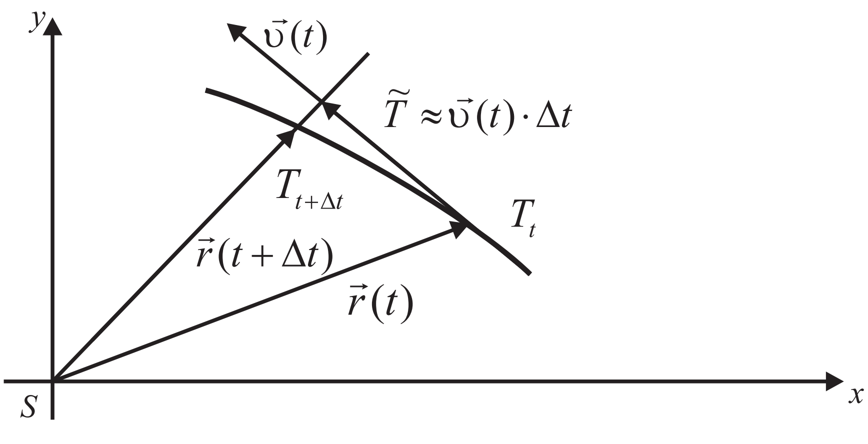

Рис. 3

[1]Климишин И.А., Астрономия вчера и сегодня, Наукова Думка, Киев, 1977, стр. 140—149.

Если точка движется в плоскости по закону $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, то её мгновенная скорость $\vec{v}(t)$ равна $(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. Обратимся к рис. 3.

Очевидно, что $\overrightarrow{T_t\tilde{T}} \approx \vec{v}(t) \cdot \Delta t$ и площади $\sigma\left(ST_tT_{t+\Delta t}\right)$ и $\sigma\left(ST_t\tilde{T}\right)$ криволинейных треугольников $ST_tT_{t+\Delta t}$ и $ST_t\tilde{T}$ приближенно равны, то есть их отношение стремится к единице при $\Delta t \to 0$. Но площадь $\sigma\left(ST_t\tilde{T}\right)$ треугольника $ST_t\tilde{T}$ равна

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x(t) & y(t) \\ \frac{dx}{dt}\Delta t & \frac{dy}{dt}\Delta t \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt}\right| \cdot \Delta t.$$

По второму закону Кеплера

$$x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt} = A \tag{2}$$

Из (2) и (1) следует

$$(a\cos\varphi(t) - c)\, b\cos t\frac{d\varphi}{dt} - b\sin\varphi(t)a\left(-\sin\varphi(t)\right)\frac{d\varphi}{dt} = ab\left(1 - \frac{c}{a}\cos\varphi\right)\frac{d\varphi}{dt} =$$

$$ab\left(1 - \varepsilon\cos\varphi(t)\right)\frac{d\varphi}{dt} = A,$$

где $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Эксцентриситет орбиты Земли равен 0,017, так что орбита Земли практически круговая. Из последнего равенства

$$\left(1 - \varepsilon\cos\varphi(t)\right) d\varphi = \frac{A}{ab}dt, \tag{3}$$

откуда

$$\varphi(t) - \varepsilon\sin\varphi(t) = \frac{A}{ab}t + B.$$

Не имеет значения, какую точку орбиты принять за начальную, так что можно считать $\varphi(0) = 0$ и

$$\varphi(t) - \varepsilon\sin\varphi(t) = \frac{A}{ab}t \tag{4}$$

Это уравнение принципиально позволяет определить закон изменения $\varphi(t)$ — закон движения Земли по орбите. Если принять $\varepsilon = 0$, то $\varphi(t) = \frac{A}{ab}t$ — круговое движение происходит с постоянной угловой скоростью. По второму закону Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(t) \tag{5}$$

а по закону всемирного тяготения

$$\vec{F}(t) = -\gamma\frac{mM}{|\vec{r}|^3}\vec{r}(t) \tag{6}$$

где m и M — массы Земли и Солнца соответственно. Из (5) и (6) получаем

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\gamma M\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{7}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\gamma M \dfrac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\gamma M \dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{8}$$

В принципе, решая эту систему дифференциальных уравнений, получим решение “задачи двух тел” и определим закон движения Земли вокруг Солнца. Однако аналитически решить систему (8) проблематично. Вместе с тем можно получить так называемый “промежуточный интеграл” системы (8) (см., например, А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский “Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления”, изд. второе. Наука, М., 1980, стр. 12). Для этого умножим первое уравнение в (8) на $\frac{dx}{dt}$, второе – на $\frac{dy}{dt}$ и сложим результаты. Получим

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)\right)=-\gamma M\frac{x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\gamma M\frac{d}{dt}\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right),$$

откуда

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)-\frac{\gamma M}{\sqrt{x^2+y^2}}=C. \tag{9}$$

Это закон сохранения энергии!

Подставляя соотношения (1) в (9), получаем

$$\frac{1}{2}\left(a^2\sin^2\varphi(t)+b^2\cos^2\varphi(t)\right)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2-\frac{\gamma M}{\left(\left(a\cos\varphi(t)-c\right)^2+b^2\sin^2\varphi\left(t\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=C.$$

Так как по (3)

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\frac{A}{ab}}{1-\varepsilon\cos\varphi(t)},$$

то

$$\frac{1}{2}a^2\left(\sin^2\varphi(t)+(1-\varepsilon^2)(1-\sin^2\varphi)\right)\frac{\left(\frac{A}{ab}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\cos\varphi\right)^2}-\frac{\gamma M}{\left((a^2-b^2)\cos^2\varphi-2ac\cos\varphi+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{b}\right)^2\left((1-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\sin^2\varphi\right)\frac{1}{\left(1-\varepsilon\cos\varphi\right)^2}-\frac{\frac{\gamma M}{a}}{\left(\varepsilon^2\cos^2\varphi-2\varepsilon\cos\varphi+1\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{b}\right)^2\frac{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}{\left(1-\varepsilon\cos\varphi\right)^2}-\frac{\frac{\gamma M}{a}}{\left(\varepsilon^2\cos^2\varphi-2\varepsilon\cos\varphi+1\right)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{A}{b}\right)^2}{1-\varepsilon\cos\varphi}\left(\left(1-\frac{2\gamma Mb^2}{aA^2}\right)+\varepsilon\cos\varphi\right)=C.$$

Последнее возможно лишь при условии

$$\frac{\gamma Mb^2}{aA^2}=1$$

то есть, если

$$|A| = b\sqrt{\frac{\gamma M}{a}}, \quad C = -\frac{1}{2}\frac{\gamma M}{a} \tag{10}$$

При выполнении соотношений (10) согласуются законы Кеплера и Ньютона и определяются параметры орбиты Земли.

Рубинштейн Александр Иосифович,
профессор кафедры высшей математики
Московского Государственного Университета Леса,
профессор кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного университета
(МИФИ), доктор физ.-мат. наук.

О проектировании точки на эллипсоид

Ю. Н. Киселёв, М. В. Орлов

Рассматривается задача проектирования точки на эллипсоид в n-мерном пространстве. Теоретический результат сопровождается алгоритмом расчета, позволяющим достаточно быстро приближенно найти проекцию.

Проблема проектирования точки на выпуклый компакт представляет интерес для приложений. Это связано с развитием различных численных методов проектирования, где операция проектирования точки на выпуклый компакт считается элементарной и должна выполняться достаточно быстро. На практике в качестве выпуклого компакта чаще всего используются два типа множеств: шары и параллелепипеды. В данной работе мы рассмотрим ещё один вид множеств, хорошо известных в математике — эллипсоид, и опишем процедуру нахождения проекции на него. Сначала дадим несколько базовых определений. Размерность будем обозначать буквой n. Прежде всего отметим, что все необходимые построения мы будем делать или на вещественной прямой R, или на плоскости R^2 $(n = 2)$, или в пространстве R^3 $(n = 3)$. Интересующийся и знакомый с высшей математикой школьник может легко обобщить все конструкции на случай произвольной размерности.

Определение 1. Пусть $r \geq 0$, $a \in R^n$. Множество

$$S_r(a) = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \leq r^2 \right\}$$

называется шаром (при $n = 2$ получаем круг, при $n = 1$ — отрезок) радиуса r с центром в точке a.

Определение 2. Пусть $a_i > 0$, $i = 1, ..., n$. Множество

$$Э = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1 \right\}$$

называется эллипсоидом с центром в нуле, записанным в каноническом виде.

Определение 3. Множество $F \subset R^n$ называется ограниченным, если существует такая константа $r > 0$, что $F \subset S_r(0)$.

Определение 4. Точка $f \in R^n$ называется предельной точкой множества $F \subset R^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ пересечение $S_\varepsilon(f) \cap F$ содержит хотя бы одну точку множества F.

Определение 5. Множество $F \subset R^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 6. Ограниченное замкнутое множество называется компактом.

Определение 7. Пусть $a, b \in R^n$. Множество

$$[a, b] = \{ x \in R^n : x = \lambda a + (1 - \lambda) b, \quad \lambda \in [0, 1] \ \}$$

называется отрезком с концами в точках a и b.

Определение 8. Множество $F \subset R^n$ называется выпуклым, если для любых $a, b \in F$ отрезок $[a, b] \subset F$.

Определение 9. Проекцией точки $y \in R^n$ на множество $F \subset R^n$ называется точка $f = Pr_F(y) \in F$, ближайшая к y. Из курса высшей математики известен следующий результат.

Теорема. Пусть $F \subset R^n$ — произвольный выпуклый компакт, $y \in R^n$ — произвольная точка. Тогда проекция точки y на множество F существует и единственна.

Из определения проекции вытекает, что если $y \in F$, то $Pr_F(y) = y$, поэтому в дальнейшем считаем, что проектируемая точка y не принадлежит множеству F. Также с этого момента считаем, что F — выпуклый компакт. Геометрически проекция является первой точкой касания шара какого-то положительного радиуса с центром в точке y и множества F. Для некоторых типов множеств проекция находится аналитически. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Множество F — единичный шар с центром в нуле, то есть $F \equiv S_1(0)$, $y \notin F$. Очевидно, что точка $f \in F$, координаты которой определяются по формулам

$$f_i = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}}, \quad i = 1, ..., n.$$

является искомой проекцией $Pr_{S_1(0)}(y)$.

Пример 2. Множество F

$$F = \left\{x \in R^n : a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, ...n \ \right\}$$

— параллелепипед, $y \notin F$. Координаты проекции $f = Pr_F(y)$ определяются по формулам:

$$f_i = \begin{cases} a_i, & \text{если} \quad y_i < a_i, \\ y_i, & \text{если} \quad a_i \le y_i \le b_i, \\ b_i, & \text{если} \quad y_i > b_i, \end{cases} \quad i = 1, ..., n.$$

Процесс поиска проекции в данном случае получил у инженеров название “срезка”.

Легко проверить, что при $n = 1$ шар и эллипсоид являются частными случаями параллелепипеда. Поэтому далее считаем, что $n = 2$ или $n = 3$.

Поставим задачу о нахождении проекции точки $y \in R^n$ на эллипсоид $Э$, см. Определение 2.

Упражнение 1. Доказать, что эллипсоид $Э$ — выпуклый компакт. Точка $y \notin Э$. Это означает, что

$$\frac{y_1^2}{a_1^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} + ... + \frac{y_n^2}{a_n^2} > 1. \tag{1}$$

Задача нахождения проекции на эллипсоид перестаёт быть тривиальной задачей. Даже на плоскости эта задача не имеет, вообще говоря, аналитического решения. Мы рассмотрим в данной работе два алгоритма численного поиска проекции. В работах [1,2] показано, что координаты точки $f = Pr_Э y$ определяются по формулам

$$f_i = \frac{y_i}{1 + \frac{\mu_*}{a_i^2}}, \quad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

где μ_* есть единственный положительный корень уравнения

$$G(\mu) = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$G(\mu) = \frac{y_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{a_1^2}\right)^2} + \frac{y_2^2}{a_2^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{a_2^2}\right)^2} + ... + \frac{y_n^2}{a_n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{a_n^2}\right)^2} - 1.$$

Функция $G(\mu)$ обладает следующими свойствами:

$$G(0) > 0, \quad G(+\infty) = -1, \quad G'(\mu) < 0, \quad G''(\mu) > 0, \quad \mu \ge 0. \tag{4}$$

Условие $G(0) > 0$ вытекает из (1), условие $G(+\infty) = -1$ следует непосредственно из определения функции $G(\mu)$.

Упражнение 2. Доказать, что при $\mu \geq 0$.

$$G'(\mu) < 0, \quad G''(\mu) > 0.$$

Из свойств (4) вытекает, что выпуклая монотонно убывающая при $\mu \geq 0$ функция $G(\mu)$ обращается в ноль один раз, то есть уравнение (3) имеет единственный положительный корень $\mu_* > 0$. Таким образом, для того чтобы найти проекцию точки y на эллипсоид $Э$ достаточно найти корень $\mu_* > 0$ уравнения (3). Далее, подставив найденное μ_* в (2), получим проекцию. Для поиска корня можно применять различные численные методы.

Алгоритм 1. Метод Ньютона. Для поиска корня одномерного уравнения (3) применим метод Ньютона.

$$\mu^{k+1} = \mu^k - \frac{G(\mu^k)}{G'(\mu^k)}, \quad \mu^{k=0} = 0.$$

В работах [1,2] можно найти доказательство сходимости метода Ньютона для решения уравнения (3) при нулевом начальном приближении. Скорость сходимости — квадратичная. Это позволяет надеяться, что операция нахождения проекции в реальных задачах будет происходить достаточно быстро.

Алгоритм 2. Нелинейная версия метода Ньютона для решения уравнения (3), использующая рациональную аппроксимацию функции $G(\mu)$. Аппроксимируем функцию $G(\mu)$ в окрестности точки $\mu = \alpha \geq 0$ функцией $p(\mu;\alpha)$ следующим образом

$$G(\mu) \approx p(\mu;\alpha) \equiv \frac{p_0(\alpha)}{(p_1(\alpha)+\mu)^2} - 1.$$

Коэффициенты $p_0(\alpha)$ и $p_1(\alpha)$ выбираются из условия аппроксимации функции и её производной в точке α. Корень $\hat{\mu}(\alpha)$ аппроксимационного уравнения $p(\mu;\alpha) = 0$ находится в явном виде, что приводит к следующему уравнению для нахождения искомого корня μ_*:

$$\alpha = \hat{\mu}(\alpha).$$

Для решения последнего уравнения применим рекурсивную процедуру

$$\alpha^{k+1} = \hat{\mu}(\alpha^k), \quad k = 0, 1, \ldots; \quad \alpha^{k=0} = 0.$$

Здесь функция $\hat{\mu}(\alpha)$, $\mu \geq 0$ определяется равенством

$$\hat{\mu}(\alpha) = \sqrt{p_0(\alpha)} - p_1(\alpha),$$

где

$$p_0(\alpha) = [1+G(\alpha)] \cdot [\alpha + p_1(\alpha)]^2 > 0,\ p_1(\alpha) = -\alpha + \frac{2[1+G(\alpha)]}{-G'(\alpha)} > 0,\ \hat{\mu}(\mu_*) = \mu_*,\ \hat{\mu}'(\mu_*) = 0.$$

Рекурсивная процедура также имеет квадратичную скорость сходимости.

Поясним понятие квадратичной скорости сходимости. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0.$$

Корень этого уравнения обозначим x_*. Говорят, что сходящаяся к конечному пределу x_* итерационная последовательность $\{x_n\}$ обладает квадратичной скоростью сходимости, если выполняются неравенства

$$|x_{n+1} - x_*| \leq C|x_n - x_*|^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

с некоторой положительной константой C.

При квадратичной скорости сходимости обычно после выполнения небольшого числа итераций достигается хорошее приближение корня x_*. Поясним это в частном случае, когда $C=1$, $|x_0 - x_*| \le 10^{-1}$, при этом имеем

$$|x_1 - x_*| \le 10^{-2}, \quad |x_2 - x_*| \le 10^{-4}, \quad |x_3 - x_*| \le 10^{-8}, \ldots$$

т.е. уже x_3 даёт приближение к корню x_* с точностью, не превосходящей величины $10^{-8} = 0,00000001$. Количество верных значащих цифр в приближении x_n к корню x_* удваивается на каждой итерации. Рассмотрим конкретный пример. Для уравнения

$$x^2 - 1 = 0$$

итерационный процесс метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(здесь $f(x) = x^2 - 1$, $f'(x) = 2x$) при начальном приближении $x_0 = 2$ сходится к корню $x_* = 1$ этого уравнения, причём получаемая при расчёте таблица погрешностей

$$\begin{array}{ll}
x_1 - x_* = 0,25 & = 10^{-1} \cdot 2,5 \\
x_2 - x_* = 0,025 & = 10^{-2} \cdot 2,5 \\
x_3 - x_* = 0,000304... & = 10^{-4} \cdot 3,04 \\
x_4 - x_* = 0,0000000464... & = 10^{-8} \cdot 4,64 \\
x_5 - x_* = 0,000000000000001079... & = 10^{-15} \cdot 1,079
\end{array}$$

хорошо иллюстрирует квадратичную скорость сходимости метода Ньютона. Заметим, что при выборе начального приближения $x_0 = -2$ итерационный процесс метода Ньютона сходится к другому корню -1 этого уравнения. В общем случае метод Ньютона может расходиться, что накладывает дополнительные требования на начальное приближение x_0.

Можно порекомендовать заинтересованному читателю повторить эти вычисления; ещё одно упражнение: вычислить приближённо значение $x_* = \sqrt{2}$ решая уравнение $x^2 - 2 = 0$ методом Ньютона при выборе конкретного начального приближения $x_0 > x_*$ (например, $x_0 = 2$).

В заключение отметим, что задача проектирования точки на эллипсоид (а также на другие выпуклые множества) актуальна при реализации алгоритмов численного решения ряда задач оптимального управления. В ходе вычислительного процесса операция проектирования, как некоторая вспомогательная задача, выполняется многократно, поэтому скорость выполнения этой операции играет важную роль. Задачи оптимального управления возникают при исследовании механических, биологических, экономических, социологических нелинейных динамических процессов. Читатель может познакомиться с постановками задач оптимального управления, например, по книге *Математика на службе инженера (Основы теории оптимального управления). Сборник. М., "Знание", 1973.*

Литература

1. Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Федотова Е.Л. Проекция точки на эллипсоид. Вестник Моск. ун-та. Сер.15, №1, 1993. С. 45-50.

2. Y. N. Kiselev. Algorithms of projection of a point onto an ellipsoid. Lith. Math. J. 34, №2, 141-159 (1994).

Киселев Юрий Николаевич,
доцент факультета ВМК МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: kiselev@cs.msu.su

Орлов Михаил Владимирович,
доцент факультета ВМК МГУ,
кандидат физ.-мат. наук.
Email: orlov@cs.msu.su

Сага о спинорном квадрате

А. В. Жуков

В статье вводятся понятия n-мерной плоскости Флоренского и Ф-нормы. В случае $R^2(C)$ определяется группа преобразований Малевича-Флоренского-Панкина G_{MFP}. Показано, что при воздействии последовательных степеней образующего элемента G_{MFP} на специальный объект — спинорный квадрат — в проекции на какую-либо сторону плоскости Флоренского получается последовательность прямоугольников, длины сторон которых — числа последовательности Фибоначчи. **Ключевые слова:** плоскость Флоренского, спинорный квадрат, числа Фибоначчи, золотая пропорция.

Данная работа навеяна картиной московского художника Александра Фёдоровича Панкина «Мнимости “Чёрного квадрата” Казимира Малевича», которая демонстрировалась в январе 2009 года в художественной галерее “М-АРС” (Москва).

Определение. Пусть n — натуральное число. n-мерной плоскостью Флоренского назовём гиперплоскость вещественного $(n{+}1)$-мерного пространства с заданной на ней *парой* систем координат: *правой* и *левой*. Полагаем, что начала этих систем совмещены, оси с 1-й по n-ую располагаются в гиперплоскости и сонаправлены, а $(n{+}1)$-ые оси двух систем координат направлены в разные стороны (образуют направления нормали и антинормали к гиперплоскости).

Рассмотрим произвольный элемент n-мерного линейного векторного пространства $R^n(C)$, заданного над полем комплексных чисел C:

$$c = a + ib, \text{ где } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \ a_k,\ b_k \in R,\ \ k = 1, 2, \dots, n;\ i \text{ — мнимая единица.}$$

На гиперплоскости Флоренского этот элемент удобно интерпретировать следующим образом: вектор a изобразим точкой в правой системе координат (на “вещественной” стороне плоскости), вектор b — в левой системе координат (на “мнимой” стороне плоскости).

В качестве примера на рис. 1 схематически изображён вектор $c = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 3+4i \end{pmatrix}$ на двумерной плоскости Флоренского — для наглядности “вещественная” и “мнимая” стороны плоскости разнесены в пространстве.

Идея такой интерпретации высказана Павлом Александровичем Флоренским (1882—1937) в работе “Мнимости в геометрии”, параграф 5: “*Точку оборотной стороны, т.е. с мнимыми координатами, мы станем называть точкою мнимою.*” ([1], стр. 25).

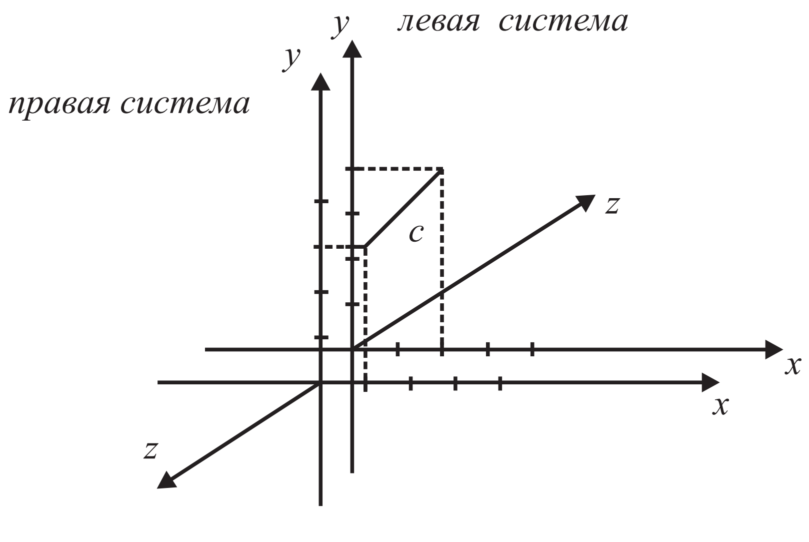

Рис. 1

Объект $c \in R^n(C)$ на гиперплоскости Флоренского удобно изображать отрезком, один конец которого находится на “вещественной” стороне гиперплоскости, а другой — на “мнимой”. Геометрической характеристикой такого отрезка может служить также длина его проекции на одну из сторон гиперплоскости Флоренского, которую мы назовём *Ф − нормой*.

Определение. Ф-нормой элемента $c = a + ib \in R^n(C)$ назовём величину

$$\|c\|_\Phi = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2}.$$

Свойства Ф-нормы:

1. $\forall c \in R^n(C)$: $\|c\|_\Phi \geq 0$.
2. $\forall c \in R^n(C)$, $\lambda \in R$: $\|\lambda c\|_\Phi = |\lambda| \cdot \|c\|_\Phi$.
3. В частности, $\|-c\|_\Phi = \|c\|_\Phi$.

Заметим, что Ф-норма не является полунормой, поскольку она не удовлетворяет аксиоме “неравенство треугольника”.

Спинорный квадрат

Спиноры — пары элементов $R^n(C)$, отличающиеся алгебраическим знаком (см., например, [2]). Это означает, в частности, что отождествляемые спинором векторы $R^n(C)$ имеют одинаковую Ф-норму (см. свойство 3 Ф-нормы).

На плоскости Флоренского спинор изображается *парой* отождествляемых друг с другом отрезков. Например, на рис. 2 представлены два двумерных спинора:

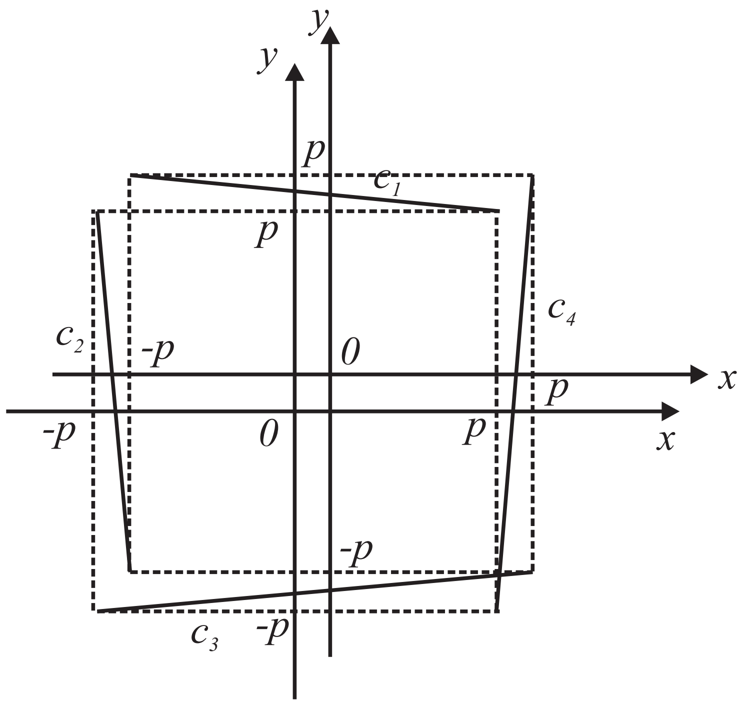

Рис. 2

$S_1 = \{c_1 \cong c_3\}$; $S_2 = \{c_2 \cong c_4\}$, где

$$c_1 = \begin{pmatrix} p - ip \\ p + ip \end{pmatrix}; \;\; c_2 = \begin{pmatrix} -p - ip \\ p - ip \end{pmatrix}; \;\; c_3 = \begin{pmatrix} -p + ip \\ -p - ip \end{pmatrix}; \;\; c_4 = \begin{pmatrix} p + ip \\ -p + ip \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$p \in R$, $p \neq 0$, $c_3 = -c_1$, $c_4 = -c_2$.

В проекции на любую сторону плоскости Флоренского эти два спинора дают квадрат, показанный на рис. 3. Не умаляя общности, в дальнейшем мы будем полагать $p = \frac{1}{2}$. Свойство 2 Ф-нормы и линейность преобразований, которые мы сейчас рассмотрим, гарантируют гомотетичность проекций векторов $R^2(C)$ на одну из сторон плоскости Флоренского в случае произвольного $p \neq 0$.

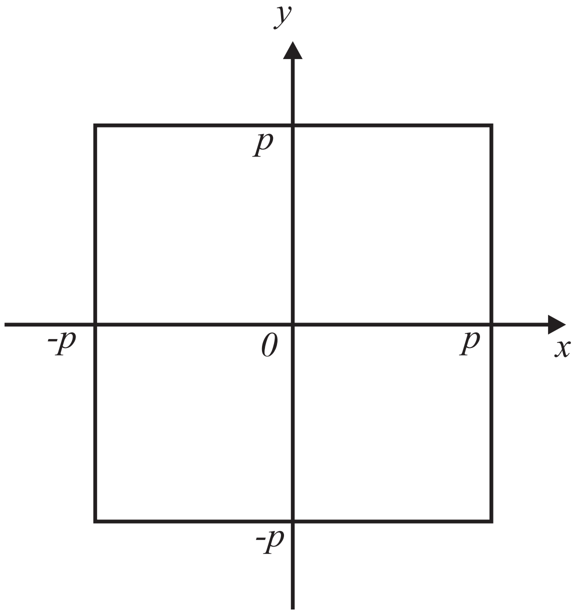

Рис. 3

Группа Малевича-Флоренского-Панкина

Исходя из искусствоведческих аспектов и привлекая представления Павла Флоренского о двусторонней плоскости, А. Ф. Панкин с "Чёрным квадратом" Казимира Малевича связал матрицу

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \tag{2}$$

объединяющую 4 распространённых константы. Поскольку $\det \pi = 1$, то эта матрица может служить образующим элементом группы преобразований линейного векторного пространства $R^2(C)$ — назовём её группой Малевича–Флоренского–Панкина G_{MFP}. Это бесконечная мультипликативная абелева группа:

$$G_{MFP} = \{\ldots, \pi^{-k}, \ldots, \pi^{-2}, \pi^{-1}, E, \pi, \pi^2, \ldots \pi^k, \ldots\},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Инвариантом группы является единичное значение определителя её любого элемента.

Среди любопытных свойств матрицы π отметим следующие.

1. Собственные числа матрицы π : $\lambda_1 = -i\varphi$, $\lambda_2 = i\Phi$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — числа золотой пропорции.

2. Базис собственных векторов матрицы π, соответствующих собственным числам λ_1, λ_2:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\Phi \\ i \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} \varphi \\ i \end{pmatrix}.$$

3. Натуральные степени матрицы π задаются формулами

$$\pi^k = \begin{pmatrix} i^k u_{k-1} & i^{k-1} u_k \\ -i^{k-1} u_k & i^k u_{k+1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где k — натуральное число, $u_0 = 0$; $u_1 = u_2 = 1$; $u_3 = 2$; $u_4 = 3$; $u_5 = 5$; $\ldots$ — числа последовательности Фибоначчи.

Доказательство свойства 3 проведём методом математической индукции. Непосредственно проверяем, что при $k = 1$ формула (3) верна. Предположим, она верна при некотором $k = K \geq 1$, то есть

$$\pi^K = \begin{pmatrix} i^K u_{K-1} & i^{K-1} u_K \\ -i^{K-1} u_K & i^K u_{K+1} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим

$$\pi^{K+1} = \pi \cdot \pi^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^K u_{K-1} & i^{K-1} u_K \\ -i^{K-1} u_K & i^K u_{K+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -i^{K-1} u_K & i^K u_{K+1} \\ -i^K u_{K-1} - i^K u_K & -i^{K-1} u_K + i^{K+1} u_{K+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^{K+1} u_K & i^K u_{K+1} \\ -i^K u_{K+1} & i^{K+1} u_{K+2} \end{pmatrix}.$$

Здесь использовано свойство мнимой единицы $-i^{n-1} = i^{n+1}$ и характеристическое свойство чисел Фибоначчи: $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$. Таким образом, формула (3) доказана.

Из (3) следует

$$\pi^{-k} = \begin{pmatrix} i^k u_{k+1} & -i^{k-1} u_k \\ i^{k-1} u_k & i^k u_{k-1} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{4}$$

Прямоугольники Фибоначчи

Нас будут интересовать образы, получающиеся из спинорного квадрата последовательным применением преобразований группы G_{MFP}.

Прежде всего заметим, что из равенства $g(-c) = -g(c)$, где $g \in G_{MFP}$, следует, что пара векторов, отождествляемых спинором, преобразованием из G_{MFP} снова переводится в спинор, поэтому достаточно проследить за эволюцией образов двух векторов c_1, c_2 спинорного квадрата (по одному представителю из каждой пары спиноров). Исходные значения этих векторов:

$$c_1^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix}; \quad c_2^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

Вычислим их образы $c_1^{(k)} = \pi^k c_1^{(0)}$, $c_2^{(k)} = \pi^k c_2^{(0)}$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$. При нечётных $k = 2n - 1$, $n \in \mathrm{N}$:

$$c_1^{(2n-1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^{2n-2} u_{2n} + i^{2n-1} u_{2n} \\ i^{2n} u_{2n+1} + i^{2n-1} u_{2n+1} \end{pmatrix}; \quad \left\| c_1^{(2n-1)} \right\|_\Phi = u_{2n+1};$$

$$c_2^{(2n-1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^{2n-2} u_{2n} - i^{2n-1} u_{2n} \\ i^{2n-2} u_{2n+1} + i^{2n-1} u_{2n+1} \end{pmatrix}; \quad \left\| c_2^{(2n-1)} \right\|_\Phi = u_{2n}.$$

При чётных $k = 2n$, $n \in \mathrm{N}$:

$$c_1^{(2n)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i^{2n} u_{2n+1} + i^{2n-1} u_{2n+1} \\ i^{2n} u_{2n+2} + i^{2n+1} u_{2n+2} \end{pmatrix}; \quad \left\| c_1^{(2n)} \right\|_\Phi = u_{2n+1};$$

$$c_2^{(2n)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i^{2n} u_{2n+1} + i^{2n-1} u_{2n+1} \\ i^{2n} u_{2n+2} + i^{2n-1} u_{2n+2} \end{pmatrix}; \quad \left\| c_2^{(2n)} \right\|_\Phi = u_{2n+2}.$$

Итак, образы спинорного квадрата при $k = 1, 2, 3, \ldots$ в проекции на какую-либо сторону плоскости Флоренского представляют собой последовательность прямоугольников, длины сторон которых выражаются числами последовательности Фибоначчи (рис. 4).

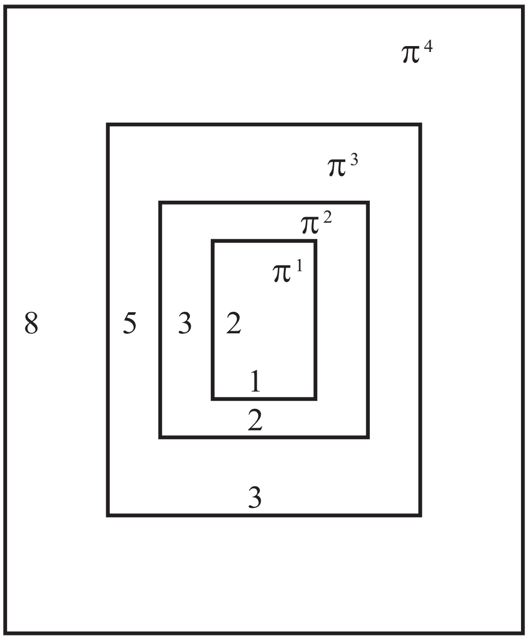

Рис. 4

Случаи воздействия на спинорный квадрат операторов π^{-1} и π^{-2} рассмотрим отдельно:

$$c_1^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}; \quad \left\|c_1^{(-1)}\right\|_\Phi = 1; \; c_2^{(-1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1-i \end{pmatrix}; \quad \left\|c_2^{(-1)}\right\|_\Phi = 0;$$

$$c_1^{(-2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left\|c_1^{(-2)}\right\|_\Phi = 1; \; c_2^{(-2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left\|c_2^{(-2)}\right\|_\Phi = 0.$$

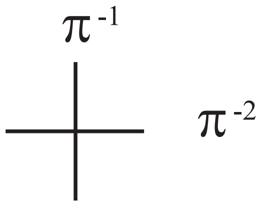

Рис. 5

Итак, объединением двух проекций на какую-либо сторону плоскости Флоренского спинорного квадрата при воздействии на него операторов π^{-1} и π^{-2} является крест (рис. 5).

Вычислим образы $c_1^{(-k)} = \pi^{-k}c_1^{(0)}$, $c_2^{(-k)} = \pi^{-k}c_2^{(0)}$ при $k = 3, 4, 5, \ldots$ При нечётных $k = 2n-1$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$:

$$c_1^{(-2n+1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i^{2n-2}u_{2n-2} + i^{2n-1}u_{2n-2} \\ i^{2n-2}u_{2n-3} - i^{2n-1}u_{2n-3} \end{pmatrix}; \quad \left\|c_1^{(-2n+1)}\right\|_\Phi = u_{2n-3};$$

$$c_2^{(-2n+1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i^{2n-2}u_{2n-2} - i^{2n-1}u_{2n-2} \\ -i^{2n-2}u_{2n-3} - i^{2n-1}u_{2n-3} \end{pmatrix}; \quad \left\|c_2^{(-2n+1)}\right\|_\Phi = u_{2n-2}.$$

При чётных $k = 2n$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$:

$$c_1^{(-2n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i^{2n}u_{2n-1} + i^{2n-1}u_{2n-1} \\ -i^{2n}u_{2n-2} + i^{2n-1}u_{2n-2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \left\|c_1^{(-2n)}\right\|_\Phi = u_{2n-1};$$

$$c_2^{(-2n)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i^{2n}u_{2n-1} + i^{2n-1}u_{2n-1} \\ -i^{2n}u_{2n-2} - i^{2n-1}u_{2n-2} \end{pmatrix}; \quad \left\| c_2^{(-2n)} \right\|_\Phi = u_{2n-2}.$$

Таким образом, в проекции на какую-либо сторону плоскости Флоренского спинорный квадрат при воздействии на него операторов π^{-k} , $k = 3, 4, 5, \ldots$ порождает последовательность прямоугольников, длины сторон которых выражаются числами последовательности Фибоначчи (рис. 6).

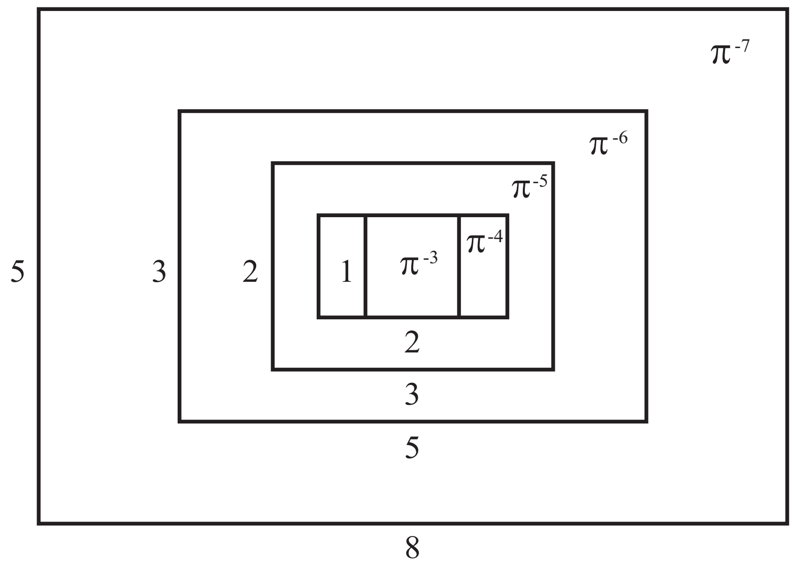

Рис. 6

В этой последовательности спинорный квадрат, полученный применением оператора π^{-3}, не совпадает с исходным спинорным квадратом:

$$\pi^{-3}c_1^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \end{pmatrix}; \quad \pi^{-3}c_2^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix}.$$

Известно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \Phi$. Таким образом, по мере удаления в бесконечность $k \to \infty$ спинорный квадрат при воздействии операторов π^k, π^{-k} в проекциях на какую-либо сторону плоскости Флоренского представляется двумя крестообразно расположенными прямоугольниками, причём отношение длин сторон каждого из этих прямоугольников приближается к золотому сечению.

Приложение

Оператор π^{-3} связан с геометрическими свойствами ленты Мёбиуса.

Рассмотрим ленту Мёбиуса–Флоренского, задав на ленте Мёбиуса, так же как и ранее, пару систем координат: правую и левую, причём полагаем, что лента Мёбиуса перекручена в направлении оси x (рис. 7).

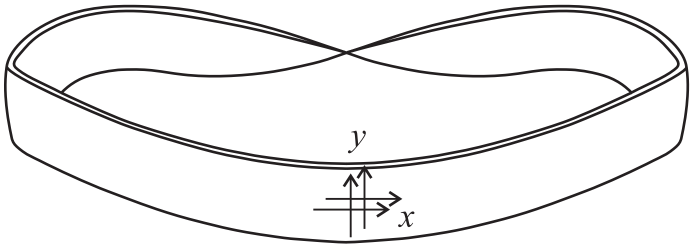

Рис. 7

Рассмотрим преобразование σ_x векторов пространства $R^2(C)$, выражающееся в том, что начало пары систем координат вдоль ленты Мёбиуса переводится в точку, лежащую на противоположной стороне ленты (рис. 8).

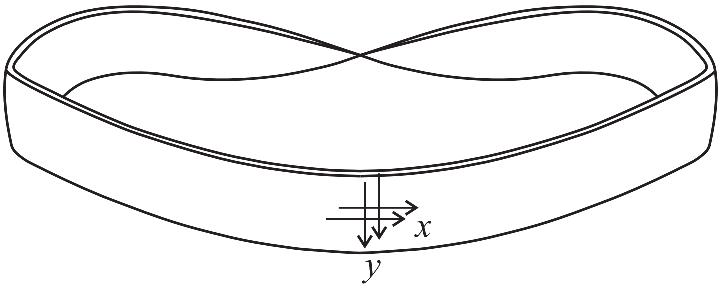

Рис. 8

Для любого вектора $c = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{pmatrix} \in R^2(C)$ получаем: $\sigma_x \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ -a_2 - b_2 i \end{pmatrix}$ (вторая координата вектора меняет знак).

Аналогично рассматривается оператор σ_y в случае ленты Мёбиуса—Флоренского, перекрученной вдоль оси y. В этом случае $\sigma_y \begin{pmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 - b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{pmatrix}$ (первая координата вектора меняет знак).

Результаты воздействия операторов σ_x и σ_y на исходный спинорный квадрат:

$$\sigma_x c_1^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \end{pmatrix}; \quad \sigma_x c_2^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \end{pmatrix}; \quad \sigma_x c_3^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix}; \quad \sigma_x c_4^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix};$$

$$\sigma_y c_1^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix}; \quad \sigma_y c_2^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}; \quad \sigma_y c_3^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1-i \end{pmatrix}; \quad \sigma_y c_4^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях спинорный квадрат совпадает с образом исходного спинорного квадрата в результате применения оператора π^{-3}, но с перестановкой векторов, отождествляемых двумя спинорами:

$$\pi^{-3} c_1^{(0)} = \sigma_x c_2^{(0)} = \sigma_y c_4^{(0)}; \quad \pi^{-3} c_2^{(0)} = \sigma_x c_3^{(0)} = \sigma_y c_1^{(0)};$$

$$\pi^{-3} c_3^{(0)} = \sigma_x c_4^{(0)} = \sigma_y c_2^{(0)}; \quad \pi^{-3} c_4^{(0)} = \sigma_x c_1^{(0)} = \sigma_y c_3^{(0)}.$$

Таким образом, ещё одной замечательной производной от “Чёрного квадрата” Казимира Малевича можно считать *топологический крест* – две крестообразно расположенные (перекрученные в двух взаимно перпендикулярных направлениях) ленты Мёбиуса–Флоренского (рис. 9).

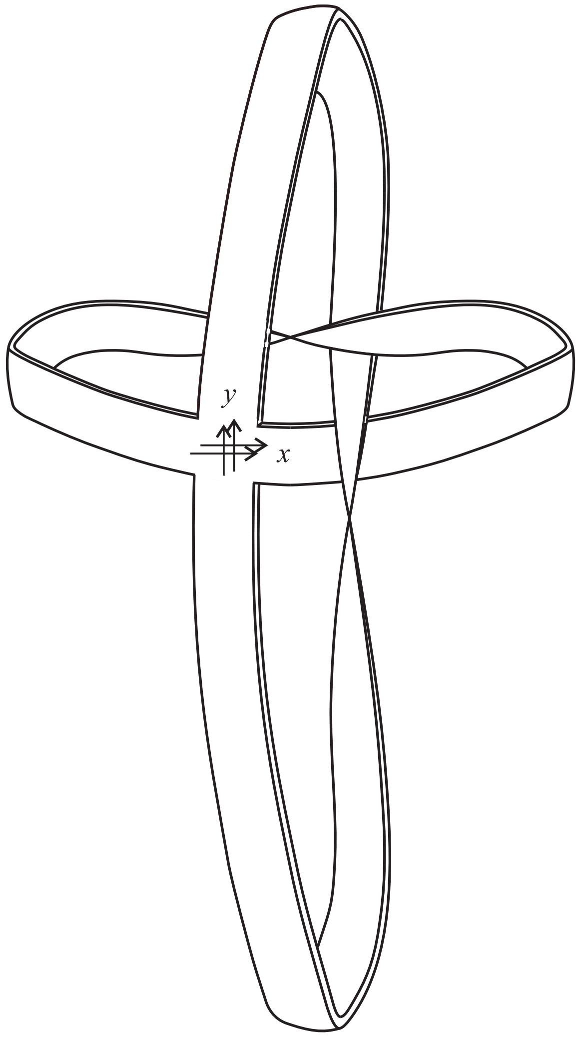

Рис. 9

И последняя ремарка. Только из первых трёх прямоугольников Фибоначчи 1×1, 1×2, 2×3 нельзя склеить ленту Мёбиуса, поскольку отношение длин их сторон меньше $\frac{\pi}{2} = 1,57...$

Литература

1. Павел Флоренский. Мнимости в геометрии. М.: “Поморье”, 1922. Цитата в тексте приведена по изданию 1991 года, М.: “Лазурь”, 96 с.

2. Р. Пенроуз, В. Риндлер. Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987, 528 с.

Жуков Александр Владимирович,
кандидат техн. наук.

Email: izyaslav@gmail.com

Информация

Содержание журнала “Математическое образование” за 2009-2010 гг.

Содержание образования

Из истории математики

Учебное пособие в журнале

№ 1 (53), январь – март 2010 г.

Методика преподавания математики

Учащимся и учителям средней школы

Студентам и преподавателям математических специальностей

Учебное пособие в журнале

№ 2 (54), апрель – июнь 2010 г.

Материалы конференции, посвященной 105-летию академика С. М. Никольского