ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

Год пятнадцатый

№ 3-4 (59-60)

июль – декабрь 2011 г.

Москва

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ, ISSN 1992-6138

Периодическое издание в области математического образования

Издатель и учредитель: Фонд математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

№ 3-4 (59-60), 2011 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2011 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 16.12.2011 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 3-4 (59-60), июль – декабрь 2011 г.

Содержание

Интернет-олимпиада по математике для студентов и некие размышления о месте математических соревнований в общем контексте математического просвещения

Alexander Domoshnitsky

В статье описана современная форма организации математических соревнований для студентов — интернет-олимпиада. Указаны ее преимущества, создаваемые коммуникационными возможностями среды интернет. Описан опыт проведения такой олимпиады в Израиле в 2010г.

Более четырех тысяч студентов и специалистов вошли в сайт международной интернет-олимпиады по математике, а 489 университетов из 19 стран мира приняли участие в 5-ой международной математической интернет-олимпиаде, состоявшейся 17 декабря 2010г., штаб которой располагался в Университетском центре Ариэля. География участников, представивших свои работы, простирается от Бразилии и США на западе до Вьетнама на востоке. Итоги состязания были подведены в предновогодние дни. Победителем 5-ой международной математической интернет-олимпиады стал Виталий Лишунов из Киевского Национального Университета им. Шевченко, на втором месте абсолютный победитель Всероссийской студенческой олимпиады 2009 года в Йошкар-Оле Павел Мостовых из Балтийского Государственного Технического Университета Санкт-Петербурга, ставший и абсолютным победителем Ариэльских интернет-олимпиад 2009 года (дважды — в мае и декабре — он стал вторым). Среди победителей — призёры национальных и международных математических олимпиад из Румынии, Армении, Бразилии, Грузии и Израиля.

И игра?

Сегодня существуют десятки соревнований по различным предметам. По математике есть и университетские, и региональные, и национальные, и международные соревнования, есть отдельные состязания и по геометрии, и по алгебре... Если некий бывший олимпиадник нашёл спонсора, почему бы не организовать олимпиаду? И это хорошо. Все такие соревнования, вне всякого сомнения, полезны для учеников. Но влияние на *математическое просвещение*, т.е. например, на мотивацию к изучению математики студентов конкретного Политеха в провинции, у таких соревнований очень ограничено. Попытаемся посмотреть на математические соревнования с другой стороны, а именно, как на некую составляющую в общем контексте математического образования. Какими могут быть цели математических соревнований, естественно вытекающие из совершенно базовых задач математического просвещения?

Мы, педагоги, работающие с "технарями", большую часть времени и сил вкладываем в самых слабых студентов или, в лучшем случае, — в середняков. Задача — сделать все, чтобы дотянуть эту основную массу до приемлемого уровня. А кто составит основу корпуса специалистов в промышленности и HiTech? Сильные студенты, на индивидуальную работу с которыми как раз и нет у преподавателей ни времени, ни сил. Но главное — что, пожалуй, нет и разработанных форм для такой работы. Опробованы разные формы — кружки, студенческие научные общества, специальные лектории. Были отдельные успехи, но абсолютное большинство сильных студентов оставалось совершенно равнодушным к такого рода затеям преподавателей-энтузиастов. Увы, но именно это отсутствие широкого интереса как со стороны студентов, так и со стороны преподавателей и начальства в лице деканов и ректоров, и предопределяет результат.

Обращает на себя внимание тот факт, что лишь одна форма работы с хорошими студентами, переживая определённые подъёмы и спады, всё-таки выживает уже полтора века с тех пор как в 1860-ых годах была придумана в Румынии; это — математические олимпиады. В чём секрет этого феномена? Всмотревшись более внимательно, можно понять, что этот секрет в сочетании вполне серьёзных вещей, таких как проверка определенного уровня знаний хороших учеников и их способности не шаблонного мышления в математике, а также ИГРЫ, идущей по определённым правилам, а потому понятной как самим участникам, так и зрителям. Может быть осознание этого и ведёт нас к решению... Развивая игровой компонент, можно добиваться расширения числа участников, и как следствие этого, существенно более широкого интереса к математическим состязаниям как со стороны потенциальных участников, так и со стороны зрителей.

Таланты и поклонники

“Зрители и математические соревнования — вещи несовместимые!” — скажут скептики. Позвольте нам с этим не согласиться и привести в качестве примера ... шахматы. Совершенно не зрелищный вид спорта, но люди постарше (40+) помнят общенародный интерес к матчам на первенство мира по шахматам. Каждый вечер в программе “Время” на ЦТ шахматные обозреватели (сами по себе гроссмейстеры) анализировали отложенные позиции матчей Карпов-Каспаров. Миллионы любителей шахмат (да и не только они!) расставляли эти позиции на своих досках, пытаясь понять объяснения специалистов и прямо сегодня, а не завтра после доигрывания, узнать, чем закончится очередная партия. Как результат, десятки шахматных досок на каждом клочке пляжей, в парках культуры и в обычных дворах, тысячи детей и подростков, занимающихся в шахматных кружках, пополняли из года в год шахматную элиту. Зададимся вопросам, а почему у другой интеллектуальной игры, знания в рамках которой имеют самые непосредственные приложения для самых широких масс школьников и студентов (а не только для самых-самых!) совсем уж нет шансов достичь хотя бы минимального внимания специалистов и зрителей?

“Кто сейчас чемпион мира по шахматам?” — задаю вопрос своим приятелям, тем самым, которые внимательно следили за происходящим в матчах на первенство мира. Они не знают. Пример всенародного интереса к матчам шахматистов, и последующего его падения вплоть до полной утраты абсолютным большинством населения, весьма поучителен, поскольку именно разрушение понятной зрителям формы розыгрыша первенства мира стало важнейшей составляющей угасания их интереса. Ушли зрители — и всенародный интерес к матчам шахматистов рухнул.

Форма и содержание. Учили про это когда-то по философии и помним, что форма отражает содержание, но подзабыли то, что форма ещё и влияет на содержание... А если в системе есть еще и активный субъект (в контексте нашего рассмотрения это преподаватели математики в школах и ВУЗах), который формулирует цель и меняет форму таким образом, чтобы эту цель в большей степени достигать, то шанс привлечь внимание студентов и специалистов, думаю, есть.

Цель и форма

Попробуем сформулировать цель. Это то, что главным образом, и должно будет определить выбираемую для математических состязаний форму. Если, например, наша цель состояла бы в том, чтобы одни студенты научились аргументировано излагать свои математические построения, а другие — внимательно слушать и видеть прорехи в логике, выявлять то, что на сленге называется недодоказанность, и приводить противоречащие примеры, то лучшей формы, чем разработанные в советское время в математическом интернатах Москвы и Ленинграда игры — соревнования под названием “математический бой”, вряд ли можно придумать. Так работают с будущей математической элитой. Наше же поле — технари, будущие потребители математики, которые, увидев задачу, должны понять, из какой она области и какую математическую модель можно построить. Наша цель — развивать их математическое мышление, укреплять интерес к математике у как можно более широких студенческих масс, развивать их умение мыслить от задачи, а не от существующих кем-то разработанных методов.

При организации любого математического соревнования должна просматриваться его конкретная методическая цель. Возьмём пример: отбор 6-8 студентов для национальной команды для участия во Всемирной олимпиаде. Это нечто совсем другое. Цель диктует средства, главное из которых — сверхсложность заданий. Как мы уже отметили, одна из главных наших целей — это массовое участие студентов. Для этой цели такого рода олимпиада не совсем подходит. Главный принцип в педагогике, как и в медицине, — не вреди. Полный провал в олимпиаде может нанести хорошему студенту, не обладающему, однако, какими-то особыми способностями к математике, психологическую травму и вызвать неверие в собственные силы на длительный период. На следующую олимпиаду он не пойдёт. Круг её участников сузится лишь до реальных 5-6 претендентов на 1-ое место. Диалог с родителями после такой олимпиады: "Сколько ты решил задач?" — "Ничего не решил" — "Не ходи больше позориться!". Это не то, чего мы хотим достичь. Список задач для олимпиады должен быть довольно длинным и содержать как простые, так и сложные задачи. Теперь тот же диалог выглядит иначе: "Сколько ты решил задач? " — "Четыре" — "А победитель?" — "Шесть". Разница в те же 2 задачи, но настроение уже совсем другое. Наш список формируется так, что имеются 6 сравнительно простых и 6 довольно сложных задач. Об уровне сложных задач на нашей интернет-олимпиаде говорит тот факт, что ещё не было случая, чтобы какой-нибудь студент, а среди студентов есть и победители национальных и международных олимпиад, решил все задачи. Понятно также, что в этом случае трудно определить победителя по количеству решенных задач. Количество очков за каждую задачу идёт в зависимости от её рейтинга. Представьте, например, что задача "стоит" 1000 очков. Ее решила тысяча участников, поэтому каждый из них получает по очку. Если с заданием справились только двое, каждый получает по 500 очков. На стандартных задачах не получить много, и правильное их решение не позволяет войти в число лидеров. Невозможно стать одним из первых, не решив наиболее трудные задачи. Эта рейтинговая система, кстати, даёт шанс и старшекласснику, и талантливому студенту из провинциального ВУЗа стать победителем, решив нестандартно "нерешабельную" задачу, решение которой не требует, однако, каких-то специальных знаний.

Интернет как средство достижения поставленной цели

Подобно тому, как для танго нужны двое, для математических соревнований нужны соперники. Их может не быть в одной отдельно взятой группе или даже университете, и вот придумывается интернет-олимпиада по математике, где соперники могут находиться в тысячах километров друг от друга.

Интернет-олимпиады проходят по очень простой схеме: в намеченный час открывается сайт с условиями задач; студенты, находящиеся в своих университетах пытаются их решить, и в течение 4 часов представить свои решения по электронной почте. Видео и аудио связь позволяет студентам задать вопросы организаторам по условиям задач прямо в ходе соревнования.

В 2006 году состоялась первая такая олимпиада для израильских студентов. Успех превзошёл все ожидания. К удивлению организаторов, в этом соревновании приняли участие не только будущие инженеры, физики и математики, но и студенты с других факультетов и даже те, кто учился на профессию медсестёр. Так почему бы их способности и желание не направлять в желаемое для преподавателей русло, укрепляя интерес студентов к решению нестандартных математических задач и развивая их математические способности? Вскоре нашлись единомышленники среди преподавателей в других странах. Во 2-ой интернет-олимпиаде в 2007 году уже участвовали студенты из университетов России, Украины, Румынии, Болгарии и Германии.

Одно из главных препятствий в организации международных соревнований по математике — необходимость предварительной мобилизации средств преподавателем-организатором команды для поездки команды в далекий город или страну, средств, которые сразу же идут туристическим компаниям, а отнюдь не на развитие математической подготовки студентов. Интернет-олимпиада устраняет это препятствие, освобождая те средства, которые иногда удаётся получить от спонсора на поощрение преподавателей, участвующих в подготовке команд, и стимулируя к математической учёбе студентов из этих команд. Понятно, что стипендия, получаемая студентом от спонсора, может способствовать росту его мотивации в изучении математики.

Отличия интернет-олимпиады и олимпиады "Кенгуру"

По форме интернет-олимпиада похожа на известную олимпиаду "Кенгуру", которая тоже использует интернет, однако, слишком похожа на очередной тест. Одно из главных отличий — в нашей интернет-олимпиаде производится традиционная проверка, при которой виден путь решения или некая идея, пусть даже не совсем верная, но оригинальная. Этого не удаётся достичь при тесте.

Другое отличие — совместная церемония открытия и закрытия по видео связи. Кто только не выходил на видео связь за эти три года. По интернетовским каналам связи мы видели студентов и профессоров Московских МЭСИ и МИРЕА, Санкт-Петербургского ВоенМеха, Ереванского Университета, Бакинского филиала одного из Московских университетов, Саратовского Государственного Университета, Нижнекамского Института Химической Технологии, Университета и Политехники Бухареста, Могилевского Университета из Белоруссии и т.д. На экранах видны победно вскинутые руки победителей, слёзы радости и первые интервью победителей и руководителей команд и Университетов. Особая волнующая обстановка всегда царит в зале заседаний Учёного Совета Университетского Центра Ариэль в Израиле, когда собираются преподаватели и местные студенты, в прямом эфире объявляются победители олимпиады и на большом экране появляются друзья-соперники ариэльцев. Невольно возникает чувство сопричастности к происходящему и принадлежности к некоему международному клубу. Может быть это совсем не мало?

Ну и, конечно, задачи. Они должны быть не просто разными по трудности, но и интересными по содержанию, приводить к пониманию студентами каких-то новых математических нюансов и фактов. Главный автор таких задач — председатель жюри профессор Алексей Канель-Белов из Бар-Иланского университета, известный в Израиле и Москве математический композитор, автор книги по нестандартным задачам, один из крупнейших в мире специалистов по олимпиадным задачам, тренер израильской студенческой команды по математике, а в недалёком прошлом, тренер студенческой команды Германии. Другой составитель задач и судья — доктор Вадим Бугаенко, репатриировавшийся полгода назад из Москвы, также автор книги по нестандартным задачам, один из организаторов ряда Московских олимпиад, а ныне научный сотрудник Университетского Центра Ариэль.

Молодежь не удовлетворяется только виртуальными соревнованиями. В ноябре 2008 года в Ариэль по нашему приглашению приезжали команды из Московского института радио и из университета Ясси, Румыния. Они встретились в очном поединке с израильскими студентами и, разумеется, совершили путешествие по нашей стране. Идеальным, по нашему мнению, является сочетание нескольких туров интернет-олимпиады и олимпиады традиционной. Исключительно важным для себя мы видим сотрудничество с нашим главным российским партнёром профессором Владимиром Григорьевичем Наводновым из Аккредитационного Агенства Министерства Образования России, который первым реализовал это сочетание в России. Финал нашей интернет-олимпиады и финал Всероссийской Олимпиады в мае 2009 были совмещены, и это было обоюдным успехом. В 2010 постараемся к этому уравнению добавить Румынию.

Задачи и решения Пятой интернет-олимпиады по математике для студентов см. на сайте http://www.ariel.ac.il/cs/projects/dom/itpm/

Alexander Domoshnitsky
профессор, декан факультета Естественных Наук,
Ариэльский Университетский Центр, Израиль.

E-mail:adom@ariel.ac.il

Метод uvw для доказательства неравенств

Михаил Розенберг

В статье предложен оригинальный метод доказательства некоторых симметрических и циклических алгебраических неравенств от трех переменных. Для учащихся и учителей старших профильных физико-математических классов.

Этот метод хорош для доказательства некоторых симметрических и циклических алгебраических неравенств от трех переменных. Пусть $f \in \mathbb{R}[a,b,c]$ — симметрический многочлен от трёх действительных переменных и мы хотим доказать, что $f(a,b,c) \geq 0$. Обозначим $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ (здесь v^2может быть отрицательным) и $abc=w^3$. Тогда существует такой многочлен g, что $f(a,b,c)=g\left(u,v^2,w^3\right)$. Для некоторых f получающиеся выражения для g собраны в конце статьи.

Вариации w^3

Пусть $F(w^3)=g(u,v^2,w^3)$. Следующее простое утверждение является центральным для всего метода.

Если F принимает своё наименьшее значение на границе значений w^3, то для доказательства неравенства $f(a,b,c) \geq 0$ достаточно доказать $f(a,b,b) \geq 0$.

Действительно, a, b и c — корни уравнения

$$x^3-3ux^2+3v^2x-w^3=0, \tag{1}$$

или, что то же самое, $w^3=h(x)$, где $h(x)=x^3-3ux^2+3v^2x$. Зафиксируем u и v^2. Мы видим (см. рис. 1), что для того чтобы уравнение (1) имело три действительных корня, w^3 должно меняться только между локальными наибольшим и наименьшим значениями h и граничные значения w^3 соответствуют точкам локального экстремума h, что, в свою очередь, соответствует совпадению двух чисел из $\{a,b,c\}$.

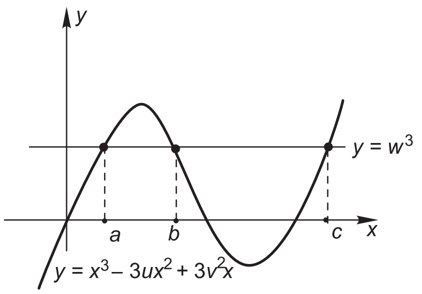


Рис. 1.

Покажем теперь, как это работает.

Пример 1. Докажите, что

$$3(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2) \geq (a+b+c)^2(ab+ac+bc)^2.$$

(Михаэль Розенберг, 2009)

Доказательство. Пусть $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ (v^2может быть отрицательным) и $abc=w^3$. Тогда согласно (П.17)[1] наше неравенство эквивалентно $f(w^3) \geq 0$, где

$$f(w^3)=81(3u^2v^4-v^6-u^3w^3)-81u^2v^4.$$

[1](П.1)–(П.24) — номера формул в Приложении

Но f — линейная функция. Поэтому она достигает своего наименьшего значения на границе значений w^3, что происходит, когда два числа из $\{a, b, c\}$ равны.

Поскольку наше неравенство симметрическое, однородное и чётной степени, то для его доказательства достаточно проверить только один случай: $b = c = 1$, что даёт $(a-1)^2(5a^2+8a+5) \geq 0$, что очевидно верно. Неравенство доказано.

Выразим границы изменения w^3 через u и v^2. Пусть $f(x) = x^3 - 3ux^2 + 3v^2x - w^3$. Тогда $f'(x) = 3(x^2 - 2ux + v^2)$. Так как $u^2 \geq v^2$, то $x_{\max} = u - \sqrt{u^2 - v^2}$ и $x_{\min} = u + \sqrt{u^2 - v^2}$. Поэтому $f(x_{\min}) \leq w^3 \leq f(x_{\max})$, что даёт

$$uv^2 - 2u^3 - 2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \leq w^3 \leq 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2-v^2)^3}. \tag{2}$$

Этот результат можно получить и из (П.16) из тех соображений, что дискриминант выписанного там квадратного трёхчлена относительно w^3 не положителен.

Пример 2. Пусть a, b и c положительны и такие, что

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}\right) = k, \quad \text{где} \quad k \geq 8.$$

Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

(Михаэль Розенберг, 2011)

Решение. Пусть $a + b + c = 3u$, $ab + ac + bc = 3v^2$, $abc = w^3$ и $u^2 = tv^2$. Тогда $t \geq 1$ и условие даёт: $w^3 = \frac{9uv^2}{k+1}$. Подставляя это значение w^3 в (2) получаем двойное неравенство:

$$-2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \leq 2u^3 + \frac{3uv^2(2-k)}{k+1} \leq 2\sqrt{(u^2-v^2)^3},$$

которое эквивалентно

$$36(k+1)t^2 - 3(k^2 + 20k - 8)t + 4(k+1)^2 \leq 0, \tag{3}$$

что даёт

$$\frac{k^2 + 20k - 8 - \sqrt{k(k-8)^3}}{12(k+1)} \leq t \leq \frac{k^2 + 20k - 8 + \sqrt{k(k-8)^3}}{12(k+1)}.$$

Займёмся теперь нашим выражением. Согласно (П.12) получаем[2]:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \frac{\sum\limits_{cyc}(a^4b^2 + a^4c^2) + 2a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} =$$

$$= \frac{81u^2v^4 - 54v^6 - 54u^3w^3 + 36uv^2w^3 - w^6}{w^6} =$$

$$= \frac{81u^2v^4 - 54v^6 - \frac{486u^4v^2}{k+1} + \frac{324u^2v^4}{k+1} - \frac{81u^2v^4}{(k+1)^2}}{\frac{81u^2v^4}{(k+1)^2}} =$$

$$= -6(k+1)t + k^2 + 6k + 4 - \frac{2(k+1)^2}{3t}.$$

[2]Выражение $\sum\limits_{cyc}$ всюду ниже означает сумму, взятую по всем циклическим перестановкам входящих переменных.

Обозначим $f(t) = -6(k+1)t + k^2 + 6k + 4 - \frac{2(k+1)^2}{3t}$. Тогда $f'(t) = -6(k+1) + \frac{2(k+1)^2}{3t^2}$, что даёт $t_{\max} = \frac{\sqrt{k+1}}{3}$, поскольку легко проверить, что

$$\frac{k^2+20k-8-\sqrt{k(k-8)^3}}{12(k+1)} \le \frac{\sqrt{k+1}}{3} \le \frac{k^2+20k-8+\sqrt{k(k-8)^3}}{12(k+1)}.$$

Таким образом,

$$\max\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) = f\left(\frac{\sqrt{k+1}}{3}\right) = k^2+6k+4-4\sqrt{(k+1)^3}$$

и учитывая (3) и что

$$t_{\min}^2 = \frac{3(k^2+20k-8)t_{\min} - 4(k+1)^2}{36(k+1)},$$

получаем

$$\min\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) = f\left(t_{\min}\right) = \frac{k^2-8k+16}{2}.$$

Задача решена.

Тождество (П.16) помогает при доказательстве некоторых циклических неравенств.

Пример 3. Пусть a, b и c неотрицательны и такие, что $ab+ac+bc=3$. Докажите, что:

$$(a+2b)(b+2c)(c+2a) \ge 27 \tag{4}$$

(Михаэль Розенберг, 2007)

Доказательство. Положим $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ $(v \ge 0)$, $abc = w^3$ и $u = tv$. Тогда $t \ge 1$. Получаем:

$$(4) \Leftrightarrow \sum_{cyc}(2a^2b+4a^2c+3abc) \ge 27v^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}(a^2b+a^2c+abc) \ge 27v^3 + \sum_{cyc}(a^2b-a^2c) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 27(uv^2-v^3) \ge (a-b)(a-c)(b-c).$$

Поскольку $uv^2-v^3 \ge 0$, то достаточно доказать, что

$$729(uv^2-v^3)^2 \ge (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2,$$

что согласно (П.16) эквивалентно

$$w^6 - 2(3uv^2-2u^3)w^3 + 24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6 \ge 0.$$

Так как $24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6 \ge 0$, то остаётся доказать наше неравенство, когда $3uv^2 - 2u^3 \ge 0$, то есть, при $1 \le t \le \sqrt{1,5}$. Для этого достаточно проверить, что

$$(3uv^2-2u^3)^2 - (24u^2v^4 - 54uv^4 + 31v^6) \le 0.$$

Но

$$(3uv^2-2u^3)^2 - (24u^2v^4 - 54uv^4 + 31v^6) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4t^6 - 12t^4 - 15t^2 + 54t - 31 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2(4t^4+8t^3-8t-31) \le 0,$$

которое верно при $1 \le t \le \sqrt{1,5}$. Неравенство доказано!

Равенство достигается, когда $t = 1$, то есть, когда $a = b = c = 1$.

Кстати, максимальное значение k, при котором неравенство

$$(a + kb)(b + kc)(c + ka) \ge (1 + k)^3$$

выполняется для всех неотрицательных a, b и c таких, что $ab + ac + bc = 3$, это

$$k = \frac{3\sqrt[3]{4} - 2 + \sqrt{18\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{4}}}{2} = 2,33369885...$$

и мы получаем

$$(3a + 7b)(3b + 7c)(3c + 7a) \ge 1000$$

при тех же ограничениях на a, b и c.

В случае, когда переменные неотрицательны, появляется 0, как одна из возможных границ изменения w^3.

Пример 4. Пусть a, b и c неотрицательны, причем никакие два из них не равны нулю. Докажите, что:

$$(ab + ac + bc)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2}\right) \ge \frac{9}{4}. \tag{5}$$

(Ji Chen, 1995)

Доказательство. Пусть $a+b+c = 3u$, $ab+ac+bc = 3v^2$ и $abc = w^3$. Поскольку $(a+b)(a+c)(b+c) = 9uv^2 - w^3$, то (5) $\Leftrightarrow f(w^3) \le 0$, где $f(w^3) = w^6 + P(u, v^2)w^3 + Q(u, v^2)$.

Но f — выпуклая функция. Поэтому она принимает своё наибольшее значение на границе значений w^3, а это происходит, когда два числа из $\{a, b, c\}$ равны или, когда $w^3 = 0$.

Итак, для доказательства нашего неравенства достаточно рассмотреть всего два случая:

1. $b = c = 1$, что даёт $(2a + 1)\left(\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{4}\right) \ge \frac{9}{4}$, а это эквивалентно $a(a - 1)^2 \ge 0$.

2. $b = 1$ и $c = 0$, что даёт $(a - 1)^2(4a^2 + 7a + 4) \ge 0$.

Неравенство доказано.

Мы видим, что суть метода заключается в сведении доказательства неравенства от трёх переменных к проверке неравенств от одной переменной.

Займёмся теперь вариациями u и v^2.

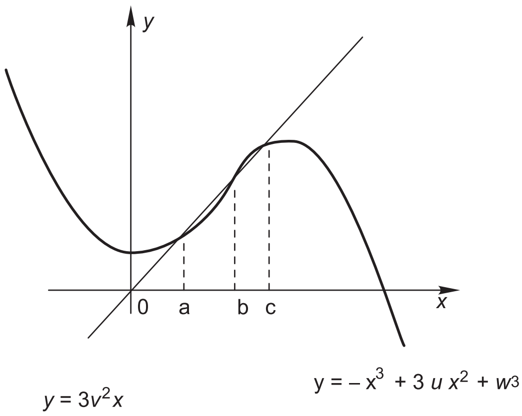


Рис. 2.

Вариации v^2

Пусть f — симметрический многочлен над R от неотрицательных переменных a, b и c. Положим $f(a, b, c) = g(u, v^2, w^3) = G(u)$. Перепишем уравнение $x^3 - 3ux^2 + 3v^2x - w^3 = 0$, имеющее корни a, b и c, в виде $3v^2x = -x^3 + 3ux^2 + w^3$. Зафиксируем u и w^3 и будем менять v^2 так, чтобы последнее уравнение имело три действительных корня. Положим для определённости $a \le b \le c$ для первоначальных значений a, b и c. Происходящее в этой ситуации иллюстрирует рис. 2. Мы видим, что область значений v^2 — это $[k_1, k_2]$, где прямые $y = 3k_1x$ и $y = 3k_2x$ касаются графика $y = -x^3 + 3ux^2 + w^3$ в точках с абсциссами из $[a, b]$ и $[b, c]$ соответственно. То есть, граничные значения v^2 соответствуют случаю, когда два числа из $\{a, b, c\}$

равны между собой. В случае действительных переменных a, b и c значение v^2 может уходить на бесконечность.

Пример 5. Пусть a, b и c положительны, причем $abc = 1$. Докажите, что:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 15(ab + ac + bc) \geq 16(a + b + c). \tag{6}$$

(М. Розенберг, 2006)

Доказательство. Обозначим $a+b+c = 3u$, $ab+ac+bc = 3v^2$ и $abc = w^3$. Тогда (6) $\Leftrightarrow f(v^2) \geq 0$, где $f(v^2) = 3u^2+13v^2-16uw$. Поскольку f линейна, то она получит своё наименьшее значение, когда v^2 получит своё наименьшее значение, а это случится, когда два числа из $\{a, b, c\}$ равны между собой. Поэтому остаётся проверить выполнение неравенства $f(v^2) \geq 0$, когда $b = c = 1$. В этом случае $f(v^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2 + 15(2a + 1) \geq 16(a + 2)\sqrt[3]{a}$, что после подстановки $a = x^3$ даёт $(x - 1)^2(x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 17) \geq 0$, а это верно для всех $x > 0$. Неравенство доказано.

Вариации u

Пусть f — симметрический многочлен над $\mathbb{R}$ от неотрицательных переменных a, b и c. Положим $f(a, b, c) = g(u, v^2, w^3) = H(u)$, где g — многочлен от трёх переменных. Перепишем уравнение $x^3 - 3ux^2 + 3v^2x - w^3 = 0$, имеющее корни a, b и c, в виде $3ux^2 = x^3 + 3v^2x - w^3$. Зафиксируем v^2 и w^3 и будем менять u так, чтобы последнее уравнение имело бы три действительных корня.

Положим для определённости $a \leq b \leq c$ для первоначальных значений a, b и c. Рисунок 3 иллюстрирует, что u меняется между тем своим значением, когда парабола $y = 3ux^2$ касается графика функции $y = x^3 + 3v^2x - w^3$ в точке с абсциссой из отрезка $[b, c]$, и тем своим значением, когда касание происходит в точке с абсциссой из отрезка $[a, b]$. Касание графиков соответствует совпадению корней уравнения $x^3 - 3ux^2 + 3v^2x - w^3 = 0$.

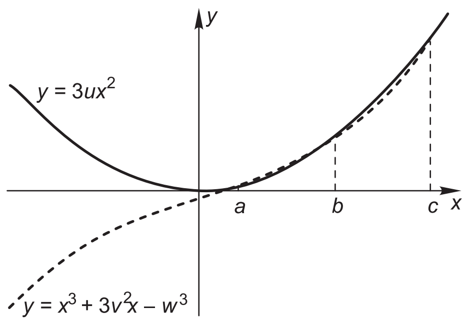


Рис. 3

Поэтому если для доказательства неравенства $f(a, b, c) \geq 0$ достаточно доказать его на границе значений u, то для этого достаточно проверить, что $f(a, b, b) \geq 0$.

Это произойдёт, например, когда функция H линейна, или монотонна, или вогнута.

Пример 6. Пусть a, b и c — неотрицательные числа, для которых $ab + ac + bc + 6abc = 9$. Докажите, что $a + b + c + 3abc \geq 6$.

Доказательство. Поскольку условие не зависит от $a + b + c = 3u$, то левая часть нашего неравенства принимает своё наименьшее значение, когда u принимает своё наименьшее значение, что произойдёт, когда два числа из $\{a, b, c\}$ равны.

Пусть для определённости $b = c$. Тогда, очевидно, $b \neq 0$ и $2ab + b^2 + 6ab^2 = 9$ даёт $a = \frac{9-b^2}{2b(3b+1)}$ и остаётся доказать неравенство $\frac{9-b^2}{2b(3b+1)} + 2b + \frac{3(9-b^2)b^2}{2b(3b+1)} \geq 6$, которое эквивалентно $(3 - b)(b + 1)(b - 1)^2 \geq 0$, что верно. Неравенство доказано.

Равенство достигается, когда $b = 3$, то есть, когда $a = 0$, $b = c = 3$ и для циклических перестановок этих переменных, а также когда $b = 1$, то есть, когда $a = b = c = 1$.

В заключение приведём ещё несколько примеров.

Пример 7. Пусть a, b и c положительны, причем $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}. \tag{7}$$

(М. Розенберг, 2006)

Доказательство. Пусть $a+b+c = 3u$, $ab+ac+bc = 3v^2$ и $abc = w^3$. Тогда пользуясь (П.2) получаем: (7) $\Leftrightarrow u^{10} - (9u^3 - 9uv^2 + w^3)w^7 \geq 0$, что является линейным неравенством относительно v^2. Поэтому достаточно проверить наше неравенство в случае $b = c$ и $a = \frac{1}{b^2}$. В этом случае

$$(7) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{b^2}+2b}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{\frac{1}{b^6}+2b^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{(1+2b^3)^{10}}{b^{14}(1+2b^9)} \geq 3^9 \Leftrightarrow g(b) \geq 0,$$

где $g(b) = 10\ln(1+b^3) - 14\ln b - \ln(1+2b^9) - 9\ln 3$.

Обозначим $b^3 = x$. Тогда получаем:

$$g'(b) = \frac{60b^2}{1+2b^3} - \frac{14}{b} - \frac{18b^8}{1+2b^9} = \frac{2(x-1)(14x^3-9x^2-9x+7)}{b(1+2b^3)(1+2b^9)}.$$

Поскольку $14x^3 - 9x^2 - 9x + 7 \geq 0$ для всех $x > 0$, то $x_{\min} = 1$ и неравенство доказано.

Пример 8. Пусть a, b, c и d — положительные числа, для которых $abcd = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{12}{a+b+c+d} \geq 7$$

(М. Розенберг, 2011)

Доказательство. Пусть $f(a,b,c,d) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{12}{a+b+c+d} - 7$ и $a = \max\{a,b,c,d\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c,d) - f\left(a, \sqrt[3]{bcd}, \sqrt[3]{bcd}, \sqrt[3]{bcd}\right) = \\
&\qquad = \frac{bc+bd+cd-3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}}{bcd} - \frac{12(b+c+d-3\sqrt[3]{bcd})}{(a+b+c+d)(a+3\sqrt[3]{bcd})} \geq \\
&\qquad \geq \frac{bc+bd+cd-3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}}{bcd} - \frac{12(b+c+d-3\sqrt[3]{bcd})}{(\frac{b+c+d}{3}+b+c+d)(\frac{b+c+d}{3}+3\sqrt[3]{bcd})} = \\
&\qquad = \frac{bc+bd+cd-3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}}{bcd} - \frac{27(b+c+d-3\sqrt[3]{bcd})}{(b+c+d)(b+c+d+9\sqrt[3]{bcd})}.
\end{aligned}$$

Докажем, что

$$\frac{bc+bd+cd-3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}}{bcd} - \frac{27(b+c+d-3\sqrt[3]{bcd})}{(b+c+d)(b+c+d+9\sqrt[3]{bcd})} \geq 0.$$

Пусть $b+c+d = 3u$, $bc+bd+cd = 3v^2$ и $bcd = w^3$. Тогда

$$\frac{bc+bd+cd-3\sqrt[3]{b^2c^2d^2}}{bcd} - \frac{27(b+c+d-3\sqrt[3]{bcd})}{(b+c+d)(b+c+d+9\sqrt[3]{bcd})} \geq 0 \Leftrightarrow g(v^2) \geq 0,$$

где g — убывающая функция. Поэтому g достигает своего наименьшего значения на границе значений v^2, то есть, когда два числа из $\{b, c, d\}$ равны.

Поскольку неравенство $g(v^2) \geq 0$ является однородным и симметрическим, то для доказательства $g(v^2) \geq 0$ достаточно проверить только один случай: $c = d = 1$, что после подстановки $b = x^3$ даёт неравенство

$$(x-1)^2(2x^7 + x^6 + 18x^5 - 10x^4 - 50x^3 + 36x^2 + 26x + 4) \geq 0,$$

которое верно. Таким образом,

$$f(a, b, c, d) \geq f\left(a, \sqrt[3]{bcd}, \sqrt[3]{bcd}, \sqrt[3]{bcd}\right)$$

и остаётся доказать, что $f(a, b, b, b) \geq 0$ при $a = \frac{1}{b^3}$, что даёт неравенство

$$(b-1)^2(3b^6 + 6b^5 + 9b^4 - 9b^3 - 5b^2 - b + 3) \geq 0,$$

которое верно. Неравенство доказано.

Пример 9. Для неотрицательных a, b и c, одновременно не равных нулю, докажите, что:

$$\sqrt{1 + \frac{21a}{a + 3b + 3c}} + \sqrt{1 + \frac{21b}{3a + b + 3c}} + \sqrt{1 + \frac{21c}{3a + 3b + c}} \geq 6.$$

(М. Розенберг, 2011)

Доказательство. Пусть

$$1 + \frac{21a}{a + 3b + 3c} = (1 + A)^2, \qquad 1 + \frac{21b}{3a + b + 3c} = (1 + B)^2, \qquad 1 + \frac{21c}{3a + 3b + c} = (1 + C)^2,$$

где A, B и C неотрицательны. Тогда нам нужно доказать, что $A + B + C \geq 3$ и мы имеем

$$\frac{21a}{a + 3b + 3c} = A^2 + 2A, \quad \frac{21b}{3a + b + 3c} = B^2 + 2B \quad \text{и} \quad \frac{21c}{3a + 3b + c} = C^2 + 2C.$$

Обозначим $A^2 + 2A = p$, $B^2 + 2B = q$ и $C^2 + 2C = r$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} (p - 21)a + 3pb + 3pc = 0, \\ 3qa + (q - 21)b + 3qc = 0, \\ 3ra + 3rb + (r - 21)c = 0, \end{cases}$$

имеющую бесконечно много решений, что даёт

$$\begin{vmatrix} p - 21 & 3p & 3p \\ 3q & q - 21 & 3q \\ 3r & 3r & 21 - r \end{vmatrix} = 0,$$

то есть,

$$(p - 21)(q - 21)(r - 21) + 54pqr - 9\sum_{cyc} pq(r - 21) = 0$$

или

$$4pqr + 24(pq + pr + qr) + 63(p + q + r) = 1323,$$

что даёт

$$4ABC(A + 2)(B + 2)(C + 2) + 24\sum_{cyc}(A^2 + 2A) + 63(A + B + C)^2 = 1323.$$

Пусть $A+B+C<3$. Возьмём x, y и z так, что $A=kx$, $B=ky$ и $C=kz$ для $k>0$ и $x+y+z=3$. Тогда $k(x+y+z)<3$, что даёт $0<k<1$. Поэтому

$$1323=4ABC(A+2)(B+2)(C+2)+24\sum_{cyc}(A^2+2A)+63(A+B+C)^2<$$
$$<4xyz(x+2)(y+2)(z+2)+24\sum_{cyc}(x^2+2x)+63(x+y+z)^2.$$

Но это противоречие, поскольку мы докажем сейчас, что

$$1323\geq 4xyz(x+2)(y+2)(z+2)+24\sum_{cyc}(x^2+2x)+63(x+y+z)^2$$

для неотрицательных x, y и z таких, что $x+y+z=3$.

Пусть $x+y+z=3u$, $xy+xz+yz=3v^2$ и $xyz=w^3$. Тогда, очевидно, последнее неравенство эквивалентно $f(w^3)\leq 0$, где f выпуклая функция и для его доказательства достаточно проверить после гомогенизации два случая:

1) $y=1$ и $z=0$, что даёт $(x-1)^2(7x^2+23x+7)\geq 0$.

2) $y=z=1$, что даёт $(x-1)^2(7x^3+60x^2+170x+168)x\geq 0$.

Неравенство доказано.

Равенство достигается, когда $a=b=c$ и когда $a=b$, $c=0$ и для циклических перестановок последних значений переменных.

Приложение (таблица тождеств)

$$a^2+b^2+c^2=9u^2-6v^2, \tag{П.1}$$

$$a^3+b^3+c^3=27u^3-27uv^2+3w^3, \tag{П.2}$$

$$\sum_{cyc}(a^2b+a^2c)=9uv^2-3w^3, \tag{П.3}$$

$$a^4+b^4+c^4=81u^4-108u^2v^2+18v^4+12uw^3, \tag{П.4}$$

$$\sum_{cyc}(a^3b+a^3c)=27u^2v^2-18v^4-3uw^3, \tag{П.5}$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=9v^4-6uw^3, \tag{П.6}$$

$$a^5+b^5+c^5=243u^5-405u^3v^2+135uv^4+45u^2w^3-15v^2w^3, \tag{П.7}$$

$$\sum_{cyc}(a^4b+a^4c)=81u^3v^2-81uv^4-9u^2w^3+15v^2w^3, \tag{П.8}$$

$$\sum_{cyc}(a^3b^2+a^3c^2)=27uv^4-18u^2w^3-3v^2w^3, \tag{П.9}$$

$$a^6+b^6+c^6=729u^6-1458u^4v^2+729u^2v^4-54v^6+162u^3w^3-108uv^2w^3+3w^6, \tag{П.10}$$

$$\sum_{cyc}(a^5b+a^5c)=2443y^4v^2+729u^2v^4-54v^6+162u^3w^3-108uv^2w^3+3w^6, \tag{П.11}$$

$$\sum_{cyc}(a^4b^2+a^4c^2)=81u^2v^4-554v^6-54u^3w^3+36uv^2w^3-3w^6, \tag{П.12}$$

$$\sum_{cyc}a^4bc=27u^3b^3-27uv^2w^3+3w^6, \tag{П.13}$$

$$\sum_{cyc} a^3b^3 = 27v^6 - 27uv^2w^3 + 3w^6, \qquad (П.14)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b^2c + a^3c^2b) = 9uv^2w^3 - 3w^6, \qquad (П.15)$$

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = \sum_{cyc}(a^4b^2 - a^3b^3 - a^4bc + 2a^3b^2c - a^2b^2c^2) = 27(3u^2v^4 - 4v^6 - 4u^3w^3 + 6uv^2w^3 - w^6), \qquad (П.16)$$

$$\prod_{cyc}(a^2 + ab + b^2) = 27(3u^2v^4 - v^6 - u^3w^3), \qquad (П.17)$$

$$\sum_{cyc}(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2) = 27(3u^4 - 3u^2v^2 + v^4), \qquad (П.18)$$

$$\sum_{cyc}(a^2b - a^2c) = (a-b)(a-c)(b-c), \qquad (П.19)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b - a^3c) = 3u(a-b)(a-c)(b-c), \qquad (П.20)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b^2 - a^3c^2) = 3v^2(a-b)(a-c)(b-c), \qquad (П.21)$$

$$\sum_{cyc}(a^5b - a^5c) = (27u^3 - 18uv^2 + w^3)(a-b)(a-c)(b-c), \qquad (П.22)$$

$$\sum_{cyc}(a^4b^2 - a^4c^2) = (9uv^2 - w^3)(a-b)(a-c)(b-c), \qquad (П.23)$$

$$3uv^2 - 2u^3 - 2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \le w^3 \le 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \qquad (П.24)$$

Розенберг Михаил Аркадьевич,
преподаватель математики
школы МОФЕТ, Тель-Авив.

E-mail: michaelrzb@gmail.com

О касании коник и прямых

П. Долгирев

В статье изучаются свойства геометрической конструкции, состоящей из треугольника, коники (кривой второго порядка) и касательных прямых к конике, проведенных через вершины треугольника. Рассмотрена связь этой конструкции с некоторыми замечательными точками треугольника. Статья может быть доступна учащимся старших профильных физико-математических классов, имеющим начальные знания из проективной геометрии.

Введение

В области геометрии коник и проективной геометрии есть очень много замечательных теорем. Некоторые я в своей работе буду использовать. Поэтому сформулируем их (все формулировки взяты из [1]; там же можно и прочесть их доказательства):

Теорема Брианшона. Пусть прямые l_i, $i = 1, \dots, 6$, касаются коники, точка A_{ij} — точка пересечения прямых l_i и l_j. Тогда прямые $A_{12}A_{45}$, $A_{23}A_{56}$ и $A_{34}A_{61}$ пересекаются в одной точке.

Теорема Дезарга. Прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, соединяющие соответствующие вершины $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$, конкурентны тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат па одной прямой.

Теорема Паппа. Пусть точки A_i, B_i, C_i лежат на прямой l_i, $i = 1, 2$, тогда точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой (в дальнейшем, прямая Паппа).

Теорема Паскаля. Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на конике. Тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на прямой. На самом деле, теорема Паппа — это следствие из теоремы Паскаля.

Теперь познакомлю читателя с основной конструкцией, рассмотренной в моей работе: зафиксируем треугольник ABC и конику. Проведем касательные прямые d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C и d'_C к этой конике через соответствующие вершины A, B, C (подразумевается, что мы взяли такую конику, что к ней можно провести касательные). Эти касательные образуют шестиугольник $P_aP'_bP_cP'_aP_bP'_c$ (см. рис. 1).

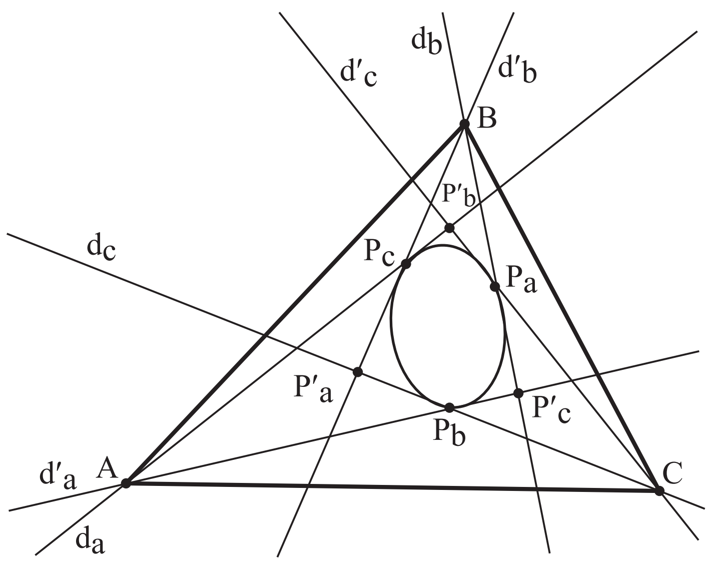


Рис. 1

В частности, прямые AP_a, BP_b, CP_c пересекаются в одной точке. Это утверждение просто следствие из теоремы Брианшона, записанной в этом порядке: d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C, d'_C.

Вся статья разбита на 4 раздела: в первом представлены основные теоремы; во втором — случай изогональных прямых; в третьем — обобщение конструкции Морлея, а в четвертом — случай изотомических прямых.

Благодарности. Автор благодарен А. А. Привалову, А. Г. Мякишеву, А. А. Заславскому за полезные обсуждения, А. И. Сгибневу и всем участникам его семинара за внимание к работе, а также А. Б. Скопенкову и участникам его кружка за проявленный интерес.

1. Основные результаты

Как уже говорилось выше, мы фиксируем треугольник и конику. Проводим касательные из вершин к конике, и у нас образуется шестиугольник $P_aP'_bP_cP'_aP_bP'_c$. Также говорилось, что прямые AP_a, BP_b, CP_c пересекаются в одной точке (далее R). Точка R' — точка пересечения прямых AP'_a, BP'_b, CP'_c. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1. *$P_aP'_a, P_bP'_b, P_cP'_c$ и RR' пересекаются в некоторой точке (рис. 2).*

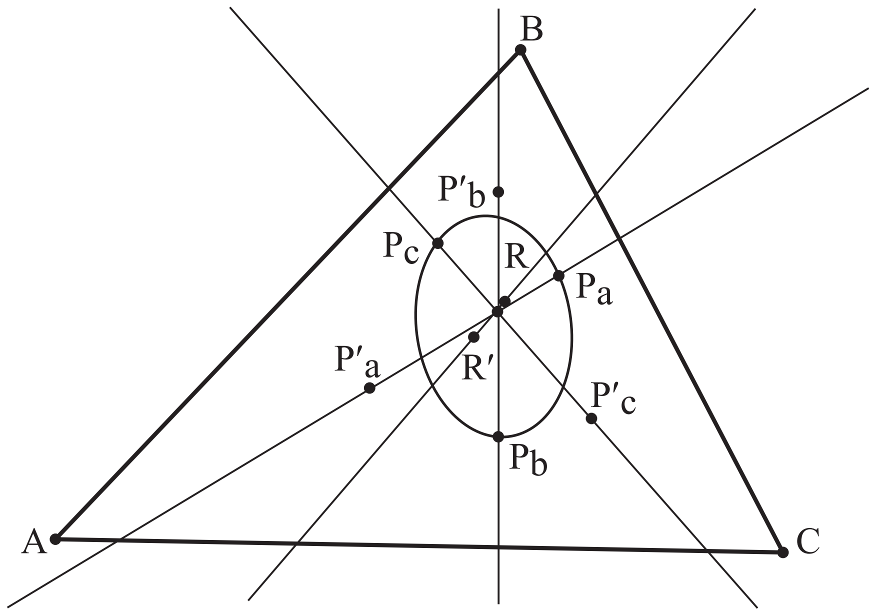


Рис. 2

Доказательство. В доказательстве нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *$P_aP_b, P'_aP'_b$ пересекаются в точке C', лежащей на стороне AB* (рис. 3). *Аналогично определим точки A' и B'.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники P'_aP_bB и $P_aP'_bA$: P'_aP_b пересекается с $P_aP'_b$ в точке C; BP_b пересекается с AP_a в R, а P'_aB — с P'_bA в P_c. Так как C, R и P_c лежат на одной прямой, то по обратной теореме Дезарга следует, что AB, P_aP_b и $P'_aP'_b$ конкурентны.

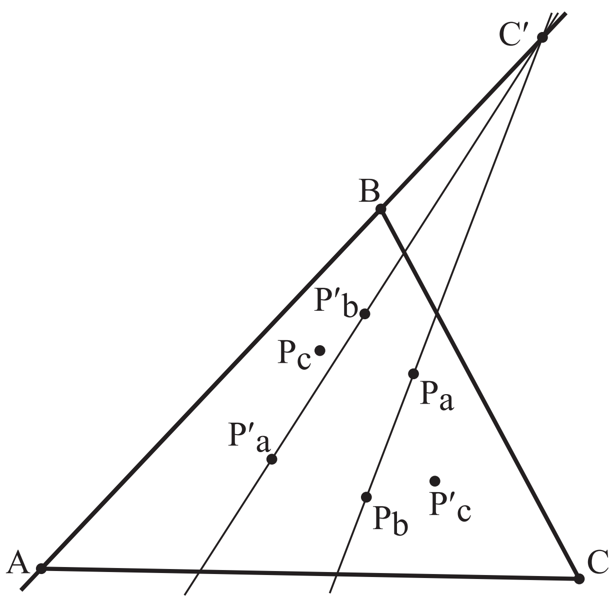


Рис. 3

Вернемся к доказательству теоремы: так как $\Delta P_aP_bP_c$ перспективен ΔABC, то из теоремы Дезарга следует, что точки A', B' и C' коллинеарны. Из **леммы** следует, что соответствующие стороны $\Delta P_aP_bP_c$ пересекаются с соответствующими сторонами $\Delta P'_aP'_bP'_c$ в точках, которые лежат на одной прямой. А значит, по обратной теореме Дезарга $\Delta P_aP_bP_c$ и $\Delta P'_aP'_bP'_c$ перспективны, то есть прямые $P_aP'_a$, $P_bP'_b$ и $P_cP'_c$ пересекаются в одной точке (пусть Q) (хотя это утверждение можно было бы доказать, используя теорему Брианшона). Осталось показать, что Q лежит на RR'. Рассмотрим ΔRP_bP_c и $\Delta R'P'_bP'_c$: RP_b пересекается с $R'P'_b$ в B, RP_c пересекается с $R'P'_c$ в C и по **лемме** P_aP_b и $P'_aP'_b$ пересекаются в точке A', лежащей на BC. А значит, по обратной теореме Дезарга ΔRP_bP_c и $\Delta R'P'_bP'_c$ перспективны, то есть RR' проходит через Q. Теорема доказана. $\triangleleft$

Теорема 2. *На соответствующих сторонах* ΔABC *выбраны шесть точек* A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1 и C'_1, *лежащие на, одной конике. Тогда прямые* d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C, d'_C, *соединяющие соответствующие вершины с соответствующими точками, касаются одной коники (рис. 4).*

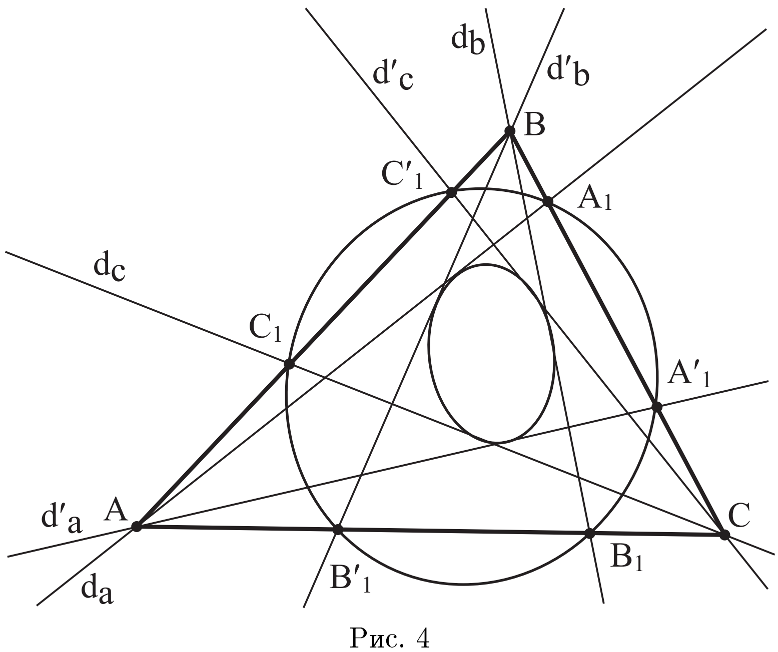


Рис. 4

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, я воспользовался следующим утверждением (задача 14 из [1]) — критерий конконичности: Пусть на сторонах ΔABC лежат шесть точек: A_1, A_2 на стороне BC, B_1, B_2 на стороне AC и C_1, C_2 на AB. Эти шесть точек лежат на одной конике тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} \cdot \frac{CB_1 \cdot CB_2}{AB_1 \cdot AB_2} \cdot \frac{AC_1 \cdot AC_2}{BC_1 \cdot BC_2} = 1.$$

Теперь перейдем к доказательству. Точно так же прямые d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C и d'_C образуют шестиугольник $P_aP'_bP_cP'_aP_bP'_c$. Пусть K, M, L — точки пересечения AP_a с BC, BP_b с AC, CP_c с AB. По теореме Чевы:

$$\frac{CK}{BK}\frac{BC'_1}{AC'_1}\frac{AB_1}{CB_1} = 1; \quad \frac{CK}{BK}\frac{BC'_1}{AC'_1}\frac{AB_1}{CB_1} = 1; \quad \frac{BL}{BK}\frac{AB'_1}{CB'_1}\frac{CA_1}{BA_1} = 1.$$

Перемножим все три равенства и воспользуемся критерием конконичности:

$$\frac{CK}{BK}\frac{AM}{CM}\frac{BL}{AL} = 1.$$

Из обратной теореме Чевы следует, что AP_a, BP_b и CP_c конкурентны. Теперь утверждение теоремы становится очевидным — это следствие из обратной теоремы Брианшона, или можно рассуждать аналогично **теореме 1**. ◁

Следствие. Ясно, что $P_aP'_a$ — прямая Паппа для точек C_1, C'_1, B и B'_1, B_1, C. Аналогично $P_bP'_b$, $P_cP'_c$ тоже будут прямыми Паппа для соответствующих шестерок. В теореме 1 мы показали, что прямые $P_aP'_a$, $P_bP'_b$, $P_cP'_c$ конкурентны, а в теореме 2 мы показали, что точки A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 лежат на одной конике. Поэтому следствие из полученных теорем получается такое:

На соответствующих сторонах ΔABC выбраны шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2. Три прямые Паппа пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной конике (рис. 5).

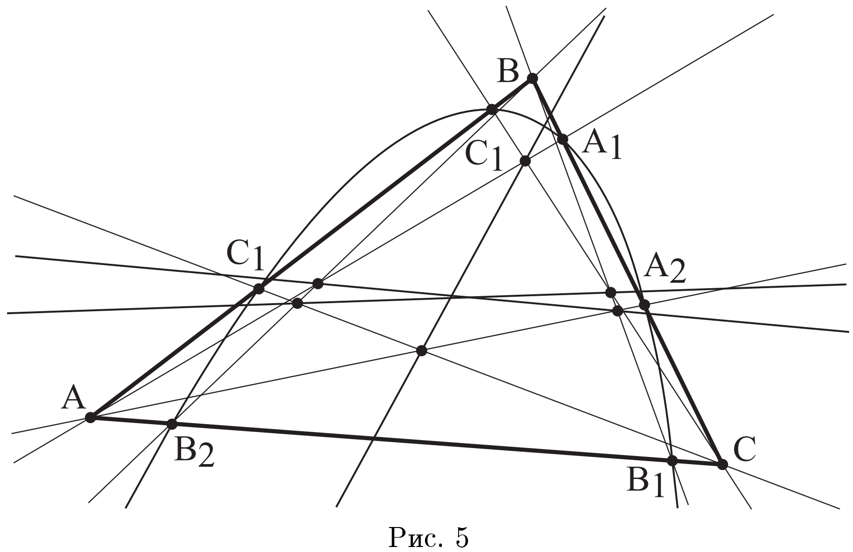


Рис. 5

Упражнение. Пусть A_2 — точка пересечения $A_1C'_1$ и $B_1A'_1$. Аналогично определены B_2 и C_2. Доказать, что AA_2, BB_2 и CC_2 конкурентны.

2. Изогональные прямые

Когда говорят об изогональных прямых, то это значит, что у нас есть некоторый угол и две прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла. В этой области уже есть такие результаты, как теорема Кипера (в [2] в §31 на стр. 592 приведена формулировка этой теоремы) и теорема о втором центре Морлея (см. раздел 3 данной статьи).

Введем следующие обозначения:

В треугольнике ABC проведены прямые l_A, l_B и l_C, проходящие через вершины A, B и C соответственно. Прямые l'_A, l'_B и l'_C, симметричны l_A, l_B и l_C относительно биссектрис соответствующих углов ΔABC (прямые l_A и l'_A изогональны). Пусть эти прямые образуют шестиугольник $P_aP'_bP_cP'_aP_bP'_c$ (рис. 6).

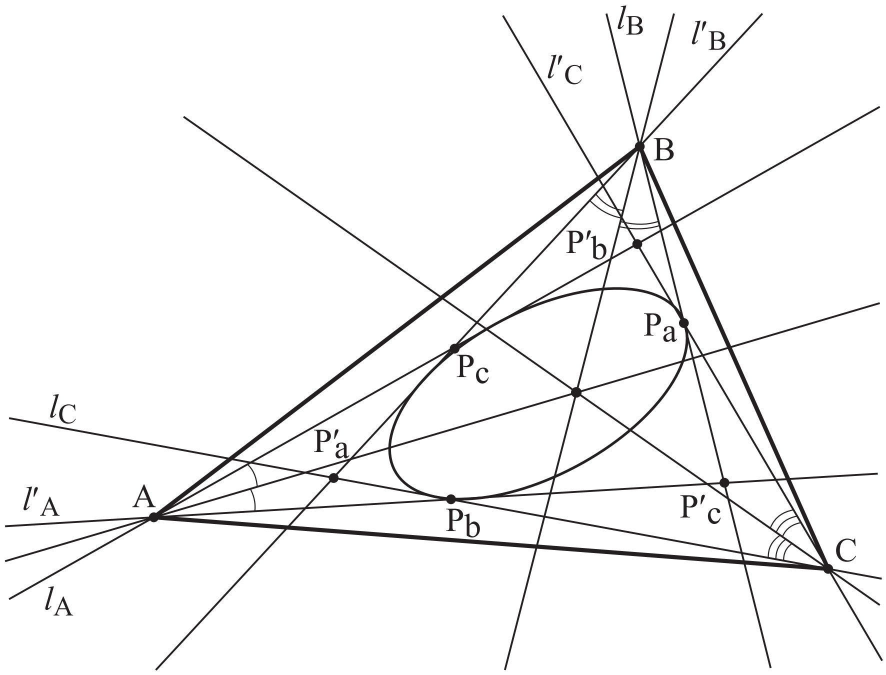


Рис. 6

Докажем, что прямые l_A, l'_A, l_B, l'_B, l_C и l'_C касаются одной коники. Зафиксируем прямые l_A, l_B, l_C, l_A, l'_A и рассмотрим касающуюся их конику (считаем, что прямые общего положения, тогда такая коника единственна). Так как эта коника вписана в $\angle P_cAP'_c$ в $\angle P_aBP'_a$, то ее фокусы изогонально сопряжены относительно ΔABC[1]. Следовательно, C тоже будут изогональными прямыми.

Из этого следует, что все предыдущие теоремы в этом случае тоже верны.

Эта конструкция замечательна еще тем, что точки P_a и P'_a, P_b и P'_b, P_c и P'_c изогонально сопряжены. А, следовательно, точки R и R' тоже сопряжены.

Приведем еще один результат, связанный с этими прямыми:

Теорема. *Проведем перпендикуляры* P_aH_A, P_bH_B *и* P_cH_C *к соответствующим сторонам* ΔABC. *Тогда* AH_A, BH_B *и* CH_C *конкурентны (рис. 7).*

[1]Здесь использовано изогональное свойство коник — см. в [1].

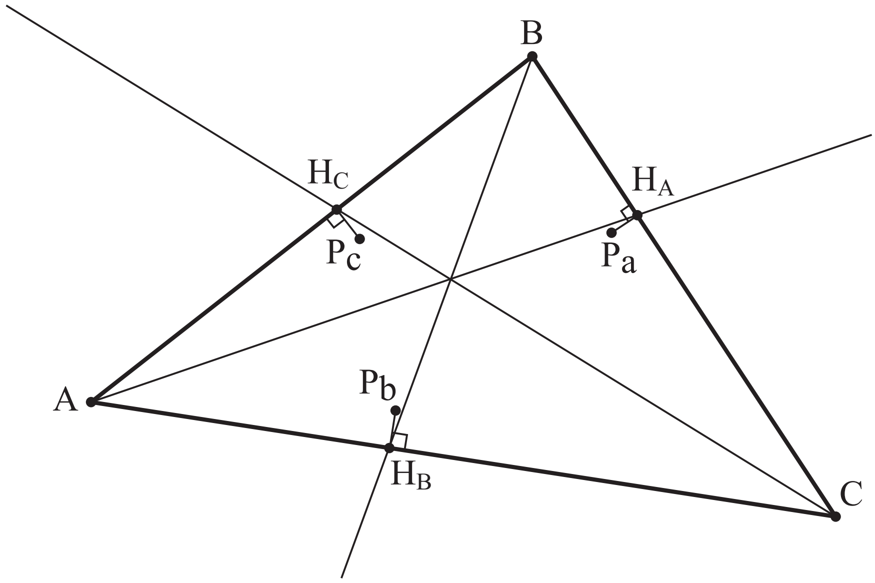


Рис. 7

Доказательство.

$$\frac{P_aH_A}{BH_A} = |tg(\angle(BP_a, BC))| \Rightarrow \frac{BH_A}{CH_A} = \frac{|tg(\angle P_aC, BC))|}{|tg(\angle(BP_a, BC))|}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{CH_B}{AH_B} = \frac{|tg(\angle(P_bA, AC))|}{|tg(\angle(P_bC, AC))|} = \frac{|tg(\angle AP_b, AC))|}{|tg(\angle(P_aC, BC))|};$$

$$\frac{AH_C}{BH_C} = \frac{|tg(\angle(BP_c, AB))|}{|tg(\angle(AP_b, AB))|} = \frac{|tg(\angle BP_a, BC))|}{|tg(\angle(AP_b, AC))|} \Rightarrow$$

$$\frac{AH_C}{BH_C} \cdot \frac{BH_A}{CH_A} \cdot \frac{CH_B}{AH_B} = 1 \Rightarrow$$

Из обратной теоремы Чевы следует утверждение теоремы. ◁

3. Обобщение точек Морлея

Теорема Морлея. Точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольника являются вершинами правильного треугольника.

Еще одна теорема утверждает, что эти два треугольника перспективны, а точка пересечения обозначается 2^{nd}*Morley Centre (второй центр Морлея)*— $X(357)$[2], см. рис. 8.

[2]Эти обозначения приняты в электронной таблице профессора Кимберлинга, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html Например, ортоцентр имеет обозначение $X(4)$.

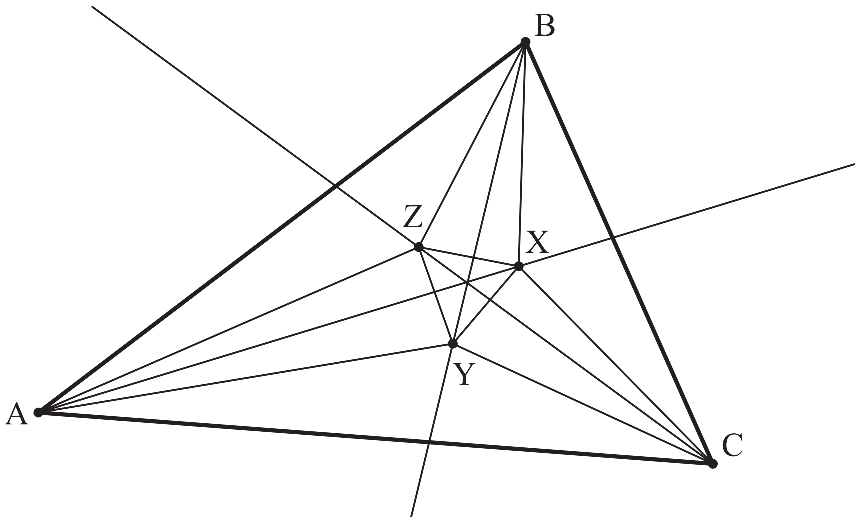


Рис. 8

Зафиксируем $k \in [-1;1]$. Будем рассматривать следующую конструкцию: в условиях изогональной конструкции будем считать, что

$$\frac{\angle A_1AB}{\angle A} = \frac{\angle B_1BC}{\angle B} = \frac{\angle C_1CA}{\angle C} = k.$$

Договоримся считать k положительным, если соответствующие прямые проведены внутренним образом, и отрицательным, если наоборот.

Понятно, что прямые AX, BYи CZ (где X, Y, Z построены так же, как в теореме Морлея) конкурентны. Будем обозначать точку пересечения $R(k)$. Несложно проверить (например, по теореме Чевы), что $R(k)$ имеет следующие барицентрические координаты (см. [3]):

$$R(k) = \left(\frac{\sin(\angle A)\cdot\sin(\angle A\cdot k)}{\sin(\angle A\cdot(1-k))}\right) : \left(\frac{\sin(\angle B)\cdot\sin(\angle B\cdot k)}{\sin(\angle B\cdot(1-k))}\right) : \left(\frac{\sin(\angle C)\cdot\sin(\angle C\cdot k)}{\sin(\angle C\cdot(1-k))}\right).$$

Из построения или из этой формулы очевидно, что кривая, описываемая $R(k)$ (так же, как и кривая, описываемая R) при изогональном сопряжении переходит сама в себя. То есть эта кривая проходит через $X(358)$ (изогонально сопряженной 2^{nd}*Morley Centre)* и инцентр — точку пересечения биссектрис.

Рассмотрим $k = -1 : R(-1) = -\frac{1}{2}(tg\angle A : tg\angle B : tg\angle C) = H$. Так как эта кривая проходит через ортоцентр, то она проходит и через центр описанной окружности O (так как O и H изогонально сопряжены).

Найдем также предельные значения. В случае $k = 0$:

$$\frac{AL}{BL} = \lim_{k\to 0}\frac{\sin(\angle B)\cdot\sin(\angle A\cdot(1-k))\cdot\sin(\angle B\cdot k)}{\sin(\angle A)\cdot\sin(\angle B\cdot(1-k))\cdot\sin(\angle A\cdot k)} = \lim_{k\to 0}\frac{\sin(\angle B\cdot k)}{\sin(\angle A\cdot k)} = \frac{\angle B}{\angle A}.$$

Здесь я воспользовался первым замечательным пределом. То есть

$$R(0) = (\angle A : \angle B : \angle C).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $k = 1$. Аналогично получаем, что

$$\frac{AL}{BL} = \lim_{k\to 1}\frac{\sin(\angle B)\cdot\sin(\angle A\cdot(1-k))\cdot\sin(\angle B\cdot k)}{\sin(\angle A)\cdot\sin(\angle B\cdot(1-k))\cdot\sin(\angle A\cdot k)} =$$

$$= \lim_{k\to 1}\frac{\sin^2(\angle B)\cdot\sin(\angle A\cdot(1-k))}{\sin^2(\angle A)\cdot\sin(\angle B\cdot(1-k))} = \frac{\sin^2(\angle B)\cdot\angle A}{\sin^2(\angle A)\cdot\angle B}$$

Здесь тоже работает первый замечательный предел. То есть

$$R(1) = \left(\frac{\sin^2\angle A}{\angle A} : \frac{\sin^2\angle B}{\angle B} : \frac{\sin^2\angle C}{\angle C}\right).$$

Мы получили также, что $R(0)$ и $R(1)$ изогонально сопряжены.

Теперь рассмотрим частный случай **теоремы**, приведенной в §2. Будем обозначать точку пересечения $D(k)$. При $k = 1/2$ получается точка Жергона. Легко найти, что

$$D(k) = (tg(\angle A \cdot k) : tg(\angle B \cdot k) : tg(\angle C \cdot k)).$$

При $k = 1$ находим, что $D(1) = H$. Аналогично, как и выше, можно получить, что $D(0) = R(0)$.

Координаты точки $Q(k)$ громоздки, но из геометрического построения становятся очевидны ее предельные значения: $Q(0) = R(0)$, а $Q(1) = R(1)$.

4. Изотомические прямые

Ранее l_A и l'_A — изогональные прямые. Будем рассматривать случай, когда эти прямые изотомические (соответственно l_B и l'_B, l_C и l'_C тоже изотомичны между собой). Когда мы говорим об изотомических прямых, то мы подразумеваем, что две какие-то прямые выходят из вершины треугольника и пересекают противоположную сторону в точках, симметричных относительно середины этой стороны. На рис. 9 $\Delta A_0B_0C_0$ — серединный треугольник.

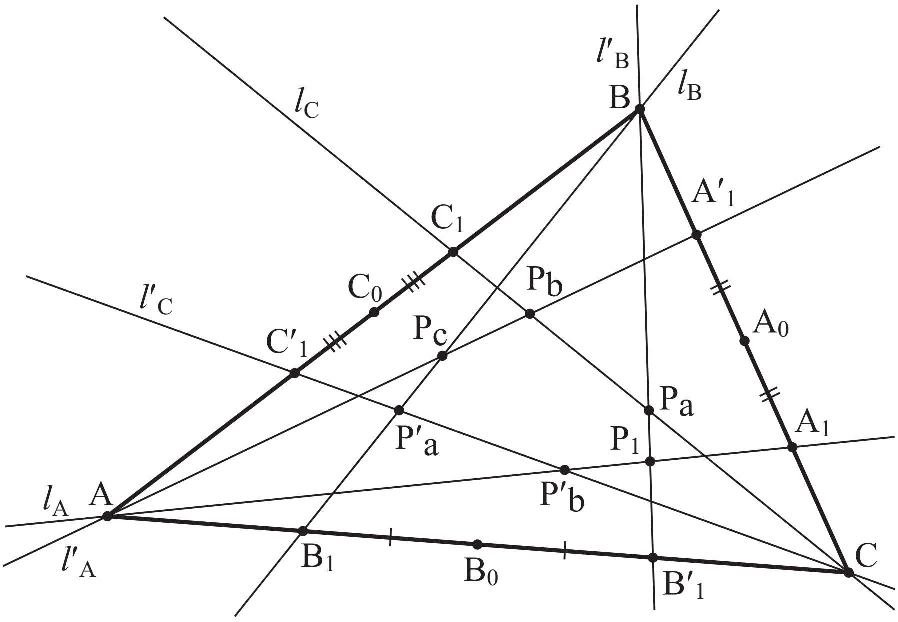


Рис. 9

Тогда *все утверждения основной конструкции в этом случае тоже верны.*

Доказательство. Сделаем аффинное преобразование (подробнее об этих преобразованиях можно посмотреть в [4]), переводящее $\Delta A_0B_0C_0$ — в правильный. При этом точки A_0, B_0 и C_0 перейдут в середины нового треугольника (так как аффинные преобразования сохраняют отношения параллельных отрезков). Точки A_1, B_1 и C_1 перейдут в новые точки, но они останутся лежать па соответствующих сторонах нового треугольника. В свою очередь точки A'_1, B'_1 и C'_1 перейдут в точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно середин соответствующих сторон (опять же, потому что аффинные преобразования сохраняют отношения па прямой). То есть условие теорем можно считать сохранившемся. Так как точки A_1 и A'_1 симметричны относительно A_0 и так как треугольник ABC правильный, то $\angle A_1AA_0 = \angle A'_1AA_0$. То есть l'_A симметрична l_A относительно биссектрисы AA_0. Поэтому эту конструкцию мы свели к конструкции, рассматриваемой в разделе об изогональных прямых, только для правильного треугольника. ◁

Интересный случай возникает, когда отрезки A_1A_1', B_1B_1' и C_1C_1' пропорциональны своим сторонам, то есть

$$\frac{A_1A_1'}{BC} = \frac{B_1B_1'}{AC} = \frac{C_1C_1'}{AB}.$$

Несложно понять (например, из теоремы о четырех точках трапеции или при помощи аффинных преобразований), что точки R и R' будут совпадать с центроидом треугольника (рис. 10).

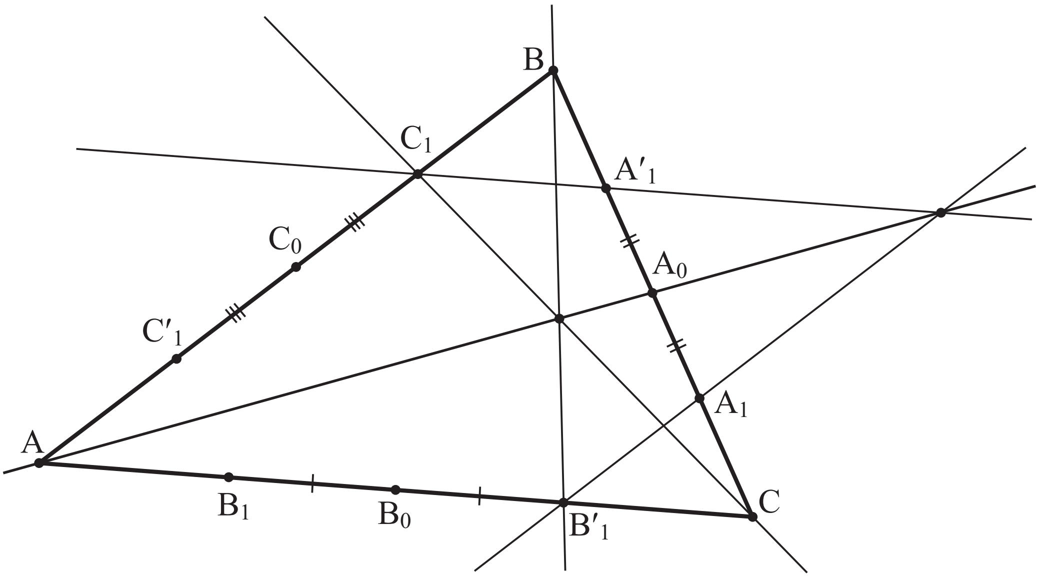


Рис. 10

Литература

[1] Акопян А.В., Заславский А.А. “Геометрические свойства кривых второго порядка”, М., МЦНМО, 2007.

[2] Прасолов В.В. “Задачи по планиметрии”,М., МЦНМО, 2007.

[3] Мякишев А.Г. “Элементы геометрии треугольника”, М., МЦНМО, 2009.

[4] Заславский А.А. “Геометрические преобразования”, М., МЦНМО, 2004.

Долгирев Павел Евгеньевич,
студент МФТИ (ГУ).

E-mail: pavel.dolgirev@yandex.ru

Теорема Лагранжа – мощный инструмент исследования функций

Е. В. Гераськина, В. В. Цукерман

В статье предлагается вариант изучения темы “Теорема Лагранжа и исследование функций” (теория) в классах с углубленным изучением математики.

I. Теорема и формула Лагранжа

На рисунке 1 изображен график некоторой функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$

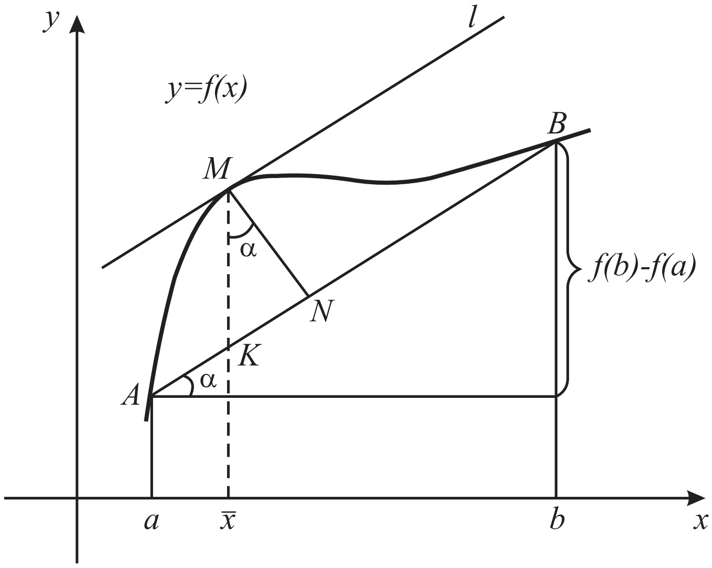


Рисунок 1

M — точка, наиболее удаленная от хорды AB. Через точку M проведена прямая l, параллельная этой хорде. Ее угловой коэффициент $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ясно, что точки графика функции не могут находиться выше прямой l. Естественно считать, что прямая l касается графика функции $y = f(x)$ в точке $M(\bar{x}; f(\bar{x}))$. Так как угловой коэффициент касательной есть значение производной функции $f(x)$ в точке $\bar{x}$, то:

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

Возможно так, или почти так, рассуждал Лагранж, когда устанавливал свою знаменитую теорему[1]. Теорема формулируется следующим образом.

Пусть функция $y = f(x)$ определенная на отрезке $[a; b]$, 1) непрерывна на $[a; b]$ и 2) имеет конечную производную на интервале $(a; b)$. Тогда внутри отрезка $[a; b]$ существует по крайней мере одна точка $\bar{x}$, в которой выполнено соотношение (1).

Заметим, что в формулировке теоремы нет ссылок на какой-либо рисунок. Теорема формулируется и обычно доказывается аналитически (без обращения к рисунку), а рисунок, аналогичный рисунку 1, рассматривается как геометрическая интерпретация теоремы.

[1]**Жозеф Луи Лагранж** (1736-1813) — французский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской АН (1776). Внес существенный вклад во многие области чистой математики, включая вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач на нахождение максимумов и минимумов, теорию чисел, алгебру и теорию вероятностей.

Из педагогических целей мы поступим иначе, сделав соображения, сопровождающие представление рисунка 1, достаточно строгими математически. Рассмотрение проведем в несколько этапов.

Начнем с утверждения о знаке значения функции в зависимости от знака ее предела. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки x_0 значение функции $f(x)$ сохраняет знак своего предела, т. е. если $A > 0$, то $f(x) > 0$, и наоборот, при $A < 0$ и $f(x) < 0$.

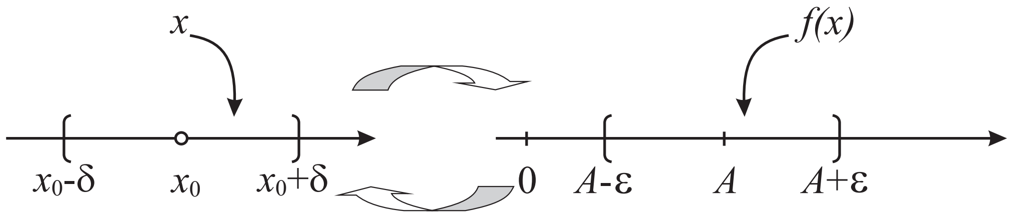


Рисунок 2.1

На рисунке 2.1 изображена ситуация, когда $A > 0$. Выбрана окрестность точки A, в которую не попадает точка O (ноль). Этой окрестности, на основании определения предела, соответствует (указанная нижней стрелкой) проколотая окрестность точки x_0 такая, что для значений аргументов x из этой окрестности, значения функции $f(x)$ попадают в выбранную окрестность точки A (указывается верхней стрелкой). Последнее означает, что $f(x) > 0$. Аналогично рассматривается случай, когда $A < 0$.

Все сказанное выше справедливо и для односторонних пределов. Для усвоения метода проведенного рассуждения целесообразно предложить учащимся самостоятельно провести соответствующие доказательства в случае односторонних пределов.

Доказанное утверждение применим к понятию производной, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ рассматриваются как функции аргумента Δx. В утверждении о знаке функции роль независимой переменной x и значения предела A здесь выполняют Δx и $f'(x_0)$ соответственно, 0 (ноль) заменяет x_0, а отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ заменяет $f(x)$. При положительном значении производной $f'(x)$ в точке x_0, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, рисунок 2.2 (аналогичный рисунку 2.1) показывает, что при выполнении условия $|\Delta x| < \delta$, независимо от знака Δx дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является положительной, а следовательно, знак разности $\Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$ совпадает со знаком Δx.

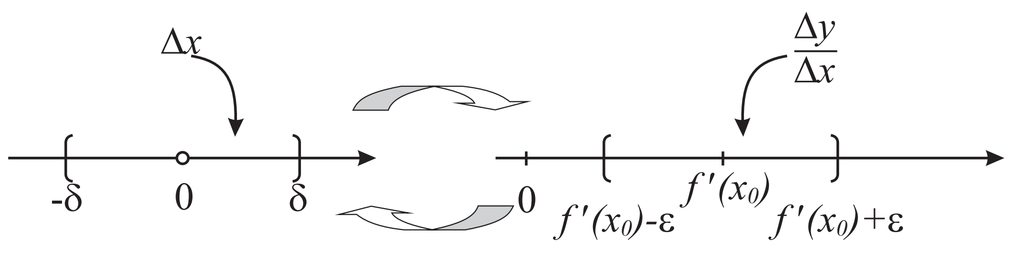


Рисунок 2.2

Это означает, что при $\Delta x < 0$ (т.е. в точке $x = x_0 + \Delta x$, лежащей левее x_0) значение функции $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ меньше, чем $f(x_0)$, а в точках x, лежащих правее x_0, $f(x) > f(x_0)$. Точка x_0, в некоторой окрестности которой выполняется это условие, называется *точкой возрастания функции*. Аналогично, отрицательность значения $f'(x_0)$ является достаточным условием *точки убывания функции*. Соответствующее определение точки убывания и все аналогичные рассуждения с доказательством указанного вывода можно предложить учащимся сделать самостоятельно с последующей проверкой усвоения этого материала.

Далее целесообразно рассмотреть следующую ситуацию. На графике дифференцируемой функции $y = f(x)$ (т.е. имеющей производную) выбирается точка $M(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$. Через точку M проводится прямая l с угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой: $Y = y_0 + k(x - x_0)$. Обозначим $\varphi(x) = y - Y = f(x) - y_0 - k(x - x_0)$ — разность между ординатами кривой (графика функции $y = f(x)$) и прямой l. Эта функция $\varphi(x)$ аргумента x в точке x_0 имеет производную $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - k$. Так как $\varphi(x_0) = 0$, то из рассмотренного выше следует: если $k \neq f'(x_0)$ (т. е. $\varphi'(x_0) \neq 0$), то в пределах некоторой окрестности точки x_0 по разные стороны от нее точки графика функции $y = f(x)$ находятся соответственно выше и ниже прямой l.

Здесь обойден вопрос о геометрическом смысле производной и понятии касательной, который, разумеется, требует отдельного серьезного рассмотрения (см., например, [1], с. 172—180).

Проведенное выше рассуждение является фактически обоснованием необходимого условия экстремума, когда величина $\varphi(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в пределах некоторой окрестности точки x_0. В этом случае величина $\Delta\varphi = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$ не может менять знак при изменении знака Δx, а потому $\varphi'(x_0) = 0$ (предполагается, что производная существует).

В формулировке теоремы Лагранжа используются понятия и непрерывности функции, и производной. Эти понятия не являются независимыми друг от друга.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. роль предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ выполняет само значение функции $f(x_0)$. Соотношения $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ и

$$\lim_{x\to x_0} \Delta y = \lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$$

эквиваленты. Следовательно, выполнение условия $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$ является равносильным определением непрерывности функции в точке x_0. В этом случае говорят: “Функция непрерывна в точке x_0, если *бесконечно малому* приращению аргумента Δx ($\Delta x \to 0$) отвечает *бесконечно малое* приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ($\Delta y \to 0$)”.

Из существования конечной производной в точке x_0 следует непрерывность соответствующей функции в точке x_0. Действительно, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, то в некоторой окрестности предельной точки аргумента (в данном случае нуля), т.е. при достаточно малых $|\Delta x|$ ($\Delta x \neq 0$), значение функции, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ограничено некоторым числом $L > 0$ $\left(\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leq L\right)$. Обоснование этого факта хотя и просто, но заслуживает отдельного рассмотрения (см., например, [2]). Следующая из ограниченности $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ оценка $|\Delta y| \leq L\,|\Delta x|$ показывает, что за счет выбора достаточно малых значений $|\Delta x|$ можно сделать $|\Delta y|$ сколь угодно малым. Это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если существует конечная производная $f'(x_0)$.

Обратное, вообще говоря, не верно: функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Так, функция $y = f(x) = |x|$ непрерывна при любом значении x_0, при $x_0 = 0$ имеем

$$\Delta y = \begin{cases} \Delta x & \text{при} \quad \Delta x > 0; \\ -\Delta x, & \text{при} \quad \Delta x < 0, \end{cases} \qquad \text{т.е.} \quad |\Delta y| = |\Delta x|\,.$$

Однако в этой точке ($x_0 = 0$) функция $y = f(x) = |x|$ не имеет производной. Действительно, в этом случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1 & \text{при} \quad \Delta x > 0; \\ -\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = -1 & \text{при} \quad \Delta x < 0, \end{cases} \qquad \text{т.е.} \quad |\Delta y| = |\Delta x|\,,$$

и за счет приближения $|\Delta x|$ к нулю дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не может приближаться ни к какому пределу. Следовательно, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$ ($x_0 = 0$).

Доказанное означает, что условия выполнимости теоремы Лагранжа могут быть формально ослаблены. Достаточно требовать непрерывность функции $f(x)$ лишь в конечных точках отрезка $[a;b]$ (правостороннюю непрерывность в точке a и левостороннюю в точке b), так как непрерывность функции на интервале $(a;b)$ следует из существования производной $f'(x)$ на этом интервале.

Теперь, после предварительного рассмотрения ряда вопросов, приступим к завершающему этапу доказательства теоремы Лагранжа.

Уравнение прямой, содержащей хорду AB (см. рис. 1), записывается в виде

$$Y = f(a) + k(x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Это уравнение прямой, проходящей через точку $A(a; f(a))$, с угловым коэффициентом $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Рассматривается функция $\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, представляющая собой разность ординат графика функции $f(x)$ и хорды AB, соответствующих аргументу (абсциссе) x. Так как точки A и B одновременно принадлежат и графику функции $f(x)$ и хорде AB, то $\psi(a) = \psi(b) = 0$, (это, впрочем, легко проверить непосредственно, прямой подстановкой $x = a$ и $x = b$ в выражение для $\psi(x)$).

Если $\psi(x) \equiv 0$, то $f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, и тогда в любой точке x из интервала $(a;b)$ получаем $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. В этом случае роль точки $\bar{x}$ из формулировки теоремы Лагранжа может играть любая точка из интервала $(a;b)$. Это случай тривиальный.

Пусть теперь на интервале $(a;b)$ есть точки, где $\psi(x) > 0$ (этот случай соответствует рисунку 1). Здесь принципиальную роль играет далеко не просто доказываемая теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на отрезке $[a;b]$ своих наибольшего и наименьшего значений[2]. Доказательство этой теоремы см, например, в [2]. На основании теоремы Вейерштрасса в некоторой точке $\bar{x}$ из $[a;b]$ достигается наибольшее значение функции $\psi(x)$. Ясно, что $\psi(\bar{x}) > 0$, так как по предположению на $[a;b]$ есть точки, где $\psi(x) > 0$. Точка $\bar{x}$ принадлежит интервалу $(a;b)$, ведь $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Обратимся снова к рисунку 1. Точка $M(\bar{x}; f(\bar{x}))$ наиболее удалена от хорды AB, так как $\psi(\bar{x}) = |MK|$, а расстояние от точки M до хорды AB, т. е. длина отрезка MN, связана с $|MK|$ соотношением $|MN| = |MK| \cos\alpha$, где α – угол между осью абсцисс и прямой, содержащей хорду AB, $\cos\alpha = const \neq 0$.

В окрестности точки $\bar{x}$ точки графика функции $f(x)$ лежат не выше прямой, проходящей через точку M и параллельной хорде AB, и потому по доказанному выше $f'(\bar{x}) = k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Иначе в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ по разные стороны от нее соответствующие точки графика функции $f(x)$ лежали бы по разные стороны от этой прямой.

Целесообразно предложить учащимся провести доказательство теоремы Лагранжа в случае, если на интервале $(a;b)$ нет точек, где $\psi(x) > 0$, но есть точки, где $\psi(x) < 0$. Здесь можно воспользоваться существованием точки $\bar{x}$ (по той же теореме Вейерштрасса), где на отрезке $[a;b]$ достигается наименьшее значение функции $\psi(x)$, и рассмотреть функцию $\nu(x) = -\psi(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x)$.

Простым следствием теоремы Лагранжа является **формула Лагранжа**.

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке(имеется в виду любое из девяти множеств: $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(a;b)$, $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$, $[a;\infty)$, $(a;\infty)$, $(-\infty;\infty)$), и во внутренних точках промежутка существует конечная производная $f'(x)$, то для любых точек x_1, x_2 этого промежутка справедливо соотношение

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \tag{1}$$

[2]**Карл Теодор Вильгемльм Вемйерштрасс** (1815 — 1897) — выдающийся немецкий математик, “отец современного анализа”. Исследования Вейерштрасса существенно обогатили математический анализ, теорию специальных функций, вариационное исчисление, дифференциальную геометрию и линейную алгебру.

где ξ — некоторая внутренняя точка отрезка, концами которого являются точки x_1 и x_2.

Доказательство. Пусть сначала $x_1 < x_2$. Функция $f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа, и потому существует точка ξ $(x_1 < \xi < x_2)$ такая, что $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Освобождаясь от знаменателя, получим соотношение (1).

Если $x_1 > x_2$, то $f(x_1)-f(x_2) = f'(\xi)(x_1-x_2)$, где ξ — некоторая точка из интервала $(x_2; x_1)$. Умножая это равенство на (–1), получим соотношение (1).

Формула Лагранжа является рабочим инструментом исследования функций.

II. Применение теоремы Лагранжа (формулы Лагранжа) к исследованию функций

1. Условие постоянства функции

Для того, чтобы функция, заданная на промежутке (учтем, что здесь 9 случаев), *была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы во внутренних точках этого промежутка функция имела производную, равную нулю, а на концах промежутка, если таковые имеются, была непрерывной.*

Необходимость. Имеем $y = f(x) = c = const$. Тогда указанное условие автоматически выполнено, так как производная постоянной есть ноль.

Достаточность. Указанное выше условие выполнено.

Выбираем и фиксируем произвольную точку x_0 на промежутке. Обозначаем $f(x_0)$ значение функции при аргументе x_0, $f(x)$ — значение этой функции в произвольной точке x этого промежутка, отличной от x_0. Используя формулу Лагранжа, получаем: $f(x)-f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0) = 0$, так как ξ — внутренняя точка промежутка, где $f'(x) = 0$.

Следовательно, $f(x) = f(x_0)$ для любой точки рассматриваемого промежутка.

2. Теорема о первообразной

Функция $f(x)$ задана на некотором промежутке. Функция $F(x)$, заданная на этом же промежутке, называется *первообразной* для функции $f(x)$, если во всех внутренних точках промежутка $F'(x) = f(x)$, а на концах промежутка, если таковые имеются, функция $F(x)$ непрерывна (имеется в виду непрерывность слева или справа).

Теорема о первообразной формулируется следующим образом.

Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то $F(x)+C$ (C— произвольная постоянная) есть общий вид всех первообразных функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке.

Здесь два утверждения.

а) Если $F(x)$ — первообразная, то при любой постоянной C функция $F(x)+C$ также является первообразной. Это очевидно, так как производная постоянной есть ноль: $[F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

б) Пусть $Y(x)$ — какая-то иная первообразная для функции $f(x)$, т.е. $Y'(x) = f(x)$. Рассматриваем функцию $\varphi(x) = Y(x) - F(x)$. Эта функция удовлетворяет условию постоянства функции.

Действительно, $\varphi'(x) = [Y(x) - F(x)]' = Y'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Следовательно, $Y(x) - F(x) = C$ и $Y(x) = F(x) + C$. Таким образом, если $F(x)$ и $Y(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то существует определенная постоянная C, при которой $Y(x) = F(x) + C$.

3. Признак монотонности функции

Если функция $f(x)$, заданная на промежутке, во внутренних точках промежутка имеет положительную производную $f'(x) > 0$, а на концах промежутка (если таковые входят) непрерывна, то на этом промежутке функция строго монотонно возрастает.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$ — какие-либо точки этого промежутка, Используя формулу Лагранжа, имеем: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$, так как $f'(\xi) > 0$ (ξ— внутренняя точка промежутка) и $x_2 - x_1 > 0$. Следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$.

Аналогично доказывается, что *если во внутренних точках промежутка производная отрицательна, то для всех* $x_1 < x_2$ *получаем* $f(x_1) > f(x_2)$, *т.е. функция строго монотонно убывает.*

4. Достаточные условия точек максимума и минимума

Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна, а в некоторой проколотой окрестности точки x_0 существует производная $f'(x)$, имеющая противоположные знаки по разные стороны от x_0. Тогда, если слева от x_0 производная принимает положительные значения, $f'(x) > 0$, а справа от x_0 отрицательные, $f'(x) < 0$, то x_0 — точка максимума функции, если же слева $f'(x) < 0$, а справа $f'(x) > 0$, то точка x_0 является точкой минимума.

Доказательство. Пусть имеет место первое условие. На рисунке 3 изображена указанная проколотая окрестность точки x_0 и отмечены знаки производной в левой и правой частях окрестности.

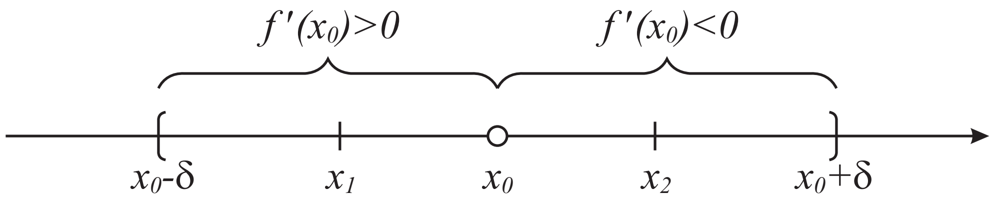


Рисунок 3

На полуинтервале $(x_0 - \delta; x_0]$ выполнено условие монотонного возрастания функции, и потому для любой точки x_1 этого полуинтервала, $x_1 < x_0$, получаем неравенство $f(x_1) < f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0; x_0 + \delta)$ выполнено условие монотонного убывания функции, и потому для любой точки x_2 этого полуинтервала, $x_2 > x_0$, имеем $f(x_0) > f(x_2)$. Таким образом, значение функции $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим значением функции во всей окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0.

Точно так же доказывается, что во втором случае, когда производная меняет знак с (–) на (+) при переходе из левой части проколотой окрестности точки x_0 в правую, значение функции $f(x)$ в точке x_0 является наименьшим значением функции $f(x)$ во всей окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Заметим, что при выполнении указанного достаточного условия для точек максимума или минимума, в точке x_0 ненулевой производной $f'(x_0) \neq 0$ быть не может, так как в противном случае точка x_0 была бы точкой возрастания или убывания функции $f(x)$, что отрицает наличие максимума или минимума. В точке x_0 возможны два случая — либо $f'(x_0) = 0$, либо производная $f'(x_0)$ не существует. Рисунки 4.1 и 4.2 иллюстрируют две эти возможности для точки максимума.

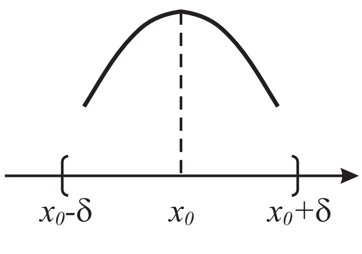


Рисунок 4.1

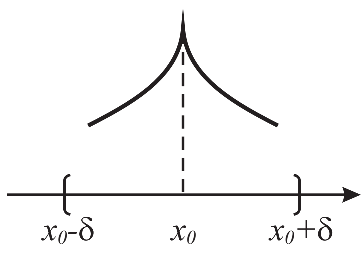


Рисунок 4.2

5. Условия выпуклости графика функции

О выпуклости вниз графика функции $y = f(x)$ заданной на промежутке, говорят в том случае, *если для произвольно фиксированных аргументов a и b ($a < b$) этого промежутка точки $M = M(x; f(x))$ графика функции при $x \in (a; b)$ расположены ниже, чем хорда AB, где* $A = A(a; f(a))$, $B = B(b; f(b))$ (см. рис. 5.1, 5.2, 5.3).

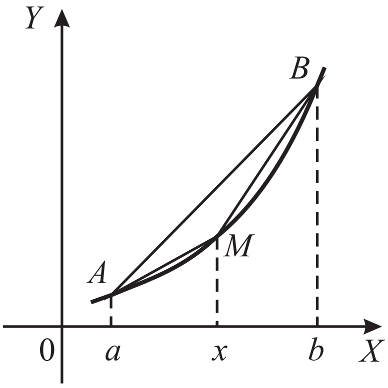


Рисунок 5.1

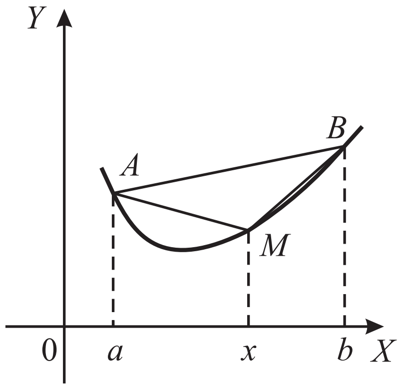


Рисунок 5.2

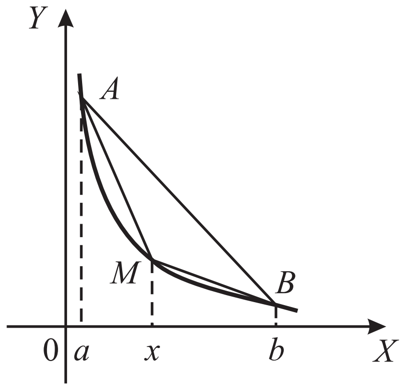


Рисунок 5.3

Если же точки $M = M(x; f(x))$ при $x \in (a; b)$ расположены выше хорды AB, говорят о выпуклости графика функции вверх (см. рис. 6.1, 6.2, 6.3).

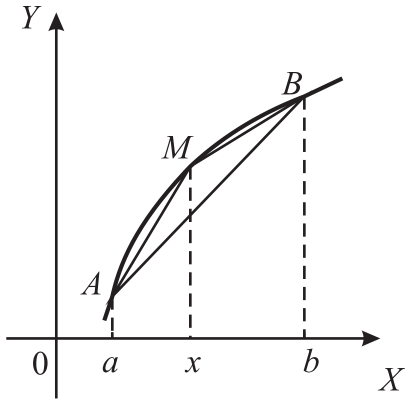


Рисунок 6.1

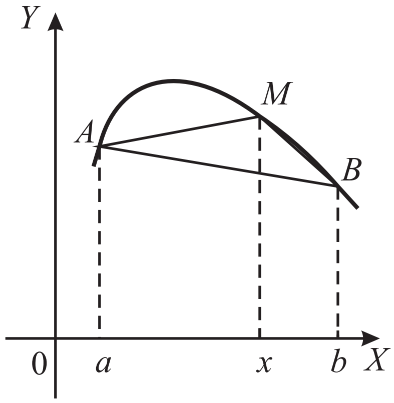


Рисунок 6.2

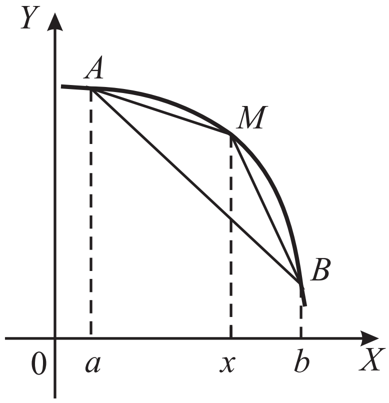


Рисунок 6.3

Рассмотрим более подробно случай выпуклости вниз. Графики функций на рисунках 5.1, 5.2, 5.3 отличаются тем, что на первом из них функция монотонно возрастает на $[a; b]$; на втором — частично убывает, частично возрастает; на третьем — монотонно убывает. Неизменным является то, что угловой коэффициент прямой AM меньше, чем угловой коэффициент прямой MB ($k_{AM} < k_{MB}$). Действительно, $a < x < b$, $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$, и потому точка M оказывается ниже прямой AB тогда и только тогда, когда поворот от направления вектора $\overline{AM}$ к направлению вектора $\overline{MB}$ происходит **против** часовой стрелки (имеется в виду поворот на угол, меньший развернутого)[3]. Таким образом, *одновременное выполнение соотношения $k_{AM} < k_{MB}$ для всех точек $M(x; f(x))$ при $x \in (a; b)$ является необходимым и достаточным условием выпуклости графика функции вниз.*

На основании теорема Лагранжа имеем:

$$k_{AM} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_1), \quad \text{где} \quad \xi_1 \in (a; x), \quad \text{и} \quad k_{MB} = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\xi_2), \quad \text{где} \quad \xi_2 \in (x; b).$$

[3] В [1] на с. 97–99 подробно рассматривается вопрос о связи направления вращения прямой и характера изменения ее углового коэффициента.

Ясно, что $\xi_1 < \xi_2$. Таким образом, монотонное возрастание производной $f'(x)$ на промежутке, где определена функция $f(x)$, а следовательно, на любом интервале $(a;b)$ из этого промежутка, обеспечивает выпуклость вниз графика функции. В свою очередь, строго монотонное возрастание производной $f'(x)$ гарантируется положительностью производной $(f'(x))' = f''(x)$. Итак, *для того чтобы график функции* $f(x)$, *заданной на промежутке, имел выпуклость вниз, достаточно выполнения условия* $f''(x) > 0$ *во внутренних точках этого промежутка.*

Аналогично рассматривается случай выпуклости вверх (см. рис. 6.1, 6.2, 6.3). В этом случае *необходимым и достаточным условием того, что точка* M *расположена выше хорды* AB, *является неравенство* $k_{AM} > k_{MB}$. *Достаточным условием выпуклости вверх графика функции* $f(x)$ *является отрицательность* $f''(x) < 0$, *влекущая в свою очередь убывание производной* $f'(x)$ *и соотношение* $k_{AM} > k_{MB}$.

Применим полученные результаты к исследованию выпуклости графиков некоторых основных элементарных функций.

Степенная функция

$$y = f(x) = x^{\mu}, \quad x \in (0;\infty), \quad \mu \in (-\infty;\infty)$$

$$f'(x) = \mu x^{\mu-1}; \quad f''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}.$$

В этом случае $x^{\mu-2}$ — всегда положительная величина, и знак $f''(x)$ определяется знаком произведения $\mu(\mu-1)$. Так как при $\mu < 0$ и при $\mu > 1$ получаем $f''(x) > 0$, значит, график имеет выпуклость вниз. При $0 < \mu < 1$ имеем $f''(x) > 0$, значит, график функции имеет выпуклость вверх (см. рис. 7).

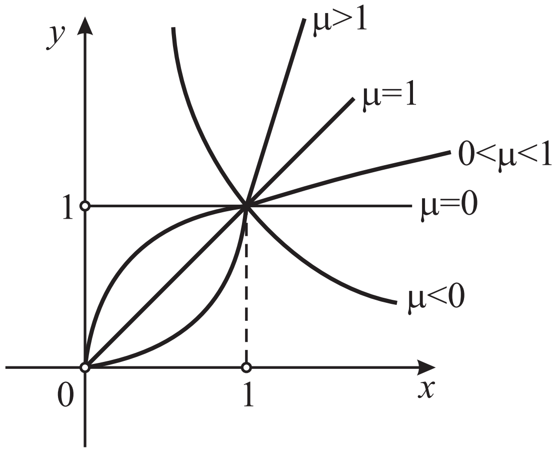


Рисунок 7

Показательная функция

$$y = f(x) = a^{x}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in (-\infty;\infty)$$

$$f'(x) = a^{x}\ln a; \quad f''(x) = a^{x}\ln^{2} a.$$

$f''(x) > 0$, следовательно, график показательной функции имеет выпуклость вниз (см. рис. 8).

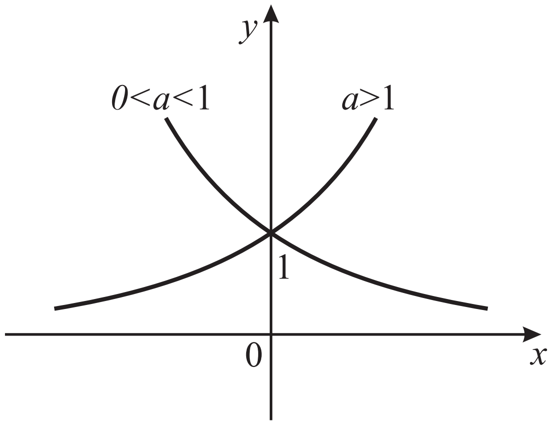


Рисунок 8

Логарифмическая функция

$$y = f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in (0; \infty)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

При $0 < a < 1$ имеем $\ln a < 0$, следовательно, $f''(x) > 0$, значит, график имеет выпуклость вниз. При $a > 1$ имеем $\ln a > 0$, $f''(x) < 0$, и значит, график имеет выпуклость вверх (см. рис. 9).

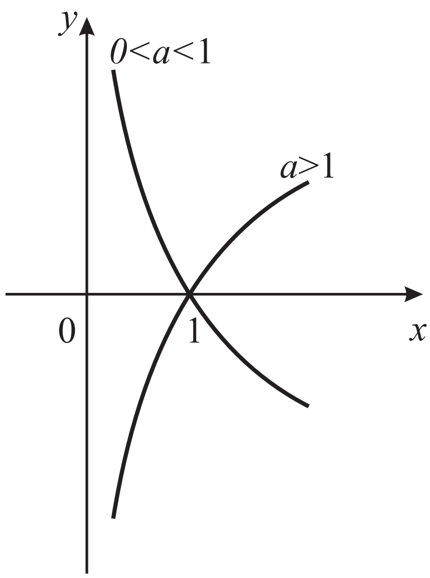


Рисунок 9

Тангенс

$$y = f(x) = tgx, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

При $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ получаем $f''(x) < 0$, т. е. график имеет выпуклость вверх. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ график имеет выпуклость вниз, т. к. $f''(x) > 0$ (см. рис. 10).

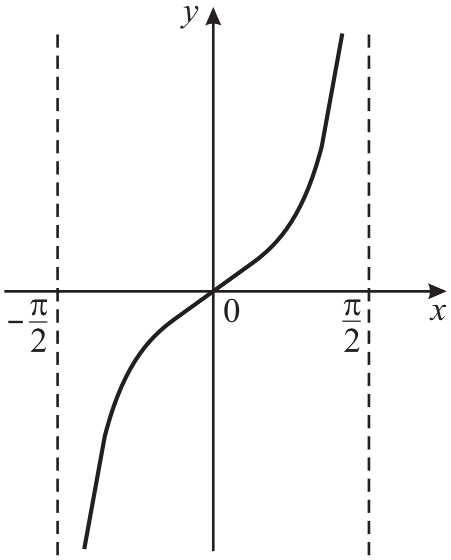


Рисунок 10

В книге [1] исследование выпуклости графиков основных элементарных функций проведено без использования понятия производной. Признак характера выпуклости, связанный со знаком второй производной функции $f''(x)$, полученный на основе теоремы Лагранжа, несоизмеримо упрощает такое исследование.

В этой статье доказательство теоремы Лагранжа намеренно проведено не самым быстрым способом, чтобы сконцентрировать вокруг теоремы Лагранжа основные сведения из начал анализа, связанные с понятиями предела, непрерывности, производной, которые целесообразно изучать в целях общего образования. Важно, чтобы эти сведения воспринимались как единое целое, открывающее широкие возможности в исследовании функций. На наш взгляд, отсутствие теоремы Лагранжа (формулы Лагранжа) в школьной математике ставит под сомнение целесообразность включения элементов анализа в содержание среднего образования. Разумеется, уровень рассмотрения вопроса должен быть разным, здесь это уровень классов с углубленным изучением математики.

Литература

[1] Цукерман В. В. Действительные числа и основные элементарные функции. — М. : ИКАР, 2010.

[2] Гераськина Е. В. Об ограниченности функции, непрерывной на отрезке // Математическое образование. — 2011. — №2(58).

Гераськина Елена Викторовна,
учитель математики ГОУ СОШ с углубленным
изучением отдельных предметов №1367, г. Москва,
кандидат педагогических наук.

Email: geraskinae@gmail.com

Цукерман Виталий Владимирович,
профессор кафедры математики и физики
Московского государственного гуманитарного
университета им. М. А. Шолохова,
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: tsuckerman@front.ru

Две заметки по математическому анализу

С. В. Шведенко

В первой заметке автор показывает, как обойти порочный круг, который обычно вкрадывается в традиционный вывод первого замечательного предела. Вторая заметка посвящена анализу происхождения и обоснованности употребления терминов "предел функции по Коши" и "предел функции по Гейне".

1. К выводу "первого замечательного предела"

Имеется в виду предельное соотношение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, точнее, его традиционное доказательство, начальная часть которого — установление при $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ неравенств $\sin|x|<|x|<\operatorname{tg}|x|$.

Имея эти неравенства, делением на $\sin|x|$ и последующим снятием знака модуля (ввиду *четности* возникающих дробей), получают неравенства $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, записав которые в виде $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ (где по-прежнему $0<|x|<\frac{\pi}{2}$), переходят к пределу при $x\to 0$, получая (с учетом того, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$) требуемый результат: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Что же касается исходных неравенств $\sin|x|<|x|<\operatorname{tg}|x|$ $\left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right)$, стандартное их обоснование базируется на интерпретации величины $\frac{|x|}{2}$ как *площади* изображенного на рисунке 1 *сектора OAB* единичного круга, опирающегося на дугу длины $|x|$, а величин $\frac{\sin|x|}{2}$ и $\frac{\operatorname{tg}|x|}{2}$ — как площадей соответственно *равнобедренного треугольника OAB* и *прямоугольного треугольника OCB*.

Данное обоснование (проводимое в рамках начальной части курса математического анализа) содержит классическую ошибку *"порочного круга"* (*"circulus vitiosus"*), которую многие видят, но предпочитают не замечать. Именно, считать *площадь кругового сектора OAB* равной $\frac{|x|}{2}$, тогда как в соответствии с *определением* — тем, которым располагают выпускники школы, приступающие к изучению анализа, — эта площадь есть *предел* при $n\to+\infty$ величины $n\,\frac{1}{2}\sin\frac{|x|}{n}$ (суммы *площадей треугольников*, имеющих общей *вершиной* центр окружности, а *основаниями* звенья правильной n-звенной *ломаной*, вписаной в указанную *дугу*), значит при выводе предельного соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ пользоваться *самим этим соотношением*, что и есть "порочный круг".

Логически корректный вывод упомянутых неравенств может быть основан на сравнении *длин* изображенных на рисунке 1 (a):

1) хорды $B'B$ (перпендикулярной к горизонтальной оси), стягивающей *дугу $B'AB$* этой окружности длины $2|x|<\pi$, и

2) ломаной $B'CB$, звенья которой *касаются* единичной окружности в точках B' и B.

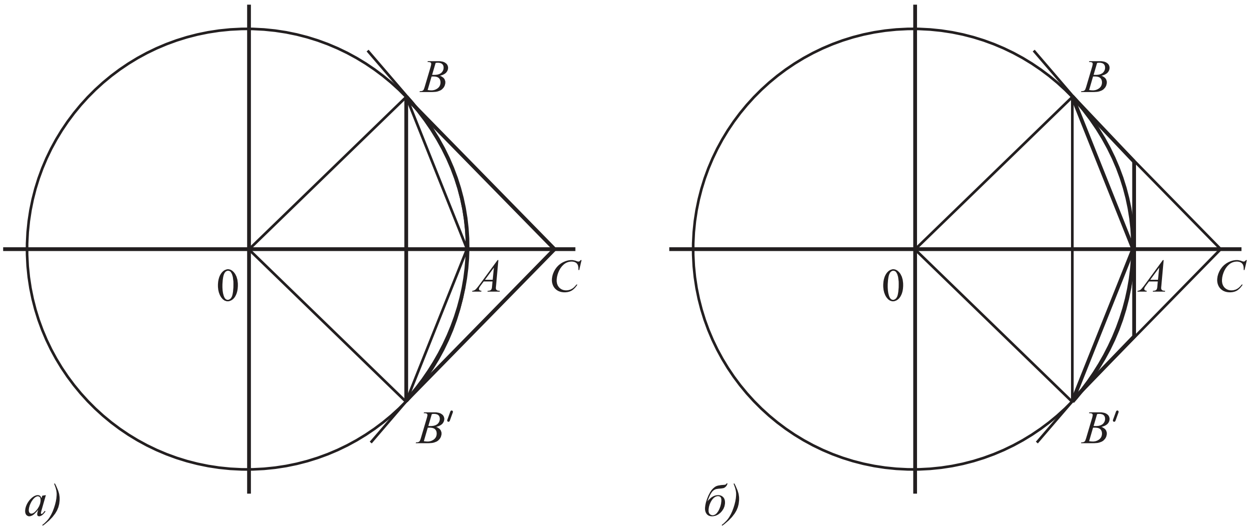


Рис. 1

Стандартный процесс последовательного “удвоения” числа звеньев, начало которого проиллюстрировано на рисунке 1 (а $\to$ б), приводит к последовательностям:

1) вписанных в дугу $B'AB$ *правильных ломаных* (с числом звеньев $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$), *длины* l_n которых образуют[1] *возрастающую* последовательность $2\sin|x| = l_0 < l_1 < l_2 < \cdots$,

2) описанных около этой же дуги *ломаных* (с числом звеньев $x_0 = 2,\ x_n = 2x_{n-1} - 1$), *длины* $\bar{l}_n$ которых образуют[1] *убывающую* последовательность $2\,\mathrm{tg}|x| = \bar{l}_0 > \bar{l}_1 > \bar{l}_2 > \cdots$

Так как $l_n < \bar{l}_n$, а $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 2|x|$ (*длина* дуги $B'AB$), следует вывод: $\sin|x| < |x| < \mathrm{tg}|x|$ при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

2. О терминах: “предел функции по Коши”, “предел функции по Гейне”

Непременный пункт программы вузовского курса математического анализа — усвоение студентами двух определений *предела функции* (в точке) вместе с доказательством их эквивалентности.

Согласно исходному (базовому) определению “*число b есть предел функции $y = f(x)$ в точке*[2] a (обозначение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), *если для любого положительного числа (традиционно обозначаемого ε) существует отвечающее ему положительное число (обозначаемое δ) со свойством: для любого отличного от a значения переменной x, принадлежащего δ-окрестности точки a (т. е. удовлетворяющего неравенствам $0 < |x - a| < \delta$), выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$*”.

На популярном “диалекте” символического языка L_1Real (языка логики *первого порядка*, в котором *предметными переменными* служат *действительные числа*) данное определение записывается *формулой*[3]

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x\,(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Согласно другому определению *предела функции* запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ означает: “*для любой последовательности $\{x_n\}$ отличных от a значений переменной x, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ (значений функции в точках x_n) сходится к числу b*”.

[1] В силу известного свойства сторон треугольника: *сумма длин любых двух его сторон больше длины третьей его стороны.*

[2] Или *при x, стремящемся к точке.*

[3] Соответственно *ложность* утверждения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, выражается *формулой*

$$\exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x\,\big((0 < |x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - b| \geqslant \varepsilon \vee \neg!f(x))\big)$$

(*“существует такое положительное число ε, что каким бы ни было положительное число δ, существует значение переменной x, для которого $0 < |x - a| < \delta$, но при этом либо $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$, либо значение $f(x)$ не определено”*).

Записать это определение на языке L_1Real не удается, поскольку в языках *первого порядка* не предусмотрено действие кванторов по *переменным функциям* (в данном случае *переменным последовательностям*).

В российской (а точнее, московской) практике преподавания математического анализа распространена (но отнюдь не всеми поддерживается) терминология, в соответствии с которой первое из приведенных определений есть *определение предела функции по Коши*, а второе — *определение предела функции по Гейне*.

Предпринятая автором попытка выяснить степень обоснованности этой терминологии обнаружила следующее.

1. Определение *предела функции*[4] (в точке) по первому способу — через *неравенства* с ε и δ — ввел в математический обиход Вейерштрасс (Weierstrass Karl, 1815–1897) в своих знаменитых лекциях 1856–1861 гг. в берлинском университете и промышленном институте (Gewerbeinstitut); подробно об этом можно прочитать, например, в [1] и [2].

2. В работах Коши (Cauchy Augustin-Louis, 1789–1857) явно сформулированного определения *предела функции* нет. Приводится (и неоднократно повторяется) лишь следующее определение *предела переменной*: *“Если значения, последовательно придаваемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению так, что отличие от него становится сколь угодно малым, это последнее значение называют пределом всех остальных ... Мы будем обозначать предел, к которому сходится данная переменная, абревиатурой lim, ставя ее перед этой переменной”*[5]. Других определений *предела* Коши не формулирует.

Другое дело, что при обсуждении[6] *предела* конкретной величины $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ при стремлении i к нулю[7], он дал следующее *толкование* того, как следует понимать *предел* этой величины: *“Обозначим δ, ε два очень маленьких числа, первое выбранное таким, что для значений i, абсолютная величина которых меньше, чем δ, отношение $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ всегда остается большим, чем $f'(x)-\varepsilon$, и меньшим, чем $f'(x)+\varepsilon$”*[8]. Лишь благодаря Вейерштрассу данное *толкование* того, как надо понимать *предел функции*, стало *определением* этого понятия (с сохранением по сей день употребления в его формулировке тех же греческих букв ε и δ).

Следует отметить, что излагая это *толкование*, Коши никак не обозначил ни его новизны, ни своего авторства, хотя был весьма щепетилен в отношении своего приоритета в математических достижениях.

3. Взгляд немецкого математика Гейне (точнее, Ха́йне; Heine Heinrich Eduard, 1821–1881) на понятие *непрерывности* функции в *точке* (*предел* функции как таковой в его работах не обсуждается) ясен из следующих фрагментов его статьи “Элементы теории функций” (“Die Elemente der Functionenlehre”) в “Журнале чистой и прикладной математики” (“Journal für die reine und angewandte Mathematik”) за 1872 г. (т. 74, с. 182):

“Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной при отдельном конкретно взятом значении $x = X$, если для любой сколь угодно малой заданной величины ε существует такое положительное число η_0, что ни для какой положительной величины η, меньшей, чем η_0, абсолютное значение величины $f(X \pm \eta) - f(X)$ не превосходит ε”[9].

---

[4] А фактически ее *непрерывности* — выполнении соотношения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

[5] В оригинале (см., например, [3], с. 4): *“Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ... Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation lim placée devant cette variable”*.

[6] В опубликованном в 1823 г. первом томе его Résumé des leçons donneés à l'École Royale Polytechnique ([4], с. 44).

[7] Разумеется, i здесь служит обозначением *действительной переменной*, а не *мнимой единицы*.

[8] В оригинале ([4], с. 44): *“Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ, le rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ reste toujours supérieure à $f'(x)-\varepsilon$ et inférieure à $f'(x)+\varepsilon$”*.

[9] В оригинале: *“Definition. Eine Function $f(x)$ heisst bei einem bestimmten einzelnen Werthe $x=X$ continuirlich, wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ε, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existirt, dass für keine positive Crösse η, die kleiner als η_0 ist, der Zahlwerth von $f(X\pm\eta)-f(X)$ das ε überschreitet”*.

И далее в сноске на той же с. 182: *“Утверждение, что функция является непрерывной в том и только в том случае, когда для любой последовательности* [x_1, x_2 *и т. д., сходящейся*] *к* X, *величина* $f(X) - f(x_n)$ *становится сколь угодно малой, а также доказательство* [*этого утверждения*] *я заимствовал у г-на Кантора”*[10].

4. Термины *предел* (*непрерывность*) *“по Коши”* и *“по Гейне”* вошли в обиход московских математиков скорее всего под воздействием руководителя московской школы теории функций Николая Николаевича Лузина (1883–1950)[11], указания которого сформировали стиль и терминологические предпочтения его учеников, учеников учеников и их преемников.

Разумеется, условность тех или иных терминов, частое их несоответствие исторической правде — дело обычное не только в математике. В данном же случае удивляет другое: терминология, не получившая признания в авторитетной математической литературе (в частности, ее не употребляет Г.М.Фихтенгольц в [6]), активно (если не сказать агрессивно) пропагандируется заметной частью вузовских преподавателей.

Литература

[1] Bottazini U. The Higher Calculus. A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass. N.Y.-Tokyo: Springer-Verlag, 1986.

[2] Dugac P. Eléments d’analyse de Karl Weierstrass. Archive for History of Exact Sciences 10 (1971), 41–176.

[3] Cauchy A.-L. Cours d’Analyse de l’École Royale Polytechnique. Paris, 1821.

[4] Cauchy A.-L. Œuvres complètes. Sér. II, t. IV. Paris, 1899.

[5] Лузин Н.Н. Теория функций действительного переменного. М: Учпедгиз, 1940.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Наука, 1966.

Шведенко Сергей Владимирович,
доцент кафедры высшей математики
Национального исследовательского ядерного
университета (МИФИ),
кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

[10] В оригинале: *“Den Satz, dass die Function nur und immer continuirlich ist, wenn* $f(X) - f(x_n)$, *für jede Zahlenreiche von* X *beliebig klein wird, mit seinem Beweise, entlehne ich dem Herrn Cantor”.*

[11] Обсуждаемые термины можно найти в его учебнике для педвузов [5].

Аналитическое продолжение изучения элементарной геометрии в педагогическом вузе

Е. В. Потоскуев

В статье речь идет о важном аспекте профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе. При изучении объединенного курса высшей геометрии методически целесообразно в раздел “Аналитическая геометрия и линейная алгебра” модульно включать задачный материал школьной стереометрии о взаимном расположении прямых, плоскостей и сфер, “посмотреть” на элементарную геометрию “с точки зрения высшей геометрии”, как об этом говорил великий немецкий математик Феликс Клейн (1849–1925).

Профильное обучение математике в старшей школе требует такого уровня профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе, при котором он приобретает знания как программного материала курса геометрии, так и методических особенностей его изучения в профильных классах математической направленности.

Многолетний опыт работы в педвузе позволяет сделать вывод: студенты первого курса математического факультета имеют различный уровень геометрической культуры, так как до поступления в педвуз изучали геометрию в разных школах на различных уровнях сложности и логической строгости. Поэтому геометрическую и методическую подготовку будущего учителя математики целесообразно начинать с первого курса обучения. Достижению этой цели может способствовать модульное наполнение задачного материала разделов аналитической геометрии (первый курс) соответствующим материалом школьной геометрии, например, разделами о взаимном расположении прямых, плоскостей и сфер в пространстве. При этом становится возможным “оживить” изучение “Координатного метода в пространстве”, преобразовав его из “сухого” аналитического решения систем уравнений и нахождения по формулам искомых координат точек, длин и углов в мощный аппарат развития пространственного воображения, логической культуры будущего учителя математики.

Прежде чем приступать к решению стереометрической задачи координатным методом (методом аналитической геометрии), будущему учителю математики необходимо сначала решить эту задачу конструктивно, геометрически. Иначе говоря, необходимо составить “геометрический алгоритм” ее решения, что естественным образом связано с повторением и углублением материала школьной геометрии.

Рассмотрим, например, решение следующих задач, методически ориентированных на повышение качества профессиональной подготовки будущего учителя математики.

Задача 1. Найдите длину линии пересечения двух сфер:
$x^2+y^2+z^2-2x+6y-10z-161=0$ и $x^2+y^2+z^2+6x+12y+14z-131=0$.

Решение. После выделения полных квадратов двучленов с переменными x и y в данных уравнениях они приводятся к виду, соответственно:
$(x-1)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=196$ и $(x+3)^2+(y+6)^2+(z+7)^2=225$.
Из этих уравнений следует, что первое из них задает сферу радиуса $R_1=14$ с центром $A(1;-3;5)$, а второе — сферу радиуса $R_2=15$ с центром $B(-3;-6;-7)$.

Так как расстояние $AB=\sqrt{(1+3)^2+(-3+6)^2+(5+7)^2}=13$ между центрами данных сфер меньше суммы $R_1+R_2=29$, то эти сферы пересекаются.

Пусть C — одна из точек пересечения сфер. Тогда получаем ΔABC, в котором $AB=13$, $AC=14$, $BC=15$. При вращении треугольника ABC вокруг AB точка C “пробежит” окружность, радиус которой равен высоте CH этого треугольника. Находим:

$$CH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\frac{2\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}}{13}=\frac{168}{13}=12\frac{12}{13},$$

значит, длина окружности пересечения данных сфер равна $2\pi\cdot\frac{168}{13}=25\frac{11}{13}\pi$.

Ответ: $25\frac{11}{13}\pi$.

Задача 2. Напишите уравнение плоскости, касающейся поверхности
$x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 0$ в точке $M(-2; -2; 4)$.

Решение. Исходное уравнение преобразуется к виду $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$, из которого следует, что данная поверхность является сферой с центром в точке $A(-1; -1; 2)$ и радиусом $\sqrt{6}$.

Убеждаемся, что точка $M(-2; -2; 4)$ расположена на данной сфере (координаты точки M удовлетворяют уравнению сферы). Далее учитываем, что касательная плоскость к сфере перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания (школьная стереометрия). Поэтому в качестве вектора нормали плоскости, касательной к данной сфере в точке M, можно принять вектор $\overrightarrow{MA}(1; 1; -2)$. Тогда искомое уравнение этой плоскости имеет вид:

$(x+2) + (y+2) - 2(z-4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z + 12 = 0.$

Ответ: $x + y - 2z + 12 = 0$.

Задача 3. Напишите уравнение сферы с центром $A(1; 1; 2)$, касающейся сферы
$x^2 + y^2 + z^2 = 54$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 54$ задает сферу S с центром $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 3\sqrt{6}$. Расстояние OA между центром этой сферы и центром A касающейся ее сферы равно $\sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} < 3\sqrt{6} = R$. Это означает, что центр A расположен внутри шара, поверхностью которого служит данная сфера S, поэтому эти сферы могут иметь только внутреннее касание.

Пусть линия центров OA касающихся сфер пересекает данную сферу S в точках B и C. Если $AB = OB - OA = 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$, то $AC = OC + OA = 3\sqrt{6} + \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$. Значит, существует две сферы с центром A, касающиеся сферы S: одна из них касается данной сферы в точке B, её радиус равен $2\sqrt{6}$, а уравнение имеет вид $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 24$; другая сфера касается сферы S в точке C, её радиус равен $4\sqrt{6}$, она задается уравнением $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 96$.

Ответ: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 24$; $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 96$.

Задача 4. Напишите уравнение множества точек пространства, образованного центрами всех сфер радиуса 5, касающихся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Прежде чем приступить к выводу искомого уравнения, необходимо представить предложенную в задаче "геометрическую картинку": "увидеть", кроме данной сферы S с центром O (0;0;0) радиуса 2, касающиеся её в некоторой точке C сферы S_1 и S_2; сфера S_1 с центром A радиуса 5 касается сферы S внешним образом, а сфера S_2 с центром B радиуса 5 — внутренним образом.

Теперь необходимо вообразить, что когда точка C касания всех трех сфер "заметает" ("пробегает") сферу S, вместе с ней перемещаются сферы S_1 и S_2, а, значит и их центры A и B. При этом, центр A "заметает" множество M_1 всех точек пространства, равноудаленных от точки O на расстояние $OA = OC + CA = 2 + 5 = 7$, а центр B — множество M_2 всех точек пространства, равноудаленных от точки O на расстояние $OB = BC - OC = 5 - 2 = 3$. Это означает, что множество M_1 — сфера с центром O и радиусом 7, а множество M_2 — сфера с центром O и радиусом 3. А так как точка O — начало координат, то эти сферы имеют уравнения соответственно $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Тогда искомое множество точек, являющееся объединением этих сфер, задается уравнением $(x^2 + y^2 + z^2 - 49)(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 0$.

Ответ: $(x^2 + y^2 + z^2 - 49)(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 0$.

Задача 5. Лежат ли точки $A(-2; -13; 3)$, $B(1; 4; 1)$, $C(-1; -1; -4)$, $O(0; 0; 0)$ в одной плоскости?

Решение. а) Конечно, можно воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки, и составить уравнение плоскости BOC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - y - z = 0.$$

Далее, подстановкой в это уравнение координат точки $A(-2;-13;3)$ убеждаемся: $5\cdot(-2)+13-3=0 \Rightarrow$ точка A лежит в плоскости BOC. Таким образом, точки A, B, C и O лежат в одной плоскости (компланарны).

Таков ответ после совершенно верных формальных выкладок, с соблюдением всех необходимых законов линейной алгебры, но без геометрической, содержательной части процесса решения задачи, причем, задачи геометрической. Формально, задача решена! Где же тут геометрия школьная?

Заметим, что речь идет о процессе изучения аналитической геометрии в педагогическом вузе, где должны готовиться будущие профессиональные учителя геометрии для школ, лицеев и гимназий. Поэтому, наряду с рассмотренным выше методом, полезно предложить другой, основанный на материале школьного курса геометрии, путь решения данной задачи. Например, с помощью векторов.

Точки A, B, C и O лежат в одной плоскости, если векторы $\overrightarrow{AB}(3;17;-2)$, $\overrightarrow{AC}(1;12;-7)$ и $\overrightarrow{AO}(2;13;-3)$ компланарны, что, в свою очередь, возможно, если для векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO}$ существуют такие (одновременно не равные нулю) числа x и y, что $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AO}$. Это означает, что должна иметь ненулевое решение система уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 17x+13y=12, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$$

Так как уравнение $17x+13y=12$ является алгебраической суммой уравнения $2x+3y=7$ и уравнения $3x+2y=1$, умноженного на 5, то данная система равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 2x+3y=7, \end{cases}$$

решением которой является пара чисел: $x=-\frac{11}{5}$, $y=\frac{19}{5}$. Таким образом, получаем:

$\overrightarrow{AC}=-\frac{11}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{19}{5}\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AC}+11\overrightarrow{AB}-19\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{0}$. Это означает, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO}$ компланарны. Учитывая, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AO}$ отложены от одной точки A, заключаем, что эти векторы, а, значит, и точки A, B, C и O лежат в одной плоскости.

Ответ: точки A, B, C и O лежат в одной плоскости.

Целесообразно предлагать для решения содержательные задачи более высокого уровня сложности.

Задача 6. Найдите площадь сферы, описанной около тетраэдра $PABC$, если: $P(0;0;-6)$, $A(0;0;0)$, $B(8;0;0)$, $C(0;-2;0)$.

Решение. Площадь сферы находится по формуле: $S_{\text{сфер.}}=4\pi R^2$, где R — радиус сферы. Так как радиус сферы равен расстоянию от любой точки сферы до ее центра, то для решения задачи достаточно найти координаты центра T сферы, описанной около заданного координатами своих вершин тетраэдра $PABC$.

Известно, что множеством всех точек пространства, равноудаленных от данных точек E и F, является плоскость серединных перпендикуляров отрезка EF. Поэтому центром сферы, описанной около тетраэдра, является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых не лежащих в одной плоскости ребер этого тетраэдра.

Пусть α, β, γ — плоскости серединных перпендикуляров ребер соответственно AB, BC, AP тетраэдра $PABC$; K, H, M — середины соответственно этих ребер.

Находим: $K(4;0;0)$, $H(4;-1;0)$, $M(0;0;-3)$; $\overrightarrow{AB}(8;0;0)$, $\overrightarrow{CB}(8;2;0)$ и $\overrightarrow{PA}(0;0;6)$ — векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α, β и γ.

Для составления уравнений плоскостей α, β и γ в качестве векторов нормалей стоит взять векторы $\overrightarrow{n_1}(1;0;0)||\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_2}(4;1;0)||\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{n_3}(0;0;1)||\overrightarrow{PA}$. Тогда уравнения плоскостей $\alpha=(K;\overrightarrow{n_1})$, $\beta=(H;\overrightarrow{n_2})$ и $\gamma=(M;\overrightarrow{n_3})$ имеют вид соответственно: $x-4=0$, $4x+y-15=0$, $z+3=0$.

Координаты точки $T = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$ являются решением системы,

$$\begin{cases} x - 4 = 0, \\ 4x + y - 15 = 0, \\ z + 3 = 0, \end{cases}$$

составленной из уравнений плоскостей α, β и γ. Решением ее является тройка: $x = 4$, $y = -1$, $z = -3$. Значит, равноудаленной от всех вершин тетраэдра $PABC$ является точка $T(4; -1; -3)$ — искомый центр сферы, описанной около этого тетраэдра. Причем, удалена эта точка от вершин на расстояние, равное $TA = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26} = R$. Тогда $S_{\text{сфер.}} = 4\pi(\sqrt{26})^2 = 104\pi$ (кв.ед.).

Ответ: 104π кв.ед.

Для подготовки учителя с высоким уровнем математической культуры, способного преподавать в профильных классах, необходимо решать задачи *повышенного уровня сложности.* Например, такие.

Задача 7*. В плоскости $\alpha : x + y + 2z = 0$ найдите все прямые пространства, проходящие через начало координат $O(0; 0; 0)$ и касающиеся сферы ω:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 8.$$

Решение. Прежде всего, необходимо проанализировать геометрическую ситуацию согласно условию задачи: выяснить взаимное положение данных сферы и плоскости. Для этого достаточно сравнить расстояние $\rho(A; \alpha)$ от центра $A(2; 4; 0)$ сферы ω до плоскости α с величиной радиуса $R = 2\sqrt{2}$ этой сферы. Если $\rho(A; \alpha) < R$, то сфера ω и плоскость α пересекаются, тогда через точку O можно провести две искомые различные касательные прямые, которые являются касательными к окружности пересечения данных сферы и плоскости. Если $\rho(A; \alpha) = R$, то сфера ω и плоскость α касаются, поэтому существует единственная касательная к сфере прямая, лежащих в плоскости α и проходящая через точку O и точку касания. Если же $\rho(A; \alpha) > R$, то сфера ω и плоскость α не имеют общих точек, и касательных прямых к сфере ω, лежащих в плоскости α, не существует.

Теперь следует приступать к вычислительным операциям, используя необходимые известные формулы из курса аналитической геометрии.

Находим: $\rho(A; \alpha) = |2 + 4 + 2 \cdot 0| / \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$. Так как $\rho(A; \alpha) = \sqrt{6} < 2\sqrt{2} = R$, то сфера ω и плоскость α пересекаются, и через точку O можно провести две различные касательные к этой сфере прямые, расположенные в плоскости α.

Составим их параметрические уравнения.

Параметрическими уравнениями прямой m, проходящей через начало координат O(0;0;0) и имеющей направляющим вектор с координатами $(a;b;c)$, являются:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \qquad t \in R. \\ z = ct, \end{cases} \tag{1}$$

Любой тройке $(a;b;c)$ соответствует некоторая (единственная) прямая семейства (1). Требование "лежать в плоскости $x+y+2z = 0$", накладываемое на эту прямую, означает: координаты ее точек должны удовлетворять уравнению данной плоскости, то есть необходимо выполнение равенства: $at + bt + 2ct = 0$, откуда получаем связь между a, b и c в виде $c = -\frac{a+b}{2}$ (при $t \neq 0$).

Таким образом, если прямая (1) лежит в плоскости $x + y + 2z = 0$, то ее параметрические уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \qquad t \in R. \\ z = -\frac{a+b}{2}t, \end{cases} \tag{2}$$

Далее, прямая семейства (2) касается сферы $(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=8$, если система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-4)^2+z^2=8, \\ x=at, \\ y=bt, \\ z=-\frac{a+b}{2}t, \end{cases} \qquad t\in R$$

имеет два совпадающих решения, значит, дискриминант квадратного уравнения

$$(at-2)^2+(bt-4)^2+\left(-\frac{a+b}{2}t\right)^2=8$$

должен быть равен нулю. После преобразований это уравнение приводится к виду:

$$(a^2+b^2+\frac{(a+b)^2}{4})t^2-2(2a+4b)t+12=0.$$

Находим: $D/4=(2a+4b)^2-3(4a^2+4b^2+(a+b)^2)=-11a^2+10ab+b^2$.

Из условия $D/4=0$ решаем однородное уравнение $11a^2-10ab-b^2=0$. Если $a/b=u$, то получаем уравнение $11u^2-10u-1=0$, корнями которого являются $u_1=-1/11$, $u_2=1$. Тогда имеем соответственно: $b=-11a$, $c=5a$ или $b=a$, $c=-a$. (Существование двух различных значений троек $(a;b;c)$ подтверждает нашу гипотезу о существовании двух касательных, проведенных из точки O к данной сфере.)

Последние соотношения между a, b и c выделяют из множества всех прямых семейства (2) две прямые, которые проходят через начало координат, лежат в плоскости $x+y+2z=0$ и касаются сферы $(x-2)^2+(y-4)^2+z^2=8$. При $a=1$ получаем следующие параметрические уравнения этих прямых:

$$\begin{cases} x=t, \\ y=-11\,t, \\ z=5\,t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=-t; \end{cases} \qquad t\in R.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x=t, \\ y=-11\,t, \\ z=5\,t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=t, \\ y=t, \\ z=-t; \end{cases} \qquad t\in R.$$

Задача 8*. Найдите множество центров всех шаров, которым принадлежат все точки прямых

$$l:\begin{cases} x=4+t, \\ y=2-t, \\ z=3-2t, \end{cases} \quad t\in R \ \text{ и } \ s:\begin{cases} x=2-2u, \\ y=1+2u, \\ z=-2+u, \end{cases} \quad u\in R$$

лишь при $t\in[0;4]$ и $u\in[-2;2]$, а все остальные точки данных прямых этим шарам не принадлежат.

Решение. Промежуток $t\in[0;4]$ на прямой l задает отрезок с концами $A(4;2;3)$ и $B(8;-2;-5)$, а промежуток $u\in[-2;2]$ на прямой s — отрезок с концами $H(6;-3;-4)$ и $K(-2;5;0)$.

Отрезки AB и HK являются хордами сфер, ограничивающих шары, множество центров которых требуется определить.

Множеством центров всех сфер, проходящих через точки A и B, является плоскость α серединных перпендикуляров отрезка AB. Все точки отрезка AB прямой l являются внутренними точками для всех шаров, определяемых этими сферами. Аналогично, множеством центров всех сфер, проходящих через точки H и K, является плоскость β серединных перпендикуляров отрезка KH. Для всех шаров, ограниченных этими сферами, все точки отрезка KH являются внутренними.

Из уравнений данных прямых следует, что они не параллельны (их направляющие векторы $\overrightarrow{p}(1;-1;-2)$ и $\overrightarrow{q}(-2;2;1)$ не коллинеарны), поэтому плоскости α и β, перпендикулярные этим прямым, также не параллельны, значит, пересекаются. Тогда прямая $m = \alpha \cap \beta$ содержит центры всех тех шаров этих семейств, для каждого из которых являются внутренними все точки отрезков AB и KH; остальные точки прямых l и s не принадлежат шарам этих семейств.

Найдем уравнения прямой m.

Имеем: $\alpha \perp l \Rightarrow \alpha \perp \overrightarrow{p}(1;-1;-2)$, значит, плоскость α определяется точкой $C(6;0;-1)$ — серединой отрезка AB и вектором $\overrightarrow{p}(1;-1;-2)$ нормали; поэтому она имеет уравнение

$$(x-6)-(y-0)-2(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y-2z-8=0.$$

Аналогично, плоскость β определяется точкой $T(2;1;-2)$ — серединой отрезка KH и вектором $\overrightarrow{q}(-2;2;1)$; поэтому она имеет уравнение: $-2(x-2)+2(y-1)+(z+2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y-z-4=0$. Тогда прямая m пересечения этих плоскостей может быть задана системой общих уравнений:

$$\begin{cases} x-y-2z-8=0, \\ 2x-2y-z-4=0 \end{cases}$$

или параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+t, \quad t \in R, \\ z=-4, \end{cases}$$

в которых координаты (1;1;0) направляющего вектора $\overrightarrow{r}(a;b;c)$ прямой m являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a-b-2c=0, \\ 2a-2b-c=0, \end{cases}$$

выражающих условия перпендикулярности направляющего вектора $\overrightarrow{q}(a;b;c)$ относительно векторов $\overrightarrow{p}(1;-1;-2)$ и $\overrightarrow{q}(-2;2;1)$.

Таким образом, искомое множество центров всех шаров есть прямая

$$\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+t, \quad t \in R. \\ z=-4, \end{cases}$$

Ответ: Прямая $\begin{cases} x=1+t, \\ y=1+t, \quad t \in R. \\ z=-4, \end{cases}$

Несомненно, для будущего учителя математики полезным окажется “аналитическое” повторение материала о геометрических преобразованиях пространства, изученного в школьном курсе геометрии.

Симметрию с центром A будем обозначать Z_A; символическая запись $Z_A(M) = M'$ обозначает (читается): точка M при симметрии относительно центра A отображается на точку M' или точка M' является образом точки M при симметрии с центром A.

Симметрия с центром в начале координат, при которой точка $M(x;y;z)$ отображается на точку $M'(x';y';z')$, задается формулами (аналитически): $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$. Пользуясь этими формулами, весьма полезно еще раз убедиться, что композиция двух преобразований не обладает свойством коммутативности, т. е. не для всяких преобразований g_1 и g_2 выполняется равенство $g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2$.

Проиллюстрируем этот факт на следующем примере.

Задача 9. Даны точки $A(-3;2;4)$ и $B(-1;2;6)$. Найдите координаты образа точки B при композиции центральных симметрий: а) $Z_A \circ Z_O$; б) $Z_O \circ Z_A$, где точка O — начало координат. Совпадают ли образы точки B при этих преобразованиях?

Решение. Найдем $(Z_A \circ Z_O)(B)$ и $(Z_O \circ Z_A)(B)$.

а) Пусть $B_1(x_1;y_1;z_1) = Z_O(B)$, $B_2(x_2;y_2;z_2) = Z_A(B_1)$. Тогда, пользуясь координатными формулами симметрии относительно начала координат, получаем: $x_1 = 1$; $y_1 = -2$; $z_1 = -6$. Так как $B_2(x_2;y_2;z_2) = Z_A(B_1)$ (где $B_1(1;-2;-6)$), то точка $A(-3;2;4)$ — середина отрезка B_1B_2. Тогда по формулами деления отрезка пополам имеем: $(1+x_2)/2 = -3$, откуда $x_2 = 2\cdot(-3)-1 = -7$. Аналогично, $y_2 = 2\cdot 2+2 = 6$; $z_2 = 2\cdot 4+6 = 14$. Таким образом, $(Z_A \circ Z_O)(B) = B_2(-7;6;14)$.

б) Пусть $C_1(x_1;y_1;z_1) = Z_A(B)$, $C_2(x_2;y_2;z_2) = Z_O(C_1)$. По формулами деления отрезка пополам имеем: $x_1 = 2\cdot(-3)-(-1) = -5$; $y_1 = 2\cdot 2-2 = 2$; $z_1 = 2\cdot 4-6 = 2$. Получаем: $C_1(-5;2;2)$. Тогда для точки $C_2(x_2;y_2;z_2) = Z_O(C_1)$ имеем: $x_2 = 5$; $y_2 = -2$; $z_2 = -2$. Таким образом, $(Z_O \circ Z_A)(B) = C_2(5;-2;-2)$.

Так как точки $B_2(-7;6;14) = (Z_A \circ Z_O)(B)$ и $C_2(5;-2;-2) = (Z_O \circ Z_A)(B)$ различны, то $Z_A \circ Z_O \neq Z_O \circ Z_A$, то есть композиция преобразований некоммутативна.

Задача 10. Напишите уравнения образа прямой m: $\begin{cases} x = -3 - 2t, \\ y = -5 + 3t, \quad t \in R \\ z = -t, \end{cases}$ при симметрии относительно начала координат.

Решение. Центральная симметрия с центром в начале координат отображает точку $A(-3;-5;0)$ данной прямой m и ее направляющий вектора $\overrightarrow{p}(-2;3;-1)$ соответственно на симметричные им точку $A_1(3;5;0)$ и вектор $\overrightarrow{p_1}(2;-3;1)$. Тогда искомые параметрические уравнения прямой $m_1 = Z_O(m)$ имеют вид:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \quad t \in R. \\ z = t, \end{cases}$$

Так как $-2/2 = 3/(-3) = -1/1$, то направляющие векторы $\overrightarrow{p}(-2;3;-1)$ и $\overrightarrow{p_1}(2;-3;1)$ прямых m и m_1 коллинеарны (они противоположны). Это означает, что образом данной прямой при центральной симметрии является параллельная ей прямая.

Замечание. Учитывая коллинеарность векторов $\overrightarrow{p}(-2;3;-1)$ и $\overrightarrow{p_1}(2;-3;1)$, в качестве направляющего вектора прямой m_1 можно принять направляющий вектор прямой m. Поэтому прямая m_1 может быть задана и такими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in R. \\ z = -t, \end{cases}$$

Задача 11. Напишите уравнения образа прямой m: $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in R \\ z = -t \end{cases}$ при симметрии относительно плоскости Oxy.

Решение. Симметрия относительно плоскости Oxy обозначается $S_{(Oxy)}$. Если образом точки $M(x;y;z)$ при симметрии $S_{(Oxy)}$ является точка $M'(x';y';z')$, то: $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$. Такими же соотношениями связаны координаты любого вектора и его образа при симметрии $S_{(Oxy)}$.

Точка $A(3;5;0) \in m$ расположена в (Oxy), поэтому при симметрии $S_{(Oxy)}$ она отображается на себя; направляющий вектор $\overrightarrow{p}(-2;3;-1)$ данной прямой при этой симметрии отображаются на вектор $\overrightarrow{q}(-2;3;1)$, который служит направляющим для прямой $m_1 = S_{(Oxy)}(m)$. Поэтому параметрические уравнения прямой m_1 имеют вид:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = 5 + 3t, \quad t \in R. \\ z = t; \end{cases}$$

Задача 12. Напишите уравнение образа плоскости $\alpha : 2x + 3y - z - 5 = 0$ при симметрии относительно плоскости Oxz.

Решение. Точка $A(1; 1; 0) \in \alpha$ при симметрии $S_{(Oxy)}$ отображается на точку $A_1(1; -1; 0)$. Так как при движении величина угла между прямой (вектором) и плоскостью инвариантна, то вектор $\overrightarrow{n}(2; 3; -1)$ нормали плоскости α отображается при этой симметрии на вектор $\overrightarrow{m}(2; -3; -1)$, который служит вектором нормали для плоскости $\beta = S_{(Oxy)}(\alpha)$. Поэтому общее уравнение плоскости $\beta = (A_1; \overrightarrow{m})$ имеет вид: $2(x - 1) - 3(y + 1) - (z - 0) = 0$ или $2x - 3y - z - 5 = 0$.

Задача 13. Даны точки $A(1; 3; -1)$ и $B(7; 5; -1)$. Приведите примеры движений, отображающих точку A на точку B.

Решение. Так как середина любого отрезка является его центром симметрии, то при симметрии относительно точки $(4; 4; -1)$, являющейся серединой отрезка AB, точка A отображается на точку B.

Параллельный перенос может быть задан как вектором переноса, так и парой соответственных точек. В нашем случае точка A отобразится на точку B при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}(6; 2; 0)$.

Из определения пар точек, симметричных относительно плоскости, следует, что точка A отобразится на точку B при симметрии относительно плоскости α, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

Составим уравнение плоскости α, для чего в качестве вектора нормали этой плоскости выберем вектор $\overrightarrow{n}(3; 1; 0)$, коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}(6; 2; 0)$, а в качестве “данной” точки плоскости α примем середину $C(4; 4; -1)$ отрезка AB. Тогда получаем следующее уравнение плоскости α симметрии $S\alpha$:

$3(x - 4) + (y - 4) = 0$ или $3x + y - 16 = 0$.

Точка A может быть отображена на точку B также при симметрии относительно прямой, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину. В качестве направляющего вектора этой прямой примем вектор $\overrightarrow{p}(1; -3; 0)$, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{n}(3; 1; 0)$, а в качестве ее “начальной” точки — точку $C(4; 4; -1)$. Эта ось симметрии точек A и B задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 4 + t, \\ y = 4 - 3t, \quad t \in R. \\ z = -1; \end{cases}$$

Литература

1. Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. Геометрия. 10 кл.: задачник для классов с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2011.

2. Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. Геометрия. 11 кл.: задачник для классов с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2010.

Потоскуев Евгений Викторович,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Тольяттинского госуниверситета,
кандидат физ.-мат. наук,
Почетный работник общего образования РФ.

E-mail: potoskuev@pisem.net

Как была открыта функция Коши?

С. В. Дворянинов

В статье реконструирован возможный ход рассуждений выдающегося французского математика Огюста Коши, приведших его к открытию бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функции.

В [1] на с.136 читаем: “Ряд Тейлора не всегда сходится к породившей его функции”. Пусть

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \text{если } x \neq 0, \text{и пусть } f(0) = 0.$$

“Тогда при любом натуральном k имеем $f^{(k)}(0) = 0$. Таким образом, мы видим, что ряд Тейлора нулевой, а породившая его функция отлична от тождественного нуля”.

За этими краткими строчками современного учебника стоит история научной математической мысли и поиска истины, о которой не всегда знает нынешний студент-первокурсник. А как была найдена указанная выше функция? — могут спросить наши студенты. Изложим один из возможных вариантов ответа на этот вопрос.

Формула Тейлора в школьном учебнике

В учебнике [1] на стр. 156 о формуле Тейлора читаем:

Пусть функция $f(x)$имеет производные до порядка n включительно в некоторой окрестности точки $x = 0$ и пусть отрезок $[0; a]$, $a > 0$, принадлежит этой окрестности. Тогда для любого $x \in [0; a]$ выполняется равенство

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n, \tag{1}$$

где и c — некоторое число, зависящее от x и n и принадлежащее интервалу $(0; x)$.

Если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка (другими словами, это бесконечно дифференцируемая функция), то равенство (1) выполнятся при любом натуральном n.

В частности, функция $f(x) \equiv 0$ удовлетворяет условиям этой теоремы. Все производные этой функции (при любом значении x и, в частности, при $x = 0$) равны нулю, и формула (1) принимает вид $0 = 0$.

А является ли верным обратное утверждение? А именно, пусть в условиях предыдущей теоремы

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 0, \tag{2}$$

то есть в точке нуль функция $f(x)$ и все её производные равны нулю. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$?

В свое время этот вопрос занимал умы великих математиков. Прежде чем дать на него ответ, заметим следующее.

При выполнении условий (2) из (1) получаем, что при любом натуральном n

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n.$$

На отрезке $[0; a]$ функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна, так как она по условию имеет производную. Следовательно, на этом отрезке эта функция $f^{(n)}(x)$ ограничена, и поэтому на этом отрезке $|f(x)| \le C \cdot x^n$. Если теперь рассмотреть отрезок $0 \le x \le \frac{1}{C}$, то на этом отрезке $|f(x)| \le x^{n-1}$.

Последнее неравенство означает, что на этом отрезке функция $f(x)$ растет не быстрее некоторой степенной функции. Поскольку показатель является произвольным, то приходим к такому выводу: при выполнении условий (2) для любого натурального n найдется отрезок $[0; a_n]$, на котором $|f(x)| \le x^n$.

Будем вдобавок считать, что при неотрицательных x функция неотрицательна, и рассмотрим такую задачу: существует ли такая монотонно возрастающая функция $f(x)$, что для любой степенной функции x^n найдется отрезок $[0; a_n] \subset [0; 1)$, на котором выполняется неравенство $0 \le f(x) \le x^n$?

Чтобы узнать ответ на этот вопрос, перенесемся мысленно почти на двести лет назад...

Эйлер, Лагранж, Коши

...31 ноября 1813 года Огюст Коши вернулся к себе домой в предместье Парижа поздно. Он снял промокшие от дождя плащ и шляпу и зажег свечу. Подходил к концу нерадостный день, хотя с утра он был наполнен приятным ожиданием предстоящей встречи с новой книгой! На днях он узнал новость, которую долго и с нетерпением ждал: из типографии в Академию Наук привезли “Теорию аналитических функций” — новое сочинение знаменитого Лагранжа. И сегодня, закончив уроки с учениками, он немедля отправился в Академию. И там секретарь Академии сообщил печальное известие: вчера Жозефа Луи Лагранжа не стало.

Минувшей весной Коши слушал в Академии наук доклад Лагранжа. Знаменитый 77-летний ученый говорил о многих математических и других задачах. Тихий неспешный голос собравшиеся слушали, затаив дыхание. Время неумолимо, и каждый понимал, что этот доклад может оказаться научным завещанием большого ученого. Потом было много вопросов. Коши тоже задал вопрос, и Лагранж ответил тогда, что об этом говорится в его новой книге. И вот теперь Лагранжа нет... И ответы теперь можно найти только в книге... А суть вопроса может понять каждый школьник.

Рассмотрим графики двух функций $y = x^2$ и $y = x^3$ на интервале $(0; 1)$.

Здесь $x^2 > x^3$, и поэтому на этом интервале квадратичная парабола лежит выше кубической. Вообще, для двух натуральных чисел $m < n$ на интервале $(0; 1)$ имеем: $x^m > x^n$.

Рассмотрим степенные функции более общего вида: $y = ax^m$, $y = bx^n$ при $m < n$ с положительными коэффициентами a и b. Решением неравенства $bx^n < ax^m$ является интервал $\left(0; \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-m}}\right)$.

Можно сделать такой вывод: для любых двух степенных функций вида $y = ax^m$ с натуральным показателем и положительным коэффициентом a существует интервал $(0; \alpha)$, на котором график функции с бо́льшим показателем лежит ниже графика с меньшим показателем.

Показатель степени характеризует скорость роста функции. Например, $100 \cdot x^3 < 0,01 \cdot x^2$ при $0 < x < 0,0001$, и поэтому можно сказать, что кубическая функция $y = 100x^3$ растет медленнее квадратичной функции $y = 0,01x^2$.

А как быстро растет, к примеру, в окрестности нуля функция $y = \frac{x^2}{1-x}$? Легко проверить, что при $0 \le x \le 0,5$ выполняются неравенства $x^2 \le \frac{x^2}{1-x} \le 2x^2$. Ясно, что растет эта функция не быстрее квадратичной.

Пусть некоторая монотонно возрастающая функция при $x \in [0; \alpha]$ удовлетворяет неравенствам $ax^n \le f(x) \le bx^n$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ растет как x^n. Натуральное число n называют показателем роста функции f.

Если на том же промежутке выполняется неравенство $0 \le f(x) \le bx^n$, то говорят, что функция $f(x)$ растет не быстрее, чем степенная функция x^n.

....Коши снова мысленно вернулся к докладу Лагранжа, оказавшемуся, к сожалению, его последним выступлением в Академии. Когда пришло время вопросов и ответов на них, Коши с глубоким почтением спросил именитого ученого-математика: существует ли монотонно возрастающая при неотрицательных x функция $f(x)$ такая, что для любой степенной функции x^n найдется отрезок $[0; a_n]$, на котором $f(x)$ растет медленнее функции x^n?

— Знаем ли мы суждение на этот счет нашего учителя, великого Леонарда Эйлера? — так начал свой ответ Лагранж. Да, мнение это известно. Обратимся со вниманием к эйлерову "Дифференциальному исчислению". Там мы найдем замечание о том, что такой функции нет. ([2], стр. 271).

Многоуважаемый господин академик, — продолжал Коши, — но это только мнение, — у Эйлера нет доказательства!

Подождите, пожалуйста, немного, уважаемые коллеги, осенью выходит в свет моя новая книга, там все подробно написано, — завершил дискуссию заметно уставший Лагранж.

И вот теперь обещанная книга Лагранжа лежит на столе. Коши пробежал глазами оглавление, потом перелистал страницы. Один раз, другой. Ответа на свой вопрос о самой медленно растущей функции он не нашел. Коши теперь вчитывается более внимательно. Да, упоминание о вопросе есть. Есть и ответ: "некоторые геометры, видимо, допускают существование функции, которая растет медленнее любой степенной функции". ([2], стр. 300).

Что это значит? Несомненно, это означает, что Лагранж был согласен с Эйлером. Таких функций нет. А слова "некоторые геометры" относятся, пожалуй, и к нему, к Коши. Коши ищет на страницах книги доказательство, подтверждающее высказывание Лагранжа, но не находит его. Еще раз вся книга просмотрена от корки до корки — а читает Коши быстро — доказательства нет. Да, великий Эйлер обладал фантастической, безошибочной интуицией, но почему же нет доказательства?!

Пять лет спустя

...Прошло пять лет. И все это время Коши помнил свой последний короткий диалог с Лагранжем. Он постоянно пытался увидеть на декартовой плоскости XOY график такой положительной возрастающей функции, которая на некотором промежутке меньше, чем функция $y = x^2$, на другом промежутке меньше, чем функция $y = x^3$ и так далее, и так далее, для любого натурального n, — до бесконечности. Почему-то эти промежутки становились все короче и короче, казалось, что они стягиваются в одну точку $x = 0$, и никакой ненулевой функции не получалось... График ускользающей из вида функции все более и более сливался с осью абсцисс. Задача о нахождении функции $y = K(x)$, которая при каждом фиксированном значении показателя n удовлетворяла бы неравенству $0 \leq K(x) \leq x^n$ на некотором промежутке $0 \leq x \leq a_n$, не поддавалась решению.

Эти промежутки могут быть очень короткими... Их трудно увидеть. Необходимо своего рода увеличительное стекло, микроскоп. Аналог такого микроскопа в математике известен — это замена переменной. Пусть $x = \frac{1}{t}$. При этом любой сколь угодно короткий промежуток $0 \leq x \leq a_n$ переходит в неограниченный промежуток $\frac{1}{a_n} \leq t < +\infty$. На языке переменной t задача запишется так:

$$K\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{1}{t^n},$$

или

$$t^n \leq \frac{1}{K\left(\frac{1}{t}\right)},$$

и последнее неравенство должно выполняться при каждом натуральном n на некотором неограниченном промежутке при $b_n \leq t < +\infty$.

В чем суть последнего неравенства? Если правую часть обозначить как $f(t)$, то неравенство

$$t^n \leq f(t)$$

означает, что некоторая функция $f(t)$ при достаточно больших значениях аргумента становится больше любой степенной функции. А есть ли такая функция? Да! Конечно, есть!! Об этом знали еще в Индии в глубокой древности. Каждый школяр помнит историю о том, какую награду попросил себе изобретатель шахмат!

Вернемся сейчас на несколько минут в наши дни и из школьного учебника [1] извлечем следующее. В [1] на стр.157 для функции $f(x) = e^x$ приведена формула Тейлора (1) для $n = 5$: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{e^c}{5!}x^5$.

Пользуясь этой формулой, покажем, что при достаточно больших положительных значениях x выполняется неравенство $e^x \geq x^3$. Ясно, что последнее неравенство выполняется, если уже $\frac{x^4}{4!} \geq x^3$. А это неравенство действительно выполняется при достаточно больших x, а именно при $x \in [4!; +\infty)$.

Итак, мы показали, что $e^x \geq x^3$ при $x \geq 4!$. Очевидно, так же доказывается, что $e^x \geq x^n$ при $x \geq (n+1)!$. Это означает, что показательная функция при достаточно больших значениях аргумента становится больше любой степенной функции (это верно для любой показательной функции $f(x) = a^x$ при $a > 1$).

...Коши взял в руки новое перо, и на бумаге появилась равенство

$$f(t) = a^t.$$

Основанием здесь может служить любое число, большее единицы. Но пусть в честь великого Эйлера это будет число e. Иоганн Бернулли назвал своего ученика Эйлера “первым математиком” – “mathematicorum princeps” ([3], стр.12). Коши знал, что сейчас этот титул носит Гаусс, но первым его обладателем был именно Эйлер.

Итак, $\frac{1}{K\left(\frac{1}{t}\right)} = e^t$. Теперь следует найти функцию K. Для этого сначала вернемся в последнем уравнении к переменной x и получим, что $\frac{1}{K(x)} = e^{\frac{1}{x}}$. Отсюда следует, что

$$K(x) = e^{\frac{-1}{x}}.$$

На бумаге появилось такое описание функции $K(x)$:

$$K(x) = e^{\frac{-1}{x}} \text{ при } x > 0, \;\; K(x) = 0 \text{ при } x \leq 0.$$

Сейчас мы можем сказать, что график этой функции похож на траекторию самолета, который сначала разгоняется по взлетной полосе, а потом отрывается от земли, причем этот отрыв происходит очень-очень плавно и медленно — высота над землей растет медленнее любой степенной функции. Но во времена Коши никаких самолетов еще не было, и Математик сравнил предельно медленный рост этой функции с тем, как медленно и тягостно, словно нехотя, светает поздней осенью (рис. 1).

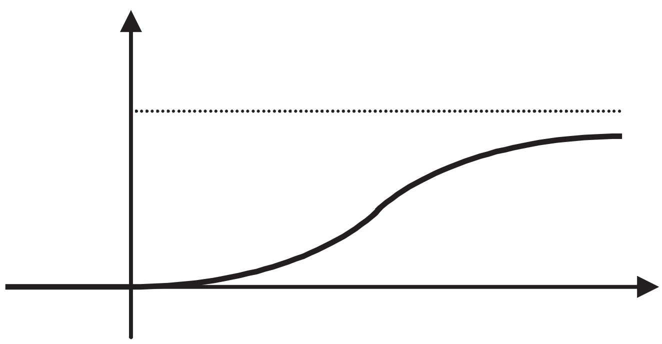


Рис. 1

А можно рассмотреть непрерывную, четную, определенную на всей числовой прямой функцию

$$K(x) = e^{\frac{-1}{|x|}} \text{ при } x \neq 0, \;\; K(0) = 0.$$

График этой функции напомнил Коши цветок, который, собрав все свои силы, смог распуститься, но потом его обессиленные лепестки поникли, словно придавленные асимптотой $y = 1$ (рис. 2).

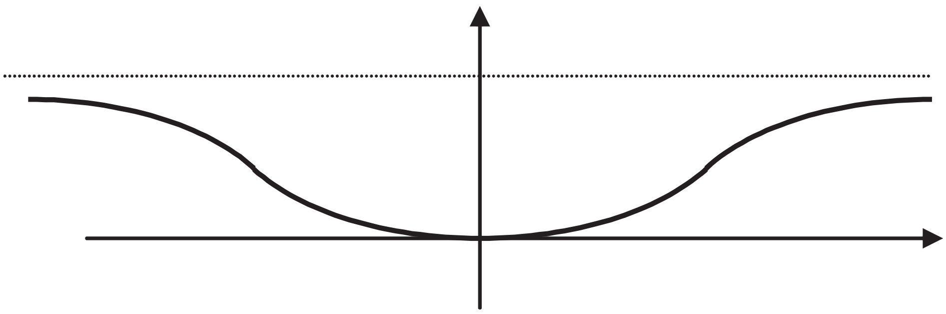


Рис.2

Впрочем, здесь можно обойтись и без модуля, и тогда получится еще медленнее растущая функция

$$K(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \text{ при } x \neq 0, \;\; K(0) = 0. \qquad (3)$$

…Свеча в подсвечнике неожиданно погасла. Увлеченный расчетами Коши совсем на замечал ее прерывистого света. Впрочем, свеча уже не нужна. Ночь пролетела, за окном уже было утро! Он вновь и вновь проверил свои выкладки. Ошибки не было. Функция, которая растет медленнее любой степенной, была найдена. Коши понимал важность своего открытия. Он был потрясен: найденный им пример полностью разрушал концепцию Лагранжа ([2], стр. 300) и опровергал соответствующее мнение Эйлера…

…Прошло еще пять лет. Весной 1823 года Огюст Коши делал свой очередной доклад в Академии наук. Он рассказывал об открытой им функции, которая растет, но растет удивительно медленно. После выступления было много вопросов. Один молодой человек, в котором каждый безошибочно находил студента, поднял руку и поднялся с места:

— Мы убедились, что функция $K(x)$ растет медленнее любой степенной. Но действительно ли все ее производные в точке $x = 0$ равны нулю? И как находить эти производные при $x = 0$?

Коши вспомнил, что происходило в этом зале десять лет назад, улыбнулся — *Все повторяется!* — и ответил так:

Для вычисления производной любого порядка следует воспользоваться ее определением. Так что действуйте согласно определению производной. И еще: осенью выходит в свет моя новая книга “Резюме лекций по исчислению бесконечно малых” — там есть все подробности! ([2], стр. 300).

Упражнение. Докажите, пользуясь определением производной, что в точке $x = 0$ производные любого порядка функции $K(x)$, определяемой формулами (3), равны нулю.

Ответы к упражнению. Для вычисления $K'(0)$ рассмотрим отношение $\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x)-K(0)}{x} = \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}$. Пусть $x = \frac{1}{t}$ и $t \to +\infty$. Тогда $\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{t}{e^{t^2}}$. Представим здесь знаменатель по формуле Тейлора и найдем, что это отношение стремится к нулю.

В результате получим, что $K'(0) = 0$ и $K'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}$ при $x \neq 0$.

Для вычисления второй производной $K''(0)$ следует найти предел отношения $\frac{K'(x)-K'(0)}{x}$ при $x \to 0$. Здесь также следует выполнить замену $x = \frac{1}{t}$ и устремить t к $+\infty$. В результате получим, что $K''(0) = 0$.

Равенство $K^{(n)}(0) = 0$ доказывается по индукции (см. учебники по математическому анализу для университетов).

Литература

[1] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий. В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. 5-е издание, исправленное. Изд. Московского университета, изд. "Дрофа", М., 2004.

[2] Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 2007.

[3] История математики. Том третий. Математика XVIII столетия. Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1972.

[4] И. Р. Шафаревич. Исследования Эйлера по теории чисел. Математическое образование. №3(43), 2007.

[5] С. В. Дворянинов Легенда о функции Коши. Архимед. Научно-методический сборник. Выпуск 5. М., 2009, с.139—145.

Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, к.ф.-м.н.
E-mail: dvoryan@yandex.ru

О происхождении термина «арифметика» [1]

Е. Д. Куланин

В статье выдвигается гипотеза происхождения термина “арифметика” и обосновывается путем анализа смысла соответствующих слов древнегреческого языка, а также исторических аналогий.

Широко известно, что слово “алгебра” произошло от названия трактата Мухаммеда ибн Мусы ал-Хорезми (787–ок. 850) “Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы”, вышедшего приблизительно в 830 г. Слово “ал-джабр” означает восполнение. восстановление отрицательного члена (члена со знаком минус) в одной части уравнения в виде положительного в другой (такого же члена со знаком плюс) [1].

Арифметике в этом смысле повезло меньше. Обычно сообщается, что слово “арифметика” произошло от древнегреческого *ἀριθμος*, означающего число [2]. А какова этимология самого слова *ἀριθμος*? Приведем все значения слова *ἀριθμος*, которые дает словарь А. Д. Вейсмана [2]:

ἀριθμος — a) число, b) количество, мера, c) счет, счисление, d) счет (как искусство или наука), e) количество как противоположность качеству: *λόγων ἀριθμος* — одни пустые слова; *ὁ ἀριθμος* — бесполезный, пустой человек.

ρυθμος — a) такт (ровность в движении; известная мера, соблюдаемая в походке, в танцах, в музыке), b) ритм или ровность и стройность в прозаической речи, numerus oratorius, c) стройность, складность, соразмерность, пропорциональность, d) образ, вид, фигура.

По поводу латинского слова numerus (число) мнения разделились: одни считают его переводом греческого *ρυθμος* “ритм”, другие — *ἀριθμος* “число”. Поллитт [5] считает, что была тесная связь между “числом” и “ритмом”. “Ритм-число”, по интерпретации Поллитта, представляет собой форму или более мелкие формы внутри этой формы, с измеряемыми пропорциями [4].

Известный российский математик М. М. Постников также думал над этим вопросом:

> ...Возникновение понятия числа столь древнее явление, что едва ли остались следы, как люди пришли к этому понятию, т.е. в результате абстрагирования каких моделей оно возникло... Но оказывается, что это не совсем так — следы остались!
>
> Например, они обнаруживаются в японском языке. В этом языке существуют специальные группы числительных, скажем, для круглых предметов, совсем другие числительные для живых предметов и так далее. ...
>
> Можно сделать вывод, что система японских числительных представляет собой некоторый рудимент хода мыслей, в котором люди пришли к абстрактному понятию числа и, где-то на самом первоначальном уровне еще питекантропов, для арбузов была одна система числительных, для дынь – другая, для палок – третья, для людей – четвертая. Конечно, эта система далеко не уходила – раз, два, три и все, но, во всяком случае, для каждого набора предметов были собственные слова для их счета. Потом постепенно было замечено, что, можно использовать одни и те же слова для всех предметов круглой формы, но для предметов продолговатой формы остались другие слова. Только на очень высокой ступени развития пришли к той мысли, что вообще конкретная суть предметов роли не играет и счет можно производить в совершенно абстрактной форме [6].

На самом деле японский язык не является уникальным в этом отношении. Аналогичные группы числительных имеются и в языке дальневосточной народности нивхов. Об этом свидетельствует следующий отрывок из повести Г. Гора “Юноша с далекой реки”, рассказывающий о том, как автор обучал арифметике молодого нивха Нота:

[1] Впервые статья опубликована в №9 журнала “Математика в школе” за 2011г.

> "Я помогал Ноту решать задачи ... Задача была легкая, совсем простая, но Нот никак не мог ее решить. Нужно было к семи деревьям прибавить еще шесть или от тридцати пуговиц отнять пять.
>
> — Какие деревья? — спросил Нот, — длинные, короткие? Какие пуговицы? Круглые?
>
> Прежде чем решать. он хотел представить себе во всей конкретности и деревья, и пуговицы.
>
> — В математике, — ответил я, — не имеют значения качество и форма предмета.
>
> Нот меня не понял. И я тоже не сразу понял его. Он мне объяснил, что у нивхов для длинных деревьев существуют одни числительные (формы числительных), для коротких — другие, для круглых предметов третьи... У них есть арифметика, в которой числительные выражали не только количество, но и качество предметов" (цитировано по [7]).

Приведем мнение известного немецкого романтика Новалиса:

> Всякий метод есть ритм: если кто овладел ритмом мира, это значит, что он овладел миром. У всякого человека есть свой индивидуальный ритм [3].

И совсем определенно и ясно высказался по этому поводу академик И. Р. Шафаревич:

> Простейший путь применения математики — это счет. Но считать можно только однородные объекты. Пусть нам даны, скажем: яблоко, цветок, собака, дом, солдат, девушка, луна. Мы можем сосчитать их и сказать, что их 7 — но 7 чего? Единственный ответ 7 предметов. Различия между собакой и луной, между яблоком и солдатом — исчезают: они все потеряли свою индивидуальность и превратились в лишенные признаков "предметы". Счет убивает индивидуальность [8].

Таким образом, естественно предположить, что $\acute{o}\ \acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ — бесполезный, пустой человек — это человек, лишенный индивидуальности, т.е. человек, которого можно сосчитать, поскольку для счета необходимо абстрагироваться от индивидуальности.

Так как согласно Новалису "у всякого человека есть свой индивидуальный ритм", то можно считать, что ритм характеризует индивидуальность человека и тогда становится понятным, что $\acute{o}\ \acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ — это человек, лишенный ритма, и слово $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ означает "отрицание ритма", т.е. слово $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ представляет собой слияние слова $\rho\upsilon\vartheta\mu o\varsigma$ с отрицательной частицей $\acute{\alpha}$. Заметим, что в Греческо-русском словаре А.Д.Вейсмана частица $\acute{\alpha}$ не обозначена в данном случае как отрицательная, что свидетельствует в пользу древности слияния частицы $\acute{\alpha}$ со словом $\rho\upsilon\vartheta\mu o\varsigma$. Таких данных не предоставляют и существующие этимологические словари древнегреческого языка, что говорит о том, что слияние частицы $\acute{\alpha}$ со словом $\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$ произошло еще в дописьменный период.

Однако проведенная нами логическая реконструкция убеждает нас в правильности изложенной здесь этимологии слова $\acute{\alpha}\rho\iota\vartheta\mu o\varsigma$.

Литература

[1] В. А. Никифоровский. В мире уравнений, М., "Наука", 1987, стр. 66—67.

[2] А. Д. Вейсман. Греческо-русский словарь. Репринт V-го издания 1899 г., Греко-латинский кабинет Ю. А. Шичалина, М., 1991.

[3] Новалис. Фрагменты, "Евразия", Санкт-Петербург, 1995, с. 152.

[4] Плиний Старший. Естествознание. Об искусстве, "Ладомир", М., 1994, примечания Г. А. Тароняна, с. 322—323.

[5] J.J. Pollitt. The ancient view of greek art: criticism, history, and terminology. New Haven and London, 1974, 464 pp.

[6] М. М. Постников. Является ли математика наукой? “Математическое образование”, №2, 1997, с. 88.

[7] И. Я. Депман. “История арифметики”, М., КомКнига, 2006.

[8] И. Р. Шафаревич. Математическое мышление и природа, “Математическое образование”, №2, 1998, с. 71.

Куланин Евгений Дмитриевич,
профессор кафедры прикладной математики
факультета информационных технологий
Московского городского психолого-педагогического
университета, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник.

E-mail: lucas03@mail.ru

“Башни из двоек и троек” Велимира Хлебникова

А. В.Жуков

Редакция с прискорбием сообщает, что 29 ноября 2011г., когда предлагаемая вашему вниманию статья была уже принята к публикации, скоропостижно скончался ее автор Александр Владимирович Жуков. В статье обсуждаются некоторые математические модели, почерпнутые из художественных произведений Велимира Хлебникова. Редакция также приводит краткую биографию автора.

Родина творчества — будущее,
оттуда дует ветер богов и слова.

Велимир Хлебников, ([1], стр. 216).

Велимир Хлебников (1885 — 1922[1]) вошёл в историю поэзии как новатор, творец новых смыслов и интуиций. Его творчеству посвящены многочисленные искусствоведческие труды. Цель этой публикации — обсудить отдельные математические отголоски его поэтических зачарований.

Числа! Голые вы вошли в мою душу
И я одел вас одеждою земных чувств и памяти.

([1], стр. 182).

Ах, эти звучащие мысли и рокот сих струн! Кем вы повешены на то место, откуда я взял вас? Вы, высокие струны от звезд к камням и рощам. Качались мысловыми верхушками прекрасные грезоги. Синь, ветер и песнь, и ночная тишина, и ночная вышина струн, оттуда сюда, как копья времён, как стража усталого ропота, как волны сзовом оттуда сюда.

Там же.

Я дал обещание всё понять,
Чтобы простить всем и всё
И научить их этому.

([1], стр. 168).

Велимир (Виктор Владимирович) Хлебников обучался в 1903 – 1908 годах сначала на математическом, а потом на естественном отделении физико-математического факультета Казанского университета. В 1908 году перевёлся на естественное отделение физико-математического факультета Санкт-Петербургского университета. В 1909 году поступил на Факультет восточных языков, затем перешёл на славяно-русское отделение Историко-филологического факультета. В 1911 году отчислен за неуплату.

[1] “Люди моей задачи часто умирают 37 лет, мне уже 37 лет”, — заметил поэт весной 1922 года ([1], стр. 273).

“Башни из двоек и троек”

Пружины троек видел я и двоек
В железном чучеле миров,
Упругий говор чисел.
([1], стр. 169).

Достаточно созерцать первые три числа, точно блески шарика, чтобы построить вселенную.
([1], стр. 244).

Фрагмент из “Досок Судьбы”, [1], стр. 11.

У пространства каменный показатель степени, он не может быть больше трёх, а основание живёт без предела; наоборот, у времени основание делается “твёрдыми” двойкой и тройкой, а показатель живёт сложной жизнью, свободной игрой величин. Там, где раньше были глухие степи времени, вдруг выросли стройные многочлены, построенные на двойке и тройке, и моё сознание походило на сознание путника, перед которым вдруг выступили зубчатые башни и стены никому неизвестного города.

Если в известном сказании Китеж-град потонул в глухом лесном озере, то здесь из каждого пятна времени, из каждого озера времени выступал стройный многочлен троек с башнями и колокольнями, какой-то Читеж-град...

Анализ текста “Досок Судьбы” показывает, что Велимир Хлебников в основном использует представления целых чисел в виде мультипликативно-аддитивных разложений по степеням двоек и троек:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\pm 2^{i}\right)\cdot\left(\pm 3^{j}\right),\ n,m\in \mathrm{I}'_{0}. \tag{1}$$

Это своеобразная система счисления. Очевидно, что каждое натуральное число можно представить в виде (1), но это представление не единственно. Элегантный пример, подтверждающий последнее высказывание, приведен в “Досках Судьбы”, [1], стр. 251:

$$11 = 3^2 + 2 = 2^3 + 3.$$

Неединственность представления чисел не является “математической экзотикой” — она свойственна, например, системе счисления, основанной на “золотой пропорции” [2]. Замечу, что информационная избыточность характерна для большинства слов нашего тезауруса, и это свойство используется для создания помехоустойчивых алгоритмов передачи текстовых сообщений по каналам связи.

В “Досках Судьбы” Велимира Хлебникова встречаются и другие конструкции для представления натуральных чисел. Один из вариантов: замена показателей степеней 2^i и 3^j в формуле (1) выражениями вида (1). Если это осуществлять рекурсивно, то, идя по пути обобщений, можно построить сколь угодно высокие “башни” из степеней. Любопытна фрактальная структура такого “Читеж-града”.

Похожие на дерево уравнения времени, простые, как ствол в основании, гибкие и живущие сложной жизнью ветвями своих степеней. ([1], стр. 11).

Я видел их зрительно: горы, громадные глыбы основания, на которых присела, отдыхая, хищная птица степени, птица сознания, для пространства, и точно тонкие стволы деревьев, ветки с цветами и живыми птицами, порхающими по ним, казалось время. (Там же).

“Азбука неба”

Ну, тащися Сивка,
— Шара земного,
Айда понемногу.
Я запрёг тебя
Сохой звёздною,
Я стегаю тебя
Плёткой грёзною.
([1], стр. 7).

В Листе 3 “Досок Судьбы” под названием “Азбука неба” Велимир Хлебников приводит аппроксимации периодов обращения вокруг Солнца шести планет. По Хлебникову, водружён “город тройки на небе”:

Земля:	$365 = 3^5 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 + 1;$
Марс:	$687 = 3^6 - 3^3 - 3^2 - 3^1 - 3^0 - 2;$
Юпитер:	$4332 = 3^7 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1;$
Сатурн:	$10759 = 3^8 + 3^7 + 2 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 3^4 - 3^2 - 3^1 - 3^0 - 1;$
Уран:	$30688 = 3^9 + 3^8 + 2 \cdot 3^7 + 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 3^1 + 2 \cdot 3^0 + 2;$
Нептун:	$60181 = 3^{10} + 3^6 + 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 3^0.$

Это — город-“двойник”, город-побратим башенному мегаполису, воздвигнутому в небесных виртуалиях Платоном (в его диалогах “Государство” и “Тимей”). Согласно реконструкции системы мира Платона, выполненной С. Житомирским [3], относительные радиусы небесных сфер великий философ древности элегантно определил с помощью двух геометрических прогрессий:

Луна:	$27 = 3^3;$
Солнце:	$35 = 3^3 + 2^3;$
Венера:	$44 = 3^3 + 3^2 + 2^3;$
Меркурий:	$48 = 3^3 + 3^2 + 2^3 + 2^2;$
Марс:	$51 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 2^3 + 2^2;$
Юпитер:	$53 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 2^3 + 2^2 + 2^1;$
Сатурн:	$54 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0;$
Звёзды:	$108 = 2 \cdot (3^3 + 3^2 + 3^1 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0);$

Эзотерика “Досок судьбы”

Если я обращу человечество в часы
И покажу, как стрелка столетий движется,
Неужели из вашей времён полосы
Не вылетит война, как ненужная ижица?
([1], стр. 6).

Записи из “Досок Судьбы”:

Я понял, что время построено на степенях двух и трёх. (стр. 10).

Мой основной закон времени: во времени происходит отрицательный сдвиг через 3^n *дней и положительный через* 2^n *дней.* (стр. 182).

Можно расцветить краской крови, железа и смерти призрачные очертания скрепы 3^n *дней... Если первая точка отмечена крупным военным успехом некоторой волны человечества, была шагом завоевания, то вторая точка, через* 3^n *суток, будет остановкой этого движения, днём отпора ему.* (стр. 12).

Восход явления происходит под знаком “два”, а закат явления, его вечер строится в стране “три”. (стр. 78).

“Доски Судьбы” пестрят многочисленными примерами, идущими в зачёт копилки “основного закона времени”.

Оставляя в стороне мелкий вопрос “интерференции” двух противоположных потоков событий: отрицательных через 3^n дней и положительных через 2^n дней, а именно — происходящих через $3^n \cdot 2^n$ дней, а также оставляя в стороне два противоположных взгляда на одно и то же событие: что для одного победа, то для другого поражение, укажу на “ахиллесову пяту” нумерологического подхода в целом. С точки зрения математики все “подтверждения” “основного закона времени” объясняются *принципом Дирихле*: если кроликов больше, чем клеток, куда их заталкивают, то обязательно найдётся клетка, в которой окажется более одного ушастого. Степени двоек и троек — это “клетки”, их не так много, события — “кролики”, их при условии экспоненциального роста количества подчинённых “председателя Земного шара” становится всё больше и больше. Так что нет ничего удивительного в повторении типов некоторых событий через определённые промежутки времени: “*числа так сильно повторены в нашем мире, точно одно и то же пламя в бесчисленных зеркалах*” (Велимир Хлебников — [1], стр. 79).

Мне обычно возражают: но ведь Поэту, можно сказать, — “на кончике пера” удалось вычислить и предсказать грядущую дату октябрьской революции 1917 года!

Глубокий комментатор “Досок Судьбы” Василий Бабков по этому поводу ссылается на автобиографическую запись Велимира Хлебникова, сделанную в 1912 году:

Если Византия освободилась от Рима в 393 году, то освобождение Америки произошло через $(365 + 48 \cdot 2) \cdot 3 = 1383$ *— в 1776 году…*

Половцы завоевали русскую степь в 1093 году через 1383 года после падения Самниума в 290 году.

Но в 534 году было покорено царство вандалов; не следует ли ждать в 1917 году падения государства?

([1], стр. 180).

На этот довод возразил ещё писатель II века Лукиан, но, прежде чем давать ему слово, отмечу, что в 1912 году крушение государства Российского предчувствовали многие, в том числе и его авторитарный глава, который не смог придумать ничего лучшего, как бросить своих подвластных в горнило Первой мировой войны.

Итак,

…допустим, что у нас будет истинным число двадцать. Пусть, например, кто-нибудь, взявши двадцать бобов в руку и зажавши их, будет спрашивать десять человек, сколько у него в руке бобов; они будут отвечать наугад: кто — семь, кто — пять, а кто пусть скажет тридцать, ещё кто-нибудь пусть скажет десять или пятнадцать и вообще один назовёт одно число, другой — другое. Может статься, что случайно кто-нибудь может сказать правду. Не так ли?

Лукиан. Гермотим, или о выборе философии, 65/ Пер. Н. Баранова.

“Костры времени” в 3^n дней не прельщали Велимира Хлебникова. Война — это “ненужная ижица”. В “Сборнике законов” “зачеловека”, готового “построить весну чисел”, значится:

Свод законов, для которых не нужно правительств и судей и цепей, но достаточно звёзд наверху. ([1], стр. 180).

“Чечевица” поэзии

Мы долго искали такую, подобно чечевице, задачу, чтобы направленные ею к общей точке соединённые лучи труда художника и труда мыслителей встретились бы в общей работе и смогли бы зажечь и обратить в костёр даже холодное вещество льда.

Велимир Хлебников ([1], стр. 140).

Художники и мыслители пьют из одного общего источника под названием “наитие”.

Ибо

Поэт, когда садится на треножник Музы, уже не находится в здравом рассудке, но даёт изливаться своему наитию, словно источнику.

Платон, Законы, IV, 719 е/ пер. А.Н. Егунова.

И

Ни один математик не мыслит формулами.

Альберт Эйнштейн.

Провидение сказок походит на посох, на который опирается слепец человечества, —

Велимир Хлебников ([1], стр. 203).

На что Василий Бабков замечает: “Впрочем, посох по руке лишь богатырю” (Там же).

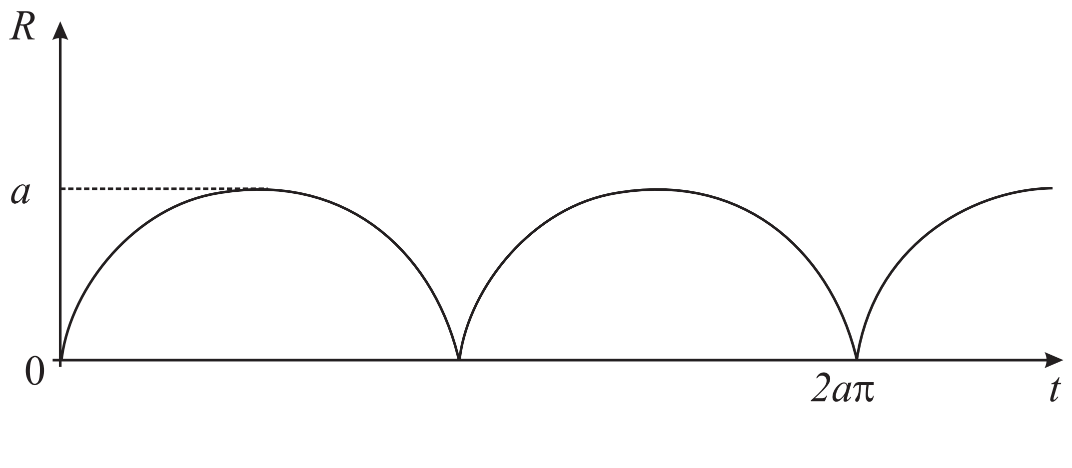
Удивительно провидение Велимиром Хлебниковым одной космологической модели, о которой упоминает Василий Бабков. Я его литературоведческие находки в книге [1] дополню одной существенной математической деталью.

А. Н. Андриевский вспоминает [4], что в 1919–1920 годах Хлебников высказал ему идею о пульсирующей Вселенной: “Такт пульсации нашей галактики так велик, что нет возможности его измерить. Никто не может обнаружить начало этого такта и быть свидетелем его конца.”

В 1923 году ленинградский физик А. А. Фридман (1888–1925), основываясь на общей теории относительности Эйнштейна и исследуя уравнения пространственно-временной динамики Вселенной, получает следующую связь между радиусом заключающего Вселенную шара R и временем t:

$$\begin{cases} R = R_0(1-\cos\eta); \\ t = \frac{a}{2}(\eta - \sin\eta). \end{cases} \tag{2}$$

Переменная η здесь — параметр (физики называют его *дуговым временем*), R_0 — текущее значение радиуса шара, коэффициент a был вычислен в 1929 году Э. Хабблом, $a = 13{\cdot}10^9$ лет. Эти соотношения — не что иное, как параметрическая запись *циклоиды*.



На рисунке показан фрагмент её графика. Примечательно, что число π играет не последнюю роль то во вспыхивающей, то в угасающей жизни Вселенной: согласно модели Фридмана, Вселенная пульсирует, последовательно расширяясь и сжимаясь в моменты времени $a\pi$, $2a\pi$, $3a\pi$, ...

К графику этой циклоиды как нельзя лучше подходят провидческие слова Поэта:

Я всматриваюсь в вас, о числа,...
Вы держите единство между змееобразным движеньем
Хребта Вселенной и пляской коромысла.

Велимир Хлебников, [1], стр. 258.

* * *

Числа, приласканные поэтом, одетые им "одеждою земных чувств и памяти", стали высокой поэзией. Вышина своего избранника позвала к себе. Из сверхповести "Зангези", написанной в 1920–1922 годах:

Мне, бабочке, залетевшей
В комнату человеческой жизни,
Оставить почерк моей пыли
По суровым окнам, подписью узника,
На строгих стёклах рока.
Так скучны и серы
Обои из человеческой жизни!
Окон прозрачное нет!
Я уж стёр своё синее зарево, точек узоры
Мою голубую бурю крыла — первую свежесть
Пыльца снята, крылья увяли и стали прозрачны и жёстки,
Бьюсь я устало в окно человека
Вечные числа стучатся оттуда
Призывом на родину, число зовут к числам вернуться.

Велимир Хлебников, Зангези. [1], стр. 215–216.

Литература

[1] Велимир Хлебников: "Доски Судьбы". Василий Бабков: "Контексты Досок Судьбы". М.: Рубеж столетий, 2000, 288 с. Издание утверждено к печати Институтом истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН.

[2] Bergman G. A. A number system with an irrational base, Mathematics Magazine, No. 31, 1957. — pp. 98–119.

[3] С. Житомирский. Античная астрономия и орфизм. — М.: Янус–К, 2001, 164 С. Стр. 77 – 85.

[4] А. Н. Андриевский. Мои ночные беседы с Хлебниковым / Дружба народов, 1985, 12, с. 237 – 238.

Краткая биография Александра Владимировича Жукова

Александр Владимирович Жуков родился 16 марта 1955 г. в г.Изяславе Хмельницкой области. После окончания средней школы в 1972 г. поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. По окончании университета работал в Красноярском вычислительном центре СО АН СССР. После завершения адъюнктуры 45-го института МО РФ и защиты диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук работал в том же институте, откуда в 1998 г. ушел в отставку в звании подполковника по состоянию здоровья.

А. В. Жуков — автор нескольких научно-популярных книг по математике и программированию, в числе которых энциклопедия для детей “Математика” (в соавторстве, 1998), “Изучаем Delphi” (2000), “Элегантная математика: Задачи и решения” (в соавторстве, URSS, 2005), “Вездесущее число π” URSS, изд.5-е, 2012), а также многих научно-популярных статей в журналах “Квант”, “Домашний лицей”, “Математика для школьников”, “Математическое образование”. С 1998 по 2008 г. — ведущий рубрики для младших школьников в физико-математическом журнале для школьников и студентов “Квант”.

Преподаватель московского детского клуба “Компьютер”.

В последнее время был редактором журнала “Математика в школе”, ведущим конкурса “Эврика!” в журнале “Математика для школьников”.

(Сведения предоставил С. В. Дворянинов.)

<u>**Информация**</u>

Замечания к статье А. Г. Мякишева в номере 1(57), 2011г.

1. На стр. 36, в третьей и четвертой строке от рис. 20 написано:
X(389) = crosspoint of X(4) and X(54)
X(389) = crosssum of X(I) and X(J) for these (I,J): (3,5), (6,418)
Термины "crosspoint" и "crosssum" остались не разъясненными. Они не имеют вполне эквивалентного русского перевода. Это некоторые точки, барицентрические координаты которых определяются по барицентрическим координатам исходных точек. Объяснение имеется на сайте
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/glossary.html

2. На стр. 38 в начале Приложения имеется ряд опечаток, часть которых происходит из опечаток в ETC. Правильно Приложение должно выглядеть так:

Приложение. Центр коники Мякишева

Приводим описание центра коники Мякишева в ETC.

X(3588) = CENTER OF THE MYAKISHEV CONIC (центр коники Мякишева).
Trilinears (трилинейные координаты) $f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$, where (где)

$$f(a,b,c) = a^2(b+c)[a^4(b+c) - b^4(c+a) - c^4(a+b) + b^2c^2(b+c) + c^2a^2(a-c) + a^2b^2(a-b) - 2ab^2c^2]$$

Barycentrics (барицентрические координаты) $af(a,b,c) : bf(b,c,a) : cf(c,a,b)$
In 2008, Alexei Myakishev gave the following construction of a conic. On rays AB and BA, let C_a and C_b be points on line AB ordered as C_a, B, A, and C_b and satisfying $|BC_a| = |CB|$, $|AC_b| = |CA|$. Define points A_b, B_a, B_c, A_c cyclically. The six points C_a, B_a, A_b, C_b, B_c, A_c lie on a conic. Myakishev's proof is by Carnot's theorem, since

$$[c/(c+a)][(a+b)/b][a/(a+b)][(b+c)/c][b/(b+c)][(c+a)/a] = 1.$$

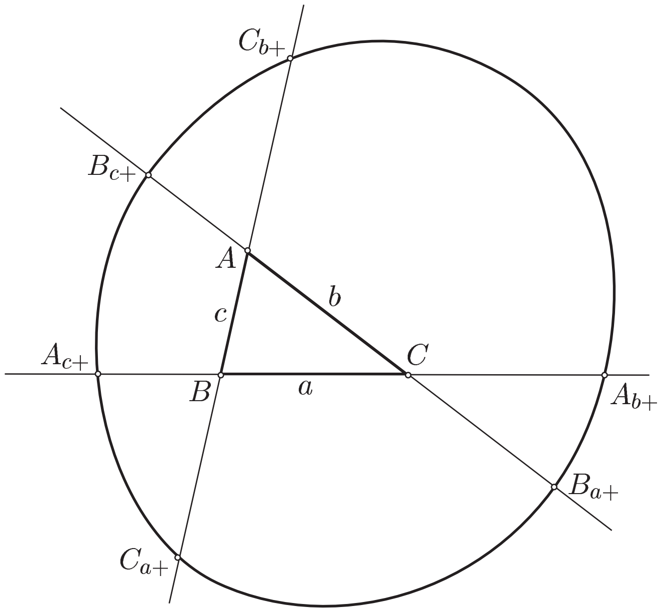
В 2008г. Алексей Мякишев предложил следующую конструкцию коники. Пусть на лучах AB и BA C_a и C_b — точки, упорядоченные на прямой AB в порядке C_a, B, A и C_b, удовлетворяющие условию $|BC_a| = |CB|$, $|AC_b| = |CA|$. Определим точки A_b, B_a, B_c, A_c циклически. Шесть точек C_a, B_a, A_b, C_b, B_c, A_c лежат на одной конике. Доказательство Мякишева основано на теореме Карно, поскольку

$$[c/(c+a)][(a+b)/b][a/(a+b)][(b+c)/c][b/(b+c)][(c+a)/a] = 1.$$

(Конец исправленной части Приложения.)

Эти точки также описаны в статье А. Г. Мякишева "Конфигурация равенства". Определения точек даны в первой части статьи ("Математическое образование", №1(45), 2008г., стр. 10), с названием "плюс-точки" и обозначениями Ca_+, Cb_+ и т.п.

Коника Мякишева описана во второй части статьи ("Математическое образование", №2(46), 2008г., стр. 29). Воспроизводим соответствующий рисунок из этой статьи.


C_{b+}
B_{c+}
A
b
c
A_{c+}
C
B
a
A_{b+}
B_{a+}
C_{a+}

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2011 год (включая стоимость пересылки) – 60 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала "Математическое образование", номер журнала за 2011 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:
р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк "Развитие-Столица", г. Москва,
к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 50 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Contents

ISSN 1992-6138

9 771992 613776 >